PHAN HUY PHÚ - NGUYỄN DOÃN TUẤN

BÀI TẬP
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA
Tổng biên tập: NGUYỄN THIỆN GIÁP

Biên tập: HUY CHỨ
DOÃN TUẤN
NGỌC QUYÊN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
Mã số: 01.249.ĐK.2002
In 1.500 cuốn, tại Xưởng in NXB Giao thông vận tải
Số xuất bản: 49/ 171/CXB. Số trích ngang 39 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2002.

LỜI NÓI ĐẦU

Môn Đại số tuyến tính được đưa vào giảng dạy ở hầu hết các trường đại học và cao đẳng như là một môn học cơ sở cần thiết để tiếp thu những môn học khác. Nhằm cung cấp thêm một tài liệu tham khảo phục vụ cho sinh viên ngành Toán và các ngành Kĩ thuật, chúng tôi biên soạn cuốn "**Bài tập Đại số tuyến tính**". Cuốn sách được chia làm ba chương bao gồm những vấn đề cơ bản của Đại số tuyến tính: Định thức và ma trận - Không gian tuyến tính, ánh xạ tuyến tính, hệ phương trình tuyến tính - Dạng toàn phương.

Trong mỗi chương chúng tôi trình bày phần tóm tắt lý thuyết, các ví dụ, các bài tập tự giải và cuối mỗi chương có phần hướng dẫn (HD) hoặc đáp số (ĐS). Các ví dụ và bài tập được chọn lọc ở mức độ từ trung bình đến khó, có những bài tập mang tính lý thuyết và những bài tập rèn luyện kĩ năng nhằm giúp sinh viên hiểu sâu thêm môn học.

Chúng tôi xin cảm ơn Ban biên tập nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội đã tạo điều kiện để cuốn sách sớm được ra mắt bạn đọc.

Mặc dù chúng tôi đã sử dụng tài liệu này nhiều năm cho sinh viên Toán Đại học Sư phạm Hà Nội và đã có nhiều cố gắng khi biên soạn, nhưng chắc chắn còn có khiếm khuyết. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của độc giả.

Hà Nội, tháng 3 năm 2001

Nhóm biên soạn

MỤC LỤC

Chương 1

ĐỊNH THỨC - MA TRẬN

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

§1. PHÉP THẾ

Một song ánh σ từ tập {1, 2, ..., n} lên chính nó được gọi là một phép thế bậc n, kí hiệu là

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Ở đó $\sigma_1 = \sigma(1)$, $\sigma_2 = \sigma(2)$, ... , $\sigma_n = \sigma(n)$.

Tập các phép thế bậc n với phép nhân ánh xạ lập thành một nhóm, gọi là nhóm đối xứng bậc n, kí hiệu S_n. Số các phần tử của nhóm S_n bằng n! = 1, 2... n.

Khi n > 1, cặp số {i, j} (không thứ tự) được gọi là một nghịch thế của σ nếu số $(i - j)(\sigma_i - \sigma_j)$ âm. Phép thế σ được gọi là chẵn nếu số nghịch thế của σ chẵn, σ được gọi là phép thế lẻ nếu số nghịch thế của σ lẻ.

Kí hiệu $\text{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 \text{ nếu s là phép thế chẵn} \\ -1 \text{ nếu } \sigma \text{ là phép thế lẻ} \end{cases}$

và sgnσ gọi là dấu của phép thế σ. Nếu σ và τ là hai phép thế cùng bậc, thì $\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) . \text{sgn}(\tau)$.

Phép thế σ được gọi là một vòng xích độ dài k nếu có k số i_1, i_2, ... , i_k đôi một khác nhau để $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, ... , $\sigma(i_k) = i_1$

và $\sigma(i) = i$ với mọi $i \neq i_1, \dots, i_k$. Vòng xích đó được kí hiệu là $(i_1, i_2, \dots i_k)$. Mọi phép thế đều phân tích được thành tích những vòng xích độc lập.

Một vòng xích độ dài 2 được gọi là một chuyển trí. Vòng xích $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ phân tích được thành tích $(i_1, i_k)(i_1, i_{k-1})\dots(i_1, i_2)$.

§ 2. ĐỊNH THỨC

1. Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường (trong cuốn sách này ta chủ yếu xét $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$). Ma trận kiểu (m, n) với các phần tử trên trường $\mathbb{K}$ là một bảng chữ nhật gồm m hàng, n cột các phần tử $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Tập các ma trận kiểu (m, n) được kí hiệu $M(m, n, \mathbb{R})$. Ma trận vuông cấp n là ma trận có n dòng, n cột. Tập các ma trận vuông cấp n với các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$ kí hiệu là $Mat(n, \mathbb{K})$.

2. Cho ma trận A vuông cấp n, $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Định thức của ma trận A, kí hiệu det A là một phần tử của $\mathbb{K}$ được xác định như sau:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{i\sigma(1)} \dots a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} .$$

3. Tính chất của định thức

a) Nếu đổi chỗ hai dòng (hoặc hai cột) nào đó của ma trận A, thì định thức của nó đổi dấu.

b) Nếu thêm vào một dòng (hoặc một cột) của ma trận A một tổ hợp tuyến tính của những dòng (hoặc những cột) khác, thì định thức không thay đổi.

c) Nếu một dòng (hay một cột) phân tích thành tổng, thì định thức được phân tích thành tổng hai định thức, cụ thể:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+a'_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots a_{1i} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & \dots a_{2i} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots a_{ni} & \dots a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots a'_{1i} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & \dots a'_{2i} & \dots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots a'_{ni} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

d) Cho $A = (a_{ij}) \in Mat(n, K)$, thì $A^t = (b_{ij})$ ở đó $b_{ij} = a_{ji}$ được gọi là ma trận chuyển vị của A.

Ta có $\det A = \det A^t$.

4. Cách tính định thức

a) Cho ma trận $A \in Mat(n, K)$. Kí hiệu M_{ij} là định thức của ma trận cấp (n-1) nhận được bằng cách gạch bỏ dòng thứ i, cột thứ j của ma trận A và $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ được gọi là phần phụ đại số của phần tử a_{ij} của ma trận A. Ta có các công thức:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}A_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq k \\ \det A & \text{nếu } i = k \end{cases}$$

$$\sum_{l=1}^{n} a_{li}A_{lk} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq k \\ \det A & \text{nếu } i = k \end{cases}$$

Như vậy $\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}A_{kl}$ $(k = 1, 2, \dots n)$

hoặc $\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}A_{lk}$

Công thức trên được gọi là công thức khai triển định thức theo dòng hay theo cột.

b) Định lý Laplace

Cho ma trận $A = (a_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{K})$. Với mỗi bộ

$$(i_1, i_2..., i_k), \quad 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n,$$

và $(j_1, j_2..., j_k)$, $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_k \le n$, $1 \le k \le n$, đặt $\Delta_{j_1 ... j_k}^{i_1 ... i_k}$ là định thức của ma trận vuông cấp k nằm ở các dòng i_1, ... i_k và các cột $j_1 ... j_k$ của ma trận A; $M_{j_1 ... j_k}^{i_1 ... i_k}$ là định thức của ma trận vuông cấp (n - k) có được bằng cách gạch các dòng thứ $i_1 ..., i_k$ và các cột thứ $j_1, ..., j_k$ của ma trận A. Ta có kết quả:

$$\det A = \sum (-1)^{i_1 ... + i_k + j_1 + ... j_k} \quad \Delta_{j_1 ... j_k}^{i_1 ... i_k} . M_{j_1 ... j_k}^{i_1 ... i_k},$$

ở đó $j_1 ... j_k$ là k cột cố định. Tổng được lấy theo tất cả các bộ $(i_1 ..., i_k)$ sao cho $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$. Công thức trên được gọi là công thức khai triển định thức theo k cột $j_1, ... j_k$. Tương tự, ta có công thức khai triển theo k dòng. Khi k = 1, ta được công thức đã nói trong mục a.

§ 3. MA TRẬN

1. Ma trận kiểu (m, n) với các phần tử trên trường $\mathbb{K}$ đã được giới thiệu trong §2. Tập các ma trận kiểu (m, n) với các phần tử trên trường $\mathbb{K}$ được kí hiệu là $Mat(m, n, \mathbb{K})$ $A \in Mat(m, n\ \mathbb{K})$ được viết $A = (a_{ij})$ $i = 1, m$; $j = 1, 2... n$ hay rõ ràng hơn:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Các phép toán trên Mat(m, n, $\mathbb{K}$)

Cho $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ thuộc Mat(m, n, $\mathbb{K}$)

Ta có:

a) Ma trận $C = (c_{ij})$ ở đó $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
được gọi là tổng của hai ma trận A và B và kí hiệu là A +B.

Ma trận $D = (d_{ij})$ ở đó $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$
được gọi là hiệu của ma trận A và B và kí hiệu là A - B.

b) Với $k \in \mathbb{R}$, ma trận kA có các phần tử là $(k a_{ij})$ được gọi là tích của ma trận A với phần tử k của trường $\mathbb{K}$.

c) Nếu $A = (a_{ij}) \in$ Mat(m, n, $\mathbb{K}$) và

$B = (b_{jk}) \in$ Mat(n, p, K) thì

ma trận A . B $\in$ Mat(m, p, $\mathbb{K}$) mà các phần tử được xác định bởi $AB = (c_{ik})$, ở đó

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

được gọi là tích của hai ma trận B và A.

Với A, B $\in$ Mat(n, $\mathbb{K}$), ta có det(AB) = detA. detB.

d) Tập Mat(n, $\mathbb{K}$) các ma trận vuông cấp n với phép toán cộng lập thành một nhóm giao hoán, còn với phép toán cộng ma trận và phép nhân ma trận lập thành một vành không giao hoán, có đơn vị.

3. Hạng của ma trận; Ma trận nghịch đảo

Giả sử A ∈ Mat(m, n, $\mathbb{K}$), ta định nghĩa hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không rút ra từ ma trận A. Khi A ∈ Mat(n, $\mathbb{K}$) và hạng A = n (ta cũng dùng kí hiệu hạng A là rang A) thì ma trận A gọi là không suy biến, khi đó detA ≠ 0 và tồn tại duy nhất ma trận B thuộc M(n, $\mathbb{K}$) để A.B = B.A = I_n; ở đó I_n là ma trận đơn vị. Ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A và kí hiệu là A^{-1}.

Giả sử $\widetilde{A} = (A_{ij})$ là ma trận phụ hợp của ma trận A = (a_{ij}), A_{ij} là phần phụ đại số của phần tử a_{ij}; $\widetilde{A}^t$ là ma trận chuyển vị của $\widetilde{A}$. Khi đó:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \widetilde{A}^t.$$

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1.1. Xác định dấu của các phép thế sau:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots & 3n \\ 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & \dots & 3n-1 & 3 & \dots & 3n \end{pmatrix}$.

Lời giải

a) Phân tích σ thành tích các chuyển trí:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 5) = (1, 5)\,(1, 3)\,(1, 2)$$

(chú ý là phép nhân các chuyển trí được thực hiện từ phải sang trái như hợp thành của các ánh xạ).

Vậy $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^3 = -1$

Có thể làm cách khác: Các nghịch thế của σ là (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4).

Vậy σ có 5 nghịch thế nên $\operatorname{sgn}\sigma = -1$.

b) Ta hãy tính số nghịch thế của hoán vị (1, 4, 7... 3n-2, 2, 5, 8, ..., 3n-1, 3, 6, ... 3n).

1 không tham gia vào nghịch thế nào.

4 tham gia vào 2 nghịch thế với các số đứng sau nó.

7 tham gia vào 4 nghịch thế.

. . . .

3n - 2 tham gia vào 2(n - 1) nghịch thế với các số đứng sau nó.

2 không tham gia vào nghịch thế nào với các số đứng sau nó.

5 tham gia vào 1 nghịch thế với các số đứng sau nó.

8 tham gia vào 2 nghịch thế với các số đứng sau nó.

. . . .

3n - 1 tham gia vào (n - 1) nghịch thế với các số đứng sau nó.

Các số 3, 6, 9..., 3n không tham gia vào nghịch thế nào với các số đứng sau nó.

Vậy có tất cả 2 + 4 + ... + 2(n-1) + 1 + 2... + (n-1) = $\frac{3(n-1)n}{2}$

nghịch thế trong hoán vị đã nêu và do đó sgn $\delta = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$.

Khi n = 4k hoặc n = 4k + 1 thì sgn δ = 1

còn nếu n = 4k + 2 hoặc n = 4k + 3 thì sgn δ = -1.

Ví dụ 1.2

Cho phép thế $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \end{pmatrix}$ có dấu là $(-1)^k$

Hãy xác định dấu của:

a) f^{-1}

b) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f_n & f_{n-1} & \dots & f_1 \end{pmatrix}$

Lời giải:

a) Vì sgn f . sgn f^{-1} = sgn (f. f^{-1})

= sgn(Id) = 1 nên

sgn (f^{-1}) = sgn (f) = $(-1)^k$

b) Xét phép thế $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

thì g = f. σ

Do vậy sgn g = sgnf . sgn σ.

Nhưng sgn $\sigma = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ nên sgn $g = (-1)^{k+C_n^2}$.

Ví dụ 1.3

Chứng minh rằng việc nhân một phép thế với chuyển trí (i, j) về bên trái tương đương với việc đổi chỗ các số i, j ở dòng dưới của phép thế. Cũng như vậy, nhân một phép thế với chuyển trí (i, j) về bên phải tương đương với đổi chỗ i, j ở dòng trên của phép thế.

Lời giải

Giả sử σ là phép thế cho trước, (i, j) là phép chuyển trí. Xét trường hợp nhân bên trái tức là $f = (i, j). \sigma$.

Giả sử $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \alpha & \dots & \beta & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & i & \dots & j & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$

Theo định nghĩa $(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 2 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$

Vậy $f = (i, j) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \alpha & \dots & \beta & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & j & \dots & i & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$

Trường hợp nhân bên phải được xét tương tự.

Ví dụ 1.4. Cho f và g là hai phép thế của n số tự nhiên đầu tiên.

a) Chứng minh rằng có thể đưa f về g bằng không quá (n-1) phép chuyển trí (nghĩa là tồn tại k phép chuyển trí $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, $k \leq n - 1$ để $g = \sigma_k . \sigma_{k-1} \dots \sigma_1 . f$).

b) Chứng minh rằng không thể giảm bớt số chuyển trí nói trong câu a) tức là có thể chọn f và g sao cho không thể đưa f về g bằng ít hơn n - 1 phép chuyển trí.

Lời giải

a) Xét phép thế $g \circ f^{-1}$, phân tích $g \circ f^{-1}$ thành tích các vòng xích độc lập $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_p$.

$$g \circ f^{-1} = \tau_p.\tau_{p-1} \ldots \tau_2 . \tau_1$$

Nếu kí hiệu m_i là độ dài của vòng xích τ_i thì

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n.$$

Nhắc lại rằng một vòng xích $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ là một phép thế σ các số tự nhiên từ 1 đến n sao cho $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ và $\sigma(a_m) = a_1$, còn $\sigma(l) = l$ nếu $l \neq a_i$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. Vòng xích $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ gọi là có độ dài m.

Ta đã biết mỗi vòng xích độ dài m đều phân tích được thành m - 1 chuyển trí. Vì vậy $g \circ f^{-1}$ phân tích được thành tích của $\sum_{i=1}^{p}(m_i - 1) = n - p = k$ phép chuyển trí.

Nhưng $p \geq 1 \Rightarrow n - p \leq n - 1$.

Như vậy $g \circ f^{-1} = \sigma_k \ldots \sigma_1$ (σ_i - chuyển trí)

Từ đó $g = \sigma_k \circ \sigma_{k-1} \circ \ldots \circ \sigma_1 \circ f$, $\quad k \leq n - 1$

và các σ_i là các phép chuyển trí.

b) Cho $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ là phép thế đồng nhất

còn $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n \\ n & 1 & 2 \ldots & n-1 \end{pmatrix}$. Ta sẽ chứng tỏ rằng không đưa f về g được bằng ít hơn n - 1 phép chuyển trí.

Với một phép thế $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix}$, ta nói rằng i là phần tử chính quy nếu $h_i \geq i$. Để ý rằng nếu nhân vào bên trái của h một chuyển trí thì số phần tử chính quy tăng cùng lắm là một đơn vị. Thật vậy, nếu ngược lại, chẳng hạn i, j là hai phần tử không chính quy của h mà nếu đổi chỗ h_i với h_j ta lại được hai phần tử chính quy (của phép thế mới) thế thì: $h_i < i$, $h_j < j$ nhưng $hj \geq i$, $h_i \geq j$ vô lý.

Do f chỉ có một phần tử chính quy, và g có n phần tử chính quy, vì vậy không thể đưa f về g bằng ít hơn n - 1 phép chuyển trí.

Ví du 1.5

Chứng minh rằng với mỗi số k ($0 \leq k \leq C_n^2$) tồn tại một phép thế $\sigma \in S_n$ có đúng k nghịch thế.

Lời giải

Cách 1: Ta hãy chứng minh một kết quả mạnh hơn:

Nếu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ là một hoán vị của 1, 2, ... n và α có k nghịch thế , $0 \leq k < C_n^2$, thì có thể đổi chỗ hai phần tử α_i, α_j nào đó để thu được hoán vị β có k + 1 nghịch thế. Thật vậy, trước hết ta nhận thấy rằng nếu $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$ thì α có C_n^2 nghịch thế. Vì vậy, do số nghịch thế của α là $k < C_n^2$, nên tồn tại i_0 để $\alpha_{i_0} < \alpha_{i_0+1}$;

Xét hoán vị $\beta = (\beta_1, \dots \beta_n)$ trong đó $\beta_i = \alpha_i$ nếu $i \neq i_0$, $i_0 + 1$, còn $\beta_{i_0} = \alpha_{i_0+1}$, $\beta_{i_0+1} = \alpha_{i_0}$ thì rõ ràng β có nhiều hơn α một nghịch thế. Nghĩa là số nghịch thế của β là k + 1.

Nhân cột thứ nhất của ma trận A với -k rồi cộng vào cột thứ k, ta được:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & \dots & -(n-1) \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -(n-2) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -(n-3) \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Khai triển theo dòng thứ n, ta có:

$$\det A = (-1)^{n+1} . \begin{vmatrix} -1 & -2 & \dots & -(n-1) \\ & -1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} . (-1)^{n-1} = 1.$$

Cách 2.

Ta thấy A = B. C ở đó

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 1 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ và } C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 1 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

mà detB =1, detC = 1 nên detA = detB. detC = 1.

Ví dụ 1.9. Hãy tính

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & & \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Lời giải:

Khai triển định thức theo cột cuối, ta có

$D_n = 2\cos\alpha \,.\, D_{n-1} - D_{n-2}$

Dễ thấy $D_1 = \cos\alpha$.

$$D_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{pmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha.$$

Giả sử $D_i = \cos i\alpha$ với mọi $i = 1, \dots k$.

Ta có

$$D_{k+1} = 2\cos\alpha \,.\, D_k - D_{k-1} =$$

$$= 2.\cos\alpha \,.\, \cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha.$$

$$= (\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha) - \cos(k-1)\alpha = \cos(k+1)\alpha.$$

Như vậy $D_n = \cos n\alpha$

Ví dụ 1.10

Hãy tính

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} e^{\varphi}+e^{-\varphi} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & e^{\varphi}+e^{-\varphi} & 1 & & \\ & 1 & & & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & 1 & e^{\varphi}+e^{-\varphi} \end{vmatrix}, \quad \varphi \neq 0$$

ở đó các phần tử trên đường chéo chính bằng nhau và bằng $e^{\varphi}+e^{-\varphi}$; các phần tử trên hai đường xiên gần nhất với đường chéo chính bằng 1, còn các phần tử khác bằng 0.

Lời giải:

Khai triển theo cột thứ nhất, ta có:

$$\Delta_n = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Nhận xét rằng $\Delta_1 = e^{\varphi} + e^{-\varphi} = \dfrac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$,

$$\Delta_2 = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})^2 - 1 = e^{2\varphi} + 1 + e^{-2\varphi} = \frac{e^{3\varphi} - e^{-3\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}.$$

Giả sử $\Delta_k = \dfrac{e^{(k+1)\varphi} - e^{-(k+1)\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$, k = 1, 2, ... , n - 1.

Ta có $\Delta_n = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

$$= (e^{\varphi} + e^{-\varphi})\frac{e^{n\varphi} - e^{-n\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} - \frac{e^{(n-1)\varphi} - e^{-(n-1)\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} = \frac{e^{(n+1)\varphi} - e^{-(n+1)\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$$

Như vậy $\Delta_n = \dfrac{e^{(n+1)\varphi} - e^{-(n+1)\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}$.

Ví dụ 1.11

Tính:

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Lời giải:

Lấy dòng đầu nhân với -1 rồi cộng vào tất cả các dòng còn lại, ta có ngay $D = b_1 .b_2 ...b_n$.

Ví dụ 1.12

Cho đa thức P(x) =x(x+1)...(x+n).

Hãy tính định thức:

$$d = \begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+n) \\ P'(x) & P'(x+1) & \dots & P'(x+n) \\ . & . & \dots & \dots \\ P^{(n-1)}(x) & P^{(n-1)}(x+1) & \dots & P^{(n-1)}(x+n) \\ P^{(n)}(x) & P^{(n)}(x+1) & \dots & P^{(n)}(x+n) \end{vmatrix}$$

Lời giải:

Ta bổ sung để được ma trận cấp (n+2):

$$D = \begin{bmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+n) & 0 \\ P'(x) & P'(x+1) & \dots & P'(x+n) & 0 \\ . & . & \dots & \dots & \dots \\ P^{(n)}(x) & P^{(n)}(x+1) & \dots & P^{(n)}(x+n) & 0 \\ P^{(n+1)}(x) & P^{(n+1)}(x+1) & \dots & P^{(n+1)}(x+n) & 1 \end{bmatrix}$$

Rõ ràng det D = d.

Nhân dòng thứ k của ma trận D với $\dfrac{(x+n)^{k-1}}{(k-1)!} \times (-1)^{k-1}$ rồi cộng vào dòng thứ nhất (với tất cả k=2, .. , n+2).

Khi đó, phần tử dòng đầu có dạng:

$$P(x+i) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P^{(k)}(x+i).(x+n)^k}{k!}(-1)^k = P(i-n).$$

Với $i = 0, 1, \ldots, n$; còn phần tử ở cột cuối bằng $\frac{(-1)^{n+1}(x+n)^{n+1}}{(n+1)!}$; nghĩa là dòng thứ nhất có dạng:

$$\left(0, 0, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}(x+n)^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

Do đó

$$d = \det D = \frac{(x+n)^{n+1}}{(n+1)!}\begin{vmatrix} P'(x) & P'(x+1) & \ldots & P'(x+n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P^{(n)}(x) & P^{(n)}(x+1) & \ldots & P^{(n)}(x+n) \\ P^{(n+1)}(x) & P^{(n+1)}(x+1) & \ldots & P^{(n+1)}(x+n) \end{vmatrix}.$$

Ta kí hiệu định thức ở vế phải bởi C và ma trận tương ứng bởi $\mathscr{C}$. Vì đa thức $P(x) = \prod_{i=0}^{n}(x+i)$ nên $P^{(n+1)}(x) \equiv (n+1)!$, vì vậy các số hạng ở dòng cuối đều bằng $(n+1)!$. Để đơn giản kí hiệu và cách viết ta đặt $x_k = x + k$, $k = 0, 1, .. n$. Ở dòng thứ hai từ dưới lên của ($\mathscr{C}$), ta có:

$$(P^{(n)}(x_0), P^{(n)}(x_1), \ldots, P^{(n)}(x_n)) = ((n+1)!x_0 + a_1, \ldots, (n+1)!x_n + a_1)$$

ở đó a_1 là hằng số nào đó. Khi nhân dòng cuối cùng với $-\frac{a_1}{(n+1)!}$ rồi cộng vào dòng trên nó, ta đưa ma trận ($\mathscr{C}$) về dạng

$$\begin{pmatrix} P'(x_0) & P'(x_1) & \ldots & P'(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P^{(n-1)}(x_0) & P^{(n-1)}(x_1) & \ldots & P^{(n-1)}(x_n) \\ (n+1)!x_0 & (n+1)!x_1 & \ldots & (n+1)!x_n \\ (n+1)! & (n+1)! & \ldots & (n+1)! \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Dòng thứ ba từ dưới lên của ma trận (*) có dạng

$$\left(\frac{(n+1)!}{2}x_0^2 + a_1x_0 + a_2, ..., \frac{(n+1)!}{2}x_n^2 + a_1x_n + a_2\right).$$

Cộng vào dòng này hai dòng cuối sau khi nhân với các s

$-\dfrac{a_2}{(n+1)!}$ và $-\dfrac{a_1}{(n+1)!}$ ta nhận được dòng

$$\left(\frac{(n+1)!}{2}x_0^2, \frac{(n+1)!}{2}x_1^2, ..., \frac{(n+1)!}{2}x_n^2\right).$$

Bằng cách biến đổi như vậy với các dòng còn lại, ta dẫn m trận ($\mathscr{W}$) về dạng sau mà không thay đổi định thức của nó.

$$c = \det \mathscr{W} = \det \begin{pmatrix} \frac{(n+1)!}{n!}x_0^n & ... & \frac{(n+1)!}{n!}x_n^n \\ \frac{(n+1)!}{(n-1)!}x_0^{n-1} & ... & \frac{(n+1)!}{(n-1)!}x_n^{n-1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{(n+1)!}{1!}x_0 & ... & \frac{(n+1)!}{1!}x_n \\ (n-1)! & ... & (n-1)! \end{pmatrix}$$

$$= (n+1)!\prod_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{k!}.\begin{vmatrix} x_0^n & ... & x_n^n \\ x_0^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \\ ... & ... & ... \\ x_0 & ... & x_n \\ 1 & ... & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.((n+1)!)^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n}k!}.D_n.$$

Ở đó D_n là định thức Vandermonde của các số $x_0, x_1, ..., x_n$.

Dễ thấy $D_n = \prod_{k>i\geq 0}(x_k - x_i) = \prod_{k>i}(k-i) = \prod_{i=0}^{n-1}(n-i)! = \prod_{k=1}^{n} k!$.

Vậy

$$d = \det D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[(n+1)!\right]^n.(x+n)^{n+1}.$$

Ví dụ 1.13

Giả sử $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$ ở đó $a_{ii} = 0$ với mọi $i = 1, 2..., n$; còn aij bằng 1 hoặc 2001 với $i \neq j$. Chứng tỏ rằng nếu n chẵn, thì $\det A \neq 0$.

Lời giải:

Nhận xét rằng nếu ta thêm vào một phần tử a_{ij} nào đó của ma trận vuông A một số chẵn, thì định thức của ma trận nhận được sẽ sai khác với định thức của ma trận A một số chẵn. Vì thế nếu ta bớt đi 2000 đơn vị ở những phần tử bằng 2001 của A, thì tính chẵn lẻ của định thức của A không thay đổi, nghĩa là:

$$\det A = \det B \pmod 2 \text{ ở đó } B = (b_{ij})$$

$$b_{ij} = 0 \text{ nếu } i = j \text{ và } b_{ij} = 1 \text{ nếu } i \neq j.$$

Ta có:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \end{vmatrix},$$

nhân dòng đầu với -1 rồi cộng vào các dòng còn lại ta được:

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & & -1 \end{vmatrix}$$

Cộng vào cột thứ nhất tất cả các cột còn lại ta có:

$$\det B = (-1)^{n-1} \,.\, (n-1).$$

Vậy khi n chẵn thì detB là số lẻ, do vậy $\det A \neq 0$.

Ví dụ 1.14

Tính định thức:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 & C_{n+2}^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} & C_{2n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Lời giải:

Vì $C_k^i + C_k^{i+1} = C_{k+1}^{i+1}$, nên hiệu của mỗi phần t đứng bên trái nó thì bằng phần tử đứng ngay trên nó. Để tín D, ta lấy cột thứ n trừ đi cột n-1, rồi lấy cột n-1 trừ đi cột 2,..., lấy cột thứ 2 trừ đi cột thứ nhất, ta có:

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2^1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_3^2 & C_3^1 & C_4^1 & \dots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & C_{n+1}^{n-2} & \dots & C_{2n-3}^{n-2} & C_{2n-2}^{n-2} \end{pmatrix}$$

lại làm như trên, ta có:

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_3^2 & C_3^1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_{2n-4}^{n-3} & C_{2n-3}^{n-3} \end{pmatrix}$$

sau n -1 bước như vậy, ta được:

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_2^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_3^2 & C_3^1 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots C_n^1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Vậy D = 1.

Ví dụ 1.15

Cho $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, Hãy tính A^n.

Lời giải:

Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos2\varphi & -\sin2\varphi \\ \sin2\varphi & \cos2\varphi \end{pmatrix}$

Giả sử: $A^k = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}$ với k = 1, ..., n-1.

Ta tính:

$$A^n = A^{n-1}.A = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi \\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi & -\cos(n-1)\varphi\sin\varphi - \sin(n-1)\varphi\cos\varphi \\ \sin(n-1)\varphi\cos\varphi + \cos(n-1)\varphi\sin\varphi & \cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$$

Vậy $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 1.16

Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, hãy tính A^{2000}

Lời giải:

Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

mà 2000 chia hết cho 4

Vậy $A^{2000} = (A^4)^{500} = I_2$ (I_2 là ma trận đơn vị cấp hai).

Ví dụ 1.17

Ma trận vuông $A \in Mat(n, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$ được gọi là ma trận phản đối xứng nếu $a_{ij} + a_{ji} = 0$ với mọi i, j = 1, 2,..., n.

Hãy chứng minh: Tích của hai ma trận phản đối xứng A và B là một ma trận phản đối xứng khi và chỉ khi AB = -BA.

Lời giải:

Giả sử $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ở đó $a_{ij} + a_{ji} = 0$, $b_{ij} + b_{ji} = 0$ với mọi i, j = 1, ..., n.

Đặt $C = A.B = (c_{ik})$; $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

$D = B.A = (d_{ik})$, $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk}$.

Ta có: $c_{ik} = \sum_{j} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j} b_{kj}a_{ji} = d_{ki}$.

Như vậy AB phản đối xứng $\Leftrightarrow c_{ik} = -c_{ki}$, $\forall$ i, k.

$\Leftrightarrow c_{ik} = -d_{ik}$ với mọi i, k $\Leftrightarrow$ AB = -BA.

Ví dụ 1.18

Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Hãy chứng minh det(A.B) = detA. detB.

Lời giải:

Giả sử $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ với i, j = 1, ..., n.

Ta lập ma trận:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Khai triển theo n dòng đầu (theo định lý Laplace), ta có

$$\det C = \det A.\ \det B. \tag{1}$$

Mặt khác, biến đổi ma trận C bởi phép biến đổi sơ cấp sau: Nhân cột thứ nhất với b_{1j}, cột thứ hai với b_{2j}, ..., cột thứ n với b_{nj} rồi cộng vào cột thứ n + j (j = 1, 2, ..., n), ta được ma trận D dạng sau mà định thức của D và của C bằng nhau:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

ở đó $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, nghĩa là (dij) = A. B.

Khai triển theo n cột cuối (theo định lý Laplace) ta có:

$$\det D = \det(dij) = \det(A.\ B) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) và do detC = detD nên ta có:

$$\det(A_0\ B) = \det A\ .\ \det B.$$

Ví dụ 1.19

Cho X là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng X giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp $\Leftrightarrow$ X có dạng λI_n, ở đó I_n là ma trận đơn vị cấp n.

Lời giải:

$\Leftarrow$: Nếu $X = \lambda I_n$, thì rõ ràng X giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp.

$\Rightarrow$: Ngược lại, giả sử $X = (X_{ij})$ giao hoán với mọi ma trận vuông cấp n.

Với $i_0 \neq j_0$, ta chứng minh $x_{i_0j_0} = 0$. Muốn vậy chọn $A = (a_{ij})$ trong đó $a_{j_0j_0} = 1$ còn các phần tử khác đều bằng không. Phần tử dòng i_0 cột j_0 của ma trận XA bằng $x_{i_0j_0}$, còn phần tử ở dòng i_0 cột j_0 của AX là 0. Từ điều kiện AX = XA suy ra $x_{i_0j_0} = 0$. Như vậy X có dạng:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Cho ma trận $A = (a_{ij})$ ở đó $a_{ij} = 1$ với mọi i, j. Khi đó phần tử ở dòng i cột j của ma trận XA là λ_i, còn phần tử ở dòng i cột j của ma trận AX là λ_j nên $\lambda_i = \lambda_j$.

Vì vậy:

$$X = \lambda I_n.$$

Ví dụ 1.20

Cho ma trận cấp n:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh $\det A = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b)$.

b) Trong trường hợp $\det A \neq 0$. Hãy tính ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A.

Lời giải:

a) Cộng các dòng vào dòng thứ nhất rồi rút

a + (n-1)b ở dòng đầu, ta được:

$$\det A = (a + (n-1)b) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Lấy dòng đầu của định thức trên nhân với -b rồi cộng vào các dòng sau, ta có:

$$\det A = (a + (n-1)b) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\det A = (a + (n-1)b) \,.\, (a-b)^{n-1}.$$

b) A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$ và $a + (n-1)b \neq 0$.

Gọi $B = (b_{ij})$ là ma trận nghịch đảo của $A = (a_{ij})$.

Ta biết rằng $b_{ij} = \dfrac{1}{\det A} \,.\, A_{ji}$, ở đó A_{ji} là phần phụ đại số của phần tử a_{ji} trong ma trận A.

Với mỗi i thì $A_{ii} = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix}$ là định thức cấp (n-1).

Theo phần a) thì $A_{ii} = (a-b)^{n-2} \,.\, (a + (n-2)b)$.

Vậy $b_{ii} = \dfrac{A_{ii}}{\det A} = \dfrac{a+(n-2)b}{(a+(n-1)b).(a-b)}$.

Với $i \neq j$ thì $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, ở đó M_{ij} là định thức cấp n-1, có được bằng cách xóa dòng thứ i và cột thứ j của ma trận A. Do A đối xứng nên $A_{ij} = A_{ji}$. Giả sử rằng $i < j$, khi đó cột thứ i và dòng thứ j-1 của M_{ij} gồm toàn những phần tử b. Nếu đổi chỗ dòng j - 1 lên trên dòng đầu (giữ nguyên các dòng khác), rồi lại đổi cột i lên cột thứ nhất (và vẫn giữ nguyên các cột khác), thì ta được:

$$M_{ij} = (-1)^{i+j-1} \begin{vmatrix} b & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} = (-1)^{i+j-1}.b.(a-b)^{n-2}.$$

Như vậy $b_{ij} = \dfrac{A_{ij}}{\det A} = \dfrac{-b}{(a+(n-1)b)(a-b)}$.

Do đó

$$A^{-1} = \frac{1}{(a+(n-1)b)(a-b)} \cdot \begin{pmatrix} a+(n-2)b & & -b \\ & \ddots & \\ -b & & a+(n-2)b \end{pmatrix}.$$

C - BÀI TẬP

1.1. Chứng tỏ rằng mỗi phép chuyển trí của S_n $(n \geq 2)$ là một phép thế lẻ.

1.2. Hãy phân tích các phép thế sau thành tích các phép chuyển trí

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.3. Tìm số tất cả các phép thế $\sigma \in S_n$ sao cho $\sigma(i) \neq i$ với mọi i = 1, 2, ...n. Chứng tỏ rằng khi n chẵn, số các phép thế dạng trên là một số lẻ.

1.4. Kí hiệu (n, k) là số các hoán vị của 1, 2..., n có đúng k nghịch thế. Chứng minh công thức truy hồi sau:

$$(n+1, k) = (n, k) + (n, k-1) + ... + (n, k-n).$$

với quy ước (n, j) = 0 nếu $j < 0$ hoặc $j > C_n^2$.

1.5. Ta gọi độ giảm của phép thế f là hiệu của số các phần tử không bất động (nghĩa là số các phần tử i mà $f(i) \neq i$) và số các vòng xích độ dài lớn hơn 1 trong phân tích của f thành tích các vòng xích độc lập.

a) Chứng minh f có cùng tính chất chẵn lẻ với độ giảm của nó.

b) Chứng minh rằng số tối thiểu các nhân tử trong phân tích của f thành tích các chuyển trí bằng độ giảm của f.

1.6. Đối với hai số x và n nguyên, $n \neq 0$, ta kí hiệu r(x, n) là số dư khi chia x cho n : $0 \le r(x, n) < n$. Chứng minh rằng nếu $n \ge 2$ và a là số nguyên, nguyên tố đối với n, thì tương ứng $k \mapsto r(ak, n)$ là một phần tử của S_{n-1}, $k \in \{1, ..., n-1\}$.

1.7. Chứng minh rằng mỗi phép thế cấp k > 1, đều phân tích được thành tích những chuyển trí dạng (1, i) với i = 1, 2,..., k.

1.8. Xác định dấu của các phép thế sau:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots & 3n \\ 3 & 6 & \dots & 3n & 2 & 5 & \dots & 3n-1 & 1 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

1.9. Chứng minh rằng:

a) Định thức cấp ba mà các phần tử bằng +1 hoặc -1 là một số chẵn.

b) Định thức ấy lớn nhất là 4.

c) Định thức cấp ba mà các phần tử là 1 hoặc 0 đạt giá trị lớn nhất bằng 2.

1.10. Tính định thức cấp 2n $D = \det(d_{ij})$,

ở đó
$$d_{ij} = \begin{cases} a & \text{với } i = j \\ b & \text{với } i + j = 2n+1 \\ 0 & i \neq j \text{ và } i+j \neq 2n+1 \end{cases}$$
$$1 \leq i, j \leq 2n.$$

1.11. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận cấp n, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng detA không thay đổi, nếu các phần tử a_{ij} mà $i + j$ lẻ được thay bởi số đối của nó.

1.12. Chứng tỏ các định thức sau đây bằng không:

a) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos2\alpha & \cos3\alpha \\ \cos\alpha & \cos2\alpha & \cos3\alpha & \cos4\alpha \\ \cos2\alpha & \cos3\alpha & \cos4\alpha & \cos5\alpha \\ \cos3\alpha & \cos4\alpha & \cos5\alpha & \cos6\alpha \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_2 - b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}$; $n > 2$.

1.13. Cho hai ma trận A, B sao cho:

$$A \, . \, B = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}, \quad B.\, A = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm x, y và A, B.

1.14. Hãy khai triển định thức và chứng minh:

a) $$\begin{vmatrix} 2 & c + \frac{1}{c} & b + \frac{1}{b} \\ c + \frac{1}{c} & 2 & a + \frac{1}{a} \\ b + \frac{1}{b} & a + \frac{1}{a} & 2 \end{vmatrix} = 2\left(1 - \frac{a}{bc}\right)\left(1 - \frac{b}{ac}\right)\left(1 - \frac{c}{ab}\right)(abc - 1)$$

b) $$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & (b+c)^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix} = 2(ab + bc + ca)^2.$$

1.15. Hãy tính các định thức cấp n sau:

a) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. b) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

1.16. Hãy tính định thức sau:

a) $$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \\ . & . & \ddots & & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

nghĩa là: Dn là định thức cấp n mà các phần tử trên đường chéo chính bằng $1 + x^2$, các phần tử thuộc hai đường chéo gần đường chéo chính bằng x, các phần tử còn lại bằng 0.

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \ddots & \\ . & . & . & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1.17. Cho đa thức $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$.

ở đó a_i là các số thực đôi một phân biệt. Hãy tính định thức sau:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{P(x)}{x-a_1} & \dfrac{P(x)}{x-a_2} & \dots & \dfrac{P(x)}{x-a_n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

1.18. Xét hai ma trận phức cấp ba:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

ở đó $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hãy chứng minh det $J \neq 0$. Hãy tính ma trận AJ, từ đó suy ra giá trị detA. Hãy nêu bài toán tương tự khi A và J là các ma trận cấp n.

1.19. a) Hãy tính định thức cấp n sau:

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha.\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha.\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha.\beta & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

b) Chứng tỏ rằng định thức sau không phụ thuộc vào y_1, y_2, ... y_{n-1}.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+y_1 & x_2+y_1 & \dots & (x_n+y_1) \\ (x_1+y_1)(x_1+y_2) & (x_2+y_1)(x_2+y_2) & \dots & (x_n+y_1)(x_n+y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{i=1}^{n-1}(x_1+y_i) & \prod_{i=1}^{n-1}(x_2+y_i) & \dots & \prod_{i=1}^{n-1}(x_n+y_i) \end{vmatrix}.$$

1.20. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hãy tính A^{100}.

1.21. Giả sử ma trận $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$ và rang $A = 1$. Chứng minh rằng các ma trận $B \in M(m, 1, \mathbb{K})$ và $C \in Mat(1, n, \mathbb{K})$ để $A = B.C$.

1.22. Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thỏa mãn phương trình:

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)\, I_2 = 0,$$

ở đó I_2 là ma trận đơn vị cấp hai.

1.23. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ với } \lambda \neq 0. \text{ Hãy tính } A^{-1}.$$

1.24. Cho ma trận vuông cấp 4.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos2\alpha & \sin2\alpha & 2\cos2\alpha & 2\sin2\alpha \\ \cos3\alpha & \sin3\alpha & 3\cos3\alpha & 3\sin3\alpha \\ \cos4\alpha & \sin4\alpha & 4\cos4\alpha & 4\sin4\alpha \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng A khả nghịch khi và chỉ khi $\alpha \neq k\pi$ $(k \in Z)$.

1.25. Cho ma trận $A = (a_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{R})$ mà các phần tử được cho bởi công thức:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-1} C_{j-1}^{i-1} & \text{với } 1 \leq i \leq j \leq n \\ (-1)^{i-1} & \text{với } i = j \\ 0 & \text{với } i > j \end{cases}$$

Ở đó $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$. Chứng minh rằng $A^2 = I_n$.

(I_n là ma trận đơn vị).

1.26. Giả sử $X = (x_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{R})$,

ở đó $x_{ij} = (-1)^{n-j}\begin{pmatrix} i-1 \\ n-j \end{pmatrix}$. Chứng minh $X^3 = I_n$.

Chú ý: với $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in N$, kí hiệu

$$\begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \ ; \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

1.27. Giả sử $y_i = y_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ với $(i = 1, 2, ..., n)$ là hàm của các biến độc lập $x_1, x_2, ..., x_n$. Ma trận $J = J(Y, X) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ được gọi là ma trận Jacobi của phép biến đổi, còn định thức của nó được gọi là Jacobien của phép biến đổi đó.

Bây giờ xét mối quan hệ giữa n^2 hàm y_{ij} và n^2 biến x_{ij} được cho bởi công thức:

$$Y = A.X.B, \text{ ở đó } Y = (y_{ij}),\ X = (x_{ij}),$$

A . $B \in Mat(n, \mathbb{R})$ là hai ma trận cho trước.

Chứng minh rằng $\det(J(Y, X)) = (\det A)^n . (\det B)^n$.

1.28. Cho $X = (x_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{R})$ là ma trận tam giác dưới; và $Y = X. X^t$.

Chứng minh rằng $\det(J(Y, X)) = 2^n.\prod_{i=1}^{n} x_{ii}^n$.

1.29. Cho $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên; A, S là hai ma trận vuông cấp n, các phần tử là những số nguyên (ta viết $A, S \in Mat(n, Z)$). Hơn nữa $\det A = 1$, $\det S \neq 0$.

Đặt $B = S^{-1} . A. S$; Chứng minh rằng có số m nguyên dương để $B^m \in Mat(n, \mathbb{Z})$.

1.30. Giả sử trong ma trận $A = (a_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{R})$ đã cho trước tất cả các phần tử a_{ij} $(i \neq j)$. Chứng minh rằng có thể điền vào đường chéo chính các số 0 hoặc 1 để ma trận A không suy biến.

1.31. Tìm tất cả các ma trận $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$ mà tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} cũng có các phần tử không âm.

1.32. Cho ma trận vuông A có các phần tử là số nguyên. Tìm điều kiện cần và đủ để ma trận nghịch đảo A^{-1} cũng có các phần tử là số nguyên.

D - HƯỚNG DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

1.1. Xét $\tau \in S_n$ $(n \geq 2)$ giả sử $i < j$ và $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k$ với mọi $k \neq i, j$. Khi đó các nghịch thế của τ là:

$$\{i, k\} \text{ với } i < k \leq j$$

$$\{l, j\} \text{ với } l = i + 1, ..., j - 1$$

Như vậy có tất cả là $(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - 1) - 1$ nghịch thế. Vì số nghịch thế lẻ nên τ là phép thế lẻ.

1.2. a) Phép thế đã cho phân tích thành hai vòng xích độc lập $(1\ \ 8\ \ 2)(4\ \ 6\ \ 5\ \ 7) = (1, 2) . (1, 8)(4, 7)(4, 5)(4, 6)$.

b) $(1, 6, 3)(2\ \ 5\ \ 4) = (1, 3)(1, 6)(2, 4)(2, 5)$.

1.3. ĐS. Số tất cả các phép thế $\sigma \in S_n$ mà $\sigma(i) \neq i$ với mọi $i = \overline{1,n}$ là $n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$.

1.4. Xét tập A gồm tất cả các hoán vị của 1, 2, ..., n, n+1 có đúng k nghịch thế. Kí hiệu A_i là bộ phận của A gồm các hoán vị $(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n, \alpha_{n+1})$ mà $\alpha_i = n+1$. Như vậy A_i (i =1, 2,..., n+1) là những tập con rời nhau của A và $A = A_1 \cup A_2 \cup U... \cup A_{n+1}$.

Xét $A_{n+1} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}) | \alpha_{n+1} = n+1\}$.

Như vậy số các nghịch thế của α bằng số các nghịch thế của $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{pmatrix}$, nghĩa là bằng k. Điều đó chứng tỏ số các phần tử của A_{n+1} bằng (n, k).

Xét tập Ai (i = 1, ..., n). Giả sử $\alpha \in A_i$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{n+1})$ Theo định nghĩa α_i = n+1. Như vậy (α_j, α_i) không là nghịch thế với j < i và (α_i, α_j) là nghịch thế với j > i. Do đó α_i tham gia vào n+1-i nghịch thế. Xét hoán vị $\alpha' = (\alpha_1, ... \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_{n+1})$ của S_n. Số nghịch thế của α' bằng số nghịch thế của α trừ đi n+1-i. Như vậy ta có một song ánh từ A_i lên tập các hoán vị của S_n có đúng k-n-1+i nghịch thế, do đó số phần tử của A_i là (n, k-n-1+i). Từ đó, số phần tử của A là:

$$(n + 1, k) = (n, k) + (n, k-1) + (n, k-2) + ... + (n, k-n).$$

1.5. a) Xét phân tích $f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ ... \sigma_m$ thành tích các vòng xích độc lập độ dài > 1. Giả sử độ dài σ_k là d_k; ta thấy f(i) ≠ i khi và chỉ khi i thuộc một trong các vòng xích đó. Vậy độ giảm của f là $d_1+d_2+...+d_m-m$. Mỗi vòng xích độ dài d_k phân tích được thành d_k-1 chuyển trí. Do vậy f phân tích được thành $d_1+...+d_m-m$ chuyển trí. Do đó khẳng định a) được chứng minh.

b) Gọi l à độ giảm của f. Theo a) f phân tích được thành l chuyển trí. Nếu có phân tích f thành h chuyển trí nào đó, ta phải chứng minh $h \geq l$. Ta có bổ đề sau: Nếu α, β tham gia vào một vòng xích của phép thế f, thì khi nhân f với chuyển trí (α, β) (về bên trái hay bên phải) vòng xích đã nói phân thành hai vòng xích độc lập. Còn nếu α, β tham gia vào hai vòng xích của phép thế f, thì khi nhân với chuyển trí (α, β), hai vòng xích sẽ nhập lại làm một (Bổ đề này dễ dàng chứng minh). Từ đó nếu g là phép thế và τ là một chuyển trí thì độ giảm của $g \circ \tau$ không vượt quá độ giảm của g cộng thêm 1. Vì thế nếu f phân tích được thành h chuyển trí thì độ giảm của f không vượt quá h.

1.6. H.D. Do a và n nguyên tố với nhau, nên a_k không chia hết cho n với mọi $k = 1, 2..., n-1$, do đó $r(ak, n)$ là những số phân biệt.

1.7. Vì mỗi phép thế phân tích được thành tích các phép chuyển trí, nên chỉ cần chứng minh bài toán cho phép chuyển trí $(i, j) \in S_k$ với $i, j \neq 1$. Ta có $(i, j) = (1, i) . (1, j) . (1, i)$.

1.8. Xem ví dụ 1.1

a) ĐS: $(-1)^{\frac{3n(n+1)}{2}}$.

b) ĐS: $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

1.10. Khai triển cột đầu, ta có: $D_{2n} = (a^2 - b^2)D_{2n-2}$.

Do $D_2 = A^2 - B^2$ nên $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$.

1.11. $A = (a_{ij})$, $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma . a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

Trong mỗi tích $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, tổng $\sum_{k=1}^{n}(k + \sigma_{(k)}) = n(n+1)$ là số chẵn; nên có một số chẵn các thừa số $a_{k\sigma(k)}$ mà tổng $k+\sigma(k)$ lẻ. Vì vậy khi thay a_{ij} bởi $-a_{ij}$ nếu $i + j$ lẻ, thì các tích $a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ không đổi, do đó detA không đổi.

1.12. a) Cộng dòng thứ nhất với dòng thứ ba, ta được dòn tỷ lệ với dòng thứ hai.

b) Nhân dòng thứ nhất với (-1), rồi cộng vào các dòng th hai và thứ ba, ta được hai dòng tỷ lệ.

1.13. Ma trận A, B ∈ Mat(2, $\mathbb{R}$). Ta có hai bất biến detAB detBA và tr(AB) = tr(BA). Vì vậy:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x.y = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases}.$$

a) $x = 20$ và $y = 10 \Rightarrow BA = \begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$.

Ta có $ABA = A\begin{pmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}A$.

Từ đó ta tính được $A = \begin{pmatrix} 5\lambda & -14\lambda \\ -11\lambda & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

và $B = A^{-1} . \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$

b) $x = 10$ và $y = 20 \Rightarrow BA = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$

$$ABA = A.\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}. A \Rightarrow A = \lambda\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 55 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.15. a) $D_n = 1$.

b) $\Delta_n = -\Delta_{n-1} + D_{n-1} = -\Delta_{n-1} + 1$.

Từ đó suy ra $\Delta_{2p} = 1$, $\Delta_{2p+1} = 0$

1.16. a) Khai triển D_n theo cột thứ nhất, ta có:

$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$, $D_1 = 1 + x^2$,

$D_2 = (1 + x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$.

Ta có: $D_n - D_{n-1} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2}) = x^4(D_{n-2} - D_{n-3})$

$$= \ldots = x^{2(n-2)}(D_2 - D_1) = x^{2n}$$

Từ đó $D_n = D_{n-1} + x^{2n}$

Do vậy $D_n = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$.

b) Áp dụng câu a) với x = 1. ĐS (n+1).

1.17. Khai triển $\Delta(x)$ theo dòng thứ nhất, ta có:

$$\Delta(x) = \frac{P(x)}{x-a_1}D(a_2, \ldots a_n) - \frac{P(x)}{x-a_2}D(a_1, \hat{a}_2, \ldots a_n) + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{P(x)}{x-a_n}D(a_1, \ldots, a_{n-1})$$; ở đó $D(a_2, \ldots, a_n)$

là định thức Vandermonde của các số $a_2, \ldots, a_n$; ...

Cho $x = a_1$, ta có $\Delta(a_1) = (a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_n) \prod_{j>i\geq 2}(a_j - a_i) \Rightarrow$

$\Delta(a_1) = (-1)^{n-1} \prod_{j>i\geq 1}(a_j - a_i)$.

Tương tự $\Delta(a_2) = \ldots = \Delta(a_n) = \Delta(a_1)$. Đa thức $\Delta(x)$ bậc nhỏ hơn hoặc bằng (n-1), có các giá trị bằng nhau tại n điểm phân biệt, vì vậy $\Delta(x)$ là hằng.

Từ đó: $\Delta(x) = (-1)^{n-1} \prod_{1\leq i\leq j\leq n}(a_j - a_i)$.

1.18. J là ma trận Vandermonde với các số 1, j, j^2 phâ biệt nên det J $\neq 0$.

Ta có:

$$A \,.\, J = \begin{pmatrix} a+b+c & a+bj+cj^2 & a+bj^2+cj \\ a+b+c & c+aj+bj^2 & c+aj^2+bj \\ a+b+c & b+cj+aj^2 & b+cj^2+aj \end{pmatrix}$$

$\det AJ = (a + b + c)\,(a + bj + cj^2)\,(a + bj^2 + cj)\det J.$

1.19. a) Khai triển theo cột thứ nhất, ta có:

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

Ta có: $D_1 = \alpha + \beta$, $D_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$, ...

Giả sử $D_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha^i \beta^{k-i}$ (k = 1, 2, ..., n-1).

Ta có: $D_n = (\alpha + \beta)\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \beta^{n-1-i} - \alpha\beta \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^i \beta^{n-2-i}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{i+1}\beta^{n-i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \beta^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-2} \alpha^{i+1}\beta^{n-i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta^{n-i} + \beta^n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i \beta^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i \beta^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \beta^{n-i}.$$

Như vậy $D_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \beta^{n-i}$.

b) Chứng minh qui nạp theo n.

$n = 2 \Rightarrow D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_1 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ không phụ thuộc y_1.

$n = 3 \Rightarrow D_3 = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$.

Giả sử $D_k = \prod_{1 \le i < j \le k} (x_j - x_i)$ với mọi k = 2, ..., n-1.

Ta chứng minh công thức trên đúng với D_n.

Khai triển D_n theo dòng thứ nhất, rồi rút các thừa số chung ở các cột và sử dụng giả thiết qui nạp, ta có:

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \prod_{l \neq k} (x_l + y_1) \prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i, j \neq k}} (x_j - x_i) \qquad (1);$$

Nếu có $i \neq j$ mà $x_i = x_j$, thì $D_n = 0$; và công thức quy nạp vẫn đúng.

Nếu $x_i \neq x_j$ với mọi $i \neq j$; thì từ công thức (1), ta có:

$$D_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \prod_{l \neq k} (x_l + y_1)}{\prod_{j > k} (x_j - x_k) \prod_{j < k} (x_k - x_j)}$$

$$\text{Xét } P(y_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \prod_{l \neq k} (x_l + y_1)}{\prod_{j > k} (x_j - x_k) \prod_{j < k} (x_k - x_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{l \neq k} (x_l + y_1)}{\prod_{j \neq k} (x_j - x_k)}$$

$P(y_1)$ là đa thức bậc $\le n - 1$ đối với y_1. Với $y_1 = -x_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Ta có $P(-x_i) = 1$, do đó $P(y_1) \equiv 1$. Từ đó công thức quy nạp được chứng minh.

1.20. Đặt $A = B + I_3$, I_3 là ma trận đơn vị,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ từ đó } \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \ B^3 = 0$$

Dùng khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có:

$$A^{100} = (B + I_3)^{100} = I_3 + 100.B + \frac{100 \times 99}{2} \cdot B^2$$

Suy ra $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}$.

1.21. Vì rạng A = 1, nên tất cả các dòng tỷ lệ với một dòng. Lấy ma trận $C \in \mathrm{Mat}(1, n, \mathbb{K})$ là ma trận dòng đó. Giả sử dòng thứ i của ma trận A bằng b_i. C, lấy $B = (b_i)$ là ma trận cột. Ta có $A = BC$.

1.23.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \cdots & & & -\frac{1}{\lambda^n} \\ & \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \cdots - & & \frac{1}{\lambda^{n-1}} \\ & & \ddots & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

1.24. Tính $\det A = 4\sin^4\alpha$. Từ đó suy ra kết quả.

1.25. Đặt $A^2 = (b_{ij})$, khi đó $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$

+ Với $i > j$, $b_{ij} = 0$ vì $a_{ik} = 0$ nếu $k \le j$ còn $k > j$ thì $a_{kj} = 0$.

+ Với $i < j \Rightarrow b_{ij} = \sum_{i \le k \le j}^{\infty} a_{ik} a_{kj} =$

$$= \sum_{k=i}^{j} (-1)^{k-1} c_{k-1}^{i-1} (-1)^{j-1} c_{j-1}^{k-1} = \sum_{k=i}^{j} (-1)^{j+k} \frac{(j-1)!}{(j-k)!(i-1)!(k-i)!}$$

$$= \sum_{k=i}^{j} (-1)^{j+k} \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} \cdot \frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-k)!}$$

$$= \sum_{k=i}^{j} (-1)^{i+j} c_{j-1}^{i-1} . (-1)^{k-i} c_{j-i}^{k-i} \text{ ; Đặt } k - i = l$$

$$= (-1)^{i+j} c_{j-1}^{i-1} . \sum_{l=0}^{j-i} (-1)^{l} . c_{j-i}^{l} = 0, \text{ vì}$$

$$\sum_{l=0}^{j-i} (-1)^{l} . c_{j-i}^{l} = (1-1)^{j-i} = 0 .$$

+ Với i = j, ta có $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} . a_{ki} = 1$.

Như vậy $A^2 = I_n$.

1.26. Trước hết ta có nhận xét sau: Cho a, b, c $\in$ N, c $\ge$ b

Khi đó:

$$\sum_{k \ge 0} (-1)^k \binom{b}{c-k} \cdot \binom{k}{a} = \binom{c-b}{c-a}.$$

Công thức trên có thể chứng minh quy nạp theo a = 0, 1, 2, ... và lưu ý là $\binom{k}{a} = 0$ với k > a.

Đặt $X^2 = (y_{ij})$ thì $y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} x_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \binom{i-1}{n-k} \binom{k-1}{n-j} = (-1)^{j+1} \binom{n-i}{j-1}$$ (do áp dụng nhận xét trên).

Giả sử $X^3 = (z_{ij})$, ta có $z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} y_{ik}x_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-i}{k-1}(-1)^{n-j}\binom{k-1}{n-j}$$

$$= \sum_{ki=1}^{n}(-1)^{n+1+j+k}\binom{n-i}{k-1}\binom{k-1}{n-j}.$$

Nếu $i < j \Rightarrow n - i > n - j \Rightarrow z_{ij} = 0$

Nếu $i = j \Rightarrow z_{ii} = 1$

Nếu $i > j \Rightarrow z_{ij} = \sum_{a\le t\le b}(-1)^{b+t}\binom{a}{t}\binom{t}{b}$

(ở đây đặt $t = k - 1$, $a = n - i$, $b = n - j$).

Như vậy $z_{ij} = \sum_{a\le t\le b}(-1)^{b+t} \cdot \frac{t!}{a!(t-a)!} \cdot \frac{b!}{t!(b-t)!}$

$$= \sum_{a\le t\le b} \frac{b!}{a!} \times \frac{(-1)^{b+t}}{(b-t)!\,(t-a)!} = \sum_{t=a}^{b} c_b^a (-1)^{b+t} c_{b-a}^{t-a}$$

$$= (-1)^{a+b} c_b^a \cdot \sum_{s=0}^{b-a}(-1)^s c_{b-a}^s = 0.$$

Như vậy $z_{ij} = \delta_{ij}$ nên $X^3 = I_n$.

1.27. Trước hết ta chứng minh rằng nếu $Z = AX$,

ở đó $Z, A, X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ thì $\det(J(Z, X)) = (\det A)^n$.

Thật vậy, giả sử $Z = (z_{ij})$, $z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}$.

Từ đó $$\frac{\partial z_{ij}}{\partial x_{kl}} = \begin{cases} a_{ik} & \text{nếu } l = j \\ 0 & \text{nếu } l \neq j \end{cases} \quad (1)$$

Ta coi ma trận $J(Z, X) \in Mat(n^2, \mathbb{R})$ với các dòng và các cột được đánh số bởi các cặp có thứ tự (i, j), $1 \leq i, j \leq n$. Thứ tự các dòng cũng như các cột là (1, 1), (2, 1)... , (n, 1), (1, 2), (2, 2),... (n, 2), (1, 3)... (n, n). Phần tử ở dòng (i, j), cột (k, l) là $\frac{\partial z_{ij}}{\partial x_{kl}}$. Từ đó, do (1) ta có:

$$J(Z, X) = \begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix}$$

và như vậy $\det(J(Z, X)) = (\det A)^n$.

Tương tự nếu $Y = Z.B$ thì ta cũng có:

$\det J(Y, Z) = (\det B)^n$. Xét $Y = A.X.B = Z.B$.

Ta có: $J(Y, X) = J(Y, Z) . J(Z, X)$. Như vậy

$$\det(J(Y, X)) = \det(J(Y, Z)) . \det(J(Z, X))$$

$$= (\det B)^n . (\det(A))^n.$$

1.28. Giả sử $X = (x_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{R})$; $x_{ij} = 0$

với $i < j$. Ta có $Y = X.X^t = (Y_{ij})$

$$\Rightarrow \quad Y_{ij} = \sum_k x_{i_k}(x_{k_j})^t = \sum_{k=1}^n x_{jk}x_{jk}$$

Như vậy $Y_{ij} = Y_{ji}$.

Ta có $$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{rs}} = \begin{cases} x_{is} & \text{nếu } i \neq j, r = j \\ x_{js} & \text{nếu } r = i \neq j,\ j \geq s \\ 2x_{is} & \text{nếu } r = i = j \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases} \qquad (*)$$

Ma trận $J(Y, X) \in Mat(n^2, \mathbb{R})$, các dòng và các cột được đánh số như trong bài 1.27. Phần tử ở hàng (i, j), cột (r, s) là $\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{rs}}$.

Ta nhận thấy với (i, j) < (r, s) (nghĩa là i < r nếu j = s hoặc j < s) thì $\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{rs}} = 0$.

Như vậy J(Y, X) là ma trận tam giác dưới.

Xét $\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{ij}}$. Do (*) ta có $\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{ij}} = \begin{cases} 2x_{jj} & \text{với } i = j \\ x_{jj} & i \neq j \end{cases}$

Như vậy $\det(J(Y, X)) = \prod_{i,j=1}^{n} \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{ij}} =$

$$= \prod_j \left(\prod_i \frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{ij}} \right) = \prod_j (2x_{jj}^n) = 2^n \prod_j x_{jj}^n .$$

1.29. Gọi $\widetilde{A} = (A_{ij})$ là ma trận phụ hợp của A.

Ta có $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}^t = \widetilde{A}^t \in Mat(n, Z)$.

Ta có $B = S^{-1} . A . S \Rightarrow B^m = S^{-1} . A^m . S$.

Vì ma trận S gồm các số nguyên nên $k = |\det S| \in N^*$ (do giả thiết $\det S \neq 0$). Với mỗi số nguyên dương p, xét ma trận $A^p \in Mat(n, Z)$, giả sử $A^P(\alpha_{ij}^p)$; gọi r_{ij} là số dư khi chia α_{ij}^p cho

$k = |\det S|$. Đặt $R_p = (r_{ij})$ vì $0 \le r_{ij} < k$, r_{ij} nguyên nên số các ma trận dạng R_p là hữu hạn. Vì vậy tồn tại $p, q \in N^*$, $p > q$ sao cho các phần tử tương ứng của A^p và A^q bằng nhau theo modk.

Do đó $A^p = A^q + (\det S).C$, $C \in Mat(n, Z)$.

Từ đó: $A^{p-q} = I_n + (\det S).C.(A^q)^{-1}$. Đặt $m = p - q$.

Khi đó: $B^m = S^{-1}A^m S = I_n + \det S . S^{-1}.C.A^{-q}.S$;

Vì $S \in Mat(n, Z)$, $(\det S). S^{-1} = \widetilde{S}^t$ là ma trận phụ hợp của S, nên $\widetilde{S}^t \in Mat(n, Z)$ và vì vậy: $B^m \in Mat(n, Z)$.

1.30. Ta chứng minh quy nạp theo n.

$n = 1$: hiển nhiên.

$$n = 2, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Nếu cho trước $a_{21} . a_{12} \ne 0$, ta chọn $a_{11} = a_{22} = 0$.

Còn nếu $a_{21} . a_{12} = 0$, ta chọn $a_{11} = a_{22} = 1$.

Như vậy $n = 1, 2$ thì bài toán đúng.

Giả sử bài toán đúng với mọi định thức cấp $\le n - 1$.

Ta chứng minh nó đúng với định thức cấp n.

Giả sử $A = (a_{ij}) \in Mat(n\ \mathbb{R})$. Xét A_{11} là phần phụ đại số của phần tử a_{11}. Theo giả thiết quy nạp, ta đã điền được $a_{22}, \dots a_{nn}$ để $A_{11} \ne 0$.

Đặt $a_{11} = x$, khai triển theo dòng thứ nhất ta có:

$$\det A = x.\, A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

Ta có $\sum_{j=2}^{n} a_{1j}A_{1j}$ là hằng số. Nếu hằng số này khác không, ta chọn $x = a_{11} = 0$; nếu hằng số đó bằng không, ta chọn $x = a_{11} = 1$ sẽ được $\det A \neq 0$.

1.31. Trước hết ta chứng tỏ rằng nếu ma trận A và $A^{-1} \in Mat(n, \mathbb{R})$ có các phần tử không âm, thì ở mỗi cột của A có đúng một phần tử dương.

Thật vậy, giả sử ở cột thứ j của A có 2 số dương, ở dòng i_1 và dòng i_2. Chọn dòng k với $k \neq j$ của ma trận A^{-1}. Vì $A^{-1}A = I_n$ nên tích của dòng k của A^{-1} với cột j của A bằng 0. Như vậy các phần tử của cột thứ i_1 và i_2 nằm trên dòng k đều bằng không ($k \neq j$). Do đó hai cột i_1 và i_2 của A^{-1} tỷ lệ với nhau. Điều đó dẫn đến mâu thuẫn.

Như vậy mỗi cột của ma trận A có đúng một số dương (còn lại đều bằng 0). Tương tự, mỗi dòng của ma trận A cũng có đúng một số dương. Giao hoán các dòng (hoặc các cột) ta được ma trận chéo.

Ngược lại, tất cả các ma trận nhận được từ ma trận chéo ($a_{ii} > 0$) bằng cách chuyển dòng hoặc cột đều khả nghịch. Ma trận A^{-1} nhận được từ ma trận A bằng cách lấy nghịch đảo các phần tử khác không rồi chuyển vị.

1.32. ĐS $\det(A) = \pm 1$.

Chương 2

KHÔNG GIAN VÉCTƠ - ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

§1. KHÔNG GIAN VÉCTƠ

1. Định nghĩa: Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường. Một tập hợp V khác rỗng cùng với hai phép toán "+" : $V \times V \to V$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$$

và phép toán " ∘" : $\mathbb{K} \times V \to V$

$$(k, \alpha) \mapsto k.\alpha$$

được gọi là một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ nếu nó thỏa mãn các tính chất sau. với mọi $k, l, ... \in \mathbb{K}$ và mọi $\alpha, \beta, \gamma, ... \in \mathbb{V}$, ta có:

a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

c) Có phần tử $0 \in V$ sao cho:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \text{ với mọi } \alpha \in V.$$

d) Với $\alpha \in V$, tồn tại $(-\alpha) \in V$ sao cho:

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

e) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$.

g) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

h) $(k.l)\alpha = k(l\alpha)$

k) $1.\alpha = \alpha$, 1 là phần tử đơn vị của trường $\mathbb{K}$.

Một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ còn được gọi $\mathbb{K}$ - không gian véctơ.

Khi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, không gian véc tơ được gọi là không gian véc tơ thực. Khi $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, không gian véc tơ được gọi là không gian véctơ phức.

2 - Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Véc tơ $\beta = k_1\alpha_1 + ... + k_m\alpha_m$, $(\alpha_i \in V, k_i \in \mathbb{K})$

gọi là một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ α_i (i = 1, ..., m). Ta cũng nói β biểu thị tuyến tính qua các véc tơ $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

Một hệ véc tơ $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ của V được gọi là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu có các số k_i (i = 1, ..., m) không đồng thời bằng không của $\mathbb{K}$ sao cho $\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = 0$. Một phát biểu tương đương: hệ $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu có một véc tơ nào đó của hệ biểu thị tuyến tính qua các véc tơ còn lại của hệ.

Một hệ các véc tơ không phụ thuộc tuyến tính được gọi là hệ độc lập tuyến tính. Như vậy, hệ $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ là hệ độc lập tuyến tính nếu mọi tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = 0$ ta suy ra $k_1 = ... = k_m = 0$.

Cho hệ $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ các véc tơ độc lập tuyến tính của không gian véc tơ V mà mỗi véc tơ của nó là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của hệ $\{\beta_1, ... \beta_l\}$ thì $k \le l$.

Cho hệ véc tơ $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ trong không gian véc tơ V, I là tập chỉ số gồm hữu hạn phần tử. Hệ con (α_j) $j \in J \subset I$ gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ đã cho nếu nó là hệ độc lập tuyến tính, và nếu thêm bất kỳ véc tơ α_k nào ($k \in I \setminus J$) thì ta được một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Cho hệ hữu hạn véc tơ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ trong không gian véc tơ V, thì số phần tử của mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ trên đều bằng nhau, số đó được gọi là hạng của hệ véc tơ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.

3 - Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ

Một hệ $\{e_1, \dots, e_n\}$ các véc tơ độc lập tuyến tính của không gian véc tơ V được gọi là một cơ sở của V nếu mọi véc tơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của véc tơ $\{e_1, \dots, e_n\}$. Khi V có cơ sở gồm n véc tơ thì mọi cơ sở của V đều có đúng n véc tơ. Số n gọi là số chiều của V, kí hiệu dimV. Nếu không tồn tại một cơ sở gồm hữu hạn véc tơ, thì V gọi là không gian véc tơ vô hạn chiều.

Cho cơ sở $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, với véc tơ bất kỳ $\alpha \in V$, ta có $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $(x_1, \dots, x_n)$ được gọi là các tọa độ của véc tơ α đối với cơ sở $\{e_1, \dots, e_n\}$, x_i là tọa độ thứ i của α đối với cơ sở đó.

Giả sử có cơ sở khác $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ của V, mà $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$ $(j = 1, \dots, n)$. Nếu véc tơ α có tọa độ (x_i) trong cơ sở $\{e_i\}$ và có tọa độ (x'_i) trong cơ sở $\{\varepsilon_i\}$, thì ta có:

$$x_i = \sum_j c_{ij} x'_j \quad , \; i = 1, \dots, n.$$

Nếu ta kí hiệu ma trận $C = (c_{ij})$, và ma trận $X = (x_i)$, $X' = (x'_i)$ là các ma trận cột, thì $X = C X'$.

4 - Không gian véc tơ con và không gian véc tơ thương

Tập con không rỗng W của không gian véc tơ V được gọi là không gian véc tơ con của V nếu W là không gian véc tơ, với các phép toán của V hạn chế trên W.

Tập con không rỗng W của V là không gian véc tơ con của V khi và chỉ khi W ổn định đối với hai phép toán của V, nghĩa là với $\alpha, \beta \in W$ và $k \in \mathbb{K}$, thì $\alpha + \beta \in W$ và $k . \alpha \in W$.

Cho $W_1, \dots, W_n$ là các không gian véc tơ con của không gian véc tơ V, khi đó $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ là một không gian véc tơ con của V, là không gian con lớn nhất nằm trong mọi W_i, $i = 1, 2, \dots, n_0$.

Cho tập hợp $X \subset V$, không gian véc tơ con bé nhất của V chứa X được gọi là bao tuyến tính của tập hợp X, kí hiệu <X> hay Vect(X). Nếu $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, thì bao tuyến tính của X được kí hiệu là $<\alpha_1, \dots, \alpha_m>$.

Cho $W_1, \dots, W_n$ là họ những không gian con của V. Khi đó bao tuyến tính của tập hợp $W_1 \cup \dots \cup W_n$ được gọi là tổng của các không gian con $W_1, \dots, W_n$, kí hiệu là $W_1 + \dots + W_n$ hay $\sum_{i=1}^{n} W_i$.

Ta thấy rằng $\alpha \in \sum_{i=1}^{n} W_i$ khi và chỉ khi $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha_i \in W_i$.

Nếu với mọi $\alpha \in \sum_{i=1}^{n} W_i$, α viết được một cách duy nhất ở dạng $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_i \in W_i$, thì tổng $\sum_{i=1}^{n} W_i$ được gọi là tổng trực tiếp của n không gian véc tơ con W_i ($i = 1, 2, \dots, n$) và kí hiệu là $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ hay $\bigoplus_{i=1}^{n} W_i$.

Giả sử V là không gian hữu hạn chiều, W_1 và W_2 là hai không gian véc tơ con của V, khi đó:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Cho W là không gian véc tơ con của không gian véc tơ V. Xét quan hệ tương đương trên V: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W$. Lớp tương đương của véc tơ α được kí hiệu là $[\alpha]$.

Tập thương V/W với hai phép toán:

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta] \text{ và } k[\alpha] = [k\alpha]$$

với mọi α, $\beta \in V$ và $k \in \mathbb{K}$, làm thành một không gian véc tơ, được gọi là không gian véc tơ thương (của V chia cho W).

Nếu $\dim V = n$, $\dim W = m$ $(0 \le m \le n)$, thì $\dim V/W = n - m$.

Ánh xạ $\pi : V \to V/W$ mà $\pi(\alpha) = [\alpha]$ được gọi là phép chiếu chính tắc.

§2. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa. Cho V và W là các không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$; Ánh xạ $f: V \to W$ được gọi là ánh xạ tuyến tính (hay đồng cấu tuyến tính, hay toán tử tuyến tính) nếu nó bảo tồn các phép toán của không gian véc tơ, cụ thể là: với mọi α, $\beta \in V$, mọi $k \in \mathbb{K}$, ta có:

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$$

$$f(k\,\alpha) = k\,.\,f(\alpha).$$

Ánh xạ tuyến tính được gọi là đơn cấu nếu nó là đơn ánh, toàn cấu nếu nó là toàn ánh, và đẳng cấu nếu nó là song ánh.

Hai không gian véc tơ V và W được gọi là đẳng cấu với nhau nếu có một đẳng cấu f từ V lên W.

2 - Các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính

Ta kí hiệu tập các ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ V đến không gian véc tơ W là Hom(V, W) hay $Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$ để chỉ rõ $\mathbb{K}$ là trường cơ sở.

$Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$ là một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ với hai phép toán như sau:

Với f, g $\in Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$; ánh xạ $f + g \in Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$ xác định bởi $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ với mọi $\alpha \in V$.

Với $k \in \mathbb{K}$, $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V,W)$, thì kf: $V \to W$ xác định bởi $(kf)(\alpha) = kf(\alpha)$ với mọi $\alpha \in V$.

Ánh xạ f + g được gọi là tổng của hai ánh xạ f và g.

Ánh xạ k. f được gọi là tích của ánh xạ f với vô hướng k.

3 - Điều kiện xác định ánh xạ tuyến tính

Ánh xạ tuyến tính f: $V \to W$ hoàn toàn được xác định khi biết ảnh của một cơ sở.

Nếu $\{e_1, \dots, e_n\}$ là cơ sở của không gian véc tơ V và $a_1, \dots, a_n$ là n véc tơ của không gian véc tơ W (V, W là các không gian véc tơ trên cùng một trường $\mathbb{K}$), thì tồn tại duy nhất một ánh xạ $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ để $f(e_j) = a_j$ với $j = 1, \dots, n$. f là đơn cấu khi và chỉ khi hệ $\{a_1, \dots, a_n\}$ độc lập tuyến tính, f là đẳng cấu khi và chỉ khi hệ $\{a_1, \dots, a_n\}$ là cơ sở của W. Giả sử $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ là cơ sở của W, thì $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_i = a_j$, và ma trận $A = (a_{ij})$ gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở $\{e_j\}$ và $\{\varepsilon_i\}$. Như vậy nếu cho cơ sở ε của W và cơ sở e của V, thì định lý trên chứng tỏ rằng có một song ánh giữa tập $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ và tập Mat(m, n, K).

Hợp thành của hai ánh xạ tuyến tính là một ánh xạ tuyến tính, nghĩa là nếu $f: V \to W$ và $g: W \to Z$ là các ánh xạ tuyến tính, thì $g \circ f: V \to Z$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.

4 - Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Cho $f: V \to W$ là đồng cấu tuyến tính giữa các không gian véc tơ, nếu X là không gian véc tơ con của V, thì $f(X) = \{f(\alpha) \mid \alpha \in X\}$ là không gian con của W, và nếu $Y \subset W$, Y là không gian con của W thì $f^{-1}(Y) = \{x \in V \mid f(\alpha) \in Y\}$ là một không gian con của V.

Ta gọi $\mathrm{Ker}f = f^{-1}\{0\}$ là hạt nhân của ánh xạ f và $\mathrm{Im}f = f(V)$ là ảnh của ánh xạ f. Số dim Imf được gọi là hạng của ánh xạ f, kí hiệu rang f.

Giả sử $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$,

f là đơn cấu khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}f = \{0\}$. Nếu dimV là hữu hạn thì $\dim V = \dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f$.

Cho ma trận $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, xem A như ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ trong các cơ sở chính tắc. Khi đó hạng của ma trận A (đã được định nghĩa trong chương I) bằng hạng của f và chính là hạng của hệ véc tơ cột của ma trận A.

5 - Ma trận của tự đồng cấu trong các cơ sở khác nhau

Cho $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, trong cơ sở $e = (e_1, \dots, e_n)$ f có ma trận

$A = (a_{ij})$, nghĩa là $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$.

Giả sử $\varepsilon = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ là một cơ sở khác, mà $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i$. tron

cơ số ε, f có ma trận $B = (b_{ij})$ nghĩa là $f(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, \varepsilon_i$. Ma trậ

$C = (c_{ij})$ được gọi là ma trận chuyển cơ sở. Ta có:

$$B = C^{-1}\ A\ C$$

Hai ma trận A và B được gọi là đồng dạng nếu có ma trậ không suy biến C để $B = C^{-1} A. C$. Như vậy hai ma trận củ cùng một phép biến đổi tuyến tính trong hai cơ sở khác nhau l đồng dạng.

Ta gọi vết của ma trận vuông A là tổng các phần tử trê đường chéo chính. Hai ma trận đồng dạng có vết bằng nhau Vết của một tự đồng cấu tuyến tính là vết của ma trận của n trong một cơ sở nào đó. Vết của ma trận A được kí hiệu là trac A hay trA. Vết của tự đồng cấu f được kí hiệu là tracef hay trf.

§ 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1 - Hệ phương trình

Hệ $$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, m), \qquad (1)$$

ở đó $a_{kj}, b_k \in \mathbb{K}$ cho trước, $k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

x_j là các ẩn, được gọi là hệ phương trình tuyến tính (hay h phương trình đại số tuyến tính) gồm m phương trình, n ẩn s Khi $\mathbb{K}$ là trường số (như $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$), thì các a_{kj} gọi là các hệ số, b là hệ số tự do.

Ma trận $A = (a_{kj})$ gọi là ma trận các hệ số.

Ma trận $A^{bs} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ gọi là ma trận bổ sung, nó có được từ ma trận A bằng cách thêm cột các hệ số tự do vào cột thứ (n + 1).

Nếu kí hiệu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ là ma trận cột, thì hệ phương trình (1) có thể viết dưới dạng:

$$AX = B.$$

2 - Hệ Cramer

Hệ n phương trình tuyến tính n ẩn số, mà ma trận các hệ số không suy biến gọi là hệ Cramer.

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất. Cách tìm nghiệm như sau:

Cách 1: Xét phương trình ma trận AX = B, vì $\det A \neq 0$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}, và ta có:

$$X = A^{-1}B$$

Cách 2: Xét hệ véc tơ cột $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, mà $\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ và $b(b_1, \dots, b_m)$ là véc tơ cột tự do, thế thì hệ viết được dưới dạng $\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i = b$. Nếu ta gọi D_i là định thức của ma trận nhận được bằng cách thay cột thứ i của ma trận A bởi cột các hệ số tự do, thì $x_i = \frac{D_i}{D}$, ở đó D là định thức của ma trận A.

3 - Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có dạng:

$$AX = O \qquad (2)$$

Xét ma trận $A = (a_{ij})$ như ma trận của ánh xạ tuyến tính f: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ trong các cơ số chính tắc của $\mathbb{K}^n$ và $\mathbb{K}^m$, thì tập hợp nghiệm của (2) chính là Kerf. Mỗi cơ sở của Kerf gọi là một hệ nghiệm cơ bản của (2). Hệ (2) luôn có nghiệm $x_1 = \ldots = x_n = 0$, nghiệm này gọi là nghiệm tầm thường. Khi rang A = n, thì hệ chỉ có nghiệm tầm thường. Khi rang A = p < n, thì tập hợp nghiệm là không gian véc tơ n - p chiều (n là số ẩn của phương trình).

4 - Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

a) Định lý (Gauss hay Kronecker - Capelli)

Hệ phương trình $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (1)$

có nghiệm khi và chỉ khi $\text{rang}A = \text{rang}A^{bs}$.

b) Phương pháp khử của Gauss

Cho hệ phương trình (1), nếu dùng các phép biến đổi sau đây thì ta vẫn nhận được một hệ phương trình tương đương với hệ (1), nghĩa là hệ có cùng tập hợp nghiệm như hệ (1).

+ Nhân hai vế của một phương trình nào đó của hệ với số $k \neq 0$.

+ Cộng vào một phương trình của hệ sau khi đã nhận một số bất kỳ vào hai vế của phương trình khác.

+ Đổi thứ tự của phương trình của hệ.

Các phép biến đổi tương dương đối với hệ phương trình chính là các phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên các dòng của ma trận bổ sung A^{bs} của hệ.

Dùng phương pháp khử Gauss là thực hiện các phép biến đổi tương đương để đưa hệ phương trình (1) về hệ phương trình mà ma trận có dạng:

$$\begin{array}{r} p\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ m-p\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c|c}
1 & & * & & b'_1 \\
 & \ddots & & * & \vdots \\
0 & & 1 & & b'_p \\ \hline
 & & & & b'_{p+1} \\
 & 0 & & 0 & \vdots \\
 & & & & b'_m
\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{p}\quad\underbrace{\qquad\qquad}_{n-p}$$

Những phần tử ở phần gạch (*) có thể khác 0.

Khi đó nếu $b'^2_{p+1} + ... + b'^2_m > 0$ thì hệ vô nghiệm,

nếu $b'_{p+1} = ... = b'_m = 0$ thì hệ có nghiệm phụ thuộc n-p tham số.

§4. CẤU TRÚC CỦA TỰ ĐỒNG CẤU

1. Không gian riêng - đa thức đặc trưng

Cho V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ bằng $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$). Một ánh xạ tuyến tính từ V đến chính nó được gọi là một tự đồng cấu tuyến tính. Tập các tự đồng cấu tuyến tính của V ký hiệu là $Hom_K(V, V)$ hay $End_K(V)$. Giả sử $f \in End_K(V)$, W là không gian con của V; W được gọi là không gian con bất biến của V nếu $f(W) \subset W$.

Véc tơ $\alpha \neq 0$ thuộc V được gọi là véc tơ riêng của $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$ ứng với giá trị riêng λ nếu $f(\alpha) = \lambda\alpha$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Khi đó không gian một chiều sinh bởi véc tơ α là một không gian véc con bất biến của f.

Với $\lambda \in \mathbb{K}$, tập $\ker(f - \lambda Id)$ khi nó khác $\{\vec{0}\}$ là không gian con của V, gồm véc tơ không và tất cả các véc tơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ. Không gian này gọi là không gian riêng của f ứng với giá trị riêng λ, kí hiệu $\mathscr{P}_\lambda$.

Giả sử tự đồng cấu $f \in End(V)$ trong một cơ sở nào đó của V có ma trận A, thì $\det(A - XI_n)$ là một đa thức bậc n đối với biến X, không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở, và được gọi là đa thức đặc trưng của tự đồng cấu f (ta cũng nói đó là đa thức đặc trưng của ma trận A), kí hiệu $\mathscr{P}_f(x) = \det|A - X I_n|$. Như vậy λ là một giá trị riêng của f khi và chỉ khi λ là nghiệm của đa thức đặc trưng của f.

Giả sử $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ là các giá trị riêng đôi một phân biệt của f, $P_{\lambda_1}, \dots, P_{\lambda_k}$ là các không gian riêng tương ứng với các giá trị riêng đó, thì tổng $P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} + \dots + P_{\lambda_k}$ là tổng trực tiếp.

2 - Không gian riêng suy rộng

Giả sử V là không gian véc tơ trên đường $\mathbb{K}$, $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Với mỗi $\lambda \in \mathbb{K}$, xét tập $\{\alpha \in V \mid$ có số nguyên $m > 0$ để $(f-\lambda Id_v)^m(\alpha) = \bar{0}\}$. Đó là một không gian con của V, khi khác $\{0\}$ nó được gọi là không gian riêng suy rộng của f ứng với λ và kí hiệu là $\mathscr{R}_\lambda$. Ta thấy rằng:

+ Với mọi không gian riêng suy rộng $\mathscr{R}_\lambda$, λ là một giá trị riêng của f và $\mathscr{P}_\lambda \subset \mathscr{R}_\lambda$.

+ Với λ là giá trị riêng của f, dim$\mathscr{R}_\lambda$ bằng bội của nghiệm λ của đa thức đặc trưng $\mathscr{P}_f(X)$.

+ Mỗi $\mathscr{R}_\lambda$ là một không gian con của V bất biến qua ánh xạ f.

+ Giả sử $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ là các giá trị riêng phân biệt từng cặp và $u_i \in \mathscr{R}_{\lambda_i} \setminus \{0\}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ thì hệ các véc tơ $\{u_1, ..., u_k\}$ độc lập tuyến tính.

3 - Tự đồng cấu lũy lính

a) Ta nói rằng $f \in \mathrm{End}_K(V)$ là tự đồng cấu lũy lính nếu tồn tại số nguyên $k > 0$ để $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ lần}} = 0$, hơn nữa, nếu $f^{k-1} \neq 0$ và $f^k = 0$ thì k gọi là bậc lũy lính của f.

Tự đồng cấu $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mà có cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sao cho $f(e_i) = e_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ và $f(e_n) = 0$, thì lũy lính bậc n và cơ sở $\{e_i, ..., e_n\}$ được gọi là cơ sở xyclic đối với f. Trong cơ sở xyclic ma trận của f có dạng:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \ldots & \ldots & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $f \in End_K(V)$. U là không gian véc tơ con của V, U được gọi là không gian véc tơ con xyclic đối với f nếu U là f- bất biến và trong có một cơ sở xyclic đối với $f/U: U \to U$.

c) Nếu $f \in End_K(V)$, $\dim V = n$, thì V phân tích được thành tổng trực tiếp của các không gian véc tơ con xyclic đối với f. Với mỗi số nguyên $s \geq 1$, số các không gian véc tơ con s chiều xyclic đối với f trong mọi cách phân tích đều bằng nhau và bằng:

$$\operatorname{rang}(f^{s-1}) - 2\operatorname{rang}(f^{s}) + \operatorname{rang}(f^{s+1}).$$

d) Nếu $\mathscr{R}_\lambda$ là không gian riêng suy rộng của f ứng với λ, thì $(f - \lambda Id_v)$ là tự đồng cấu lũy linh của V.

4 - Ma trận dạng chuẩn tắc Jordan của tự đồng cấu

Giả sử V là không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$, $f \in End_K(V)$ mà đa thức đặc trưng $\mathscr{P}_f(X)$ có dạng:

$$\mathscr{P}_f(X) = (\lambda_1 - X)^{s_1}(\lambda_2 - X)^{s_2} \ldots (\lambda_k - X)^{s_k}$$

(các λ_i đôi một phân biệt, $i = 1, 2, ..., k$), khi đó V là tổng trực tiếp của các không gian riêng suy rộng $V = \mathscr{R}_{\lambda_1} \oplus \mathscr{R}_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus \mathscr{R}_{\lambda_k}$ và trong V có một cơ sở (ε_j) $j = 1, ..., n$; ($n = \dim V$) để trong cơ sở đó ma trận của f tạo bởi các khung Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

nằm dọc đường chéo chính số khung jordan cấp s với phần tử chéo λ_i bằng:

$$\text{rang}(f - \lambda_i \text{Id}_v)^{s-1} - 2\text{rang}(f - \lambda i\text{Idv})^s + \text{rang}(f - \lambda\text{Id}_v)^{s+1} .$$

Ma trận dạng trên của f xác định duy nhất sai khác cách sắp xếp các khung Jordan. Ma trận đó được gọi là ma trận dạng chuẩn tắc Jordan của tự đồng cấu f.

B - VÍ DỤ

Ví dụ 2.1: Xét $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ là các không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$. Cho $x_1, x_2, \dots, x_m$ là m véc tơ thuộc $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{E}$ là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng tập $\mathbb{F}$ các véc tơ của $\mathbb{R}^n$ dạng $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i x_i$ $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{E}$ là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$, dimF = dimE - dim(E $\cap$N), trong đó N là không gian các nghiệm của phương trình:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i x_i = 0 \quad (\text{ở đó } t_1, \dots, t_m \text{ là các ẩn}).$$

Lời giải:

Xét ánh xạ tuyến tính $u \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ở đó $u(t_1, \dots, t_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i x_i$. Khi đó F = u(E), vì vậy F là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^n$. dimF = dimE - dim(Keru'), u' = u | E.

Keru' = (KerU) $\cap$ E = E $\cap$ N.

Như vậy dimF = dimE - dim(E $\cap$ N).

Ví dụ 2.2. Cho $x_1, \ldots, x_n$ là những véc tơ khác không trong không gian tuyến tính V. Giả sử có phép biến đổi $f \in \text{End } V$ sao cho $f(x_1) = x_1$, $f(x_k) = x_k + x_{k-1}$ với mọi $k = 2, \ldots, n$.

Chứng tỏ rằng hệ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ là độc lập tuyến tính.

Lời giải:

Ta chứng minh quy nạp theo n.

Với n = 1, thì $\{x_1\}$ độc lập tuyến tính do giả thiết $x_1 \neq 0$.

Giả sử mệnh đề đúng với mọi hệ $\{x_1, \ldots, x_k\}$; $k \leq n - 1$. Ta chứng minh mệnh đề đúng với k = n.

Xét tổ hợp tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0 . \tag{1}$$

Khi đó:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = c_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i f(x_i) = c_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i (x_i + x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=2}^{n} c_i x_{i-1} . \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\sum_{i=2}^{n} c_i x_{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1} x_i = 0.$

Do giả thiết quy nạp hệ $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ độc lập tuyến tính nên

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0.$$

Từ đó suy ra $c_1 x_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Như vậy hệ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2.3. Trong không gian véc tơ V cho hệ $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ các véc tơ độc lập tuyến tính mà mỗi véc tơ của nó là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của hệ $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$. Hãy chứng minh $k \le l$.

Lời giải:

Ta có thể giả thiết $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ là độc lập tuyến tính, nếu không ta sẽ lấy hệ con độc lập tuyến tính tối đại của $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ gồm m véc tơ và sẽ chứng minh $k \le m < l$.

Theo giả thiết $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ biểu thị tuyến tính qua $\beta_1, \dots, \beta_l$ nên tồn tại các vô hướng $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sao cho:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\beta_j \ ; \ (i = 1, ..., k) \tag{1}$$

Ta giả sử $k > l$. Ta sẽ chứng minh hệ $\{\alpha_1 ..., \alpha_k\}$ phụ thuộc tuyến tính. Xét tổ hợp tuyến tính

$$\sum_{j=1}^{k} x_i\alpha_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\beta_j\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}x_i\right)\beta_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_i = 0 \tag{2}$$

với $j = 1, \dots, l$ do hệ $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ độc lập tuyến tính.

Vì hệ phương trình (2) là hệ phương trình thuần nhất, có số ẩn nhiều hơn số phương trình, nên nó có vô số nghiệm, như vậy tồn tại nghiệm $(x_1, \dots, x_k)$ khác không. Từ đó suy ra hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ phụ thuộc tuyến tính. Điều này trái với giả thiết. Do đó $k \le l$.

Ví dụ 2.4. Xét hai không gian con E_1 và E_2 của không gian véc tơ E. Giả sử E/E_2 là không gian thương và $h: E_1 \to E/E_2$ là hạn chế của ánh xạ chiếu chính tắc trên E_1.

1) Tìm điều kiện cần và đủ để

a) h là toàn ánh

b) h là đơn ánh

2) Chứng tỏ không gian $(E_1 + E_2)/E_2$ đẳng cấu với không gian $E_1/E_1 \cap E_2$.

Lời giải:

1) a) Xét $\Pi: E \to E/E_2$ là ánh xạ chiếu chính tắc, $h = \Pi/_{E_1}$

h toàn ánh $\Leftrightarrow \Pi(E_1) = \Pi(E)$.

$\Leftrightarrow E_1 + \mathrm{Ker}\Pi = E + \mathrm{Ker}\,\Pi = E$

$\Leftrightarrow E_1 + E_2 = E$ (vì $\ker \Pi = E_2$)

b) Ta có $\mathrm{Ker}h = E_1 \cap \mathrm{Ker}\Pi = E_1 \cap E_2$.

Như vậy h đơn ánh $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}h = 0 \Leftrightarrow E, \cap E_1 = \{0\}$

2) Giả sử $F = E_1 + E_2$;

Xét $\Pi: F \to F/E_2$ và $k = \Pi/_{E_1}$.

Do phần 1) k là toàn ánh và $\mathrm{ker}k = E_1 \cap \mathrm{Ker}\Pi = E_1 \cap E_2$.

Do đó ta có $E_1/E_1 \cap E_2$ đẳng cấu nói E_1+E_2/E_2.

Ví dụ 2.5. Giả sử V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Tự đồng cấu $p: V \to V$ được gọi là một phép chiếu nếu $p^2 = p$.

1) Chứng tỏ rằng nếu p, q là hai phép chiếu, thì p + q là phép chiếu khi và chỉ khi $pq + qp = 0$.

2) Chứng tỏ rằng p.q là phép chiếu khí và chỉ khi $[p,q] = qp - pq$ là ánh xạ tuyến tính chuyển Imq vào Kerp.

3) Với p,q là hai phép chiếu sao cho p+q là phép chiếu, hãy chứng tỏ $\mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$ và $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.

Lời giải:

1) p+q là phép chiếu $\Leftrightarrow (p+q)^2 = p+q$

$\Leftrightarrow p^2 + p.q + q.p + q^2 = p+q \Leftrightarrow p.q + q.p = 0$

2) p.q là phép chiếu $\Leftrightarrow (p.q)^2 = p.q.p.q = p.q = p^2.q^2$

$\Leftrightarrow p\,(qp - pq)\,.\,q = 0 \Leftrightarrow q\,(pq - pq)\,(\mathrm{Im}q) = 0$

$\Leftrightarrow (qp - pq)\,(\mathrm{Im}q) \subset \mathrm{Ker}p$.

3) Vì mỗi phép chiếu p có rang p = trace p,

và vết của tổng hai ánh xạ tuyến tính bằng tổng các vết của nó, cho nên nếu p + q là phép chiếu thì:

trace (p + q) = trace p + trace q.

và rang (p + q) = rang p + rang q.

Từ đó $\dim \mathrm{Im}\,(p + q) = \dim \mathrm{Im}p + \dim \mathrm{Im}q$, suy ra

$\mathrm{Im}\,(p + q) = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$.

Để chứng minh $\mathrm{Ker}\,(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$

ta nhận thấy $\mathrm{ker}p \cap \mathrm{Ker}q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$.

Ngược lại với $x \in Ker(p + q)$ thì $p(x) + q(x) = 0$.

Do $Im(p + q) = Imp \oplus Imq$ nên từ $p(x) + q(x) = 0$

suy ra $p(x) = q(x) = 0$, hay $x \in Kerp \cap Kerq$.

Ví dụ 2.6. Giả sử E và F là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$; Hom (E, $\mathbb{F}$) là tập các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{E}$ đến $\mathbb{F}$; F_1 là không gian véc tơ con của $\mathbb{F}$.

a) Chứng tỏ rằng $\mathscr{L}_1 = \{f \in Hom(E, F) / Imf \subset F_1\}$ là không gian con của Hom (E, F).

b) Giả sử $F = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$ là một phân tích của F thành tổng trực tiếp của không gian F_i. Với mỗi F_i xét $\mathscr{L}_i = \{f \in Hom(E, F) \mid Imf \subset F_i\}$.

Chứng tỏ rằng $Hom(E, F) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathscr{L}_i$.

Lời giải:

a) Do $\mathscr{L}_1$ đóng kín với phép toán cộng ánh xạ và nhân ánh xạ với một vô hướng thuộc $\mathbb{K}$, nên hiển nhiên $\mathscr{L}_1$ là không gian véc tơ con của Hom (E, F).

b) Với $h \in Hom(E, F)$, với mỗi $x \in E$, ta phân tích $h(x) = y$ theo các thành phần của F_i; $y = h(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $y_i \in F_i$

Xét $h_i: E \to F_i$, $h_i \in Hom(E, F_i) = \mathscr{L}_i$ $h_i(x) = y_i$

Và với mọi $x \in E$, thì $h(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x)$

Do đó $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$, $h_i \in \mathscr{L}_i$.

Giả sử $\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$ nghĩa là với mọi $x \in E$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 0,\ h_i(x) \in F_i$$

từ đó suy ra $h_i(x) = 0$ với mọi i vì $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Như vậy Hom (E, F) = $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{L}_i$.

Ví dụ 2.7. Gọi Q là trường số hữu tỷ và $\mathscr{A}$ là một tập hợp không rỗng. Kí hiệu $\mathbb{E}$ là tập các ánh xạ từ $\mathscr{A}$ vào Q. $\mathbb{E}$ là Q - không gian véc tơ với hai phép toán: $f, g \in \mathbb{E}$, $\alpha \in \mathscr{A}$, $k \in Q$ thì:

$$(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$$

$$K . f)(\alpha) = k . f(\alpha).$$

Giả sử V là không gian véc tơ con của $\mathbb{E}$.

1) Chứng tỏ rằng: nếu $f_1, ..., f_n \in V$ và có n điểm $x_1, ..., x_n \in \mathscr{A}$ sao cho

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases} \qquad i, j = \overline{1, n}$$

thì hệ $\{f_1, ..., f_n\}$ độc lập tuyến tính.

Gọi W là không gian con của V sinh bởi $\{f_1,..., f_n\}$, khi đó mỗi $g \in V$ đều viết được một cách duy nhất dưới dạng: $g = h_1 + h_2$, ở đó $h_1 \in W$, $h_2 \in V$ và $h = 2(x_i) = 0$ với mọi $i = \overline{1,n}$.

2) Chứng tỏ rằng hai tính chất sau đây là tương đương:

a) $\dim V \geq n$

b) Tồn tại n hàm $g_1, ..., g_n$ thuộc V và n điểm $x_1, ..., x_n$ của $\mathcal{A}$ sao cho $g_i(x_j) = \delta_{ij}$ với mọi $i, j = \overline{1,n}$.

Lời giải:

1) Xét tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0, \quad \lambda_i \in Q$.

Khi đó với mọi $x \in \mathcal{A}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0$;

Chọn $x = x_j$, thì $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = \lambda_j = 0$ $(j = 1,2,..., n)$

suy ra hệ $\{f_1, ..., f_n)$ độc lập tuyến tính.

Với $g \in V$, hàm $h_1 \in W$ cần tìm phải thỏa mãn

$g(x_i) = (h_1 + h_2)(x_i) = h_1(x_i)$ với mọi i;

Do $\{f_1, ..., f_n)$ là cơ sở của W nên $h_1 \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f_i$.

Đặt $h_2 = g - h_1 \in V$

thì $h_2(x_j) = g(x_j) - h_1(x_j) = 0$ với mọi $j = 1,..., n$.

2) Theo phần 1) nếu b) được thỏa mãn, thì hệ (g_1, g_n) độc lập tuyến tính, do vậy dim $V \geq n$; nghĩa là mệnh đề b) $\Rightarrow$ a) đúng.

Ta chứng minh a) suy ra b) bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với n = 1; nếu dim $V \geq 1$, tồn tại $f_1 \neq 0$ và vì vậy có $x_1 \in \mathscr{A}$ để $f_1(x_1) = \lambda \neq 0$. Chọn $g_1 = \frac{1}{\lambda}.f_1$ thì $(x_1) = 1$.

Giả sử mệnh đề đúng với mọi k = 1,2, ..., n.

Ta chứng minh nó đúng với $n \neq 1$.

Theo giả thiết quy nạp dim $V \geq n + 1 \Rightarrow$ dim $V \geq n$ nên tồn tại n hàm $g_i \in V$ và n điểm $x_j \in A$ để $g_i(x_j) = \delta_{ij}$ (i, j = 1,2, ..., n).

Gọi W là không gian con sinh bởi $\{g_1, ..., g_n\}$, ta có dim W < dim V.

Theo câu 1), với $f \in V\backslash W$, ta có $f = h_1 + h_2$, vì $h_1 \in W$ nên $h_2 \neq 0$; vì thế có x_{n+1} để $h_2(x_{n+1}) \neq 0$; ($x_{n+1} \neq x_i$ với i = 1, 2, ..., n).

Đặt $\overline{g}_{n+1} = \frac{h_2}{h_2(x_{n+1})}$ thì $\overline{g}_{n+1}(x_i) = \delta_{i,n+1}$ với mọi i = 1,2, ..., n+1. Bây giờ đặt $\overline{g}_i = g_i - \lambda_i \overline{g}_{n+1}$ (i = 1, ..., n),

thì với j = 1, ... n ta có $\overline{g}_i(x_j) = g_i(x_j) - \lambda_i \overline{g}_{n+1}(x_j) = \delta_{ij}$ và $\overline{g}_i(x_{n+1}) = g_i(x_{n+1}) - \lambda_i = 0$ nếu $\lambda_i = g_i(x_{n+1})$.

Như vậy có n+1 hàm $\{\overline{g}_i\}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 2.8. Giả sử $\mathscr{B}$ là họ đếm được các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ đến $\mathbb{R}^m$; với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}^n$ xét $\mathscr{B}(\alpha) = \{f(\alpha) / f \in \mathscr{B}\}$. Giả sử g là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ đến $\mathbb{R}^m$ sao cho $g(\alpha) \in \mathscr{B}(\alpha)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng $g \in \mathscr{B}$.

Lời giải:

Cách 1. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, xét véc tơ $\vec{\alpha}_x (1, x, x^2, ..., x^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

Họ các véc tơ $\vec{\alpha}_x$ có tính chất:

a) với $x_1, ..., x_n$ đôi một phân biệt, thì $(\vec{\alpha}_{x_1}, ..., \vec{\alpha}_{x_n})$ độc lậ

tuyến tính, vì định thức:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (Định thức Vandermonde)}$$

b) Với mỗi $\vec{\alpha}_x \in \mathbb{R}^n$, tồn tại $f \in \mathscr{B}$ sao cho $g(\vec{\alpha}_x) = f(\vec{\alpha}_x)$.

Ta phải chứng minh $g \in \mathscr{B}$, nghĩa là có $f \in \mathscr{B}$ để $f(\vec{\alpha}_{x_i})$

$g(\vec{\alpha}_{x_i})$ trên bộ $(\vec{\alpha}_{x_1}, ..., \vec{\alpha}_{x_n})$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

Giả sử ngược lại, với mỗi $f \in \mathscr{B}$ có không quá (n - 1) số thự

phân biệt x_i để $g(\vec{\alpha}_{x_i}) = f(\vec{\alpha}_{x_i})$.

Do hợp đếm được các tập hợp hữu hạn phần tử là một tậ

hợp không quá đếm được, nên số các véc tơ $\vec{\alpha}_x \in \mathbb{R}^n$ mà $g(\vec{\alpha}_x$

$\in \mathscr{B}(\vec{\alpha}_x)$ là không quá đếm được. Điều này trái với giả thiế

Như vậy phải có cơ sở $(\vec{\alpha}_{x_1}, ..., \vec{\alpha}_{x_n})$ của $\mathbb{R}^n$ và có $f \in \mathscr{B}$ để $g(\vec{\alpha}_{x_i}$

$= f(\vec{\alpha}_{x_i})$ với mọi $i = \overline{1,n}$; như vậy $g = f \in \mathscr{B}$.

Cách 2. (Dành cho độc giả đã biết một số sự kiện của không gian metric).

Theo giả thiết với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^n$, có $f \in \mathscr{B}$ để $f(\alpha) = g(\alpha)$, như vậy $(f - g)(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \operatorname{Ker}(f-g)$.

Như vậy $\bigcup_{f} \{\operatorname{Ker}(f - g) \mid f \in \mathscr{B}\} = \mathbb{R}^n$.

Giả sử $g \notin \mathscr{B}$, như vậy với mọi $f \in \mathscr{B}$ thì $f - g \neq 0$, do vậy $\dim \operatorname{Ker}(f - g) \leq n - 1$. Vì vậy $\operatorname{Ker}(f - g)$ là một không gian con đóng, không đâu trù mật của $\mathbb{R}^n$. Điều này gây nên mâu thuẫn do $\mathbb{R}^n$ là không gian metric đầy với metric thông thường và định lý Baire nói rằng: một không gian metric đầy không thể bằng hợp đếm được của những tập hợp không đâu trù mật.

Ví dụ 2.9. Cho hai số nguyên dương r, n mà $r \leq n$;

$\mathscr{A} \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$, $\mathscr{A} = (a_{ij})$, rang $\mathscr{A} = r$ mà $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$.

Hãy chứng minh vết $\mathscr{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = r$. (Vết của ma trận $\mathscr{A}$ thường được kí hiệu bởi trace $\mathscr{A}$).

Lời giải:

Xét $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ có ma trận $\mathscr{A}$ trong cơ sở tự nhiên

$$e = \{e_1, \ldots, e_n\}.\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Theo giả thiết ta có $f^2 = f$.

Đặt $Y = \{\alpha - f(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^n\}$, khi đó $Y \subset \operatorname{Ker} f$, nên với $\alpha \in \mathbb{R}^n$ thì $x = \alpha - f(\alpha) \in \operatorname{Ker} f$, do vậy $\alpha = f(\alpha) + x \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

Ta có $\mathrm{Imf} \cap \mathrm{Kerf} = \{0\}$, thật vậy, giả sử $\beta \in \mathrm{Imf} \cap \mathrm{Kerf}$, thì có $\alpha \in \mathbb{R}^n$ để $f(\alpha) = \beta$ và do $\beta \in \mathrm{Kerf}$ nên $f(\beta) = 0$ suy ra:

$f(\beta) = f^2(\alpha) = f(\alpha) = \beta = 0$, vậy $\mathrm{Imf} \cap \mathrm{Kerf} = \{0\}$. Như vậy $\mathbb{R}^n$ $\mathrm{Imf} \oplus \mathrm{Kerf}$; $\dim \mathrm{Imf} = r$ và $f|\mathrm{Imf} = id$. Chọn cơ sở ε của $\mathbb{R}^n$ sao cho $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r\} \subset \mathrm{Imf}$, $\{\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n\} \in \mathrm{Kerf}$, thì trace f = trace $\mathcal{A} = r$.

Chú ý: Nhắc lại rằng nếu f là ánh xạ tuyến tính từ $\mathcal{V}$ đến $\mathcal{V}$ có ma trận $\mathcal{A} = (a_{ij})$ trong cơ sở $e = (e_1, ..., e_n)$ nào đó của $\mathcal{V}$ thì số $a_{11} +,...,+ a_{nn}$ không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở của $\mathcal{V}$, và được gọi là vết của ánh xạ tuyến tính f và được kí hiệu là trace f.

Ví dụ 2.10. Giả sử $\mathcal{V}$ và $\mathcal{W}$ là hai không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

Xét ánh xạ $\bar{f}$: $\quad \mathcal{V} / \mathrm{Kerf} \to \mathcal{W}$

$$[\alpha] \to \bar{f}[\alpha] = f(\alpha).$$

Hãy chứng tỏ $\bar{f}$ là đơn cấu tuyến tính và $\mathrm{Im}\bar{f} = \mathrm{Imf}$, từ đó $\bar{f}$ là đẳng cấu từ $\mathcal{V}/\mathrm{Kerf}$ lên Imf.

Lời giải:

Ánh xạ $\bar{f}$ là xác định, không phụ thuộc vào đại diện. Thật vậy, với $[\alpha] = [\alpha']$ thì $\alpha - \alpha' \in \mathrm{Kerf}$, từ đó $f(\alpha) = f(\alpha')$ hay $\bar{f}[\alpha] = \bar{f}[\alpha']$. Dễ thử thấy $\bar{f}$ là tuyến tính và $\mathrm{Im}\bar{f} = \mathrm{Imf}$. Ta chứng tỏ $\bar{f}$ là đơn cấu. Thật vậy với $[\alpha] \neq [\alpha']$ thì $\alpha - \alpha' \notin \mathrm{Kerf} \Rightarrow f(\alpha - \alpha') = f(\alpha) - f(\alpha') \neq 0$ do đó $f(\alpha) \neq f(\alpha')$ suy ra $\bar{f}[\alpha] \neq \bar{f}[\alpha']$. Như vậy $\bar{f}$ đơn cấu và do đó $\bar{f}$ là đẳng cấu từ $\mathcal{V}/\mathrm{Kerf}$ lên Imf.

Chú ý: nếu số chiều $\mathscr{V}$ hữu hạn, thì từ ví dụ trên ta có dim $\mathscr{V}$/Kerf = dim Imf suy ra dim $\mathscr{V}$ = dim Kerf + dim Imf.

Ví dụ 2.11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

Lời giải:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Đây là hệ phương trình Cramer.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 30 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -12; \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 30 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -16$$

Như vậy: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Ví dụ 2.12. Giải và biện luận theo tham số λ.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

a) Với $\lambda \neq 1$ và $\lambda \neq -2$. Đây là hệ Cramer.

và ta có $x_1 = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}$, $x_2 = \dfrac{1}{\lambda+2}$, $x_3 = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$

b) với $\lambda = 1$, ta có hệ tương dương với:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ hay } x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

ở đó x_1, x_2 lấy tùy ý

c) Với $\lambda = -2$. Hệ có dạng:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Cộng vế với vế của ba phương trình ta có 0 = 3, như vậy hệ vô nghiệm.

Ví dụ 2.13. Dùng phương pháp khử, hãy giải hệ phương trình:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 10x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 5x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & + & 10x_5 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 8x_4 & + & 10x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & + & 9x_4 & + & 12x_5 & = & 1 \end{array}\right. \qquad (I)$$

Lời giải:

Nhân hai vế của phương trình đầu với những số thích hợp, rồi cộng vào các phương trình khác, ta được hệ phương trình tương đương với hệ (I):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & -2 \\ & & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & -1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & + & 10x_5 & = & -3 \end{array}\right. \qquad (II)$$

Nhân phương trình thứ hai của hệ (II) với các số thích hợp rồi cộng vào các phương trình khác của hệ, ta được hệ tương đương:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcll} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 2 & (1) \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 & (2) \\ & & & & & & 2x_4 & + & 4x_5 & = & -2 & (3) \\ & & & & & & x_4 & + & 2x_5 & = & -1 & (4) \\ & & & & & & 3x_4 & + & 6x_4 & = & -3 & (5) \end{array}\right. \qquad (III)$$

Các phương trình thứ (3), (4), (5) trong hệ (III) là tương đương. Vì thế hệ (III) tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Giải hệ (IV), ta được:

$$\begin{cases} x_4 = -1 - 2x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_1 = 1 + 5x_3 + 3x_5 \end{cases} \quad \text{ở đó } x_3, x_5 \text{ tùy ý.}$$

Ví dụ 2.14. Cho hai ma trận A, B thuộc Mat (n, $\mathbb{K}$),

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.

Khi đó $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ được gọi là tổng hai ma trận A và B.

Chứng minh rằng:

1) $|\text{rang } A - \text{rang } B| \leq \text{rang } (A + B) \leq \text{rang } A + \text{rang } B$.

2) $\text{rang } A + \text{rang } B - n \leq \text{rang } (A B) \leq \min (\text{rang } A, \text{rang } B)$

3) Nếu $A^2 = E$, thì $\text{rang } (E + A) + \text{rang } (E - A) = n$. (ở đó E là ma trận đơn vị cấp n).

Lời giải:

1) Giả sử f, g là hai phần tử của End ($\mathbb{K}^n$), có ma trận A, B tương ứng trong một cơ sở $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ đã cho. Khi đó f + g có ma trận A + B. Vì $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}f + \text{Img}$, nên:

$$\dim(\text{Im}(f+g)) \leq \dim(\text{Im}f + \text{Img}) \leq \dim\text{Im}f + \dim\text{Img}.$$

Từ đó suy ra:

$$\text{rang}(A + B) \leq \text{rang } A + \text{rang}B.$$

Mặt khác:

$$\text{rang}A = \text{rang}(A+B-B) \leq \text{rang}(A+B) + \text{rang}(-B)$$

suy ra: $\text{rang}A \leq \text{rang}(A + B) + \text{rang}B$

Từ đó:

$$\text{rang}A - \text{rang}B \leq \text{rang } (A + B).$$

Tương tự: $\text{rang}B - \text{rang}A \leq \text{rang}(A + B)$. Vì vậy

$$|\text{rang}A - \text{rang}B| \leq \text{rang } (A + B)$$

2) Ta có $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $g: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ là hai ánh xạ tuyến tính, $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f|_{\text{Img}}) \subset \text{Im}f$ nên $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}A$.

Mặt khác: $\text{rang}(A.B) = \dim(\text{Im } f \circ g) \leq \dim\text{Im } f = \text{rang}B$.

Do vậy $\text{rang}(A \circ B) \leq \min(\text{rang}A, \text{rang}B)$.

Bây giờ ta chứng minh

$$\text{rang}A + \text{rang}B - n \leq \text{rang}(AB).$$

Ta có $\dim \mathbb{K}^n = n = \dim\text{Im}(f \circ g) + \dim\text{Ker}(f \circ g)$.

Mặt khác xét ánh xạ $\Phi: \text{Ker}(f \circ g)/\text{Ker}g \to \text{Ker}f \cap \text{Img}$

ở đó $\Phi[x] = g(x)$, với $x \in \text{Ker}(f \circ g)$. Dễ thấy Φ là đẳng cấu tuyến tính. Vì vậy:

$$\dim\text{Ker}(f \circ g) = \dim\text{Ker}g + \dim(\text{Ker}f \cap \text{Img}).$$

Từ đó $\dim \text{Im } (f \circ g) = n - \dim \text{Ker}(f \circ g)$

$$= \dim \text{Img} - \dim(\text{Ker}f \cap \text{Img}).$$

Như vậy:

$$\text{rang}(AB) = \text{rang}B - \dim(\text{Ker}f \cap \text{Im}g) \geq \text{rang}B - \dim\text{Ker}f$$

$\Rightarrow \text{rang}(A.B) \geq \text{rang}B + \text{rang}A - n.$

3) Vì $A^2 = E$ (E là ma trận đơn vị), nên:

$$(A - E)(A + E) = 0$$

Vì vậy, theo phần 2), ta có:

$$\text{rang}(A - E) + \text{rang}(A + E) - n \leq 0$$

$$\text{hay } \text{rang}(A - E) + \text{rang}(A + E) \leq n.$$

Mặt khác, theo phần 1)

$$\text{rang}(A+E) + \text{rang}(A-E) \geq \text{rang}2A = \text{rang}A = n$$

Do vậy $\text{rang}(A + E) + \text{rang}(A - E) = n.$

Ví dụ 2.15

Cho ma trận $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, còn các phần tử khác bằng 1 hoặc bằng p, ở đó p là một số nguyên lớn hơn 2. Chứng tỏ rằng $A \geq n-1$.

Lời giải:

Xét ma trận $B = (b_{ij}) \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$,

ở đó $b_{ij} = -1$ với mọi i, j. Khi đó rang$B = 1$.

và $A + B = (C_{ij})$, với $C_{ii} = -1$, còn các phần tử không thuộc đường chéo chính bằng 0 hoặc bằng $p - 1$.

Như vậy $\det(A+B) = (-1)^n \ (\text{mod}(p-1))$.

Do p-1 > 1 nên $\det(A+B) \neq 0$ hay rang(A+B) = n.

Nhưng theo ví dụ 14, ta có:

$$\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}A + \text{rang}B = \text{rang}A + 1$$

Do vậy $\text{rang}A \geq n-1$.

Ví dụ 2.16

Giả sử φ là một tự đồng cấu của không gian véc tơ phức n chiều V. Chứng minh rằng tồn tại các không gian véc tơ con φ - bất biến k chiều V_k:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V.$$

Lời giải:

$\varphi: V \to V$ là tự đồng cấu của $\mathbb{C}$ - không gian véc tơ V, nên có một véc tơ riêng $\overrightarrow{e_1}$.

Đặt $V_1 = \text{Vect}<\overrightarrow{e_1}>$, thì V_1 là không gian véc tơ con 1 chiều φ - bất biến.

Giả sử dã xây dựng dược các không gian con φ - bất biến V_1, V_2, ... V_k mà $V_1 = \text{Vect}<\overrightarrow{e_1}>$,

$V_2 = \text{Vect}<\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}>$..., $Vk = \text{Vect}<\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k}>$; $\dim V_k = k$.

Ta xét đồng cấu $\overline{\varphi_k} : V/V_k \longrightarrow V/V_k$.

$$[\vec{\alpha}] \mapsto [\varphi(\vec{\alpha})]$$

cảm sinh bởi đồng cấu φ. Do $\overline{\varphi_k}$ là tự đồng cấu của không gian véc tơ V/V_k trên trường số phức $\mathbb{C}$, nên có véc tơ riêng $\left[\vec{e}_{k+1}\right]$ ứng với giá trị riêng λ_{k+1}. Ta cần chứng minh:

$$V_{k+1} = \text{Vect}\left\{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}}\right\}$$

là không gian con k+1 chiều của V và là φ - bất biến.

Xét tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \overrightarrow{e_i} = \vec{0}$.

Nếu $\lambda_{k+1} \neq 0$ thì $\vec{e}_{k+1} \in V_k \Rightarrow [\vec{e}_{k+1}] = [\vec{0}]$, trái với việc chọn$[\vec{e}_{k+1}]$ là véc tơ riêng, vậy $\lambda_{k+1} = 0$ từ đó $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{e_i} = 0$ nên $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_k = 0$ do hệ $\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_k\}$ độc lập tuyến tính. Như vậy hệ $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính và $\dim V_{k+1} = k + 1$.

Ta chứng minh V_{k+1} là φ - bất biến. Chỉ cần chứng minh:

$$\varphi(\vec{e}_{k+1}) \in V_{k+1}.$$

Ta có $\overline{\varphi}_k\left[\vec{e}_{k+1}\right] = [\varphi(\vec{e}_{k+1})] = \lambda_{k+1}[\vec{e}_{k+1}] = [\lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1}]$

$\Rightarrow \varphi(\vec{e}_{k+1}) - \lambda \vec{e}_{k+1} \in V_k \subset V_{k+1}$, từ đó suy ra $\varphi(\vec{e}_{k+1}) \in V_{k+1}$.

Bằng cách đó, ta xây dựng được các không gian:

$$V_0 = 0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V \quad \varphi \text{ - bất biến}$$

Nhận xét: Ma trận của tự đồng cấu φ trong cơ sở $\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$ xây dựng ở trên có dạng tam giác trên. Dùng ngôn ngữ ma trận, ta có thể phát biểu: mọi ma trận phức vuông cấp n đều đồng dạng với một ma trận tam giác trên.

Ví dụ 2.17. (Định lý Hamilton - Cayley)

Cho V là một $\mathbb{K}$ - không gian véc tơ; $\varphi \in End(V)$; φ có ma trận A trong cơ sở $e = (e_i)$ $i = 1, \ldots n$; I_n - là ma trận đơn vị, khi đó $\det(A - xI_n)$ là một đa thức bậc n, được gọi là đa thức đặc trưng của tự đồng cấu φ. Dễ thấy đa thức này không phụ thuộc vào cở sở $e = (e_i)$ đã chọn. Ta cũng gọi đa thức trên là đa thức đặc trưng của ma trận A.

Giả sử $\det(A - xI_n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Khi đó ta có: $a_0A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_n = 0$

hay $a_0\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\varphi + a_n.Id = 0$.

Lời giải:

Xét ma trận B là ma trận chuyển vị của ma trận phù hợp của $A - xI_n$. Các phần tử của ma trận B là những đa thức của x với hệ tử trong trường $\mathbb{K}$, có bậc không quá n-1. Ta viết:

$$B = B_0 + B_1x + \ldots + B_{n-2} . x^{n-2} + B_{n-1} . x^{n-1}$$

trong đó $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ là những ma trận vuông cấp n, không phụ thuộc x. Theo tính chất của ma trận phù hợp, ta có:

$$(B_0 + B_1x + \ldots + B_{n-1} . x^{n-1}) . (A - xI_n) = \det(A - xI_n). I_n =$$

$$= (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n). I_n.$$

Ta có một hệ các đẳng thức sau:

$$B_0 A = a_n. I_n.$$

$$B_1A - B_0 = a_{n-1} . I_n .$$

$$B_2A - B_1 = a_{n-2} . I_n.$$

. . . .

$$B_{n-1}A - B_{n-2} = a_1 I_n.$$

$$-B_{n-1} = a_0 I_n.$$

Nhân vế với vế của các đẳng thức trên lần lượt với I_n, A, A^2 ... A^n rồi cộng lại, ta được:

$$a_0A^n + a_1A^{n-1} + ... + a_{n-1}A + a_nI_n = 0.$$

Chú ý: Định lý Hamilton-Cayley thường được phát biểu:

Mọi ma trận vuông đều là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó.

Ví dụ 2.18. Giả sử B là ma trận lũy linh, A là ma trận giao hoán với B. Hãy chứng minh:

$$\det(A + B) = \det A.$$

Lời giải:

a) Xét trường hợp detA = 0.

Giả sử n là bậc lũy linh của B, nghĩa là $B^n = 0$. Ta có:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = A\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k A^{k-1} B^{n-k}\right).$$

Vì detA = 0 nên $\det(A+B)^n = 0$. Vì vậy

$$\det(A + B) = 0 = \det A.$$

b) Trường hợp detA $\neq 0$.

Do $AB = BA$ nên $BA^{-1} = A^{-1}B$.

Theo giả thiết B lũy linh, nghĩa là có số n để $B^n = 0$, từ đó $(A^{-1}B)^n = 0$ vì vậy $A^{-1}B$ lũy linh. Như vậy tồn tại ma trận không suy biến C để $C^{-1}(A^{-1}B).C$ là ma trận được tạo bởi những ma trận vuông dạng:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nằm dọc theo đường chéo chính, từ đó ta có $\det(I + A^{-1}B) = 1$, ở đó I là ma trận đơn vị cùng cấp với B và A.

Như vậy $\det(A + B) = \det[A(I + A^{-1}B)] = \det A. \det(I + A^{-1}B) = \det A$.

Ví dụ 2.19. Giả sử V là một không gian véc tơ trên trường K và $f \in End_K(V)$. Chứng minh rằng Kerf = Imf khi và chỉ khi $f^2 = 0$ và tồn tại $h \in End_K(V)$ để $h \circ f + f \circ h = Idv$.

Lời giải:

Điều kiện đủ: Từ $f^2 = 0$ suy ra $Imf \subset Kerf$.

Bây giờ ta chứng minh $Kerf \subset Imf$. Với W là không gian con bất kỳ của V, ta có:

$$(h \circ f + f \circ h)(W) \subset h \circ f(W) + f \circ h(W).$$

Do ta có $h \circ f + f \circ h = Id_V$ nên

$W \subset h \circ f(W) + f \circ h(W)$ với mọi $W \subset V$.

Lấy W = Kerf, thì f(W) = 0 và ta có:

$Kerf \subset f \circ h(Kerf) \subset Imf$.

Như vậy Kerf = Imf.

Điều kiện cần

Giả sử $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f = V_1$. Gọi V_2 là phần bù tuyến tính của V_1 trong V nghĩa là $V = V_1 \oplus V_2$; $p_1: V \longrightarrow V_1$ là phép chiếu chính tắc, nghĩa là với $x \in V$, $x = x_1 + x_2$, $x_i \in V_i$ thì $p_1(x) = x_1$.

Xét ánh xạ $\tilde{f}: \quad V_2 \longrightarrow V_1.$

$$x_2 \mapsto \tilde{f}(x_2) = f(x_2).$$

Dễ thấy $\tilde{f}$ là đẳng cấu. Đặt $h = \tilde{f}^{-1} \circ p_1$, ta có:

$$f \circ h(x) = f.\ \tilde{f}^{-1}.\ p_1(x) = p_1(x) = x_1.$$

Tương tự $\quad h \circ f(x) = h \circ f(x_1 + x_2) = h \circ f(x_2)$

$$= \tilde{f}^{-1} \circ p_1 \circ f(x_2) = \tilde{f}^{-1}.\ f(x_2) = \tilde{f}^{-1}.\ \tilde{f}(x_2) = x_2.$$

Do vậy $(f \circ h + h \circ f)(x) = x_1 + x_2 = x$.

Do đó $f \circ h + h \circ f = Id_V$.

Từ giả thiết $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f$ suy ra $f^2 = 0$.

Ví dụ 2.20. Giả sử V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Với mỗi đa thức $P \in \mathbb{K}[x]$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, đặt $P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i$ thuộc $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Dễ thấy $\Phi: \mathbb{K}[x] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ $\Phi(P) = P(f)$ là một đồng cấu tuyến tính.

Đa thức P_f được gọi là đa thức tối tiểu của tự đồng cấu f nếu $P_f(f) = 0$ và nếu $Q(f) = 0$ thì P_f là ước của đa thức Q, với $Q \in \mathbb{K}[x]$.

1) Giả sử V_1 là không gian con của V bất biến đối với f và $f_1 = f|V_1$ là đồng cấu cảm sinh. Chứng tỏ rằng đa thức tối tiểu P_1 của f_1 là ước của da thức tối tiểu P_f.

2) Giả sử rằng V phân tích được thành tổng các không gian con bất biến đối với f: $V = \sum_{i=1}^{p} V_i$, f_i là dồng cấu cảm sinh trên V_i và P_i là đa thức tối tiểu của f_i. Chứng tỏ rằng P_f là bội chung nhỏ nhất của các đa thức P_i.

Lời giải:

1) Vì $f|_{V_1} = f_1$ nên với mọi $Q \in \mathbb{K}[x]$, ta có $Q(f) = Q(f_1)$ trên V_1. Nếu P_f là đa thức tối tiểu của f, thì $P_f(f_1) = 0$. Do vậy P_f là bội của đa thức tối tiểu P_1 của f_1.

Ta cũng nhận thấy rằng P_1 không nhất thiết là ước thực sự của P_f, khi V_1 là không gian con thực sự của V. Ví dụ nếu $f = \lambda Id_V$, thì ta có $P_f = P_1 = x - \lambda$ với mọi $V_1 \subset V$.

2) V_i là không gian con f -bất biến, nên do câu 1), đa thức tối thiểu P_f chia hết cho P_i với mọi i = 1, 2, ..., p. Do vậy P_f chia hết cho bội chung nhỏ nhất P của P_i.

Ta chứng minh $P(f) = 0$. Thật vậy, với mọi i = 1, ..., p ta có $P = Q_i \cdot P_i$ từ đó với mọi $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, $P(f)(x) = \sum_{i=1}^{p} P(f)(x_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{p} P(f_i)(x_i) = \sum_{i=1}^{p} Q_i(f_i)P_i(f_i)(x_i) = 0, \text{ do } P_i(f_i) = 0 \text{ với mọi i.}$$

Như vậy $P(f) = 0$, từ đó P chia hết cho da thức tối tiểu P_f của tự đồng cấu f.

C - BÀI TẬP

§1. KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

2.1. Cho ma trận $X \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{R})$

$$X = (a_{ij}),\ A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$ là cột thứ j của ma trận X, ($j = 1,2,\ldots, m$).

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các cột của ma trận $X.X^t$.

Chứng minh rằng các không gian con của $\mathbb{R}^n$ sinh bởi $A_1, \ldots, A_m$ và sinh bởi $B_1, \ldots, B_n$ trùng nhau, từ đó suy ra $\mathrm{rang}X = \mathrm{rang}(X.X^t)$.

2.2. Chứng minh rằng mỗi ma trận hạng r đều viết được dưới dạng tổng của r ma trận hạng một.

2.3. Cho $\mathbb{E}$ và $\mathbb{F}$ là hai $\mathbb{K}$ - không gian véc tơ và $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Các véc tơ $x_1, \ldots, x_r$ thuộc Keru; $y_1, \ldots, y_s$ là những véc tơ bất kỳ thuộc $\mathbb{E}$. Chứng minh rằng hai trong ba khẳng định sau kéo theo khẳng định thứ ba.

1) $\{x_1, \ldots, x_r\}$ là cơ sở của Keru.

2) $\{u(y_1), \ldots, u(y_s)\}$ là cơ sở của Imu.

3) $\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ là cơ sở của E.

Từ đó suy ra nếu E hữu hạn chiều thì

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}u) + \dim(\mathrm{Im}u).$$

2.4. a) Giả sử E và F là hai không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$, $\dim E = \dim F = n$. $u \in \mathrm{Hom}_K(E, F)$. Chứng minh rằng u đơn cấu khi và chỉ khi u toàn cấu.

b) Nêu ví dụ chứng tỏ rằng nếu E và F có số chiều vô hạn, mệnh đề trên không đúng nữa.

2.5. Cho σ là một phép thế bậc n và $u \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ xác định bởi:

$$u(Z_1, ..., Z_n) = (Z_{\sigma(1)}, Z_{\sigma(2)}, \dots, Z_{\sigma(n)}).$$

a) Hãy tìm ma trận A của u trong cơ sở tự nhiên $\{e_1, ..., e_n\}$ của $\mathbb{C}^n$.

b) Tìm tất cả các ma trận $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ giao hoán được với A.

2.6. Xét không gian véc tơ E hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$.

a) Giả sử $\{e_1, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của E, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là những vô hướng đôi một khác nhau, $u \in \mathrm{End}(E)$ xác định bởi $u(e_i) = \alpha_i e_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Chứng minh rằng nếu $v \in \mathrm{End}(E)$ và $u.v = v.u$ thì tồn tại những vô hướng $\beta_1,...,\beta_n$ sao cho $v(e_i) = \beta_i e_i$.

b) Chứng minh rằng nếu tự đồng cấu tuyến tính u giao hoán với mọi tự đồng cấu tuyến tính của E, thì tồn tại vô hướng $\lambda \in \mathbb{K}$ để $u(x) = \lambda x$ với mọi $x \in E$.

2.7. Cho $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$; $\det(A) \neq 0$; V là một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $u_j \in \mathrm{End}(V)$, $j = 1, ..., n$. Chứng minh rằng nếu các tự đồng cấu tuyến tính $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$ $(i = 1, 2,...,n)$ giao hoán với nhau, thì các u_j cũng giao hoán với nhau.

2.8. Giả sử $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ và trong mỗi dòng của A có đúng một số khác không, bằng ± 1. Chứng minh rằng:

a) $A^t = A^{-1}$

b) Có số tự nhiên m để $A^m = A^t$.

2.9. Cho V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $u \in End(V)$, x là véc tơ của V thỏa mãn $u^q(x) = 0$ và $u^{q-1}(x) \neq 0$ với một số nguyên dương q nào đó. Chứng minh rằng hệ $\{x = u^0(x), u(x), \dots, u^{q-1}(x)\}$ lập thành một hệ độc lập tuyến tính.

2.10. Giả sử V là $\mathbb{R}$ - không gian véc tơ n chiều; $f, g \in End(V)$, Id là ánh xạ đồng nhất của V. Chứng minh rằng nếu $Id - g \circ f$ là đẳng cấu của V thì $f \circ g - Id$ cũng là đẳng cấu của V.

2.11. a) Hai tự đồng cấu $u, v \in End_K(V)$ được gọi là tương đương nếu có các đẳng cấu p, q của V sao cho $u \circ p = q \circ v$. Chứng tỏ rằng u và v tương đương khi và chỉ khi chúng có cùng hạng.

b) Từ a) suy ra rằng nếu $X \in Mat(n, \mathbb{K})$, hạng $X = r$, thì tồn tại các ma trận không suy biến $P, Q \in Mat(n, \mathbb{K})$ sao cho:

$X = Q \cdot \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P$ ở đó $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp n có góc trên bên trái là ma trận đơn vị I_r cấp r.

2.12. a) Cho V là không gian véc tơ n chiều trên trường $\mathbb{K}$ và $u, v \in End(V)$ sao cho $u \circ v = 0$.

Chứng minh rằng hạng(u) + hạng(v) $\leq n$.

b) Chứng minh rằng với mọi tự đồng cấu $u \in End(V)$ đều tồn tại tự đồng cấu $v \in End(V)$ sao cho $u \circ v = 0$ và

$$\text{hạng}(u) + \text{hạng}(v) = n.$$

2.13. Cho E, F, G, H là các không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$, $u \in Hom(F, G)$, u có hạng r. Hãy tìm hạng của các ánh xạ tuyến tính sau:

a) $\varphi: Hom(E, F) \to Hom(E, G)$

$$v \mapsto u \circ v$$

b) $\Psi: Hom(G, H) \to Hom(F, H)$

$$\omega \mapsto \omega \circ u$$

2.14. Cho E là không gian véc tơ n chiều, $u, v \in End(E)$ sao cho rang $(u - Id_E) = r$, rang$(V - Id_E) = s$. Chứng minh rằng rang$(u \circ v - Id_E) \leq r + s$.

2.15. Cho E là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $u \in End(E)$, rang $u = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $\lambda \in \mathbb{K}$ để $u^2 = \lambda u$, hơn nữa, nếu $\lambda \neq 1$ thì $Id_E - u$ là đẳng cấu.

2.16. Giả sử V là không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$; dim $V = n$; $f \in End(V)$.

Chứng minh rằng có số N nguyên dương sao cho rang $(f^k) =$ rang (f^{k+1}) với mọi $k \geq N$.

2.17. Cho ma trận $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ mà $a_{ii} = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận $B, C \in Mat(n, \mathbb{R})$ để $A = BC - CB$.

2.18. Cho hai ma trận A, B $\in$ Mat (n, $\mathbb{K}$).

a) Chứng minh rằng ma trận A đồng dạng với λ In thì $A=\lambda I_n$ $\lambda \in \mathbb{K}$, In là ma trận đơn vị.

b) Nếu A, B là hai ma trận đồng dạng, thì A^2 đồng dạng với B^2, A^t đồng dạng với B^t và nếu A, B khả nghịch, thì A^{-1} đồng dạng với B^{-1}.

2.19. Chứng minh rằng mỗi ma trận vuông cấp hai trên trường K đều đồng dạng với ma trận chuyển vị của nó.

2.20. a) Chứng minh rằng tự đồng cấu tuyến tính u $\in$ End(V) thỏa mãn điều kiện

$u^2 (Id - u) = u (Id - u)^2 = 0$ thì u lũy đẳng, nghĩa là $u^2 = u$.

b) Hãy tìm phép biến đổi tuyến tính không lũy đẳng u thỏa mãn $u^2 (Id - u) = 0$.

c) Hãy tìm phép biến đổi tuyến tính không lũy đẳng u thỏa mãn $u (Id - u)^2 = 0$.

2.21. Cho V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$.

a) Nếu f, g là những dạng tuyến tính trên không gian véc tơ V thỏa mãn $f(x) = 0$ nếu $g(x) = 0$, thì có vô hướng $\alpha \in \mathbb{K}$ để $f = \alpha . g$.

b) Cho f, $f_1, ..., f_n$ là những dạng tuyến tính trên không gian véc tơ V sao cho $f(x) = 0$ nếu $f_i(x) = 0$, i = 1, 2, ..., n. Chứng minh rằng tồn tại những vô hướng $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sao cho $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$.

2.22. Xét không gian véc tơ n chiều V với cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$ và V^* là không gian liên hợp của V, nghĩa là không gian các dạng tuyến tính trên V. Với mỗi i = 1, 2, ..., n xác định dạng tuyến tính $f_i \in V^*$ bởi:

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\{f_1, ..., f_n\}$ là cơ sở của V* và do đó.dim V* = dim V = n. Cơ sở $\{f_1, ..., f_n\}$ được gọi là cơ sở liên hợp hay cơ sở đối ngẫu với cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$.

2.23. Chứng minh rằng nếu $f_1, ..., f_m$ là những dạng tuyến tính trên không gian véc tơ n chiều V, với m < n thì tồn tại phần tử $x \neq 0$ trong V sao cho $f_i(x) = 0$ với mọi i = 1, 2, ..., m. Từ đó hãy suy ra một kết quả về nghiệm của hệ phương trình thuần nhất.

2.24. Cho V* là không gian liên hợp của không gian véc tơ V; $u \in End(V)$. Xét $u^*: V^* \to V^*$ xác định bởi $u^*(y) = y \circ u$.

a) Chứng minh rằng u* là phép biến đổi tuyến tính của V*, u* được gọi là phép biến đổi tuyến tính liên hợp với u.

b) Xét cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$ (1) của V và cơ sở $\{f_1, ..., f_n\}$ (2) của V* liên hợp với cơ sở (1). Chứng minh rằng ma trận $(\beta_{ij})_n$ của u* trong cơ sở (2) là ma trận chuyển vị của $(\alpha_{ij})_n$ của u trong cơ sở (1), nghĩa là $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ với mọi $1 \leq i, j \leq n$.

2.25. Cho V* là không gian liên hợp với không gian véc tơ V, S là bộ phận của V. Kí hiệu S^0 là tập tất cả các phần tử $f \in V^*$ sao cho f(x) = 0 với mọi $x \in S$.

a) Chứng minh S^0 là không gian con của V*

b) Chứng minh rằng nếu dimV = n và S là không gian con m chiều của V thì dim S^0 = n-m.

2.26. Giả sử V^* là không gian liên hợp với V, T là một bộ phận của V^*. Kí hiệu T^0 là tập tất cả các $x \in V$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $f \in T$.

a) Chứng minh T^0 là không gian con của V.

b) Xét $S \subset V$ và $S^0 \subset V^*$ được định nghĩa ở bài 2.25. Chứng minh rằng $(S^0)^0$ là không gian con của V sinh bởi S. Đặc biệt, nếu S là không gian con thì $(S^0)^0 = S$.

c) Giả sử V hữu hạn chiều. Chứng minh $(T^0)^0$ là không gian con của V^* sinh bởi T.

Đặc biệt, nếu T là không gian con của V^* thì $(T^0)^0 = T$.

d) Chứng tỏ rằng nếu V vô hạn chiều thì trong V^* có không gian con T sao cho $(T^0)^0 \neq T$.

2.27. Cho V^* là không gian liên hợp của không gian véc tơ V. $\{V_i\}_{i \in I}$ là họ những không gian con của V. Chứng minh:

a) $\bigcap\limits_{i \in I} V_i^0 = \left(\sum\limits_{i \in I} V_i\right)^0$

b) $\left(\bigcap\limits_{i \in I} V_i\right)^0 = \sum\limits_{i \in I} V_i^0$ nếu V hữu hạn chiều.

c) Khẳng định b) vẫn đúng nếu I hữu hạn, còn V có thể vô hạn chiều.

d) Khẳng định b) không còn đúng nếu I vô hạn và V vô hạn chiều.

2.28. Cho $(T_i)_{i \in I}$ là họ các không gian con của không gian V^* liên hợp với không gian véc tơ V.

Chứng minh:

a) $\left(\sum_{i\in I} T_i\right)^0 = \bigcap_{i\in I} T_i^0$.

b) $\left(\bigcap_{i\in I} T_i\right)^0 = \sum_{i\in I} T_i^0$ nếu V hữu hạn chiều.

c) Nếu V có số chiều vô hạn, thì trong V^* có hai không gian con T_1 và T_2 để $(T_1 \cap T_2)^0 \neq T_1^0 + T_2^0$.

2.29. Cho E là tổng trực tiếp của hai không gian con V và W; $x \in E$ viết được duy nhất dưới dạng $x = y + z$; $y \in V$ và $z \in W$. Ta gọi phép chiếu của E lên V song song với W là đồng cấu tuyến tính $p: E \to E$ xác định bởi $p(x) = y$.

Chứng minh rằng đồng cấu tuyến tính $p: E \to E$ là phép chiếu khi và chỉ khi $p^2 = p$.

2.30. Cho E là không gian véc tơ và $p \in End(E)$. Chứng minh rằng p là phép chiếu khi và chỉ khi Id – p là phép chiếu. Khi đó Imp = Ker (Id-p); Kerp = Im (Id-p).

2.31. Cho V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f \in End(V)$. Chứng minh rằng $f^2 = 0$ khi và chỉ khi $Imf \subset Kerf$.

Chứng minh rằng trong trường hợp này $g = Id + f$ là một tự đẳng cấu của V.

2.32. Cho V là không gian véc tơ hữu hạn chiều và $u \in End(V)$.

a) Chứng minh rằng có hai cơ sở $\{e_1, ..., e_n)$ và $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ của V và số nguyên s $(0 \le s \le n)$ sao cho $u(e_i) = \varepsilon_i$ với $i \le s$ và $u(e_i) = 0$ với $s < i \le n$.

b) Từ đó suy ra tồn tại tự đẳng cấu tuyến tính v của V sao cho $v \circ u$ là phép chiếu.

2.33. a) Cho p là một phép chiếu của không gian hữu hạn chiều V. Chứng minh rằng trong V có cơ sở trong đó ma trận $A = (a_{ij})$ của p có dạng đặc biệt: $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$;

$a_{ii} = 1$ nếu $1 \le i \le s$ và $a_{ii} = 0$ nếu $i > s$.

b) Tự đồng cấu tuyến tính u được gọi là đối hợp nếu $u^2 = id$. Chứng minh rằng đẳng thức $u = 2p - id$ thiết lập một song ánh từ tập tất cả các phép chiếu p trong V lên tập tất cả các đối hợp u. Ở đây V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ với đặc số khác hai.

c) Từ a) và b) có thể nói gì về ma trận của phép đối hợp trên một không gian hữu hạn chiều.

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.34. Tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

2.35. Cho hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \\ -3x_1 + 7x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 - \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Hãy giải và biện luận theo λ hệ phương trình trên.

2.36. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} a(b-c)x + b(c-a)y + c(a-b)z = 0 \\ (b-c)x^2 + (c-a)y^2 + (a-b)z^2 = 0 \end{cases}$$

Giả sử a, b, c đôi một phân biệt. Chứng tỏ rằng hệ trên có ghiệm hoặc $x = y = z$ hoặc

$$\frac{x}{ab - bc + ca} = \frac{y}{bc - ca + ab} = \frac{z}{ca - ab + bc}.$$

2.37. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = d \end{cases}$$

2.38. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x + my + z = b \\ 3x + y - mz = c \end{cases}$$

2.39. Tìm điều kiện cần và đủ để 4 điểm $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ không có 3 điểm nào thẳng hàng nằm trên một đường tròn.

2.40. Tìm đa thức bậc 3 với hệ số thực f(x) sao cho f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3 và f(3) = 16.

2.41. Cho $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ sao cho det A = 0. Gọi A_{ij} là phần phụ đại số của phần tử a_{ij}, giả thiết $A_{11} \neq 0$.

Hãy tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

§3. CẤU TRÚC CỦA MỘT TỰ ĐỒNG CẤU

2.42. Chứng minh rằng mỗi giá trị riêng của phép chiếu đều bằng 0 hoặc 1 và mỗi giá trị riêng của phép đối hợp đều bằng 1 hoặc bằng –1. (xem bài 2.29 và 2.33).

2.43. Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp.

a) Chứng minh rằng nếu A, B đồng dạng thì chúng có cùng một đa thức đặc trưng.

b) Chứng minh rằng nếu A, B có cùng đa thức đặc trưng, thì det A = det B.

c) Các khẳng định đảo của a) và của b) có đúng không?

2.44. Giả sử φ là một tự đồng cấu của không gian véc tơ thực n chiều V, trong một cơ sở nào đó có ma trân A. Chứng minh rằng đa thức đặc trưng của φ có dạng:

$P\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + ... + c_k(-\lambda)^{n-k} + ... + c_n$. Trong đó c_k tổng của tất cả các định thức con chính cấp k của ma trận A,)ịnh thức con chính là định thức con lập nên từ các dòng và ıc cột với chỉ số giống nhau).

2.45. Giả sử φ là tự đồng cấu của không gian véc tơ V n ıiều trên trường $\mathbb{K}$.

Giả sử λ_0 là một nghiệm của đa thức đặc trưng của φ, λ_0 có ội p. Kí hiệu $r = \text{rang}\,(\varphi-\lambda_0 Id)$.

Hãy chứng minh $1 \le n - r \le p$.

2.46. Hãy tìm nghiệm đặc trưng của ma trận $A \in Mat\,(n, \mathbb{C})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.47. Tìm đa thức đặc trưng của ma trận vuông cấp n.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Từ đó suy ra mỗi đa thức bậc n với hệ tử cao nhất $(-1)^n$ đều à đa thức đặc trưng của một ma trận vuông cấp n nào đó.

2.48. Giả sử V là không gian véc tơ n chiều trên trường $\mathbb{K}$, $\varphi \in \text{End}(V)$, λ_o là một giá trị riêng của φ, $\mathscr{P}\lambda_o$ là không gian con riêng của V, ứng với giá trị riêng λ_o. Chứng minh rằng số chiều của $\mathscr{P}\lambda_o$ không vượt quá số bội p của nghiệm λ_o của đa thức đặc trưng của φ. Hãy chỉ ra ví dụ trong đó $\dim \mathscr{P}\lambda_o < p$.

2.49. Cho σ là một phép thế bậc n và $u \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ xác định bởi:

$$u(Z_1, ..., Z_n) = (Z_{\sigma(1)}, ..., Z_{\sigma(n)}).$$

Hãy tìm đa thức đặc trưng và các giá trị riêng của tự đồng cấu u.

2.50. Cho $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, trong cơ sở tự nhiên $\{e_1, ..., e_n\}$ có ma trận $A = (a_{ij})$, ở đó $a_{ii} = a$ với mọi i và $a_{ij} = b$ với $i \neq j$; $a \neq b$.

Hãy tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ để ma trận của f trong cơ sở đó có dạng chéo.

2.51. Cho $A, B \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$.

a) Chứng minh rằng các ma trận AB và BA có cùng tập hợp các giá trị riêng

b) Hỏi AB và BA có cùng đa thức đặc trưng hay không?

2.52. Giả sử V là không gian véc tơ phức hữu hạn chiều, $f \in \text{End}(V)$ mà có số N, nguyên dương để $f^N = \text{Id}$. Chứng minh rằng trong V có cơ sở gồm những véc tơ riêng của f.

2.53. Giả sử ma trận $S \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ có tính chất: Với mọi ma trận $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$, ta luôn viết được một cách duy nhất dưới dạng $A = A_1 + A_2$, ở đó A_1 giao hoán với S và A_2 phản giao hoán với S, nghĩa là $A_1S = SA_1$, $A_2S = -SA_2$.

Chứng minh rằng $S^2 = \lambda I_n$, I_n là ma trận đơn vị.

2.54. Cho E là không gian véc tơ hữu hạn chiều và $f \in End(E)$. Với mỗi i = 1, 2, ... đặt $V_i = \ker(f^i)$ và $W_i = Im(f^i)$.

a) Chứng minh $V_i \subset V_{i+1}$ với mọi i = 1, 2, ... và tồn tại số m để $V_m = V_{m+1}$ và khi đó $V_m = V_{m+j}$ với mọi $j \neq 1$.

b) Chứng minh $E = V_m \oplus W_m$ với m tìm được trong câu a).

c) V_m và W_m tìm được trong a) là những không gian con bất biến đối với f. Hơn nữa, f lũy linh trên V_m và khả nghịch trên W_m.

2.55. Cho V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ bằng $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$), $\varphi \in End(V)$ và φ lũy linh. Chứng minh rằng:

a) Mọi giá trị riêng của φ đều bằng 0.

b) Nếu dim V = n thì đa thức đặc trưng của φ là $(-\lambda)^n$.

2.56. Chứng minh rằng nếu φ là tự đồng cấu của không gian véc tơ phức hữu hạn chiều mà mọi giá trị riêng đều bằng không thì φ lũy linh.

2.57. Giả sử V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và dim V = n. $f \in End(V)$ là tự đồng cấu lũy linh của V. Chứng minh rằng $f^n = 0$.

2.58. Giả sử V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ và $f \in End(V)$, rang f = 1.

Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của V để trong đó m
trận của f có dạng:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Nếu f có ma trận ở dạng thứ hai, thì f lũy linh và $f^2 = 0$.

2.59. Chứng tỏ rằng nếu hai tự đồng cấu f, g của khôn
gian V thỏa mãn hệ thức $f \cdot g - g \cdot f = Id$ (1) thì với mọi $k \in$ I
ta có: $f.g^k - g^k.f = k.g^{k-1}$ (2).

Từ đó suy ra rằng không thể tồn tại các tự đồng cấu th
mãn hệ thức (1).

2.60. Chứng minh rằng, đối với họ bất kỳ các toán tử tuyế
tính giao hoán với nhau từng đôi một trong không gian véc
hữu hạn chiều trên trường số phức, tồn tại véc tơ riêng chun
cho tất cả các toán tử tuyến tính của họ đó.

D. HƯỚNG DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

§1. KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍN

2.1. Giả sử V, W lần lượt là các không gian sinh bởi A_1, .
A_m và $B_1, \dots, B_n$. Với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ thì $B_i = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \dots$
$a_{im}A_m$. Do đó $W \subset V$. Để chứng minh $W = V$, ta chỉ cần chứn
minh $\dim W \geq \dim V$.

Ta có $\dim W = \text{rang}\,(X \cdot X^t) = n - d$, trong đó d bằng s
chiều của không gian H các nghiệm của phương trình:

$$(t_1, ..., t_n).(X.X^t) = (0, 0, ..., 0).$$

Nếu $Y = (t_1, ..., t_n) \in H \Rightarrow Y.XX^t = 0$

$\Rightarrow X.X^t.Y^t = 0 \Rightarrow Y.X.X^t.Y^t = (Y.X).(Y.X)^t = 0$

$\Rightarrow Y.X = 0$. Như vậy $Y \in M$ là không gian nghiệm của phương trình $(t_1, ..., t_n).X = 0$ từ đó $\dim W = n - d \geq n - \dim M = \text{rang } X = \dim V$.

Do đó $W = V$.

2.2. Giả sử $A_1, ..., A_n$ là các véc tơ cột của ma trận X hạng r. Có thể giả thiết $A_1, ..., A_r$ độc lập tuyến tính. Khi đó các A_i; $r < i \leq n$ biểu thị tuyến tính qua $A_1, ..., A_r$.

$$A_i = \alpha_{i1}A_1 + \alpha_{i2}A_2 + ... + \alpha_{ir}A_r$$

Nếu dùng kí hiệu $(A_1, A_2, ..., A_n)$ để chỉ ma trận có các véc tơ cột là $A_1, A_2, ..., A_n$ thì

$$X = (A_1, ..., A_n) = (A_1, O, ..., O, \alpha_{r+1,1}A_1, ..., \alpha_{n1}A_1) +$$
$$+ (O, O, ..., A_r, \alpha_{r+1,r}A_r, ..., \alpha_{nr}A_r).$$

Mỗi ma trận ở vế phải có hạng 1. Ta có điều phải chứng minh.

2.4. b) Xét R [x] là không gian véc tơ các đa thức với hệ số thực.

Xét u: $\quad R[x] \to R[x]$

$\quad f(x) \to x.f(x)$.

Rõ ràng u là đơn cấu, nhưng không toàn cấu, vì Imu không chứa những đa thức bậc không.

2.5. a) Theo cách xác định của u thì trong cơ sở tự nhiên $\{e_1, ..., e_n\}$ của $\mathbb{C}^n$, ta có $u(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Vậy $A = (a_{ij})$ là ma trận của u trong cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$ thì

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ với } i = \sigma(j) \\ 0 \text{ với } i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

b) Giả sử $B = (b_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{C})$

Xem B là ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ s
tự nhiên của C^n : $v(e_j) = \sum_i b_{ij}e_i$. Khi đó $AB = BA \Leftrightarrow uv = vu$ <
$uv(e_j) = vu(e_j)$ $j = 1, 2, ..., n \Leftrightarrow \sum_i b_{ij}\, u(e_i) = v(e_{\sigma(j)})$, $j = 1, ..., n$ <
$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(j)}e_i = \sum_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)\sigma(j)}e_{\sigma(i)} \Leftrightarrow b_{ij} = b_{\sigma(i)\,\sigma(j)}$ với mọi i, j
1, ..., n, như vậy, các ma trận giao hoán được với A là các m
trận $B = (b_{ij})$ sao cho $b_{ij} = b_{\sigma(i)\,\sigma(j)}$ với mọi i, j = 1, 2, ..., n.

2.6. a) Dễ dàng.

b) Giả sử $u \in End_K(E)$ giao hoán với mọi tự đồng cấu v
$End_K(E)$. Theo a) $u(e_i) = \beta_i e_i$ với $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở nào đó của E
Giả sử $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ ta hãy chứng minh $\beta_i = \beta_j$. Chọn v
$End_K(E)$ sao cho $v(e_k) = e_j$ $\forall_k$ 1, 2, ..., n. Từ $v \circ u = u \circ v$ suy r
$v \circ u(e_i) = u \circ v(e_i)$. Như vậy $\beta_i\, e_j = u(e_j) = \beta_j e_j \Rightarrow (\beta_i - \beta_j)\, e_j = 0$ =
$\beta_i - \beta_j = \lambda$. Từ đó $u(x) = \lambda x$ với mọi $x \in E$.

2.7. Ta có thể biểu diễn n đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = v_i$ (i = 1, 2
..., n) dưới dạng đẳng thức ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Vì ma trận $A = (a_{ij})$ không suy biến, nên có ma trận nghịch đảo $B = A^{-1} = (b_{ij})$.

Do b(au) = (ba) u với mọi vô hướng a, b và với mọi phép biến đổi tuyến tính u nên ta có:

$$B.\left[A.\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\right] = [B.A].\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Hay $u_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j$.

Theo giả thiết, các v_j giao hoán với nhau, nên suy ra các u_i cũng giao hoán với nhau.

2.8. a) Vì A không suy biến nên mỗi cột của nó cũng có đúng một phần tử khác không.

Giả sử $A = (a_{ij})$, $\quad A^t = \left(a_{ij}^t\right), a_{ij}^t = a_{ji}$

Đặt $A.A^t = \mathbb{B} = (b_{ij})$. Ta có

$$b_{ij} = \sum_k a_{ik} \, . \, a_{kj}^t = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$$

Vì vậy $A.A^t = In \Rightarrow A^t = A^{-1}$.

b) Cách 1: Gọi G là tập các ma trận dạng trên.

Ta thấy $A \in G$, $B \in G$ thì $A . B \in G$, $A^{-1} = A^t \in G$. Do đó G làm thành nhóm con của nhóm GL (n, $\mathbb{R}$) các ma trận vuông cấp n không suy biến. Vì số các phần tử của nhóm G là hữu hạn, nên với $A \in G$, tồn tại $k \in N$ $k \geq 1$, để $A^k = I_n \Rightarrow A^{k-1} = A^{-1} = A^t$, như vậy $A^m = A^t$ với $m = k - 1 \in N$.

Cách 2: Giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở tự nhiên của $\mathbb{R}^n$, $f \in End(\mathbb{R}^n)$ có ma trận A trong cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$. Ta có $f(e_i) = \pm e_{\sigma(i)}$, ở đó σ là phép thế bậc n. Với mỗi i = 1, 2, ..., n xét $\sigma(i)$, $\sigma^2(i)$, ..., $\Rightarrow$ tồn tại k_i để $\sigma^{ki}(i) = i$, khi đó $f(e_i) = \pm e_{\sigma^{ki}(i)} = \pm e_i \Rightarrow f^{2ki}(e_i) = e_i$

Đặt $k = 2 . k_1 ... k_n$ thì $f^k(e_i) = e_i$ $\forall_i = 1, ..., n$ hay $f^k = Id \Rightarrow A^k = In$, lấy $m = k - 1$ ta có $A^m = A^{k-1} = A^t$.

2.10. Giả sử f.g – Id không là đẳng cấu của V, khi đó tồn tại $x \in V$, $x \neq 0$ để $(f \circ g - id)(x) = 0$. Hay $f \circ g(x) = x$. Đặt $g(x) = y \in V$, ta có $f(y) = x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$.

Xét $(Id - g \circ f)(y) = y - g(f(y)) = y - g(x) = y - y = 0$. Điều này chứng tỏ rằng có $y \neq 0$ để $(Id - g \circ f)\, y = 0$, trái với giả thiết $Id - g \circ f$ là đẳng cấu.

2.11. a) Dễ thấy u, v tương đương thì có cùng hạng. Ngược lại, nếu hạng u = hạng v = r, theo bài 2.3, trong V có các cơ sở $\{e_i, ..., e_n\}$, $\{e'_i, ..., e'_n\}$ để $u(e_i) = e'_i$ (i = 1, ..., r), $u(e_j) = 0$ (j > r), và có các cơ sở $\{\varepsilon_i, ..., \varepsilon_n\}$, $\{\varepsilon'_i, ..., \varepsilon'_n\}$ để $v(\varepsilon_i) = \varepsilon_i'$ với i = 1, ..., r, $v(\varepsilon_j) = 0$, j > r. Xét $p \in End(V)$ $p(\varepsilon_i) = e_i$ với mọi i = 1, ..., n; Xét $q \in End(V)$ sao cho $q(\varepsilon'_i) = e'_i$ (i = 1, ..., n) thì $u \circ p = q \circ v$.

b) Suy ra từ a)

2.12. a) Dễ dàng do Imv $\subset$ Keru và dim Imu + dim keru = dim V.

b) Xét cơ sở $\{e_1, ..., e_n\}$ và $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ của V sao cho $u(e_i) = \varepsilon_i$ (i = 1, 2, ..., r) và $u(e_j) = 0$ (j > r). Xét v $\in$ End (V): $v(\varepsilon_i) = 0$ (i = 1, ..., r); $v(\varepsilon_j) = \varepsilon_j$ với $r + 1 \leq j \leq n$. Khi đó $v \circ u = 0$ và hạng u + hạng v = n.

2.13. a) rang φ = dim E x r

b) rang ψ = dim H x r.

2.14. Đặt $u_1 = u - Id_E$, $v_1 = v - Id_E$.

Từ đó $u.v - Id_E = (u_1 + Id_E)(v_1 + Id_E) - Id_E =$

$= u_1 . v_1 + u_1 + v_1 = u_1 (v_1 + Id_E) + v_1$ nhưng rang $u_1 (v_1 + Id_E) \leq$ rang u_1 và rang $\{u_1(v_1 + Id_E) + v_1] \leq$ rang $u_1 (v_1 + Id_E)$ + rang v_1.

Do vậy: rang $(u \circ v - Id_E) \leq$ rang u_1 + rang v_1 = r + s. (xem ví dụ 2.14).

2.15. Vì rang u = 1 $\Rightarrow$ dim (Imu) = 1. Giả sử $\{x_0\}$ là cơ sở của Imu. Do $u(x_o) \in$ Imu nên có $\lambda \in \mathbb{K}$: $u(x_0) = \lambda x_o$.

Ta hãy chứng minh $u^2 = \lambda u$. Với $x \in E \Rightarrow u(x) = \alpha . x_0 \Rightarrow u^2(x) = \alpha\, u(x_0) = \alpha . \lambda x_0 = \lambda\, \alpha . x_0 = \lambda u(x)$ với mọi $x \in E \Rightarrow u^2 = \lambda u$.

Giả sử $\lambda \neq 1$, tìm η để $(Id - u)(Id - \eta u) = Id$.

Điều đó tương đương với $(\eta\lambda - \eta - 1)\, u = 0 \Rightarrow \eta = \dfrac{1}{\lambda - 1}$. Vậy Id-u khả nghịch và nghịch đảo của nó là: $Id + \dfrac{1}{1-\lambda} u$.

2.17. HD: Chọn B là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính khác nhau đôi một: $b_1, ..., b_n$. Chọn $C = (a_{ij})$ sao cho $C_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{b_i - b_j}$ với $i \neq j$ và C_{ii} tùy ý, thì $A = BC - CB$.

2.19. Giả $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{K})$. Hãy chứng tỏ có $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,(2, \mathbb{K})$, $\det P \neq 0$ để $XP = P.X^t$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bz = by \\ (a-d)y = cx - bt \\ (a-d)z = cx - bt \\ cy = cz, \quad xt \neq zy \end{cases} \qquad (1)$$

Xét các trường hợp sau:

+) $b = c = 0$, chọn $y = z = 0$, $x = t = 1$

+) $a = d$, chọn $y = z = 1$ và $x = t = 0$

+) $b^2 + c^2 > 0$ và $a \neq d$: chẳng hạn $b \neq 0$,

chọn $x = 0$, $t = 1$, $y = \dfrac{-b}{a-d} = z$.

Như vậy trong mọi trường hợp, hệ (1) đều có nghiệm

2.20. a) Từ $u^2\,(Id - u) = 0$ suy ra $u^2 = u^3$

Từ $u\,(Id - u)^2 = 0$ suy ra $u - u^2 - u^2 + u^3 = 0$

Vì vậy $u^2 = u$.

b) Ví dụ $V = \mathbb{R}^3$, $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, 0)$

Ta thấy $u^2 \neq u$ nhưng $u^2 = u^3$.

c) $V = \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2 - x_3, x_3)$

Ta có $v^2 \neq v$ nhưng $v(Id - v)^2 = 0$.

Chú ý: Có thể nêu nhiều ví dụ khác nữa.

2.21. a) Nếu $g(x) = 0$ với mọi $x \in V$ thì $f(x) = 0$ với mọi $x \in V$ và $f = \alpha \,.\, g$ với $\alpha \in \mathbb{K}$ bất kỳ. Nếu có $x_o \in V$ mà $g(x_o) \neq 0$.

Đặt $\alpha = \dfrac{f(x_o)}{g(x_o)}$.

Ta chứng minh $f(x) = \alpha\, g(x)$ với mọi $x \in V$.

Vì $g(x_o) \neq 0$ nên $g(x) = \xi \,.\, g(x_o)$, khi đó:

$g(x - \xi x_o) = 0 \Rightarrow f(x - \xi x_o) = f(x) - \xi f(x_o) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \xi \,.\, f(x_o) = \frac{g(x)}{g(x_o)} \,.\, f(x_o) = \alpha . g(x).$$

b) HD: chứng minh quy nạp theo n.

n = 1 đúng vì đây là trường hợp a).

Giả sử bài toán đúng với k = 1, 2, ..., n – 1. Ta chứng minh đúng với n.

Trường hợp 1: Nếu có i để $\bigcap\limits_{j \neq i} \mathrm{Ker} f_j \subset \mathrm{Ker}\, f_i$ thì $\bigcap\limits_{j \neq i} \mathrm{Ker} f_j = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i \subset \mathrm{Ker} f$. Như vậy theo giả thiết quy nạp, ta có

$$f = \sum_{j \neq i} \alpha_j f_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \;\; ; \;\; (\alpha_i = 0)$$

Trường hợp 2: Với mỗi i, $\bigcap_{j\neq i} \text{Ker } f_j \not\subset \text{Ker } f_i$

Khi đó với mỗi i (i = 1, 2, ..., n) có $x_i \in V$ để $f_i(x_i) \neq 0$ và $f_j(x_i) = 0$ ($j \neq i$). Đặt $\alpha_i = \dfrac{f(x_i)}{f_i(x_i)}$

Ta chứng minh được $f = \alpha_1 . f_1 + ... + \alpha_n . f_n$.

2.23. Ta chứng minh $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker} f_i \neq \{0\}$.

Hãy chứng minh quy nạp rằng dim ($\bigcap_{i=1}^{n}$ Kerf_i) $\geq n - 1$ với $1 \leq t \leq n$.

Từ đó suy ra kết quả: Mỗi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình ít hơn số ẩn đều có nghiệm khác không.

2.25. a) Dễ dàng

b) HD: xét $\{x_1, ..., x_m\}$ là cơ sở của S, $\{x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n\}$ là cơ sở của V. Với mỗi i = m+1, ..., n, xét $f_i \in V^*$: $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – kí hiệu Kronecker). Ta thấy $f_i \in S^0$.

Hãy chứng minh $\{f_{m+1}, ..., f_n\}$ là cơ sở của S^0.

Từ đó dim $S^0 = n - m$.

2.26. a) Hiển nhiên

b) Theo bài 2.25, S^0 là không gian con của V^*, $(S^0)^0$ là không gian con của V. Với $x \in S$, thì, $F \in S^0$, ta có $f(x) = 0 \Rightarrow x \in (S^0)^0$. Để chứng minh $(S^0)^0$ sinh bởi S. Ta giả sử W là không gian con của V, $S \subset W$. Ta chứng tỏ $(S^0)^0 \subset W$. Với $x \notin W \Rightarrow \exists\, f \in V^*$ để $f(w) = 0$ và $f(x) \neq 0$; Khi đó vì $S \subset W$ nên $f(S) = 0 \Rightarrow f \in S^0$.

Nhưng $f(x) \neq 0$ nên $x \notin (S^0)^0$. Như vậy với $x \notin W \Rightarrow x \notin (S^0)^0$ từ đó $(S^0)^0 \subset W$ và như vậy $(S^0)^0$ là không gian sinh bởi S.

c) Ta có $(T^0)^0$ là không gian con của V^* và $T \subset (T^0)^0$.

Giả sử W^* là không gian con của V^* và $W^* \supset T$.

Ta chứng tỏ $(T^0)^0 \subset W^*$.

Giả sử $\{f_1, ..., f_m\}$ là cơ sở của W^*. Nếu $f \in V^* \setminus W^*$ thì f không là tổ hợp tuyến tính của các $\{f_1, ..., f_m\}$. Do đó, theo bài 2.21, có $x \in V$ để $f_i(x) = 0$ $(i = 1, ..., m)$ nhưng $f(x) \neq 0$. Vì $\{f_i\}$ là cơ sở của W^* và $f_i(x) = 0$ với mọi $i = 1, 2, ... m$ nên $g(x) = 0$ với mọi $g \in W^*$ và do đó, với mọi $g \in T$ (vì $T \subset W^*$). Từ đó $x \in T^0$, Nhưng $f(x) \neq 0 \Rightarrow f \notin (T^0)^0$.

Chứng minh trên chứng tỏ $(T^0)^0 \subset W^*$, nghĩa là $(T^0)^0$ là không gian con của V^*, sinh bởi T.

d) HD. Giả sử $(x_i)_{i \in I}$ là cơ sở của không gian V, I – tập vô hạn; với $i \in I$, xét $f_i \in V^*$: $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – kí hiệu Kronecker).

Xét T là không gian con của V^*, sinh bởi $\{f_i\}_{i \in I}$.

Hãy chứng minh $(T^0)^0 = V^*$ nhưng $T \neq V^*$. (ví dụ $f \in V^*$ mà $f(x_i) = 1$ với mọi $i \Rightarrow f \notin T$).

2.27. a) và b) dễ dàng

c) chỉ cần chứng minh nếu V_1, V_2 là hai không gian con của V, thì $(V_1 \cap V_2)^0 = V_1^0 + V_2^0$

Ta có $V_1 \cap V_2 \subset V_1, V_2 \Rightarrow V_1^0 \subset (V_1 \cap V_2)^0, V_2^0 \subset (V_1 \cap V_2)^0$

$\Rightarrow V_1^0 + V_2^0 \subset (V_1 \cap V_2)^0$.

Để chứng minh $(V_1 \cap V_2)^0 \subset V_1^0 + V_2^0$, lấy $f \in (V_1 \cap V_2)^0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in V_1 \cap V_2$. Ta chứng minh $f \in V_1^0 + V_2^0$. Xét W_1 là không gian con bù của $V_1 \cap V_2$ trong $V_1 \Rightarrow V_1 = W_1 \oplus (V_1 \cap V_2)$; tương tự xét W_2 sao cho: $V_2 = W_2 \oplus (V_1 \cap V_2)$ và $V = (V_1 \cap V_2) \oplus W$. Khi đó V là tổng trực tiếp của $V_1 \cap V_2$, W_1, W_2, W.

Chọn g, h $\in V^*$ xác định bởi:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \in V_1 \cap V_2 \text{ hoặc } x \in W_1 \\ f(x) \text{ nếu } x \in W_2 \text{ hoặc } x \in W \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \in V_1 \cap V_2 \text{ hoặc } x \in W_2 \text{ hoặc } x \in W. \\ f(x) \text{ nếu } x \in W_1 \end{cases}$$

Rõ ràng $g \in V_1^0$, $h \in V_2^0$ và $f = h + g$.

Như vậy $(V_1 \cap V_2)^0 \subset W_1^0 + V_2^0$. Từ đó $(V_1 \cap V_2)^0 = V_1^0 + V_2^0$.

d) Ví dụ chứng tỏ khẳng định b) không còn đúng nếu I vô hạn và V có chiều vô hạn.

Giả sử (e_i) $i \in I$ là cơ sở vô hạn phần tử của V, mỗi phần tử của V có dạng $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ trong đó α_i hầu hết bằng không, trừ một số hữu hạn.

Với mỗi $i \in I$, ký hiệu V_i là không gian con của V gồm các phần tử $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ với $\alpha_i = 0$.

Ta có $\bigcap_{i \in I} V_i = 0 \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} V_i)^0 = V^*$.

Trong khi đó $V_i^0 = \{f \in V^* \mid f(e_j) = 0 \ \forall_j \neq i\}$.

Do đó V_i^0 là không gian con sinh bởi f_i (Nhắc lại $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ – bài 2.26) mà $\sum_{i \in I} V_i^0 \neq V^*$ (bài 2.26).

2.28. c) Giả sử $\{e_i\}$ $i \in I$ là cơ sở vô hạn của V; $f_i \in V^*$ sao cho $f_i(e_j) = \delta_{ij}$

T_1 là không gian con sinh bởi $\{f_i\}$, $T_1 \neq V^*$ (xem bài 2.26). Xét $f \in V^*$ sao cho $f(e_i) = 1$ với mọi $i \in I$, xét T_2 là không gian sinh bởi $f \Rightarrow T_2 \cap T_1 = \{0\} \Rightarrow (T_2 \cap T_1)^0 = V$; nhưng $T_1^0 = \{0\} \subset V$.

$T_2^0 \neq V$ vì T_2^0 chỉ chứa các phần tử $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ mà $\sum_{i \in I} \alpha_i = 0$. Như vậy $(T_2 \cap T_1)^0 \neq T_1^0 + T_2^0$.

2.30. Ta có p là phép chiếu $\Leftrightarrow p^2 = p$

$\Leftrightarrow \mathrm{Id} - p - p + p^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2 = \mathrm{Id} - p$

$\Leftrightarrow (\mathrm{Id} - p)^2 = (\mathrm{Id} - p) \Leftrightarrow \mathrm{Id} - p$ là phép chiếu.

Bây giờ nếu $y \in \mathrm{Im}p$ thì $y = p(x) \Rightarrow (\mathrm{Id} - p)(y) = 0$

$\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$.

Ngược lại, nếu $y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) \Rightarrow (\mathrm{Id} - p)(y) = 0$

$\Rightarrow p(y) = y \Rightarrow y \in \mathrm{Im}p$.

Như vậy, nếu p là phép chiếu thì $\mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$.

Để ý rằng $p = \mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - p)$, ta có $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - p)$.

2.32. a) trường hợp u = 0 là tầm thường.

Giả sử $u \neq 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, u) = s > 0$.

Giả sử $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s\}$ là cơ sở của Imu. Khi đó có e_i ($i = 1, ..., s$) sao cho $u(e_i) = \varepsilon_i$. Ta có dim (Keru) = n – s. Lấy $\{e_{s+1}, ..., e_n\}$ là cơ sở của V (xem bài tập 2.3). Chỉ cần bổ sung để có cơ sở $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s, ... \varepsilon_n\}$ thì ta được hai cơ sở cần tìm.

b) Xét $v \in \text{End}(V)$ mà $v(\varepsilon_i) = e_i$, $i = 1, ..., n$ thì $v \circ u$ là phép chiếu của V lên không gian sinh bởi $\{e_1, ..., e_s\}$ song song với không gian con sinh bởi $\{e_{s+1}, ..., e_n\}$.

§ 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.34. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ rang } A = 2.$$

Như vậy không gian nghiệm có số chiều 3.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{9}x_3 - \frac{4}{9}x_4 - \frac{7}{9}x_5. \\ x_2 = \frac{5}{9}x_3 + \frac{2}{9}x_4 - \frac{1}{9}x_5. \end{cases}$$

Ta có một hệ nghiệm cơ bản, chẳng hạn là:

$\vec{\alpha}_1 = (-4, 2, 3, 3, 3)$

$\vec{\alpha}_2 = (-7, -1, 0, 0, 9)$

$\vec{\alpha}_3 = (-1, 5, 9, 0, 0)$

2.35. HD. Hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi nh thức của hệ bằng không $\Leftrightarrow \lambda = 35$. Khi đó hạng của ma n các hệ số bằng 3 $\Rightarrow$ không gian nghiệm 1 chiều.

2.36. HD. Coi hệ đã cho là hệ phương trình thuần nhất với biến $(b-c)x$, $(c-a)y$, $(a-b)z$. Ta dẫn đến hệ thức:

$$\frac{(b-c)x}{bz-cy} = \frac{(c-a)y}{cz-ay} = \frac{(a-b)z}{ay-bx} = \frac{1}{k}.$$

Để hệ có nghiệm không tầm thường, ta phải có $k = \pm 1$.

2.37. $$x_1 = \frac{1}{4}(-a+b+c+d)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(a-b+c+d)$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(a+b-c+d)$$

$$x_4 = \frac{1}{4}(a+b+c-d)$$

2.38. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}, \det A = 2m(2-m).$$

a) với $m \neq 0$ và $m \neq 2 \Rightarrow$ Hệ là hệ Cramer.

b) $m = 0$, rang $A = 2$ vì $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

Điều kiện có nghiệm là $\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = a + b - c = 0$.

Khi đó $\begin{cases} x = b - z \\ y = a - 2b + 3z, \quad z \text{ tùy ý} \end{cases}$

c) m = 2 ⇒ rang A = 0.

Điều kiện có nghiệm: $-5a + b + 3c = 0$

Khi đó $\begin{cases} x = z + \dfrac{2a - b}{3} \\ y = -z + \dfrac{2b - a}{3} \end{cases}$

2.39. ĐS: $\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2.40, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\begin{cases} f(-1) & = & -a + b - c + d & = & 0 \\ f(1) & = & a + b + c + d & = & 4 \\ f(2) & = & 8a + 4b + 2c + d & = & 3 \\ f(3) & = & 27a + 9b + 3c + d & = & 16 \end{cases}$$

Từ đó: $a = 2$, $b = -5$, $c = 0$, $d = 7$

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$

2.41. Ta có $A = (a_{ij})$, nên $\sum_{l=1}^{n} a_{il} A_{jl} = 0$ (1) (i = 1, 2, ..., n)

Do $A_{11} \neq 0$, nên rang A = n-1 và không gian nghiệm của (1) có số chiều 1. Hay rang $(A_{ij}) = 1$.

Từ đó hệ $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = 0$ (i = 1, 2, ... n) tương đương với $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + ... + A_{1n}x_n = 0$.

Ta có một hệ nghiệm cơ bản, chẳng hạn là:

$$\vec{\alpha}_1 = (-A_{12}, A_{11}, 0, ... 0)$$

$$\vec{\alpha}_2 = (-A_{13}, 0, A_{11}, ... 0)$$

....

$$\vec{\alpha}_{n-1} = (-A_{1n}, 0, 0, ... A_{11})$$

§3. CẤU TRÚC CỦA MỘT TỰ ĐỒNG CẤU

2.42. Giả sử u là phép chiếu $\Rightarrow u^2 = u$. Nếu x là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda \Rightarrow u(x) = \lambda x$.

$\Rightarrow u^2(x) = u(x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$. Nhưng $u^2 = u$ nên: $\lambda^2 x = \lambda x \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)x = 0$. Do $x \neq 0$ nên $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ hoặc $\lambda = 1$.

Tương tự đối với phép đối hợp $v^2 = Id$.

2.43. câu a), b) dễ dàng.

c) Đảo của a) không đúng. Ví dụ:

Cho A = In (ma trận đơn vị), **B =** mà trận tam giác dưới mà các phần tử đều bằng 1. Khi đó det (A-λIn) = det (B-λIn) = $(1 - \lambda)^n$. Nhưng A và B không đồng dạng, vì A chỉ đồng dạng với chính nó (xem bài 2.18).

Đảo của b) cũng không đúng. Ví dụ: Chọn A là ma trận (cấp $n > 1$) và $B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$; $B = (b_{ij})$ mà $b_{11} = 1$, còn $b_{ij} = 0$ mọi $(i, j) \neq (1, 1)$.

Khi đó $\det A = \det B = 0$, nhưng $\det(A - \lambda In) = (-\lambda)^n$ còn $(B - \lambda In) = (1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1}$.

2.44.Vì $\varphi \in \text{End } V$, trong cơ sở nào đó có ma trận A nên thức đặc trưng của φ có dạng:

$$|A - \lambda In| = (-\lambda)^n + C_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + C_n.$$

Dễ thấy $C_n = \det A$ (cho $\lambda = 0$). C_k là hệ số của các số hạng số mũ $(-\lambda)^{n-k}$, được tạo thành bởi tích của n-k phần tử tr đường chéo chính dạng: $\left(a_{i_1 i_1} - \lambda\right)\ldots\left(a_{i_{n-k} i_{n-k}} - \lambda\right)$ với các phần trong khai triển định thức $|A - \lambda In|$, không chứa λ và nằ trong các dòng, cột bù với các dòng, cột có chỉ số $\{i_1 \ldots i_{n-k}\}$. Đó định thức con chính cấp k của A có các phần tử trên đường ch chính với chỉ số bù với $\{i_1 \ldots i_{n-k}\}$. Vì bộ $\{i_1 \ldots i_{n-k}\}$ là tùy ý, nên số của $(-\lambda)^{n-k}$ chính bằng tổng tất cả các định thức con chí dạng trên.

2.45. *Cách 1.* Giả sử A là ma trận của φ trong cơ sở nào của V, thì $r = \text{rang}(\varphi - \lambda_o Id) = \text{rang}(A - \lambda_o I)$. Giả sử X là véc cột, X thuộc không gian riêng P_{λ_0} ứng với giá trị riêng λ_0 khi chỉ khi $(A - \lambda_o I)X = 0 \Rightarrow \dim P_{\lambda_0} = n\text{-}r$. Gọi R_{λ_0} là không gi riêng suy rộng ứng với giá trị riêng λ_o, thì $\dim R_{\lambda_0} = p$ (bội c λ_0), mà $P_{\lambda_0} \subset R_{\lambda_0}$ nên $n - r \leq p$. Mặt khác do $\det|A - \lambda_o I| = 0$, n $r < n \Rightarrow 1 \leq n - r$. Vậy $1 \leq n - r \leq p$.

Cách 2. Đặt B = A - λ_oI. Khi đó $|B - \mu I| = |A - (\mu+\lambda_0)I| = |A - \lambda I|$, với $\lambda = \mu + \lambda_0$. Như vậy $\lambda = \lambda o$ là nghiệm bội p của $|A - \lambda I| = 0$ thì $\mu = 0$ là nghiệm bội p của $|B - \mu I| = 0$. Theo bài 2.44, $|B - \mu I| = (-\mu)^n + C_1(-\mu)^{n-1} + ... + C_k (-\mu)^{n-k} + ... + C_n$ ở đó C_k là tổng của các định thức con chính cấp k của B. Do rang B = r nên các định thức con chính cấp k > r đều triệt tiêu $\Rightarrow C_k = 0$ với mọi k > r.

Vậy $|B - \mu I| = (-\mu)^n + C_1(-\mu)^{n-1} + ... + C_s (-\mu)^{n-s}$, $s \le r$.

Do đó $p = n - s \ge n - r$.

2.46. ĐS. $\lambda_k = 2i \cos \dfrac{\Pi k}{n+1}$, k = 1, 2, ..., n.

HD. Xem bài 1.19, câu a) đặt $\alpha + \beta = -\lambda$, $\alpha.\beta = -1$.

2.47. Gọi p(x) là đa thức đặc trưng của ma trận A.

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & & O \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & & a_o - \lambda \end{pmatrix}$$ Khai triển theo dòng cuối ta có:

$$P(\lambda)=(-1)^{n+1}a_{n=1}\det\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+2}a_{n-2}\det\begin{pmatrix} -\lambda & & 0 \\ & 1 & \\ * & & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ ... + (-1)^{2n}(a_o - \lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \ddots \\ & & -\lambda \end{pmatrix}$$

Như vậy:

$$P(\lambda) = (-1)^{n+1}(a_{n-1} + a_{n-2}\lambda + ... + a_0\lambda^{n-1}) + (-1)^n . \lambda^n.$$

Kết quả tiếp theo suy ra từ công thức này.

2.49. HD: Phân tích σ thành tích các vòng xích độc lậ $\sigma = T_p ... T_2 . T_1$; giả sử $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở tự nhiên của C^n, th $u(e_i) = e_{\sigma_i}$. Sắp xếp lại cơ sở $\{e_i\}$ theo thứ tự thích hợp ta được c sở mới của C^n sắp thành P nhóm, mỗi nhóm gồm m_R véc t (m_k bằng độ dài T_k), $k = 1, ..., p$. Chẳng hạn nhóm thứ nhất gồ $\{e'_1, ..., e'_{m1}\}$ thì $u(e'_i) = e'_{i+1}, ..., u(e'_{m1}) = e'_1$. Tương tự cho cá nhóm khác. Vì vậy. Đa thức đặc trưng của u có dạng

$|A - \lambda In| = D_1 ... D_p$ ở đó D_k là đa thức bậc m_k dạng:

$$D_k = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{m_k+1} + (-\lambda)^{m_k}$$

$= (-1)^{m_k}(\lambda^{m_k} - 1)$. Như vậy

$$|A - \lambda I_n| = (-1)^n(\lambda^{m_1} - 1)...(\lambda^{m_p} - 1)$$

2.50. HD. Theo ví dụ 1.20 (chương 1), ta có det $(A - \lambda I) = ($ $- b - \lambda)^{n-1} . (a + (n-1) b - \lambda)$.

Các giá trị riêng của f là: $a - b$ (bội $n - 1$) và $a + (n-1) b$. vớ $\lambda = a - b$, có $(n-1)$ véc tơ riêng độc lập tuyến tính thỏa mãn $t_1 + ... + t_n = 0$.

Với $\lambda = a + (n-1)\, b$, có 1 véc tơ riêng: $t_1 = t_2 = ... = t_n = 1$.

Vậy có thể chọn cơ sở $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 0 \dots 0), \dots, \mathbf{x}_{n-1}\,(1, 0, 0, \dots, -1)$ và $\mathbf{x}_n\,(1, 1, \dots, 1)$ gồm các véc tơ riêng của f.

2.51. HD. Xét đẳng thức ma trận:

$$\begin{pmatrix} \lambda In - AB & A \\ O & \lambda In \end{pmatrix} \begin{pmatrix} In & O \\ B & In \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} In & O \\ B & In \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda In & A \\ O & \lambda In - BA \end{pmatrix}.$$

a) Ta có $\det(\lambda In - AB)\,.\,\lambda^n = \lambda^n \det(\lambda In - BA)$.

+) với $\lambda \neq 0$, Ta có $\det(AB - \lambda In) = \det(BA - \lambda In)$ nên AB và BA có cùng giá trị riêng khác không.

+) Với $\lambda = 0$, do det AB = det BA, nên nó cũng có nghiệm chung $\lambda = 0$.

b) Do $\det(AB - \lambda In) = \det(BA - \lambda In)$ với mọi λ, nên hai đa thức đặc trưng của AB và của BA trùng nhau.

2.52. Xét cơ sở $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ của V, trong đó ma trận f được tạo bởi m khung Gioóc đăng ứng với m giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & & O \\ 1 & \lambda_k & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ O & & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \text{ cấp của } A_k \text{ bằng } \dim \mathbb{R}_{\lambda_k}$$

($\mathbb{R}_{\lambda_k}$-không gian riêng suy rộng ứng với giá trị riêng λ_k). Vì $\mathbb{R}_{\lambda_k}$ là không gian con bất biến của f, nên theo giả thiết ta có $A_k^N = I_{n_k}$ (I_{nk} là ma trận đơn vị cấp $\dim \mathbb{R}_{\lambda_k} = n_k$. Ta có $A_k^N =$

$$\left(\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}\right)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i \lambda_k^i J_{n_k}^{N-i}, \text{ ở đó } J_{n_k} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nếu $n_k > 1$, thì $J_{n_k}^{N-i}$ có các phần tử chéo bằng 0 với mọi i, vì vậy A_k^N có phần tử chéo bằng 0 với mọi N, điều đó trái giả thiết. Vì vậy $n_k = 1$ mọi k. Nghĩa là ma trận của f trong cơ sở $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ có dạng chéo, hay $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ là cơ sở gồm những véc tơ riêng của f.

2.53. Ta có bổ đề: Với $S \in Mat(n, \mathbb{K})$, det S = 0 thì có ma trận $M \in Mat(n, \mathbb{K})$, $M \neq 0$ để $MS = 0$. Trước hết ta sử dụng bổ đề trên để chứng minh bài toán.

Giả sử $S \in Mat(n, \mathbb{K})$ có tính chất: mọi ma trận $A \in Mat(n, \mathbb{K})$ đều viết được một cách duy nhất ở dạng $A = A_1 + A_2$, $SA_1 = A_1S$, $SA_2 = -A_2S$.

Ta nhận thấy S phải không suy biến, nếu ngược lại S suy biến thì theo bổ đề trên có ma trận $M \neq 0$ để $MS = SM = 0$; Khi đó $O = M + (-M) = O + O$ là hai phân tích ma trận O, thỏa mãn điều kiện bài toán, trái với giả thiết và tính duy nhất.

Với mỗi $A \in Mat(n, \mathbb{K})$, ta có thể tìm được A_1, A_2 từ điều kiện:
$$\begin{cases} SA = SA_1 + SA_2 \\ AS = A_1S + A_2S = SA_1 - SA_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2S.A_1 = S.A + A.S \\ 2S.A_2 = SA - A.S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}\left(A + S^{-1}.A.S\right) \\ A_2 = \frac{1}{2}\left(A - S^{-1}.A.S\right) \end{cases}$$

Vì $A_1 . S = S.A_1$ nên từ hệ thức trên ta có

$AS + S^{-1}A . S^2 = SA + AS$ từ đó $AS^2 = S^2A$.

Với mọi $A \in Mat(n, \mathbb{K}) \Rightarrow S^2 = \lambda$ In (xem ví dụ 1.19); $\lambda \neq 0$ vì S không suy biến.

Chứng minh bổ đề: xét $\underline{P}$ là đa thức tối tiểu của ma trận S (chỉ cần xét $S \neq 0$). Giả sử $P = x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_{k-1}x + a_k$, $k \geq 1$, và $P(S) = S^k + a_1S^{k-1} + ... + a_{k-1}S + a_k . In = O$. Với $S \neq 0$. Ta nhận thấy $k > 1$, vì nếu $k = 1$ thì $P(S) = S + a_1 . I_n = O$

$\Rightarrow S = a_1 . I_n$; do S suy biến nên $S = O$.

Ta lại thấy $a_k = O$, vì nếu $a_k \neq 0$ thì S khả nghịch, trái giả thiết. Như vậy:

$S(S^{k-1} + a_1 S^{k-2} + ... + a_{k-1} . I_n) = O$.

Đặt $M = S^{k-1} + a_1S^{k-2} + ... + a_{k-1} . I_n \neq O$, ta có $SM = MS = O$.

2.54. a) Dễ dàng

b) Nhận thấy $V_m \cap W_m = \{0\}$. Thật vậy, giả sử $x \in V_m \cap W_m$ $\Rightarrow f^m(x) = 0$ và có $y \in E$ để $f^m(y) = x$, từ đó $f^{2m}(y) = 0 \Rightarrow y \in V_{2m} = V_m$ $\Rightarrow f^m(y) = x = 0$.

Như vậy $\dim(V_m + W_m) = \dim V_m + \dim W_m = \dim E \Rightarrow E = V_m \oplus W_m$.

c) Rõ ràng V_m và W_m tìm được trong a) là những không gian con bất biến đối với f. Vì $f^m(V_m) = 0$ nên f lũy linh trên V_m. Để chứng minh f khả nghịch trên W_m, giả sử $x \in W_m$ và $f(x) = 0$, từ đó có $y \in E$ để $f^m(y) = x \Rightarrow f^{m+1}(y) = 0 \Rightarrow y \in V_{m+1} \Rightarrow y \in V_m \Rightarrow$ $f^m(y) = x = 0$, như vậy f/W_m là đơn ánh nên nó là song ánh.

2.56.

Cách 1: Đa thức đặc trưng của φ có dạng $P_\varphi(\lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n$. Theo định lý Haminton – Cayley. Ta có $\varphi^n = 0 \Rightarrow \varphi$ lũy linh.

Cách 2: Theo ví dụ 2.16, ta có thể chọn một cơ sở trong đó ma trận A của φ có dạng tam giác trên. Theo giả thiết các phần tử trên đường chéo chính bằng không, dó đó $A^n = 0 \Rightarrow \varphi^n = 0 \Rightarrow \varphi$ lũy linh.

2.57. Cách 1. Giả sử q là số nguyên dương bé nhất để $f^q = 0$. Vì $f^{q-1} \neq 0$ nếu có véc tơ $x \in V$ để $f^{q-1}(x) \neq 0$, $f^q(x) = 0$. Theo bài tập 2.9, ta có $\{x, f(x), ..., f^{q-1}(x)\}$ độc lập tuyến tính. Từ đó $q \leq n$. Vì $f^q = 0 \Rightarrow f^n = 0$.

Cách 2: Đặt $W^i = \mathrm{Im}(f^i)$. Ta có $W^1 \supset W^2 \supset ...$ từ đó có $m \leq n$ để $W^m = W^{m+1}$, vì nếu không ta có $n = \dim V > \dim W^1 > \dim W^2 > ... > \dim W^{n+1} \Rightarrow \dim W^{n+1} < 0$, vô lý. Như vậy $W^m = W^{m+1} = W^{m+j}$ suy ra $W^m = 0$ hay $f^m = 0 \Rightarrow f^n = 0$.

2.58. HD: rang $f = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker} f) = n-1$.

Chọn $e_1 \notin \mathrm{Ker} f$ và $\{e_2, ..., e_n\}$ là cơ sở của Kerf xét $f(e_1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, phân biệt hai trường hợp $\alpha_1 = 0$ và $\alpha_1 \neq 0$.

2.59. Hệ thức $f.g^k - g^k.f = k.g^{k-1}$ đúng với $k = 0,1$.

Ta chứng minh rằng nếu nó đúng với k-1 và k, thì hệ thức đúng với k+1.

Giả sử có $f.g^k - g^k.f = k.g^{k-1}$, ta suy ra: $f.g^{k+1} - g^k.f.g = k.g^k$ và $g.f.g^k - g^{k+1}.f = k.g^k$.

Từ đó $f.g^{k+1} = g^{k+1} . f + g\,(fg^{k-1} - g^{k-1} . f)\,g = 2k.g^k$.

Do giả thiết quy nạp: $fg^{k-1} - g^{k-1}.f = (k-1) \, . \, g^{k-2}$ nên: $f.g^{k+1} - g^{k+1}. f_{k+1} + (k-1) \, g^k = 2k.g^k$

hay $f.g^{k-1}. \, g^{k+1}.f = (k+1).g^k$; nghĩa là hệ thức (2) đúng với k+1. Vì vậy, do hệ thức (2) đúng với k = 0,1, nên nó đúng với mọi $k \in N$.

Ta chứng tỏ rằng không tồn tại các tự đồng cấu thỏa mãn hệ thức (1).

Thật vậy, xét $P(x) = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + ... + a_0$ là đa thức tốt tiểu của g; nghĩa là đa thức khác không, có bậc nhỏ nhất sao cho P(g) = 0. Khi viết hệ thức (2) với k = 0,1, ..., P ta nhận được:

$f \circ P(g) - P(g) \, . \, f = P'(g)$. Ở đó P' là đạo hàm của P. Vì P(g) = 0 nên P'(g) = 0, trái với giả thiết P là đa thức tối tiểu của g.

Chú ý: Có thể nhận xét rằng không thể tồn tại các tự đồng cấu f, g thỏa mãn $f \circ g - g \circ f = id$ vì trace $(f \circ g - g \circ f) = 0$, trong khi trace(Id) = n = dimV $\neq 0$.

Chương III

DẠNG TOÀN PHƯƠNG - KHÔNG GIAN VÉC TƠ ƠCLIT VÀ KHÔNG GIAN VÉC TƠ UNITA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

§1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH ĐỐI XỨNG VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Định nghĩa

Giả sử V là không gian véc tơ trên trường số thực. Một dạng song tuyến tính xác định trên V là một ánh xạ

$$\theta: V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \theta(x, y)$$

sao cho với bất kỳ x, y, z ∈ V và λ ∈ ℝ ta có:

$$\begin{aligned}
\theta(x + z, y) &= \theta(x, y) + \theta(z, y)\\
\theta(x, y + z) &= \theta(x, y) + \theta(x, z)\\
\theta(\lambda x, y) &= \lambda\,\theta(x, y)\\
\theta(x, \lambda y) &= \lambda\,\theta(x, y)\\
\theta(x, y) &= \theta(y, x)
\end{aligned}$$

Nếu với mọi x, y ∈ V ta có θ(x, y) = θ(y, x) thì θ được gọi là đối xứng.

Nếu với mọi x ∈ V ta có θ(x, x) = 0 thì θ được gọi là phản đối xứng.

2. Biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính

Giả sử dim V = n, e = (e_i) i = 1, 2, ... n là cơ sở của V. Ánh xạ song tuyến tính θ hoàn toàn được xác định bởi ma trận A = (a_{ij}), ở đó a_{ij} = θ (e_i, e_j).

Khi đó với $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, ta có $\theta(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$ hay viết dưới dạng ma trận θ(x, y) = X^t .A.Y, ở đó X, Y là các ma trận cột các tọa độ của x, y trong cơ sở (e_i).

Giả sử ε = (ε_j), j = 1, 2, ..., n là một cơ sở khác của V mà $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$. Dạng song tuyến tính θ trong cơ sở e = (e_i) có ma trận A, và trong cơ sở ε = (ε_j) có ma trận A', ta có A' = C^t . A . C, ở đó C = (c_{ij}).

Dạng song tuyến tính θ là đối xứng khi và chỉ khi trong cơ sở e = (e_i) nào đó, θ có ma trận đối xứng.

3. Dạng toàn phương

Nếu θ: V x V → ℝ là dạng song tuyến tính đối xứng, thì H: V → ℝ, H (x) = θ (x, x) được gọi là dạng toàn phương kết hợp với θ, còn θ được gọi là dạng cực của H. Trong một cơ sở đã chọn, ma trận của θ cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương H ứng với nó. Nếu biết dạng toàn phương H, thì dạng cực θ của H hoàn toàn được xác định, cụ thể:

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2}\left(H(x + y) - H(x) - H(y)\right)$$

Giả sử trong cơ sở e = (e_i), $\theta(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_i$, thì $H(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_i$ ở đó $(x_1, ..., x_n)$ và $(y_1, ... y_n)$ là tọa độ của x và y tương ứng. Nếu trong một cơ sở nào đó $\varepsilon = (\varepsilon_j)$, dạng toàn phương H có dạng $H(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$, thì cơ sở $\varepsilon = (\varepsilon_j)$ được gọi là cơ sở chính tắc đối với H, và ta nói trong cơ sở $\varepsilon = (\varepsilon_j)$, H có dạng chính tắc. Ta cũng nói cơ sở $\varepsilon = (\varepsilon_j)$ ở trên là cơ sở trực giao đối với dạng cực θ. Ta có định lý sau:

Định lý: Nếu H là một dạng toàn phương bất kỳ trên không gian véc tơ thực n chiều V thì trong V luôn tồn tại một cơ sở $\varepsilon = (\varepsilon_j)$ để trong cơ sở đó, H có dạng chính tắc.

Chú ý: Ta cũng có định nghĩa dạng toàn phương trên không gian véc tơ V trên trường $\mathbb{K}$ tùy ý, gắn với dạng song tuyến tính đối xứng xác định trên V.

4. Hạng và hạch của dạng toàn phương

Cho dạng toàn phương H trên không gian véc tơ thực n chiều. Giả sử trong một cơ sở nào đó, dạng toàn phương H có ma trận A với rang A = r. Trong một cơ sở khác với ma trận chuyển cơ sở C, thì H có ma trận $A' = C^t . A . C$, rang A = rạng A' = r. Số r không phụ thuộc vào cơ sở đang xét và được gọi là hạng của dạng toàn phương H, cũng được gọi là hạng của dạng cực θ của H.

Khi hạng H = n = dim V, dạng toàn phương H được gọi là không suy biến.

Nếu $V = V_1 \oplus V_2$ mà $\theta(x, y) = 0$ với mọi $x \in V_1$ và $y \in V_2$ thì a nói V là tổng trực tiếp trực giao của V_1 và V_2 (đối với θ) và kí iệu là $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2$. Tổng quát, ta có khái niệm tổng trực tiếp rực giao: $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_k$.

Ta gọi hạch của H (hay hạch của θ) là tập $V_0 = \{x \in V \mid$ $(x, y) = 0$ với mọi $y \in V\}$. Đây là một không gian con của V mà ang H = dim V - dim V_0 và với mọi phần bù tuyến tính W của V_0 trong V, thì θ hạn chế trên W là không suy biến và $V = V_0 \overset{\perp}{\oplus} W$.

5. Định lý chỉ số quán tính và định lý Sylvester

Giả sử H là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}$-không gian véc tơ V.

H được gọi là xác định nếu $H(x) \neq 0$ với mọi $x \neq 0$.

H được gọi là xác định dương nếu $H(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$.

H được gọi là xác định âm nếu $H(x) < 0$ với mọi $x \neq 0$.

Định lý

Cho V là $\mathbb{R}$ - không gian véc tơ n chiều. H là dạng toàn hương trên V thì V là tổng trực tiếp trực giao (đối với H) của a không gian V_0, V_+, V_-:

$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ mà $H|V_+$ là xác định dương, $H|V_-$ là xác ịnh âm, $H|V_0 = 0$. Cách phân tích trên không duy nhất nhưng V_0 luôn là hạch của H, dim $V_+ = p$, dim $V_- = q$ không đổi; p, q heo thứ tự gọi là chỉ số dương quán tính, chỉ số âm quán tính ủa H (hay của dạng cực θ của nó).

Định lý trên được gọi là định lý chỉ số quán tính.

Định lý Sylvester

Giả sử V là $\mathbb{R}$ - không gian véc tơ n chiều. H là dạng to

phương trên V, A là ma trận của dạng toàn phương H tro một cơ sở nào đó. Gọi A_k là ma trận con vuông cấp k ở góc tr bên trái của ma trận A (A_k tạo bởi giao của k dòng đầu và k c đầu của ma trận A). Khi đó:

H là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ k $\det A_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$.

H là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi $\det A_k >$ với k chẵn và $\det A_k < 0$ với k lẻ.

Chú ý: Khi H có ma trận đối xứng A, nếu H xác định dươ ta cũng nói ma trận A xác định dương.

§ 2. KHÔNG GIAN VÉC TƠ ƠCLIT

1. Định nghĩa

Cho E là không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Ta g một tích vô hướng ở trên $\mathbb{E}$ là một ánh xạ song tuyến tính, đ xứng và xác định dương trên $\mathbb{E}$, kí hiệu bởi $<,>$ hay (. , .), ngh là ta có: $< , >; \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ song tuyến tính đối xứ thỏa mãn $(x, x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{E}$ và $<x, x> = 0$ suy ra $x = 0$.

Không gian véc tơ $\mathbb{E}$ cùng với một tích và hướng xác đị trên $\mathbb{E}$ được gọi là một không gian véc tơ Ơclit.

2. Một số tính chất

a) Ta gọi là chuẩn của $x \in \mathbb{E}$, kí hiệu $\|x\|$, số thực không â $\sqrt{< x, x >}$.

Ta có bất đẳng thức sau, gọi là bất đẳng thức Cosi-Bunhiacopski:

$$< x, y >^2 \le \|x\|^2 . \|y\|^2 .$$

b) Hai véc tơ x, y được gọi là trực giao với nhau nếu <x, y> = 0. Khi đó ta có:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

3. Cơ sở trực chuẩn trong không gian véc tơ Ơclit hữu hạn chiều

Giả sử $\mathbb{E}$ là không gian véc tơ Ơclit n chiều. n véc tơ $e_1, e_2, ..., e_n$ được gọi là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{E}$ nếu $< e_i e_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Định lý: Trong không gian véc tơ Ơclit n chiều bất kỳ, luôn tồn tại một cơ sở trực chuẩn.

Chứng minh: giả sử $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ là một cơ sở nào đó của không gian véc tơ Ơclit $\mathbb{E}$. Khi đó có thể xây dựng một cơ sở trực chuẩn $\{ e_1, e_2, ...e_n\}$ như sau:

$$e_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},$$

$$e_2 = \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|}$$ ở đó $\varepsilon_2 = \alpha_2 - <\alpha_2, e_1> e_1$.

$$e_3 = \frac{\varepsilon_3}{\|\varepsilon_3\|}$$ với $\varepsilon_3 = \alpha_3 - <\alpha_3, e_1> e_1 - <\alpha_3, e_2> e_2$,

....

$$e_n = \frac{\varepsilon_n}{\|\varepsilon_n\|}\text{ , ở đó } \varepsilon_n = \alpha_n - \sum_{k=1}^{n-1} < \alpha_n, e_k > e_k .$$

Thuật toán chỉ ra ở đây được gọi là quá trình trực chuẩn hóa Gram - Schmidt cơ sở $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Dễ thấy không gian sinh bởi $\{e_1, ..., e_k\}$ trùng với không gian sinh bởi với $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ với mọi k = 1, ..., n.

Nếu $\{e_i\}$, (i=1,2, ...,n) là cơ sở trực chuẩn, $x \in V$ thì $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ với $x_i = (x, e_i)$. Nếu có $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ thì $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Giả sử F là không gian véc tơ con của không gian véc tơ Ơclit E. Véc tơ $\alpha \in E$ gọi là trực giao với F nếu $<\alpha, \beta> = 0$ với mọi $\beta \in F$. Hai không gian con F_1 và F_2 của E gọi là trực giao nếu mọi véc tơ của F_1 trực giao với F_2. Với không gian con F của E, tập $F^{\perp} = \{\alpha \in E \mid \alpha \perp F\}$ lập thành không gian con của E và nếu dim E = n, dim F = m , thì dim $F^{\perp}$ = n - m. Khi đó $(F^{\perp})^{\perp} = F$ và $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

4. Tự đồng cấu trực giao và tự đồng cấu đối xứng

a) *Định nghĩa 1*: Ánh xạ tuyến tính f: $E \to E'$ ở đó E, E' là các không gian véc tơ Ơclit được gọi là ánh xạ tuyến tính trực giao nếu nó bảo tồn tích vô hướng, nghĩa là với mọi $x, y \in E$, ta có $<f(x), f(y)> = <x, y>$.

Ánh xạ tuyến tính trực giao từ $\mathbb{E}$ đến $\mathbf{E}$ được gọi là tự đồng cấu trực giao của $\mathbb{E}$.

b) Tính chất của tự đồng cấu trực giao

+) Tự đồng cấu f: $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ là trực giao khi và chỉ khi nó biến ột cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn.

+) f là tự đồng cấu trực giao khi và chỉ khi ma trận A của f rong cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao, nghĩa là $A^t = A^{-1}$.

+) f là tự đồng cấu trực giao thì mọi giá trị riêng của f đều ằng 1 hoặc -1.

+) Nếu f là tự đồng cấu trực giao, và W là một không gian on f bất biến, thì $W^{\perp}$ cũng là không gian con f bất biến.

c) *Định nghĩa 2*

Tự đồng cấu f: $\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ của không gian véc tơ Ơclit $\mathbb{E}$ được ọi là đối xứng (hay tự liên hợp) nếu với mọi véc tơ x, y $\in$ **E** có $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

d) Tính chất của tự đồng cấu đối xứng

+) Tự đồng cấu f: **E** $\to \mathbb{E}$ của không gian véc tơ Ơclit là đối xứng khi và chỉ khi ma trận f trong một cơ sở trực chuẩn tùy ý à một ma trận đối xứng.

+) Nếu f là tự đồng cấu đối xứng của không gian véc tơ Ơclit chiều $\mathbb{E}$ và $\mathbb{F}$ là một không gian con f - bất biến của $\mathbb{E}$, thì $f|\mathbb{E}$ cũng là một tự đồng cấu đối xứng, và $\mathbb{F}^{\perp}$ cũng là một không gian véc tơ con f - bất biến.

+) Mọi nghiệm (phức) của đa thức đặc trưng của tự đồng cấu đối xứng f đều là thực.

+) Nếu f là tự đồng cấu đối xứng của không gian véc tơ Ơclit hữu hạn chiều $\mathbb{E}$ thì trong $\mathbb{E}$ có một cơ sở trực chuẩn gồm những véc tơ riêng của f.

+) Các không gian con riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt của một tự đồng cấu đối xứng là trực giao với nhau.

§3. KHÔNG GIAN VÉC TƠ UNITA

Trong mục này ta xét các không gian véc tơ trên trường số phức $\mathbb{C}$.

1. Định nghĩa

Cho U là một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{C}$. Một dạng Hecmit xác định dương trên U là một ánh xạ $< , >$; $U \times U \to \mathbb{C}$ thỏa mãn các tính chất sau: với mọi x, y, z $\in$ U; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ta có:

a) $<\lambda x + \mu z, y> = \lambda <x, y> + \mu <z, y>$

b) $<x, \lambda y + \mu z> = \overline{\lambda} <x, y> + \overline{\mu} <z, z>$

ở đó $\overline{\lambda}\ \overline{\mu}$ là liên hợp phức của λ, μ.

c) $<x, y> = \overline{<y, x>}$

d) $<x, x> \geq 0$ với mọi x và $<x, x> = 0$ suy ra $x = 0$.

Không gian véc tơ U trên trường $\mathbb{C}$ cùng với một dạng Hecmít xác định dương trên U được gọi là không gian véc tơ Unita.

2. Tính chất của không gian véc tơ Unita

a) Giả sử U là không gian véc tơ Unita n - chiều.

Cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ được gọi là cơ sở trực chuẩn nếu

$$<e_i, e_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Ta có kết quả: Với mọi không gian véc tơ Unita đều tồn tại ột cơ sở trực chuẩn.

b) Ta gọi chuẩn của véc tơ x trong không gian véc tơ Unita . $\|x\| = \sqrt{<x, x>}$. Ta có bất đẳng thức Cosi - Bunhiacopski:

$|<x, y>|^2 \leq \|x\|^2 . \|y\|^2$ với mọi x, y $\in$ U

ở đó $|<x, y>|$ là mođun của số phức $<x, y>$.

Chứng minh: Với λ là số phức tùy ý, ta có $<\lambda x - y, \lambda x - y> \geq 0$. ừ định nghĩa dạng Hecmit, ta có:

$<\lambda x - y, \lambda x - y> = \lambda.\overline{\lambda} <x, x> - \lambda<x, y> - \overline{\lambda}<y, x> + <y, y>$

$= |\lambda|^2 <x, x> - \lambda(x, y) - \overline{\lambda <x, y>} + <y, y>$

Từ đó: $\quad |\lambda|^2 <x, x> - \lambda(x, y) - \overline{\lambda <x, y>} + <y, y> \geq 0 \qquad (1)$

Đặt: $<x, y> = |<x, y>| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$,

Ở đó arg $<x, y> = \varphi$.

Ta lấy $\lambda = t (\cos\varphi - i \sin\varphi)$ với $t \in \mathbb{R}^+$ tùy ý.

Ta có $|\lambda| = t$, $\lambda<x, y> = \overline{\lambda <x, y>} = t|<x, y>|$. Bất đẳng hức (1) có dạng:

$$t^2 . <x, x> - 2t |<x, y>| + <y, y> \geq 0 \qquad (2)$$

(2) xẩy ra với mọi $t \geq 0$. Nếu ta lấy $\lambda = t(-\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $t \geq 0$ thì $|\lambda| = t$, $\lambda <x, y> = \overline{\lambda <x,y>} = -t\,|<x, y>|$ và bất đẳng thức (1) có dạng:

$$t^2 <x, x> + 2t\,|<x, y>| + <y, y> \geq 0 \qquad (3)$$

với mọi $t \geq 0$. Kết hợp (2) và (3) ta có:

$t^2 <x, x> + 2t\,|<x, y>| + <y, y> \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Từ đó suy ra $|<x, y>|^2 \leq <x, x> . <y, y>$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Với mọi x, y thuộc không gian véc tơ Unita U, ta có:

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$$

3. Toán tử tuyến tính tự liên hợp

a) Khái niệm toán tử (tự đồng cấu) liên hợp:

Cho f là tự đồng cấu của không gian véc tơ Unita U. Tự đồng cấu g của U được gọi là liên hợp với f, nếu với mọi $x, y \in U$, ta có $<f(x), y> = <x, g(y)>$.

b) ***Định lý***: Mỗi một tự đồng cấu của không gian véc tơ Unita có duy nhất một tự đồng cấu liên hợp.

c) Tính chất của tự đồng cấu liên hợp. Ký hiệu f* là tự đồng cấu liên hợp của f. Ta có

1^0) $Id^* = Id$.

2^0) $(f + g)^* = f^* + g^*$

3^0) $(\lambda g)^* = \overline{\lambda}\, g^*$

4) $(f^*)^* = f$

5) $(g.f)^* = f^* . g^*$

d) Tự đồng cấu f của không gian véc tơ Unita U được gọi là tự liên hợp, nếu $f = f^*$.

e) ***Định lý***: Giả sử f là tự đồng cấu của không gian véc tơ Unita U. Khi đó ta có $f = f_t + i\, f_a$, ở đó f_t và f_a là các tự đồng cấu tự liên hợp, được gọi tương ứng là phần thực và phần ảo của tự đồng cấu f.

Chứng minh:

Gọi f^* là tự đồng cấu liên hợp của f.

Đặt $f_t = \dfrac{f + f^*}{2}$, $\quad f_a = -\dfrac{i}{2}\left(f - f^*\right)$

Khi đó $f_t^* = f_t$, $f_a^* = f_a$ và $f = f_t + if_a$.

g) ***Định lý***: Giả sử A là ma trận của tự đồng cấu $f \in End(V)$ trong một cơ sở trực chuẩn của V, ở đó V là không gian véc tơ Unita. Khi đó f là tự đồng cấu tự liên hợp khi và chỉ khi $A_t = \overline{A}$

Chú ý: Ma trận phức A có tính chất $A_t = \overline{A}$ được gọi là ma trận Hecmit hay ma trận tự liên hợp.

h) ***Định lý***: Các giá trị riêng của tự đồng cấu tự liên hợp đều thực.

Chứng minh: Giả sử U là không gian véc tơ Unita, $f \in End(U)$ là tự đồng cấu tự liên hợp của U, $x \in U$ là một véc tơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ.

Ta có $f(x) = \lambda x$,

$$<x, f(x)> = <x, \lambda x> = \overline{\lambda} <x, x> =$$

$$= <f(x), x> = <\lambda x, x> = \lambda <x, x>$$

Từ đó: $(\overline{\lambda} - \lambda) <x, x> = 0$. Do $<x, x> > 0$ nên $\overline{\lambda} = \lambda$ hay λ thực.

i) ***Định lý***: Các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt của một tự đồng cấu tự liên hợp là trực giao với nhau.

Chứng minh:

Giả sử f là một tự đồng cấu tự liên hợp của không gian Unita U; x, y là hai véc tơ riêng ứng với hai giá trị riêng phân biệt λ_1, λ_2.

Ta có $f(x) = \lambda_1 x$, $f(y) = \lambda_2 y$

$$<f(x), y> = <\lambda_1 x, y> = \lambda_1 <x, y> =$$

$$= <x, f(y)> = <x, \lambda_2 y> = \lambda_2 <x, y>$$

Từ đó $(\lambda_1 - \lambda_2) <x, y> = 0$ suy ra $<x, y> = 0$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 3.1: Giả sử E và F là hai không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$.

1) Chứng minh rằng nếu $\varphi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ là ánh xạ song tuyến tính thì φ viết được một cách duy nhất ở dạng $\varphi = s + a$, ở đó $s: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ là ánh xạ song tuyến tính đối xứng, còn $a: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ là ánh xạ song tuyến tính phản đối xứng.

2) Kí hiệu $\mathscr{L}_2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ là không gian các dạng song tuyến tính trên $\mathbb{E}$, còn S (tương ứng A) là không gian con của $\mathscr{L}_2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ gồm các dạng song tuyến tính đối xứng (tương ứng, phản đối xứng). Hãy xác định số chiều của $\mathscr{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{R})$, của S và của A.

Lời giải

1) Xác định s, a: $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ bởi công thức

$$s(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi(y,x))$$

$$a(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y) - \varphi(y,x)).$$

Dễ kiểm tra s là song tuyến tính đối xứng, còn a là song tuyến tính phản đối xứng và $\varphi = s + a$. Để chứng minh biểu diễn đó là duy nhất, giả sử $\varphi = s' + a'$ trong đó s' đối xứng và a' phản đối xứng.

Đặt $s - s' = a' - a = \psi$. Vì $\psi = s - s'$ nên ψ đối xứng, $\psi = a' - a$ nên ψ phản đối xứng. Với mọi $(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, ta có

$$\psi(x, y) = -\psi(y, x) = -\psi(x, y)$$

suy ra $\psi(x, y) = 0 \Rightarrow \psi = 0$ từ đó $s = s'$ và $a = a'$.

2) Ta biết rằng $\mathscr{L}_2(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ đẳng cấu với không gian các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$, ($n = \dim \mathbb{E}$). Do đó $\dim \mathscr{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{R}) = n^2$. Vì S (tương ứng A) đẳng cấu với không gian các ma trận đối xứng (phản đối xứng) cấp n. Do đó

$$\dim S = \frac{n(n+1)}{2}, \ \dim A = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ví dụ 3.2: Giả sử $\mathbb{E}$ và $\mathbb{F}$ là hai không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Dạng song tuyến tính f trên $\mathbf{E} \times \mathbb{F}$ được gọi là suy biến trái (phải) nếu có $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$ (tương ứng $y \in \mathbb{F}$, $y \neq 0$) sao cho $f(x, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{F}$ (tương ứng $f(x, y) = 0$ với mọi

$x \in \mathbb{E}$). f được gọi là không suy biến nếu nó không suy biến trái và không suy biến phải.

Chứng minh rằng:

1) Nếu f không suy biến trái và F hữu hạn chiều thì $\mathbb{E}$ cũng hữu hạn chiều và $\dim \mathbb{E} \leq \dim \mathbb{F}$.

2) Nếu f không suy biến phải và E hữu hạn chiều thì F cũng hữu hạn chiều và $\dim\mathbb{F} \leq \dim\mathbb{E}$.

3) Nếu f không suy biến và một trong hai không gian $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ có số chiều hữu hạn, thì không gian kia cũng có số chiều hữu hạn và $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$.

Lời giải:

1) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử f không suy biến trái, $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ là một cơ sở của F và dim E > n. Khi đó trong $\mathbb{E}$ có hệ độc lập tuyến tính gồm n + 1 véc tơ $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$. Đặt $a_{ij} = f(x_i, y_j)$ với $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq n$.

Hệ thuần nhất:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\lambda_i = 0 \qquad (j = 1, ... n)$$

do số ẩn nhiều hơn số phương trình nên có nghiệm không tầm thường $(c_1, ..., c_{n+1})$. Khi đó $x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} c_i x_i$ là véc tơ khác không của $\mathbb{E}$ mà $f(x_0, y_j) = 0$ với mọi j = 1, ..., n. Vì $\{y_1, ..., y_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{F}$, nên $f(x_0, y) = 0$ với mọi $y \in \mathbb{F}$. Điều này trái với giả thiết f không suy biến trái.

2) Chứng minh tương tự như phần 1.

3) Đây là hệ quả trực tiếp của hai phần trên.

Ví dụ 3.3. Giả sử $\mathbb{E}$ là không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$, g là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{E}$ và $g(y, x) = 0$ mỗi khi $g(x, y) = 0$. Chứng minh rằng g hoặc đối xứng, hoặc phản đối xứng.

Lời giải:

Giả sử g không phản đối xứng, khi đó có $x_0 \in \mathbb{E}$ để $g(x_0, x_0) \neq 0$. Ta hãy chứng minh g đối xứng. Với mỗi $x \in \mathbb{E}$, do $g(x_0, x_0) \neq 0$ nên có $\alpha \in \mathbb{R}$ để $g(x, x_0) = \alpha . g(x_0, x_0)$. Khi đó $g(x - \alpha x_0, x_0) = 0$. Từ giả thiết suy ra $g(x_0, x - \alpha x_0) = 0$, do đó $g(x_0, x) = g(x_0, \alpha x_0) = \alpha g(x_0, x_0) = g(x, x_0)$.

Bây giờ lấy $x, y \in \mathbb{E}$. Nếu $g(x, x_0) \neq 0$ thì có $\alpha \in \mathbb{R}$ để $g(x, y) = \alpha g(x, x_0)$

hay $g(x, y - \alpha x_0) = 0 = g(y - \alpha x_0, x)$.

$\Rightarrow g(y, x) = \alpha g(x_0, x) = \alpha g(x, x_0) = g(x, y)$.

Tương tự nếu $g(x_0, y) \neq 0$ thì ta cũng có $g(x, y) = g(y, x)$. Cuối cùng, giả sử rằng $g(x, x_0) = g(x_0, y) = 0$, khi đó:

$$g(x, y) = g(x, y + x_0) \text{ và } g(y, x) = g(y + x_0, x).$$

Ta có $g(x_0, y + x_0) = g(x_0, x_0) \neq 0$ nên $g(x, y) = \alpha g(x_0, y + x_0) = \alpha g(x_0, x_0) = g(x, y + x_0)$

Suy ra $g(x - \alpha x_0, y + x_0) = 0$

$$\Rightarrow g(y + x_0, x - \alpha x_0) = 0$$

$$\Rightarrow g(y + x_0, x) = \alpha\, g(y + x_0, x_0)$$

$$\Rightarrow g(y, x) = \alpha\, g(x_0, x_0) = g(x, y).$$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có $g(x, y) = g(y, x)$, nghĩa là g đối xứng.

Ví dụ 3.4. Cho $\mathbb{E}$ là không gian véc tơ thực n chiều và φ là dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương trên $\mathbb{E}$. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_k$ là những véc tơ của $\mathbb{E}$. Đặt $a_{ij} = \varphi(x_i, x_j)$, $1 \leq i, j \leq k$. Ta gọi định thức $\det(a_{ij})$ là định thức Gram của các véc tơ $x_1, ..., x_k$ và kí hiệu là $Gr(x_1, ..., x_k)$.

Chứng minh rằng $Gr(x_1, ..., x_k) \geq 0$ và $Gr(x_1, ..., x_k) = 0$ khi và chỉ khi $x_1, ..., x_k$ phụ thuộc tuyến tính.

Lời giải:

Ta chứng tỏ rằng nếu $x_1, ..., x_k$ phụ thuộc tuyến tính thì $Gr(x_1, ..., x_k) = 0$, còn nếu $x_1, ..., x_k$ độc lập tuyến tính thì $Gr(x_1, ..., x_k) > 0$.

Giả sử $x_1, ..., x_k$ phụ thuộc tuyến tính, thế thì có véc tơ x_r $(2 \leq r \leq k)$ biểu thị tuyến tính qua $x_1, ..., x_{r-1}$: $x_r = \alpha_1, x_1 + ... + \alpha_{r-1} x_{r-1}$.

Khi đó $a_{rj} = \varphi(x_r, x_j) = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + ... + \alpha_{r-1} a_{r-1, j}$, nghĩa là dòng thứ r của ma trận $(a_{ij})_k$ biểu thị tuyến tính qua r-1 dòng đầu. Từ đó suy ra $Gr(x_1, ..., x_k) = \det(a_{ij})_k = 0$.

Giả sử $x_1, ..., x_k$ độc lập tuyến tính. Thế thì $\{x_1, ..., x_k\}$ là cơ sở của không gian con $\mathbb{F}$ và E sinh bởi hệ $\{x_1, ..., x_k\}$ và ma trận $(a_{ij})_k$ là ma trận của $\varphi_1 = \varphi | F$ đối với cơ sở đó. Vì φ_1 xác định dương nên theo định lý Sylvester, ta có det $(a_{ij})_k > 0$ nghĩa là $Gr\{x_1, ..., x_k\} > 0$.

Ví dụ 3.5: Cho A là ma trận vuông đối xứng cấp n trên $\mathbb{R}$.

Xét không gian $\mathbb{R}^n$ các véc tơ cột $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, trong đó $x_i \in \mathbb{R}$; u là phép biến đổi tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở tự nhiên là A. Chứng minh rằng:

1) Nếu X, Y là những véc tơ riêng của u ứng với những giá trị riêng khác nhau, thì X, Y trực giao theo nghĩa $Y^t X = 0$.

2) Mọi nghiệm đặc trưng của A đều là số thực.

3) Nếu A xác định dương (xác định âm), thì mọi nghiệm đặc trưng của A đều dương (tương ứng: đều âm).

Lời giải:

1) Giả sử X, Y là hai véc tơ riêng của u ứng với hai giá trị riêng λ, μ; $\lambda \neq \mu$. Ta có $AX = \lambda X$, $AY = \mu Y$. Từ đó

$$Y^t.AX = Y^t.\lambda X = \lambda.Y^t.X;$$

$$X^t.AY = X^t.\mu.Y = \mu.X^t.Y;$$

Nhưng $Y^t.A.X = (X^t.A.Y)^t$ do $A^t = A$,

nên $\lambda\, Y^t.\, X = (\mu X^t.\, Y)^t = \mu\, .\, Y^t\, .\, X$.

từ đó $(\lambda - \mu)\, .\, Y^tX = 0 \Rightarrow Y^t\, .\, X = 0$

2) Giả sử $\lambda + i\mu$ là nghiệm đặc trưng của A. Thế thì tồn tại véc tơ cột (phức) X + iY trong đó X. Y là những véc tơ cột thực không đồng thời bằng không để:

$$A \,.\, (X + iY) = (\lambda + i\mu)\,(X + iY).$$

Ở đây i là đơn vị ảo.

So sánh các phần thực và phần ảo ở cả hai vế, ta được:

$$AX = \lambda X - \mu \,.\, Y \tag{1}$$

$$AY = \lambda Y + \mu X. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$Y^t A X = \lambda\, Y^t X - \mu\, Y^t.Y$$

$$X^t A Y = \lambda\, X^t Y - \mu\, X^t.X$$

Nhưng $Y^t \,.\, A \,.\, X = (X^t \,.\, A \,.\, Y)^t$ nên ta có:

$$\lambda\, Y^t \,.\, X - \mu\, Y^t.\, Y = \lambda\, Y^t \,.\, X + \mu\, X^t.\, X$$

$\Rightarrow \mu\,(X^t \,.\, X + Y^t \,.\, Y) = 0$. Vì X, Y không đồng thời bằng không, nên $X^t \,.\, X + Y^t \,.\, Y > 0$ vì vậy $\mu = 0$, do đó $\lambda + i\,\mu = \lambda \in \mathbb{R}$.

3) Giả sử λ là nghiệm đặc trưng của A, theo trên $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó có véc tơ cột $X \neq 0$ để $AX = \lambda X$, suy ra $X^t.A.X = \lambda X^t.X$. Vì $X \neq 0$ nên $X^t.X > 0$. Từ đó, nếu A xác định dương thì $X^tAX > 0$ nên $\lambda > 0$. Nếu A xác định âm thì $X^tAX < 0$ nên $\lambda < 0$.

Ví dụ 3.6. Cho A là ma trận vuông thực đối xứng cấp n, $u \in \text{End}\,(\mathbb{R}^n)$ có ma trận A trong cơ sở tự nhiên. Chứng minh rằng nếu X là véc tơ khác không của $\mathbb{R}^n$, thì tồn tại véc tơ riêng Y của u thuộc không gian con sinh bởi $X, AX, A^2X, \ldots, A^{n-1}X$.

Lời giải:

Hệ $X, AX, \ldots, A^nX$ phụ thuộc tuyến tính, nên có một véc tơ biểu thị tuyến tính qua các véc tơ đứng trước nó. Giả sử k là số hỏ nhất để A^kX biểu thị tuyến tính qua X, AX, ..., $A^{k-1}X$. Khi ó tồn tại các số thực b_{k-1} ..., b_0 để

$$A^kX + b_{k-1} A^{k-1} + ... + b_1AX + b_0 X = 0.$$

Giả sử $(x - \mu_1) ... (x - \mu_k)$ là phân tích của đa thức

$x^k + b_{k-1} x^{k-1} +...+b_0$ thành các nhân tử tuyến tính, với $\mu_1, ..., \mu_k \in \mathbb{C}$.

Khi đó:

$$0 = (A^k + b_{k-1} A^{k-1} + ... + b_0I) X = (A - \mu_1I) ... (A - \mu_kI) X$$

$$\text{hay } (A - \mu_1I)Y = 0 \text{ với } Y = (A - \mu_2I)... (A - \mu_kI)X \neq 0.$$

Như vậy $AY = \mu_1Y$, suy ra μ_1 là nghiệm đặc trưng của A. Theo ví dụ 3.5, ta có $\mu_1 \in \mathbb{R}$. Tương tự $\mu_2, ..., \mu_k$ đều thực. Do đó ' là véc tơ riêng của u và Y thuộc không gian sinh bởi X, AX, A^2X, ..., $A^{k-1}X$.

Ví dụ 3.7: Giả sử A là ma trận vuông thực đối xứng cấp n, u : End ($\mathbb{R}^n$) có ma trận A trong cơ sở tự nhiên. Chứng minh ằng tồn tại ma trận trực giao P sao cho ma trận $P^t . A . P = \wedge$ à ma trận chéo. Các phần tử trên đường chéo chính của $\wedge$ hính là các nghiệm đặc trưng của A (kể cả bội). Từ đó suy ra ằng A xác định dương (tương ứng xác định âm) khi và chỉ khi ác nghiệm đặc trưng của A đều dương (tương ứng đều âm). Chú ý: đối chiếu kết quả trong ví dụ 3.5).

Lời giải:

Giả sử $X_1, ..., X_s$, s < n là một hệ trực giao gồm những véc tơ iêng của u. Hệ như thế với s = 1 luôn tồn tại theo ví dụ 3.5.

Ta chứng tỏ rằng có véc tơ riêng X_{s+1} trực giao với các
$i = 1, 2, ..., s$. Thật vậy, giả sử $X \neq 0$ là một véc tơ trực giao
X_i $(i = 1, ..., s)$. Với mỗi $i = 1, ..., s$ và $r > 0$, ta có:

$$X^t . A^r . X_i = X^t . \lambda_i^r . X_i = \lambda_i^r (X^t X_i) = 0.$$

(λ_i là giá trị riêng ứng với véc tơ riêng X_i) từ đó $(A^r X)^t X_i = 0$, s
ra $A^r X$ trực giao với X_i. Theo kết quả trong ví dụ 3.6, có véc
riêng X_{s+1} của u, thuộc không gian con sinh bởi X, AX, ..., A^{n-}
Nhưng các véc tơ $A^r X$ trực giao với các X_i $(i = 1, ..., s)$ vì vậy X
cũng trực giao với X_i. Như vậy trong $\mathbb{R}_n$ có hệ $X_1, ..., X_n$ trực g
gồm toàn véc tơ riêng của u.

Đặt $Y_i = \dfrac{1}{\sqrt{X_i^t . X_i}} X_i$, thì hệ $Y_1, ..., Y_n$ là hệ các véc tơ riê
sao cho $Y_i^t . Y_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} là kí hiệu Kronecker). Vì vậy nếu đặt
là ma trận mà các cột là $Y_1, ..., Y_n$ thì P là ma trận trực giao.

Mặt khác, $AX_i = \lambda_i X_i$ nên $AY_i = \lambda_i Y_i$, từ đó $Y_i^t . A . Y_i = \lambda_i$
$Y_i = \lambda_i$ và với $i \neq j$ thì $Y_j^t A Y_i = \lambda_i Y_i^t Y_i = 0$.

Do đó $P^t A P = \wedge$ trong đó $\wedge$ là ma trận chéo với các phần
chéo là $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Vì $P^t = P^{-1}$ nên A đồng dạng với $\wedge$, suy
$|A - \lambda In| = |\wedge - \lambda In| = (\lambda_1 - \lambda) ... (\lambda_n - \lambda)$.

Từ đó suy ra $\lambda_1, ..., \lambda_n$ chính là tất cả các nghiệm đặc trư
của A, kể cả bội.

Cuối cùng, do $P^{-1} AP = \wedge$ suy ra A xác định dương (âm) k
và chỉ khi $\wedge$ xác định dương (âm) nghĩa là khi và chỉ khi $\lambda_1, ...,$
dương (âm).

Ví dụ 3.8: Cho A, B là hai ma trận thực đối xứng cấp n, hơn nữa B xác định dương. Chứng minh rằng tồn tại ma trận không suy biến C để C^t. A. C = $\wedge$ và C^t. B. C = In, ở đó $\wedge$ là ma trận chéo, và In là ma trận đơn vị cấp n.

Lời giải:

Do B xác định dương nên tồn tại ma trận không suy biến T để T^t . B . T = In. Ma trận T^t A. T đối xứng nên theo kết quả trong ví dụ 3.7, có ma trận trực giao P để P^t (T^t A T). P = $\wedge$ là ma trận chéo. Đặt C = T.P, ta được C^t AC = $\wedge$ và C^t BC = In.

Ví dụ 3.9: Với mỗi ma trận (phức) A, kí hiệu A* là ma trận liên hợp với ma trận chuyển vị của A, nghĩa là $A^* = \overline{A}^t$. Ma trận vuông A được gọi là ma trận Unita nếu A* . A = In. Cho A là ma trận Unita, chứng minh:

a) Nếu λ là nghiệm đặc trưng của A thì $|\lambda| = 1$.

b) Nếu λ là nghiệm đặc trưng của A thì $\frac{1}{\overline{\lambda}}$ cũng là nghiệm đặc trưng của A.

c) Nếu A thực và có cấp lẻ thì A có ít nhất một nghiệm đặc trưng bằng ± 1.

Lời giải:

a) Giả sử λ là nghiệm đặc trưng của A, khi đó có ma trận cột X ≠ 0 để AX = λX, từ đó $(AX)^* = X^*.A^* = \overline{\lambda}X^*$. Nhân vế với vế hai đẳng thức trên, ta có $X^*A^*AX = \overline{\lambda}\lambda . X^*X$. Vì X ≠ 0, nên $X^*X \neq 0$, và A^*A = In nên:

$$X^*X = \overline{\lambda} . \lambda . X^*X \Rightarrow (\overline{\lambda} . \lambda - 1) X^*X = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\lambda} . \lambda = 1, \text{ do vậy } |\lambda| = 1.$$

b) Giả sử λ là một nghiệm đặc trưng của A. $\Rightarrow$ det $(A-\lambda I) =$
$\Rightarrow$ det A^* det $(A - \lambda I) =$ det $(A^*A - \lambda A^*) =$ det $(I-\lambda A^*) = 0$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{1}{\lambda} I - A^*\right) = 0 \Rightarrow \det\left(\frac{1}{\lambda} I - A^*\right)^* = 0$$

$\Rightarrow$ det $(A - \frac{1}{\bar{\lambda}} I) = 0$ như vậy $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ là nghiệm đặc trưng của ma trận A.

c) Nếu A là ma trận thực có cấp lẻ, thì det $(A - \lambda I)$ là đ thức bậc lẻ với hệ số thực, vì vậy có ít nhất một nghiệm thự Theo phần a), nghiệm thực đó phải bằng ± 1.

Ví dụ 3.10. Cho $\mathbb{E}$ là không gian véc tơ n chiều trên trườn số thực $\mathbb{R}$ và f là một dạng toàn phương trên $\mathbb{E}$. Véc tơ $x \in$ được gọi là đẳng hướng nếu $f(x) = 0$. Chứng minh rằng nếu f đổ dấu, nghĩa là tồn tại x_1, x_2 sao cho $f(x_1) > 0$ và $f(x_2) < 0$ thì tron $\mathbb{E}$ tồn tại cơ sở gồm những véc tơ đẳng hướng.

Lời giải:

Giả sử (e_i), $1 \le i \le n$ là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{E}$, nghĩa là cơ s mà trong đó f có dạng chuẩn tắc. Hơn nữa, giả sử $f(e_i) = 1$ với i 1, 2, ..., r; $f(e_j) = -1$ với $j = r + 1, ..., r + s$ và $f(e_t) = 0$ với $t = r +$ $+ 1, ... n$. Do f đổi dấu nên $s \ge 1$, $r \ge 1$.

Như vậy với $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \mathbb{E}$, ta có:

$$f(x) = \alpha_1^2 + ... + \alpha_r^2 - \alpha^2_{r+1} - ... - \alpha^2_{r+s}.$$

Ta xây dựng cơ sở $\{v_i\}$ $(i = 1, ... n)$ gồm những véc tơ đẳn hướng của $\mathbb{E}$ như sau:

$$\begin{array}{ll} v_i = e_i + e_{r+1} & 1 \le i \le r \\ v_j = e_1 - e_j & r+1 \le j \le r + s \\ v_t = e_t & r+s < t \le n. \end{array}$$

Dễ thấy hệ $\{v_i\}$, $1 \le i \le n$ gồm những véc tơ đẳng hướng của E. Ta chứng minh hệ $\{v_i\}$ là cơ sở của $\mathbb{E}$. Xét $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$, ta hứng minh $\lambda_i = 0$ với mọi i.

$$\text{Ta có } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (e_i + e_{r+1}) + \sum_{j=r+1}^{r+s} \lambda_i (e_1 - e_j) + \sum_{t=r+s+1}^{n} \lambda_t e_t = 0$$

$$\Rightarrow \left(\lambda_1 + \sum_{j=r+1}^{r+s} \lambda_j\right) e_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i e_i + \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i - \lambda_{r+1}\right) e_{r+1} -$$

$$- \sum_{j=r+1}^{r+s} \lambda_i e_i + \sum_{t>r+s} \lambda_t e_t = 0$$

Do hệ $\{e_i\}$, $1 \le i \le n$ độc lập tuyến tính nên $\lambda_i = 0$ với mọi i = 1, 2, ... n.

Như vậy hệ $\{v_i\}$ là cơ sở của $\mathbb{E}$, gồm những véc tơ đẳng hướng.

Ví dụ 3.11. Ta gọi nón đẳng hướng của dạng toàn phương f là tập K tất cả các véc tơ đẳng hướng. Chứng minh rằng nón đẳng hướng của dạng toàn phương f trên không gian n chiều $\mathbb{E}$ là không gian con của $\mathbb{E}$ khi và chỉ khi f không đổi dấu, nghĩa là $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{E}$ hoặc $f(x) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{E}$.

Lời giải:

Điều kiện cần: Giả sử $\mathbb{K}$ là không gian con của $\mathbb{E}$. Nếu f đổi dấu, thì theo ví dụ 3.10, trong $\mathbb{E}$ có một cơ sở gồm những véc tơ đẳng hướng. Như vậy $K = \mathbb{E}$, nghĩa là mọi véc tơ của $\mathbb{E}$ đều đẳng hướng. Điều đó mâu thuẫn voi tính đổi dấu của f. Do vậy f không đổi dấu và điều kiện cần được chứng minh.

Điều kiện đủ: giả sử f không đổi dấu, chẳng hạn $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in E$. Xét cơ sở $\{e_i\}$ chuẩn tắc của f, ta có $f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) = \alpha_1^2 + ... + \alpha_r^2$. Như vậy, nón đẳng hướng là tập các véc tơ $x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ mà $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$. Do đó tập K các véc tơ đẳng hướng là không gian con của E sinh bởi $\{\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\}$.

Ví dụ 3.12. Giả sử f và g là hai dạng toàn phương trên không gian véc tơ V, có biểu thức tọa độ trong một cơ sở $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, ...n)$ nào đó lần lượt là: $f = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$, $g = \sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_i x_j$.

Ta gọi hợp thành của hai dạng toàn phương f, g là dạng toàn phương $(f, g) = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\, b_{ij}\, x_i x_j$.

Chứng minh rằng:

a) Nếu các dạng f, g không âm, thì dạng (f, g) cũng không âm.

b) Nếu các dạng f, g xác định dương, thì dạng (f, g) cũng xác định dương.

Lời giải:

a) Hiển nhiên là $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$.

Đưa các dạng toàn phương f, g về dạng chuẩn tắc:

$\sum_{i=1}^{r} y_i^2$, $g = \sum_{j=1}^{s} z_j^2$, ở đó y_i, z_i là các hàm tuyến tính đối với

c biến x_i. Đó là biểu thức tọa độ của việc chuyển cơ sở. Ta có

$$g) = \sum_{i} y_i^2 \cdot \sum_{j} z_j^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(y_i^2, z_j^2\right).$$

Xét một số hạng (y^2, z^2) trong đó $y = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$, $z = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k$.

ni đó $y^2 = \sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l x_k x_l$, $z^2 = \sum_{k,l=1}^{n} b_k b_l x_k x_l$, và $\left(y^2 z^2\right) =$

$\sum_{l=1}^{n} a_k a_l b_k b_l x_k x_l = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k x_k\right)^2 \geq 0$. Như vậy khẳng định

được chứng minh.

b) Giả sử $f > 0$ và $g > 0$. Ta đưa g về dạng chuẩn tắc $= \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $y_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j$ $(i = 1, 2, ..., n)$, det $(q_{ij}) \neq 0$. Khi đó

$$, g) = \sum_{i=1}^{n}\left(f, y_i^2\right).$$

Nhưng $y_i^2 = \sum_{j,k=1}^{n} q_{ij} q_{ik} x_j x_k$, nên $\left(f, y_i^2\right) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\left(q_{ij} x_j\right)\left(q_{ik} x_k\right)$,

đó $f = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$. Do f xác định dương nên $(f, y_i^2) \geq 0$. Nếu X

$(x_j) \neq 0$, thì có j để $x_j \neq 0$, từ đó do có i để $q_{ij} \neq 0$ nên $q_{ij} x_j \neq 0$, và

o f xác định dương nên $(f, y_i^2) > 0$. Do vậy $(f, g) > 0$.

Ví dụ 3.13: Chứng tỏ rằng trong không gian véc tơ Ơclit
chiều, có thể tìm được họ n véc tơ đơn vị $u_1, u_2, \dots u_n$ sao cho đ
với tất cả cặp số nguyên phân biệt i, j, véc tơ $u_i - u_j$ cũng là v
tơ đơn vị. Ta đặt $x = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} u_i$. Hãy tìm góc giữa véc tơ x - u
và $x - u_2$.

Lời giải:

Giả sử $\{e_i\}$ (i = 1, ..., n) là một cơ sở trực chuẩn của khôn
gian véc tơ ơclit $\mathbb{E}$. Ta xây dựng hệ n véc tơ $\{u_1, \dots, u_n\}$ như sau
hệ (u_1, u_2) thuộc không gian sinh bởi $\{e_1, e_2\}$ và $\{O, u_1, u_2\}$ làn
thành tam giác đều, nghĩa là $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ và $u_1.u_2 = \frac{1}{2}$. Ta b
sung u_3 như sau:

$$u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 e_3,\ u_3 . u_1 = u_3 . u_2 = \frac{1}{2},\ u_3^2 = 1.$$

Từ đó có $\frac{1}{2} = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2},\ \frac{1}{2} = \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Và vì $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Bước xây dựng véc tơ thứ n từ (n-1) véc tơ được xử lý tương
tự. Giả sử ta có $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ là hệ n-1 véc tơ nằm trong không
gian con sinh bởi $\{e_1, \dots e_{n-1}\}$ và thỏa mãn điều kiện bài toán. Ta
tìm véc tơ u_n:

$$u_n = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n-1} u_{n-1} + \lambda_n . e_n.$$

Sử dụng điều kiện $u_n . u_j = \frac{1}{2}$ với j = 1, ..., n-1 và $u_n^2 = 1$, ta
tìm được $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \frac{1}{n}$ và $\lambda_n = \pm\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$. Như vậy ta đã

xây dựng được hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ các véc tơ đơn vị trong không gian Ơclit $\mathbb{E}^n$ thỏa mãn điều kiện: góc giữa hai véc tơ bất kỳ của hệ bằng 60^0, từ đó $|u_i - u_j| = 1$ $(i \neq j)$.

Đặt $x = \frac{1}{n+1}(u_1 + u_2 + ... + u_n)$, gọi θ là góc giữa $x-u_1$ và $x-u_2$.

Ta có $1 = (u_2 - u_1)^2 = [(x-u_1) - (x-u_2)]^2 = (x-u_1)^2 + (x-u_2)^2 -2(x-u_2)(x-u_2)$;

và $(x-u_1)^2 = (x-u_2)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}(u_2 + ... + u_n - nu_1)^2 = \frac{n}{2(n+1)}$

Từ đó $\cos\theta = -\frac{1}{n}$.

Ví dụ 3.14: Giả sử V là một không gian véc tơ Unita, $B: V\times V\to\mathbb{C}$ là dạng tuyến tính rưỡi trên V, nghĩa là B tuyến tính đối với biến thứ nhất, cộng tính đối với biến thứ hai và $B(x, \lambda y) = \bar{\lambda} B(x, y)$ với mọi $x, y \in V$ và $\lambda \in \mathbb{C}$. Khi đó tồn tại duy nhất một phép biến đổi tuyến tính A của V sao cho $B(x, y) = <x, Ay>$ với mọi $x, y \in V$.

Lời giải:

Trước hết ta xét bổ đề sau:

Bổ đề: Giả sử f là dạng tuyến tính trên không gian véc tơ Unita V, khi đó tồn tại duy nhất một phần tử **h** $\in$ V, sao cho với mọi $x \in V$, ta có $f(x) = <x, h>$.

Chứng minh bổ đề: xét cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ trong V. Xét phần tử $h \in V, h = \sum_{k=1}^{n} h_k e_k$, ở đó $h_k = \overline{f(e_k)}$. Giả sử

$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in V$, Ta có $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{h}_k =$

$< \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} h_k e_k > = < x, h >$.

Ta chứng minh phần tử h là duy nhất. Giả sử có h_1, h_2 là hai véc tơ sao cho $f(x) = \langle x, h_1\rangle = \langle x, h_2\rangle$ với mọi $x \in V$. Từ đó $\langle x, h_1 - h_2\rangle = 0$ với mọi $x \in V$. Đặc biệt, lấy $x = h_1 - h_2$, ta có $||h_1 - h_2||^2 = 0 \Rightarrow h_2 = h_2$.

Bây giờ ta chứng minh bài toán: Giả sử y là phần tử cố định bất kỳ của V. Khi đó B(x, y) là dạng tuyến tính đối với biến x. Theo bổ để có phần tử h xác định duy nhất (phụ thuộc y) sao cho $B(x, y) = \langle x, h\rangle$.

Xét ánh xạ A: $V \to V$

$$y \to A(y) = h.$$

Ta chứng tỏ A là ánh xạ tuyến tính. Ta có $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2) \Rightarrow \langle x, A(y_1+y_2)\rangle = \langle x, A(y_1)\rangle + \langle x, A(y_2)\rangle$

$\Rightarrow \langle x, A(y_1+y_2) - A(y_1) - A(y_2)\rangle = 0$ với mọi $x \in V$. Do vậy $A(y_1+y_2) = A(y_1) + A(y_2)$.

Tương tự $B(x, \lambda y) = \langle x, A(\lambda y)\rangle = \bar{\lambda} B(x, y) = \bar{\lambda} \langle x, A(y)\rangle = \langle x, \lambda A(y)\rangle \Rightarrow \langle x, A(\lambda y) - \lambda A(y)\rangle = 0$ với mọi $x \in V$.

Từ đó suy ra $A(\lambda y) = \lambda A(y)$.

Ta chứng minh tính duy nhất của A.

Giả sử A_1 và A_2 là hai phép biến đổi tuyến tính thỏa mãn $B(x,y) = \langle x, A_1y\rangle = \langle x, A_2y\rangle$ với mọi $x, y \in V$. Suy ra $\langle x, (A_1 - A_2) y\rangle = 0$ với mọi $x \in V$, $y \in V$, từ đó $(A_1-A_2) y = 0$ với mọi $y \in V$, hay $A_1 \equiv A_2$.

Ví dụ 3.15: Giả sử A và B là hai ma trận thực, đối xứng xác định dương cấp n.

Chứng minh rằng $\det (A + B) \geq \det A + \det B$.

Lời giải:

Trước hết ta giải bài toán trong trường hợp riêng, A = In là ma trận đơn vị. Vì B là ma trận đối xứng xác định dương nên tồn tại ma trận trực giao C sao cho C^{-1} B C có dạng chéo mà các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng $\lambda_1,..., \lambda_n$ của B.

Vì vậy $\det (I + B) = \det C^{-1} (I + B). C = \det (I + C^{-1} B C)$

$$= (1 + \lambda_1) ... (1 + \lambda_n) \geq 1 + \lambda_1 ... \lambda_n = \det I + \det B.$$

Xét trường hợp tổng quát, vì ma trận A xác định dương, nên có ma trận D sao cho $A = D^2$, ở đó D xác định dương. Thật vậy, có ma trận D_1 để $D_1^t . A D_1 = \wedge$ có dạng chéo, D_1 là ma trận trực giao (ví dụ 3.7) $\wedge$ là ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng của A: $\mu_1, ..., \mu_n > 0$. Đặt P là ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo chính là $\sqrt{\mu_1}, ..., \sqrt{\mu_n}$, $P^2 = \wedge$ và $A = D_1 \wedge D_1^{-1} = D_1P^2 D_1^{-1} = D_1PD_1^{-1} . D_1PD_1^{-1} = D^2$, với $D = D_1 . P . D_1^{-1} = D_1PD_1^t$, D là ma trận đối xứng.

Từ đó $A + B = D^2 + B = D (I + D^{-1} B D^{-1}) . D$.

Vì vậy $\det (A + B) = (\det D)^2 . \det (I + D^{-1} B D^{-1})$.

Do $D^{-1} B D^{-1}$ đối xứng, xác định dương nên sử dụng kết quả trên, ta có:

$\text{Det} (A + B) \geq (\det D)^2 (1 + \det D^{-1} B . D^{-1}) =$

$= \det D^2 + \det B = \det A + \det B.$

Như vậy, bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3.16. Ta ký hiệu M là không gian các ma trận vuông cấp hai trên trường C.

a) Giả sử f: $M \to C$

$$X \to f(X) = \det X.$$

Chứng tỏ rằng f là một dạng toàn phương. hãy tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của M. Hạng của f bằng bao nhiêu?

b) Ta nhắc lại rằng $f(X Y) = f(X) . f(Y)$.

Giả sử φ là dạng toàn phương tùy ý khác không trên M thỏa mãn điều kiện $\varphi (X Y) = \varphi (X) . \varphi (Y)$. Hãy chứng tỏ rằng

$\varphi(I) = 1$ và nếu X không suy biến, thì $\varphi (X) \neq 0$. Hãy tính giá trị của φ trên các ma trận lũy tinh và các ma trận suy biến nói chung.

c) Chứng tỏ rằng $\varphi = f$.

Lời giải:

a) Giả sử $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$.

Ở đó $\{X_1, ..., X_4\}$ là cơ sở tự nhiên của M.

$f(X) = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3$. Đây là một dạng toàn phương trên M. Trong cơ sở tự nhiên của M, f có ma trận

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \Delta = \frac{1}{2^4} \neq 0$, vậy dạng toàn phương f có hạng 4.

b) Vì φ khác không nên có $X \in M$ để $\varphi(X) \neq 0$. Theo giả thiết ta có $\varphi(X) = \varphi(X . I) = \varphi(X) . \varphi(I)$. Do $\varphi(X) \neq 0$ nên $\varphi (I) = 1$. Nếu $\det X \neq 0$, thì có X^{-1} để $X . X^{-1} = I$. Vì vậy

$$\varphi(X . X^{-1}) = \varphi(X) . \varphi(X^{-1}) = \varphi(I) = 1, \text{ cho nên } \varphi(X) \neq 0.$$

Giả sử $A \in M$, $A \neq 0$ và A là ma trận lũy linh. Như vậy $A^2 = 0$, vì vậy $\varphi(A^2) = [\varphi(A)]^2 = 0$ từ đó $\varphi(A) = 0$.

Giả sử $X \in M$, $\det X = 0$ thế thì hạng của X bằng 0 hoặc bằng 1. Nếu hạng $X = 0$ thì $X = 0$ và vì vậy $\varphi(X) = 0$. Nếu hạng $X = 1$, thì có ma trận không suy biến P, Q để $X = P . A . Q$, ở đó $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (xem bài tập 2.11).

Từ đó $\varphi(X) = \varphi(P) . \varphi(A) . \varphi(Q) = 0$,

vì $\varphi(A) = 0$, do A lũy linh.

c) Với X tùy ý thuộc M, ta chứng minh $\varphi(X) = f(X)$. Thật vậy xét ma trận $X + \lambda I \in M$, ta có

$$f(X + \lambda I) = f(X) + 2\lambda F(X, I) + \lambda^2$$

$$\varphi(X + \lambda I) = \varphi(X) + 2\lambda \phi(X, I) + \lambda^2$$

Ở đó F, Φ là các dạng cực tương ứng của f và φ. Khi $X + \lambda I$ suy biến nghĩa là khi λ là giá trị riêng của X, thì $f(X + \lambda I) = \varphi(X+\lambda I) = 0$. Từ đó suy ra hai đa thức trên bằng nhau với mọi λ. Đặc biệt, cho $\lambda = 0$ ta có $\varphi(X) = f(X)$. Vì X tùy ý nên $f \equiv \varphi$.

Ví dụ 3.17. Không tính định thức, hãy giải thích tại sao ma trận A sau đây khả nghịch:

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3-i & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -i & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } A = A_1 - i\,I_4, \text{ ở đó } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ma trận A_1 là ma trận thực đối xứng cấp 4, nên tất cả 4 giá trị riêng của A_1 đều thực, (xem ví dụ 3.5), nghĩa là đa thức $P(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I_4)$ có các nghiệm đều thực, từ đó $P(i) \neq 0$, nghĩa là $\det A \neq 0$.

Ví dụ 3.18

a) Giả sử $\{e_1, e_2, e_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$; $x = (x_1, x_2, x_3)$ là tọa độ của x trong cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Chứng tỏ dạng toàn phương Q xác định một cấu trúc Ơclit trên $\mathbb{R}^3$. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ đối với Q.

b) Giả sử $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, có ma trận A trong cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hãy kiểm tra rằng A là đối xứng đối với cấu trúc Ơclit trong phần a) (nghĩa là f là tự đồng cấu đối xứng)

Lời giải:

a) Ma trận của Q trong cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$ có dạng

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có $H_1 = 1$, $H_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0$

$H_3 = \det H = \frac{1}{2} > 0$. Vì H là ma trận xác định dương nên Q là dạng toàn phương xác định dương. Như vậy Q xác định một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$ (đó chính là dạng cực tương ứng với Q).

Bây giờ ta tìm một cơ sở trực chuẩn đối với Q. Nếu $x = (x_1, x_2, x_3)$ thì $Q(x) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + (\frac{1}{2}x_2 - x_3)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Đặt $\begin{cases} x_1' = x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_2' = \frac{1}{2}x_2 - x_3 \\ x_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} x_1 = x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3' \\ x_2 = \sqrt{2}\,x_3' \\ x_3 = -x_2' + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3' \end{cases}$

Từ đó, xét cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ mà

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_3 \\ e'_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_3 \end{aligned}$$

thì trong cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, biểu thức của dạng toàn phương Q có dạng $Q(x'_1, x'_2, x'_3) = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3$.

Như vậy $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ là cơ sở trực chuẩn.

b) Gọi η là dạng cực của Q, khi đó trong cơ sở $\{e_1, e_2, e_3\}$, η có ma trận H.

Để chứng minh f là tự đồng cấu đối xứng, ta phải chứng minh $\eta(f(x), y) = \eta(x, f(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^3$. Gọi X, Y là ma trận cột các tọa độ của x, y, ta phải chứng minh:

$$(AX)^t H \cdot Y = X^t \cdot H \cdot A \cdot Y$$

hay $X^t A^t \cdot H \cdot Y = X^t \cdot H \cdot A \cdot Y$

Thật vậy $A^t \cdot H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = H \cdot A.$$

Ví dụ 3.19. Cho V là không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Giả sử H_1 và H_2 là hai dạng toàn phương trên không gian V.

a) Chứng tỏ rằng nếu H_1 là xác định dương, thì tồn tại một cơ sở để trong cơ sở đó cả H_1 và H_2 đều có dạng chính tắc.

b) Nêu ví dụ chứng tỏ rằng không phải bao giờ cũng đồng thời đưa được hai dạng toàn phương đã cho về dạng chính tắc.

c) Cho hai dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ trong cơ sở chính tắc có dạng:

$$H_1(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 14x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$$

$$H_2(x) = 4x_2^2 + 10x_3^2 + 6x_1x_3 + 14x_2x_3$$

Hãy tìm một cơ sở trong đó cả H_1 và H_2 đều có dạng chính tắc.

Lời giải

a) Giả sử Φ_1 là dạng cực của dạng toàn phương H_1. Vì H_1 xác định dương, nên Φ_1 sinh ra một tích vô hướng trên V: $<x, y> = \Phi_1(x, y)$. Ta biết rằng, trong không gian véctơ Ơclit V có cơ sở trực chuẩn $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ để dạng toàn phương H_2 có dạng chính tắc $H_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$. Trong có sở trực chuẩn đó, $H_1(x) = \phi_1(x, x) = <x, x> = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Như vậy, trong cơ sở $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ có cả hai dạng toàn phương đã cho đều có dạng chính tắc.

b) Khi cả hai dạng đều không xác định dương, thì có thể không tồn tại một cơ sở để cả hai dạng toàn phương đều có dạng chính tác. Chẳng hạn xét trong $\mathbb{R}^2$ với các tọa độ (x, y) trong cơ sở chính tắc $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Hai dạng toàn phương $H_1(x, y) = x^2$,

$H_2(x, y) = xy$. Giả sử có một cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ để trong cơ sở đó H_1 và H_2 đều có dạng chính tắc.

Giả sử: $\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = C_{11}\,\vec{e}_1 + C_{21}\,\vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_2 = C_{12}\,\vec{e}_1 + C_{22}\,\vec{e}_2 \end{cases}$. Gọi (x', y') là tọa độ trong cơ sở $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$. Khi đó $\begin{cases} x = C_{11}x' + C_{12}\,y' \\ y = C_{21}x' + C_{22}\,y' \end{cases}$.

Ta nhận thấy H_1 có dạng chính tắc trong cơ sở $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ thì $C_{11} \cdot C_{12} = 0$; H_2 có dạng chính tắc trong cơ sở $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ thì $C_{11}\,C_{22} + C_{21}\,C_{12} = 0$. Từ đó suy ra ma trận $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ suy biến. Điều này mâu thuẫn vì C là ma trận chuyển cơ sở.

c) Ta nhận thấy H_1 là dạng toàn phương xác định dương.

$H_1(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 4(x_2 + x_3)^2 + 9x_3^2$.

Đặt biến mới $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad 2x_2 + 2x_3 \\ y_3 = \qquad\quad 3x_3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_2 - \dfrac{1}{3}y_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{3}y_3 \end{cases}$ (1)

thì với các tọa độ $(y_1, y_2, ..., y_3)$, H_1 có dạng chính tắc:

$$H_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \tag{2}$$

Trong hệ tọa độ đó, H_2 có biểu thức:

$$H_2 = y_2^2 + 2y_1y_3 \tag{3}$$

Ma trận của H_2 có dạng $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4)

Bây giờ ta đưa ma trận (A) về dạng chéo bởi ma trận trực giao. Bằng phương pháp quen thuộc, ta tìm được

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ để } \quad T^{-1} . A . T = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Dùng phép đổi tọa độ
$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \\ y_2 = \qquad\qquad\qquad z_3 \\ y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \end{cases} \qquad (6)$$

Trong đó, cả hai dạng toàn phương sẽ có dạng chính tắc.

$$H_1 (z_1, z_2, z_3) = + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \qquad (7)$$

$$H_2 (z_1, z_2, z_3) = - z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \qquad (8)$$

Từ (1) và (6) ta có
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 - \frac{1}{2} z_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3\sqrt{2}} z_1 - \frac{1}{3\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{2} z_3 \\ x_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} z_2 \end{cases} \qquad (9)$$

Gọi $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ là cơ sở trong $\mathbb{R}^3$, trong đó H_1 và H_2 có dạng chính tắc (7) và (8). Khi đó:

$$\begin{cases}\vec{\varepsilon}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3 = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2\end{cases}$$

Chú ý: Để đưa đồng thời hai dạng toàn phương H_1, H_2 trong đó H_1 xác định dương về dạng chính tắc, ta làm các bước sau:

Bước 1: Đưa dạng toàn phương H_1 về dạng chéo, nghĩa là tìm một cơ sở $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n\}$ trực chuẩn đối với dạng cực Φ_1 của H_1.

Bước 2: Viết biểu thức của H_2 trong cơ sở $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n\}$.

Bước 3: Đưa dạng toàn phương H_2 về dạng chéo bằng ma trận trực giao, nghĩa là tìm cơ sở $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ trực chuẩn đối với Φ_1, để H_2 = có dạng chéo. Khi đó trong cơ sở $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ cả hai dạng H_1, H_2 đều có dạng chéo.

Ví dụ 3.20: Cho dạng toán phương f trên không gian thực n chiều $\mathbb{E}$, có các chỉ số quán tính dương và âm lần lượt là p và q. Giả sử $\mathbb{E}_1$ là không gian con của $\mathbb{E}$ mà dim $\mathbf{E}_1 = n - 1$ thì chỉ số quán tính của dạng toàn phương f hạn chế trên $\mathbb{E}_1$ là bao nhiêu?

Lời giải:

Trước hết ta nhận thấy, nếu $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ là không gian con của $\mathbb{E}$ mà $f|F$ xác định dương (tương ứng xác định âm) thì dim $\mathbf{F} \le p$, (tương ứng dim $\mathbf{F} \le q$). Thật vậy, giả sử f/F xác định dương và dim $\mathbf{F} > p$. Xét cơ sở $\{e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ... e_{p+q}, e_{p+q+1}, ..., e_n\}$ mà

$$f(e_i) = 1, \quad 1 \le i \le p$$

$$f(e_j) = -1, \quad p+1 \le j \le p+q$$

$$f(e_l) = 0 \quad l > p+q.$$

Đặt F_1 là không gian con sinh bởi các véc tơ $\{e_{p+1}, ..., e_{p+q}, e_{p+q+1}, ..., e_n\}$, thì $f/F_1 \le 0$. Nhưng $\dim F \cap F_1 = \dim F + \dim F_1 - \dim (F + F_1)$ nên $\dim F \cap F_1 > p + (n-p) - n = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $f/F > 0$, $f/F_1 \le 0$.

Giả sử $\dim E_1 = n - 1$ và p', q' là các chỉ số dương quán tính và chỉ số âm quán tính của f hạn chế trên E_1. Kí hiệu F_2 là không gian sinh bởi $\{e_1, ..., e_p\}$ trên đó f xác định dương.

Ta có $\dim F_2 \cap E_1 \ge p - 1$, nhưng $\dim (F_2 \cap E_1) \le p'$. Từ đó $p - 1 \le p'$, như vậy $p' = p-1$ hoặc $p'=q$.

Tương tự $q' = q-1$ hoặc $q' = q$.

Ta nhận thấy cả bốn trường hợp $\begin{cases} p' = p \\ q' = q \end{cases}$,

$$\begin{cases} p' = p \\ q' = q-1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} p' = p-1 \\ q' = q \end{cases}, \qquad \begin{cases} p' = p-1 \\ q' = q-1 \end{cases}$$

đều có thể xảy ra. Ta xét các ví dụ sau:

a) nếu $p + q < n$ và E_1 là không gian véc tơ sinh bởi $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$, thì $p' = p$, $q' = q$.

b) nếu $q > 1$, thì với E_1 sinh bởi hệ $\{e_1, ... e_p, e_{p+2}, ..., e_n\}$ ta có

$$p' = p$$

$$q' = q-1$$

c) nếu $p > 1$, chon E_1 sinh bởi $\{e_2, ..., e_n\}$ ta được $p' = p-1$, $q'=q$.

d) nếu có $p \geq 1$, $q \geq 1$, chọn E_1 sinh bởi $\{e_1 + e_{p+1}, e_2, ..., e_p$
$e_{p+2}, ... e_n\}$ thì $p' = p-1$, $q' = q-1$.

C - BÀI TẬP

3.1. Giả sử H là dạng toàn phương trên không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$. Dạng chuẩn tắc của dạng toàn phương H là dạng chính tắc trong đó các hệ số đều bằng ± 1 hoặc bằng 0. Hãy tìm dạng chuẩn tắc của H trong các trường hợp sau:

a) $H(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $H(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

c) $H(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

3.2. Xác định λ để dạng toàn phương sau xác định dương.

a) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$

b) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

c) $x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$.

3.3. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

a) $Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + \sum_{i<j} x_ix_j, 1 \leq i < j \leq n$

b) $Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i<j} x_ix_j, 1 \leq i < j \leq n$.

3.4. Cho V là không gian của véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$ và f là dạng toàn phương trên V, p, q là các chỉ số dương quán tính và âm quán tính của f. K là nón đẳng hướng của f (xem ví dụ 3.10 và 3.11). Chứng minh rằng không gian con tối đại của E nằm trong nón đẳng hướng K có chiều là n - max (p,q). Nếu f không suy biến thì số chiều đó là min (p, q).

3.5. Cho E là không gian véc tơ Ơclit, $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của e. Với $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ là hệ n véc tơ tùy ý của E, gọi Δ là định thức của hệ $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ đối với cơ sở trực chuẩn $\{e_1, ..., e_n\}$, nghĩa là $\Delta = \det(a_{ij})$ ở đó $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ $(j = 1, ..., n)$. Kí hiệu $Gr\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ là định thức Gram của $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Hãy chứng minh $Gr\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} = \Delta^2$.

3.6. Giả sử $\Delta_1, ..., \Delta_n$ là các đoạn thẳng trên đường thẳng thực **R** (không gian véc tơ Ơclit một chiều $\mathbb{R}$). Kí hiệu a_{ij} là độ dài đoạn $\Delta_i \cap \Delta_j$; $1 \le i, j \le n$. Đặt $A = (a_{ij}) \in Mat(n, \mathbb{R})$. Hãy chứng minh $\det A \ge 0$.

3.7. Giả sử $K_1, ..., K_n$ là những hình tròn trong mặt phẳng. Kí hiệu b_{ij} là diện tích của giao $K_i \cap K_j$, $1 \le i, j \le n$. Gọi ma trận $B = (b_{ij}) \in Mat(n, \mathbf{R})$. Hãy chứng minh $\det B \ge 0$.

3.8. Chứng minh rằng mọi ma trận Unita đều chéo hóa được, và mọi giá trị riêng của nó có mođun bằng 1.

3.9. Cho ma trận Hecmit A, nghĩa là $\overline{A}^t = A$, chứng minh rằng có ma trận Unita C để $C^1 .A .C$ là ma trận chéo.

3.10. Chứng minh rằng nếu $A = (a_{ij})$ là ma trận đối xứng, xác định dương cấp n thì $(\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, A^{-1}) \ge n^2$.

3.11. Chứng minh rằng các nghiệm đặc trưng của ma trận đối xứng thực A nằm trên đoạn [a, b] khi và chỉ khi dạng toàn phương có ma trận $A - \lambda_o I$ xác định dương với mọi $\lambda o < a$ và xác định âm với mọi $\lambda o > b$.

3.12. Giả sử $A \in Mat(n, \mathbb{R})$ là ma trận thực đối xứng và u_1 là véc tơ riêng (cột) của A với giá trị riêng λ_1. Đặt $B_1 = A - \lambda_1 U_1.U_1^t$

a) Chứng tỏ rằng có thể chọn được U_1 để $B_1.U_1 = 0$.

b) Xét một cơ sở trực chuẩn $U_1, U_2, \ldots U_n$ gồm các véc tơ riêng của A, ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Chứng tỏ rằng

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i.U_i^t.$$

3.13. Cho E là không gian véc tơ trên trường số thực $\mathbb{R}$, f là dạng song tuyến tính đối xứng trên E. Giả sử tồn tại véc tơ khác không $\alpha \in E$ sao cho $f(\alpha, \alpha) = 0$ và từ đẳng thức $f(x, \alpha) = 0$ suy ra x cùng phương với α hoặc $f(x, x) < 0$.

Chứng minh rằng nếu $x \neq 0$ và nếu có y để $f(x,y) = 0$ và $f(y, y) > 0$ thì $f(x, x) < 0$.

3.14. Cho ma trận $A \in Mat(n, \mathbb{R})$, A phản đối xứng. Chứng minh rằng $\det A \geq 0$.

3.15. Cho ma trận $A \in Mat(n, \mathbb{C})$, $\overline{A}$, là ma trận liên hợp của A. Chứng minh rằng $\det(A\overline{A} + I) \geq 0$.

3.16. Cho U là không gian véc tơ Unita, $f \in End(U)$. Ký hiệu f^* là tự đồng cấu liên hợp với f. Hãy chứng minh:

a) $Id^* = Id$.

b) $(f+g)^* = f^* + g^*$

c) $(\lambda f)^* = \bar{\lambda}\ f^*$ với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$.

d) $(f^*)^* = f$

e) $(g_o f)^* = f^*{}_o g^*$.

3.17. Cho U là không gian véc tơ Unita và $f \in \text{End}(U)$. Chứng minh rằng f là tự đồng cấu tự liên hợp khi và chỉ khi $<f(x), x>$ thực với mọi $x \in U$.

3.18. Chứng tỏ rằng giá trị riêng bất kỳ λ của tự đồng cấu tự liên hợp f của không gian véc tơ Unita U bằng $<f(x), x>$, ở đó x là véc tơ nào đó của U thỏa mãn $\|x\| = 1$.

3.19. Cho U là không gian véc tơ Unita, f là tự đồng cấu tự liên hợp trên U. $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ là các giá trị riêng của f, $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn gồm những véc tơ riêng của f sao cho $f(e_i) = \lambda_i e_i$; $i = 1, ..., n$. Xét P_k: $U \to U$, $P_k(x) = <x, e_k> e_k$.

Hãy chứng minh:

a) $P_k^2 = P_k$

b) $P_{j\,o} P_k = 0$ nếu $k \neq j$

c) $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$

d) Giả sử $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x_k$ là đa thức tùy ý với hệ số phức.

Đặt $Q(f) = \sum_{i=1}^{n} C_i f^i \in \text{End}(U)$; $f^o = \text{Id}$.

Chứng minh rằng $Q(f) = \sum_{k=1}^{n} Q(\lambda_k) P_k$

3.20. Hãy chứng minh định lý Hamilton - Kelli cho trường hợp ma trận A là Hecmit: Cho A là ma trận Hecmit và $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + C_1(-\lambda)^{n-1} + ... + C_k(-\lambda)^{n-k} + ... + C_n$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Hãy chứng minh $P(A) = (-A)^n + C_1(-A)^{n-1} + ... + C_n . I_n = 0$.

3.21. Giả sử $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, ở đó $n > 3$, và tất cả các phần tử $a_{ij} \neq 0$. Chứng minh rằng có ma trận $B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, $b_{ij} > 0$ với mọi i, j mà $C = (a_{ij} . b_{ij})$ là ma trận suy biến.

3.22. Giả sử E^2 là không gian véc tơ Ơclit hai chiều. Tự đồng cấu đối xứng $f \in \text{End}(E^2)$ trong cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2\}$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Hãy tìm cơ sở trực chuẩn trong đó ma trận của f có dạng chéo.

3.23. Hãy đưa ma trận đối xứng sau về dạng chéo nhờ ma trận trực giao

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.24. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$, cho hai dạng toàn phương:

$$\varphi = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 10x_2x_3 + 2x_1x_3$$

$$\varphi = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3.$$

a) Chứng tỏ φ là dạng toàn phương xác định dương

b) Bằng phép biến đổi tọa độ thích hợp, hãy đưa cả hai dạng toàn phương trên về dạng chính tắc.

3.25. Giả sử E là không gian véc tơ Ơclit với tích vô hướng < , >. Tự đồng cấu f ∈ End (E) được gọi là phân đối xứng nếu với mọi e, y ∈ E, ta có <x, y (y)> = - <f(x), y>.

a) Chứng tỏ rằng f phản đối xứng khi và chỉ khi <f(x), x> = 0 với mọi x ∈ E.

b) Trong một cơ sở trực chuẩn bất kỳ, ma trận của tự đồng cấu phản đối xứng là ma trận phản xứng. Từ đó suy ra mọi tự đồng cấu phản đối xứng của không gian Ơclit số chiều lẻ đều không khả nghịch.

c) Giả sử f là tự đồng cấu phản đối xứng. Chứng tỏ rằng Imf và Kerf là hai không gian con bù trực giao với nhau. Chứng tỏ rằng hạng của f là một số chẵn.

D. HƯỚNG DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

3.1. a) $H = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \left(\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{3}}x_3\right)^2$

$$\text{Đặt}\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 = \sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ y_3 = \sqrt{\frac{8}{3}}x_3 \end{cases}$$

Ta có $H = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

b) $H = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

c) $H = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

3.2.

a) Không có λ nào thỏa mãn

b) Không có λ nào thỏa mãn

c) $\lambda > 13$.

3.3.

a) $Q = (y_1)^2 + \frac{3}{4}(y_2)^2 + \frac{4}{6}(y_3)^2 + ... + \frac{n+1}{2n}(y_n)^2$

Thật vậy, đặt $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + ... + x_n)$, thì

$$Q = (y_1)^2 + \frac{3}{4}\left[\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \frac{2}{3}\sum_{i<j} x_i x_j\right]; 2 \le i < j$$

Đặt $y_2 = x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + ... + x_n)$, từ đó

$$Q = (y_1)^2 + \frac{3}{4}(y_2)^2 + \frac{4}{6}\left[\sum_{i\ge 3} x_i^2 + \frac{2}{4}\sum_{i<j} x_i x_j\right];\ 3 \le i < j$$

Giả sử đến bước thứ p:

$$Q = (y_1)^2 + ... + \frac{p+1}{2p}(y_p)^2 + \frac{p+2}{2p+2}\left(\sum_{i=p+1}^{n} x_i^2 + \frac{2}{p+2}\sum_{i<j} x_i x_j\right),$$

ở đó $(p \le i < j)$

Đặt $y_{p+1} = x_{p+1} + \dfrac{1}{p+2}(x_{p+2} + ... + x_n)$ ta được công thức trên, ứng với p+1. Do đó sau (n-1) bước ta có kết quả. Ta có thể viết gọn quy tắc đổi biến như sau:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \dots & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \dots & \dots & \frac{1}{3} \\ .. & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

b) Đưa về a) như sau:

$$Q = x_1x_2 + x_1\sum_{i=3}^{n} x_i + x_2\sum_{i=3}^{n} x_i + \sum_{i<j} x_ix_j \,;\, 3 \le i < j$$

$$= (x_1 + x_3 + ... + x_n)\,(x_2 + x_3 + ... + x_n) - \left(\sum_{i=3}^{n} x_i\right)^2 + \sum_{3\le i<j} x_ix_j$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 + 2\sum_{i\ge 3} x_i\right)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2) - \left(\sum_{i\ge 3} x_i^2 + \sum_{3\le i<j} x_ix_j\right)$$

Dạng (n-2) biến $x_3, ..., x_n$: $\sum_{i\ge 3} x_i^2 + \sum_{3\le i<j} x_ix_j$

đã được xét trong phần a). Như vậy ta có

$$Q = (y_1)^2 - (y_2)^2 - \sum_{k=3}^{n} \frac{k-1}{2(k-2)}(y_k)^2$$

Với $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \sum_{i=3}^{n} x_i$

$$y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y_3 = x_3 + \frac{1}{2}(x_4 + ... + x_n)$$

$$y_4 = x_4 + \frac{1}{2}(x_j + ... + x_n)$$

....

$$y_n = x_n.$$

3.5. Gr $(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \det (<\alpha_j, \alpha_k>)$; $1 \le j, k \le n$

$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, $\alpha_k = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}e_l$. Do hệ $\{e_i\}$ trực chuẩn nên $<\alpha_j\alpha_k> = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}$; Đặt $A = (a_{ij})$.

Ta có ma trận $(<\alpha_j, \alpha_k>) = A^t .A$.

Từ đó Gr $(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\det A)^2 = \Delta^2$.

3.6. Giả sử đoạn [a, b] chứa tất cả các Δ_i (i = 1, ..., n). Xét $\mathscr{C}^*$ [a, b] là không gian các hàm liên tục (có thể trừ một số hữu hạn điểm) trên đoạn [a, b]. $\mathscr{C}^*$ [a, b] là không gian véc tơ vô hạn chiều trên trường số thực $\mathbb{R}$.

Gọi $\widetilde{C}[a,b] = C^*[a,b] / \sim$, ở đó "~" là quan hệ tương đương $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ trên [a, b] trừ một số hữu hạn $x \in [a, b]$.

Với $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{C}[a,b]$, đặt $<\tilde{f}, \tilde{g}> = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ là tích vô hướng trên $\tilde{C}[a,b]$ (không phụ thuộc vào đại diện f, g của $\tilde{f}, \tilde{g}$). Gọi X_i là hàm đặc trưng của Δ_i tức là $X_i(t) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } t \in \Delta_i \\ 0 \text{ nếu } t \notin \Delta_i \end{cases}$

Thì $a_{ij} = <\tilde{X}_i, \tilde{X}_j>$ và $\det A = Gr(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_n) \geq 0$.

3.7. Tương tự bài 3.6.

3.10. Vì ma trận A đối xứng, xác định dương nên tồn tại ma trận trực giao C để $C^{-1} . A . C$ có dạng chéo:

$C^{-1} . A . C = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ở đó $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A.

$$\text{Ta có: } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = C^{-1} A^{-1} C.$$

Như vậy A^{-1} có các giá trị riêng $\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$

Và $\operatorname{trace} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; $\operatorname{trace} A^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}$

Ta có $(\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} A^{-1}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right) \geq n^2$

3.11. HD. Ta thấy rằng: nếu λ là nghiệm đặc trưng của ma trận A thì $(\lambda - \lambda_o)$ là nghiệm đặc trưng của $A - \lambda_o I$. (xem lời giải bài 2.45, cách 2). Như vậy λ là nghiệm đặc trưng của A, $\lambda \in [a, b]$, thì $\lambda - \lambda_o$ là nghiệm đặc trưng của $A - \lambda_o I$, $\lambda - \lambda_o \in [a - \lambda_o, b - \lambda_o]$. Nếu mọi nghiệm đặc trưng của A đều thuộc [a, b] và $\lambda_o < a$ thì do $a - \lambda_o > 0$ nên mọi nghiệm đặc trưng của $A - \lambda_o I$, đều dương, vậy $A - \lambda_o I$ xác định dương với $\lambda_o < a$ (xem ví dụ 3.7). Nếu $b < \lambda_o$ thì $b - \lambda_0 < 0$, như vậy mọi nghiệm đặc trưng của $A - \lambda_o I$ đều âm. Do vậy $A - \lambda_o I$ xác định âm. Phần ngược lại chứng minh tương tự.

3.12. a) Với $B_1 = A - \lambda_1 U_1 U_1^t$, ta có $B_1 U_1 = AU_1 - \lambda_1 U_1 . U_1^t . U_1 = \lambda_1 U_1 - \lambda_1 U_1 . \|U_1\|^2 = \lambda_1(1 - \|U_1\|^2) U_1$. Do đó, nếu $\lambda_1 = 0$ thì $B_1.U_1 = 0$ với mọi véc tơ riêng U_1; nếu $\lambda_1 \neq 0$ thì $B_1 U_1 = 0$ khi và chỉ khi U_1 là véc tơ riêng có chuẩn ơclit bằng 1.

b) Giả sử X là véc tơ trực giao với U_1 trong $\mathbb{R}^n$ (với tích vô hướng chính tắc). Khi đó $U_1^t . X = 0$ và $B_1 X = AX - \lambda_1 U_1 . U_1^t X = AX$. Như vậy, nếu U_2 là véc tơ riêng đơn vị của A trực giao với U_1, thì U_2 cũng là véc tơ riêng của B_1. Xét đồng cấu $B_2 = A - \lambda_1 U_1 . U_1^t - \lambda_2 U_2 . U_2^t$, ta có $\mathrm{Ker} B_2$ chứa không gian véc tơ sinh bởi $\{U_1, U_2\}$; và thu hẹp của B_2 trên không gian con trực giao với $\mathrm{Vect}(U_1, U_2)$ trùng với thu hẹp của A trên đó (coi ma trận A là ma trận của tự đồng cấu trong không gian véc tơ ơclit $\mathbb{R}^n$). Sau n bước ta nhận được $B_n = A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i . U_i^t$, có tính chất $\mathrm{Ker}(B_n) \supset \mathrm{Vect}(U_1, ..., U_n) = \mathbb{R}^n$.

Như vậy $B_n \equiv O$ hay $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i . U_i^t$.

3.13. Giả sử có $x \neq 0$, $y \neq 0$ mà $f(x, y) = 0$ và $f(y, y) > 0$ nhưng $(x, x) \geq 0$. Ta thấy x, y độc lập tuyến tính và với z thuộc không ;ian véc tơ sinh bởi x, y thì $f(z, z) = f(ax + by, ax + by) = a^2 f(x, x) +$ $b^2 f(y, y) + 2ab\, f(x,y) \geq 0$, (*).

Theo giả thiết nếu $f(x, \alpha) = 0$ thì x cùng phương α; nếu $f(y,\alpha) = 0$ hì y cùng phương với α. Nhưng x, y không cùng phương, nên (x, α) và $f(y, \alpha)$ không đồng thời bằng không (**). Do đó có hai ố thực $k, l \in \mathbb{R}$ sao cho $k^2 + l^2 > 0$ và $k\, f(x, \alpha) + l\, f(y,\alpha) = 0$.

Từ đó $f(kx + ly, \alpha) = 0$. Theo giả thiết $kx + ly$ cùng phương ới α, trường hợp $f(kx + ly, kx + ly) < 0$ loại do nhận xét (*). Do ló $\alpha = k_1x + l_1y \neq 0$. Theo giả thiết $f(\alpha, \alpha) = 0 \Rightarrow k_1^2 f(x, x) + l_1^2 f(y, y) = 0$.)o $f(y, y) > 0$, $f(x, x) \geq 0$ nên ta có $l_1 = 0$ và $f(x, x) = 0$. Như vậy $\alpha = k_1 x$ và từ đó $f(\alpha, y) = 0$, $f(\alpha, x) = 0$. Mâu thuẫn với (**).

3.14. Xét $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. Vì A phản đối xứng nên ma trận iA Hecmit (i - đơn vị ảo). Ta có $\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow$ $\det(iA - i\lambda I_n) = 0$. Nhưng mọi nghiệm đặc trưng của ma trận Iecmit đều thực. Từ đó suy ra mọi nghiệm đặc trưng của ma trận A à thuần ảo hoặc bằng không. Giả thử các nghiệm khác không ủa đa thức đặc trưng P_A là: $i\alpha_1, -i\alpha_1, \ldots, i\alpha_k, -i\alpha_k$, ($\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j \neq 0$).

Khi đó $P_A(\lambda) = (-\lambda)^{n-2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} \left[(i\alpha_j - \lambda)(-i\alpha_j - \lambda)\right]$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (-\lambda)^{n-2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(\lambda^2 + \alpha_j^2\right)$$

Do đó $\det A = P_A(0) = \begin{cases} 0 \text{ với } n > 2k \\ \prod_{j=1}^{k} \alpha_j^2 \text{ nếu } n = 2k \end{cases}$

Do đó det A ≥ 0. Từ đây, dễ thấy detA = 0 nếu n lẻ. Điều này cũng có thể suy ra ngay bằng chứng minh trực tiếp.

3.15. Bổ đề: Cho V là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{C}$, U là ánh xạ nửa tuyến tính: V → V, nghĩa là u $(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\,u(x) + \overline{\beta}\,u(y)$ với mọi x, y ∈ V, α, β ∈ $\mathbb{C}$. Khi đó u^2 là ánh xạ tuyến tính. Giả sử λ là một giá trị riêng thực, âm của u^2, khi đó λ là nghiệm bội chẵn của đa thức đặc trưng P_{u^2}.

Chứng minh bổ đề: Dễ thấy $u^2 \in$ End (V). Giả sử λ là một giá trị riêng thực < 0 của u^2 và a ≠ 0 là véc tơ riêng của u^2 ứng với λ: u^2 (a) = λa. Khi đó u(a) và a là độc lập tuyến tính trong V. Thật vậy nếu u(a) = ξ a, ξ ∈ $\mathbb{C}$ thì $u^2(a) = u(\xi a) = \overline{\xi}\,u(a) = |\xi|^2 a = \lambda a$.

Do đó $\lambda = |\xi|^2 \geq 0$, trái với λ < 0.

Gọi W là không gian véc tơ con hai chiều của V, sinh bởi a, u (a). Dễ thấy mọi véc tơ của W đều là véc tơ riêng của u^2 ứng với giá trị riêng λ và u (W) ⊂ W. Đặt V_1 = V/W, xét ánh xạ cảm sinh.

$u_1: V_1 \to V_1$

$[x] \to u_1[x] = [u(x)]$

Ta có u_1 là ánh xạ nửa tuyến tính, từ đó u_1^2 là ánh xạ tuyến tính và $u_1^2[x] = [u^2(x)]$. Vì vậy, kí hiệu Pu^2 và Pu_1^2 là các đa thức đặc trưng của $u^2 \in$ End (V) và $u_1^2 \in$ End (V_1) tương ứng thì $Pu^2(t) = (t - \lambda)^2\, Pu_1^2(t)$. Nếu λ lại là nghiệm của đa thức đặc trưng Pu_1^2, lặp lại quá trình trên ta có $(t - \lambda)^2$ là ước của Pu_1^2. Quá trình này hữu hạn vì dim V = n hữu hạn. Như vậy số mũ ủa $(t - \lambda)$ trong phân tích Pu^2 là số chẵn. Bổ đề được chứng minh.

Chứng minh bài toán:

Xét $u: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $u(x) = A.\overline{x}$; u là ánh xạ nửa tuyến tính; $u^2(x) = u(u(x)) = u(A\overline{x}) = A.\overline{A}x$ với mọi $x \in \mathbb{C}^n$. Ta có $Pu^2(t) = \det(A.\overline{A} - tIn)$. Với mọi $t \in R$, ta có $\overline{\det(A.\overline{A} - t\,In)} = \det(\overline{A}A - t\,In) = \det(A\overline{A} - t\,In)$ (xem bài 2.51). Như vậy $Pu^2(t)$ là đa thức với hệ số thực.

Giả sử $Pu^2(t) = (\lambda_1 - t)^{a1} . (\lambda_2 - t)^{a2} ... (\lambda_k - t)^{ak} \times Q(t)$, ở đó $s_1, ..., s_k$ nguyên dương, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$;

$Q \in R[t]$, Q không có nghiệm thực

Vì Q không có nghiệm thức nên $\deg Q = n - (s_1 + s_2 + ... + s_k)$ chẵn. Hệ số cao nhất của Q(t) là $(-1)^{n-(s1 + ... + sk)}$, nghĩa là bằng 1. Do đó $Q(t) > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, từ đó $Q(-1) > 0$.

Bây giờ ta xét các nghiệm λ_i (i = 1, 2, ..., k). Nếu có $\lambda_i < 0$, thì bội s_i của nghiệm λ_i chẵn, khi đó $(\lambda_i + 1)^{si} \geq 0$. Nếu $\lambda_i \geq 0$, thì rõ ràng $(\lambda_i + 1)^{si} > 0$. Như vậy $Pu^2(-1) \geq 0$, nghĩa là $\det(A\overline{A} + In) \geq 0$.

Chú ý: Dấu bằng có thể xẩy ra, chẳng hạn xét $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3.17. Với $f \in End(U)$. Nếu f là tự đồng cấu tự liên hợp thì với mọi $x \in U$; ta có:

$$< f(x), x > = \overline{< x, f(x) >} = < x, f^*(x) > = < x, f(x) >$$

Như vậy $\langle x, f(x)\rangle$ thực hay $\langle f(x), x\rangle$ thực với mọi $x \in U$.

Ngược lại nếu mọi $x \in U$, ta có $\langle f(x), x\rangle$ thực, ta chứng minh f tự liên hợp. Phân tích f thành tổng của hai tự đồng cấu tự liên hợp:

$$f = f_t + i \,.\, f_a \text{, khi đó}$$

$$\langle f(x), x\rangle = \langle f_t(x), x\rangle + i \langle f_a(x), x\rangle.$$

Nhưng f_t, f_a là những tự đồng cấu tự liên hợp nên $\langle f_t(x), x\rangle$ và $\langle f_a(x), x\rangle$ thực. Vì vậy $\langle f_a(x), x\rangle = \operatorname{Im} \langle f(x), x\rangle$. Nếu $\langle f(x), x\rangle$ thực thì $\langle f_a(x), x\rangle = 0$ với mọi x, từ đó $\| f_a \| = 0$ và $f_a = 0$. Do vậy f $= f_t$ nghĩa là f là tự liên hợp.

3.18. Giả sử λ là giá trị riêng của $f \in \operatorname{End}(U)$, ở đó **f** là tự đồng cấu tự liên hợp của không gian véc tơ Unita U. Khi đó có z $\in$ **U**, $z \neq 0$ để $f(z) = \lambda z$.

Đặt $x = \dfrac{z}{\| z \|}$, khi đó $f(x) = \lambda x$, $\| x \| = 1$ và $\langle f(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle$ $= \lambda \| x \|^2 = \lambda$.

3.19. a) và b) hiển nhiên

$$\text{c) } f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(x), e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f(e_k) \rangle e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \right)(x)$$

Vậy $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$.

d) Theo câu trên ta có $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$, do vậy $f^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 P_k$ và

$f^s = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^s P_k$

Như vậy $Q(f) = \sum_{k=1}^{n} Q(\lambda_k) P_k$

3.20. Giả sử f ∈ End ($\mathbb{C}^n$) là toán tử tự liên hợp trong không gian véc tơ Unita $\mathbb{C}^n$ với tích vô hướng Hecmit tự nhiên, f có ma trận A trong có sổ chính tắc của $\mathbb{C}^n$. Giả sử $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng (thực) của f, tức λ_i là nghiệm của đa thức đặc trưng det (A - λI) = P(λ). Gọi $\{e_1, ...e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn gồm những véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng λ_i: $f(e_i) = \lambda_i e_i$ (i = 1, ... n).

Đặt $P_k: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $P_k(x) = \langle x, e_k \rangle e_k$. Theo bài 3.19. Ta có $P(f) = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k) . P_k$. Nhưng $P(\lambda_k) = 0$ ∀k nên P(f) = 0, từ đó P(A) = 0.

3.22. Phương trình đặc trưng của ma trận $\mathscr{A}$ có dạng:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Các tọa độ của véc tơ riêng tìm được từ hệ:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}.x_1 + \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)x_2 = 0 \end{cases}$$

Với $\lambda = 1$ ta có $x_1 = \sqrt{3}\,x_2$, chọn véc tơ riêng

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in E^2$$

Với $\lambda = -1$ ta có $x_2 = -\sqrt{3}\,x_1$, chọn véc tơ riêng

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \in E^2$$

Nếu lấy cơ sở trực chuẩn

$\left\{X_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 ; X_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2\right\}$ thì trong cơ sở đó, ma trận của f có dạng chéo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.23. HD. Nghiệm đặc trưng của ma trận B là: $\lambda = -1$, $\lambda =$ (bội 2)

Với $\lambda = -1$, có véc tơ riêng $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Với $\lambda = 1$, các tọa độ của véc tơ riêng thỏa mãn: $x_1 = x_3$. Ta có hai véc tơ riêng trực giao là: $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ và $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Đặt $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ thì C là ma trận trực giao và

$$C^{-1} . B . C = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

3.25. c) HD. Xét $F = \mathrm{Imf} \subset E$, $F^{\perp} \oplus F = E$ khi đó $\mathrm{Kerf} = F^{\perp}$.

Ta có $f/\mathrm{Imf}: F \to F$ là đẳng cấu, có hạng cực đại, f - phản đối xứng nên theo b) dim Imf là số chẵn.

Chú ý: Lời giải các bài tập 1.25; 1.26; 1.27; 1.28 chương I, 2.53 chương II, 3.15 chương III do Lê Thái Hoàng, sinh viên K49, lớp chất lượng cao, khoa Toán ĐHSP Hà Nội đề nghị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ngô Thúc Lanh. Đại số tuyến tính. NXB Đại học và Trun
học chuyên nghiệp. Hà nội, 1970.

2. Đoàn Quỳnh (chủ biên). Giáo trình Đại số tuyến tính v
hình học giải tích. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 1998.

3. Khu Quốc Anh, Nguyễn Anh Kiệt, Tạ Mân, Nguyễn Doã
Tuấn. Bài tập Đại số tuyến tính và hình học giải tíc
NXB ĐHQG Hà nội, 1999.

4. R. Bellman. Introduction to matrix analysis. MCGRA
book company, inc. New-youk - Toronto - London, 1960

5. J. Rivaud. Exercices d'algèbre linéaire. Librairie Vuibe
1978.

6. Proxcuriacop I. V. Tuyển tập các bài tập Đại số tuyế
tính. NXB "Khoa học", 1978 (Tiếng Nga).

7. Cadovnhitri V.A. Các bài toán thi Olympic sinh viên. NX
Đại học tổng hợp Mockba 1987 (Tiếng Nga).