PGS. TS. ĐẬU THẾ CẤP

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Phạm trù không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính, nói rộng ra là phương pháp của Đại số tuyến tính, có mặt trong mọi ngõ ngách của toán học, trong các ngành khoa học, kĩ thuật, kinh tế và trong các ngành khoa học ứng dụng. Do đó Đại số tuyến tính là một môn đại cương của sinh viên ngành toán và tất cả các ngành khoa học tự nhiên, kĩ thuật, kinh tế ...

Hiện nay, sách về Đại số tuyến tính có rất nhiều, do nhiều tác giả viết. Tuy nhiên qua nhiều năm giảng dạy Đại số tuyến tính cũng như các môn học có ứng dụng Đại số tuyến tính, chúng tôi rất muốn có một giáo trình có thể phục vụ tốt cho một lực lượng đông đảo bạn đọc. Giáo trình này phải đồng thời đáp ứng được những yêu cầu sau :

1. *Không đưa ra quá nhiều kiến thức, với ngôn ngữ quá hàn lâm, chỉ phù hợp với đối tượng bạn đọc cần nghiên cứu, khảo cứu.*
2. *Không quá đơn giản, chỉ cung cấp được các định nghĩa, tính chất, thuật toán sơ sài, khiến cho bạn đọc lúng túng khi sử dụng (muốn tìm hiểu thêm điều gì cũng phải tìm nguồn tài liệu khác).*
3. *Có một hệ thống bài tập phong phú, đủ dạng cơ bản, đủ mức độ khó, dễ, có hướng dẫn giải để không cần một quyển bài tập kèm theo.*
4. *Không quá dày trang, phù hợp với điều kiện kinh tế của sinh viên, nhẹ nhàng khi mang lên lớp.*
5. *Phải có đủ các kiến thức tối thiểu về đại số tuyến tính để sinh viên học tốt toán giải tích, chẳng hạn môn giải tích hàm có thể xem là sự kết hợp của đại số tuyến tính và tôpô.*

Với những mong muốn đó, chúng tôi đã biên soạn giáo trình này. Hi vọng rằng, với những tiêu chí đã đưa ra khi biên soạn, đây là cuốn sách đáp ứng được các yêu cầu học tập và giảng dạy của giảng viên và sinh viên tại khoa Toán và các khoa khác của các trường Đại học và Cao đẳng.

Cuối sách, chúng tôi có giới thiệu 15 tác phẩm ở mục tài liệu tham khảo. Các kiến thức chuẩn bị về lí thuyết tập hợp bạn đọc có thể tham khảo thêm [6], về số phức và hàm phức có thể tham khảo thêm Chương 1 của [8]. Một vài kiến thức về cấu trúc đại số, đại số sơ cấp và số học dùng trong sách có thể tham khảo [3, 4, 5].

Tác giả xin được cảm ơn TS. Phan Dân, Trường Đại học Giao thông Vận tải TP.Hồ Chí Minh đã có những trao đổi và khích lệ tác giả trong quá trình biên soạn bản thảo.

Tuy đã cố gắng nhiều trong việc biên soạn, nhưng chắc chắn cuốn sách không thể tránh khỏi những sai sót, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến quý báu của bạn đọc .

Xin chân thành cảm ơn .

Tác giả

CHƯƠNG I

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

§1. Ngôn ngữ lí thuyết tập hợp

1. Kí hiệu lôgic

Cho A và B là các mệnh đề. Ta kí hiệu

$\overline{A}$ là mệnh đề phủ định của A

$A \Rightarrow B$ là mệnh đề A suy ra B

$A \Leftrightarrow B$ là mệnh đề A và B tương đương.

Ta có

$A \Rightarrow B$ tương đương với mệnh đề $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

2. Các tập hợp số

Ta kí hiệu

$\mathbb{N}$ là tập các số nguyên dương

$\mathbb{N}_0$ là tập các số nguyên, không âm

$\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên

$\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ

$\mathbb{R}$ là tập các số thực

$\mathbb{C}$ là tập các số phức.

3. Các phép toán tập hợp

Kí hiệu $\varnothing$ là tập hợp rỗng. Cho các tập E, F. Ta kí hiệu :

$E \subset F$ nếu $x \in E$ thì $x \in F$

$E = F$ nếu $E \subset F$ và $F \subset E$.

$E \cup F = \{x \mid x \in E \text{ hoặc } x \in F\}$

$E \cap F = \{x \mid x \in E \text{ và } x \in F\}$

$E \setminus F = \{x \mid x \in E \text{ và } x \notin F\}$.

Với mọi tập E ta có

$$\varnothing \subset E \subset E.$$

Cho ξ là một họ khác rỗng các tập. Ta gọi hợp và giao của họ tập này tương ứng là

$$\bigcup_{E\in\xi} E = \{x \mid x \in E \text{ với ít nhất một } E \in \xi\};$$

$$\bigcap_{E\in\xi} E = \{x \mid x \in E \text{ với mọi } E \in \xi\}.$$

Nếu họ ξ được đánh chỉ số bởi tập $\wedge$, tức là

$$\xi = \{E_\alpha \mid \alpha \in \wedge\} = (E_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$$

thì hợp và giao nói trên tương ứng được kí hiệu là

$$\bigcup_{\alpha\in\wedge} E_\alpha,\ \bigcap_{\alpha\in\wedge} E_\alpha.$$

Nếu họ ξ được đánh chỉ số bởi tập $\mathbb{N}$, tức là

$$\xi = \{E_n \mid n \in \mathbb{N}\} = (E_n)_{n\in\mathbf{N}} = (E_n)_{n=1}^{\infty}$$

thì hợp và giao của chúng được kí hiệu tương ứng là

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Với mọi tập X, ta kí hiệu

$$\mathscr{P}(X) = \{E \mid E \subset X\}$$

là tập có các phần tử là các tập con của X. Với mọi $E \in \mathscr{P}(X)$, ta gọi $E^c = X \setminus E$ là phần bù của E trong X.

Cho $(E_\alpha)_{\alpha\in\wedge}$ là một họ các tập con của tập X. Ta có quy tắc sau đây, gọi là quy tắc đối ngẫu De Morgan

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\wedge} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\wedge} E_\alpha^c,\ \left(\bigcap_{\alpha\in\wedge} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\wedge} E_\alpha^c.$$

§2. Quan hệ và ánh xạ

1. Quan hệ

Cho các tập X và Y, ta gọi tích Descartes của X và Y là tập

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

có các phần tử là các cặp (x, y) với $x \in X$, $y \in Y$.

Tích Descartes $X \times X$ được kí hiệu là X^2 và gọi là bình phương Descartes của tập X.

Ta gọi một tập con S của $X \times Y$ là một quan hệ trên X và Y ; một tập con S của X^2 là một quan hệ trên X.

Nếu S là quan hệ thì thay cho cách viết $(x, y) \in S$ ta sẽ viết là xSy.

Quan hệ S trên tập X gọi là có tính chất phản xạ nếu mọi $x \in X$ đều có xSx ; gọi là có tính chất đối xứng nếu mọi $x, y \in X$, xSy thì ySx ; gọi là có tính chất phản xứng nếu mọi $x, y \in X$, xSy và ySx thì $x = y$; gọi là có tính chất bắc cầu nếu mọi $x, y, z \in X$, xSy và ySz thì xSz.

Quan hệ S trên X gọi là quan hệ tương đương nếu S có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Cho S là quan hệ tương đương trên X. Với số $a \in X$, đặt $[a] = S[a] = \{x \in X \mid xSa\}$. Rõ ràng $a \in [a]$. Ta gọi [a] là lớp tương đương chứa a. Các lớp tương đương hoặc trùng nhau, hoặc rời nhau. Ta gọi tập X/S có các phần tử là các lớp tương đương của X theo quan hệ tương đương S là tập thương của X theo quan hệ tương đương S.

2. Tập được sắp

Quan hệ S trên X gọi là quan hệ thứ tự nếu S có các tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi S là quan hệ thứ tự thì thay cho S ta sẽ kí hiệu là $\leq$.

Tập X cùng một quan hệ thứ tự trên X gọi là một tập được sắp. Nếu mọi $x, y \in X$ đều có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$ thì X gọi là được sắp tuyến tính. Trong trường hợp trái lại thì X gọi là được sắp bộ phận.

Cho X là một tập được sắp. Phần tử $x \in X$ gọi là phần tử tối đại (tương ứng : tối tiểu) nếu mọi $y \in X$, $x \leq y$ (tương ứng : $y \leq x$) thì $x = y$.

Cho X là một tập được sắp và E là tập con của X. Phần tử $x \in X$ gọi là biên trên (tương ứng : biên dưới) của E nếu $y \leq x$ (tương ứng : $x \leq y$) với mọi $y \in E$. Nếu x là biên trên (tương ứng : biên dưới) của E và $x \in E$ thì x gọi là phần tử lớn nhất (tương ứng : phần tử nhỏ nhất) của E.

Tập X gọi là được sắp tốt nếu mọi tập con khác rỗng E của X đều có phần tử nhỏ nhất.

Cho X là một tập được sắp bộ phận. Tập con E của X gọi là tập con được sắp tuyến tính (hay toàn phần) nếu mọi $x, y \in E$ đều có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Tập con E của X gọi là tập con được sắp tuyến tính tối đại nếu E được sắp tuyến tính và với mọi tập con D được sắp tuyến tính của X, $E \subset D$ thì $E = D$.

Nguyên lí tối đại Hausdoff. *Trong mọi tập được sắp bộ phận đều tồn tại một tập con được sắp tuyến tính tối đại.*

3. Ánh xạ

Một quan hệ f trên X và Y gọi là một ánh xạ từ X vào Y nếu mọi $x \in X$ tồn tại duy nhất $y \in Y$ sao cho $(x, y) \in f$. Nếu f là ánh xạ thì thay cho cách viết $(x, y) \in f$ ta sẽ viết là $y = f(x)$, $x \in X$.

Ánh xạ f từ X vào Y cũng được viết là

$$f : X \to Y$$
$$x \mapsto y = f(x).$$

Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Ta gọi hợp thành của các ánh xạ này là ánh xạ $g_o f$

$$g_o f : X \to Z$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Cho ánh xạ $f : X \to Y$, $D \subset X$ và $E \subset Y$. Ta gọi ảnh của D là tập

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\},$$

tạo ảnh của E là tập

$$f^{-1}(E) = \{x \in X \mid f(x) \in E\}.$$

Như vậy, nếu $f : X \to Y$ là một ánh xạ thì ta có ánh xạ

$$f^{-1} : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$$
$$E \mapsto f^{-1}(E).$$

Với mọi $E \subset Y$ và mọi họ $(E_\alpha)_{\alpha \in \wedge}$ các tập con của Y ta có

$$f^{-1}(E^c) = f^{-1}(E)^c$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \wedge} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \wedge} f^{-1}(E_\alpha)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in \wedge} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \wedge} f^{-1}(E_\alpha).$$

Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là đơn ánh nếu mọi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$; gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$; gọi là song ánh nếu vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

Nếu f là toàn ánh thì thay cho cách nói f từ X vào Y ta còn nói f từ X lên Y.

Ánh xạ $I_X : X \to X$, $I_X(x) = x$ với mọi $x \in X$ gọi là ánh xạ đồng nhất trên X.

Nếu $f : X \to Y$ là song ánh thì tồn tại duy nhất ánh xạ $f^{-1} : Y \to X$ thoả mãn

$$f^{-1} \circ f = I_X,\ f \circ f^{-1} = I_Y,$$

f^{-1} gọi là ánh xạ ngược của f.

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và $D \subset X$. Ta có ánh xạ

$$f|_D : D \to Y,\ f|_D(x) = f(x)$$

gọi là ánh xạ thu hẹp của f trên tập con D.

4. Lực lượng của tập hợp

Tập rỗng $X = \varnothing$ và tập $X = \{x_1, ..., x_n\}$ gọi là tập hữu hạn. Trong trường hợp này ta định nghĩa lực lượng (hay bản số) của X, kí hiệu Card(X), là

$$\text{Card}(\varnothing) = 0$$

$$\text{Card}(\{x_1, ..., x_n\}) = n.$$

Như vậy, lực lượng của tập hữu hạn là số phần tử của nó.

Các tập không phải hữu hạn gọi là tập vô hạn.

Ta gọi X là tập vô hạn đếm được nếu có một song ánh từ X lên $\mathbb{N}$. Trường hợp này ta kí hiệu

$$\text{Card}(X) = \omega$$

Ta gọi X là tập continum nếu có một song ánh từ X lên đoạn [0, 1]. Trường hợp này ta kí hiệu

$$\text{Card}(X) = c.$$

Ta có : $\text{Card}(X) = \omega$ thì $\text{Card}(X^2) = \omega$; $\text{Card}(X) = c$ thì $\text{Card}(X^2) = c$.

Cho hai tập X và Y. Ta viết $\text{Card}(X) \le \text{Card}(Y)$ nếu có một đơn ánh từ X vào Y ; $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$ nếu có một đơn ánh từ X vào Y nhưng không có một song ánh từ X lên Y ; $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$ nếu có một song ánh từ X lên Y. Ta có

1) $X \subset Y$ thì $\text{Card}(X) \le \text{Card}(Y)$

2) $\text{Card}(X) \le \text{Card}(Y)$ và $\text{Card}(Y) \le \text{Card}(X)$

thì $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$.

Tập X gọi là tập đếm được nếu Card (X) $\le \omega$; tập X gọi là tập không đếm được nếu Card (X) $> \omega$.

Ta có : $\omega < c$.

§3. Trường số phức

1. Tập số phức

Số phức là số có dạng $z = a + bi$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, i là một kí hiệu gọi là đơn vị ảo.

Trong số phức $z = a + bi$, ta gọi a là phần thực của z, b là phần ảo của z, kí hiệu tương ứng là Rez và Imz.

Hai số phức z_1 và z_2 gọi là bằng nhau nếu $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$, kí hiệu $z_1 = z_2$.

Tập tất cả các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Sử dụng các đồng nhất thức

$$a + 0i \equiv a,\ 0 + bi \equiv bi,\ (\pm 1)i \equiv \pm i,$$

ta có

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

2) $z \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $\mathrm{Im}z = 0$;

3) $z = 0$ nếu và chỉ nếu $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z = 0$.

Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một điểm duy nhất (a, b) của mặt phẳng toạ độ xOy. Do đó ta có thể đồng nhất $\mathbb{C}$ với mặt phẳng xOy. Mặt phẳng dùng để biểu diễn số phức gọi là mặt phẳng phức. Trong mặt phẳng phức, trục Ox gọi là trục thực, trục Oy gọi là trục ảo.

2. Phép toán số phức

Phép toán số phức được thực hiện như phép toán trên các biểu thức số thực, trong đó $ii = i^2 = -1$.

Theo định nghĩa đó, với mọi $z = a + bi$, $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ta có

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

2) $z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

3) $-z = (-a) + (-b) i$

4) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i \ (z \neq 0)$

Dễ dàng thấy rằng phép cộng và phép nhân số phức có các tính chất giao hoán, kết hợp, phép nhân phân phối đối với phép cộng. Mọi số phức z đều có số đối là $-z$ và mọi số phức z khác 0 đều có nghịch đảo là z^{-1}. Do đó, $\mathbb{C}$ là một trường, gọi là trường số phức.

3. Số phức liên hợp

Cho số phức z = a + bi. Ta gọi số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$. Với mọi $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

2) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

3) $z = \bar{z}$ nếu và chỉ nếu $z \in \mathbb{R}$.

4. Môđun của số phức

Cho số phức z = a + bi. Ta gọi môđun (hay giá trị tuyệt đối) của z là

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Với mọi $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có

1) $|z| \geq 0, |z| = 0$ nếu và chỉ nếu $z = 0$

2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

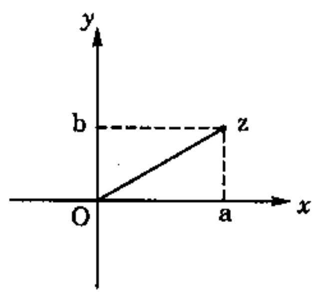
4) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

5. Dạng lượng giác

Trong mặt phẳng phức cho điểm z = a + bi

Đặt $|z| = r$. Ta gọi argumen của z là góc lượng giác $\varphi = (O_x, O_z)$. Nếu φ là một argumen của z thì họ tất cả các argumen của z là

$$\varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Ta có

$z = r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trong đó $r = |z|$ và φ là một argumen của z.

Dạng trên của số phức gọi là dạng lượng giác.

Cho hai số phức dưới dạng lượng giác

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Khi đó thực hiện phép tính ta có

$$z_1.z_2 = (r_1r_2)\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\ z_2 \neq 0.$$

Như vậy:

Tích (thương) của hai số phức là số phức có môđun bằng tích (thương) của các môđun, argumen bằng tổng (hiệu) của các argumen.

Từ các công thức trên, mọi $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ ta có

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}.$$

Đặc biệt ta có công thức sau đây, gọi là công thức Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Dưới dạng lượng giác ta có

$z_1 = z_2$ nếu và chỉ nếu $r_1 = r_2$ và $\varphi_1 = \varphi_2 + k2\pi$

với số nguyên k nào đó.

6. Căn của số phức

Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Số phức w gọi là căn bậc n của z nếu $w^n = z$. Đặt $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ta có

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = z.$$

Từ đó $\begin{cases}\rho^n = r\\ n\theta = \varphi + k2\pi\end{cases}$ hay $\begin{cases}\rho = \sqrt[n]{r}\\ \theta = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z},\end{cases}$

và ta có

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

Vì sin và cosin tuần hoàn với chu kỳ 2π nên

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right] \middle|\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$$

Như vậy mọi số phức $z \neq 0$, $\sqrt[n]{z}$ có đúng n giá trị khác nhau.

7. Công thức Euler

Theo công thức khai triển Maclaurin của e^x, với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

từ đó

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right).$$

Theo khai triển Maclaurin của cosx và sinx ta có công thức sau đây, gọi là công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Theo công thức Euler, số phức z có môđun r, argumen φ còn được viết dưới dạng sau đây, gọi là dạng mũ của z

$$z = re^{i\varphi}.$$

Sử dụng công thức Euler, với mọi $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ta định nghĩa

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Bài tập

I.1. Cho tập $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Tìm các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, tối đại, tối tiểu trên các tập được sắp sau đây với quan hệ thứ tự $\subset$

a) $\mathscr{P}(X)$; b) $\mathscr{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$; c) $\mathscr{P}(X)\setminus\{X\}$.

I.2. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$.

Đặt $h = g_0 f$. Chứng minh

a) f và g đơn ánh thì h đơn ánh

b) f và g toàn ánh thì h toàn ánh

c) f và g song ánh thì h song ánh

d) h đơn ánh thì f đơn ánh

e) h toàn ánh thì g toàn ánh.

I.3. Cho $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là các song ánh.

Chứng minh

a) $(f^{-1})^{-1} = f$. b) $(g_0 f)^{-1} = f^{-1}{}_0 g^{-1}$.

I.4. Chứng minh mọi tập vô hạn X đều có một tập con vô hạn đếm được. Do đó Card (X) $\geq \omega$.

I.5 Chứng minh Card ($\mathbb{Z}$) = Card ($\mathbb{Q}$) = ω.

I.6 Chứng minh Card ($\mathbb{N}$) < Card ([0, 1]) (tức là $\omega < c$).

I.7 Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Chứng minh

Card ((a, b)) = Card ([a, b]) = Card ($\mathbb{R}$) = c.

I.8 Với mọi tập X, chứng minh Card (X) < Card ($\mathscr{P}$(X)).

I.9 Thực hiện các phép tính

a) $\dfrac{4+i}{2-i}$; b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$; c) $(-\sqrt{3}+i)^9$; d) $(-\sqrt{3}-1)^{-5}$.

I.10 Tính i^n, $n \in \mathbb{Z}$

I.11 Tìm môđun và argumen

a) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$; b) $(1+i)(\sqrt{3}+i)^3$;

c) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{-1-i}$; d) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^5}$.

I.12 Tìm căn của số phức

a) $\sqrt[3]{-1}$; b) $\sqrt[4]{1}$; c) $\sqrt[3]{-2+2i}$; d) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$.

I.13 Lập công thức tổng quát tìm

$\sqrt{a+bi}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

I.14 Giải các phương trình trên $\mathbb{C}$

a) $z^2 = i$; b) $z^2 = 3-4i$; c) $z^2 + 4z + 13 = 0$.

I.15 Chứng minh nếu $\sqrt[n]{z} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ thì $\sqrt[n]{\overline{z}} = \{\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n\}$.

I.16 Số phức w gọi là logarit phức của z nếu $e^w = z$. Tập các logarit phức của z kí hiệu là Lnz. Với mọi $z = re^{i\varphi} \neq 0$, chứng minh

$\mathrm{Ln}z = \{\ln r + i(\varphi + k2\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

I.17 Giải các phương trình trên $\mathbb{C}$

a) $e^z = 2$;

b) $\cos z = 2$;

c) $\sin z = 2$;

d) $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$.

CHƯƠNG II

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. Ma trận

1. Định nghĩa ma trận

Một ma trận cấp $m \times n$ là một bảng gồm $m \times n$ số được sắp thành m dòng, n cột theo một thứ tự nhất định.

Ma trận A cấp $m \times n$ được viết dưới dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Số a_{ij} nằm ở dòng i, cột j, gọi là phần tử thứ (i,j) của ma trận A. Ta cũng kí hiệu $a_{ij} = (A)_{ij}$.

Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu A = B, nếu có cùng cấp $m \times n$ và

$(A)_{ij} = (B)_{ij}$ với mọi $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

2. Phép toán ma trận

Cho hai ma trận A và B cấp $m \times n$ và số λ. Ta gọi tổng của A và B, kí hiệu A + B, tích của λ và A, kí hiệu λA, là các ma trận cấp $m \times n$ xác định như sau :

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij},$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda(A)_{ij}$$

với mọi $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Như vậy: Cộng ma trận là cộng các phần tử tương ứng của các ma trận số hạng; nhân một số với ma trận là nhân tất cả các phần tử của ma trận với số đó.

Cho ma trận A cấp $m \times n$ và ma trận B cấp $n \times p$. Ta gọi tích của ma trận A và B, kí hiệu AB, là ma trận cấp $m \times p$ có các phần tử xác định bởi

$$(AB)_{ik} = (A)_{i1}(B)_{1k} + (A)_{i2}(B)_{2k} + ... + (A)_{in}(B)_{nk}$$

với mọi $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., p$.

Như vậy : Phần tử thứ (i, k) của ma trận $A \times B$, bằng tổng các tích tương ứng của các phần tử nằm trên dòng i của ma trận A và cột k của ma trận B.

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, là tập tất cả các ma trận cấp $m \times n$ có các phần tử thuộc $\mathbb{K}$.

Ma trận $O = O_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ có tất cả các phần tử đều bằng không gọi là ma trận không cấp $m\times n$. Với mọi ma trận A, ta gọi $-A = (-1)A$ là ma trận đối của A.

Từ định nghĩa ta có :

Định lí 1.1 . *Với mọi* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

ta có

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
2) $A + B = B + A$
3) $A + O = A$
4) $A + (-A) = O$
5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8) $1A = A$.

Ma trận $I = I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, có các phần tử xác định bởi

$$(I)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

với mọi $i, j = 1, \ldots, n$, gọi là ma trận đơn vị cấp n.

Chẳng hạn : $I_1 = (1) \equiv 1, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dễ dàng kiểm tra bổ đề sau :

Bổ đề 1.1. *Với mọi* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *ta có*

a) $AI_n = I_mA = A$.

b) $A\ O_{n\times p} = O_{m\times p}, O_{l\times m}A = O_{l\times n}$.

Như vậy: Khi phép tính có thể thực hiện thì nhân một ma trận với ma trận đơn vị bằng chính nó, nhân một ma trận với ma trận không bằng ma trận không.

Bổ đề 1.2. *Với mọi* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *ta có :*

a) $(AB)C = A(BC)$.

b) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Chứng minh. a) Với mọi $i = 1, ..., m$, $l = 1, ..., q$ ta có

$$\big((AB)C\big)_{il} = \sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}(C)_{kl} \qquad = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{jk}\right)(C)_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{jk}(C)_{kl}\right) \quad = \sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}(B)_{jk}(C)_{kl}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(BC)_{jl} \qquad = \big(A(BC)\big)_{il}$$

Vậy $(AB)C = A(BC)$.

b) Suy ra từ $\lambda\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(\lambda A)_{ij}(B)_{jk} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ij}(\lambda B)_{jk}$. □

Theo bổ đề 1.2 a), khi một dãy phép nhân ma trận được thực hiện thì nó có tính chất kết hợp.

Chú ý rằng phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ta có $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2\times 2}$;

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Vậy trường hợp này, $AB \neq BA$.

Ta bỏ qua chứng minh đơn giản của bổ đề sau.

Bổ đề 1.3. a) *Với mọi* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ *ta có* $A(B + C) = AB + AC$.

b) *Với mọi* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

ta có $(A + B)C = AC + BC$.

Như vậy : Khi phép tính được thực hiện thì phép nhân ma trận phân phối đối với phép cộng ma trận.

3. Ma trận chuyển vị và ma trận liên hợp

Cho ma trận A cấp $m \times n$. Ta gọi ma trận chuyển vị của A, kí hiệu A^T, là ma trận cấp $n \times m$ có các phần tử xác định bởi

$$(A^T)_{ji} = (A)_{ij} \text{ với mọi } j = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, m.$$

Như vậy để có ma trận chuyển vị của A, ta chỉ việc đổi các dòng của A theo thứ tự thành các cột hoặc ngược lại.

Bổ đề 1.4. a) *Với mọi* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ta có*

$$(A^T)^T = A\ ;\ (A + B)^T = A^T + B^T,\ (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

b) *Với mọi* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ta có

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Chứng minh. Chứng minh a) là tầm thường. Ta chứng minh b).

Với mọi $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, p$ ta có

$$\left((AB)^T\right)_{ki} = (AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (B^T)_{kj}(A^T)_{ji}$$

$$= (B^T A^T)_{ki}.$$

Do đó $(AB)^T = B^T A^T$. □

4. Ma trận vuông

Ma trận có n dòng, n cột gọi là ma trận vuông cấp n. Tập tất cả các ma trận vuông cấp n có các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$, kí hiệu là $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Từ định lí 1.1 và các bổ đề 1.1, 1.2, 1.3 ta có :

Định lí 1.2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *với phép cộng và phép nhân ma trận là một vành có đơn vị, tức là mọi* $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *ta có*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 2) $A + B = B + A$

3) $A + O = A$ 4) $A + (-A) = O$

5) $(AB)C = A(BC)$

6) $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$

7) $AI = IA = A$.

Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sao cho :

$$AB = BA = I.$$

Ma trận B thoả mãn điều kiện định nghĩa trên nếu có là duy nhất. Thật vậy nếu ma trận C cũng thoả mãn AC = CA = I thì

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Khi A khả nghịch, đặt $B = A^{-1}$ và gọi là nó là ma trận nghịch đảo của A. Ta có

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Hiển nhiên $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ không khả nghịch, $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch. Ma trận khác không $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ khác không nhưng không khả nghịch, vì nếu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

thì a + c = 1 và a + c = 0, không thể xảy ra.

Vấn đề khi nào ma trận khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo như thế nào sẽ xét ở §3.

Bổ đề 1.5. *Cho* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *là các ma trận khả nghịch. Khi đó*

a) A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) A^T *khả nghịch và* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

c) AB *khả nghịch và* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chứng minh. a) Suy ra từ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

b) Ta có $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I.$$

c) Ta có

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$$ □

Cho A là một ma trận vuông. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa

$$A^k = AA...A \text{ (k lần A)}$$

Khi A là ma trận vuông khả nghịch thì ta đặt

$$A^o = I$$

$$A^k = (A^{-1})^{|k|} \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k < 0,$$

ta có A^k với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

§2. Định thức

1. Hoán vị

Cho tập S = {1, 2, ..., n}. Một song ánh P: S → S gọi là một hoán vị. Nếu đặt $P(i) = j_i$ thì hoán vị P có thể viết dưới dạng

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

hay vắn tắt hơn $P = (j_1, j_2, \dots, j_n)$

Một hoán vị P được gọi là một phép chuyển vị nếu chỉ có hai phần tử đổi chỗ cho nhau còn những phần tử khác giữ nguyên. Phép chuyển vị đổi i cho j kí hiệu là T_{ij}. Chẳng hạn :

$$T_{12} = (2, 1, 3, \dots, n).$$

Ta có

$$T_{ij}(k) = \begin{cases} i \text{ nếu } k = j \\ j \text{ nếu } k = i \\ k \text{ nếu } k \neq i, j \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$T_{ij} = T_{ji}; \; T_{ij} \circ T_{ji} = I \text{ (hoán vị đồng nhất)}$$

Do đó $T_{ji} = T_{ij}^{-1}$.

Định lí 2.1. *Mọi hoán vị đều là tích của các phép chuyển vị.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng một hoán vị P giữ nguyên vị trí của ít nhất r phần tử đều phân tích được thành tích của các phép chuyển vị.

Điều này là hiển nhiên với r = n, khi đó

$$P = I = T_{ij} \circ T_{ji} \text{ với } i, j \text{ bất kì}.$$

Giả sử kết quả đúng với r, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với r − 1. Kí hiệu P_{r-1} là một hoán vị có ít nhất r − 1 phần tử giữ nguyên và nó không phải là hoán vị đồng nhất. Khi đó tồn tại j sao cho $P_{r-1}(j) = k \neq j$. Xét phép chuyển vị T_{kj}.

Nếu $P_{r-1}(i) = i$ thì

$$T_{kj} \circ P_{r-1}(i) = T_{kj}(i) = i.$$

Vậy nếu P_{r-1} giữ nguyên vị trí của i thì $T_{kj} \circ P_{r-1}$ cũng giữ nguyên vị trí của i. Ngoài ra

$$T_{kj} \circ P_{r-1}(j) = T_{kj}(k) = j,$$

do đó $T_{kj} \circ P_{r-1}$ giữ nguyên vị trí của ít nhất r phần tử. Theo giả thiết $P_r = T_{kj} \circ P_{r-1}$ bằng tích của các phép chuyển vị, vì vậy $P_{r-1} = T_{kj}^{-1} \circ P_r$ cũng bằng tích của các phép chuyển vị. □

Chú ý rằng sự phân tích một hoán vị thành tích của các chuyển vị là không duy nhất.

Cho hoán vị $(j_1, j_2, ..., j_n)$, ta nói rằng j_i, j_k tạo nên một nghịch thế nếu $i < k$ nhưng $j_i > j_k$.

Ví dụ. P = (3, 1, 2) thì 3, 1 ; 3, 2 cho ta hai nghịch thế, 1, 2 không cho ta nghịch thế.

Cho hoán vị P. Ta kí hiệu N(P) là số nghịch thế của hoán vị P và $s(P) = (-1)^{N(P)}$. Nếu N(P) chẵn thì ta nói P là chẵn (hay dương), lúc đó s(P) = 1. Nếu N(P) lẻ thì ta nói P là lẻ (hay âm), lúc đó s(P) = − 1.

Ta có $s(I) = 1$, $s(T_{ij}) = -1$ và

$$s(P \circ T_{ij}) = -s(P).$$

Từ đó bằng cách viết mỗi hoán vị thành tích các chuyển vị, ta có :

s(P) = 1 nếu số chuyển vị chẵn;

s(P) = − 1 nếu số chuyển vị lẻ;

$s(P \circ P') = s(P) \cdot s(P')$;

$s(P^{-1}) = s(P)$.

2. Định nghĩa định thức

Cho A là ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta gọi định thức của A là số

$$\det A = \sum s(P) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

tổng lấy khắp tất cả các hoán vị $P = (j_1, j_2, \dots, j_n)$. Ta còn sử dụng kí hiệu detA là $|A|$.

Ta thấy rằng nếu A cấp n thì $|A|$ gồm tổng của n! số hạng. Trong số hạng $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ mỗi dòng, mỗi cột chỉ có duy nhất một phần tử tham gia vào.

Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n. Trường hợp n = 2 ta có

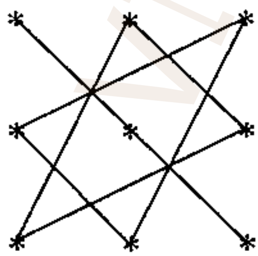
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = s(1, 2) a_{11} a_{22} + s(2, 1) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Ta thường nói định thức cấp 2 bằng "tích các số trên đường chéo chính, trừ tích các số trên đường chéo phụ".

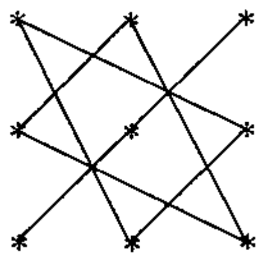
Tương tự, ta có định thức cấp 3 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2.$$

Khai triển này thường được nhớ theo quy tắc Sarrus sau :



Dấu (+)



Dấu (–)

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [1.(-3).0 + 3.2(-2) + 4(-2).1] - [2(-3).4 + 1(-2).1 + 3.(-2).0]$$

$$= (-12 - 8) - (24 - 2) = 6.$$

3. Các tính chất của định thức

Tính chất 1. $\det A^T = \det A$

Chứng minh. Kí hiệu $a_{ji} = b_{ij}$, khi đó

$$\det A^T = \sum s(j_1, j_2, ..., j_n)\, b_{1j_1} b_{2j_2} ... b_{nj_n} = \sum s(P) a_{P(1)1} a_{P(2)2} ... a_{P(n)n} =$$

$$= \sum s(P) a_{1P^{-1}(1)} a_{2P^{-1}(2)} ... a_{nP^{-1}(n)} =$$

$$= \sum s(P^{-1}) a_{1P^{-1}(1)} a_{2P^{-1}(2)} ... a_{nP^{-1}(n)} = \det A,$$

vì P chạy khắp các hoán vị thì P^{-1} cũng chạy khắp các hoán vị. □

Theo tính chất 1, trong định thức vai trò của dòng và cột là như nhau. Một tính chất ta phát biểu cho cột thì cũng đúng với dòng và ngược lại.

Tính chất 2. *Nếu tất cả các phần tử của một cột được nhân với số λ thì định thức được nhân lên với λ.*

Kí hiệu $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, khi đó ma trận A có thể viết một cách hình thức dưới dạng $A = (a_1, ..., a_j, ..., a_n)$.

Chứng minh.

$$\det(a_1, ..., \lambda a_j, ..., a_n) = \sum s(P) \lambda a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n} =$$

$$= \lambda \sum s(P) a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n} = \lambda \det A.$$ □

Nếu $\lambda = 0$ thì $\det(a_1, ..., 0, ..., a_n) = 0$, do đó định thức có một cột bằng 0 thì bằng 0 (cột gọi là bằng 0 nếu tất cả các phần tử trong cột đều bằng 0).

Tính chất 3. *Nếu* $a_j = a'_j + a''_j$ *thì*

$$\det A = \det(a_1, ..., a'_j, ..., a_n) + \det(a_1, ..., a''_j, ..., a_n)$$

Chứng minh.

$$\det A = \sum s(P) a_{1j_1} ... (a'_{ij} + a''_{ij}) ... a_{nj_n} =$$

$$= \sum s(P) a_{1j_1} ... a'_{ij} ... a_{nj_n} + \sum s(P) a_{1j_1} ... a''_{ij} ... a_{nj_n} =$$

$$= \det(a_1, ..., a'_j, ..., a_n) + \det(a_1, ..., a''_j, ..., a_n).$$ □

Tính chất 4. *Nếu đổi chỗ hai cột cho nhau thì định thức đổi dấu.*

Chứng minh. Nếu đổi chỗ cột i cho cột k thì số hạng của nó sẽ có dạng :

$$s(P') a_{1j_1} ... a_{ij_k} ... a_{kj_i} ... a_{nj_n} = s(P.T_{jk}) a_{1j_1} ... a_{ij_i} ... a_{kj_k} ... a_{nj_n}$$

$$= -s(P) a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$$

với mọi $P = (j_1, j_2, ..., j_n)$. Vậy mỗi số hạng của định thức mới đều bằng, trái dấu của một số hạng của định thức cũ, nghĩa là định thức đổi dấu. □

Tính chất 4'. *Một định thức có hai cột giống nhau thì định thức đó bằng* 0.

Chứng minh. Nếu $a_j = a_k$ thì

$$\det A = \det(a_1, ..., a_j, ..., a_k, ..., a_n) =$$

$$= \det(a_1, ..., a_k, ..., a_j, ... a_n) = -\det A.$$

Vì $\det A = -\det A$ nên $\det A = 0$. □

Tính chất 5. *Nếu một cột của định thức là tổ hợp tuyến tính của những cột khác thì định thức bằng 0.*

Chứng minh. Giả sử cột j là tổ hợp tuyến tính của các cột khác, tức là $a_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k a_k$. Khi đó :

$$\det(a_1, ..., \sum_{k \neq j} \lambda_k a_k, ..., a_n) = \sum_{k \neq j} \det(a_1, ..., \lambda_k a_k, ..., a_n) \quad \text{(tính chất 3)}$$

$$= \sum_{k \neq j} \lambda_k \det(a_1, ..., a_k, ..., a_n) \quad \text{(tính chất 2)}$$

$$= \sum_{k \neq j} \lambda_k 0 = 0 \quad \text{(tính chất 4')}.$$ □

Tính chất 6. *Nếu cộng thêm vào cột nào đó một tổ hợp tuyến tính của các cột khác thì định thức không thay đổi.*

Chứng minh. Giả sử thay cột a_j bởi cột

$$a'_j = a_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k a_k.$$

Ta có

$$\det(a_1, ..., a'_j, ..., a_n) =$$

$$= \det(a_1, ..., a_j, ..., a_n) + \det(a_1, ..., \sum_{k \neq j} \lambda_k a_k, ..., a_n) \text{(tính chất 3)}$$

$$= \det(a_1, ..., a_j, ..., a_n) = \det A \qquad \text{(tính chất 5).} \quad \square$$

4. Phương pháp khai triển định thức. Định lí Laplace

Cho định thức cấp n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum s(P) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \qquad (1)$$

Ta gọi phần phụ của phần tử a_{ij} là định thức con M_{ij} cấp n – 1 nhận được từ D bằng cách bỏ đi dòng i, cột j. Số

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

gọi là phần phụ đại số của phần tử a_{ij}.

Sau đây là công thức khai triển định thức theo dòng hoặc cột

Bổ đề 2.1. *Với mọi* i, j = 1, 2, ..., n *ta có*

(i) $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$,

hoặc

(ii) $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$.

Chứng minh. Từ (1), nhóm các số hạng có chứa $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ và đặt thừa số chung ta viết được D dưới dạng

$$D = a_{i1}B_{i1} + a_{i2}B_{i2} + ... + a_{in}B_{in}.$$

Do vậy để chứng minh (i), và từ đó có (ii), ta chỉ cần kiểm tra

$$a_{ij}B_{ij} = a_{ij}A_{ij} \text{ với } i, j = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

Thật vậy

$$a_{11}B_{11} = a_{11}\sum s(1, j_2, ..., j_n)\ a_{2j_2}a_{3j_3}...a_{nj_n}$$

$$= a_{11}\sum s(j_2, ..., j_n)a_{2j_2}a_{3j_3}...\ a_{nj_n} = a_{11}M_{11}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11}.A_{11}.$$

tức là (2) đúng với $i = j = 1$.

Bây giờ ta sẽ chứng tỏ (2) đúng với i, j bất kì.

Nếu đổi chỗ dòng i lên dòng $i - 1$ rồi dòng $i - 1$ lên dòng $i - 2$, ..., sau $i - 1$ lần đổi dòng ta đưa dòng i lên dòng 1. Tương tự, qua $j - 1$ lần đổi cột ta đưa cột j thành cột 1. Như vậy, qua $i + j - 2$ lần đổi dòng và cột ta được định thức D thành định thức D' có phần tử $a'_{11} = a_{ij}$. Trong quá trình đổi dòng và cột trên, thứ tự các dòng và cột (trừ dòng i và cột j) vẫn giữ nguyên, do đó $M'_{11} = M_{ij}$. Theo tính chất 4 của định thức, $D = (-1)^{i+j-2}D'$. Do đó

$$a_{ij}B_{ij} = (-1)^{i+j-2}\ a'_{11}.M'_{11} = (-1)^{i+j-2}\ a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}. \qquad \square$$

Ví dụ. Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Giải. Khai triển D theo cột 3 ta được : $D = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Khai triển theo cột 2 ta được : $D = -(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$

Bây giờ ta sẽ tổng quát hoá công thức khai triển định thức theo dòng hoặc cột.

Xét các phần tử của định thức D nằm trên h dòng, h cột, giữ nguyên thứ tự, ta được định thức cấp h

$$M = M^{i_1, i_2, ..., i_h}_{j_1, j_2, ..., j_h}$$

trong đó $i_1 < i_2 < ... < i_h$ là các dòng và $j_1 < j_2 < ... < j_h$ là các cột.

n – h dòng và n – h cột còn lại cho ta một định thức, gọi là định thức phụ của M, kí hiệu là

$$\overline{M} = \overline{M}_{j_1,j_2,\ldots,j_h}^{i_1,i_2,\ldots,i_h}$$

và ta gọi phần phụ đại số của M là

$$A_M = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_h+j_1+j_2+\ldots+j_h}\overline{M}$$

Ta sẽ chứng minh.

Bổ đề 2.2. M.A_M *là một bộ phận các số hạng của* D.

Chứng minh. Giả sử M tạo thành bởi h dòng đầu tiên và h cột đầu tiên của D. Khi đó một số hạng của M.A_M sẽ có dạng

$$d = s(j_1, j_2, \ldots, j_h)\, a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{hj_h}\; s(j_{h+1}, \ldots, j_n)\, a_{h+1,j_{h+1}}\ldots a_{nj_n}.$$

Vì mọi k ≤ h thì $j_k \le h$ và mọi l thì $j_{h+l} \ge h$, do đó

$$N(j_1, \ldots, j_h, j_{h+1}, \ldots, j_n) = N(j_1, \ldots, j_h) + N(j_{h+1}, \ldots, j_n).$$

Vì vậy

$$d = s(j_1, \ldots, j_h, \ldots, j_n)\, a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n},$$

tức là mọi số hạng của M.A_M đều là số hạng của D.

Bây giờ giả sử M nằm ở vị trí tổng quát. Sau $i_1 - 1$ lần đổi dòng, ta đưa dòng i_1 về dòng 1, sau $i_2 - 2$ lần đổi dòng ta đưa dòng i_2 về dòng 2, ... Như vậy sau :

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_h - h) = i_1 + i_2 + \ldots + i_h - \frac{h(h+1)}{2}$$

lần đổi dòng ta đưa h dòng của M về h dòng đầu tiên với thứ tự giữ nguyên. Tương tự, sau

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_h - \frac{h(h+1)}{2}$$

lần đổi cột ta đưa h cột của M về h cột đầu tiên.

Như vậy sau $(i_1 + \ldots + i_h) + (j_1 + \ldots + j_n) - h(h+1)$ lần đổi dòng và cột ta đưa D thành D', M thành M', $\overline{M}$ thành $\overline{M}'$.

Chú ý rằng h(h + 1) là số chẵn, ta có

$$D = (-1)^{(i_1+\ldots+i_h)+(j_1+\ldots+j_h)}D'.$$

Vì $M'.\overline{M}' = M\overline{M}$ là một bộ phận các số hạng của D' nên $M.A_M$ là một bộ phận các số hạng của D. □

Định lí 2.2. (Định lí Laplace). *Nếu trong một định thức D ta lấy ra h dòng (hoặc h cột), $1 \le h \le n - 1$ thì tổng tất cả các định thức con cấp h chứa trong các dòng (hoặc các cột) ấy nhân với phần phụ đại số của chúng bằng định thức D.*

Chứng minh. Giả sử ta lấy ra h dòng. Kí hiệu các định thức con cấp h lấy từ h dòng này là $M_1, M_2, ..., M_s$, phần phụ đại số tương ứng của chúng là $A_1, A_2, ..., A_s$. Theo kết quả đã trình bày ở trên

$$M_1A_1 + M_2A_2 + ... + M_sA_s \tag{3}$$

là tổng các số hạng của D, các số hạng này là khác nhau. Để chứng minh tổng trên bằng D ta chỉ cần chỉ ra nó có đúng n! số hạng.

Số định thức M_i có được bằng số cách chọn không kể thứ tự h phần tử khác nhau từ n phần tử, do đó

$$s = C_n^h = \frac{n!}{h!(n-h)!}.$$

M_i có h! số hạng, A_i có (n–h)! số hạng, do đó M_iA_i có h! (n–h)! số hạng. Từ đó tổng (3) có s.h!(n–h)! = n! số hạng. □

Ví dụ. Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Giải. Chọn dòng 1 và dòng 4, chỉ có một định thức con khác không là $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, phần phụ đại số của nó là :

$$A_M = (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Do đó

$$D = M.A_M = 1.1 = 1.$$

5. Vài định thức có dạng đặc biệt

a) Theo định lí Laplace ta có

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

b) Ma trận vuông A gọi là có dạng tam giác nếu $a_{ij} = 0$ với mọi i > j hoặc $a_{ij} = 0$ với mọi i < j, tức là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ hoặc } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Trong cả hai trường hợp, theo định nghĩa định thức ta có

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Trường hợp đặc biệt của ma trận tam giác là ma trận (đường) chéo : $a_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Kí hiệu $I = I_n$ là ma trận đơn vị, ta có $|I| = 1$.

Ví dụ. a) Tính

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Giải. Nhân dòng thứ nhất với (–2), cộng vào dòng thứ hai, sau khi đã nhân dòng thứ hai với (–1), cộng vào các dòng phía dưới ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = 1.(-2).1.2\dots(n-2) = -2\big((n-2)!\big)(n \geq 2).$$

b) Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Giải. Khai triển theo dòng đầu ta được

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Chú ý rằng cả hai định thức đều là cấp n – 1, do đó định thức thứ nhất chính là D_{n-1}, khai triển định thức thứ hai theo cột đầu ta thấy nó chính là D_{n-2}. Vì vậy

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Bởi vì $D_1 = 2, D_2 = 3$ nên bằng quy nạp ta được

$$D_n = 2n - (n-1) = n + 1.$$

6. Hệ phương trình tuyến tính Cramer

Hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình, n ẩn dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

gọi là hệ Cramer nếu $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$

Nếu đặt $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

thì hệ trên có thể viết lại thành

$$x_1a_1 + \dots + x_ja_j + \dots + x_na_n = b.$$

Đặt $D_j = \det(a_1, ..., b, ..., a_n)$ (b ở vị trí thứ j). Khi đó ta có định lí sau đây, gọi là quy tắc Cramer để giải hệ Cramer.

Định lí 2.3. (Định lí Cramer). *Hệ Cramer có một nghiệm duy nhất là*

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Chứng minh. Nếu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một nghiệm của hệ thì

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(b, a_2, ..., a_n) \\ &= \det(x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n, a_2, ..., a_n) \\ &= \det(x_1a_1, a_2, ..., a_n) + \det(x_2a_2 + ... + x_na_n, a_2, ..., a_n) \\ &= x_1 \det(a_1, a_2, ..., a_n) \text{ (do tính chất 5 của định thức)} \\ &= x_1D. \end{aligned}$$

Vì $D \neq 0$ nên $x_1 = \frac{D_1}{D}$. Tương tự như vậy ta có $x_j = \frac{D_j}{D}$ với j = 1, ..., n. Vậy hệ Cramer có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất : $x_j = \frac{D_j}{D}$, j = 1,..., n.

Ta còn phải chứng minh $x_j = \frac{D_j}{D}$ đúng là một nghiệm của hệ.

Trước hết, ta chứng minh rằng :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = i \\ 0 \text{ nếu } k \neq i. \end{cases}$$

Thật vậy, bằng cách đổi dòng thành cột, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = j \\ 0 \text{ nếu } k \neq j. \end{cases}$$

Nếu k = j thì theo công thức khai triển theo cột, ta có ngay $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = D$. Nếu $k \neq j$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \det(a_1, ..., a_k, ..., a_k, ..., a_n) = 0$$

(định thức nhận được từ D bằng cách thay cột j bởi cột k).

Tương tự như vậy ta có

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{ij}.$$

Vế trái của phương trình thứ k trong hệ có dạng $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$. Thay $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ vào ta có

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{D_j}{D} = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}\right) =$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} b_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}\right) = \frac{1}{D}b_k D = b_k.$$

Vậy $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, j = 1, ..., n đúng là nghiệm của hệ. □

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0. \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -28,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -16. \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -20.$$

Do vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{7}{2}, 2, \dfrac{5}{2}\right)$.

§3. Liên hệ giữa định thức và ma trận

1. Phép toán ma trận và định thức

Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó dễ dàng thấy rằng, nói chung $|A+B| \neq |A| + |B|$. Đối với phép nhân với số ta có $|\lambda A| = \lambda^n |A|$. Đối với phép nhân ta có :

Định lí 3.1. *Với mọi* A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *ta có*

$$|AB| = |A||B|.$$

Chứng minh. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

và xét định thức cấp 2n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Theo định lí Laplace, khai triển D theo n dòng đầu ta được

$$D = |A||B|$$

Vì vậy để chứng minh định lí, ta chỉ cần chỉ ra $D = |C|$, trong đó C = AB. Nhân cột thứ nhất của D với b_{11}, cột thứ hai với $b_{21}, \dots$, cột thứ n với b_{n1} rồi cộng vào cột thứ n + 1, cột thứ n + 1 trở thành

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} + 0 = c_{11} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} + 0 = c_{21} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} + 0 = c_{n1} \\ -b_{11} + \quad 0 \quad + \dots + \quad 0 \quad + b_{11} = 0 \\ \quad 0 \ - \quad b_{21} \quad + \dots + \quad 0 \quad + b_{21} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad 0 \ + \quad 0 \quad + \dots - \quad b_{n1} \quad + b_{n1} = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta thấy, nếu nhân cột thứ nhất với b_{1j}, cột thứ hai với $b_{2j}, \dots$, cột thứ n với b_{nj} rồi cộng vào cột thứ n + j thì cột thứ n + j có các phần tử theo thứ tự là

$c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}, 0, \dots, 0$ với j = 1, 2, ..., n.

Tất cả các phép biến đổi trên đều không làm thay đổi giá trị D, do đó

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Khai triển D theo n cột cuối ta được

$$D = (-1)^{1+2+\dots+n+[(n+1)+(n+2)+\dots+2n]} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2n^2+n}(-1)^n \, |C| = |C|.$$

Định lí được chứng minh. □

2. Điều kiện ma trận khả nghịch. Công thức tìm ma trận nghịch đảo

Định lí 3.2. *Ma trận vuông A khả nghịch nếu và chỉ nếu* $D = |A| \neq 0$ *và khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Chứng minh. Nếu A khả nghịch thì $AA^{-1} = I$ nên theo định lí 3.1, $|A||A^{-1}| = 1$, do đó $|A| \neq 0$.

Bây giờ giả sử $D = |A| \neq 0$. Theo chứng minh định lí 2.5

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = i \\ 0 \text{ nếu } k \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \begin{cases} D \text{ nếu } k = j \\ 0 \text{ nếu } k \neq j \end{cases}$$

vì vậy nếu đặt $B = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ thì AB = BA = I, tức là $A^{-1} = B$. □

Theo định lí 3.2, ma trận vuông cấp hai $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $ad - bc \neq 0$ và

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải. Bởi vì $|A| = 6$ nên A khả nghịch. Ngoài ra

$A_{11} = 4$; $A_{21} = -3$; $A_{31} = -5$;

$A_{12} = 0$; $A_{22} = 3$; $A_{32} = 3$;

$A_{13} = 2$; $A_{23} = -3$; $A_{33} = -1$,

Nên theo định lí 3.2

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

3. Hạng của ma trận. Phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Cho $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ta gọi hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không tìm được ở trong A. Hạng của ma trận A kí hiệu là rank(A) hoặc r(A). Hiển nhiên rằng $r(A) \le \min\{m,n\}$ và $r(A^T) = r(A)$.

Ví dụ. Tìm hạng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Giải. Vì $|A| = 0$ nên $r(A) < 3$. Mặt khác, định thức con $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$ nên $r(A) \geq 2$.

Vậy $r(A) = 2$.

Ma trận A gọi là có dạng bậc thang nếu nó có k dòng đầu khác không, các dòng còn lại bằng không và nếu kí hiệu a_{ij_i} là phần tử khác không đầu tiên của dòng thứ i thì

$$j_1 < j_2 < \dots < j_k.$$

Nếu A có dạng bậc thang thì định thức con cấp k

$$M^{1,2,\dots,k}_{j_1,j_2,\dots,j_k} = a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{kj_k} \neq 0$$

và mọi định thức con cấp lớn hơn k đều bằng không, do đó

$$r(A) = k.$$

Như vậy : Hạng của một ma trận dạng bậc thang bằng số dòng khác không của ma trận đó.

Ta gọi các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận là những phép biến đổi sau đây :

Loại 1 : Đổi chỗ hai dòng cho nhau, còn những dòng khác giữ nguyên;

Loại 2 : Nhân vào một dòng với một số khác không, còn những dòng khác giữ nguyên ;

Loại 3 : Cộng vào một dòng một dòng khác đã nhân với một số, còn các dòng khác giữ nguyên.

Ma trận vuông A gọi là không suy biến nếu $|A| \neq 0$. Theo các tính chất của định thức dễ dàng thấy rằng, nếu A không suy biến thì sau các phép biến đổi sơ cấp, ma trận nhận được cũng không suy biến.

Ta có định lí sau đây, sẽ được chứng minh trong chương III.

Định lí 3.3. *Hạng của một ma trận không đổi khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng*

Áp dụng định lí 3.3, để tìm hạng của một ma trận ta sẽ thực hiện liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận về dạng bậc thang. Số dòng khác không của ma trận dạng bậc thang nhận được là hạng của ma trận.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Ta có

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 14 & -2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

4. Biến đổi sơ cấp tìm ma trận nghịch đảo

Ta gọi ma trận vuông nhận được từ ma trận đơn vị bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng là ma trận sơ cấp.

Từ định nghĩa hạng và định lí 3.2 suy ra $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $r(A) = n$. Vì vậy mọi ma trận sơ cấp đều khả nghịch.

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Khi đó mỗi phép biến đổi sơ cấp trên hai dòng của A tương đương với việc nhân vào bên trái của A ma trận sơ cấp cấp n nhận được từ I_n bằng phép biến đổi tương ứng.

Thật vậy, đổi chỗ dòng thứ i và dòng thứ j của A tương đương với việc nhân vào bên trái A ma trận sơ cấp nhận được từ I_n bằng cách đổi chỗ dòng thứ i cho dòng thứ j. Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

là phép đổi chỗ dòng thứ nhất cho dòng thứ hai. Hoàn toàn tương tự đối với hai loại phép biến đổi trên dòng khác.

Nếu A khả nghịch thì tồn tại các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa nó về ma trận đơn vị, tức là tồn tại các ma trận sơ cấp $P_1, P_2, \ldots, P_k$ để

$$P_k P_{k-1} \ldots P_1 A = I.$$

Nhân hai vế về bên phải với A^{-1} ta được

$$A^{-1} = P_k P_{k-1} \ldots P_1 = P_k P_{k-1} \ldots P_1 . I$$

nghĩa là A^{-1} có thể nhận được từ I bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa A thành I.

Từ đó ta có phương pháp tìm ma trận nghịch đảo của A như sau: Ghép A và I thành một ma trận cấp $n \times 2n$ $(A|I)$; dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận này sao cho n cột đầu thành ma trận đơn vị I. Khi đó n cột sau của $(A \mid I)$ sẽ thành A^{-1}. Quá trình này được tóm tắt

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{trên dòng}]{\text{Biến đổi sơ cấp}} (I \mid A^{-1})$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. Theo "phương pháp biến đổi sơ cấp" ta có

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/2 & -5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{array}\right) = (I|A^{-1}).$$

Vậy ta cũng tìm được

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 & -5/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

§4. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1. Định nghĩa. Điều kiện tồn tại nghiệm

Hệ phương trình tuyến tính với m phương trình, n ẩn số là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó a_{ij} ($i = 1, 2, ... m, j = 1, 2,... n$) là các hệ số của ẩn ; b_i ($i = 1, 2, ..., m$) là các hệ số tự do ; x_j ($j = 1, ..., m$) là các ẩn số.

Kí hiệu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

và gọi chúng lần lượt là ma trận các hệ số của ẩn và ma trận các hệ số bổ sung của hệ (1).

Bộ số $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ gọi là một nghiệm của hệ (1) nếu

$$a_{i1}\overline{x}_1 + a_{i2}\overline{x}_2 + ... + a_{in}\overline{x}_n = b_i$$

là đẳng thức đúng với mọi $i = 1, ..., m$.

Giải hệ phương trình là tìm tập các nghiệm của hệ.

Ta có định lí sau đây sẽ được chứng minh trong chương III.

Định lí 4.1. (Định lí Kronecker – Capelli) *Hệ (1) có nghiệm nếu và chỉ nếu* $r(A) = r(\overline{A})$. *Cụ thể hơn, ta có*

– *Nếu* $r(A) < r(\overline{A})$ *thì hệ vô nghiệm.*

– *Nếu* $r(A) = r(\overline{A}) = n$ *(số ẩn của hệ) thì hệ có nghiệm duy nhất.*

– *Nếu* $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$ *thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc* $n - r$ *tham số.*

2. Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

a) Quy tắc Cramer

Nếu hệ (1) có số phương trình bằng số ẩn và $\det A \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất được tính theo quy tắc Cramer (xem định lí 2.3).

b) Phương pháp định thức

Nếu hệ (1) có hạng $r < n$ thì bằng cách loại các phương trình không cần thiết, hệ (1) tương đương với một hệ gồm r phương trình, n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + x_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + x_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + x_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Giả sử $\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$

Khi đó ta viết hệ dưới dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Với $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ tuỳ ý, hệ này là hệ Cramer nên ta có thể giải nó theo quy tắc Cramer.

Ví dụ. Giải hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

Giải. Ta có $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_1 + 4x_2 = 2 + 3x_3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1-2x_3 & -1 \\ 2+3x_3 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 5x_3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-2x_3 \\ 1 & 2+3x_3 \end{vmatrix} = 1 + 5x_3.$$

Do đó hệ có nghiệm là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{6-5x_3}{5} \\ x_2 = \dfrac{1+5x_3}{5} \\ x_3 \quad \text{tuỳ ý} \end{cases}$

c) Phương pháp khử (phương pháp Gauss)

Ta gọi các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình tuyến tính là các phép biến đổi sau đây :

Loại 1 : Đổi chỗ hai phương trình cho nhau, còn những phương trình khác giữ nguyên ;

Loại 2 : Nhân một số khác 0 với một phương trình còn những phương trình khác giữ nguyên ;

Loại 3 : Cộng vào một phương trình một phương trình khác đã nhân với một số, còn những phương trình khác giữ nguyên.

Dễ dàng thấy rằng : các phép biến đổi sơ cấp đưa hệ phương trình tuyến tính thành một hệ mới tương đương.

Ta có thể giải hệ phương trình theo phương pháp sau đây : Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa hệ về hệ có dạng bậc thang (tức là ma trận hệ số có dạng bậc thang), sau đó thế từ dưới lên để tìm nghiệm.

Ví dụ

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = 11 \end{cases}$$

Từ đó hệ có nghiệm duy nhất là (–40, 15, 11).

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Giải. Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ \quad -7x_2 + 6x_3 = -11 \\ \qquad\quad 0x_3 = 7 \end{cases}$

Vì phương trình thứ ba vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

c) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \\ -x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

Cho x_4 tùy ý, ta có $x_3 = 2 - x_4$. Cho x_2 tùy ý, ta có $x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4$. Hệ có vô số nghiệm dạng

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_2 \text{ tuỳ ý} \\ x_3 = 2 - x_4 \\ x_4 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

Bài tập.

II.1. Cho các ma trận

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tính a) $A^3 - 3A$; b) $B^T A - B^T$; c) $A(B + C)$; d) $A - BC^T$.

II.2. Với A, B, C như trong bài tập II.1, tìm ma trận X sao cho

a) $B + 2X = C$; b) $AX = B$;

c) $A(X + C) = B$; d) $XB = C$.

II.3. Tính

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; d) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

II.4. Tìm $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sao cho

a) $A^2 = O$; b) $A^2 = I$.

II.5. Tìm $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sao cho $AB = BA$ với mọi $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

II.6. Ma trận $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ gọi là luỹ linh nếu tồn tại $r \in \mathbb{N}$ sao cho $A^r = O$. Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ luỹ linh và AB = BA.

Chứng minh AB và A + B luỹ linh.

II.7. Ta gọi vết của $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ là $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$.

Với mọi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chứng minh

a) tr(A + B) = tr(A) + tr(B). b) tr(AB) = tr(BA). c) $AB - BA \neq I$.

II.8. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$.

II.9. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, $\varepsilon = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, $\varepsilon = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$.

II.10. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

II.11. Tính các định thức

a) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

II.12. Tính các định thức cấp n

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & -4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 6 & 5 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 6 \end{vmatrix}$.

II. 13. Tính các định thức cấp n

a) $\begin{vmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & x+1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ 1 & x & 0 & \ldots & x & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x & x & \ldots & 0 & x \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ -x & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$;

$$\text{e) } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}; \qquad \text{f) } \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

II.14. a) Tính định thức Vandermonde

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

b) Giải phương trình $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & a_1 & \dots & a_n \\ x^2 & a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0,$

trong đó $a_1,\dots,a_n$ là các hằng số khác nhau.

II.15. Chứng minh

a) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 0$ với mọi $n \ge 3$.

b) $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$ với mọi $n \ge 2$, nếu $f_i(x)$ là đa thức bậc không quá $n-2$.

II.16. Giải các hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\text{a) } \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 3x+5y+2z=8 \\ x-2y-3z=-1; \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2; \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 \quad + x_2 \ + 5x_3 \quad + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \ + 3x_3 \quad + 2x_4 = -3 \\ x_1 \quad + x_2 \ + 3x_3 \quad + 4x_4 = -3\,; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ 9x_1 - x_2 \quad + 4x_3 - x_4 \quad = 13 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 9x_2 \qquad\quad + 2x_4 = 11. \end{cases}$

II.17. Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 khi

a) Các phần tử của nó chỉ nhận ± 1.

b) Các phần tử của nó chỉ nhận 0 hoặc 1.

II.18. Cho một định thức D_n cấp n, n > 2, có định thức cấp thấp hơn được xác định tương tự và có mối liên hệ

$$D_n = p\,D_{n-1} + q\,D_{n-2}$$

Chứng minh

a) $q = 0$ thì $D_n = p^{n-1}D_1$

b) $q \neq 0$, phương trình $x^2 - px - q = 0$ có hai nghiệm α, β thì

$$D_n = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha - \beta}\cdot\alpha^{n-1} + \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta - \alpha}\cdot\beta^{n-1} \text{ nếu } \alpha \neq \beta\,;$$

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}D_2 - (n-2)\alpha^{n-1}D_1 \text{ nếu } \alpha = \beta.$$

II.19. Sử dụng bài tập II.18, hãy tính định thức cấp n

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$

II.20. Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ thoả mãn AB = I. Chứng minh A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

II.21. Cho $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chứng minh

a) $A^9 = A^{20} = I$ thì $A = I$.

b) $A^2B^3 = A^3B^7 = A^8B^4 = I$ thì $A = B = I$.

II.22. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

II.23. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận cấp n sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

II.24. Giải các phương trình ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $X.\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

II.25. Tính A^n

a) $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

II.26. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Chứng minh

a) $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0$.

b) Nếu tồn tại $n > 2$ sao cho $A^n = 0$ thì $A^2 = 0$.

II.27. Tìm hạng của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

II.28. Tìm hạng của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & \lambda \\ \lambda & 10 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

II.29. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

II.30. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$

II.31. Chứng minh

a) Nếu hệ phương trình tuyến tính có nghiệm thì hoặc có một nghiệm duy nhất hoặc vô số nghiệm.

b) Nếu hệ phương trình tuyến tính có số ẩn nhiều hơn số phương trình thì hoặc vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

II.32. Cho hệ phương trình tuyến tính có m phương trình, ma trận hệ số là A. Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm nếu $r(A) = m$.

CHƯƠNG III

KHÔNG GIAN VECTƠ

§1. Các khái niệm cơ bản

1. Định nghĩa không gian vectơ

Kí hiệu $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$.

Ta gọi X là không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$, nếu mỗi cặp phần tử x, y $\in$ X được đặt tương ứng với một phần tử duy nhất, kí hiệu là $x + y \in X$, gọi là tổng của x và y, mỗi $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ đặt tương ứng với một phần tử duy nhất, kí hiệu là $\lambda x \in X$, gọi là tích của λ và x, thoả mãn các điều kiện sau đây với mọi x, y, z $\in$ X, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$

2) $x + y = y + x$

3) Tồn tại $0 \in X$, gọi là phần tử không, $x + 0 = x$

4) Tồn tại $-x \in X$, gọi là phần tử đối của x

   $x + (-x) = 0$

5) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

8) $1.x = x$.

Mỗi phần tử của một không gian vectơ thường gọi là một vectơ.

Ta sẽ viết $x + (-y) = x - y$ (đọc là x trừ y).

Phép toán $x + y$ gọi là phép cộng vectơ.

Phép toán λx gọi là phép nhân với vô hướng, số λ còn gọi là vô hướng.

Không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ còn gọi là không gian vectơ thực.

Không gian vectơ trên $\mathbb{C}$ còn gọi là không gian vectơ phức.

Mỗi không gian vectơ phức đều có thể coi là một không gian vectơ thực nếu phép nhân vô hướng chỉ xét với λ thực.

Khi cho một không gian vectơ mà không nói rõ trên trường nào, ta hiểu đó là trường thực hoặc trường phức. Tuy nhiên, đã hiểu là không gian trên trường nào rồi thì phải nhất quán, chẳng hạn đã hiểu là không gian phức thì các vô hướng trong các khái niệm và tính chất tiếp theo đó đều phải hiểu là số phức.

Nếu chưa cần thiết nghiên cứu không gian vectơ trên trường số phức thì luôn hiểu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mà không vấp một trở ngại nào.

2. Ví dụ

a) $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}\}$, với mọi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n), \lambda \in \mathbb{K}$$

ta định nghĩa

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

$\mathbb{K}^n$ cùng với các phép toán trên là một không gian vectơ, gọi là không gian vectơ $\mathbb{K}^n$. Đặc biệt $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ là một không gian vectơ.

b) $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ với phép cộng ma trận và nhân số với ma trận là không gian vectơ (định lí 1.1, chương II).

c) Tập $\mathbb{K}[x]$ các đa thức hệ số trong $\mathbb{K}$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ với phép cộng và phép nhân số với đa thức thông thường.

d) Tập $\mathbb{K}_n[x]$ các đa thức bậc $\leq n$ là không gian vectơ với phép toán trong $\mathbb{K}[x]$.

e) Tập $C_{[a,b]}$ các hàm số thực (tương ứng : phức) liên tục trên đoạn [a, b] với phép cộng hàm số và nhân số với số thông thường là không gian vectơ thực (tương ứng : phức).

f) Tập $C^1_{[a,b]}$ các hàm số liên tục trên [a, b], khả vi liên tục trên (a, b) là không gian vectơ với phép toán như trong $C_{[a,b]}$.

3. Một số tính chất đơn giản của không gian vectơ

1) *Phần tử 0 là duy nhất*

Thật vậy, nếu 0' thoả mãn 3) thì

$$0 + 0' = 0$$

$$0' + 0 = 0'.$$

Theo 2) thì $0 + 0' = 0' + 0$, do đó $0 = 0'$.

2) $0x = 0$ *với mọi* $x \in X$; $\lambda 0 = 0$ *với mọi* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Thật vậy, $x + 0x = (1 + 0)x = x$ nên cộng hai vế với $-x$ ta có $0x = 0$. Bởi vì $\lambda 0 + \lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0$ nên cộng hai vế với $-(\lambda 0)$ ta có $\lambda 0 = 0$.

3) $-x$ *là duy nhất và* $-x = (-1)x$.

Thật vậy, nếu x' cũng thoả mãn $x + x' = 0$ thì

$$-x = -x + 0 = -x + (x + x') = (-x + x) + x' = 0 + x' = x'.$$

Mặt khác

$$x + (-1)x = 1.x + (-1)x = (1 - 1)x = 0.x = 0.$$

Do đó $-x = (-1)x$.

Từ các tính chất đó dễ dàng thấy rằng với mọi $x, y, z \in X$

$x = y$ nếu và chỉ nếu $x - y = 0$

$x + z = y + z$ nếu và chỉ nếu $x = y$.

§2. Không gian vectơ con

1. Định nghĩa không gian vectơ con

Cho X là không gian vectơ và M là tập con của X. Nếu phép cộng và phép nhân với vô hướng trên X cảm sinh ra phép toán tương ứng trên M, và M với các phép toán đó cũng là không gian vectơ, thì M gọi là không gian (vectơ) con của X.

Định lí 2.1. *Tập con* M *của không gian vectơ* X *là không gian con của X nếu và chỉ nếu thoả mãn các điều kiện*

1) $M \neq \varnothing$

2) $x + y \in M$ *với mọi* $x, y \in M$

3) $\lambda x \in M$ *với mọi* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in M$.

Chứng minh. Nếu M là không gian con thì hiển nhiên thoả mãn 1) vì trong M có vectơ không ; M thoả mãn 2) và 3) vì đó là điều kiện để phép toán trên X cảm sinh ra phép toán trên M.

Ngược lại, nếu M có các tính chất 1) – 3) thì trên M có phép cộng và phép nhân với vô hướng. Dễ thấy M thoả mãn các điều kiện của không gian vectơ ngoại trừ việc kiểm tra trong M có vectơ 0. Do $M \neq \varnothing$ nên tồn tại $x \in M$. Từ đó theo 3), $0 = 0x \in M$. Hiển nhiên $x + 0 = x$ với mọi $x \in M$. □

Từ chứng minh định lí 1.1, dễ dàng có khẳng định sau

Bổ đề 2.1. *Tập con* M *của không gian vectơ* E *là không gian vectơ con nếu và chỉ nếu thoả mãn hai điều kiện sau*

1) $0 \in M$

2) $\lambda x + y \in M$ *với mọi* $x, y \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ví dụ. a) Theo ví dụ ở §1, ta có $\mathbb{K}_n[x]$ là không gian vectơ con của $\mathbb{K}[x]$; $C^1_{[a,b]}$ là không gian vectơ con của $C_{[a,b]}$.

b) $V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.

c) $0 \equiv \{0\} \subset X$ và X là không gian vectơ con của X.

2. Không gian con sinh bởi một tập

Cho S là tập con tuỳ ý của một không gian vectơ X. Ta gọi một tổng dạng

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \tag{1}$$

trong đó $v_1, \dots, v_k \in S$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc S.

Vectơ x viết dưới dạng (1) gọi là biểu diễn tuyến tính được qua $v_1, \dots, v_k$.

Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S kí hiệu là $< S >$

$$<S> = \left\{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \; ; \; v_1, \dots, v_k \in S\right\}.$$

Ta quy ước $<\varnothing> = \{0\} \equiv 0$. Với mọi tập con S của X ta có

$$0 \in <S> \, , \; S \subset <S>.$$

Bổ đề 2.2. *Với mọi tập con* S *của không gian vectơ* X, <S> *là không gian con nhỏ nhất chứa* S.

Chứng minh. Theo bổ đề 2.1, dễ thấy <S> là không gian con của X và $S \subset <S>$. Nếu M là không gian con bất kì của X chứa S, theo định lí 1.1, M chứa tất cả các vectơ dạng $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v_i \in S$. Do đó $M \supset < S >$. Vậy <S> là không gian con nhỏ nhất chứa S. □

Tập S được gọi là một hệ sinh của không gian vectơ X nếu <S> = X.

Như vậy : S là hệ sinh của X nếu và chỉ nếu mọi $x \in X$ đều là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc S.

Ví dụ. a) Tập $\varnothing$ là hệ sinh của không gian không.

b) Trong $\mathbb{K}^n$ đặt $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, 1 ở vị trí thứ i. Dễ thấy tập $\{e_1, ..., e_n\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{K}^n$.

c) $\{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ $\mathbb{K}[x]$.

§3. Hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính

1. Định nghĩa và tính chất

Cho S là một hệ vectơ trong không gian vectơ X, các vectơ của hệ S có thể trùng nhau.

Chú ý rằng hệ vectơ khác tập vectơ.

Hệ S gọi là độc lập tuyến tính nếu mọi tổ hợp tuyến tính $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ các vectơ của S

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0 \text{ kéo theo } \lambda_1 = 0, ..., \lambda_k = 0.$$

Hệ S gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu nó không độc lập tuyến tính. Nói cách khác, S phụ thuộc tuyến tính, nếu tồn tại $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng không, $v_1, ..., v_k \in S$ sao cho có quan hệ tuyến tính

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0.$$

Ví dụ. a) Trong mọi không gian vectơ, hệ $\varnothing$ là độc lập tuyến tính.

b) Hệ $\{e_1, ..., e_n\}$ trong $\mathbb{K}^n$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \quad &\Rightarrow (\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0, ..., \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

c) Hệ $\{P_n = x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ trong $\mathbb{K}[x]$ là độc lập tuyến tính.

Thật vậy, bằng cách bổ sung vào các $\lambda_i = 0$, mỗi tổ hợp tuyến tính của hệ này đều có dạng

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n = 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{K} \\ &\Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

d) Hệ S chứa vectơ 0 là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy khi đó 1.0 là một tổ hợp tuyến tính của S, 1.0 = 0 nhưng hệ số khác 0.

e) Hệ S có hai vectơ trùng nhau thì phụ thuộc tuyến tính.

Theo ví dụ e), hệ độc lập tuyến tính có các vectơ khác nhau, do đó cũng là tập vectơ.

Bổ đề 3.1. *Cho các hệ vectơ* S *và* T *của không gian vectơ* X *và* $S \subset T$. *Khi đó*

a) S *phụ thuộc tuyến tính thì* T *phụ thuộc tuyến tính.*

b) T *độc lập tuyến tính thì* S *độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Mọi tổ hợp tuyến tính của S cũng là tổ hợp tuyến tính của T nên ta có các khẳng định trong bổ đề. □

Bổ đề 3.2. *Hệ hữu hạn vectơ* $S = \{v_1, ..., v_k\}$ *phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu tồn tại một vectơ của hệ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.*

Chứng minh. Nếu chẳng hạn v_1 là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại thế thì

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + ... + \lambda_k v_k$$

hay $\quad v_1 - \lambda_2 v_2 - ... - \lambda_k v_k = 0.$

Hiển nhiên $1, -\lambda_2, ..., -\lambda_k$ không đồng thời bằng không nên hệ là phụ thuộc tuyến tính.

Ngược lại, nếu hệ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ không đồng thời bằng không để

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k = 0.$$

Giả sử $\lambda_1 \neq 0$. Khi đó ta có

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} v_k,$$

nghĩa là v_1 là tổ hợp tuyến tính của $v_2, v_3, ..., v_k$. □

Định lí 3.1. (Bổ đề cơ bản về sự phụ thuộc tuyến tính). *Cho* $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *là một hệ vectơ và* $T = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ *là một hệ vectơ độc lập tuyến tính sao cho* $T \subset \langle S \rangle$. *Khi đó* $m \leq k$.

Chứng minh. Giả sử trái lại m > k. Vì $u_1 \in < S >$ nên

$$u_1 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k.$$

Do $u_1 \neq 0$ nên tồn tại $\lambda_i \neq 0$, ta có thể giả thiết $\lambda_1 \neq 0$. Khi đó có thể viết

$$v_1 = b_1 u_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_k v_k. \qquad (1)$$

Ta lại có

$$u_2 = \lambda_1' v_1 + \ldots + \lambda_k' v_k.$$

Thay v_1 bởi (1) ta có

$$u_2 = c_1 u_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k.$$

Các số $c_2, \ldots, c_k$ không đồng thời bằng 0 (vì nếu trái lại thì $u_2 = c_1 u_1$, mâu thuẫn vì T độc lập tuyến tính). Giả sử $c_2 \neq 0$, khi đó v_2 và do đó u_3 là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, v_3, \ldots, v_k$. Tiếp tục quá trình này sau k + 1 bước, ta có u_{k+1} là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Ta gặp mâu thuẫn vì T độc lập tuyến tính. Vậy m ≤ k. □

Cho hệ vectơ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ trong không gian vectơ X. Hệ S' lập nên từ một số vectơ của S gọi là hệ con của S. S' gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của S nếu S' độc lập tuyến tính và nếu bổ sung vào S' một vectơ bất kì của S thì hệ nhận được là phụ thuộc tuyến tính.

Định lí 3.2. *Số vectơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ là không đổi.*

Chứng minh. Giả sử $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ và $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$ là hai hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ. Vì $\{v_1, \ldots, v_k, u_j\}$, j = 1, ..., m là phụ thuộc tuyến tính và S độc lập tuyến tính nên u_j, $j = 1, \ldots, m$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ của hệ S. Theo định lí 3.1, m ≤ k. Tương tự ta cũng có k ≤ m. Vậy m = k. □

Định lí 3.3. *Một hệ vectơ độc lập tuyến tính trong* $\mathbb{K}^n$ *có không quá* n *vectơ.*

Chứng minh. Hệ vectơ $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ là độc lập tuyến tính, hơn nữa mọi vectơ $v = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}^n$ đều có

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \in < e_1, e_2, \ldots, e_n >.$$

Nếu $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính bất kì trong $\mathbb{K}^n$ thì theo định lí 3.1 ta có m ≤ n. □

2. Hạng của hệ vectơ

Cho hệ vectơ $S = \{v_1, ..., v_k\}$. Ta gọi hạng của S, kí hiệu r(S), là số vectơ trong một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của nó.

Theo định lí 3.2, hạng của một hệ vectơ là duy nhất.

Để tìm hạng của hệ vectơ S ta có thể tiến hành như sau. Kí hiệu v_{i_1} là vectơ khác không đầu tiên của hệ, v_{i_2} là vectơ đầu tiên của hệ sau v_{i_1} mà $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$ độc lập tuyến tính. Do hệ chỉ có hữu hạn vectơ nên sau một số bước ta tìm được hệ con

$$v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_m}$$

độc lập tuyến tính và mọi vectơ của hệ đều là tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc hệ này. Vậy hệ con nói trên là độc lập tuyến tính tối đại và r(S) = m.

Rõ ràng rằng S có k vectơ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu r(S) = k.

Cho ma trận A cấp $m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kí hiệu $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ và gọi là vectơ dòng thứ i của ma trận A.

$$S = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$$

là một hệ vectơ trong $\mathbb{K}^n$.

Định lí 3.4. *Hạng của ma trận* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *bằng hạng của hệ vectơ dòng* $\{A_1, ..., A_m\}$ *của nó trong* $\mathbb{K}^n$.

Chứng minh. Giả sử r(A) = k. Khi đó tồn tại k dòng của A mà trong k dòng đó có một định thức con cấp k khác không. Ta có thể giả thiết đó là k dòng đầu. Xét quan hệ tuyến tính

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_k A_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + ... + a_{k1}\lambda_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1k}\lambda_1 + a_{2k}\lambda_2 + ... + a_{kk}\lambda_k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + ... + a_{nk}\lambda_k = 0 \end{cases}$$

Theo giả thiết, hệ gồm k phương trình đầu tiên của hệ này là hệ Cramer, do đó nó chỉ có một nghiệm duy nhất là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda_k = 0$. Hiển nhiên đây cũng là nghiệm duy nhất của hệ. Vậy $A_1, A_2, ..., A_k$ độc lập tuyến tính và $r(\{A_1, ..., A_m\}) \geq r(A)$.

Ngược lại, giả sử $r(\{A_1, ..., A_m\}) = k$. Khi đó có thể tìm được trong các vectơ $A_1, ..., A_m$ k vectơ độc lập tuyến tính. Ta có thể giả thiết đó là k dòng đầu tiên. Ta sẽ chứng minh trong k dòng này có một định thức con cấp k khác không. Khi đó $r(A) \geq r(\{A_1, ..., A_m\})$. Thật vậy giả sử k dòng nói trên chỉ tìm được định thức con khác không cấp cao nhất là p < k. Có thể giả thiết định thức con cấp p đó nằm ở góc trên bên trái.

Xét hệ vectơ $v_1 = (a_{11}, ..., a_{1p})$, $v_2 = (a_{21}, ..., a_{2p})$, $v_p = (a_{p1}, ..., a_{pp})$. Vì định thức có các dòng là các vectơ này khác không, do đó theo phần chứng minh trên, $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{K}^p$. Đặt $v_{p+1} = (a_{p+1,1}, a_{p+1,2}, ..., a_{p+1,p})$. Vì hệ $\{v_1, ..., v_p, v_{p+1}\}$ phụ thuộc tuyến tính theo định lí 3.3, do đó ta có :

$$v_{p+1} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p.$$

Kí hiệu

$$v = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_p A_p.$$

Vì hệ $\{A_1, A_2, ..., A_{p+1}\}$ độc lập tuyến tính nên $v \neq A_{p+1}$. Do p toạ độ đầu của hai vectơ này bằng nhau nên ta có thể giả thiết toạ độ thứ p + 1 của chúng khác nhau. Khi đó A có định thức con cấp p + 1 bằng

$$\Delta_{p+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1,p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & a_{p,p+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

trong đó $c = a_{p+1,p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i,p+1} \neq 0$. Từ đó

$$\Delta_{p+1} = c\Delta_p \neq 0.$$

Ta gặp mâu thuẫn. □

Định lí 3.5. *Hạng của một ma trận không đổi khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng.*

Chứng minh. Kí hiệu $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là hệ các vectơ dòng của ma trận A. Theo định lí 3.6 ta có r(A) = r(S).

Trước hết ta nhận xét rằng : nếu thêm vào một hệ vectơ một vectơ là tổ hợp tuyến tính của hệ hoặc bớt đi từ hệ một vectơ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại thì hạng hệ mới bằng hạng hệ cũ.

Vì hạng của hệ vectơ không phụ thuộc vào thứ tự của các vectơ nên hiển nhiên hạng không thay đổi qua phép biến đổi loại 1.

Giả sử nhân dòng thứ i với $\lambda \neq 0$. Khi đó λA_i là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của hệ S và

$$A_i = 0A_1 + ... + \frac{1}{\lambda}(\lambda A_i) + ... + 0A_n$$

là một tổ hợp tuyến tính của hệ các vectơ

$$\{A_1, ..., \lambda A_i, ..., A_n\}.$$

Do đó thêm vào hệ S vectơ λA_i, sau đó bớt đi vectơ A_i, ta có

$$r(S) = r(A_1, ..., \lambda A_i, ..., A_n),$$

nghĩa là hạng không thay đổi qua phép biến đổi loại 2.

Tương tự, đối với phép biến đổi loại 3, giả sử cộng vào dòng thứ A_i dòng λA_j. Bởi vì $A_i + \lambda A_j$ là một tổ hợp tuyến tính của S và

$$A_i = 0.A_1 + ... + 1.(A_i + \lambda A_j) + ... + (-\lambda)A_j + ... + 0A_n$$

nên A_i là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ

$$\{A_1, ..., A_i + \lambda A_j, ..., A_n\}.$$

Do đó

$$r(S) = r(A_1, ..., A_i + \lambda A_j, ..., A_n).$$ □

Ví dụ. Xét tính độc lập của hệ vectơ sau đây trong $\mathbb{K}^3$:

$v_1 = (1,3, -2, 5)$, $v_2 = (2,1,3, -1)$, $v_3 = (1, -2, 5, -6)$.

Giải. Ta có

$$r(v_1, v_2, v_3) = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3.$$

Do đó hệ phụ thuộc tuyến tính.

§4. Cơ sở và toạ độ. Không gian hữu hạn chiều

1. Cơ sở và toạ độ

Ta gọi một tập con B của một không gian vectơ X là cơ sở của X nếu B độc lập tuyến tính và $\langle B\rangle = X$.

Định lí 4.1. *Cho* L *và* S *là các tập con của một không gian vectơ* X, L *độc lập tuyến tính,* $L \subset S$ *và* $\langle S\rangle = X$. *Khi đó tồn tại cơ sở* B *của* X *sao cho* $L \subset B \subset S$.

Chứng minh. Kí hiệu $\mathscr{C}$ là họ tất cả các tập con độc lập tuyến tính của S chứa L. Sắp $\mathscr{C}$ theo quan hệ $\subset$. Theo nguyên lí tối đại Hausdorff, trong $\mathscr{C}$ có một họ con $\mathcal{M}$ được sắp tuyến tính tối đại. Đặt

$$B = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M.$$

Dễ dàng thấy rằng $L \subset B \subset S$. Ta sẽ chứng minh B là cơ sở.

Với hữu hạn $v_1, \dots, v_k \in B$, tồn tại $M \in \mathcal{M}$ sao cho $\{v_1, \dots, v_k\} \subset M$. Do M độc lập tuyến tính nên

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Vậy B độc lập tuyến tính.

Ta có $S \subset \langle B\rangle$. Thật vậy, nếu tồn tại $x \in S \setminus \langle B\rangle$ thì $B \cup \{x\}$ độc lập tuyến tính, $B \cup \{x\} \notin \mathcal{M}$, $M \subset B \cup \{x\}$ với mọi $M \in \mathcal{M}$. Mâu thuẫn với tính tối đại của $\mathcal{M}$. Vậy $\langle B\rangle = \langle S\rangle = X$. □

Hệ quả 4.1. *Mọi không gian vectơ* X *đều có cơ sở.*

Chứng minh. Chọn $L = \varnothing$, $S = X$ và áp dụng định lí 4.1. □

Bổ đề 4.1. *Cho* $B = \{v_i\}_{i\in I}$ *là một cơ sở của không gian vectơ* X. *Khi đó mỗi* $x \in X$, *tồn tại duy nhất bộ số* $(\lambda_i)_{i\in I}$ *trong* $\mathbb{K}$, *trong đó chỉ có hữu hạn* $\lambda_i \neq 0$, *sao cho*

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i .$$

Chứng minh. Do B là hệ sinh nên tồn tại ít nhất một bộ số $(\lambda_i)_{i\in I}$ thoả mãn $x = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$. Nếu hệ số $(\mu_i)_{i\in I}$ cũng thoả mãn $x = \sum_{i\in I} \mu_i v_i$ thì

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i\in I} \mu_i v_i.$$

Suy ra $\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$

Do B độc lập tuyến tính nên $\lambda_i - \mu_i = 0$ hay

$\lambda_i = \mu_i$ với mọi $i \in I$. □

Từ bổ đề 4.1, ta gọi $x/_B = (\lambda_i)_{i\in I}$ là toạ độ của vectơ x trong cơ sở B.

2. Không gian vectơ hữu hạn chiều

Không gian vectơ X gọi là hữu hạn chiều nếu X có một hệ sinh hữu hạn. Khi đó theo định lí 4.1, X có một cơ sở hữu hạn n vectơ.

Bổ đề 4.2. *Nếu* X *có một cơ sở hữu hạn* B *gồm* n *vectơ thì*

a) *Mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính trong* X *có không quá* n *vectơ*

b) *Mọi cơ sở của* X *đều có* n *vectơ*

c) *Mọi hệ gồm* n *vectơ độc lập tuyến tính của* X *đều là cơ sở.*

Chứng minh. a) Giả sử B' là hệ độc lập tuyến tính. Do $B' \subset \langle B\rangle$ nên theo định lí 3.1 số vectơ của $B' \leq n$.

b) Giả sử B' cũng là cơ sở thì B và B' đều là hệ độc lập tối đại trong $B \cup B'$. Theo định lí 3.2 ta có số vectơ của B và B' bằng nhau.

c) Giả sử $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong X. Với mọi $x \in X$, $W \cup \{x\}$ theo b) là phụ thuộc tuyến tính. Do đó theo bổ đề 3.2 :

$$x = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \in \langle W\rangle.$$

Vậy W cũng là hệ sinh của X nên là cơ sở. □

Không gian vectơ X không hữu hạn chiều gọi là không gian vô hạn chiều, kí hiệu $\dim X = \infty$.

Ví dụ. a) $\varnothing$ là cơ sở không gian O gồm chỉ một vectơ không.

b) $\mathbb{K}^n$ có cơ sở là hệ $\{e_1,\dots,e_n\}$, xem ví dụ trong §3, gọi là cơ sở chính tắc. Mọi hệ n vectơ độc lập tuyến tính $\{v_1,\dots,v_n\}$ trong $\mathbb{K}^n$ đều là cơ sở. Ta có $\{v_1,\dots,v_n\}$ là cơ sở nếu và chỉ nếu $r(v_1,\dots,v_n) = n$.

c) Kí hiệu $E_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ là ma trận có phần tử thứ (i,j) bằng 1, tất cả các phần tử khác bằng 0. Dễ thấy $E = \left\{E_{ij} \middle| i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n\right\}$ là một cơ sở của $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Do đó $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$.

d) $\left\{1, x,\dots,x^n\right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}_n[x]$. Do đó

$$\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1.$$

e) $\left\{x^k \mid k \in N_0\right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}[x]$. Do đó $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$.

Cho B = $\{v_1,\dots,v_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ X. Mọi $x \in X$, theo bổ đề 4.1, tồn tại duy nhất bộ số $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ sao cho

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Bộ số $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, toạ độ của vectơ x trong cơ sở B, được kí hiệu là

$$x/_B = (x_1,\dots,x_n)$$

hoặc

$$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $v_1 = (1, 3, 0)$, $v_2 = (-2, 2, 1)$, $v_3 = (0, 1, 2)$. Chứng minh rằng $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm toạ độ của vectơ v = (1, 1, – 1) trong cơ sở B.

Giải. Vì B có 3 vectơ nên ta chỉ cần chứng minh B độc lập tuyến tính.

Vì $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, do đó r(B) = 3. Vậy B độc lập tuyến tính.

Phương trình vectơ

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = v$$

tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Giải theo phương pháp Cramer ta có $D_1 = 9, D_2 = -3$, $D_3 = -6$, do đó $x_1 = 3/5$, $x_2 = -1/5$, $x_3 = -2/5$. Vậy

$$v/_B = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

3. Cơ sở và chiều của không gian vectơ con

Không gian vectơ con cũng là một không gian vectơ nên có cơ sở và chiều như đã định nghĩa ở phần trên. Ở đây ta chỉ xét không gian vectơ con sinh bởi một hệ vectơ

$$V = < v_1, v_2, ..., v_k > .$$

Hệ vectơ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ gọi là một hệ sinh của V.

Định lí 4.2. *Mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của* $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *là một cơ sở của V và do đó*

$$\dim V = r(v_1, v_2, ..., v_k).$$

Chứng minh. Giả sử $E = \{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_m}\}$ là một hệ độc lập tuyến tính tối đại của $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Khi đó mọi vectơ v_i đều là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của hệ E. Từ đó suy ra mọi $v \in V$ đều là một tổ hợp tuyến tính các vectơ của E. Vậy E là cơ sở của V. □

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$v_1 = (1, 1, -2, 1),\ v_2 = (1, -2, 3, 0),\ v_3 = (2, 1, 0, 3),\ v_4 = (2, 4, -5, 4).$$

Tìm chiều và một cơ sở của $V = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

Giải. Ta có

$$\dim V = r(v_1, v_2, v_3, v_4) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Vì dim V = 3 nên mọi hệ gồm ba vectơ độc lập tuyến tính của V đều là cơ sở của V. Ta có thể chọn một cơ sở của V là $\{v_1, v_2, v_3\}$ hoặc

$\{(1, 1, -2, 1), (0, -1, 4, 1), (0, 0, 7, 4)\}$.

4. Tổng của các không gian con

Cho M_1 và M_2 là không gian con của không gian vectơ X. Ta gọi

$$M_1 + M_2 = \{x_1 + x_2 \,|\, x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}$$

là tổng của các không gian con M_1 và M_2

Dễ dàng thấy rằng $M_1 \cap M_2$ là không gian vectơ con của X.

Bổ đề 4.3. *Cho M_1 và M_2 là các không gian con của X. Khi đó $M_1 + M_2 = \langle M_1 \cup M_2 \rangle$, và do đó, $M_1 + M_2$ là không gian con của X.*

Chứng minh. Hiển nhiên $M_1 + M_2 \subset \langle M_1 \cup M_2 \rangle$. Với mọi $x \in \langle M_1 \cup M_2 \rangle$ đều có thể viết

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m + \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n$$

với $x_i \in M_1$ và $y_j \in M_2$. Vì

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m \in M_1,\ \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_n y_n \in M_2$$

nên $x \in M_1 + M_2$. Vậy $\langle M_1 \cup M_2 \rangle \subset M_1 + M_2$. □

Cho M_1 và M_2 là không gian con của không gian vectơ X. Nếu $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ thì tổng $M_1 + M_2$ gọi là tổng trực tiếp, kí hiệu $M_1 \oplus M_2$.

Bổ đề 4.4. *Cho M_1 và M_2 là các không gian con của X. Khi đó $M = M_1 \oplus M_2$ nếu và chỉ nếu mọi $x \in M$ được viết một cách duy nhất dưới dạng $x = x_1 + x_2$ trong đó $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$.*

Chứng minh. Giả sử $M = M_1 \oplus M_2$. Khi đó mọi $x \in M$ hiển nhiên được viết dưới dạng $x = x_1 + x_2, x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2$. Ta sẽ chứng minh cách viết đó là duy nhất. Thật vậy nếu cũng có $x = x_1' + x_2'$ với $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ thì

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \text{ hay } x_1 - x_1' = x_2' - x_2$$

Từ đó suy ra $x_1 - x_1' \in M_1 \cap M_2$, $x_2' - x_2 \in M_1 \cap M_2$.

Vì $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ nên $x_1 = x_1'$ và $x_2 = x_2'$.

Ngược lại nếu mọi $x \in M$ đều được viết một cách duy nhất dạng $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$. Với mọi $x \in M_1 \cap M_2$ ta có

$$x = x + 0 = 0 + x \in M_1 + M_2$$

nên $x = 0$. Vậy $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ và tổng là trực tiếp. □

Định lí 4.3. *Nếu* M_1 *và* M_2 *là các không gian con hữu hạn chiều của* X *thì* $M_1 + M_2$ *hữu hạn chiều và*

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Chứng minh. Đặt $\dim(M_1 \cap M_2) = p$, $\dim M_1 = m + p$, $\dim M_2 = n + p$. Giả sử $\{z_1, \ldots, z_p\}$ là một cơ sở của $M_1 \cap M_2$. Theo định lí 4.1, chọn được $u_1, \ldots, u_m \in M_1$ và $v_1, \ldots, v_n \in M_2$ sao cho

$$S_1 = \{z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_m\} \text{ là cơ sở của } M_1$$

$$S_2 = \{z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_n\} \text{ là cơ sở của } M_2.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$S = S_1 \cup S_2 = \{z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n\}$$

là cơ sở của $M_1 + M_2$.

Trước hết dễ thấy S là hệ sinh của $M_1 + M_2$, vì $x = x_1 + x_2 \in M_1 + M_2$ thì x_1 là một tổ hợp tuyến tính các vectơ thuộc S_1, x_2 là tổ hợp tuyến tính các vectơ thuộc S_2 nên tổng của chúng là một tổ hợp tuyến tính các vectơ thuộc S. Ta còn phải chứng minh S độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính

$$t_1 z_1 + \ldots + t_p z_p + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0,\ t_h, \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}. \text{ Ta có}$$

$$u = t_1 z_1 + \ldots + t_p z_p + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m = -(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) \quad (1)$$

Do biểu thức giữa thuộc M_1, biểu thức cuối thuộc M_2 nên $u \in M_1 \cap M_2$. Từ đó có thể viết

$$u = s_1 z_1 + \ldots + s_p z_p.$$

Thế vào (1) ta có

$$s_1z_1 + ... + s_pz_p + \mu_1v_1 + ... + \mu_nv_n = 0.$$

Do S_2 độc lập tuyến tính nên

$$s_1 = ... = s_p = \mu_1 = ... = \mu_n = 0.$$

Từ (1) suy ra

$$t_1z_1 + ... + t_pz_p + \lambda_1u_1 + ... + \lambda_mu_m = 0.$$

Do S_1 độc lập tuyến tính nên

$$t_1 = ... = t_p = \lambda_1 = ... = \lambda_m = 0.$$

Vậy mọi t_h, λ_i, μ_j bằng 0 nên S độc lập tuyến tính. □

Với mọi họ các không gian con $M_1, ..., M_n$ của X ta định nghĩa

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M_1 + ... + M_n = \{x_1 + ... + x_n \mid x_1 \in M_1, ..., x_n \in M_n\}$$

Nếu $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$ với mọi i = 1, ..., n thì tổng gọi là trực tiếp và kí hiệu là

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

Tương tự định lí 4.3 ta cũng có :

$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ nếu và chỉ nếu mọi $x \in M$ được viết một cách duy nhất dưới dạng

$$x = x_1 + ... + x_n,\ x_1 \in M_1, ..., x_n \in M_n.$$

§5. Ứng dụng vào hệ phương trình tuyến tính

1. Điều kiện tồn tại nghiệm

Xét hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Đặt $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ với j = 1, ..., n ; $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$.

Khi đó hệ phương trình (1) có thể viết dưới dạng vectơ

$$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = b \tag{2}$$

Định lí 5.1. (Định lí Kronecker – Capelli). *Hệ (1) có nghiệm nếu và chỉ nếu* $r(A) = r(\overline{A})$, *trong đó*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ .... & ... & ... & .... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Chứng minh. Dễ thấy rằng

$$\begin{aligned}
\text{(2) có nghiệm } &\Leftrightarrow b \in < a_1, ..., a_n > \\
&\Leftrightarrow r(a_1, ..., a_n) = r(a_1, ..., a_n, b) \\
&\Leftrightarrow r(A^T) = r(\overline{A}^T) \\
&\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}).
\end{aligned}$$

□

Nhận xét. Nếu một phương trình của hệ (1) là tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác (tức vectơ hệ số của nó là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ hệ số của các phương trình khác thì có thể loại phương trình đó ra khỏi hệ.

Vì vậy, nếu $r(A) = r(\overline{A}) = r$ thì bằng cách loại bớt các phương trình không cần thiết, hệ đã cho tương đương với một hệ chỉ gồm r phương trình.

Kí hiệu $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{rj})$, $b = (b_1, b_2, ..., b_r)$.

Nếu r = n thì $D = \det(a_1, a_2, ..., a_n) \neq 0$. Do đó hệ (1) có một nghiệm duy nhất là $x_j = \dfrac{D_j}{D}$, j = 1, 2, ... , n, trong đó $D_j = \det(a_1, ..., b, ...a_n)$, b ở vị trí thứ j (theo định lí Cramer).

Nếu r < n thì ta có thể giả thiết det $(a_1, a_2, ..., a_r) \neq 0$.

Vì $b \in < a_1, a_2, ..., a_r >$ nên tồn tại duy nhất $c_1, c_2, ..., c_r$ để

$$b = c_1a_1 + c_2a_2 + ... + c_ra_r$$

Vì $a_{r+1}, ..., a_n \in < a_1, a_2, ..., a_r >$ nên

$$a_{r+j} = d_{r+j,1}a_1 + ... + d_{r+j,r}\, a_r \, , \ j = 1, 2, ..., n - r$$

Từ đó nếu $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một nghiệm của (1) thì thay vào (2) ta có

$$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_{r+1}a_{r+1} + ... + x_na_n = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=1}^{r} x_ha_h + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}\left(\sum_{h=1}^{r} d_{r+j,h}a_h\right) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=1}^{r}\left(x_h + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}d_{r+j,h}\right)a_h = b.$$

Từ đó, do hệ $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ độc lập tuyến tính, ta có

$$x_h + \sum_{j=1}^{n-r} x_{r+j}d_{r+j,h} = c_h, h = 1, ..., r$$

Nếu chọn $x_{r+j} = t_j$ tuỳ ý thì

$$x_h = c_h - \sum_{j=1}^{n-r} d_{r+j,h}t_j, \quad h = 1, 2, ..., r.$$

Do đó, hệ (1) có nghiệm là

$$\begin{cases} x_h = c_h - \sum_{j=1}^{n-r} d_{r+j,h}t_j, & h = 1, 2, ..., r \\ x_{h+j} = t_j, j = 1, 2, ..., n-r \end{cases} \quad (3)$$

Trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r$ tham số tuỳ ý.

Như vậy :

– Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ (1) vô nghiệm ;

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (số ẩn) thì hệ (1) có một nghiệm duy nhất ;

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$ thì hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r$ tham số.

Nghiệm dạng (3) gọi là nghiệm tổng quát của hệ. Nghiệm riêng là nghiệm ứng với $t_1, t_2, ..., t_{n-r}$ cụ thể.

2. Hệ thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính được gọi là hệ thuần nhất nếu tất cả các hệ số tự do của nó bằng không.

Hệ thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

luôn có nghiệm vì $r(A) = r(\overline{A})$. Cụ thể, hệ luôn có ít nhất một nghiệm là $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$, gọi là nghiệm tầm thường.

Theo định lí 4.1, nếu $r(A) = n$ thì hệ có duy nhất một nghiệm, đó là nghiệm tầm thường.

Nếu $r(A) = r < n$, ta đưa hệ về hệ chỉ gồm r phương trình. Với giả thiết $a_1, a_2, ..., a_r$ độc lập tuyến tính thì

$$b = 0a_1 + 0a_2 + .. + 0a_r$$

do đó theo công thức (3) với $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$, ta được nghiệm tổng quát của hệ (4) là

$$\begin{cases} x_h = -\sum_{j=1}^{n-r} d_{r+j,h} t_j, \ h = 1, 2, ..., r \\ x_{h+j} = t_j, j = 1, 2, ..., n-r. \end{cases}$$

Thay $(t_1, t_2, ..., t_{n-r})$ với $t_j = 1, t_k = 0$ nếu $k \neq j$, $j = 1, 2, ..., n - r$, ta được $n - r$ nghiệm riêng

$$\begin{array}{l} d_1 = (-d_{r+1,1}, -d_{r+1,2}, ..., -d_{r+1,r}, 1, 0, ..., 0) \\ d_2 = (-d_{r+2,1}, -d_{r+2,2}, ..., -d_{r+2,r}, 0, 1..., 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{n-r} = (-d_{n1}, -d_{n2}, ..., -d_{nr}, 0, 0, ..., 1) \end{array} \tag{5}$$

Ta thấy ngay rằng $r(d_1, d_2, ..., d_{n-r}) = n - r$ nên hệ $(d_1, d_2, ..., d_{n-r})$ độc lập tuyến tính. Nghiệm của hệ ứng với $t_1, t_2, ..., t_{n-r}$ tuỳ ý là

$x = \sum_{j=1}^{n-r} t_j d_j \in \langle d_1, d_2, ..., d_{n-r} \rangle$, do đó nghiệm của hệ (4) là không gian vectơ con

$$V = \langle d_1, d_2, ..., d_{n-r} \rangle \subset \mathbb{K}^n.$$

Rõ ràng là $\dim V = n - r$ nên ta có định lí sau :

Định lí 5.2. *Tập nghiệm* V *của hệ thuần nhất (4) là một không gian vectơ con của* $\mathbb{K}^n$ *với số chiều* $\dim V = n - r(A)$.

Chú ý rằng định lí 5.2 đúng cả trong trường hợp $r(A) = n$, khi đó $\dim V = 0$ và $V = \{0\}$.

Không gian vectơ con V thường gọi là không gian nghiệm của hệ thuần nhất. Mỗi cơ sở của không gian nghiệm V gọi là một hệ nghiệm cơ bản. Hệ các nghiệm (5) là một hệ nghiệm cơ bản.

Hệ thuần nhất (4) gọi là hệ thuần nhất liên kết với hệ tổng quát (1).

Định lí 5.3. *Nếu* $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ *là một nghiệm của hệ (1) thì tập tất cả các nghiệm của hệ (1) là*

$$\{c + v \mid v \in V\},$$

trong đó V là không gian vectơ con nghiệm của hệ thuần nhất liên kết (4).

Chứng minh. Cho $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Đặt $d_j = x_j - c_j$ ta được vectơ $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta chỉ cần chứng minh rằng x là nghiệm của hệ (1) nếu và chỉ nếu $d \in V$. Thật vậy, với mọi i = 1, 2, ..., m ta có :

$$x \text{ là nghiệm của (1)} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(d_j + c_j) = b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = 0$$

$$\Leftrightarrow d \in V. \qquad \square$$

Ví dụ. a) Giải hệ

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Giải. Hệ thuần nhất liên kết $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -2x_2, x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$

Dễ thấy hệ không thuần nhất có một nghiệm riêng là $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Do đó, hệ không thuần nhất có nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1 - 2x_2, x_2 \text{ tuỳ ý.} \end{cases}$$

b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình và tìm một hệ nghiệm cơ bản.

Giải. Ma trận của hệ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_2 \\ x_4 = c_1 \end{cases}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{K}.$$

Một hệ nghiệm cơ bản là $\{(1,0,0,1)\ ;\ (0,1,1,0)\}$.

Bài tập

III.1. Cho A là một tập tuỳ ý. Kí hiệu M(A) là tập tất cả các ánh xạ từ A vào $\mathbb{K}$. Trong M(A) định nghĩa các phép toán.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

với mọi $f, g \in M(A)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in A$.

a) Kiểm lại rằng M(A) là không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

b) Với mọi $a \in A$, đặt

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x = a \\ 0 \text{ nếu } x \neq a \end{cases}$$

Kiểm lại rằng tập $\{f_a \mid a \in A\}$ là độc lập tuyến tính.

c) Cho A là tập hữu hạn, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Chứng minh $\{f_{a_1}, \dots, f_{a_n}\}$ là cơ sở của M(A).

III.2. Kí hiệu $V = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Trên V xác định phép toán

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \ \lambda(a,b) = (\lambda a, 0),$$

Chứng tỏ V không là không gian vectơ.

III.3. Kí hiệu $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Trong X định nghĩa phép toán

$$x \oplus y = x.y \quad (\forall x, y \in X)$$

$$\lambda \odot x = x^{\lambda} \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in X)$$

(phép toán ở vế phải là phép toán thông thường).

a) Chứng tỏ X với phép cộng và phép nhân với vô hướng như trên là một không gian vectơ thực.

b) Tìm một cơ sở và chiều của X.

c) X có phải là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^1$ không?

III.4. Cho E là tập tất cả các dãy (x_n) trong $\mathbb{K}$. Trong E xét phép toán cộng

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

và phép nhân với vô hướng

$$\lambda(x_n) = (\lambda x_n).$$

a) Chứng minh E là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

b) Chứng minh E là vô hạn chiều.

c) Trong các tập sau tập nào là không gian vectơ con của E :

c_1) Tập F các dãy bị chặn

c_2) Tập G các dãy hội tụ

c_3) Tập H các dãy hội tụ đến một số a cố định

c_4) Tập I các dãy phân kì.

III.5. Cho $(V_i)_{i \in I}$ là một họ các không gian con của không gian vectơ V. Ta gọi tổng của họ không gian này là

$$\sum_{i \in I} V_i = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid x_i \in V_i, J \subset I, J \text{ hữu hạn} \right\}.$$

Chứng minh $\bigcap_{i \in I} V_i$, $\sum_{i \in I} V_i$ là các không gian con của V.

III.6. Trong các tập sau, tập nào là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$. Trong trường hợp là không gian con, hãy tìm cơ sở và chiều của nó.

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$

b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 \text{ và } 2x_2 = x_3\}$

c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2^2\}$

d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3^3\}$

e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 = 0\}$

f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 = 0\}$.

III.7. Cho M là một không gian con khác $\{0\}$ của không gian vectơ X. Chứng minh $\text{Card}(M) \geq \text{Card}(\mathbb{K})$.

III.8. Ta gọi chiều của một không gian vectơ X là Card(B), trong đó B là một cơ sở của X. Chứng minh

a) $\mathbb{K}[x]$ có chiều đếm được.

b) C[a, b], không gian các hàm liên tục trên đoạn [a, b] với phép toán hàm, có chiều không đếm được (a < b).

III.9. Cho M_1 và M_2 là không gian vectơ con của X. Chứng minh rằng nếu $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$ thì mỗi vectơ thuộc $M_1 + M_2$ có ít nhất hai cách viết thành tổng của hai vectơ thuộc M_1 và M_2.

III.10. Kí hiệu X_n là tập tất cả các ma trận vuông đối xứng (tức $a_{ij} = a_{ji}$ với $i, j = 1, \ldots, n$) cấp n, Y_n là tập tất cả các ma trận vuông phản đối xứng (tức $a_{ij} = -a_{ji}$ với $i, j = 1, \ldots, n$) cấp n.

a) Chứng minh rằng X_n và Y_n là không gian vectơ con của không gian vectơ $\mathcal{M}_n$ các ma trận vuông cấp n.

b) Tìm cơ sở và chiều của X_n và Y_n.

c) Chứng minh rằng $\mathcal{M}_n = X_n \oplus Y_n$.

III.11. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, (\beta \neq 0) \text{ và } B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng $AB = BA$ nếu và chỉ nếu tồn tại k để

$$y = k\beta,\ z = k\gamma,\ x - t = k(\alpha - \delta).$$

b) Chứng minh rằng tập tất cả các ma trận B giao hoán được với ma trận A cố định là một không gian vectơ con hai chiều của $\mathcal{M}_2$.

III.12. Cho E và F là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng nếu $E \cup F$ là không gian con thì $E \subset F$ hoặc $F \subset E$.

III.13. Cho E và F là hai không gian con của một không gian vectơ V hữu hạn chiều có

$$\dim(E + F) = \dim(E \cap F) + 1.$$

Chứng minh rằng $E + F$ bằng E hoặc F và $E \cap F$ bằng F hoặc E.

III.14. Cho X là một không gian vectơ trên $\mathbb{C}$. Khi đó X cũng là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, kí hiệu không gian con này là $X_{\mathbb{R}}$. Chứng minh

a) Mọi hệ độc lập tuyến tính trong X là hệ độc lập tuyến tính trong $X_{\mathbb{R}}$; mọi hệ sinh của $X_{\mathbb{R}}$ là hệ sinh của X. Các điều ngược lại không đúng.

b) Nếu $B = \{b_j\}$ là cơ sở của X thì $B' = \{b_j, ib_j\}$ là cơ sở của $X_{\mathbb{R}}$.

III.15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $v_1 = (1,0,0,-1)$, $v_2 = (0,0,1,-1)$, $v_3 = (1,0,1,-2)$.

a) Chứng minh

$$< v_1, v_2, v_3 > = \{(x, 0, y, -x - y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

b) $v = (2, 0, 1, -2)$ thuộc $< v_1, v_2, v_3 >$ không ?

III.16. Trong $\mathbb{R}^4$ cho $v_1 = (2,-1,0,1)$, $v_2 = (1,1,3,2)$, $v_3 = (3,-1,1,2)$, $v_4 = (1,-1,-1,0)$. Chứng minh

$$< v_1, v_2 > = < v_3, v_4 >.$$

III.17. Trong các hệ vectơ sau, hệ nào là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a) $\{(2,1,3), (-1,1,0)\}$

b) $\{(2,1,3), (-1,1,0), (-1,1,0)\}$

c) $\{(2,1,3), (-1,1,0), (3,0,3)\}$

d) $\{(2,1,3), (-1,1,0), (1,1,-1), (0,0,4)\}$.

III.18. Cho $\{v_1, v_2, v_3\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ X. Đặt $M = < v_1, v_2, v_3 >$.

a) Chứng minh $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ là cơ sở của M.

b) Cho $v_4 \in M$ có toạ độ trong cơ sở S là $v_4 / S = (a_1, a_2, a_3)$. Tìm điều kiện để

$T = \{v_2, v_3, v_4\}$ là cơ sở của M.

III.19. Cho $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}^3$ và vectơ $v \in \mathbb{K}^3$ có $v / B = (2, -3, 5)$.

Chứng minh S là cơ sở của $\mathbb{K}^3$ và tìm v/S nếu

a) $S = \{2v_2, v_1, v_3\}$.

b) $S = \{v_1 - v_2, 3v_3, v_2\}$.

III.20. Trong $\mathbb{K}^3$ tìm toạ độ của vectơ v trong cơ sở B

a) $v = (0, 5, -1)$, $B = \{(2, 3, 2), (4, 2, 5), (1, 2, 1)\}$.

b) $v = (-6, -17, 2)$, $B = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\}$.

c) $v = (a, b, c)$, $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

III.21. Chứng tỏ

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

là một cơ sở của $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Tìm toạ độ của $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ trong cơ sở đó.

III.22. Trong $\mathbb{R}_2[x]$ cho

$p_1(x) = 1 + 2x + x^2$, $p_2(x) = 1 - x - 5x^2$, $p_3(x) = -1 + 2x + 6x^2$ và $p(x) = 3 + 2x + x^2$.

a) Chứng minh $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Tìm toạ độ của p(x) trong cơ sở trên.

III.23. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ

$$v_1 = (1, -2, 1, 3), \qquad v_2 = (2, 3, 1, 2), \qquad v_3 = (1, 5, 1, -2).$$

Tìm chiều và một cơ sở của không gian con

$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

III.24. Trong $\mathbb{R}[x]$ cho

$f_1 = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, $f_2 = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 1$,

$f_3 = x^3 + 6x - 5$, $f_4 = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5$.

Tìm chiều và một cơ sở của không gian con $V = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$.

III.25. Trong $\mathbb{R}^4$ cho U là không gian con sinh bởi

$(1, 1, 0, -1), (1, 2, 4, 0), (0, 1, 4, 1)$

và V là không gian con sinh bởi

$(3, 2, 2, -3), (2, 3, 4, -1), (1, -1, -2, -2)$.

Tìm $\dim(U \cap V)$ và một cơ sở của $U \cap V$.

III.26. Giải và tìm một hệ nghiệm cơ bản của các hệ thuần nhất sau :

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

III.27. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh rằng $\{e_1 = (1, -2, -1, -5),\ e_2 = (2, 1, 3, 0)\}$ là một cơ sở của không gian vectơ con M của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ là các dòng của ma trận A.

b) Vectơ $v = (1, -3, -1, -8)$ có thuộc M không ?

c) Tìm toạ độ của vectơ $v = (8, -1, 7, -10)$ trong cơ sở $\{e_1, e_2\}$.

d) Tìm tập D các vectơ $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = z_1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = z_2 \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = z_3 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

e) Chứng minh rằng D là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$. Tìm dim D.

III.28. Cho $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|A| = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \neq 0$ sao cho $AB = 0$.

CHƯƠNG IV

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

§1. Định nghĩa và tính chất

1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Cho X và X' là hai không gian vectơ trên cùng một trường $\mathbb{K}$ (tức là cùng trên trường thực hoặc cùng trên trường phức). Một ánh xạ

$$f : X \to X'$$

được gọi là tuyến tính nếu mọi u, v $\in$ X và mọi $\lambda \in \mathbb{K}$ đều có

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Tính chất 1) gọi là tính cộng tính, tính chất 2) gọi là tính thuần nhất.

Bổ đề 1.1. *Cho* $f : X \to X'$ *là một ánh xạ tuyến tính.* Khi đó

a) $f(0) = 0$;

b) $f(u - v) = f(u) - f(v)$ *với mọi* $u, v \in X$;

c) $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i)$ *với mọi* $u_1,\dots,u_k \in X$; $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{K}$.

Chứng minh. Do $f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$ nên có a) ; $f(u - v) = f(u + (-1)v) = f(u) + f((-1)v) = f(u) - f(v)$ tức là có b) ; c) nhận được từ 1), 2) và quy nạp theo k.□

Ví dụ

a) Các ánh xạ sau đây là tuyến tính :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, f(x,y) = 3x - 2y$.

2) $f : X \to X', f(x) = 0$ (ánh xạ không)

3) $I_X : X \to X, I_X(x) = x$ (ánh xạ đồng nhất)

4) $f : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x], f(P) = P'$, P' là đạo hàm của P

5) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Af)(x) = x^2 f(x)$ với mọi $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$

6) $f : C[a,b] \to \mathbb{K}$, $f(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt$.

b) Các ánh xạ sau đây không là tuyến tính

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - y + 1$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Bổ đề 1.2. *Ánh xạ tuyến tính* $f : X \to X'$ *là đơn ánh nếu và chỉ nếu* $f^{-1}(0) = 0$.

Chứng minh : Nếu f đơn ánh thì hiển nhiên $f^{-1}(0) = 0$. Bây giờ giả sử $f^{-1}(0) = 0$ và lấy tuỳ ý $x_1, x_2 \in X$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 \in f^{-1}(0) \\ &\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Vậy f là đơn ánh. □

2. Điều kiện xác định ánh xạ tuyến tính

Định lí 1.1. *Cho X và X′ là hai không gian vectơ trên cùng một trường* $\mathbb{K}$, $E = \{v_i\}_{i \in I}$ *là một cơ sở của X,* $\{v'_i\}_{i \in I}$ *là một hệ vectơ tuỳ ý của X′. Khi đó* $f : X \to X'$, $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i v'_i$ *với mọi* $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in X$ *là ánh xạ tuyến tính duy nhất từ X vào X′ thoả mãn* $f(v_i) = v'_i$ *với mọi* $i \in I$.

Chứng minh. Ta nhớ lại rằng toạ độ của x trong cơ sở E là $x/_E = (\lambda_i)_{i \in I}$. Do $v_i/_E = (\lambda_i)_{i \in I}$, trong đó $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = 0$ với mọi $j \neq i$, nên

$f(v_i) = v'_i$ với mọi $i \in I$.

Ta sẽ chứng minh f là tuyến tính. Với mọi $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Giả sử $x/_E = (\lambda_i)_{i \in I}$, $y/_E = (\mu_i)_{i \in I}$. Ta có

$$f(x+y) = f\left(\sum_{i\in I}(\lambda_i + \mu_i)v_i\right) = \sum_{i\in I}(\lambda_i + \mu_i)v_i'$$

$$= \sum_{i\in I}\lambda_i v_i' + \sum_{i\in I}\mu_i v_i'$$

$$= f(x) + f(y)\ ;$$

$$f(\lambda x) = f(\sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i v_i) = \sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i v_i')$$

$$= \lambda\sum_{i\in I}\lambda_i v_i'$$

$$= \lambda f(x).$$

Do đó f là ánh xạ tuyến tính.

Bây giờ giả sử $g : X \to X'$ là ánh xạ tuyến tính có tính chất $g(v_i) = v_i'$ với mọi $i \in I$. Với mọi $x = \sum_{i\in I}\lambda_i v_i \in X$ ta có

$$g(x) = g(\sum_{i\in I}(\lambda_i v_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i g(v_i) = \sum_{i\in I}\lambda_i v_i' = f(x).$$

Vậy g = f và tính duy nhất của f được chứng minh. □

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $\{e_1 = (1, -1, 2), e_2 = (2, -1, 5), e_3 = (-1, 1, -1)\}$. Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ thoả mãn $f(e_1) = (1, 1, 1)$, $f(e_2) = (1, 1, 0)$, $f(e_3) = (1, 0, 0)$.

Giải. Với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ta tìm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ để

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = x_1\\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = x_2\\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3 = x_3\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = -4x_1 - 3x_2 + x_3\\ \lambda_2 = x_1 + x_2\\ \lambda_3 = -3x_1 - x_2 + x_3\end{cases}$$

Từ đó

$$f(x) = (-4x_1 - 3x_2 + x_3)(1, 1, 1) + (x_1 + x_2)(1,1,0) + (-3x_1 - x_2 + x_3)(1,0,0).$$

Vậy

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-6x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ -3x_1 - 2x_2 + x_3,\ -4x_1 - 3x_2 + x_3)$$

với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính muốn tìm.

3. Không gian L(X,X′)

Cho X và X′ là các không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$. Kí hiệu L(X, X′) là tập tất cả các ánh xạ tuyến tính từ X vào X′.

Với mọi f, g ∈ L(X, X′), $\lambda \in \mathbb{K}$ ta định nghĩa f + g và λf là các ánh xạ từ X vào X′ xác định bởi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Dễ dàng thấy rằng f + g và λf là ánh xạ tuyến tính, tức là thuộc L(X, X′).

L(X, X′) với các phép toán trên là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$, gọi là không gian các ánh xạ tuyến tính từ X vào X′.

§2. Ảnh, nhân và đẳng cấu

1. Ảnh và nhân

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$. Khi đó ta gọi ảnh của ánh xạ f là tập

$$\mathrm{Im} f = f(X) = \{u' = f(u) \mid u \in X\} \subset X' ;$$

nhân của ánh xạ f là tập

$$\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(0) = \{u \in X \mid f(u) = 0\} \subset X.$$

Như vậy f toàn ánh nếu và chỉ nếu Imf = X′ và theo bổ đề 1.2, f đơn ánh nếu và chỉ nếu Ker f = {0}.

Ví dụ. a) Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,x + y)$

Ta có

$$\mathrm{Ker}\, f = \{f(x,y) \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \mid x = 0, y = 0, x + y = 0\}$$

$$= \{(0, 0)\} = \{0\}.$$

$$\mathrm{Im} f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{f(x(1, 0) + y(0, 1)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{xf(1, 0) + yf(0, 1)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$$

là không gian vectơ con sinh bởi (1, 0, 1) và (0, 1, 1).

b) Cho $f: \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}_n[x]$, $f(P) = P'$, $\mathbb{K}_n[x]$ là không gian vectơ các đa thức bậc $\leq n$, hệ số trong $\mathbb{K}$.

Ta có

$$\operatorname{Ker} f = \{P \in \mathbb{K}_n[x] | P' = 0\} = \{P | P = \text{const}\} = \mathbb{K}$$

$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{K}_n[x]) = \mathbb{K}_{n-1}[x]$ là không gian vectơ các đa thức bậc $\leq n - 1$.

Bổ đề 2.1. *Cho* $f: X \to X'$ *là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó* Ker f *là một không gian vectơ con của* X *và* Im f *là một không gian vectơ con của* X'.

Chứng minh. Với mọi $u, v \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda \in \mathbb{K}$, ta có

$f(u + v) = f(u) + f(v) = 0 + 0 = 0$ nên $u + v \in \operatorname{Ker} f$

$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda . 0 = 0$ nên $\lambda u \in \operatorname{Ker} f$

Vậy Ker f là không gian vectơ con của X.

Với tuỳ ý $u', v' \in \operatorname{Im} f$, $\lambda \in \mathbb{K}$, chọn $u, v \in X$ sao cho $f(u) = u'$, $f(v) = v'$, ta có

$u' + v' = f(u) + f(v) = f(u + v) \in \operatorname{Im} f$,

$\lambda u' = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in \operatorname{Im} f$.

Vậy Im f là không gian vectơ con của X'. □

Bổ đề 2.2. *Cho* $f: X \to X'$ *là ánh xạ tuyến tính và* S *là một hệ sinh của* X. *Khi đó* f(S) *là một hệ sinh của* Imf.

Chứng minh. Lấy tuỳ ý $x' \in \operatorname{Im} f$ và chọn $x \in X$ sao cho $f(x) = x'$. Do S là hệ sinh của X nên tồn tại các vectơ $v_i \in S$ và các số $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sao cho $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$. Khi đó

$$x' = f(x) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_k f(v_k) \in \langle f(S) \rangle. \quad \square$$

Từ bổ đề 2.2 đặc biệt suy ra nếu E là một cơ sở của X thì f(E) là một hệ sinh của X'.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, -x_2 + x_3)$$

Hãy xác định Im f.

Giải. Chọn $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ thì

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \langle (1, 1, 0), (-1, 0, -1), (0, -1, 1) \rangle =$$

$$= \langle (1, 1, 0), (-1, 0, -1) \rangle.$$

2. Liên hệ giữa dim(Im f) và dim(Ker f)

Định lí 2.1. *Cho* $f : X \to X'$ *là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó nếu* $\dim X < \infty$ *thì*

$$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim X.$$

Chứng minh. Giả sử $\dim \mathrm{Im}\, f = r$, $\dim \mathrm{Ker}\, f = s$. Khi đó chọn một cơ sở $u_1', u_2', \ldots u_r'$ của Im f và một cơ sở $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{r+s}$ của Ker f. Gọi $u_i \in X$ là một vectơ sao cho $f(u_i) = u_i'$, $i = 1, \ldots, r$ (có thể có nhiều u_i, chọn một trong số đó). Để hoàn thành chứng minh ta chỉ cần chứng minh.

$u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{r+s}$ là một cơ sở của X.

Trước hết ta chứng minh hệ này độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính tuỳ ý

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s} = 0. \quad (1)$$

Cho ánh xạ f tác động vào hệ này. Chú ý rằng $f(u_i) = u_i'$ với $i = 1, \ldots, r$ và $f(u_{r+j}) = 0$ với $j = 1, \ldots, s$, ta có

$$\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' + \ldots + \lambda_r u_r' = 0.$$

Vì $u_1', u_2', \ldots, u_r'$ độc lập tuyến tính nên $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. Kết hợp với (1) ta có

$$\lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s} = 0$$

Lại vì $u_{r+1}, \ldots, u_{r+s}$ độc lập tuyến tính nên $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0$. Như vậy từ (1) suy ra $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_{r+s} = 0$, do đó hệ $u_1, \ldots, u_{r+s}$ độc lập tuyến tính.

Bây giờ ta sẽ chứng minh hệ này là hệ sinh của X. Với mọi $u \in X$ ta có $f(u) \in \mathrm{Im}\, f$, vì vậy có thể viết

$$f(u) = \lambda_1 u_1' + \ldots + \lambda_r u_r'$$

Đặt $v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r$ ta có $f(v) = f(u)$.

Đặt $w = u - v$ thì $f(w) = 0$, tức là $w \in \mathrm{Ker}\, f$, vì vậy có thể viết

$$w = \lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s}$$

Từ đó

$$u = v + w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+s} u_{r+s}$$

Vậy $u_1, \ldots, u_{r+s}$ là hệ sinh của X. □

3. Đẳng cấu tuyến tính

Một ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$ là song ánh được gọi là một đẳng cấu (tuyến tính). Nếu có một đẳng cấu $f : X \to X'$ thì các không gian vectơ X và X′ gọi là đẳng cấu (với nhau), kí hiệu $X \cong X'$.

Bổ đề 2.3. *Nếu* $f : X \to X'$ *là đẳng cấu thì* $f^{-1} : X' \to X$ *cũng là đẳng cấu.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh f^{-1} là tuyến tính. Với mọi $u', v' \in X'$, $\lambda \in \mathbb{K}$, đặt $u = f^{-1}(u')$, $v = f^{-1}(v')$

Ta có

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = u' + v',$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda u',$$

nên $$f^{-1}(u' + v') = u + v = f^{-1}(u') + f^{-1}(v')$$

$$f^{-1}(\lambda u') = \lambda u = \lambda f^{-1}(u').$$

Vậy f^{-1} là ánh xạ tuyến tính. □

Định lí 2.2. *Hai không gian vectơ X và X′ trên cùng một trường* $\mathbb{K}$ *đẳng cấu nếu và chỉ nếu chúng có những cơ sở có cùng lực lượng.*

Chứng minh. Giả sử $f : X \to X'$ là một đẳng cấu, E là một cơ sở của X. Đặt $E' = f(E)$. Ta sẽ chứng minh E′ là cơ sở của X′. Khi đó $f|_E : E \to E'$ là song ánh nên E và E′ cùng lực lượng. Theo bổ đề 2.2, E′ là hệ sinh. Ta sẽ chứng minh E′ độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính $\lambda_1 v_1' + ... + \lambda_k v_k' = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v_1', ..., v_k' \in E'$. Do f là song ánh, nên tồn tại các $v_i \in X$ đôi một khác nhau sao cho $f(v_i) = v_i'$. Từ đó $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \lambda_1 v_1' + ... + \lambda_k v_k' = 0$. Vì $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ nên $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$. Do E độc lập tuyến tính nên $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. Vậy E′ độc lập tuyến tính.

Ngược lại giả sử X có cơ sở E, X′ có cơ sở E′, E và E′ cùng lực lượng. Gọi $\varphi : E \to E'$, $\varphi(v) = v'$ là song ánh từ E lên E′.

Theo định lí 1.3, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$ sao cho $f(v) = \varphi(v) = v'$ với mọi $v \in E$. Ta sẽ chứng minh f là song ánh. Với mọi $x' \in X'$, do E′ là cơ sở nên $x' = \lambda_1 v_1' + ... + \lambda_k v_k'$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $v_i' \in E'$. Đặt $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$. Ta có $f(x) = x'$. Vậy f là toàn ánh. Để chứng minh f là đơn ánh ta giả sử $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Khi đó tồn tại $x \in X$, $x \neq 0$ có $f(x) = 0$. Do B là cơ sở nên tồn tại các số $\lambda_i \neq 0$ và $v_i \in B$ đôi một khác nhau sao cho

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k.$$

Từ f(x) = 0 suy ra $\lambda_1 v'_1 + ... + \lambda_k v'_k = 0$. Vì các v'_i đôi một khác nhau và E' độc lập tuyến tính nên $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$, ta gặp mâu thuẫn. □

Hai tập hữu hạn có cùng lực lượng nếu và chỉ nếu chúng có cùng số phần tử nên ta có

Hệ quả 2.1. *Hai không gian hữu hạn chiều trên cùng một trường* $\mathbb{K}$ *đẳng cấu nếu và chỉ nếu chúng có cùng số chiều.*

Như vậy, mọi không gian n – chiều trên trường $\mathbb{K}$ đều đẳng cấu với $\mathbb{K}^n$.

Cho $f : X \to X'$ là ánh xạ tuyến tính. Nếu $\dim(\mathrm{Im}f) < \infty$ thì ta gọi $r(f) = \dim(\mathrm{Im}f)$ là hạng của ánh xạ tuyến tính f.

Bổ đề 2.4. *Cho* X, X' *là không gian vectơ hữu hạn chiều,* $f : X \to X'$ *là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

a) f *toàn ánh nếu và chỉ nếu* $r(f) = \dim X'$.

b) f *đơn ánh nếu và chỉ nếu* $r(f) = \dim X$.

Chứng minh. a) Vì $f(X) \subset X'$ nên $\dim f(X) = \dim X'$ tương đương với trong f(X) có chứa một cơ sở của X'. Điều đó tương đương với f(X) = X' hay f là toàn ánh.

b) Theo bổ đề 1.2 và định lí 2.3, f đơn ánh $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}f) = \dim X$. □

Định lí 2.3. *Cho* X, X' *là không gian vectơ hữu hạn chiều và* $f : X \to X'$ *là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

a) f *đẳng cấu nếu và chỉ nếu* $\dim X = \dim X' = n$ và $r(f) = n$.

b) f *đẳng cấu nếu và chỉ nếu* $\dim X = \dim X' = n$ và $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Chứng minh.

a) Suy ra từ bổ đề 2.7

b) Do $\mathrm{Ker}f = \{0\} \Leftrightarrow r(f) = n$ nên b) suy ra từ a). □

§3. Không gian thương

1. Định nghĩa

Cho X là không gian vectơ và A là không gian con của X. Dễ dàng thấy rằng

$$xSy \text{ nếu } x - y \in A$$

là một quan hệ tương đương trên X.

Ta kí hiệu tập thương của X theo quan hệ tương đương S là $X/_A$.

Với mỗi $x \in X$ ta có

$$S[x] = \{y \in X | ySx\}$$

$$= \{y \in X | y - x \in A\}$$

$$= \{y \in X | y \in x + A\}$$

$$= x + A.$$

Do đó

$$X/_A = \{x + A | x \in X\}.$$

Với $x + A$, $y + A \in X/_A$ và $\lambda \in \mathbb{K}$ đặt

$$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$$

$$\lambda(x + A) = \lambda x + A.$$

Nếu $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$ thì

$$x - x' \in A, y - y' \in A.$$

Do A là không gian con, suy ra

$$(x - x') + (y - y') = (x + y) - (x' + y') \in A$$

$$\lambda(x - x') = \lambda x - \lambda x' \in A$$

Từ đó

$$(x + y) + A = (x' + y') + A, \lambda x + A = \lambda x' + A.$$

Vậy cách đặt trên cho ta phép cộng trên $X/_A$ và phép nhận số với phần tử của $X/_A$.

Với các phép toán đó ta có

Bổ đề 3.1. *$X/_A$ là một không gian vectơ.*

Việc kiểm tra các tiên đề là tầm thường. Ở đây chỉ lưu ý rằng phần tử không của $X/_A$ là

$$A = 0 + A = x + A \text{ với mọi } x \in A,$$

phần tử đối của $x + A$ là $-x + A$.

Ta gọi ánh xạ $\pi : X \to X/_A$, $\pi(x) = x + A$ là ánh xạ chính tắc.

Dễ dàng kiểm tra điều sau

Bổ đề 3.2. *Ánh xạ* $\pi : X \to X/_A$ *là toàn ánh, tuyến tính và* $\operatorname{Ker} \pi = A$.

2. Định lí đẳng cấu

Cho $f : X \to X'$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó Ker f là một không gian con của X, do đó ta có không gian thương $X/_{\operatorname{Ker} f}$. Bằng cách đặt $\overline{f}(x + \operatorname{Ker} f) = f(x)$ ta có một ánh xạ

$$\overline{f} : X/_{\operatorname{Ker} f} \to X'$$

(cách đặt là hợp lí vì $x + \operatorname{Ker} f = x' + \operatorname{Ker} f$ thì $x - x' \in \operatorname{Ker} f$ do đó $f(x - x') = 0$ hay $f(x) = f(x')$).

Ánh xạ $\overline{f}$ gọi là ánh xạ cảm sinh bởi f.

Ta có

Bổ đề 3.3. *Ánh xạ* $\overline{f} : X/_{\operatorname{Ker} f} \to X'$ *là đơn ánh tuyến tính.*

Từ cách xây dựng trên dễ dàng thấy rằng

$$f = \overline{f} \circ \pi .$$

Định lí 3.1. (Định lí đẳng cấu). *Với mọi ánh xạ tuyến tính* $f : X \to X'$ *ta có* $X/_{\operatorname{Ker} f} \cong f(X)$.

Chứng minh. Do $\overline{f}$ là đơn ánh tuyến tính nên

$$X/_{\operatorname{Ker} f} \cong \overline{f}\left(X/_{\operatorname{Ker} f}\right) = \overline{f} \circ \pi(X) = f(X).$$ □

§4. Dạng tuyến tính và không gian đối ngẫu

1. Dạng tuyến tính

Cho X là một không gian vectơ. Khi đó ta gọi ánh xạ tuyến tính $f : X \to \mathbb{K}$ là dạng tuyến tính.

Định lí 4.1. *Cho X là một không gian vectơ,* $E = \{v_i\}_{i \in I}$ *là một cơ sở của X,* $\{c_i\}_{i \in I}$ *là một họ các số trong* $\mathbb{K}$. *Khi đó* $f : X \to \mathbb{K}$ *xác định bởi* $f(x) = \sum_{i \in I} a_i c_i$ *với mọi* $x = \sum_{i \in I} a_i v_i$ *là dạng tuyến tính duy nhất trên X thoả mãn* $f(v_i) = c_i$ *với mọi* $i \in I$.

Chứng minh. Là trường hợp riêng của định lí 1.3 khi $X' = \mathbb{K}$. □

Theo định lí 4.1, dạng tuyến tính f trên E hoàn toàn xác định khi biết ảnh của nó trên một cơ sở.

Ví dụ.

Giả sử $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ là một dạng tuyến tính. Đặt $f(e_i) = c_i$ với i = 1, ..., n. Ta có

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1c_1 + .. + x_nc_n.$$

Rõ ràng mọi dạng tuyến tính trên $\mathbb{K}^n$ đều có dạng này.

2. Không gian đối ngẫu

Với mọi không gian vectơ X, ta gọi

$$X^* = L(X, \mathbb{K})$$

là không gian đối ngẫu của X. Theo §1, X* là không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

Cho $E = (v_i)_{i \in I}$ là một cơ sở của X. Theo định lí 4.1 với mỗi $i \in I$, có duy nhất $v_i^* \in X^*$ xác định bởi

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} \text{ với mọi } j \in I,$$

ở đây δ_{ij} là kí hiệu Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Định lí 4.2. *Nếu* X *là không gian hữu hạn n– chiều,* $E = \{v_i\}_{i=1}^n$ *là một cơ sở của* X *thì* $E^* = \{v_i^*\}_{i=1}^n$ *là một cơ sở của* X*.

Chứng minh. Cho $f \in X^*$ và $x \in X$ tùy ý. Do E là cơ sở nên có thể viết $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$. Ta có

$$v_i^*(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_i^*(v_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i$$

với mọi i = 1, ..., n. Do đó

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n v_j^*(x).f(v_j) = \left(\sum_{j=1}^n f(v_j) v_j^*\right)(x)$$

Vậy $f = \sum_{j=1}^{n} f(v_j)v_j^* \in \left\langle E^* \right\rangle$, suy ra E^* là hệ sinh của X^*. Ta còn phải chứng minh E^* độc lập tuyến tính. Xét hệ thức $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^* = 0$. Khi đó

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^*\right)(v_j) = 0 \text{ với mọi } j = 1, ..., n.$$

Vì $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^*\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^*(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$ nên $\lambda_j = 0$ với mọi j = 1, ..., n. Vậy E^* độc lập tuyến tính. □

Với không gian vectơ X có đối ngẫu là $X^* = L(X, \mathbb{K})$, ta định nghĩa song đối ngẫu của X là $X^{**} = L(X^*, \mathbb{K})$.

Với mỗi $x \in X$, đặt

$$J(x)(f) = f(x), \ f \in X^*.$$

Với mọi $f, g \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ta có

$$\begin{aligned} J(x)(f + g) &= (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \\ &= J(x)(f) + J(x)(g), \\ J(x)(\lambda f) &= (\lambda f)(x) \\ &= \lambda f(x) = \lambda J(x)(f). \end{aligned}$$

Do đó J(x) là dạng tuyến tính trên X^* hay $J(x) \in X^{**}$.

Ta có ánh xạ

$$J : X \to X^{**}.$$

Định lí 4.3. a) *Với mọi không gian vectơ X, $J : X \to X^{**}$ là đơn ánh tuyến tính.*

b) *Với mọi không gian vectơ hữu hạn chiều X, $J : X \to X^{**}$ là đẳng cấu tuyến tính.*

Chứng minh. a) Với mọi $x, g \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in X^*$ ta có

$$J(x + y)(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = (J(x) + J(y))(f).$$

$$J(\lambda x)(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = (\lambda J(x))(f).$$

Do đó $J(x + y) = J(x) + J(y)$, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ và J là ánh xạ tuyến tính.

Với tuỳ ý $v \in X$, $v \neq 0$ do $\{v\}$ độc lập tuyến tính nên có cơ sở E của X, $v \in E$. Với mỗi $x \in X$, kí hiệu toạ độ của x trong cơ sở E là $x/_E = (x_e)_{e \in E}$

Do tính duy nhất của toạ độ, dễ dàng thấy

$$f : X \to \mathbb{K},\ f(x) = x_v$$

là dạng tuyến tính, tức là $f \in E^*$. Vì $v/_E = (v_e)_{e \in E}$ trong đó $v_e = \begin{cases} 1 \text{ nếu } e = v \\ 0 \text{ nếu } e \neq v \end{cases}$ nên $f(v) = 1$.

Từ đó $J(v)(f) = f(v) = 1 \neq 0$.

Ta có $J(v) \neq 0$ và $\operatorname{Ker} J = \{0\}$. Vậy J là đơn ánh.

b) Suy ra từ a) và định lí 2.8 b). □

Định lí 4.4. *Cho* X *là không gian vectơ và* $f_0, f_1, \dots, f_n \in X^*$. *Khi đó hoặc* f_0 *là tổ hợp tuyến tính của* $f_1, \dots, f_n$ *hoặc tồn tại* $a \in X$ *sao cho* $f_0(a) = 1$ *và* $f_1(a) = \dots = f_n(a) = 0$.

Chứng minh. Ta có thể giả thiết $\{f_1, \dots, f_n\}$ độc lập tuyến tính, vì nếu không thì thay nó bằng một hệ con độc lập tuyến tính tối đại. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

Trường hợp $n = 1$. Do f_1 độc lập tuyến tính nên $f_1 \neq 0$. Chọn $a_1 \in X$ sao cho $f_1(a_1) = 1$. Với mọi $x \in X$ dễ thấy

$$x - f_1(x)a_1 \in f_1^{-1}(0) = Z_1.$$

Do đó hoặc tồn tại $a \in Z_1$ sao cho $f_0(a) = 1, f_1(a) = 0$, hoặc $f_0(a) = 0$ với mọi $a \in Z_1$. Nếu trường hợp sau xảy ra thì

$$f_0(x - f_1(x)a_1) = 0 \text{ với mọi } x \in X$$

Khi đó $f_0(x) = f_0(a_1)f_1(x)$, tức là $f_0 = \lambda f_1$.

Bây giờ giả sử khẳng định đúng với $n - 1 \geq 1$ và giả sử $f_1, \dots, f_n \in E^*$. Theo giả thiết quy nạp, với mọi i, tồn tại $a_i \in E$ sao cho $f_i(a_i) = 1$ và $f_j(a_i) = 0$ với mọi $j \neq i$. Với mọi $x \in E$ ta có

$$x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(0) = Z.$$

Do đó hoặc tồn tại $a \in Z$, $f_0(a) = 1$ và hiển nhiên $f_1(a) = ... = f_n(a) = 0$, hoặc $f_0(a) = 0$ với mọi $a \in Z$. Nếu trường hợp sau xảy ra thì

$$f_0\left(x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)a_i\right) = 0.$$

Từ đó $f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} f_0(a_i)f_i(x)$, tức là $f_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$. □

3. Ánh xạ đối ngẫu

Cho $\varphi : X \to Y$ là một ánh xạ tuyến tính. Với mỗi $f \in Y^*$ ta có ánh xạ $\varphi^*(f) : X \to \mathbb{K}$ xác định bởi công thức

$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)),\ x \in X.$$

Mọi $x, x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ ta có

$$\varphi^*(f)(x_1 + x_2) = f(\varphi(x_1 + x_2)) = f(\varphi(x_1)) + f(\varphi(x_2))$$
$$= \varphi^*(f)(x_1) + \varphi^*(f)(x_2)$$

$$\varphi^*(f)(\lambda x) = f(\varphi(\lambda x) = f(\lambda\varphi(x))$$
$$= \lambda f(\varphi(x)) = \lambda\varphi^*(f)(x)$$

Do đó $\varphi^*(f) \in X^*$. Vậy ta có ánh xạ

$$\varphi^* : Y^* \to X^*.$$

Với mọi $f, g \in Y^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$ ta có

$$\varphi^*(f + g)(x) = (f + g)(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) + g(\varphi.(x))$$
$$= (\varphi^*(f) + \varphi^*(g))(x),$$
$$\varphi^*(\lambda f)(x) = (\lambda f)(\varphi(x)) = \lambda f(\varphi(x))$$
$$= \lambda\varphi^*(f)(x).$$

Do đó φ^* là ánh xạ tuyến tính.

Vậy $\varphi \in L(X,Y)$ thì $\varphi^* \in L(Y^*,X^*)$. Ta gọi φ^* là ánh xạ đối ngẫu của φ.

§5. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

1. Định nghĩa

Cho X, X' là các không gian vectơ hữu hạn chiều, $f : X \to X'$ là một ánh xạ tuyến tính.

Giả sử $E = \{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở của X, $E' = \{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m\}$ là một cơ sở của X'. Khi đó ta có thể viết một cách duy nhất

$$f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + ... + a_{m1}\varepsilon_m$$

$$f(e_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + ... + a_{m2}\varepsilon_m$$

....

$$f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + ... + a_{mn}\varepsilon_m.$$

Ta gọi ma trận

$$[f]_{E,E'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở (E,E').

Bổ đề 5.1. *Nếu* $u/E = (\lambda_1,...,\lambda_n)$ *là toạ độ của vectơ* $u \in X$ *trong cơ sở* E *thì toạ độ của vectơ* f(u) *trong cơ sở* E' *là*

$$f(u)/E' = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\lambda_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\lambda_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\lambda_j\right).$$

Chứng minh. Bởi vì $u = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$ và tính tuyến tính của f ta có

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j\right)\varepsilon_i,$$

theo định nghĩa toạ độ ta có ngay điều phải chứng minh. □

Ví dụ. Nếu $[f]_{E,E'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, u/E' = (1, 2, 3) thì

$$f(u)/E' = (1 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times 3, (-2) \times 1 + 0 \times 2 + 3 \times 3)$$
$$= (2, 7).$$

2. Ánh xạ tuyến tính xác định bởi ma trận

Định lí 5.1. *Cho* X *và* X' *là các không gian vectơ hữu hạn chiều có cơ sở tương ứng là* $E = \{e_1,...,e_n\}$ *và* $E' = \{\varepsilon_1,...,\varepsilon_m\}$. *Khi đó mọi ma trận* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính* $f : X \to X'$ *có* $[f]_{E,E'} = A$.

Chứng minh. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vì f có ma trận trong cơ sở E, E' là A nên

$$f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + .. + a_{m1}\varepsilon_m$$

$$f(e_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \dots + a_{m2}\varepsilon_m.$$

....

$$f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \dots + a_{mn}\varepsilon_m$$

Ánh xạ tuyến tính $f : X \to X'$ thoả mãn các đẳng thức đó là tồn tại và duy nhất theo định lí 1.3. □

3. Ánh xạ tuyến tính $\mathbb{K}^n$ vào $\mathbb{K}^m$

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Nếu E là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{K}^n$, E' là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{K}^m$ thì ta kí hiệu $[f]_{E,E'}$ là [f]. Giả sử

$$[f] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

thì với mọi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ theo bổ đề 5.1 ta có

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \right) \tag{1}$$

ngược lại, đẳng thức (1) cho ta một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{K}^n$ vào $\mathbb{K}^m$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kí hiệu $e_1, \dots, e_n$ là cơ sở chính tắc $\mathbb{K}^n$. Theo (1) ta có

$$f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}),\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Do đó

$$r(f) = r(f(e_1),...,f(e_n)) = r(A).$$

Có thể kiểm tra rằng, f là một ánh xạ tuyến tính và A là ma trận của f trong các cơ sở bất kỳ thì ta cũng có

$$r(f) = r(A).$$

Kết hợp điều này với định lí 2.8, ta có

Định lí 5.2. *Cho* f *là ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ* X, n – *chiều vào chính nó,* A *là ma trận của* f *trong cặp cơ sở* (E, E). *Khi đó f là đẳng cấu (khả nghịch) nếu và chỉ nếu* $|A| \neq 0$.

4. Liên hệ giữa phép toán ma trận và phép toán ánh xạ tuyến tính

Cho A, B là các ma trận cấp m × n trên $\mathbb{K}, \lambda \in \mathbb{K}$. Gọi f, g là các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{K}^n$ vào $\mathbb{K}^n$ sao cho A = [f], B = [g]. Khi đó dễ dàng kiểm tra rằng

$$A + B = [f + g]$$

$$\lambda A = [\lambda f]$$

Từ đó có thể định nghĩa A + B là ma trận của ánh xạ tuyến tính f + g, λA là ma trận của ánh xạ tuyến tính λf.

Ta có định lí

Định lí 5.3. *Ánh xạ* $\phi : L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\phi(f) = [f]$ *là đẳng cấu tuyến tính.*

Cho A là ma trận cấp m × n, B là ma trận cấp n × p.

Gọi $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ là ánh xạ tuyến tính có A = [f], $g : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ là ánh xạ tuyến tính có B = [g]. Khi đó

$$[f_o g] = AB.$$

Thật vậy, kí hiệu $\{e'_i\}, \{e''_k\}, \{e_j\}$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p$. Với mọi j = 1, 2, ..., p ta có

$$(f_o g)(e_j) = f(g(e_j)) = f\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} e''_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} f(e''_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} e_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right) e'_i$$

Vậy $[f_0 g] = AB$. □

Từ đó có thể định nghĩa AB là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f_o g$.

Cho $f : X \to X'$ là một ánh xạ tuyến tính, E là một cơ sở của X, E' là một cơ sở của X'.

Kí hiệu $[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ là toạ độ của vectơ $x \in X$ trong cơ sở E viết theo cột, $[f(x)]_{E'}$ là toạ độ của vectơ f(x) trong cơ sở E' viết theo cột. Theo bổ đề 5.1 và định lí 5.2

$$[f(x)]_{E'} = [f]_{E,E'}.[x]_E$$

5. Ma trận chuyển cơ sở. Ma trận đồng dạng

Giả sử $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ và $E' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ là hai cơ sở của một không gian vectơ X. Khi đó ta có các biểu diễn

$$e'_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n$$

$$e'_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$e'_n = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n$$

và được ma trận

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận chuyển từ cơ sở E sang cơ sở E'.

Trước hết ta chứng tỏ P không suy biến. Thật vậy

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e'_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \lambda_j \right) e_i = 0.$$

Bởi vì E độc lập tuyến tính nên hệ thức cuối cùng cho ta

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \lambda_j = 0 \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n.$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận hệ số là P. Do hệ thức đầu tiên, hệ này chỉ có nghiệm tầm thường $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda_n = 0$, do đó

$$|P| \neq 0.$$

Với mỗi vectơ $x \in X$, kí hiệu cột toạ độ của vectơ x trong cơ sở E và E′ là

$$[x]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ [x]_{E'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Vì $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i$ và do tính duy nhất của toạ độ, suy ra

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \ ; i = 1, 2, ..., n.$$

Vì vậy dưới dạng ma trận ta có

$$[x]_E = P[x]_{E'} \qquad (2)$$

Do P khả nghịch nên nhân hai vế của (2) với P^{-1} ta được

$$[x]_{E'} = P^{-1}[x]_E \qquad (3)$$

Các công thức (2) và (3) gọi là công thức đổi toạ độ. Từ công thức (3) ta có P^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở E′ sang cơ sở E.

Ánh xạ tuyến tính $f : X \to X$ còn gọi là toán tử tuyến tính hay biến đổi tuyến tính. Nếu E là một cơ sở của X thì ma trận của f trong cặp cơ sở (E, E) được gọi là ma trận của f trong cơ sở E và kí hiệu đơn giản là $[f]_E$. Cho E và E′ là hai cơ sở của X. Đặt $A = [f]_E, B = [f]_{E'}$. Ta có

$$[f(x)]_E = A[x]_E, \ [f(x)]_{E'} = B[x]_{E'}$$

Theo công thức (3) và sau đó theo công thức (2) ta có

$$[f(x)]_{E'} = P^{-1}[f(x)]_E = P^{-1}A[x]_E =$$

$$= (P^{-1}AP)[x] = B[x]_{E'}.$$

Do tính duy nhất của ma trận của ánh xạ tuyến tính trong một cơ sở, ta có

$$B = P^{-1}AP. \qquad (4)$$

Hai ma trận vuông cấp n, A và B, gọi là đồng dạng nếu tồn tại một ma trận vuông cấp n không suy biến P sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Bởi vì $B = P^{-1}AP$ thì $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ do đó có thể nói A và B đồng dạng với nhau, kí hiệu $A \sim B$.

Theo (4) các ma trận của một phép biến đổi tuyến tính trong các cơ sở khác nhau là đồng dạng.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $(e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (0,1,1),\ e_3 = (0,0,1))$.

Giải. Ta có

$$f(e_1) = (0,0,0) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$f(e_2) = (-1,0,1) = -e_1 + e_2 + e_3$$

$$f(e_3) = (0,-1,1) = 0e_1 - e_2 + 2e_3.$$

Do đó ma trận của f trong cơ sở $E = (e_1, e_2, e_3)$ là

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta cũng có thể tìm theo phương pháp khác : Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Do đó theo (4)

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài tập

IV.1 Xét hai không gian vectơ $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^2$. Các ánh xạ sau đây từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}$ có phải là ánh xạ tuyến tính hay không?

a) $(x, y) \mapsto x$ b) $(x, y) \mapsto xy$ c) $(x, y) \mapsto x + y$

d) $(x, y) \mapsto x - y$ e) $(x, y) \mapsto ax + by$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

IV.2. Các ánh xạ sau đây từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$ có phải là ánh xạ tuyến tính không ?

a) $(x, y) \mapsto (y, x)$; b) $(x, y) \mapsto (x, -y)$;

c) $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$; d) $(x, y) \mapsto (x^2, y)$.

IV.3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, x_3 + 2x_2 - x_4)$$

a) Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính ;

b) Tìm Ker f và Im f.

IV.4. a) Xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biết

$f(3, 1) = (2, 12)$; $f(1, 1) = (0, 2)$

b) Xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ biết

$f(1, 2, 3) = (1, 0)$; $f(1, 0, 10) = (0, 1)$;

$f(2, 3, 5) = (15, -4)$

c) Xác định biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ biết

$f(1, 1, 1) = (-1, 1, 1)$; $f(1, 1, 0) = (1, 1, -1)$;

$f(1, 0, 0) = (2, 1, 2)$.

IV.5 Cho $u_1 = (1, -1)$, $u_2 = (-1, 2)$, $u_3 = (0, -1)$

$v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$.

Tồn tại hay không ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$.

IV.6. Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ có nhân sinh bởi hai vectơ (1, 2, 3, 4) và (0, 1, 1, 1). Ánh xạ f như vậy có duy nhất không ?

IV.7. Tìm phép biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ảnh sinh bởi hai vectơ (1, – 1, 1) và (1, 2, 2). Biến đổi như vậy có duy nhất không?

IV.8 Cho biến đổi tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2 + \lambda x_3).$$

a) Tìm λ để f không là đẳng cấu.

b) Với λ tìm được ở a), tìm cơ sở và số chiều của Ker f, Im f.

IV.9 Giả sử $\mathbb{R}[x]$ là không gian các đa thức trên $\mathbb{R}$.

Với $f \in \mathbb{R}[x]$ cố định xác định $\varphi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$.

$$\varphi(g) = fg' - f'g.$$

a) Chứng tỏ φ là phép biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}[x]$;

b) Tìm Ker φ.

IV.10 Cho f biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_1 + x_2, 3x_1 + x_2 - x_3).$$

a) Chứng tỏ f khả nghịch. Tìm f^{-1} ;

b) Chứng minh $(f^2 - I)(f - 2I) = 0$.

IV.11 Cho $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, toán tử tuyến tính f trên V xác định bởi $f(A) = BA$.

a) Tìm r(f) ; b) Mô tả f^2.

IV.12 Cho $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng $g_o f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ không khả nghịch.

IV.13 Tìm hai toán tử tuyến tính f, g trên $\mathbb{R}^2$ sao cho $g_o f = 0$ nhưng $f_o g \neq 0$.

IV.14 Cho toán tử tuyến tính φ có ma trận trong cơ sở $u_1 = (8, -6, 7)$, $u_2 = (-16, 7, -13)$, $u_3 = (9, -3, 7)$

là $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận của f trong cơ sở $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (3, -1, 2)$, $v_3 = (2, 1, 2)$.

IV.15. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vectơ

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2(1,0,1),\ v_3 = (1,1,0);$$

$$w_1 = (2,1,1),\ w_2 = (0,1,1),\ \ w_3 = (0,0,1);$$

a) Chứng minh $E = (v_1, v_2, v_3)$, $E' = (w_1, w_2, w_3)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển từ E sang E'.

c) Tìm toạ độ của vectơ $v = (1, 1, 1)$ trong cơ sở E và cơ sở E'.

IV.16 Cho biến đổi tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ x_1 + x_2 + 2x_3,\ -3x_1 - x_2).$$

a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc.

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở E = (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1).

IV.17 Cho $E = (v_1, v_2, v_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở E nếu

a) $f(v_1) = v_2,\ f(v_2) = v_3 - 2v_1,\ f(v_3) = 0$.

b) $f(v_1) = v_3 - v_1 - v_2,\ f(v_2) = 2v_2,\ f(v_3 - v_2) = 2v_3 - 5v_1$.

IV.18 Tìm ma trận của phép lấy đạo hàm từ không gian $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức bậc $\le n$ vào chính nó.

a) Trong cơ sở $1, x, x^2, \dots, x^n$

b) Trong cơ sở $1,\ x - \alpha,\ \dfrac{(x-\alpha)^2}{2!}, \dots, \dfrac{(x-\alpha)^n}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

IV.19 Cho $f_1, \dots, f_n$ là một cơ sở của X^*. Chứng minh tồn tại cơ sở $a_1, \dots, a_n \in X$ sao cho $a_i^* = f_i$ với mọi i = 1, ..., n.

IV.20 Cho $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, W là không gian con của V gồm tất cả B sao cho AB = 0. Cho f là dạng tuyến tính trên V, triệt tiêu trên W. Giả sử $f(I_2) = 0$, $f(C) = 3$ với $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính f(A).

IV.21 Coi C là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Hãy tìm một dạng tuyến tính thực trên $\mathbb{C}$ không phải là dạng tuyến tính phức.

IV.22 Kí hiệu $\mathbb{C}_n[x]$ là không gian vectơ phức các đa thức hệ số phức của ẩn x có bậc $\le n$. Cho α và β là hai số phức $\alpha \ne \beta$ và ánh xạ

$$f : \mathbb{C}_3[x] \to \mathbb{C}_2[x]$$

$$p(x) \mapsto p(x + \alpha) - p(x + \beta)$$

a) Chứng minh rằng f là toàn ánh tuyến tính (toàn cấu)

b) Tìm Ker f.

IV.23 Cho các ánh xạ tuyến tính

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_2 - x_3)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_3)$$

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ k(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 - x_2)$$

Tìm các ánh xạ tuyến tính sau

a) $f - 2g$ b) $h_o f$

c) $f_o(2k)$ d) $(f_o k)^3$

e) $(k_o f)^2$ f) h^n.

CHƯƠNG V

DẠNG CHÍNH TẮC CỦA MA TRẬN

§1. Trị riêng. Vectơ riêng. Đa thức đặc trưng

1. Trị riêng và vectơ riêng

Cho X là một không gian vectơ và $\varphi : X \to X$ là một toán tử tuyến tính. Số λ được gọi là trị riêng của φ nếu tồn tại $x \in X$, $x \neq 0$ sao cho

$$\varphi(x) = \lambda x.$$

Vectơ x được gọi là vectơ riêng ứng với trị riêng λ của φ.

Ứng với một trị riêng có vô số vectơ riêng. Thật vậy, nếu x là một vectơ riêng ứng với trị riêng λ thì với mọi $y = \alpha x$, α là số khác không, ta có

$\varphi(y) = \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda y$, tức là y cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng λ.

Giả sử x là một vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ. Kí hiệu $V = \langle x \rangle$ là không gian vectơ con một chiều của X sinh bởi vectơ x. Khi đó dễ dàng thấy rằng :

$$\varphi(V) \subset V.$$

Không gian vectơ con V của X có tính chất $\varphi(V) \subset V$ gọi là không gian con bất biến của φ. Như vậy với mọi vectơ riêng x của φ, $V = \langle x \rangle$ là một không gian con bất biến một chiều của φ.

Xét trường hợp X hữu hạn chiều. Giả sử $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là một cơ sở của X. Gọi A là ma trận của φ trong cơ sở E thì A là một ma trận vuông cấp n. Ánh xạ $x \mapsto \lambda x$ xác định trên X cũng là tuyến tính và có ma trận trong cơ sở E là λI do đó ánh xạ.

$$x \mapsto \varphi(x) - \lambda x$$

là một toán tử tuyến tính trên X, có ma trận trong cơ sở E là

$$A - \lambda I.$$

Nếu λ là một trị riêng của φ và x là một vectơ riêng tương ứng với λ thì

$$\varphi(x) - \lambda x = 0$$

hay

$$(A - \lambda I)\,[x]_E = 0. \qquad (1)$$

Vì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) có nghiệm không tầm thường nếu và chỉ nếu

$$|A - \lambda I| = 0,$$

ta có

Bổ đề 1.1. *λ là trị riêng của φ nếu và chỉ nếu λ là nghiệm của phương trình*

$$|A - \lambda I| = 0. \qquad (2)$$

Ta gọi (2) là phương trình đặc trưng của ma trận A, đó là một phương trình đại số bậc n của ẩn λ.

Nghiệm của (2) gọi là trị riêng của ma trận A, đó cũng chính là trị riêng của φ.

Giải phương trình (2) ta có các trị riêng. Thay trị riêng λ tìm được vào (1), nghiệm không tầm thường của hệ thuần nhất này gọi là vectơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng λ, đó cũng chính là toạ độ của vectơ riêng của φ ứng với trị riêng λ trong cơ sở E.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính φ có ma trận trong cơ sở $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm trị riêng, vectơ riêng của φ.

Giải. Phương trình đặc trưng của A là

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ 1 & -1-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

hay

$$-(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0.$$

Vậy φ có trị riêng là 1 (bội hai) và -2.

Với $\lambda = 1$ hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $x_1 = 2c, x_2 = c, x_3 = 0$. Vì vậy toạ độ vectơ riêng có trong cơ sở E là

$$(2c, c, 0), \quad c \neq 0$$

hay vectơ riêng của f ứng với trị riêng $\lambda = 1$ là

$$v = 2ce_1 + ce_2, \; c \neq 0.$$

Với $\lambda = -2$ hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm là $x_1 = 28c, x_2 = 44c, x_3 = 9c$. Vì vậy toạ độ của vectơ riêng trong cơ sở E là

$$(28c, 44c, 9c), \; c \neq 0$$

hay vectơ riêng của f ứng với trị riêng $\lambda = -2$ là

$$v = 28c\ e_1 + 44c\ e_2 + 9c\ e_3, \; c \neq 0.$$

Định lí 1.1. *Các vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau của một toán tử tuyến tính (hay của một ma trận vuông) là độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Kí hiệu v_k là vectơ riêng ứng với trị riêng λ_k của toán tử tuyến tính f (nếu là của ma trận A thì xét toán tử tuyến tính f có A là ma trận). Ta chứng minh bằng quy nạp theo số vectơ của hệ.

Nếu hệ chỉ gồm một vectơ, chẳng hạn v_1, thì hệ này độc lập tuyến tính vì $v_1 \neq 0$. Giả sử mọi hệ gồm r vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau đều độc lập tuyến tính, $r \geq 1$, ta sẽ chứng minh mọi hệ gồm r + 1 vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau là độc lập tuyến tính. Giả sử r + 1 vectơ riêng đó là

$$v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}$$

Xét quan hệ tuyến tính

$$\omega = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{r+1} v_{r+1} = 0, \qquad (1)$$

ta cần chỉ ra $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{r+1} = 0$. Giả sử trái lại, chẳng hạn $\alpha_1 \neq 0$. Khi đó

$$f(\omega) = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_{r+1}\lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \qquad (2)$$

Lấy (1) nhân với λ_{r+1} rồi trừ (2) ta được

$$\alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_{r+1} - \lambda_2)v_2 + \ldots + \alpha_r(\lambda_{r+1} - \lambda_r)v_r = 0.$$

Vì $\alpha_1(\lambda_{r+1} - \lambda_1) \neq 0$ nên điều này mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của hệ gồm r vectơ $v_1, v_2, ..., v_r$. □

2. Đa thức đặc trưng

Cho X là không gian vectơ hữu hạn n – chiều có một cơ sở là E, φ là toán tử tuyến tính trên X, có ma trận trong cơ sở E là A. Ta gọi đa thức đặc trưng của φ là

$$f_\varphi(t) = |tI - A|$$

Bổ đề 1.2. *Đa thức đặc trưng của toán tử tuyến tính φ là duy nhất, không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở.*

Chứng minh. Giả sử B là ma trận của φ trong một cơ sở E' khác E. Theo 5§5 chương IV, A và B đồng dạng, tức là tồn tại ma trận không suy biến P sao cho $B = P^{-1}AP$. Từ đó

$$|tI - B| = \left|P^{-1}(tI)P - P^{-1}AP\right|$$

$$= \left|P^{-1}(tI - A)P\right| = \left|P^{-1}\right||tI - A||P|$$

$$= |tI - A|.$$ □

Ta cũng gọi $|tI - A|$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Từ chứng minh bổ đề 1.2 ta có : Hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng.

Định lí 1.2. *Cho X là không gian vectơ hữu hạn chiều và φ là toán tử tuyến tính trên X. Khi đó các điều kiện sau tương đương*

a) λ là trị riêng của φ

b) Toán tử $\varphi - \lambda I_X$ không đơn ánh (nên không khả nghịch)

c) λ là nghiệm của đa thức đặc trưng $f_\varphi(t)$

Chứng minh. Gọi A là ma trận của φ trong một cơ sở E nào đó. Vì

$$f\varphi(t) = |tI - A| = (-1)^n |A - tI|$$

nên theo bổ đề 1.1 ta có a) ⇔ c).

Với mọi v ∈ E, $(\varphi - \lambda I_X)(v) = 0$ tương đương với cách viết dưới dạng ma trận $(A - \lambda I)\ [v]_E = 0$. Do đó $\varphi - \lambda I_X$ không đơn ánh tương đương với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận A – λI có nghiệm không tầm thường, tức là tương đương với $|A - \lambda I| = 0$. Vậy a) ⇔ b). □

3. Không gian con riêng

Giả sử λ là một trị riêng của toán tử tuyến tính φ trên X ta kí hiệu

$$E(\lambda) = \{x \in X | \varphi(x) = \lambda x\}.$$

Bổ đề 1.3. *Với mọi trị riêng λ của φ, $E(\lambda)$ là không gian con bất biến của φ, gọi là không gian riêng ứng với trị riêng λ.*

Chứng minh. Ta có $0 \in E(\lambda)$. Mọi $x_1, x_2 \in E(\lambda)$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(\alpha x_1 + x_2) = \alpha\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$= \alpha\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + x_2), \text{ nên } \alpha x_1 + x_2 \in E(\lambda)$$

Mặt khác $\varphi(E(\lambda)) \subset \lambda E(\lambda) \subset E(\lambda)$ nên $E(\lambda)$ là không gian con bất biến của φ. □

Chú ý rằng $E(\lambda) = \mathrm{Ker}\ (\varphi - \lambda I_X)$.

§2. Chéo hoá ma trận

Ma trận vuông A gọi là ma trận chéo nếu $(A)_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$, nói cách khác, các phần tử không nằm trên đường chéo chính bằng 0.

Ma trận vuông A gọi là chéo hoá được nếu tồn tại ma trận không suy biến P (cùng cấp với A) sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

Định lí sau đây cho ta điều kiện cần và đủ để một ma trận chéo hoá được.

Định lí 2.1. *Ma trận vuông A cấp n chéo hoá được nếu và chỉ nếu A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính trong $\mathbb{K}^n$.*

Chứng minh. Nếu A chéo hoá được thì tồn tại ma trận không suy biến P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo, tức là

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Kí hiệu

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

là cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^n$ viết theo dạng cột. Bởi vì

$$(P^{-1}AP)e_i = \lambda_i e_i \tag{1}$$

do đó e_i là vectơ riêng của ma trận $P^{-1}AP$ với i = 1, 2, ..., n.

Nhân bên trái hai vế của (1) với P ta được

$$A(Pe_i) = \lambda_i(Pe_i) \tag{2}$$

Theo đẳng thức (2) các vectơ $Pe_1, Pe_2, ..., Pe_n$ là vectơ riêng của ma trận A. Ta sẽ chứng minh hệ vectơ này độc lập tuyến tính. Xét quan hệ tuyến tính

$$\alpha_1 Pe_1 + \alpha_2 Pe_2 + ... + \alpha_n Pe_n = 0 \tag{3}$$

ta sẽ suy ra $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Thật vậy từ (3) ta có

$$P(\alpha_1 e_1) + P(\alpha_2 e_2) + ... + P(\alpha_n e_n) = 0$$

hay $$P(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n) = 0.$$

Vì P không suy biến nên phương trình này chỉ có nghiệm tầm thường

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0.$$

Từ đó $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ bởi $(e_1, e_2, ..., e_n)$ độc lập tuyến tính.

Bây giờ giả sử A có các vectơ riêng độc lập tuyến tính $v_1, ..., v_n$ tương ứng với các trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (các trị riêng λ_i có thể trùng nhau). Giả sử $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ là phép biến đổi tuyến tính có A là ma trận trong cơ sở chính tắc. Khi đó

$$[\varphi(x)] = A[x].$$

Đồng nhất v_i với $[v_i]$ ta có

$$\varphi(v_i) = Av_i = \lambda_i v_i = 0v_1 + ... + \lambda_i v_i + ... + 0v_n$$

Vì vậy trong cơ sở $E = (v_1, ..., v_n)$, ma trận của φ là

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E. Khi đó P có các cột là các vectơ $v_1, ..., v_n$. Từ mối liên hệ giữa các ma trận của φ trong các ma trận khác nhau, ta có

$$D_\lambda = P^{-1}AP \text{ hay } A = PD_\lambda P^{-1}.$$

Vậy A chéo hoá được. □

Ta gọi chéo hoá ma trận A là tìm ma trận chéo D_λ và ma trận không suy biến P sao cho

$$D_\lambda = P^{-1}AP.$$

Nếu λ là trị riêng đơn thì ứng với nó chỉ có một vectơ riêng độc lập tuyến tính. Nếu λ là trị riêng bội m thì số vectơ riêng độc lập ứng với nó ≤ m. Do đó ta có

Hệ quả 2.1. *Nếu ma trận* A *có* n *trị riêng đơn thì* A *chéo hoá được.*

Hệ quả 2.2. *Trên trường số phức, ma trận* A *chéo hoá được nếu và chỉ nếu ứng với trị riêng bội* m *có* m *vectơ riêng độc lập tuyến tính. Trên trường số thực, ma trận thực* A *chéo hóa được nếu và chỉ nếu* A *có* n *trị riêng (tính theo số lần bội) và ứng với trị riêng bội* m *có* m *vectơ riêng độc lập tuyến tính.*

Ví dụ. a) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hãy chéo hoá ma trận A.

Giải. Phương trình đặc trưng của ma trận A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\ (\lambda^2+\lambda-12) = 0.$$

Do đó ma trận có ba trị riêng là 1, 3, – 4. Theo hệ quả 2.2, A chéo hoá được.

Với λ = 1, ta có hệ phương trình tìm vectơ riêng

$$\begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3c \end{cases}$$

Ta chọn một vectơ riêng là $v_1 = (1,0,3)$.

Với λ = 3, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3c \\ x_2 = -2c \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Ta chọn một vectơ riêng là $v_2 = (-3,-2,1)$.

Với $\lambda = -4$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \qquad = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad -x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3c \\ x_2 = 5c \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Ta chọn một vectơ riêng là $v_3 = (-3,5,1)$.

Theo định lí 1.2, $\{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính. Theo định lí 2.1, đặt

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ta có $D_\lambda = P^{-1}AP$.

b) Tính $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{100}$

Giải. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ có hai trị riêng là 1 và – 3, tương ứng với các vectơ riêng (1, 0) và (1, – 2). Đặt $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ta có

$$P^{-1}AP = D_\lambda \quad \text{hay} \quad A = PD_\lambda P^{-1}$$

Từ đó mọi $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = PD_\lambda^n P^{-1}$$

Với n = 100 ta có

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-3^{100}) \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}.$$

§3. Đa thức tối tiểu và phân tích không gian vectơ

1. Đa thức tối tiểu

Đa thức f(t) trên trường $\mathbb{K}$ gọi là linh hoá của toán tử tuyến tính φ nếu $f(\varphi) = 0$.

Nếu p(t) là đa thức có bậc thấp nhất linh hoá của φ thì ta nói p là đa thức tối tiểu của φ.

Định lí 3.1. *Nếu đa thức* g(t) *linh hoá toán tử tuyến tính* φ *thì* g(t) *chia hết cho đa thức tối tiểu* p(t) *của* φ.

Chứng minh. Sử dụng phép chia đa thức, ta có

$$g(t) = g_1(t)p(t) + r(t)\ ,\ \deg(r) < \deg(p).$$

Nhận xét rằng với mọi đa thức f(t), g(t) và $\alpha \in \mathbb{K}$, ta có

$$(fg)(\varphi) = f(\varphi)g(\varphi)$$

$$(f + g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$$

$$(\alpha f)(\varphi) = \alpha f(\varphi).$$

Do đó $g(\varphi) = g_1(\varphi).p(\varphi) + r(\varphi)$. Vì $g(\varphi) = p(\varphi) = 0$ nên $r(\varphi) = 0$. Vì p có bậc nhỏ nhất để $p(\varphi) = 0$ nên r phải là đa thức 0. Vậy g(t) chia hết cho p(t). □

Định lí 3.2. *Nếu* φ *là toán tử tuyến tính trên không gian vectơ X hữu hạn chiều thì đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của* φ *có cùng tập nghiệm. Nói cách khác, nghiệm của đa thức tối tiểu là các trị riêng của* φ.

Chứng minh. Gọi p(t) là đa thức tối tiểu của φ, $\alpha \in \mathbb{K}$. Ta sẽ chứng minh

$$p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ là trị riêng của } \varphi.$$

Giả sử $p(\alpha) = 0$. Khi đó

$$p(t) = (t - \alpha)q(t),\ \deg(q) < \deg(p).$$

Vì $\deg(q) < \deg(p)$ nên $q(\varphi) \neq 0$. Chọn $x \in X$ sao cho $q(\varphi)x \neq 0$. Đặt $y = q(\varphi)x$. Ta có

$$\begin{aligned} 0 = p(\varphi)x &= [(\varphi - \alpha I_X)q(\varphi)]x \\ &= (\varphi - \alpha I_X)(q(\varphi)x) \\ &= (\varphi - \alpha I_X)y. \end{aligned}$$

Vậy α là trị riêng của φ.

Ngược lại, nếu α là trị riêng của φ với $\varphi(v) = \alpha v$, $v \neq 0$, thì $p(\varphi)v = p(\alpha)v$. Vì $p(\varphi) = 0$ nên $p(\alpha)v = 0$.

Do $v \neq 0$ nên $p(\alpha) = 0$, tức α là nghiệm của $p(t)$. □

Định lí 3.3. *Cho toán tử tuyến tính φ trên không gian vectơ hữu hạn chiều X. Giả sử $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ là tất cả các trị riêng khác nhau của φ, $p(t)$ là đa thức tối tiểu của φ. Khi đó nếu φ chéo hoá được thì $p(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_k)$.*

Chứng minh. φ chéo hoá được nếu và chỉ nếu X có một cơ sở E gồm toàn vectơ riêng của φ. Nếu v là một vectơ riêng của φ thì một trong các toán tử $\varphi - \lambda_i I_X$ chuyển v thành 0. Do đó

$$p(\varphi) = (\varphi - \lambda_1 I_X)\ \ldots\ (\varphi - \lambda_k I_X)$$

sẽ chuyển các vectơ của E thành vectơ 0. Vậy $p(\varphi) = 0$ và đa thức tối tiểu của φ phải là ước của $p(t)$. Theo định lí 3.2, đa thức tối tiểu của φ phải nhận $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ làm nghiệm nên đa thức tối tiểu phải có bậc $\geq k$. Vậy $p(t)$ chính là đa thức tối tiểu. □

2. Phân tích không gian vectơ

Định lí 3.4. *Cho f(t) là một đa thức trên $\mathbb{K}$, và $f = f_1 f_2$ với f_1, f_2 là các đa thức bậc ≥ 1, có ước chung lớn nhất bằng 1. Giả sử φ là toán tử tuyến tính trên X thoả mãn $f(\varphi) = 0$. Đặt $V_1 = \mathrm{Ker}(f_1(\varphi))$, $V_2 = \mathrm{Ker}(f_2(\varphi))$. Khi đó $X = V_1 \oplus V_2$.*

Chứng minh. Do ước chung lớn nhất của f_1 và f_2 bằng 1 nên tồn tại các đa thức g_1, g_2 sao cho

$$g_1(t)f_1(t) + g_2(t)f_2(t) = 1.$$

Từ đó $g_1(\varphi)f_1(\varphi) + g_2(\varphi)f_2(\varphi) = I_X$. Suy ra với mọi $x \in X$

$$x = g_1(\varphi)f_1(\varphi)x + g_2(\varphi)f_2(\varphi)x. \qquad (1)$$

Vì $f_2(\varphi)g_1(\varphi)f_1(\varphi)x = g_1(\varphi)f_2(\varphi)f_1(\varphi)x = g_1(\varphi)f(\varphi)x = 0$

nên $g_1(\varphi)f_1(\varphi)x \in V_2$. Tương tự ta có $g_2(\varphi)f_2(\varphi)x \in V_1$. Vậy

$$X = V_1 + V_2. \qquad (2)$$

Giả sử $x \in V_1 \cap V_2$. Khi đó

$$f_1(\varphi)x = f_2(\varphi)x = 0.$$

Từ (1) suy ra $x = 0$. Do đó

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3), $X = V_1 \oplus V_2$. □

Định lí 3.5. *Cho* X *là không gian vectơ trên* $\mathbb{C}$, φ *là toán tử tuyến tính trên* X *Gọi* p *là một đa thức thoả mãn* $p(\varphi) = 0$ *và*

$$p(t) = (t - \alpha_1)^{m_1} \dots (t - \alpha_n)^{m_r}$$

với $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *là các nghiệm phân biệt. Đặt*

$$V_i = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_i I_x)^{m_i}.$$

Khi đó X *là tổng trực tiếp của các không gian con* $V_1, \dots, V_r$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo r. Theo định lí 3.4, $V = V_1 \oplus W$ với

$$V_1 = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_1 I_X)^{m_1}$$

và $$W = \mathrm{Ker}[(\varphi - \alpha_2 I_X)^{m_2} \dots (\varphi - \alpha_r I_X)^{m_r}]$$

Theo giả thiết quy nạp

$$W = V_2 \oplus \dots \oplus V_r$$

với $$V_j = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_j I_W)^{m_j} \text{ trên } X (j = 2, \dots, r). \text{ Vậy}$$

$$X = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r.$$

Cuối cùng chỉ còn phải chứng minh

$$V_j = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha_j I_X)^{m_j} \text{ trên } X,\ j = 2, \dots, r.$$

Thật vậy, nếu

$$v = u_1 + u_2 + \dots + u_r \in \mathrm{Ker}\ (\varphi - \alpha_j I_X)^{m_j},\ u_i \in V_i,\ i = 1, \dots, n \text{ thì do } j \geq 2 \text{ nên}$$

$$v \in \mathrm{Ker}\ (\varphi - \alpha_2 I_X)^{m_2} \dots (\varphi - \alpha_r I_x)^{m_r},$$

từ đó $v \in W$. Vì $v \in W$, suy ra $u_1 = 0$. Do

$$v \in W \text{ và } W = V_2 \oplus \dots \oplus V_r \text{ nên } v = u_j.$$ □

§4. Dạng chính tắc Jordan

1. Không gian tuần hoàn

Cho X là không gian vectơ trên $\mathbb{C}$, φ là toán tử tuyến tính trên X, $\alpha \in \mathbb{C}$ và $v \in X$, $v \neq 0$. Ta nói v là φ – tuần hoàn nếu tồn tại số nguyên $r \geq 1$ sao cho $\varphi^r(v) = 0$. Số nguyên dương r nhỏ nhất có tính chất trên gọi là chu kì của v đối với φ. Khi đó $\varphi^k(v) \neq 0$ với mọi k thoả mãn $0 \leq k < r$.

Bổ đề 4.1. *Nếu* $v \neq 0$ *là* φ – *tuần hoàn chu kì* r *thì tập các phần tử* $\{v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{r-1}(v)\}$ *độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại các λ_i không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\lambda_0 v + \lambda_1 \varphi(v) + \ldots + \lambda_{r-1}\varphi^{r-1}(v) = 0. \qquad (1)$$

Đặt $f(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_{r-1}t^{r-1}$, ta có đa thức $f \neq 0$, $\deg(f) \leq r - 1$ và (1) được viết lại dưới dạng

$$f(\varphi)v = 0.$$

Đặt $g(t) = t^r$ thì $g(\varphi)v = 0$. Gọi h(t) là ước chung lớn nhất của f(t) và g(t) thì tồn tại các đa thức f_1 và g_1 sao cho

$$h = f_1 f + g_1 g$$

Từ đó suy ra $h(\varphi)v = 0$. Do h là ước của f nên $\deg(h) \leq r - 1$, h là ước của g nên $h(t) = t^d$, $d \leq r - 1$.

Từ đó $h(\varphi)v = \varphi^d(v) = 0$ với $d < r$, mâu thuẫn với r là chu kì của v đối với φ. □

Không gian vectơ X hữu hạn chiều gọi là φ – tuần hoàn nếu tồn tại $\alpha \in \mathbb{C}$ và $v \in X$ sao cho v là $(\varphi - \alpha I_X)$ – tuần hoàn có chu kì $r = \dim X$.

Từ bổ đề 4.1 ta có

Hệ quả 4.1. *Nếu* X *là không gian vectơ* r – *chiều,* φ – *tuần hoàn thì tồn tại* $v \in X$ *và* $\alpha \in \mathbb{C}$ *sao cho*

$$\{(\varphi - \alpha I_X)^{r-1}v, \ldots, (\varphi - \alpha I_X)v, v\} \qquad (2)$$

là một cơ sở của X.

2. Dạng chính tắc Jordan

Với mỗi k = 0, ..., r − 1 ta có

$$\varphi(\varphi-\alpha I_X)^k v = (\varphi-\alpha I_X)^{k+1} v + \alpha(\varphi-\alpha I_X)^k v$$

nên ma trận của toán tử φ trong cơ sở (2) có dạng

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0\dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\dots & 0 & 0 \\ - & - & -- & - & - \\ 0 & 0 & 0- & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0- & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ma trận này có phần tử thứ (i,i) bằng α (i = 1, ..., r), phần tử thứ (i, i + 1) bằng 1 (i = 1, .., r − 1), các phần tử còn lại bằng 0.

Ma trận trên gọi là một khối Jordan, kí hiệu là J(α), cơ sở (2) gọi là cơ sở Jordan của φ.

Cho các ma trận vuông $A_1,\dots,A_k$ có cấp tương ứng là $n_1,\dots,n_k$. Ta gọi tổng trực tiếp của k ma trận này là ma trận vuông cấp $n = n_1+\dots+n_k$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

trong đó $A_1,\dots,A_k$ nằm trên đường chéo chính, các vị trí còn lại của A bằng 0.

Dễ dàng thấy rằng

Bổ đề 4.2. *Nếu* $X = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, V_i *có cơ sở là* E_i, $i = 1,\dots, k$, φ *là một toán tử tuyến tính trên* X *thoả mãn* $\varphi(V_i) \subset V_i$, i = 1, ..., k, *thì* $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ *là một cơ sở của* X *và ma trận* $[\varphi]_E$ *bằng tổng trực tiếp của các ma trận* $\left[\varphi|_{V_i}\right]_{E_i}$, i = 1, ..., k.

Giả sử X là tổng trực tiếp của các không gian con φ − bất biến.

$$X = V_1 \oplus \dots \oplus V_k,$$

trong đó mỗi V_i là không gian tuần hoàn. Chọn cơ sở Jordan cho mỗi V_i. Hợp các cơ sở này theo thứ tự tạo nên một cơ sở của X, ta cũng gọi nó là cơ sở Jordan của φ.

Ma trận J của φ trong cơ sở này là tổng trực tiếp của k khối Jordan. Nếu V_i là $(\varphi - \alpha_i I_X)$ – tuần hoàn với i = 1, ..., k thì J có dạng

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & 1 & & \\ & \alpha_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_k & 1 & & \\ & \alpha_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_k \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ở mỗi khối, α_i nằm trên đường chéo chính, 1 nằm ở phía trên đường chéo chính, 0 ở các vị trí còn lại.

Định lí 4.1. *Cho X là không gian vectơ hữu hạn chiều trên $\mathbb{C}$, $X \neq \{0\}$, φ là một toán tử tuyến tính trên X. Khi đó X bằng tổng trực tiếp của các không gian con tuần hoàn φ – bất biến.*

Chứng minh. Áp dụng định lí 3.5 vào đa thức đặc trưng $f_\varphi(t)$ của φ, ta có thể giả thiết rằng có một số $\alpha \in \mathbb{C}$ và số nguyên $r \geq 1$ sao cho $(\varphi - \alpha I_X)^r = 0$. Đặt $\Psi = \varphi - \alpha I_X$, ta có $\Psi^r = 0$. Giả sử r là số nguyên nhỏ nhất có tính chất trên, ta có $\Psi^{r-1} \neq 0$. Từ đó $\Psi(X)$ là không gian con thực sự của X. Thật vậy, chọn $w \in X$ sao cho $\Psi^{r-1}(w) \neq 0$. Đặt $v = \Psi^{r-1}(w)$ thì $v \in \operatorname{Ker}\Psi$ nên $\dim \operatorname{Ker}(\psi) \geq 1$ và $\dim \Psi(X) < \dim X$.

Do giả thiết quy nạp, $\Psi(X)$ là tổng trực tiếp của các không gian con tuần hoàn φ – bất biến

$$\psi(X) = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m,$$

sao cho V_i có cơ sở gồm các phần tử $\Psi^k(w_i)$ với vectơ tuần hoàn $w_i \in V_i$, có chu kì r_i.

Lấy $v_i \in X$ sao cho $\Psi(v_i) = w_i$. Khi đó mỗi vectơ v_i là tuần hoàn, vì nếu $\Psi^{r_i}(w_i) = 0$ thì $\Psi^{r_i+1}(v_i) = 0$.

Gọi W_i là không gian con của X sinh bởi các phần tử $\Psi^k(v_i)$, $k = 1, ..., r_i + 1$. Ta sẽ chứng minh

$$V' = W_1 + ... + W_m$$

là tổng trực tiếp, tức là mọi $u \in V'$ được viết một cách duy nhất dạng

$$u = u_1 + ... + u_m, \ u_i \in W_i,$$

hay một cách tương đương vectơ $0_{V'} \in V'$ được viết duy nhất dạng

$$0_{V'} = 0_1 + ... + 0_m, \ 0_i \in W_i.$$

Mọi phần tử của W_i đều có dạng $f_i(\Psi)v_i$ với f_i là đa thức bậc $\le r_{i+1}$. Giả sử

$$0 = f_1(\Psi)v_1 + ... + f_m(\Psi)v_m \qquad (3)$$

Tác động Ψ vào (3) với chú ý $\Psi f_i(\Psi) = f_i(\Psi)\Psi$, ta có

$$f_1(\Psi)w_1 + ... + f_m(\Psi)w_m = 0.$$

Do $V_1 + ... + V_m$ là tổng trực tiếp của $\Psi(X)$ nên

$$f_i(\Psi)w_i = 0, \ i = 1, ..., m.$$

Suy ra t^{r_i} là ước của $f_i(t)$ (xem chứng minh bổ đề 4.1), vì vậy

$$f_i(t) = g_i(t)t \ \text{ với } \ g_i \in \mathbb{C}[t].$$

Từ đó (3) trở thành

$$g_1(\varphi)w_1 + ... + g_m(\varphi)w_m = 0.$$

Tương tự trên, ta lại có t^{r_i} là ước của $g_i(t)$ nên t^{r_i+1} là ước của $f_i(t)$. Suy ra $f_i(\Psi)v_i = 0$.

Vậy V' là tổng trực tiếp của $W_1, ..., W_m$.

Do $V' \subset X$ nên $\Psi(V') \subset \Psi(X)$. Mọi phần tử của $\Psi(X)$ đều có dạng

$$f_1(\Psi)w_1 + ... + f_m(\Psi)w_m$$

với các đa thức f_i nào đó nên ảnh qua Ψ của phần tử này là

$$f_1(\Psi)v_1 + ... + f_m(\Psi)v_m$$

và phần tử này thuộc V'. Vậy $\Psi(X) \subset \Psi(V')$ và do đó $\Psi(X) = \Psi(V')$.

Cho $v \in X$. Do $\Psi(v) = \Psi(v')$ nên $\Psi(v - v') = 0$. Vì thế

$$v = v' + (v - v') \in V' + \mathrm{Ker}\varphi.$$

Ta có $X = V' + \mathrm{Ker}\ \Psi$.

Gọi E′ là cơ sở Jordan của V′. Ta có thể bổ sung vào E′ một số phần tử thuộc một cơ sở của $\mathrm{Ker}\Psi$ để được một cơ sở E của X :

$$E = E' \cup \{u_1, ..., u_l\}$$

Do $\Psi(u_j) = 0$ nên u_j là vectơ riêng của φ, và không gian con một chiều sinh bởi u_j là tuần hoàn và φ – bất biến. Kí hiệu không gian ấy là U_j. Ta có

$$\begin{aligned} X &= V' \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_l \\ &= V_1 \oplus ... \oplus V_m \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_l \end{aligned}$$

là một phân tích X thành tổng trực tiếp của các không gian con tuần hoàn, φ – bất biến. □

Hệ quả 4.2. a) *Mọi toán tử tuyến tính φ trên không gian vectơ hữu hạn chiều X, tồn tại một cơ sở E của X sao cho $[\varphi]_E$ là ma trận dạng Jordan.*

b) *Mọi ma trận vuông A đồng dạng với một ma trận dạng Jordan, gọi là dạng chính tắc Jordan của A.*

Định lí 4.2. *Toán tử tuyến tính φ trên không gian hữu hạn chiều X chéo hóa được nếu và chỉ nếu đa thức tối thiểu của φ có dạng*

$$p_\varphi(t) = (t - \lambda_1)...(t - \lambda_k), \qquad (4)$$

với $\lambda_1, ..., \lambda_k$ là các trị riêng phân biệt của φ.

Chứng minh. Nếu φ chéo hoá được thì theo định lí 3.3, $p_\varphi(t)$ có dạng (4). Ngược lại, giả sử $p_\varphi(t)$ có dạng (4), ta sẽ chỉ ra dạng chính tắc Jordan phải có dạng chéo, tức là chỉ gồm các khối vuông 1 × 1.

Xét khối vuông Jordan k × k

$$J_k(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Đa thức tối thiểu của khối này là $(t - \alpha)^k$. Đa thức tối thiểu $p_J(t)$ của mỗi khối Jordan J của φ là ước của đa thức tối thiểu $p_\varphi(t)$ của φ, do đó k = 1. □

Định lí 4.3. *Cho toán tử tuyến tính* φ *có các trị riêng phân biệt* $\lambda_1,...,\lambda_r$. *Khi đó đa thức tối tiểu của* φ *có dạng*

$$p_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \dots (t-\lambda_r)^{m_r} \qquad (5)$$

nếu và chỉ nếu trong dạng chính tắc Jordan của φ, *các khối Jordan* $J(\lambda_i)$ *ứng với trị riêng* λ_i *có bậc cao nhất là* m_i.

Chứng minh. Hiển nhiên $p_\varphi(t)$ có dạng (5) thì các khối Jordan $J(\lambda_i)$ ứng với trị riêng λ_i có bậc cao nhất là m_i. Ngược lại giả sử m_i là bậc cao nhất của các khối Jordan tương ứng với trị riêng λ_i. Khi đó các khối Jordan $J(\lambda_i)$ đều bị linh hoá bởi $(t-\lambda_i)^{m_i}$, nên $[\varphi]$ bị linh hoá bởi $p_\varphi(t)$ có dạng (5). Vì mỗi $(t-\lambda_i)^{m_i}$ là đa thức có bậc thấp nhất linh hoá các khối $J(\lambda_i)$ nên $p_\varphi(t)$ là đa thức bậc thấp nhất linh hoá $[\varphi]$. Vậy $p_\varphi(t)$ là đa thức tối tiểu của φ. □

Bài tập

V.1 Tìm trị riêng, vectơ riêng thực của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

V.2 Chéo hoá các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

V.3 Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

a) $\varphi(x,y,z) = (2x - y + 2z, 5x - 3y + 3z, -x - 3z)$

b) $\varphi(x,y,z) = (y, -4x + 4y, -2x + y + 2z)$

c) $\varphi(x,y,z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$

d) $\varphi(x,y,z) = (x - 3y + 3z, -2x - 6y + 13z, -x - 4y + 8z)$.

V.4 Chứng minh rằng mọi vectơ khác 0 đều là vectơ riêng của toán tử tuyến tính φ trên X nếu và chỉ nếu tồn tại $\alpha \in \mathbb{K}$ sao cho $\varphi = \alpha I_X$.

V.5 Cho φ là toán tử tuyến tính khả nghịch trên X. Chứng minh λ là trị riêng của φ thì $\frac{1}{\lambda}$ là trị riêng của φ^{-1}. Hơn nữa nếu v là vectơ riêng của φ ứng với λ thì nó cũng là vectơ riêng của φ^{-1} ứng với $\frac{1}{\lambda}$.

V.6 Chứng tỏ rằng mọi toán tử tuyến tính trên không gian vectơ phức hữu hạn chiều đều có vectơ riêng. Điều đó còn đúng không với không gian vô hạn chiều.

V.7 Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 chéo hoá được

a) Trên $\mathbb{R}$,   b) Trên $\mathbb{C}$.

V.8 Chứng tỏ hai ma trận vuông A và A^T có chung trị riêng. Cho ví dụ chứng tỏ chúng không chung vectơ riêng.

V.9 Chứng minh tổng và giao của hai không gian con bất biến là không gian con bất biến.

V.10 Cho φ và Ψ là hai toán tử tuyến tính trên X giao hoán với nhau. Chứng minh U là không gian con bất biến của φ thì $\Psi(U)$ cũng là không gian con bất biến của φ.

V.11 Cho φ và Ψ là hai toán tử tuyến tính trên X giao hoán với nhau. Chứng minh $\mathrm{Ker}(\Psi)$ và $\mathrm{Im}(\Psi)$ là không gian con bất biến của φ.

V.12 Cho φ là toán tử tuyến tính trên X, U là không gian con bất biến của φ và $W \subset U$. Chứng minh

a) W là không gian con bất biến của $\varphi|_U$ nếu và chỉ nếu nó là không gian con bất biến của φ.

b) $\varphi(U)$ và $\varphi^{-1}(U)$ là không gian con bất biến của φ.

V.13 Cho toán tử tuyến tính $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ có n trị riêng phân biệt. Hãy tìm tất cả các không gian con bất biến của φ.

V.14 Tìm tất cả các không gian con bất biến của toán tử tuyến tính φ trên $\mathbb{K}^3$

$$\varphi(x,y,z) = (4x - 2y + 2z,\ 2x + 2z,\ -x + y + z)$$

V.15 Tìm dạng Jordan của các ma trận sau

a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -25 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CHƯƠNG VI

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

§1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa

Cho X là một không gian vectơ. Ta gọi một dạng song tuyến trên X là một quy tắc đặt hai vectơ bất kì x, y ∈ X với một số f(x, y) ∈ $\mathbb{K}$ thoả mãn các điều kiện sau đây với mọi x, y, z ∈ X, λ ∈ $\mathbb{K}$:

1) $f(x + z, y) = f(x, y) + f(z, y)$

$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$;

2) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$,

$f(x, \lambda y) = \lambda\, f(x, y)$.

Một ánh xạ tuyến tính $\varphi : X \to \mathbb{K}$ gọi là một dạng tuyến tính. Theo tính chất 1), với mỗi y cố định, f(x, y) là một dạng tuyến tính theo x và theo tính chất 2), với mỗi x cố định, f(x, y) là một dạng tuyến tính theo y. Theo từng biến dạng song tuyến tính có các tính chất của một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ.

a) Nếu φ và Ψ là hai dạng tuyến tính trên X thì

$$f(x, y) = \varphi(x)\,\Psi(y)$$

là một dạng song tuyến tính trên X.

b) $\varphi(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$

là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ C[a,b] các hàm liên tục trên đoạn [a,b].

2. Ma trận của dạng song tuyến tính

Cho f là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ X và $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của X. Kí hiệu $x = (x_1, x_2, ... x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ là toạ độ của vectơ x và y trong cơ sở E. Khi đó

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j).$$

Đặt $f(e_i, e_j) = a_{ij}$, ta có

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (1)$$

Ta gọi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận của dạng song tuyến tính f trong cơ sở E. Kí hiệu $[z]_E$ là toạ độ của vectơ z trong cơ sở E. Khi đó ta có

$$f(x, y) = [y]_E^T A[x]_E \qquad (1')$$

Như vậy : Mỗi dạng song tuyến tính f đều có thể viết dưới dạng (1) ; ngược lại cho một ma trận vuông A cấp n bất kì, công thức (1') cho ta một dạng song tuyến tính có A là ma trận trong cơ sở E.

Giả sử $E' = \{e'_1, e'_2, ... e'_n\}$ là một cơ sở khác của X và P là ma trận chuyển từ E sang E'. Gọi B là ma trận của dạng song tuyến tính f trong cơ sở khi E'. Khi đó

$$f(x, y) = [y]_E^T A[x]_E =$$

$$= (P[y]_{E'})^T A(P[x]_{E'}) = [y]_{E'}^T (P^T AP)[x]_{E'}$$

Vì vậy ta có

$$B = P^T AP \qquad (2)$$

Bởi vì $|P| = |P^T|$ nên từ (2) ta có

$$|B| = |A||P|^2 \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra định thức của ma trận một dạng song tuyến tính thực trong các cơ sở khác nhau có cùng dấu.

Cho hai ma trận vuông S và P cấp n. Kí hiệu $S_1,...,S_n$ là các vectơ dòng của S. Theo định nghĩa phép nhân, mỗi dòng của ma trận tích SP là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $S_1,...,S_n$. Do đó

$$r(SP) \le r(S) \qquad (4)$$

Vì $r(A) = r(A^T)$ nên từ (4) suy ra $r(SP) \le r(P)$. Vậy

$$r(SP) \le \min\{r(S), r(P)\}$$

Giả sử S không suy biến. Khi đó

$$r(P) = r(S^{-1}(SP)) \le r(SP)$$

Do đó trong trường hợp này ta có $r(P) = r(SP)$. Tương tự nếu P không suy biến thì $r(S) = r(SP)$. Áp dụng điều này vào (2) ta có

$$r(A) = r(B)$$

Từ đó ta gọi hạng của dạng song tuyến tính f là hạng của ma trận của nó trong một cơ sở tuỳ ý.

Ví dụ. Cho f là dạng tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ (cho trong cơ sở chính tắc)

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ và trong cơ sở

$$E' = \{(1,1,0), (1,1,1), (1,0,1)\}.$$

Giải. Bởi vì

$$f(e_1,e_1) = 1, \qquad f(e_2,e_1) = 0, \qquad f(e_3,e_1) = 0;$$

$$f(e_1,e_2) = 2, \qquad f(e_2,e_2) = -1, \qquad f(e_3,e_2) = 0;$$

$$f(e_1,e_3) = 0, \qquad f(e_2,e_3) = 0, \qquad f(e_3,e_3) = 3;$$

nên ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E' là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nên ma trận của f trong cơ sở E' là

$$B = P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Dạng song tuyến tính đối xứng

Dạng song tuyến tính f trên X gọi là đối xứng nếu

$$f(x, y) = f(y, x)$$

với mọi $x, y \in X$.

Nếu f đối xứng thì trong một cơ sở E bất kì

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$$

với mọi i, j.

Ma trận vuông $A = (a_{ij})$ gọi là ma trận đối xứng nếu $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j. Dễ dàng kiểm tra rằng nếu dạng song tuyến tính f có ma trận trong một cơ sở nào đó là ma trận đối xứng thì f là dạng song tuyến tính đối xứng, ngược lại, nếu f là dạng song tuyến tính đối xứng thì ma trận của f trong một cơ sở bất kì là ma trận đối xứng.

§2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Định nghĩa

Cho f là một dạng song tuyến tính trên X. Khi đó

$$\omega(x) = f(x, x)$$

gọi là một dạng toàn phương trên X.

Nếu f là một dạng song tuyến tính không đối xứng thì bằng cách đặt

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x)),$$

ta có φ là một dạng song tuyến tính đối xứng và

$$\omega(x) = \varphi(x, x)$$

Vì vậy sau này trong định nghĩa dạng toàn phương ta luôn giả thiết dạng song tuyến tính f là đối xứng.

Kí hiệu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là toạ độ của vectơ x trong một cơ sở E nào đó của X. Khi đó, ta có phương trình của dạng toàn phương là

$$\omega(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i, j = 1, 2,...,n.

Từ hệ thức

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y, x + y) - f(x,x) - f(y,y)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega(x + y) - \omega(x) - \omega(y))$$

suy ra rằng chỉ có một dạng song tuyến tính đối xứng duy nhất xác định dạng toàn phương $\omega(x)$.

2. Ma trận của dạng toàn phương

Cho dạng toàn phương $\omega(x)$ xác định bởi dạng song tuyến tính đối xứng f(x, y). Khi đó ma trận của f trong cơ sở E cũng gọi là ma trận của dạng toàn phương $\omega(x)$ trong cơ sở E.

Giả sử A là ma trận của dạng toàn phương $\omega(x)$ trong cơ sở E. Khi đó ta có

$$\omega(x) = [x]_E^T A[x]_E = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Ví dụ. Dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$$

có ma trận là $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng kiểm tra $$\omega(x) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

§3. DẠNG CHÍNH TẮC CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Dạng chính tắc

Phương trình của dạng toàn phương

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

trong đó $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là toạ độ của vectơ x trong cơ sở E xuất phát trên X. Rõ ràng phương trình này thay đổi khi cơ sở thay đổi.

Dạng toàn phương gọi là có dạng chính tắc nếu

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 .$$

Cơ sở để dạng toàn phương có dạng chính tắc gọi là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương.

Mỗi dạng toàn phương đều tồn tại một cơ sở để trong cơ sở đó nó có dạng chính tắc. Việc tìm cơ sở để trong cơ sở đó dạng toàn phương có dạng chính tắc gọi là phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

2. Phương pháp Lagrange

Xét dạng toàn phương

$$\omega(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + ...$$

Nếu $a_{11} \neq 0$ thì

$$\omega(x) = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + ... + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + ...$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g_1$$

trong đó g_1 là một dạng toàn phương không phụ thuộc x_1.

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_2 = x_2 \\ ... \\ y_n = x_n \end{cases}$$

ta được phép đổi toạ độ với ma trận chuyển từ cơ sở xuất phát sang cơ sở mới là

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Trong cơ sở mới phương trình của dạng toàn phương là

$$\omega(y) = a_{11}y_1^2 + g_1$$

với g_1 không phụ thuộc y_1.

Nếu $a_{11} = 0$ nhưng tồn tại $a_{1j} \neq 0$, $j > 1$, chẳng hạn $a_{12} \neq 0$ thì ta sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \dots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

với ma trận chuyển cơ sở xuất phát sang cơ sở mới là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Chú ý rằng ma trận này không suy biến.

Trong cơ sở mới, phương trình của dạng toàn phương là

$$\omega(y) = a_{12}y_1^2 + 2a_{12}y_2^2 + 2a_{13}(y_1 + y_2)y_3 + \dots,$$

có dạng như đã xét ở trường hợp thứ nhất.

Sau khi đã sử dụng phép đổi cơ sở thứ nhất ta cũng tiến hành tương tự đối với dạng toàn phương g_1. Tiếp tục như vậy sau một số hữu hạn phép đổi cơ sở, ta sẽ tìm được một cơ sở trong đó ω có dạng chính tắc.

Ví dụ. a) Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

Giải. Ta có

$$\omega(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 9x_3^2$$

Sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \dfrac{5}{2}y_3 \\ x_2 = \qquad y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

dạng toàn phương sẽ có dạng chính tắc là

$$\omega(y) = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2$$

b) Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc

$$\omega(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Giải. Sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\quad y_3 \end{cases}$$

Ta được

$$\omega(y) = y_1^2 = y_2^2\ (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3$$

$$= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

Sử dụng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \qquad + y_3 \\ z_2 = \qquad y_2 \\ z_3 = \qquad\quad y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \qquad - z_3 \\ y_2 = \qquad z_2 \\ y_3 = \qquad\quad z_3 \end{cases}$$

Ta có

$$\omega(z) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,$$

với phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = \qquad\qquad z_3 \end{cases}$$

3. Phương pháp Jacobi

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n. Ta gọi các định thức

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = |A|$$

là các định thức con chính của A.

Giả sử $\omega(x)$ là một dạng toàn phương sinh bởi dạng song tuyến tính đối xứng $f(x, y)$ có ma trận trong cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là A.

Định lí 3.1. *Nếu tất cả các định thức con chính của A khác 0 thì tồn tại một cơ sở để trong cơ sở đó phương trình của dạng toàn phương là*

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2.$$

Chứng minh. Với mọi j = 1, 2,..., n xét hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} b_{1j} f(e_1, e_1) + b_{2j} f(e_1, e_2) + \ldots + b_{jj} f(e_1, e_j) = 0 \\ b_{1j} f(e_2, e_1) + b_{2j} f(e_2, e_2) + \ldots + b_{jj} f(e_2, e_j) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1j} f(e_j, e_1) + b_{2j} f(e_j, e_2) + \ldots + b_{jj} f(e_j, e_j) = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

chỉ có vế phải của phương trình cuối cùng là khác 0. Bởi vì $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ nên định thức ma trận hệ số của (1) là $\Delta_j \neq 0$. Theo định lí Cramer hệ này có nghiệm duy nhất, ta cũng kí hiệu là $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{jj})$, đặc biệt

$$b_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} \neq 0.$$

Đặt $e'_1 = b_{11} e_1$

$e'_2 = b_{12} e_1 + b_{22} e_2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$e'_n = b_{1n} e_1 + b_{2n} e_2 + \ldots + b_{nn} e_n$

Từ hệ thức $\lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_n e'_n = 0$ ta có

$$\begin{cases} b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \ldots + b_{1n}\lambda_n = 0 \\ \qquad\qquad b_{22}\lambda_2 + \ldots + b_{2n}\lambda_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_{nn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

Vì mọi $b_{jj} \neq 0$ nên từ hệ này suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, tức là hệ $e'_1, e'_2, ... e'_n$ độc lập tuyến tính. Vậy ta có $E' = \{e'_1, e'_2, ... e'_n\}$ là một cơ sở của X với ma trận chuyển từ E sang E' là

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng trong cơ sở E' dạng toàn phương có phương trình như mong muốn, tức là cần chỉ ra

$$f(e'_j, e'_j) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} & \text{nếu } i = j \text{ (kí hiệu } \Delta_0 = 1) \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Thật vậy với $i \leq j$ ta có

$$f(e'_j, e_i) = f(e_i, e'_j) = f(e_i, b_{1j}e_1 + ... + b_{jj}e_j) =$$

$$= b_{1j}f(e_i, e_1) + ... + b_{jj}f(e_i, e_j)$$

Theo hệ (1) ta có

$$f(e'_j, e_i) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i < j \\ 1 \text{ nếu } i = j \end{cases} \qquad (3)$$

Từ (3) ta có

$$f(e'_j, e'_j) = f(e'_j, b_{1j}e_1 + ... + b_{jj}e_j) =$$

$$= b_{1j}f(e'_j, e_1) + ... + b_{j-1j}f(e'_j, e_{j-1}) + b_{jj}f(e'_j, e_j) =$$

$$= b_{jj} = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}.$$

Với $i < j$ thì

$$f(e'_j, e'_i) = f(e'_j, b_{1i}e_1 + ... + b_{ii}e_i) =$$

$$= b_{1i}f(e'_j, e_1) + ... + b_{ii}f(e'_j, e_i) = 0.$$

Bởi vì $f(e'_j, e'_i) = f(e'_i, e'_j)$ nên điều cuối cùng này cho ta $f(e'_i, e'_j) = 0$ với mọi $i \neq j$. □

Chú ý rằng để tìm ma trận chuyển cơ sở (2) ta cần giải n hệ phương trình (1).

Ví dụ. Đưa dạng toàn phương có phương trình

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_3^2$$

về dạng chính tắc.

Giải. Ma trận của dạng toàn phương là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -2$ nên tồn tại một cơ sở để phương trình dạng toàn phương có dạng

$$\omega(x) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2$$

Để tìm ma trận chuyển cơ sở ta xét hệ phương trình (5) :

Với $j = 1$: $b_{11} = 1$

Với $j = 2$: $\begin{cases} b_{12} + b_{22} = 0 \\ b_{12} - b_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{12} = \dfrac{1}{2} \\ b_{22} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Với $j = 3$: $\begin{cases} b_{13} + b_{23} = 0 \\ b_{13} - b_{23} = 1 \\ b_{33} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_{13} = 0 \\ b_{23} = 0 \\ b_{33} = 1 \end{cases}$

Vậy ma trận chuyển cơ sở là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tức là nếu cơ sở xuất phát là e_1, e_2, e_3 thì cơ sở để dạng toàn phương có dạng nói trên là

$$\begin{cases} e_1' = e_1 \\ e_2' = \dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2 \\ e_3' = \qquad\qquad e_3 \end{cases}$$

4. Luật quán tính

Cho dạng toàn phương thực có dạng chính tắc

$$\omega(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_r x_r^2,\ \lambda_i \neq 0.$$

Thực hiện phép đổi biến

$$x_i' = \sqrt{|\lambda_i|}x_i \text{ nếu } i \le r,\ x_i' = x_i \text{ nếu } i > r,$$

dạng toàn phương trở thành

$$\omega(x') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \dots + \varepsilon_r x_r'^2$$

trong đó $\varepsilon_i = \pm 1$. Ta gọi dạng toàn phương dưới dạng này là dạng chuẩn tắc.

Định lí 3.2. (Luật quán tính). *Số $\varepsilon_i = 1$ và $\varepsilon_i = -1$ của một dạng toàn phương thực dưới dạng chuẩn tắc là những bất biến (tức là không phụ thuộc vào cơ sở mà ta chọn).*

Chứng minh.

Giả sử $\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ và

$$\omega = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

$$\omega = z_1^2 + \dots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \dots - z_r^2 \qquad (4)$$

là hai cách đưa ω về dạng chuẩn tắc. Khi đó tồn tại hai ma trận $S = (s_{ij}), T = (t_{ij})$ vuông cấp n, không suy biến sao cho

$$\begin{cases} y_1 = s_{11}x_1 + \dots + s_{1n}x_n \\ y_2 = s_{21}x_1 + \dots - s_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = s_{n1}x_1 + \dots - s_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} z_1 = t_{11}x_1 + \dots + t_{1n}x_n \\ z_2 = t_{21}x_1 + \dots + t_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = t_{n1}x_1 + \dots + t_{nn}x_n. \end{cases}$$

Giả sử rằng $p < q$. Khi đó xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất của các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \dots\dots \\ y_p = 0 \\ z_{q+1} = 0 \\ \dots\dots \\ z_n = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Vì hệ này có số phương trình ít hơn số ẩn nên có một nghiệm không tầm thường $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Thay C vào (4) và chú ý đến (5) ta có

$$\begin{cases} \omega(C) = -y_{p+1}^2 - ... - y_r^2 \le 0 \\ \omega(C) = z_1^2 + ... + z_q^2 \ge 0. \end{cases}$$

Vì vậy $\omega(C) = z_1^2 + ... + z_q^2 = 0$, tức là $z_1 = 0, ..., z_q = 0$.

Kết hợp với (5) suy ra hệ

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ z_n = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm không tầm thường là C. Đây là điều mâu thuẫn, vì ma trận của hệ là T không suy biến. Vậy $p \ge q$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $q \ge p$, do đó $p = q$. □

5. Dạng toàn phương xác định dương, xác định âm

Dạng toàn phương thực $\omega(x)$ được gọi là xác định dương nếu $\omega(x) > 0$ với mọi $x \ne 0$ và gọi là xác định âm nếu $\omega(x) < 0$ với mọi $x \ne 0$.

Định lí 3.3. *Một dạng toàn phương $\omega(x)$ là xác định dương nếu và chỉ nếu trong cơ sở chính tắc, phương trình của $\omega(x)$ có dạng*

$$\omega(x) = b_1x_1^2 + b_2x_2^3 + ... + b_nx_n^2,$$

trong đó $b_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Chứng minh. Nếu $\omega(x)$ có dạng trên thì hiển nhiên $\omega(x) > 0$ với mọi $x \ne 0$, tức là $\omega(x)$ xác định dương. Ngược lại, nếu một dạng toàn phương đưa về dạng chính tắc không có dạng trên thì hoặc tồn tại $b_i = 0$ hoặc $b_i < 0$. Chẳng hạn $b_n \le 0$. Ta chọn x có toạ độ trong cơ sở chính tắc đó là (0, ..., 0, 1) thì $x \ne 0$ nhưng $\omega(x) \le 0$. Vậy $\omega(x)$ không xác định dương. □

Tương tự ta có :

Định lí 3.4. *Một dạng toàn phương $\omega(x)$ là xác định âm nếu và chỉ nếu trong cơ sở chính tắc phương trình của $\omega(x)$ có dạng*

$$\omega(x) = b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + ... + b_nx_n^2,$$

trong đó $b_i < 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Định lí 3.5. (Tiêu chuẩn Sylvester). *Dạng toàn phương*

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

xác định dương nếu và chỉ nếu tất cả các định thức con chính Δ_m *của ma trận* $A = (a_{ij})$ *đều dương ; xác định âm nếu và chỉ nếu* $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n\Delta_n > 0$.

Chứng minh. Nếu mọi $\Delta_m \neq 0$ thì theo định lí 3.1 sẽ có một cơ sở để trong cơ sở đó

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_1}x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n^2$$

Do đó, nếu mọi $\Delta_m > 0$ thì $\omega(x)$ xác định dương theo định lí 3.3 ; nếu $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n\Delta_n > 0$ thì $\omega(x)$ xác định âm theo định lí 3.4.

Ngược lại, nếu $\omega(x)$ xác định dương (hoặc âm), xét định thức con chính cấp m

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

Gọi X_m là không gian vectơ con của X sinh bởi các vectơ cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Khi đó $\omega_m(x) = \omega(x), x \in X_m$ cũng là một dạng toàn phương xác định dương (hoặc âm). Xét cơ sở mới trong X_m để $\omega_m(x)$ có dạng chính tắc, ma trận của $\omega_m(x)$ trong cơ sở này có dạng

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_m \end{pmatrix}$$

Nếu gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở $(e_1, \ldots, e_m)$ sang cơ sở chính tắc thì theo (3) §1 ta có

$$b_1b_2\ldots b_m = \Delta_m|P|^2.$$

Do đó nếu $\omega_m(x)$ xác định dương thì mọi $b_j > 0$ nên $\Delta_m > 0$. Nếu $\omega_m(x)$ xác định bởi âm thì mọi $b_i < 0$, nên $\Delta_m > 0$ nếu m chẵn, $\Delta_m < 0$ nếu m lẻ. □

§4. KHÔNG GIAN EUCLIDE

1. Định nghĩa.

Cho X là một không gian vectơ thực. Ta gọi một tích vô hướng trên X là một quy tắc đặt hai vectơ bất kì x, y $\in$ X tương ứng với một số thực $(x|y)$ thoả mãn các điều kiện sau đây với mọi x, y, z $\in$ X, $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $(x|y) = (y|x)$;

2) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$;

3) $(x + y\ |z) = (x|z) + (y|z)$;

4) $(x|x) \geq 0$, $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Không gian vectơ thực X cùng một tích vô hướng trên X gọi là một không gian Euclide.

Chú ý rằng, nếu đặt $f(x, y) = (x|y)$ thì f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên X. Do đó có thể định nghĩa tích vô hướng là một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương, tức là thoả mãn 4).

Ví dụ.

a) Với mọi $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$,

$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ thuộc $\mathbb{R}^n$, đặt

$$(x\,|\,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

ta được một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ là một không gian Euclide với tích vô hướng này.

b) Với các hàm f, g liên tục trên đoạn [a, b] đặt

$$(f\,|\,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

ta được một tích vô hướng trên không gian vectơ C[a,b] các hàm liên tục trên đoạn [a,b]. Với tích vô hướng ấy C[a,b] là một không gian Euclide.

2. Độ dài vectơ, góc giữa các vectơ

Cho không gian Euclide X và vectơ x $\in$ X. Ta gọi độ dài hay chuẩn của vectơ x (sinh bởi tích vô hướng trên X) là số

$$|x| = \sqrt{(x|x)}.$$

Định lí 4.1. (Bất đẳng thức Cauchy – Buniakovski). *Với mọi* x, y *thuộc không gian Euclide* X *ta có*

$$(x \mid y)^2 \le |x|^2 |y|^2 .$$

Dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu x và y phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Nếu y = 0 thì kết quả là hiển nhiên.

Giả sử $y \neq 0$. Xét vectơ $x - ty$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$(x - ty \mid x - ty) = t^2(y \mid y) - 2t(x \mid y) + (x \mid x) \ge 0$$

với mọi t, do đó theo định lí về dấu tam thức bậc hai

$$\Delta' = (x \mid y)^2 - (x \mid x)\ (y,\ y) \le 0$$

Vậy có bất đẳng thức cần chứng minh.

Theo tính chất (4), dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu y = 0 hoặc tồn tại t để $x - ty = 0$, tức là nếu và chỉ nếu x và y phụ thuộc tuyến tính. □

Định lí 4.2. *Với mọi vectơ* x, y *thuộc không gian Euclide* X *ta có*

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

Chứng minh. Ta có

$$|x + y|^2 = (x + y \mid x + y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) =$$

$$= |x|^2 + 2(x \mid y) + |y|^2 .$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Buniakovski

$$(x \mid y) \le |x||y|$$

do đó

$$|x + y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2, \text{ hay}$$

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$ □

Theo bất đẳng thức Cauchy – Buniakovski ta có

$$\frac{|(x \mid y)|}{|x||y|} \le 1$$

với mọi x, y khác 0. Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$ thì ta định nghĩa góc giữa x và y là

$$\varphi = \arccos \frac{(x|y)}{|x||y|}$$

tức là

$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{|x||y|} \text{ và } 0 \le \varphi \le \pi.$$

Nếu $X = \mathbb{R}^2$ hoặc $X = \mathbb{R}^3$ thì góc giữa các vectơ chính là góc ta đã biết trong hình học giải tích.

Hai vectơ được gọi là trực giao với nhau nếu tích vô hướng của chúng bằng 0. Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$ thì $(x|y) = 0$ khi và chỉ khi góc giữa x và y bằng $\frac{\pi}{2}$. Do đó khi x và y trực giao ta cũng kí hiệu là $x \perp y$.

3. Cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn

Cho một không gian Euclide X n chiều. Một hệ gồm n vectơ khác 0 của X được gọi là một cơ sở trực giao của X nếu chúng đôi một trực giao.

Một cơ sở trực giao gồm các vectơ có môđun bằng 1 gọi là cơ sở trực chuẩn. Như vậy, $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn nếu

$$(e_i \mid e_j) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$$

Nếu $\{e_1,...,e_n\}$ là một cơ sở trực giao của X thì $\left\{\frac{e_1}{|e_1|},...,\frac{e_n}{|e_n|}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn của X, gọi là trực chuẩn hoá cơ sở trực giao đã cho.

Mọi cơ sở trực giao của không gian Euclide X đều là cơ sở không gian vectơ X. Thật vậy, ta chỉ cần chỉ ra một cơ sở trực giao $\{e_1,...,e_n\}$ là độc lập tuyến tính. Xét hệ thức

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0.$$

Với mọi j ta có

$$(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n | e_j) = (0|e_j) = 0,$$

mặt khác ta cũng có

$$(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n | e_j) = \lambda_j (e_j | e_j),$$

do đó $\lambda_j |e_j|^2 = 0$. Vì $|e_j| > 0$ nên $\lambda_j = 0$ với $j = 1, ..., n$, tức là $e_1,...,e_n$ độc lập tuyến tính.

Giả sử $E = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của X với mỗi $x \in X$, giả sử

$$x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$$

Khi đó $(x|e_j) = \lambda_j(e_j, e_j) = \lambda_j |e_j|^2 = \lambda_j$ với j = 1, ..., n.

Vì vậy ta có

$$x/E = ((x|e_1), (x|e_2), ..., (x|e_n)).$$

Từ một cơ sở $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ bất kì của X có thể xây dựng được một cơ sở trực giao $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ có tính chất $< e_1, ..., e_j > = < f_1, ..., f_j >$ với j = 1,..., n. Phương pháp xây dựng được cho trong định lí sau đây gọi là phương pháp Gram – Schmidt. Một cách tự nhiên, ta có các khái niệm hệ trực giao, hệ trực chuẩn trong một không gian Euclide X. Khi đó phương pháp có thể áp dụng cho một hệ vectơ độc lập tuyến tính bất kì trong X.

Định lí 4.3. *Cho* $\{f_1, ..., f_n\}$ *là cơ sở trong không gian Euclide X. Khi đó* $\{e_1, ..., e_n\}$ *xác định bởi*

$$e_1 = f_1,$$

$$e_i = f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(f_i|e_k)}{|e_k|^2} e_k, \quad i = 2, ..., n$$

là một cơ sở trực giao của X.

Chứng minh. Vì $f_1, ..., f_n$ độc lập tuyến tính nên dễ thấy $e_i \neq 0$ với mọi i = 1, ..., n. Ta có

$$(e_1 | e_2) = \left(f_1 | f_2 - \frac{(f_2|e_1)}{|e_1|^2} e_1\right) = (f_1|f_2) - \frac{(f_2|e_1)}{|e_1|^2}(f_1|e_1)$$

Bởi vì $(f_1|e_1) = (e_1|e_1) = |e_1|^2$, $(f_2|e_1) = (f_1|f_2)$ nên

$$(e_1|e_2) = 0.$$

Giả sử i > 2 và các vectơ $e_1, ..., e_{i-1}$ tạo thành một hệ trực giao, ta sẽ chứng minh $e_1, ..., e_{i-1}, e_i$ cũng là một hệ trực giao. Với mỗi p, $1 \leq p \leq i - 1$.

$$(e_i|e_p) = \left(f_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(f_i|e_k)}{|e_k|^2} e_k \Big| e_p\right) =$$

$$= (f_i \mid e_p) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(f_i | e_k)}{|e_k|^2} (e_k | e_p) =$$

$$= (f_i \mid e_p) - \frac{(f_i | e_p)}{|e_p|^2} (e_p | e_p) = 0.$$

Vậy hệ $e_1, ..., e_i$ trực giao. Từ đó theo quy nạp ta có $e_1, ..., e_n$ trực giao. □

Ví dụ.

a) Trong $\mathbb{R}^3$ trực giao hoá hệ

$$f_1 = (0, 1, 2),\ f_2 = (1, 1, 0),\ f_3 = (2, 0, 1).$$

Giải. Ta có

$$e_1 = f_1 = (0,1,2);$$

$$e_2 = f_2 - \frac{(f_2 | e_1)}{|e_1|^2} e_1 = (1,2,0) - \frac{2}{5}(0,1,2) = \left(1, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right);$$

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3 | e_1)}{|e_1|^2} e_1 - \frac{(f_3 | e_2)}{|e_2|^2} e_2 =$$

$$= (2,0,1) - \frac{2}{5}(0,1,2) - \frac{6}{21}\left(1, \frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

b) Trong C[−1, 1) trực giao hoá hệ

$$f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^2.$$

Giải. Ta có

$$e_1 = 1;$$

$$e_2 = t - \frac{(t|1)}{|1|^2}.\ 1 = t - \frac{\int_{-1}^{1} t\,dt}{\int_{-1}^{1} dt} = t;$$

$$e_3 = t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2 dt}{\int_{-1}^{1} dt}.1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^3 dt}{\int_{-1}^{1} dt} t = t^2 - \frac{1}{3}.$$

§5. ĐƯA MA TRẬN ĐỐI XỨNG VỀ DẠNG CHÉO

1. Tính chất của ma trận đối xứng

Cho A là ma trận thực đối xứng, cấp n. Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đặt

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right)$$

ta được một phép biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc A.

Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$(Ax|y) = (x|Ay) \qquad (1)$$

Thật vậy

$$(Ax|y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i \right) = (x|Ay).$$

Nếu v_1 và v_2 là hai vectơ riêng ứng với hai trị riêng $\lambda_1 \neq \lambda_2$ của A thì

$$(v_1|v_2) = 0 \qquad (2)$$

Thật vậy, ta có $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Từ đó

$$(Av_1|v_2) = (\lambda_1 v_1|v_2) = \lambda_1 (v_1|v_2)$$

$$(v_1|Av_2) = (v_1|\lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1|v_2)$$

Theo tính chất (1), $(Av_1|v_2) = (v_1|Av_2)$, do đó

$$\lambda_1 (v_1|v_2) = \lambda_2 (v_1|v_2) \text{ hay } (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1|v_2) = 0.$$

Vì $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ nên $(v_1|v_2) = 0$.

Định lí 5.1. *Mọi nghiệm của phương trình đặc trưng của một ma trận thực đối xứng A đều là thực.*

Chứng minh. Giả sử a + bi là một nghiệm của phương trình $|A - \lambda I| = 0$. Khi đó

$$|A - (a + bi)I| = 0 \text{ hay } |A - aI - ibI| = 0.$$

Tương tự như hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số thực, hệ thuần nhất có ma trận hệ số A – aI – ibI có một nghiệm không tầm thường

$$u + iv = (u_1 + iv_1,...,u_n + iv_n) \neq 0.$$

Bởi vì

$$(A - aI - ibI)(u + iv) = 0$$

nên tách riêng phần thực, phần ảo ta được

$$(A - aI)u + bv = 0, (A - aI)v - bu = 0.$$

Từ đó ta có

$$((A - aI)u|v) + b(v|v) = 0 \;;$$

$$((A - aI)v|u) - b(u|u) = 0.$$

Vì A đối xứng nên A – aI đối xứng, từ đó theo (1) ta có $((A - aI)u|v) = (u|(A - aI)v) = ((A - aI)v|u)$. Trừ vế với vế hai đẳng thức trên ta có

$$b(|u|^2 + |v|^2) = 0.$$

Đẳng thức này cho ta b = 0, vì $|u|^2 + |v|^2 \neq 0$. □

Bởi vì $|A - \lambda I| = 0$ là một phương trình đại số bậc n nên theo định lí 5.1, mọi ma trận đối xứng thực cấp n có đúng n trị riêng kể theo số lần bội.

2. Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng

Ma trận vuông P được gọi là trực giao nếu

$$PP^T = I$$

Theo tính chất của ma trận nghịch đảo, nếu P trực giao thì P khả nghịch và

$$P^{-1} = P^T.$$

Vì vậy ta cũng có

$$P^TP = I.$$

Từ tính chất này dễ dàng thấy rằng P trực giao thì P^T trực giao và P, Q là các ma trận vuông cấp n trực giao thì PQ cũng trực giao.

Gọi $P_1,...,P_n$ là các vectơ dòng của P, từ định nghĩa phép nhân ma trận dễ dàng thấy rằng :

Ma trận P trực giao nếu và chỉ nếu hệ $\{P_1,...,P_n\}$ trực chuẩn. (3)

Bằng cách xét P^T ta thấy tính chất (3) cũng đúng với hệ các vectơ cột.

Định lí 5.2. *Mọi ma trận thực, đối xứng A đều tồn tại ma trận trực giao P sao cho* $P^TAP = P^{-1}AP$ *là ma trận chéo.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấp của A.

Với n = 1 kết quả là hiển nhiên.

Giả sử mọi ma trận đối xứng cấp n − 1, n ≥ 2 định lí đúng. Xét ma trận $A = (a_{ij})$ đối xứng, cấp n. Theo định lí 5.1, A có một trị riêng λ_1. Chọn vectơ riêng e_1 ứng với trị riêng λ_1 có $|e_1| = 1$. Khi đó

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1.$$

Bổ sung vào e_1 các vectơ $v_2, ..., v_n$ để được một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, sau đó trực giao hoá và trực chuẩn hoá, ta được một cơ sở trực chuẩn $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ của $\mathbb{R}^n$.

Gọi B là ma trận của phép biến đổi tuyến tính A trong cơ sở E. Khi đó

$$B = S^TAS.$$

Với S là ma trận có các cột là $e_1, ..., e_n$. Bởi vì ma trận S trực giao nên

$$B^T = (S^TAS)^T = S^TAS^{TT} = S^TAS = B$$

nghĩa là B đối xứng. Do $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ nên cột thứ nhất của B là $\lambda_1, 0, ..., 0$. Vì B đối xứng nên dòng thứ nhất của B cũng như vậy. Từ đó

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & ... & \lambda_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & \lambda_{n2} & ... & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

với $C = \begin{pmatrix} \lambda_{22} & ... & \lambda_{2n} \\ ... & ... & ... \\ \lambda_{n2} & ... & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng cấp n − 1. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại ma trận trực giao cấp n − 1

$$P_o = \begin{pmatrix} p_{22} & ... & p_{2n} \\ ... & ... & ... \\ p_{n2} & ... & p_{nn} \end{pmatrix}$$

sao cho

$$P_o^TCP_o = \begin{pmatrix} \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

là một ma trận chéo. Đặt

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

dễ dàng thấy P_1 trực giao và

$$P_1^T B P_1 = D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vì $B = S^T AS$ nên

$$P_1^T S^T A S P_1 = D_\lambda$$

Đặt $P = SP_1$. Vì S, P_1 trực giao nên P trực giao và

$$P^T AP = D_\lambda. \qquad \square$$

Định lí 5.3. *Cho* A *là ma trận thực đối xứng, cấp* n. *Khi đó trong* $\mathbb{R}^n$ *tồn tại một cơ sở trực chuẩn gồm những vectơ riêng của* A.

Chứng minh. Theo định lí 5.2

$$AP = PD_\lambda$$

trong đó P là ma trận trực giao, D_λ là ma trận chéo. Gọi $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ là hệ các vectơ cột của P. Khi đó E là cơ sở trực chuẩn và $Ae_i = \lambda_i e_i$ với i = 1,..., n. Vậy các vectơ thuộc E là vectơ riêng của A. $\square$

Bây giờ ta chỉ ra phương pháp xây dựng cơ sở nói trong định lí 5.3 và cũng là phương pháp tìm ma trận P nói trong định lí 5.2

Cho ma trận đối xứng A. Vì A chéo hoá được nên mỗi trị riêng bội m của A có đúng m vectơ riêng độc lập tuyến tính. Giả sử λ_o là một trị riêng bội m, chọn m vectơ riêng độc lập ứng với λ_0 và sau đó trực chuẩn hoá hệ m vectơ này ta được một hệ trực chuẩn gồm m vectơ. Hiển nhiên m vectơ này cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng λ_0. Tiến hành như vậy đối với tất cả các trị riêng ta được hệ n vectơ $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Từ phương pháp xây dựng và tính chất (2) ta có ngay E là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Gọi P là ma trận có các vectơ của E là các cột thì P là trực giao và

$$P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

trong đó λ_i là giá trị riêng tương ứng vectơ riêng e_i.

Ví dụ. Chéo hoá trực giao ma trận đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Vậy A có các trị riêng $\lambda = 5$ (đơn) và $\lambda = -1$ (kép).

Với $\lambda = 5$, ta có hệ phương trình tìm vectơ riêng là

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c \\ x_3 = c \end{cases}$$

Ta được một vectơ riêng độc lập là $v_1 = (1,1,1)$, trực chuẩn hoá ta được

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Với $\lambda = -1$, ta có phương trình tìm vectơ riêng là

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -(c_1 + c_2) \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}$$

Ta được hai vectơ riêng độc lập là $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$. Trực giao hoá ta được $f_2 = (-1, 1, 0)$

$$f_3 = (-1,0,1), -\frac{1}{2}(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Trực chuẩn hoá ta được $e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Từ đó, với

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

ta có

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao

Cho dạng toàn phương $\omega(x)$ trên $\mathbb{R}^n$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là ma trận đối xứng cấp n, $A = (a_{ij})$.

Gọi $E = \{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ gồm các vectơ riêng của A. P là ma trận có các cột là $e_1, ..., e_n$. Khi đó P là ma trận trực giao và là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở E.

Trong cơ sở E ma trận của dạng toàn phương $\omega(x)$ là

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

trong đó λ_i là trị riêng ứng với e_i. Vì vậy trong cơ sở này phương trình của $\omega(x)$ có dạng chính tắc

$$\omega(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Ví dụ. a) Đưa dạng toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_1$$

về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Giải. Ma trận của dạng toàn phương là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Giá trị riêng của A là $\lambda = 0$ (kép) và $\lambda = 6$.

Với $\lambda = 0$, hệ phương trình tìm vectơ riêng là

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_2 - 2c_1 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_1 \end{cases}$$

Ta được hai vectơ riêng độc lập là

$$v_1 = (-1, 1, 0), \ v_2 = (-2, 0, 1).$$

Trực chuẩn hoá ta được $e_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;

$$e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Với $\lambda = 6$, hệ phương trình tìm vectơ riêng là

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c \\ x_3 = 2c \end{cases}$$

Ta được một vectơ riêng độc lập là $v_3 = (1, 1, 2)$, trực chuẩn hoá ta được $e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Từ đó $\omega(y) = 6y_3^2$

với ma trận của phép biến đổi là ma trận trực giao

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_3 \end{cases}$$

b) Tìm dạng của đường cong bậc hai

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1.$$

Giải. Ma trận của dạng toàn phương

$$\omega(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng của A

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right.$$

Với $\lambda = 1$ ta được vectơ riêng $v_1 = (1,1)$ chuẩn hoá ta được $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Với $\lambda = 3$ ta được vectơ riêng $v_2 = (1,-1)$, chuẩn hoá ta được $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Trong cơ sở (e_1, e_2), phương trình của ω là

$$\omega(\xi,\eta) = \xi^2 + 3\eta^2$$

Từ đó, trong cơ sở trực chuẩn (e_1, e_2) phương trình của đường cong đang xét là

$$\xi^2 + 3\eta^2 = 1.$$

Vậy đường cong là một đường elip có các bán trục là 1 và $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập

VI.1. Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^2$, đặt

$$f(x,y) = 3x_1y_2 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2.$$

a) Chứng tỏ f là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm ma trận của f trong cơ sở {(1, 1), (1, 2)}.

VI.2. Trên $\mathbb{R}^3$ cho dạng song tuyến tính

$$f(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Tìm ma trận của f

a) Trong cơ sở chính tắc.

b) Trong cơ sở {(1, 1, 1), (1, 1, −1), (1, −1, −1)}.

VI.3. Chứng minh rằng dạng song tuyến tính khác 0 trên $\mathbb{K}^n$ được viết thành tích của hai dạng tuyến tính nếu và chỉ nếu hạng của nó bằng 1.

VI.4. Cho f(x, y) là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ n − chiều X, M là không gian vectơ con k − chiều của X, đặt

$$M' = \left\{ y \in X \,\middle|\, f(x, y) = 0 \text{ với mọi } x \in M \right\}.$$

Chứng minh rằng

a) M' là không gian vectơ con của X, dim M' ≥ n − k.

b) Nếu f(x, x) ≠ 0 với mọi x ∈ M, x ≠ 0 thì $X = M \oplus M'$.

VI.5. Cho dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ có ma trận trong cơ sở {(1,0,0), (−1,1,0), (0,−1,1)} là

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Tìm ma trận A của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm a để ma trận A có hai trị riêng.

c) Tìm dạng toàn phương tương ứng với f trong cơ sở chính tắc.

VI.6. Tìm dạng chuẩn tắc của các dạng toàn phương sau :

a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^3 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

d) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

VI.7. Tìm dạng chính tắc của các dạng toàn phương sau, chỉ rõ phép biến đổi để có dạng chính tắc đó.

a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$

b) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$

c) $x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$

d) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

VI.8. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc, chỉ rõ phép biến đổi.

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j$.

b) $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

VI.9. Tìm λ để các dạng toàn phương thực sau xác định dương.

a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$

c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$

d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

VI.10. Xét tính xác định của các dạng toàn phương sau.

a) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$

b) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

c) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$

d) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$.

VI.11. Tìm m để

$x.y = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + mx_2y_2$ là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

VI.12. Trực giao hóa theo phương pháp Gram-Schmidt.

a) Hệ {(1, 2, 3), (0, 2, 0), (0, 0, 3)} trong $\mathbb{R}^3$.

b) Hệ {(1, 2, 2, −1), (1, 1, −5, 3), (3, 2, 8, −7)} trong $\mathbb{R}^4$.

VI.13. Tìm góc giữa các vectơ.

a) $x = (1, 1, 2)$, $y = (2, -1, 1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) $x = (2, -1, 1, -2)$, $y = (3, 0, -1, 0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

VI.14. Trên $\mathbb{R}^3$ cho dạng song tuyến tính đối xứng

$$\eta\big((x_1, x_2),(y_1, y_2)\big) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Chứng minh $\mathbb{R}^3$ và η là một không gian Euclide. Trực chuẩn hóa cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ theo tích vô hướng η.

VI.15. Cho M là một tập con của không gian Euclide X. Ta gọi phần bù trực giao của M là

$$M^{\perp} = \{x \in X | x \perp y \text{ với mọi } y \in M\}.$$

Chứng minh $M^{\perp}$ là không gian vectơ con của X.

VI.16. Chứng minh $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ là không gian Euclide với tích vô hướng

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}(AB^T).$$

Trong không gian đó hãy tìm phần bù trực giao của không gian các ma trận chéo, không gian các ma trận đối xứng.

VI.17. Trong không gian Euclide $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức bậc $\le n$ với tích vô hướng.

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Chứng minh hệ các đa thức Legendre

$$P_0(t) = 1,\ P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left[(t^2 - 1)^k\right],\ k = 1,\dots,n$$

là một cơ sở trực giao.

VI.18. Kí hiệu $L^2[0,1]$ là không gian các hàm thực bình phương khả tích trên đoạn [0, 1] với tích vô hướng.

$$(f \mid g) = \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Chứng minh các hàm Rademacher

$$r_n(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^{n+1}\pi x)\,,\ \ n \in \mathbb{N}_0$$

lập thành một hệ trực chuẩn trong $L^2[0,1]$.

VI.19. Chéo hóa trực giao các ma trận đối xứng sau

a) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

VI. 20. Tìm phép biến đổi trực giao đưa các dạng toàn phương về dạng chính tắc.

a) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

c) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

d) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

VI.21. Tìm dạng của các đường bậc hai sau

a) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

b) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

c) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

Chương I

I.1. a) $\varnothing$ là phần tử nhỏ nhất, X là phần tử lớn nhất.

b) Không có phần tử nhỏ nhất, X là phần tử lớn nhất. Phần tử tối tiểu là $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}$.

c) $\varnothing$ là phần tử nhỏ nhất, không có phần tử lớn nhất. Phần tử tối đại là các tập con có 4 phần tử.

I.2. a) Mọi $x_1, x_2 \in X$

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ (do g đơn ánh)}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (do f đơn ánh)}$$

Vậy h đơn ánh.

b) $h(X) = f(f(X)) = g(Y)$ (do g toàn ánh)

$= Z$ (do g toàn ánh)

Vậy h toàn ánh.

c) Suy ra từ a) và b).

d) Mọi $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (do h đơn ánh)}$$

Vậy f đơn ánh.

e) Do h toàn ánh nên

$$h(X) = Z \Rightarrow g(f(X)) = Z$$

$$\Rightarrow g(Y) = Z \text{ (vì } f(X) \subset Y).$$

Vậy g toàn ánh.

I.3. a) Mọi $x \in X$, đặt $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Rightarrow (f^{-1})^{-1}(x) = y .$$

Vậy $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$ hay $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Mọi $z \in Z$, đặt $(g_0 f)^{-1}(z) = x$

$$\Rightarrow g_0 f(x) = g(f(x)) = z$$

$$\Rightarrow f(x) = g^{-1}(z)$$

$$\Rightarrow x = f^{-1}(g^{-1}(z) = f_0^{-1} g^{-1}(z).$$

Vậy $(g_0 f)^{-1}(z) = f_0^{-1} g^{-1}(z)$ với mọi $z \in Z$ hay

$$(g_0 f)^{-1} = f_0^{-1} g^{-1}.$$

I.4. Cho X là tập vô hạn. Chọn tùy ý $x_1 \in X$.

Giả sử đã chọn được $x_1, \ldots, x_n$, ta chọn

$$x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$$

(do X vô hạn nên chọn được x_{n+1}). Ta có

$$D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X \text{ và D là vô hạn đếm được.}$$

Từ đó $\omega = \text{Card}(D) \le \text{Card}(X)$.

I.5. Ánh xạ $f : \mathbb{N} \to \mathbf{Z}$, $f(1) = 0$, $f(2n) = n$, $f(2n+1) = -n$ là song ánh nên $\text{Card}(\mathbf{Z}) = \omega$.

Mọi $r \in \mathbb{Q}$ đều được viết dưới dạng $r = \dfrac{a}{b}$, trong đó $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$. Khi $a = 0$ ta chọn $b = 1$, khi $a \neq 0$ ta chọn sao cho $|a|$ và b nguyên tố cùng nhau. Ta có cách viết $r = \dfrac{a}{b}$ là duy nhất. Ánh xạ

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbf{Z}^2, \ f\left(\frac{a}{b}\right) = (a, b)$$

là đơn ánh. Do đó $\text{Card}(\mathbb{Q}) \le \text{Card}(\mathbf{Z}^2) = \omega$.

Theo bài tập 1.4, $\text{Card}(\mathbb{Q}) \ge \omega$ nên $\text{Card}(\mathbb{Q}) = \omega$.

I.6. Về ánh xạ $n \to \dfrac{1}{n}$ là đơn ánh từ $\mathbb{N}$ vào $[0,1]$ nên $\text{Card}(\mathbb{N}) \le \text{Card}([0,1])$.

Ta sẽ chứng minh không có một song ánh từ $\mathbb{N}$ lên $[0,1]$.

Thật vậy, giả sử có một song ánh $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta viết $\varphi(n)$ dưới dạng số thập phân vô hạn.

$$\varphi(n) = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots$$

Xét phần tử $y_0 \in [0,1]$, $y_0 = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ trong đó

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_{kk} \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } a_{kk} = 1 \end{cases}$$

Ta có $y_0 \neq \varphi(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Mâu thuẫn với φ toàn ánh.

I.7. $f : [0,1] \to [a,b]$, $f(x) = a + x(b - a)$ là song ánh nên $\text{Card}([a,b]) = c$;

$$g : (a,b) \to \mathbb{R}, \ g(x) = \frac{\frac{a+b}{2} - x}{x - a(x-b)} \text{ là song ánh nên}$$

$\text{Card}((a,b)) = \text{Card}(\mathbb{R})$. Vì $(a,b) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$

nên $\text{Card}((a,b)) = \text{Card}(\mathbb{R}) = \text{Card}([a,b]) = c$.

I.8. Ánh xạ $f : X \to \mathcal{P}(X)$, $f(a) = \{a\}$ là đơn ánh nên $\text{Card}(X) \le \text{Card}(\mathcal{P}(X))$. Ta sẽ chứng minh không có một song ánh $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$. Thật vậy nếu φ là song ánh thì đặt $S = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$.

Chọn $a \in X$ sao cho $\varphi(a) = S$. Khi đó nếu $a \in S$ thì mâu thuẫn vì $a \notin \varphi(a) = S$; nếu $a \notin S$ thì ta cũng gặp mâu thuẫn vì $a \in \varphi(a) = S$.

Vậy không tồn tại song ánh $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$.

I.9. a) $\frac{7}{5} + \frac{6}{5}i$;

b) $\frac{1+i}{1-i} = i$, $i^{10} = -1$.

c) $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $\left(-\sqrt{3}+i\right)^9 = 2^9.e^{i\frac{15\pi}{2}} = -512i$.

d) $\frac{1}{64}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

I.10. Ta có $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Theo công thức Moivre $i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$. Từ đó

$i^{2k} = (-1)^k$, $i^{2k+1} = (-1)^k i$.

I.11. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{12}$;

b) $8\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$;

c) $4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}$;

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{19\pi}{12}$.

I.12. a) $\left\{-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

b) $\{\pm 1, \pm i\}$.

c) $r = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ áp dụng công thức.

d) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, áp dụng công thức.

I.13. Đặt $(x+yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.

Từ đó x^2 và $-y^2$ là nghiệm dương và nghiệm âm của phương trình $t^2 - at^2 - \frac{b^2}{4} = 0$. Vậy

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \end{cases},$$

x và y chọn cùng dấu nếu $b > 0$, trái dấu nếu $b < 0$.

I.14. a) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $2 - i, -2 + i$. c) $-2 \pm 3i$.

I.15. Vì $\alpha_j^n = z \Leftrightarrow \left(\bar{\alpha}_j\right)^n = \bar{z}$ nên ta có kết quả.

I.16. Đặt $\operatorname{Ln}z = u + iv$, ta có

$$e^u e^{iv} = r e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = r \\ v = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \varphi + k2\pi \end{cases}.$$

Vậy $\operatorname{Ln}z = \{\ln r + i(\varphi + k2\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$.

I.17. a) $e^z = 2 \Leftrightarrow z \in \operatorname{Ln}2 = \{\ln 2 + ik2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\cos z = 2 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$

$$\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow iz \in \operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{k2\pi + i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) $z \in \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi + i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $z \in \{-\ln 2 + i(\pi + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$.

Chương II

II.1. a) $\begin{pmatrix}-12 & 24\\ -60 & 12\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-15 & 4\\ -5 & -2\\ 20 & -14\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}-4 & 4 & -4\\ -11 & 2 & 16\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}5 & -4\\ -10 & 10\end{pmatrix}$.

II.2. a) $\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ \frac{7}{2} & 0 & -2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ -\frac{8}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{11}{9}\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}\frac{20}{9} & \frac{14}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{44}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{11}{9}\end{pmatrix}$; d) Vô nghiệm.

II.3. a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ nếu n chẵn ; $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ nếu n lẻ. b) $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$.

II.4. a) Đặt $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix}a^2+bc & (a+d)b\\ (a+d)c & d^2+bc\end{pmatrix}$.

Do đó $A^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}a = -d\\ a^2 + bc = 0\end{cases}$.

b) $A = \pm I$ hoặc $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$ trong đó $a^2 + bc = 1$.

II.5. Chọn $B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, suy ra A có dạng $A = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$

Chọn $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, suy ra a = d. Vậy A có dạng A = aI. Dễ thấy tất cả ma trận dạng này đều thỏa mãn bài toán.

II.6. Giả sử $A^r = 0$, $B^r = 0$.

Vì $(AB)^r = A^rB^r = 0.B^r = 0$ nên AB lũy linh.

Do AB = BA nên dễ thấy

$$(A+B)^{r+s-1} = \sum_{k=0}^{r+s-1} C_{r+s-1}^{k} A^{r+s-1-k}B^k.$$

Do $(r + s - 1 + k) + k = r + s - 1$ nên hoặc $k \geq s$ hoặc

$r + s - 1 + k \geq r$.

Suy ra mỗi số hạng đều bằng 0 nên $(A+B)^{r+s-1} = 0$.

II.7. a) $\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A)_{ii} + \sum_{i=1}^{n}(B)_{ii}$

$= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

b) $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(B)_{ji}(A)_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj}$

$= \operatorname{tr}(BA)$

c) Theo b), $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, trong khi đó $\operatorname{tr}(I) = n$.

Do đó $AB - BA \neq I$.

II.8. a) $4ab$; b) $-2b^3$; c) 1 ; d) $\cos(\alpha + \beta)$; e) $\sin(\alpha - \beta)$; f) 0.

II.9. a) 0 ; b) -3 ; c) $3i\sqrt{3}$.

II.10. a) 0 ; b) 0 ;
c) $(b - a)(c - a)(c - b)$; d) $(ab + ac + bc)(b - a)(c - a)(c - b)$.

II.11. a) 150 ; b) $9\sqrt{10}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$;
c) $-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; d) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d$.

II.12. a) $n!$ (cộng dòng 1 vào các dòng khác)

b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$ (dòng 1 nhân (-1) cộng vào các dòng khác).

c) Khai triển theo dòng 1 : $D_n = 3D_{n-1} + 4D_{n-2}$.

Từ đó $D_n = \frac{1}{5}\left(4^{n+1} + (-1)^n\right)$. Có thể sử dụng bài tập II.18.

d) $D_n = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$.

II.13. a) $\left[x + (n-1)a\right](x - a)^{n-1}$. b) $(x - 1)(x - 2)\ldots(x - n + 1)$.

c) $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$. d) $(a_1 + \ldots + a_n)x^{n-1}$.

e) $a_1(x - a_2)\ldots(x - a_n)$. f) $(a + b)a(a - b)^{n-1}$

II.14. a) Lấy dòng n – 1 nhân với x_1 cộng vào dòng n, sau đó lấy dòng n – 2 nhân với x_1 cộng vào n – 1,..., tiếp tục như vậy cho đến dòng thứ 2. Ta có

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_4 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1).D_{n-1}.$$

Từ đó suy ra $D_n = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

b) Phương trình có n nghiệm là $a_1,\dots,a_n$.

II.15. a) Lấy cột 1 nhân với (–1) cộng vào cột 2 và cột 3, định thức nhận được có hai cột tỉ lệ với nhau.

b) Với mỗi j, viết cột thứ j thành tổng của các cột đơn, tức là trong mỗi cột đó, số mũ của a_j bằng nhau. Sau đó viết định thức thành tổng của các định thức có các cột chỉ là cột đơn. Do $\deg f_i \le n-2$, nên có không quá n – 1 cột đơn độc lập, từ đó trong n cột của mỗi định thức số hạng, có ít nhất hai cột tỉ lệ với nhau. Vậy chúng đều bằng không.

II.16. a) (3, –1, 2) ; b) (1, 2, –2) ;

c) (–2, 0, 1, –1) ; d) $\left(\frac{2}{3}, -1, \frac{3}{2}, 0\right)$.

II.17. a) Định thức có 6 số hạng, giá trị tuyệt đối bằng 1, ít nhất hai số hạng trái dấu nhau. Do đó định thức không quá 4. Giá trị đó đạt được vì

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

b) Khai triển định thức chỉ có nhiều nhất ba số hạng dương. Chúng cũng không bằng 1 tất cả vì khi đó định thức bằng 0. Vậy định thức không quá 2. Giá trị này đạt được vì

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

II.18. a) Dễ dàng.

b) Ta có $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$, nên từ $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ suy ra

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \qquad (1)$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}). \qquad (2)$$

Từ (1), (2), do cách xác định D_n, suy ra

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1),$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

• Nếu $\alpha \neq \beta$ thì nhân đẳng thức thứ nhất với α, đẳng thức thứ hai với β rồi trừ cho nhau, ta được

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1)}{\alpha - \beta} + \frac{\beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\beta - \alpha}.$$

• Nếu $\alpha = \beta$ thì từ (1) và (2) ta có

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}).$$

Từ đó $D_n - \alpha D_{n-1} = A\alpha^{n-1}$ với $A = D_2 - \alpha D_1$. (3)

Thay n bởi n – 1 ta có

$$D_{n-1} = \alpha D_{n-2} + A\alpha^{n-3}.$$

Thế biểu thức này vào (3) ta đi đến

$$D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2A\alpha^{n-3}$$

Tiếp tục quá trình này ta nhận được

$$D_n = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)A.\alpha^{n-2}$$

$$= (n-1)\alpha^{n-2}D_2 - (n-2)\alpha^{n-1}D_1.$$

II.19. a) Ta có $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 2$. (Vậy $\{D_n\}$ là dãy Fibonacci),

$\alpha, \beta = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Do đó

$$D_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

b) $\cos n\alpha$.

II.20. Ta có $|AB| = |A|\,|B| = 1$. Do đó $|A| \neq 0$ và vì vậy A khả nghịch. Từ đó

$A^{-1}(AB) = A^{-1}I$. Vậy $A^{-1} = B$.

II.21. a) Ta có $(A^9)^9 = I$, $(A^{20})^4 = I$. Từ đó $A = I$.

b) Theo bài tập II.20, A, B khả nghịch. Từ $A^2B^3 = A^3B^7$ suy ra $AB^4 = I$. Vì $A^2B^3 = I$ nên $AB^4 = A^2B^3$ và từ đó $A = B$.

Thay vào điều kiện đã cho ta có :

$$A^5 = A^{12} = I \Rightarrow A^{25} = I = A^{24} \Rightarrow A = I.$$

II.22. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

II.23. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$.

II.24. a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

II.25. $A^2 = I$. Từ đó $A^n = I$ nếu n chẵn, $A^n = A$ nếu n lẻ.

II.26. a) Thử trực tiếp.

b) Nếu $A^n = 0$ thì $|A| = 0$. Theo a), ta có

$$A^2 = (a + d)A.$$

Nếu $a + d = 0$ thì $A^2 = 0$. Nếu $a + d \neq 0$ thì $A^n = (a + d)A^{n-1} = 0$ suy ra $A^{n-1} = 0$. Tiếp tục như vậy ta có $A^2 = 0$.

II.27. a) 2 ; b) 3.

II.28. a) 3 ; b) 3.

II.29. a) $x_1 = \dfrac{x_3 - 9x_4 - 2}{11}$, $x_2 = \dfrac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$; x_3, x_4 tùy ý.

b) $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$; x_1, x_2 tùy ý.

c) Hệ có nghiệm duy nhất $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

d) Vô nghiệm.

II.30. a) $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}.$$

$\lambda = 1$ hệ có nghiệm : $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; x_2, x_3 tùy ý.

$\lambda = -2$ hệ vô nghiệm.

b) $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -3$ hệ có nghiệm duy nhất

$$x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)},\ x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)},\ x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$$

$\lambda = 0$ hoặc $\lambda \neq -3$ hệ vô nghiệm

c) Nếu a, b, c đôi một khác nhau thì theo định thức Vandermonde, hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{(b - d)(c - d)}{(b - a)(c - a)},\ y = \frac{(d - a)(d - c)}{(b - a)(b - c)},\ z = \frac{(d - a)(d - b)}{(c - a)(c - b)}.$$

Nếu chỉ hai trong các số a, b, c, d khác nhau và $a \neq b$ hoặc $a \neq c$ hoặc $b \neq c$ thì hệ có nghiệm phụ thuộc một tham số.

Nếu $a = b = c = d$ thì hệ có nghiệm phụ thuộc hai tham số $x = 1 - y - x$; y, z tùy ý.

Nếu tồn tại hai trong các số a, b, c khác nhau và nếu d không bằng một trong các số đó hoặc $a = b = c \neq d$ thì hệ vô nghiệm.

d) Nếu $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

$$x = \frac{(b-1)(c-1))}{D}, \; y = \frac{(a-1)(c-1)}{D}, \; z = \frac{(a-1)(b-1)}{D}.$$

II.31. a) Theo định lí Kronecker – Capelli.

b) Theo định lí Kronecker – Capelli, nếu hệ có nghiệm thì $r(A) \leq$ số phương trình < số ẩn = n.

Do đó hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r(A) \geq 1$ tham số.

Chú ý rằng hệ có số ẩn nhiều hơn số phương trình cũng có thể vô nghiệm. Chẳng hạn hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

có số ẩn nhiều hơn số phương trình nhưng vô nghiệm.

II.32. Vì $\overline{A}$ có m dòng nên $m = r(A) \leq r(\overline{A}) \leq m$.

Từ đó $r(A) = r(\overline{A})$ và hệ có nghiệm.

Chương III

III.1. b) Xét quan hệ tuyến tính

$$\lambda_1 f_{a_1} + \cdots + \lambda_k f_{a_k} = 0$$

Suy ra $(\lambda_1 f_{a_1} + \cdots + \lambda_k f_{a_k})(a_j) = 0$ với mọi $j = 1, \ldots, k$. Từ đó $\lambda_j f_{a_j}(a_j) = \lambda_j = 0$ với mọi $j = 1, \ldots, k$.

c) Theo b), $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ độc lập tuyến tính.

Mọi $f \in M(A)$ ta có

$$f = \lambda_1 f_{a_1} + \cdots + \lambda_n f_{a_n}, \text{ trong đó } \lambda_i = f(a_i).$$

Vậy $\{f_{a_1}, \ldots, f_{a_n}\}$ cũng là hệ sinh.

III.2. $1.(1,1) = (1.1, 0) = (1, 0) \neq (1,1)$ nên V với các phép toán đã cho không phải là không gian vectơ.

III.3. b) Cơ sở là $\{x\}$, $x \in X$, $x \neq 1$.

c) X không phải là không gian con của $\mathbb{R}^1$ (vì $X \subset \mathbb{R}^1$ nhưng phép toán trên X khác phép toán trên $\mathbb{R}^1$).

III.4. b) Đặt $e_i = (\delta_{in})$, trong đó $\delta_{nn} = 1$, $\delta_{in} = 0$ nếu $n \neq i$.

Dễ thấy hệ $(e_i)_{i \in N}$ độc lập tuyến tính có vô hạn vectơ.

c) F, G là không gian con ; H, I không phải là không gian con.

III.5. Kiểm theo tiêu chuẩn không gian con.

III.6. a), b), e) là không gian con, các trường hợp khác không phải.

III.7. Lấy $x \in M$, $x \neq 0$. Ánh xạ $f : \mathbb{K} \to M$, $f(\lambda) = \lambda x$ là đơn ánh. Do đó $\mathrm{Card}(\mathbb{K}) \leq \mathrm{Card}(M)$

III.8. a) $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\right\}$ là một cơ sở đếm được của $\mathbb{K}[x]$.

b) Giả sử $\{e_n\}_{n \in N}$ là một cơ sở đếm được của C[0, 1]. Trang bị cho C[a, b] chuẩn sup. Khi đó C[a, b] là không gian đầy đủ. Đặt $M_n = < e_1, \ldots, e_n >$.

Ta có $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = C[a, b]$ và M_n đúng trong C[a, b].

Theo định lí Baire về phạm trù, tồn tại n_o sao cho phần trong của M_{n_o} khác rỗng. Từ đó tồn tại số $r > 0$ sao cho hình cầu tâm 0, bán kính r của C[a, b] nằm trong M_{n_o}. Suy ra $M_{n_o} = X$. Ta gặp mâu thuẫn vì $\dim M_{n_o} = n_o$.

III.9. Chọn $a \in M_1 \cap M_2$, $a \neq 0$. Khi đó mọi $v \in M_1 + M_2$, $v = v_1 + v_2$ ta cũng có

$$v = (v_1 + a) + (v_2 - a),$$

$$v_1 + a \in M_1,\ v_1 + a \neq v_1 \text{ và } v_2 - a \in M_2,\ v_2 - a \neq v_2.$$

III.10. b) Một cơ sở của X_n là các ma trận E_{ij} có phần tử (i, j) bằng phần tử (j, i) bằng 1, các vị trí khác bằng 0. Có $\frac{n^2 + n}{2}$ ma trận như vậy. Do đó $\dim X_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Một cơ sở của Y_n là các ma trận E_{ij}, $i < j$ có phần tử (i, j) bằng 1, phần tử (j, i) bằng −1. Có $\frac{n^2 - n}{2}$ ma trận như vậy. Do đó $\dim Y_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

c) Dễ thấy $X_n \cap Y_n = \{0\}$. Với mọi

$M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, đặt

$$d_{ij} = \frac{m_{ij} - m_{ji}}{2}, \ i < j$$

Chọn $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ theo cách sau

$a_{ij} = m_{ij} - d_{ij}$, $a_{ji} = m_{ji} + d_{ij}$ nếu $i < j$, $a_{ii} = m_{ii}$;

$b_{ij} = d_{ij}$, $b_{ji} = -d_{ij}$ nếu $i < j$, $b_{ii} = 0$.

Ta có $A \in X_n$, $B \in Y_n$ và $A + B = M$.

Vậy $\mathcal{M}_n = X_n \oplus Y_n$.

III.11. a) $AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma y - \beta z = 0 \\ (\delta - \alpha)y - \beta(t - x) = 0 \\ (\alpha - \delta)z + \gamma(t - x) = 0 \end{cases}$.

Coi đây là một hệ thuần nhất của ba ẩn y, z, t − x, vì

$$\begin{vmatrix} \gamma & -\beta & 0 \\ \delta - \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha - \delta & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

nên $AB = BA \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma y - \beta z = 0 \\ (\delta - \alpha)y - \beta(t - x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = k\beta \\ z = k\gamma \\ x - t = k(\alpha - \delta) \end{cases}$ (đặt $y = k\beta$, do $\beta \neq 0$).

b) Ta có

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & k\beta \\ k\gamma & x - k(\alpha - \delta) \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta - \alpha \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} & \frac{\delta - \alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

Vì $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} & \frac{\delta - \alpha}{\beta} \end{pmatrix}$ độc lập tuyến tính nên tập tất cả các ma trận B giao hoán được với A là một không gian vectơ con 2 chiều của $\mathcal{M}_2$.

III.12. Giả sử tóm lại, tồn tại $x_1 \in E \setminus F$ và $x_2 \in F \setminus E$. Do $E \cup F$ là không gian con nên $x_1 + x_2 \in E \cup F$. Khi đó hoặc $x_1 + x_2 \in E$, suy ra $x_2 \in E$; hoặc $x_1 + x_2 \in F$, suy ra $x_1 \in F$. Cả hai trường hợp đều gặp mâu thuẫn.

III.13. Vì $E + F \neq E \cap F$ nên $E \neq F$. Từ đó $E \cap F$ là không gian con thực sự của E hoặc F. Ta giả sử $E \cap F \neq E$. Khi đó

$$\dim(E + F) \geq \dim E \geq \dim(E \cap F) + 1 .$$

Từ giả thiết suy ra $\dim E = \dim(E + F)$.

Vì $E \subset E + F$ nên $E = E + F$. Từ đó ta cũng có $F \subset E$ hay $E \cap F = F$.

III.14. Chú ý rằng về mặt tập hợp, $X_{\mathbb{R}} = X$.

a) Giả sử $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính trong X. Khi đó mọi quan hệ tuyến tính tùy ý trong $X_{\mathbb{R}}$

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 , \ \lambda_j \in \mathbb{R} ,$$

cũng là quan hệ tuyến tính trong X. Do đó $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Vậy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính trong $X_{\mathbb{R}}$.

Điều ngược lại không đúng : Lấy tùy ý $x \in X$, $x \neq 0$. Khi đó $\{x, ix\}$ độc lập tuyến tính trong $X_{\mathbb{R}}$ vì mọi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda x + \mu(ix) = 0 \quad \Rightarrow (\lambda + \mu i)x = 0 \Rightarrow \lambda + \mu i = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \mu = 0 .$$

Tuy nhiên $\{x, ix\}$ không độc lập tuyến tính trong X vì có quan hệ tuyến tính không tầm thường

$$1.x + i.(ix) = 0.$$

Nếu S là hệ sinh của $X_{\mathbb{R}}$ thì mọi $x \in X$, tồn tại $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sao cho $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Vậy $x \in \langle S \rangle$ trong X.

Điều ngược lại không đúng : Lấy tùy ý $x \in X$, $x \neq 0$.

Gọi S là cơ sở của X, $x \in S$. Khi đó $ix \notin S$ (do $\{x, ix\}$ phụ thuộc tuyến tính trong X). Dễ dàng thấy S là hệ sinh của X và $ix \notin \langle S \rangle$ trong $X_{\mathbb{R}}$.

b) Dễ dàng kiểm tra B' là hệ sinh và độc lập tuyến tính.

III.15. a) $v_3 = v_1 + v_2$ nên $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle = \{(x, 0, y, -x - y) | x, y \in \mathbb{R}\}$.

b) $v \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

III.16. Chứng minh $v_1, v_2 \in \langle v_3, v_4 \rangle$ và $v_3, v_4 \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

Chú ý rằng $w \in <u, v> \Leftrightarrow r(u, v, w) = r(u, v)$.

III.17. Vì số vectơ khác 3 nên a) và d) không phải là cơ sở. Hệ b) không là cơ sở vì phụ thuộc tuyến tính. Hệ c) có đúng 3 vectơ và độc lập tuyến tính nên là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

III.18. a) S độc lập tuyến tính và là hệ sinh của M.

b) Tìm điều kiện để T độc lập tuyến tính. Ta có T độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow a_1 \neq 0$.

III.19. a) $v/S = \left(-\frac{3}{2}, 2, 5\right)$; b) $v/S = \left(1, \frac{5}{3}, -2\right)$.

III.20. a) (1, –1, 2) ; b) (11, 2, –3) ; c) (c, b – c, a – b).

III.21. (–7, 11, –21, 30).

III.22. (4, –9, –8).

III.23. $r(v_1, v_2, v_3) = 2 \Rightarrow \dim V = 2$; $r(v_1, v_2) = 2$ nên một cơ sở của V là $\{v_1, v_2\}$.

III.24. Kí hiệu $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, B là một cơ sở của $\mathbb{R}_3[x] \subset \mathbb{R}[x]$. Ta có

$$f_1/B = (1, 4, -2, 1),\ f_2/B = (-1, 9, -3, 2),$$

$$f_3/B = (-5, 6, 0, 1),\ f_4/B = (5, 7, -5, 2).$$

Do đó $r(f_1, f_2, f_3, f_4) = r\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

Ta có dim V = 2 và một cơ sở của V là $\{f_1, f_2\}$.

III.25. Ta có dim U = 2, dim V = 2 và dim (U + V) = 3 (bằng hạng của 6 vectơ sinh ra U và sinh ra V). Từ đó

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 1.$$

Vì $U = \langle (1, 1, 0, -1), (1, 2, 4, 0) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

$V = \langle (3, 2, 2, -3), (2, 3, 4, -1) \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$

nên $v \in U \cap V \Leftrightarrow$ Tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 - \lambda_4 v_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_2 - 2\lambda_3 - 4\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = c,\ \lambda_2 = c,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = c,\ c \in \mathbb{R}$$

Vậy $v = c(v_1 + v_3) = cv_4$. Từ đó

$$U \cap V = \langle v_4 \rangle.$$

Một cơ sở của $U \cap V$ là {(2, 3, 4, −1)}.

III.26. a) $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$ (x_3, x_4 tùy ý). Một hệ nghiệm cơ bản là

{(8, −6, 1, 0), (−7, 5, 0, 1)}.

b) Hệ chỉ có nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Không có hệ nghiệm cơ bản.

c) $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$, $x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$ (x_1, x_2 tùy ý).

Một hệ nghiệm cơ bản là.

$$\left\{\left(1, 0, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), (0, 1, 5, -7)\right\}$$

d) Nghiệm tổng quát

$$x_1 = x_4 - x_5,\ x_2 = x_4 - x_6,\ x_3 = x_4\ (x_4, x_5, x_6 \text{ tùy ý})$$

Một hệ nghiệm cơ bản là

$$\{(1,1,1,1,0,0), (-1,0,0,0,1,0), (0,-1,0,0,0,1)\}.$$

III.27. a) r (A) = 2 và $r(e_1, e_2) = 2$ nên $\{e_1, e_2\}$ là cơ sở của M.

b) $v \notin M$ vì phương trình $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = v$ vô nghiệm.

c) (2, 3).

d) Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 & z_1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & z_2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & z_3 \end{array}\right) = r(A) = 2$$

$$\Leftrightarrow r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 & z_1 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & z_2 - 2z_1 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & z_3 - 2z_1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow r\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & -2 & -1 & -5 & z_1 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & z_2 - 2z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2z_1 + 4z_2 - 5z_3 \end{array}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2z_1 + 4z_2 - 5z_3 = 0.$$

Vậy $D = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2z_1 + 4z_2 - 5z_3 = 0\right\}$.

e) D là không gian nghiệm của một hệ thuần nhất nên là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Hạng của hệ này bằng 1 do đó

$$\dim D = 3 - 1 = 2.$$

III.28. Đặt $B = (b_{ij})$. Khi đó $AB = 0$ tương đương với một hệ thuần nhất n^2 phương trình, n^2 ẩn số, có ma trận dạng

$$\begin{pmatrix} A & & O \\ & \ddots & \\ O & & A \end{pmatrix}.$$

Theo định lý Laplace, $\det \begin{pmatrix} A & & O \\ & \ddots & \\ O & & A \end{pmatrix} = (\det A)^n = 0$.

Do đó hệ có nghiệm không tầm thường. Vậy tồn tại $B \neq 0$ để $AB = 0$.

Chương IV

IV.1. a), c), d), e) là ánh xạ tuyến tính ; b) không phải.

IV. 2. a), b) là ánh xạ tuyến tính ; c), d) không phải.

IV. 3. b) $\mathrm{Ker} f = \langle(-3, 1, 4, 6)\rangle$; $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$.

IV.4. a) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 5x_1 - 3x_2)$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = (30x_1 - 10x_2 - 3x_3,\ -9x_1 + 3x_2 + x_3)$.

c) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - 2x_3,\ x_1, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3)$.

IV.5. Không tồn tại vì

$$v_3 = f(u_3) = f((-1)u_1 + (-1)u_2) \neq (-1)f(u_1) + (-1)f(u_2).$$

IV.6. Dễ thấy $e_1 = (1,2,3,4)$, $e_2 = (0,1,1,2)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(e_1) = f(e_2) = 0$, $f(e_3) = v_3$, $f(e_4) = v_4$, v_3, v_4 là vectơ khác không tùy ý thuộc $\mathbb{R}^3$, có $\operatorname{Ker} f = \langle e_1, e_2 \rangle$. Rõ ràng f không duy nhất.

IV.7. Gọi (e_1, e_2, e_3) là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Các biến đổi tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$.

$$e_1 \mapsto (1,-1,1),\ e_2, e_3 \mapsto (1,2,2)$$

hoặc

$$e_1, e_2 \mapsto (1,-1,1),\ e_3 \mapsto (1,2,2)$$

đều có ảnh là $\langle (1,-1,1), (1,2,2) \rangle$. Vậy biến đổi tuyến tính có tính chất đó tồn tại nhưng không duy nhất.

IV.8. a) f không đẳng cấu

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

b) $\operatorname{Ker} f = \langle (1,0,-1) \rangle$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

$\operatorname{Im} f = \langle (1,1,1), (-1,0,1) \rangle$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

IV.9. a) $\varphi(g) = (fg)'$. Dễ thấy φ là biến đổi tuyến tính.

b) $$\operatorname{Ker}\varphi = \{ g \in \mathbb{R}[x] \mid (fg)' = 0 \} = \{ g \in \mathbb{R}[x] \mid fg = c,\ c \in \mathbb{R} \}.$$

Vậy $\deg(f) \geq 1$ thì $\operatorname{Ker} f\varphi = \{0\}$; $f = a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ thì $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}$; $f = 0$ thì $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}[x]$.

IV.10. a) Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Từ đó $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2} x_1, -\frac{1}{2} x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3 \right)$.

b) Ma trận của $(f^2 - I)(f - 2I)$ trong cơ sở chính tắc là

$$(A^2 - I_3)(A - 2I_3) = O_3,$$

do đó có đẳng thức cần chứng minh.

IV.11. a) Đặt $E_{ij} \in \mathcal{M}_2(k)$ là ma trận có phần tử thứ (i, j) bằng 1, các phần tử khác bằng 0. $\{E_{ij} | i, j = 1,2\}$ là cơ sở của V. Ta có

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(E_{21}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vì $f(E_{11}) = -f(E_{21})$, $f(E_{12}) = -f(E_{22})$ nên $r(f) = 2$.

b) $f^2(A) = B^2A$.

IV.12. $r(g_0f) = \dim g_0f(\mathbb{R}^3) = \dim g(f(\mathbb{R}^3)) \le \dim g(\mathbb{R}^2) \le 2$ nên g_0f không khả nghịch.

IV. 13. Chọn f và g có ma trận trong cơ sở chính tắc lần lượt là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

IV.14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

IV. 15. b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $v = v_1$, $v/E = (1,0,0)$; $v/E' = (1/2, 1/2, 0)$.

IV. 16. a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -12 & -8 & -9 \\ 12 & 10 & 8 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

IV. 17. a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

IV. 18. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

IV. 19. Áp dụng định lí 4.4, tồn tại $a_j \in X$ sao cho $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Dễ dàng thấy $a_j^* = f_j$ và $a_1, \ldots, a_n$ là cơ sở của X.

IV. 20. Dễ thấy $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ thuộc W và

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó $f(A) = 3.0 - 0 - 2 \,.\, 0 - 2 \,.\, 3 = -6$.

IV.21. Đặt $f(z) = f(x+iy) = x$ với mọi $z \in \mathbb{C}$, f là dạng tuyến tính thực trên $\mathbb{C}$. Vì $f(iz) = -y \neq if(z) = ix$ nên f không phải là dạng tuyến tính phức.

IV.22. a) Dễ dàng chứng minh f là tuyến tính. Ta có

$$x \mapsto \alpha - \beta$$
$$x^2 \mapsto 2(\alpha - \beta)x + \alpha^2 - \beta^2$$
$$x^3 \mapsto 3(\alpha - \beta)x^2 + 3(\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 - \beta^3.$$

Vì $\alpha - \beta \neq 0$ nên hệ $\{\alpha - \beta, 2(\alpha - \beta)x + \alpha^2 + \beta^2,$

$$3(\alpha - \beta)x^2 + 3(\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 - \beta^3\}$$

là một cơ sở của $\mathbb{C}_2[x]$. Vậy ánh xạ là toàn ánh.

b) $ax^3 + bx^2 + cx + d \mapsto 3a(\alpha - \beta)x^2 + \left[3a((\alpha^2 - \beta^2) + 2b(\alpha - \beta)\right]x +$

$$+ \left[a(\alpha^3 - \beta^3) + b(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha - \beta)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = b = c = 0$$

Vậy $\operatorname{Ker} f = \{d : d \in \mathbb{C}\} \equiv \mathbb{C}$.

IV.23. $[f] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $[g] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $[h] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $[k] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Biết ma trận của các ánh xạ tuyến tính thì dễ dàng viết được phương trình của nó.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; f) $h^n = \begin{cases} h \text{ nếu n lẻ} \\ I_{\mathbb{R}^2} \text{ nếu n chẵn} \end{cases}$

Chương V

V.1. a) Trị riêng : 1 ; 2. Vectơ riêng : c(2, 1, 0) ; c(24, 7, 1), $c \neq 0$.

b) Trị riêng : 1. Vectơ riêng : c(1, 1, 1), $c \neq 0$.

c) Trị riêng : 0 ; 6. Vectơ riêng : $(-c_1, -2c_2, c_1, c_2)$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$; c(1, 1, 2), $c \neq 0$.

d) Trị riêng : 0. Vectơ riêng $(0, c_1, c_2)$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

V.2. a) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Không chéo hóa được

d) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

V.3. a) Trị riêng : –1. Vectơ riêng : c(1, 1, –1), $c \neq 0$.

b) Trị riêng : 2. Vectơ riêng : (c_1, c_2, c_1), $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

c) Trị riêng : 0 ; 1. Vectơ riêng : c(1, 2, 3) ; c(1, 1, 1), $c \neq 0$.

d) Trị riêng : 1. Vectơ riêng : c(3, 1, 1), $c \neq 0$.

V.4. Giả sử $B = \{v_i\}_{i \in I}$ là một cơ sở của X, ta chỉ cần chứng minh tồn tại $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho $\varphi(v_i) = \lambda v_i$ với mọi $i \in I$. Giả sử $i, j \in I$, $i \neq j$. Khi đó tồn tại $\lambda_i, \lambda_j, \lambda$ sao cho $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, $\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$, $\varphi(v_i + v_j) = \lambda(v_i + v_j)$. Từ đó $\lambda_i v_i + \lambda_j v_j = \lambda v_i + \lambda v_j$. Do v_1, v_2 độc lập tuyến tính nên $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$.

V.5. Ta có $\varphi(v) = \lambda v$. Do $v \neq 0$ và φ khả nghịch nên $\lambda \neq 0$. Từ đó $\varphi^{-1}(\varphi(v)) = \varphi^{-1}(\lambda v)$ hay $\varphi^{-1}(v) = \dfrac{1}{\lambda} v$.

V. 6. Nếu dimX = n thì mọi toán tử tuyến tính φ trên X, đa thức đặc trưng $f_\varphi(t)$ có bậc n nên có n nghiệm phức (tính theo số lần bội). Do đó φ có các trị riêng và do đó có các vectơ riêng.

Khi dimX = ∞, kết quả trên không đúng. Ví dụ $\varphi : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t],\ f(t) \mapsto t f(t)$.

$$\varphi(f) = \lambda f \quad \Leftrightarrow t f(t) = \lambda f(t) \text{ với mọi } t \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow f = 0.$$

Vậy φ không có vectơ riêng.

V.7. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ chéo hóa được nếu và chỉ nếu phương trình đặc trưng.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

Có hai nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm kép thì hệ thuần nhất tìm vectơ riêng phải có hai nghiệm độc lập tuyến tính. Từ đó

a) $(a-d)^2 + 4bc > 0$ hoặc $a = d,\ b = c = 0$

b) $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$ hoặc $a = d,\ b = c = 0$.

V.8. Vì $f_A(t) = f_{A^T}(t)$ nên A và A^T cùng chung trị riêng. Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dễ thấy A và A^T không chung vectơ riêng.

V.9. Giả sử V và W là không gian con bất biến của φ. Khi đó

$$\varphi(V+W) = \varphi(V) + \varphi(W) \subset V + W$$

$$\varphi(V \cap W) = \varphi(V) \cap \varphi(W) \subset V \cap W.$$

V.10. $\varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u)) \subset \psi(u)$.

V.11. • $v \in \mathrm{Ker}\psi \quad \Rightarrow \varphi(\varphi(v)) = \varphi(\psi(v)) = \varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(v) \in \mathrm{Ker}\psi$$

Vậy $\varphi(\mathrm{Ker}\psi) \subset \mathrm{Ker}\psi$.

• $\varphi(\mathrm{Im}\,\psi) = \varphi(\psi(X)) = \varphi(\varphi(X)) \subset \psi(X) = \mathrm{Im}\,\psi$.

V.12. a) Do $W \subset U$ nên $\varphi(W) = \varphi|_U(W)$. Từ đó

$$\varphi(W) \subset W \Leftrightarrow \varphi|_U(W) \subset W$$

b) • $\varphi(U) \subset U$ nên $\varphi(\varphi(U)) \subset \varphi(U)$

• $\varphi(\varphi^{-1}(U)) \subset U \subset \varphi^{-1}(\varphi(U)) \subset \varphi^{-1}(U)$.

V.13. Giả sử φ có các trị riêng phân biệt là $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Chọn vectơ riêng v_i ứng với λ_i. $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{K}^n$. Các không gian con sinh bởi một tập con của E đều là không gian con bất biến của φ. Có 2^n không gian con như vậy. φ không còn không gian con bất biến nào khác. Để chứng minh điều đó, xét U là không gian con bất biến bất kì, chỉ cần chứng tỏ nếu $u = a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k} \in U$, $a_1, \ldots, a_k \neq 0$ và $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ thì $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in U$. Hiển nhiên khẳng định đúng với $k = 1$.

Nếu khẳng định đúng với mọi $l < k$ thì $\varphi(u) - \lambda_{i_k} u \in U$ mà

$$\varphi(u) - \lambda_{i_k} u = a_1(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_k}) v_{i_1} + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{i_{k-1}} - \lambda_{i_k}) v_{i_{k-1}}$$

nên theo giả thiết quy nạp $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}} \in U$. Kết hợp với $u \in U$ suy ra $v_{i_k} \in U$.

V.14. φ có hai trị riêng là 1 và 2. Ứng với 1 có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $v_1 = (2, 2, -1)$, ứng với 2 có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1)$. Suy ra các không gian con bất biến của φ là

- $0, \mathbb{K}^3$.
- $\mathbb{K}v_1$, $\mathbb{K}w$, $w \in \langle v_2, v_3 \rangle$, $w \neq 0$.
- $\langle v_2, v_3 \rangle$, $\langle v_1, w \rangle$, $w \in \langle v_2, v_3 \rangle$, $w \neq 0$.

V.15. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Chương VI

VI.1. b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

VI.2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

VI.3. Giả sử $f(x,y) = l_1(x).l_2(y)$. Trong đó

$$l_1(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \; l_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$$

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

Ma trận này có tất cả các dòng tỉ lệ với nhau nên có hạng bằng 1 (hạng khác 0 do $f \neq 0$).

Ngược lại giả sử hạng của f bằng 1. Khi đó ma trận của f trong cơ sở chính tắc có một dòng i khác 0, các dòng khác là một bội của nó. Khi đó dòng thứ j của ma trận của f là

$$(d_jc_1, d_jc_2, \dots, d_jc_n),$$

trong đó $c_1, \dots, c_n$ không đồng thời bằng 0, $d_i = 1$. Đặt

$$l_1(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n,$$

$$l_2(y) = d_1x_1 + \cdots + d_nx_n.$$

Ta có $f(x,y) = l_1(x).l_2(y)$.

VI.4. a) Chọn cơ sở $\{e_1, \dots, e_n\}$ của X sao cho $\{e_1, \dots, e_k\}$ là cơ sở của M. Gọi $A = (a_{ij})$ là ma trận của f trong cơ sở này, $y/\{e_1, \dots, e_n\} = (y_1, \dots, y_n)$. Ta có

$$y \in M' \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \text{ với mọi } x \in M \Leftrightarrow f(e_i, y) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \dots, k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0 \text{ với mọi } i = 1, \dots, k$$

Vậy M' là không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất k phương trình, n ẩn số. Do đó

$$\dim M' \geq n - k.$$

b) Theo a), $f(x, x) \neq 0$ với mọi $x \in M$, $x \neq 0$ thì $M \cap M' = \{0\}$,

$\dim(M + M') \geq k + (n - k) = n$, do đó $X = M \oplus M'$.

VI.5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$;   b) $a = 1$;   c) $\omega = x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

VI.6. a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;   b) $y_1^2 - y_2^2$;

c) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$;   d) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

VI.7. a) $2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$;

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3,\ y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3,\ y_3 = \frac{1}{10}x_3.$$

b) $3y_1^2 - 30y_2^2 + 530y_3^2$;

$$y_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3,\ y_2 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{20}x_3,\ y_3 = \frac{1}{20}x_3.$$

c) $y_1^2 - 9y_2^2 + \frac{31}{9}y_3^2$;

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3,\ y_2 = x_2 - \frac{2}{9}x_3,\ y = x_3.$$

d) $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 - y_3^2$;

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3,\ y_2 = -x_1 + x_2,\ y_3 = x_3.$$

VI.8. a) $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$;

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

$$y_2 = x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + \cdots + x_n)$$

....

$$y_n = x_n$$

b) Nếu n chẵn : $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2$;

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) \quad (i = 1, 3, 5, \ldots, n-2),$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i + x_{i+1}) \quad (i = 2, 4, \ldots, n-2),$$

$$y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n),\ y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n).$$

Nếu n lẻ : $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \cdots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) \quad (i = 1, 3, 5, \ldots, n-2)$$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_i + x_{i+1}) \quad (i = 2, 4, \ldots, n-2)$$

$$y_n = x_n.$$

VI.9. a) $\lambda > 0$; b) $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$; c) Không tồn tại λ ; d) Không tồn tại λ.

VI.10. a) Xác định âm ; b) Xác định dương ;

c) Xác định dương ; d) Không xác định.

VI.11. $m > 4$.

VI.12. a) $(1, 2, 3)$, $\left(-\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $\left(-\frac{9}{10}, 0, \frac{3}{10}\right)$.

b) $(1, 1, -5, 3)$, $(2, 3, -3, 2)$, $(2, -1, -1, -2)$.

VI.13. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{3}$.

VI.14. $\eta(x, x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 > 0$

với mọi $x \neq 0$ nên η là tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Trực giao hóa của $(1, 0)$, $(0, 1)$ là $(1, 0)$, $(2, 1)$.

Vì $\eta((1,0), (1,0)) = 1$, $\eta((2,1), (2,1)) = 1$ nên $(1, 0)$, $(2, 1)$ cũng là trực chuẩn hóa.

VI.15. $(0|y) = 0$ với mọi $y \in M$ nên $0 \in M^{\perp}$ Nếu $a, b \in M^{\perp}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ thì mọi $y \in M$.

$$(\lambda a + b|y) = \lambda(a|y) + (b|y) = \lambda.0 + 0 = 0$$

nên $\lambda a + b \in M^{\perp}$.

VI.16. Đặt $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, ta có

$$(A \mid B) = tr(AB^{\perp}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Do đó dễ dàng kiểm tra $(.\mid.)$ là một tích vô hướng trên $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Kí hiệu $\mathcal{D}$ là không gian các ma trận chéo cấp n, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$. Ta có

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D}^{\perp} &\Leftrightarrow (A \mid D) = 0 \text{ với mọi } D \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i = 0 \text{ với mọi } D \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow a_{ii}\lambda_i = 0 \text{ với mọi } \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\dots,n \\ &\Leftrightarrow a_{ii} = 0 \text{ với mọi } i = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Vậy $\mathcal{D}^{\perp} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | a_{ii} = 0 \text{ với } i = 1,\dots,n\}$.

Kí hiệu $\mathcal{S}$ là không gian các ma trận đối xứng cấp n.

Dễ thấy $\mathcal{S}^{\perp}$ chứa tất cả các ma trận phản đối xứng.

Mặt khác với $A \in \mathcal{S}^{\perp}$ thì mọi (i, j), chọn $S \in \mathcal{S}$ là ma trận có $s_{ij} = s_{ji} = 1$, các phần tử khác bằng 0, ta có $(A \mid S) = a_{ij} + a_{ji} = 0 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ij}$. Suy ra A là ma trận phản đối xứng. Vậy $\mathcal{S}^{\perp}$ là không gian các ma trận phản đối xứng.

VI.17. Đặt $g_k(t) = (t^2 - 1)^k$. Với mọi j, $0 \le j < k$ đạo hàm bậc j của g_k có chứa nhân tử $t^2 - 1$, do đó $g_k^{(j)}(\pm 1) = 0$. Theo công thức tích phân từng phần

$$\int_{-1}^{1} g_k^{(k)}(t)t^j\,dt = \int_{-1}^{1} t^j\,d\left(g_k^{(k-1)}(t)\right) = t^j g_k^{(k-1)}(t)\Big|_{-1}^{1} - j\int_{-1}^{1} g_k^{(k-1)}(t)t^{j-1}dt$$

$$= -j\int_{-1}^{1} g_k^{(k-1)}(t)\,t^{j-1}dt$$

....

$$= (-1)^j j!\int_{-1}^{1} g_k^{(k-j)}(t)\,dt$$

$$= (-1)^j j!\, g_k^{(k-j-1)}(t)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0.$$

Vì $g_j^{(j)}(t)$ là đa thức bậc j nên

$$\left(g_k^{(k)}(t)\middle|g_j^{(j)}(t)\right) = \sum_{i\le j}\alpha_i\int_{-1}^{1} g_k^{(k)}(t)\,t^i dt = 0\,.$$

Hệ $P_0(t), P_1(t),\ldots,P_n(t)$ là hệ trực giao, n + 1 vectơ, nên là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}_n[x]$.

VI.18. Với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, $(r_n(x))^2 = 1$ hầu khắp nơi, do đó $|r_n| = 1$. Ta sẽ chứng minh $(r_m \mid r_n) = 0$ với mọi $m \neq n$.

Đặt $\Delta_k^n = \left(\dfrac{k}{2^{n+1}}, \dfrac{k+1}{2^{n+1}}\right)$, $k = 0,1,\ldots,2^{n+1}-1$.

Khi đó
$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \Delta_{2m}^n,\ m = 0,1,\ldots,2^n-1 \\ -1 & \text{nếu } x \in \Delta_{2m+1}^n,\ m = 0,1,\ldots,2^n-1 \\ 0 & \text{nếu } x = \dfrac{k}{2^{n+1}},\ k = 0,1,\ldots,2^{n+1} \end{cases}$$

Với mọi m > n, trong mỗi khoảng Δ_k^n $\left(\text{có độ dài } \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ chứa 2^{m-n} đoạn $\Delta_l^m \left(\text{có độ dài } \dfrac{1}{2^{m+1}}\right)$. Trên mỗi khoảng Δ_k^n, $r_n(x)$ có giá trị không đổi, trong khi đó $r_m(x)$ có 2^{m-n-1} khoảng nhỏ nhận giá trị 1 và có 2^{m-n-1} khoảng nhỏ nhận giá trị −1. Do đó $\int_{\Delta_k^n} r_m(x)r_n(x)dx = 0$ và do đó $\int_0^1 r_m(x)r_n(x)dx = 0$.

VI.19. a) $D_\lambda = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

b) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$

c) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

d) $D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

VI.20. a) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$,

$x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$; $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$.

b) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 2y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$,

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

c) $9y_1^2 + 12y_2^2 + 18y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$,

$x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3$, $x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$

d) $3y_1^2 - 6y_2^2$; $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}\ y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\ y_3$,

$$x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\ y_2,\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}\ y_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ y_3.$$

VI.21. a) Xét dạng toàn phương $\omega = 5x^2 + 4xy + 8y^2$, có ma trận $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Chéo hóa trực giao ω, ta được ma trận trực giao $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Sử dụng phép đổi biến

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'$, $y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$ ta có

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36$$

Đặt $X = x' - \frac{8}{\sqrt{5}}$, $Y = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$, ta có phương trình

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Vậy đường bậc hai đã cho là ellip.

b) Parabol ; c) Hyperbol ; d) Parabol.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G.Birkhoff, S.Mac Lane, *Tổng quan về đại số hiện đại*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1979.

[2] Đậu Thế Cấp, *Toán cao cấp*, Tập 2 : Đại số tuyến tính và Phương trình vi phân, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2002.

[3] Đậu Thế Cấp, *Đại số sơ cấp*, NXB Giáo dục, 2004.

[4] Đậu Thế Cấp, *Cấu trúc đại số*, NXB Giáo dục, 2007.

[5] Đậu Thế Cấp, *Số học*, NXB Giáo dục, 2005.

[6] Đậu Thế Cấp, *Tôpô đại cương*, NXB Giáo dục 2008.

[7] Đậu Thế Cấp, *Giải tích hàm*, NXB Giáo dục 2003.

[8] Đậu Thế Cấp, *Hàm phức và phép tính toán tử*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2006.

[9] I.M. Gelfand, *Bài giảng đại số tuyến tính*, Nauka, Moscow, 1966 (Tiếng Nga).

[10] Bùi Xuân Hải (chủ biên), Trần Nam Dũng, Trịnh Thanh Đèo, Thái Minh Đường, Trần Ngọc Hội, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2001.

[11] Lê Tuấn Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2006.

[12] Ngô Thúc Lanh, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1970.

[13] G.Lefort, *Bài tập giải tích và đại số*, Tập 1, 2, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1984.

[14] I.V.Porskuryakov, *Problems in linear algebra*, Mir, Moscow, 1978.

[15] Ngô Việt Trung, *Giáo trình đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội 2002.

MỤC LỤC