Khoa Toán trường Đại học Khoa học Huế

GIÁO TRÌNH
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Tài liệu đang chỉnh sửa

Huế, 2019

Chương 1. Giới thiệu

§1. Một số bài toán

1.1 Bài toán sử dụng nguyên liệu sản xuất

Có một nhà máy sản xuất n loại sản phẩm $S_1, S_2, \dots, S_n$ từ m loại nguyên liệu $N_1, N_2, \dots, N_m$. Trữ lượng của nguyên liệu N_i là $b_i$và mỗi đơn vị nguyên liệu N_i có giá là $p_i(i = 1,2, \dots, m)$. Biết rằng giá bán mỗi đơn vị sản phẩm S_j là $\sigma_j(j = 1,2, \dots, n)$ và lượng nguyên liệu N_i dùng để sản xuất một đơn vị sản phẩm S_j là $a_{ij}(i = 1,2, \dots n, j = 1,2, \dots, m)$. Hãy tìm phương án sản xuất làm cho nhà máy lãi nhiều nhất.

Nếu kí hiệu x_j là số đơn vị sản phẩm S_j mà nhà máy sản xuất. Ta có:

-Giá vốn để sản xuất một đơn vị sản phẩm S_j là $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$.

-Tiền lãi khi bán một đơn vị sản phẩm S_j là $c_j = \sigma_j - \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$.

-Tổng số tiền lãi khi bán tất cả sản phẩm là $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

-Lượng nguyên liệu N_i cần thiết cho sản xuất là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

Ta có bài toán: tìm các giá trị $x_j(j = 1,2, \dots, n)$ sao cho

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow max$$

với điều kiện

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = 1,2, \dots, m) \\ \quad x_j \ge 0 (j = 1,2, \dots, n) \end{cases}$$

1.2 Bài toán vận chuyển trên mạng (Network Flow Problem)

Một mạng hay một đồ thị bao gồm 2 loại đối tượng: điểm nút và cung. Kí hiệu $\mathcal{N}$ là tập các điểm nút và m là số các điểm nút. Hai điểm nút có thể (hoặc không) được nối với nhau bằng một cung (định hướng). Nếu điểm nút *i* được nối với điểm nút *j* bằng một cung, ta sẽ kí hiệu cung đó là (i, j). Tập hợp tất cả các cung của mạng sẽ được kí hiệu là $\mathcal{A}$, như vậy $\mathcal{A} \subset \{(i, j): i, j \in \mathcal{N}, i \ne j\}$. Như vậy, một mạng có thể xem như là một cặp $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$.

Để mô tả bài toán vận chuyển trên mạng, chúng ta cần có một trọng số tại mỗi nút. Trọng số âm mô tả nhu cầu và trọng số dương mô tả sức cung cấp một vật liệu nào đó tại mỗi nút. Trọng số tại nút $i \in \mathcal{N}$ sẽ được kí hiệu là b_i. Giả sử rằng

Với mỗi cung $(i, j) \in \mathcal{A}$, giả sử c_{ij} là giá chuyên chở một đơn vị vật liệu và x_{ij} là số đơn vị vật liệu chuyên chở từ điểm nút i đến điểm nút j làm thỏa mãn bài toán . Mục tiêu của bài toán là làm cho

$$Min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij}$$

Với mỗi $k \in \mathcal{N}$, điều kiện cân bằng tại điểm nút k là

$$\sum_{(i,k)\in\mathcal{A}} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in\mathcal{A}} x_{kj} = -b_k$$

Cuối cùng, chúng ta có bài toán

$$Min \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij}$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{(i,k)\in\mathcal{A}} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in\mathcal{A}} x_{kj} = -b_k \\ x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in \mathcal{A} \end{cases}$$

§2. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Trong bài toán QHTT, có một số biến cần phải xác định giá trị để làm cực tiểu hoặc cực đại một hàm số. Các biến này được kí hiệu là $x_j (j = 1,2, \dots, n)$ và được gọi là các *biến điều khiển*. Hàm số được làm cực đại hoặc cực tiểu là một hàm tuyến tính theo các biến điều khiển, tức có dạng

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

và được gọi là *hàm mục tiêu*.

Ngoài ra có thêm một số điều kiện hay còn gọi là ràng buộc cho các biến điều khiển. Mỗi ràng buộc có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b.$$

-Bài toán tìm cực đại (cực tiểu) của *f* có thể đưa về bài toán tìm cực tiểu (cực đại) bằng cách đặt $F = -f$.

-Mỗi ràng buộc với một dấu $\leq, =, \geq$ có thể đưa về ràng buộc với các dấu còn lại:

*Ràng buộc $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$ đưa về ràng buộc với dấu = như sau bằng cách thêm vào biến w, đgl *biến phụ (slack variable).*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + w = b, w \geq 0.$$

*Ràng buộc với dấu = có thể đưa về dấu $\leq, \geq$ bằng cách viết

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b \end{cases}$$

*Ràng buộc với dấu ≤ có thể đưa về ràng buộc với dấu ≥ và ngược lại bằng cách đổi dấu ràng buộc.

Do những điều trên, bài toán QHTT có thể phát biểu dạng tổng quát như sau

$$Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Ràng buộc $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$

Chương 2. Phương pháp đơn hình

§1. Ví dụ Chúng ta sẽ xem cụ thể phương pháp đơn hình trên bài toán sau

$$Max\ \ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{Ràng buộc}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Thêm vào các biến phụ để các ràng buộc trở thành dấu =, ta có bài toán

$$Max\ f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{với ràng buộc}\begin{cases} w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ w_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ w_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Ý tưởng của phương pháp đơn hình là bắt đầu từ một bộ $x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3$ thỏa mãn ràng buộc (2.2); sau đó tìm một bộ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ tốt hơn, tức là

$$5\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Tiếp tục quá trinh này cho đến khi có một bộ mà ta không thể làm tốt hơn.

Chúng ta sẽ tìm một bộ khởi đầu. Dễ dàng từ (2.2), chúng ta có được bộ khởi đầu là

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, w_1 = 5, w_2 = 11, w_3 = 8.$$

Gía trị hàm mục tiêu tại bộ này là $f = 0$.

Bây giờ chúng ta sẽ xem có thể làm tốt hơn không. Từ số hạng chứa x_1 trong f là $5x_1$, chúng ta có thể tăng giá trị của f lên nếu tăng giá trị x_1 lên nhưng vẫn giữ nguyên giá tri của x_2 và x_3, nhưng điều này phải bảo đảm các điều kiện không âm của các biến phụ khác. Do $x_2 = x_3 = 0$, gía trị của x_1, từ ràng buộc (2.2) phải bảo đảm rằng

$$\begin{cases} w_1 = 5 - 2x_1 \ge 0 \\ w_2 = 11 - 4x_1 \ge 0 \\ w_3 = 8 - 3x_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Hay}\begin{cases} x_1 \le \frac{5}{2} \\ x_1 \le \frac{11}{4}. \\ x_1 \le \frac{8}{3} \end{cases}$$

Như vậy, ta có thể tăng x_1 lên đến $\frac{5}{2}$. Bộ mới nhận được là

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \frac{1}{2}.$$

Chúng ta vừa hoàn thành một bước trong thuật toán đơn hình, chuyển từ một phương án sang phương án tốt hơn. Để làm điều này, chúng ta có một số biến có giá trị 0 và môt số biến khác, biểu diễn qua các biến này. Như vậy, đối với phương án mới, chúng ta phải biểu diễn những biến còn lại qua các biến có gía trị 0 là x_2, x_3, w_1. Điều này có thể làm thông qua ràng buộc (2.2) và rồi chúng ta có bài toán

$Max\ f = 12{,}5 - 2{,}5w_1 - 3{,}5x_2 + 0{,}5x_3$

với ràng buộc $\begin{cases} x_1 = 2{,}5 - 0{,}5w_1 - 1{,}5x_2 - 0{,}5x_3 \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2 \\ w_3 = 0{,}5 + 1{,}5w_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 \end{cases}$ (2.3)

Từ bài toán này, có thể thấy chỉ có thể tăng x_3 trong 3 biến w_1, x_2, x_3 mới làm cho hàm mục tiêu tăng lên. Tương tự trên, việc tăng x_3 phải bảo đảm giá trị không âm cho các biến khác, điều này thực hiện được nếu $x_3 \leq 1$. Chọn $x_3 = 1$ và ta có phương án mới $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 0$ tại đó $f = 13$.

Chuyển qua bước tiếp, biểu diễn các biến khác và hàm mục tiêu qua w_1, x_2, x_3 ta có bài toán

$$Max\ f = 13 - w_1 - 3x_2 - w_3$$

với ràng buộc $\begin{cases} x_1 = 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2 \\ x_3 = 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3 \end{cases}$ (2.4)

Đến đây, rõ ràng ta không thể tăng biến nào trong các biến w_1, x_2, w_3 mà làm cho hàm mục tiêu tăng lên. Phương án hiện tại là lời giải tối ưu của bài toán.

Chú ý. Trong mỗi bước giải trên, có một số biến được gán giá trị bằng 0 (đgl *biến ngoài cơ sở*) và các biến còn lại (đgl *biến cơ sở*) được tính giá trị theo các biến ngoài cơ sở thông qua các hệ (2.2), (2.3), (2.4). Vì vậy, các hệ (2.2)-(2.4) còn đgl các *từ điển* (biểu diễn hàm mục tiêu và giá trị của các biến cơ sở thông qua các biến ngoài cơ sở). Một từ điển là *chấp nhận được* nếu khi cho các biến ngoài cơ sở bằng 0 thì các biến cơ sở nhận giá trị không âm.

§2.Phương pháp đơn hình

Xét bài toán QHTT dạng

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i (i = 1,2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \; (j = 1,2, \dots, n) \end{cases}$$

Bằng cách thêm vào các biến phụ $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, ta đưa bài toán về dạng

$$Max \; f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Ràng buộc

$$\begin{cases} x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; (i = 1,2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 (j = 1,2, \dots, m+n) \end{cases}$$

Đây là từ điển xuất phát. Như trong ví dụ trên, ta sẽ đi từ từ điển này đến một từ điển khác tốt hơn. Tại mỗi từ điển, ta có m biến cơ sở và n biến ngoài cơ sở. Kí hiệu $\mathcal{B}$ là tập chỉ số của các biến trong cơ sở và $\mathcal{N}$ là tâp chỉ số của các phương án ngoài cơ sở. Như vậy, với từ điển xuất phát ta có $\mathcal{N} = \{1,2, \dots, n\}$ và $\mathcal{B} = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$.

Tại từ điển hiện tại ta có

$$f = \bar{f} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \;\; (i \in \mathcal{B})$$

Tại mỗi bước trong phương pháp đơn hình, chỉ có một biến (đgl *biến đưa vào*) từ $\mathcal{N}$ được chuyển vào trong $\mathcal{B}$ và ngược lại, chỉ có một biến (đgl *biến chuyển đi*) được chuyển từ $\mathcal{B}$ vào $\mathcal{N}$.

Biến đưa vào được chọn với mục đích làm tăng giá trị của hàm hàm mục tiêu. Nghĩa là *biến đưa vào* được chọn một trong các chỉ số k từ tập $\{j \in \mathcal{N} : \bar{c}_j > 0\}$. Chú ý rằng nếu tập này rỗng thì phương án hiện tại sẽ là phương án tối ưu. Có nhiều cách chọn chỉ số k từ tập này, ta sẽ chọn chỉ số k sao cho $\bar{c}_k$ là số lớn nhất thuộc tập này.

Khi đã chọn x_k là *biến đưa vào*, giá trị của x_k sẽ được thay đổi bằng cách tăng từ 0 đến một giá trị dương. Điều này làm thay đổi giá trị của các biến cơ sở:

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik}x_k, \;\; i \in \mathcal{B}.$$

Để cho các biến này vẫn thỏa điều kiện không âm, chúng ta cần phải có

$$\bar{b}_i - \bar{a}_{ik}x_k \geq 0, \;\; i \in \mathcal{B}.$$

Như vậy, x_k sẽ được tăng giá trị nhiều nhất lên đến

$$x_k = \min_{i \in \mathcal{B}: \bar{a}_{ik} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}.$$

Do đó, quy tắc để chọn *biến chuyển đi* là chọn l từ tập $\{i \in \mathcal{B}: \bar{a}_{ik} > 0$ và $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$ cực tiểu$\}$.

Tổng quát, có thể có nhiều cách chọn *biến đưa vào* hoặc *biến chuyển đi*. Các quy tắc làm cho việc chọn các biến này là tất định được gọi là *các quy tắc quay (pivot rules).*

§3. Phương án xuất phát

Trong phần trước, chúng ta khảo sát bài toán trong đó vế phải là các số không âm, điều này làm cho việc chọn từ điển xuất phát trở nên dễ dàng. Trong phần này, chúng ta xét bài toán khi trường hợp đó không xảy ra.

Xét bài toán

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = 1,2,\dots,m) \\ x_j \geq 0 (j = 1,2,\dots,n) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Nếu cần, đổi dấu 2 vế của ràng buộc, có thể giả sử rằng $b_i \geq (i = 1,2,\dots,m)$.

Chúng ta sẽ xét một bài toán phụ mà:

-Từ điển đầu tiên của bài toán phụ này là dễ dàng tìm được.

-Từ điển tối ưu của bài toán phụ cho phép tìm được một từ điển của bài toán ban đầu.

Bài toán phụ là như sau.

$$Min \sum_{i=1}^{m} w_i$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i = b_i (i = 1,2,\dots,m) \\ x_j \geq 0 (j = 1,2,\dots,n), w_i \geq 0 (i = 1,2,\dots,m) \end{cases} \quad (3.2)$$

Với bài toán phụ này, có thể dễ dàng tìm ra phương án xuất phát $(x, w) = (0,0,\dots,0, b_1, b_2, \dots, b_m)$. Từ phương án này, ta giải bài toán phụ (3.2). Do hàm mục tiêu của bài toán (3.2) bị chặn dưới bởi 0 nên (3.2) luôn có ngiệm tối ưu $(x_0, w_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, w_1^0, \dots, w_m^0)$. Có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: $\sum_{i=1}^{m} w_i^0 > 0$:

Khi đó, bài toán gốc (3.1) không có phương án vì nếu *x* là một phương án của (3.1) thì *(x,0)* là một phương án của (3.2). Vô lý.

Trường hợp 2: $\sum_{i=1}^{m} w_i^0 = 0$:

Khi đó x_0 là một phương án của bài toán (3.1) và ta giải (3.1) từ phương án này.

Ví dụ. Xét ví dụ cụ thể sau.

Tìm $Max\ (-2x_1 - x_2)$ (i)

Ràng buộc $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq -2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Đưa bài toán về ràng buộc dấu "=" và các hệ số tự do không âm, ta có bài toán

$Max\ (-2x_1 - x_2)$ (ii)

Ràng buộc $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0 (i = 1,\dots,5) \end{cases}$

Bài toán phụ sẽ là

Tìm $Max\ (-w_1 - w_2 - w_3)$ (iii)

Ràng buộc $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + w_1 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 + w_2 = 2 \\ x_2 + x_5 + w_3 = 1 \\ x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 5), w_i \geq 0 (i = 1,2,3) \end{cases}$

Giải bài toán (iii) với phương án ban đầu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2, w_3) = (0,0,0,0,0,1,2,1)$ ta có từ điển

$$-4 + 2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} w_1 = 1 - x_1 - x_2 + x_3 \\ w_2 = 2 - x_1 + 2x_2 + x_4 \\ w_3 = 1 - x_2 - x_5 \end{cases}$$

Đưa x_1 vào cơ sở và đưa w_1 khỏi cơ sở, ta có từ điển

$$-2 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2w_1$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 + x_3 - w_1 \\ w_2 = 1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_6 \\ w_3 = 1 - x_2 - x_5 \end{cases}$$

Đưa x_3 vào cơ sở và và đưa w_2 khỏi cơ sở, ta có từ điển

$$-1 - x_2 + x_5 - w_1 - w_2$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 + x_4 - w_2 \\ x_3 = 1 + x_2 + x_4 + w_1 - w_2 \\ w_3 = 1 - x_2 - x_5 \end{cases}$$

Đưa x_5 vào cơ sở và đưa w_3 khỏi cơ sở ta có từ điển

$$0 - 2x_2 - w_1 - w_2 - w_3$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 + x_4 - w_2 \\ x_3 = 1 + x_2 + x_4 + w_1 - w_2 \\ x_5 = 1 - x_2 - w_3 \end{cases}$$

Đây là từ điển tối ưu của bài toán phụ (iii). Do giá trị tối ưu là 0, ta có phương án của bài toán (ii) là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2,0,1,0,1)$. Xuất phát từ phương án này, ta có từ điển cho bài toán (ii) là

$$-4 - 5x_2 - 2x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 + x_4 \\ x_3 = 1 + x_2 + x_4 \\ x_5 = 1 - x_2 \end{cases}$$

May mắn, đây là từ điển tối ưu của bài toán (ii).

§4. Trường hợp hàm mục tiêu không bị chặn

Xét việc lựa chọn của biến chuyển đi: chỉ số l được chọn từ tập $\{i \in \mathcal{B}: \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}$ là cực đại$\}$.

Trong trường hợp một trong các mẫu số của các phân số $\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i} (i \in \mathcal{B})$ bằng 0? Nếu tử số tương ứng khác 0, phân số $\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}$ được xem là $+\infty$ hoặc $-\infty$ tùy theo dấu tử số là dương hay âm. Nếu tử số bằng 0, phân số $\frac{0}{0}$ quy ước được xem bằng 0.

Nếu tất cả các phân số $\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}$ đều không dương? Trong trường hợp này, sẽ không có biến cơ sở nào bằng 0 khi tăng giá trị của *biến đưa vào*. Như vậy, biến đưa vào có thể nhận gía trị lớn tùy ý và hàm muc tiêu sẽ nhận giá trị lớn tùy ý. Khi đó, bài toán đgl *không bị chặn*.

Ví dụ. Xét từ điển

$$f = 5 + x_3 - x_1$$

$$\begin{cases} x_2 = 5 + 2x_3 - 3x_1 \\ x_4 = 7 - 4x_1 \\ x_5 = x_1 \end{cases}$$

Biến đưa vào là x_3, các giá trị của các phân số $\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i} (i \in \mathcal{B})$ là $-\frac{2}{5}, -\frac{0}{7}, \frac{0}{0}$. Do không có tỷ số nào nhân giá trị dương, bài toán là không bị chặn.

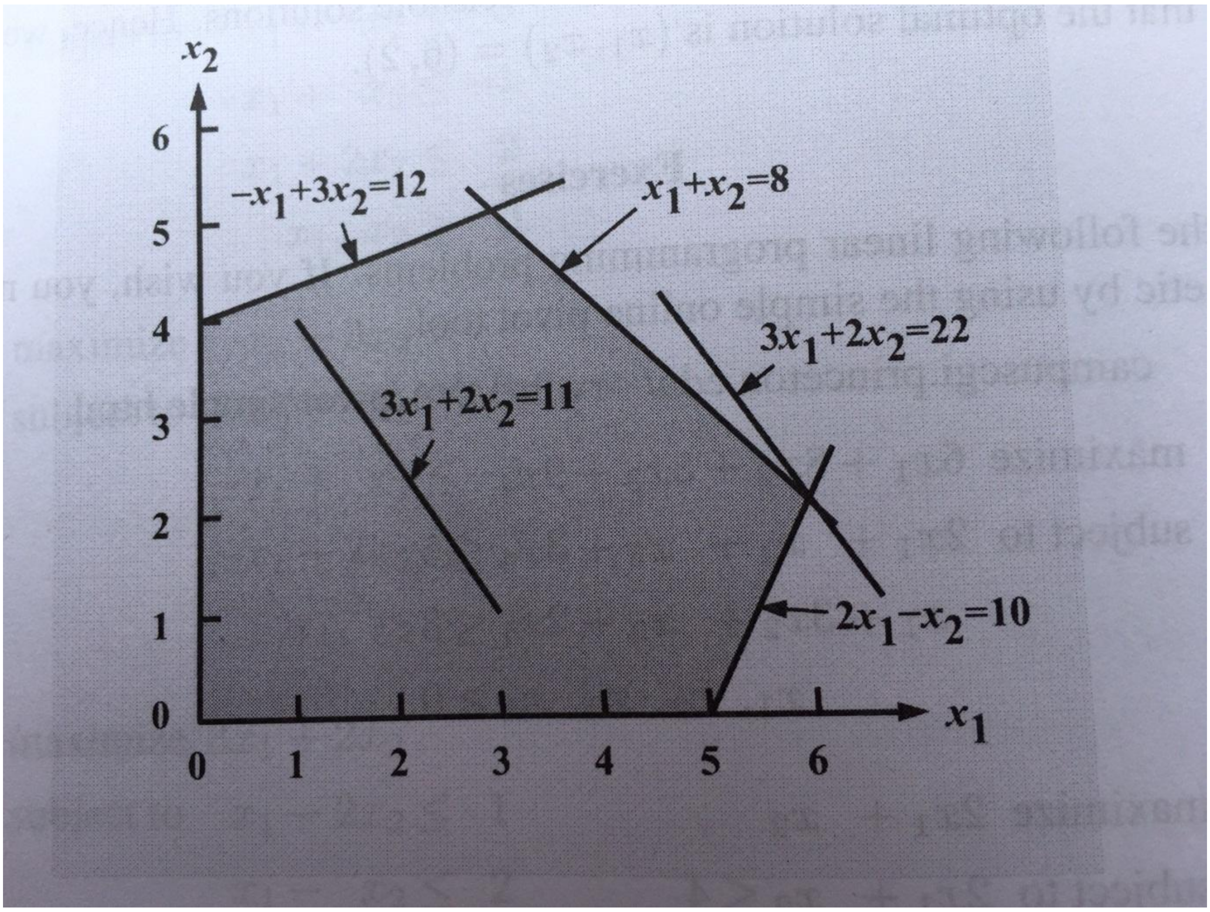
§5. Hình ảnh hình học

Khi số biến trong bài toán QHTT là 3 hoặc ít hơn, chúng ta có thể minh họa bằng đồ thị các khái niệm phương án chấp nhận được, *mặt mức* của hàm mục tiêu. Để mô tả, xét bài toán

$$Max\ f = 3x_1 + 2x_2$$

Ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



Hình 1. Minh họa bằng đồ thị bài toán QHTT

Mỗi ràng buộc xác định một nửa mặt phẳng. Tập hợp các phương án chấp nhận được chính là giao của các nửa mặt phẳng này. Một mặt mức α của hàm mục tiêu là một siêu phẳng có phương trình $f = \alpha$. Hình vẽ chỉ ra 2 mặt mức $f = 11$ và $f = 22$. Khi giá trị α tăng lên, mặt mức $f = \alpha$ sẽ di chuyển theo hướng phải. Khi $\alpha = 22$, mặt mức $f = \alpha$ sẽ giao với tập hợp các phương án chấp nhận được lần cuối cùng tại điểm (6,2). Như vậy, (6,2) là phương án tối ưu của bài toán, giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là $f_{max} = 22$.

§6. Trường hợp suy biến

Định nghĩa. Một từ điển đgl *suy biến* nếu $\overline{b}_i = 0$ với một $i \in \mathcal{B}$ nào đó. Một *quy tắc tay lái* đgl *suy biến* nếu với quy tắc này, một trong các tỷ số được tính khi chọn biến rời đi là $+\infty$, tức tử số dương và mẫu số bằng 0.

Ví dụ. Xét từ điển

$$f = 3 - 0.5x_1 + 2x_2 - 1.5w_1$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 0.5x_1 - 0.5w_1 \\ w_2 = x_1 - x_2 + w_1 \end{cases}$$

Với từ điển này, *biến đưa vào* sẽ là x_2 và các tỷ số nhằm xác định *biến chuyển đi* là 0 và $+\infty$. Vì vậy biến chuyển đi sẽ là w_2, tỷ số $+\infty$ có nghĩa là khi x_2 tăng từ 0 đến một giá trị dương thì w_2 sẽ nhân giá trị âm. Do đó, x_2 không thể tăng đươc nữa. Măc dù vậy, hãy xem từ điển nhận được theo cách này là

$$f = 3 + 1.5x_1 - 2w_2 + 0.5w_1$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 0.5x_1 - 0.5w_1 \\ x_2 = x_1 - w_2 + w_1 \end{cases}$$

Với từ điển mới này, chúng ta vẫn không làm tốt hơn hàm mục tiêu (3) và các biến vẫn nhận giá trị như với từ điển trên đây là $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0{,}0{,}1{,}0{,}0)$.

Tiếp theo, biến đưa vào tiếp theo là x_1 và biến chuyển đi là x_3, ta có từ điển

$$f = 6 - 3x_3 - 2w_2 - w_1$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 - w_1 \\ x_2 = 2 - 2x_3 - w_2 \end{cases}$$

Từ điển này chính là từ điển tối ưu.

Ví dụ trên cho thấy rằng khi có một *quy tắc tay lái* suy biến, các quy tắc tay lái sau đó có thể suy biến hoặc không suy biến. Trong phương pháp đơn hình, có một tình huống nguy hiểm hơn: có thể xảy ra một loạt *các quy tắc tay lái* suy biến và sau đó sinh ra một từ điển đã có trước đó. Điều này làm cho thuật toán kéo dài vô hạn, hiện tượng này đgl *hiện tượng xoay vòng*.

Hiện tượng xoay vòng có thể xảy ra, ngay cả khi dùng *quy tắc tay lái* phổ biến như sau:

-Chọn biến đưa vào là biến tương ứng với hệ số lớn nhất trong hàm mục tiêu.

-Khi hai hoặc nhiều biến có thể được chọn làm biến chuyển đi, chọn biến có chỉ số nhỏ.

Tuy nhiên, rất hiếm khi xảy ra hiện tương xoay vòng. Người ta chỉ ra rằng nếu bài toán có nghiệm tối ưu và hiện xoay vòng xảy ra thì bài toán có ít nhất 6 biến và ít nhất 3 ràng buộc.

Ví dụ. Xét bài toán với từ điển

$$f = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

$$\begin{cases} w_1 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4 \\ w_2 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4 \\ w_3 = 1 - x_1 \end{cases}$$

Dùng quy tắc tay lái trên đây, các từ điển tiếp theo sẽ là:

- $f = -20w_1 + 53x_2 + 41x_3 - 204x_4$

$$\begin{cases} x_1 = -2w_1 + 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 \\ w_2 = w_1 - 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \\ w_3 = 1 + 2w_1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 \end{cases}$$

- $f = -6.75w_1 - 13.25w_2 + 14.5x_3 - 98x_4$

$$\begin{cases} x_1 = 0.75w_1 - 2.75w_2 - 0.5x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 0.25w_1 - 0.25w_2 - 0.5x_3 + 2x_4 \\ w_3 = 1 - 0.75w_1 - 13.25w_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

- $f = 15w_1 - 93w_2 - 29x_1 + 18x_4$

$$\begin{cases} x_3 = 1.5w_1 - 5.5w_2 - 2x_1 + 8x_4 \\ x_2 = -0.5w_1 + 2.5w_2 + x_1 - 2x_4 \\ w_3 = 1 - x_1 \end{cases}$$

- $f = 10.5w_1 - 70.5w_2 - 20x_1 - 9x_2$

$$\begin{cases} x_3 = -0.5w_1 + 4.5w_2 + 2x_1 - 4x_2 \\ x_4 = -0.25w_1 + 1.25w_2 + 0.5x_1 - 0.5x_2 \\ w_3 = 1 - x_1 \end{cases}$$

- $f = -21x_3 + 24w_2 + 22x_1 - 93x_2$

$$\begin{cases} w_1 = -2x_3 + 9w_2 + 4x_1 - 8x_2 \\ x_4 = 0.5x_3 - w_2 - 0.5x_1 + 1.5x_2 \\ w_3 = 1 - x_1 \end{cases}$$

- $f = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$

$$\begin{cases} w_1 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4 \\ w_2 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4 \\ w_3 = 1 - x_1 \end{cases}$$

Đây chính là từ điển ban đầu.

Định lý. Nếu thuật toán đơn hình không kết thúc, sẽ có hiện tượng xoay vòng.

Chứng minh. Một từ điển là hoàn toàn được xác định bởi các biến cơ sở và ngoài cơ sở. Do có tất cả $\binom{n+m}{m}$ cách lựa chọn các biến này, khi thuật toán đơn hình không kết thúc, sẽ có ít nhất một từ điển được lặp lại. ■

Phương pháp đơn hình trong các phần trước thuộc về một họ các phương pháp trong đó xuất phát từ một phương án, dùng các *quy tắc tay lái* để đi đến lời giải tối ưu. Tuy nhiên, các *quy tắc tay lái* có thể đưa thuật toán đến *hiện tượng xoay vòng*. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là có các *quy tắc tay lái* nào làm cho thuật toán chắc chắn đi đến lời giải tối ưu hoặc chứng minh được bài toán không có lời giải hay không? Câu trả lời là có, phần tiếp theo sẽ trình bày 2 phương pháp chọn quy tắc tay lái như vậy.

§7.Phương pháp thêm vào kí tự (Lexicographic Method)

Như đã biết, một từ điển là suy biến nếu có ít nhất một $\bar{b}_i(i \in \mathcal{B})$ nào đó bằng 0. Các ví dụ đã trình bày có các dữ liệu là các số nguyên, do đó các kết quả tính toán thường chính xác. Nhưng trong trường hợp tổng quát, bài toán thương có các dữ liệu thực, do đó các kết quả tính toán thường không chính xác mà bị sai lệch với một sai số nào đó. Nếu chúng ta thêm vào các vế phải các ràng buộc của bài toán các đại lượng nhỏ, chúng sẽ không ảnh hưởng nhiều đến bài toán. Tuy nhiên chúng đủ làm cho một giá trị bằng 0 trở thành khác 0 và như vậy có thể tránh được sự suy biến.

Ví dụ. Xét từ điển suy biến sau

$$f = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} w_1 = 0.5 - x_2 \\ w_2 = -2x_1 + 4x_2 \\ w_3 = x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Thêm vào vế phải các ràng buộc các "số dương hình thức" $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ để được từ điển

$$f = 4 + 2x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} w_1 = 0.5 + \varepsilon_1 - x_2 \\ w_2 = \varepsilon_2 - 2x_1 + 4x_2 \\ w_3 = \varepsilon_3 + x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

Từ điển này rõ ràng không suy biến. Biến đưa vào sẽ là x_1 và biến chuyển đi là w_2:

$$f = 4 + \varepsilon_2 - w_2 + 3x_2$$

$$\begin{cases} w_1 = 0.5 + \varepsilon_1 - x_2 \\ x_1 = 0.5\varepsilon_2 - 0.5w_2 + 2x_2 \\ w_3 = 0.5\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 0.5w_2 - x_2 \end{cases}$$

Từ điển tiếp theo:

$$f = 4 + 2.5\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - 2.5w_2 - 3w_3$$

$$\begin{cases} w_1 = 0.5 + \varepsilon_1 - 0.5\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + 0.5w_2 + w_3 \\ x_1 = 1.5\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 - 1.5w_2 - 2w_3 \\ x_2 = 0.5\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 0.5w_2 - w_3 \end{cases}$$

Đây chính là từ điển tối ưu. Chúng ta chỉ việc bỏ đi các "số dương hình thức" và được từ điển tối ưu của bài toán ban đầu là

$$f = 4 - 2.5w_2 - 3w_3$$

$$\begin{cases} w_1 = 0.5 + 0.5w_2 + w_3 \\ x_1 = -1.5w_2 - 2w_3 \\ x_2 = -0.5w_2 - w_3 \end{cases}$$

Chú ý. *Phương pháp thêm vào kí tự* không ảnh hưởng đến việc chọn biến đưa vào.

Định lý. Phương pháp đơn hình luôn kết thúc nếu biến chuyển đi được chọn theo quy tắc của *phương pháp thêm vào kí tự.*

Chứng minh. Chỉ cần chỉ ra rằng sẽ không có một từ điển suy biến nào được sinh ra . Có thê chọn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ các tỷ lệ khác nhau sao cho không tồn tại một tổ hợp tuyến tính nào của chúng bằng 0.

Các đại lượng trong từ điển đầu tiên lập thành các hàng dạng

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_m \end{matrix}$$

Sau một số bước nào đó, các đại lượng trong từ điển hiện tại lập thành các hàng dạng

$$r_{11}\varepsilon_1 + r_{12}\varepsilon_2 + \cdots + r_{1n}\varepsilon_m$$

$$r_{21}\varepsilon_1 + r_{22}\varepsilon_2 + \cdots + r_{2n}\varepsilon_m$$

$$\dots$$

$$r_{m1}\varepsilon_1 + r_{m2}\varepsilon_2 + \cdots + r_{mm}\varepsilon_m$$

Chú ý các hàng hiện tại nhận được từ các hàng đầu tiên bằng các phép toán khả nghịch, hạng của 2 bảng trên là như nhau, tức không có một hàng nào của bảng dưới bằng 0. Do đó sẽ không có một từ điển suy biến nào được sinh ra.■

§8.Quy tắc Bland

Quy tắc Bland quy định rằng, cả hai biến chuyển vào và biến chuyển đi được chọn trong số những biến có thể chọn có chỉ số nhất.

Định lý. Thuật toán đơn hình luôn kết thúc nếu cả hai biến chuyển vào và biến chuyển đi được chọn theo quy tắc Bland.

Chương 3. Lý thuyết đối ngẫu

Một bài toán QHTT sẽ có một bài toán đối ngẫu, bài toán đối ngẫu của bài toán sau chính là bài toán ban đầu. Như vậy ta có từng cặp bài toán và bài toán đối ngẫu của nó. Mỗi một phương án chấp nhận được của một bài toán sẽ cho một chặn của hàm mục tiêu của bài toán còn lại. Các tính chất của cặp bài toán hình thành lý thuyết đối ngẫu.

§1. Mở đầu.

Xét bài toán

$$Max\ f = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

Ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Giả sử đã biết một phương án chấp nhận được của bài toán là $(x_1, x_2, x_3) = (1,0,0)$. Phương án này cho ta biết rằng giá trị lớn nhất f^* của hàm mục tiêu có một chặn dưới là $f(1,0,0) = 4$, tức $f^* \geq 4$. Việc biết một phương án chấp nhận được khác, chẳng hạn $x_1, x_2, x_3) = (0,0,3)$ cho ta một chặn dưới khác của f^* là $f(0,0,3) = 9$. Tuy nhiên làm sao để biết rằng các chặn dưới này gần f^* bao nhiêu? Để biết điều này, ta cần tìm môt chặn trên của f^*. Điều này có thể làm như sau.

Cộng 2 lần ràng buộc thứ nhất với 3 lần ràng buộc thứ hai, dẫn đến

$$11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11.$$

Suy ra $f = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$. Tức $f^* \leq 11$.

Như vậy ta có ước lượng $9 \leq f^* \leq 11$. Để có một ước lượng tốt hơn, cộng y_1 lần ràng buộc thứ nhất với y_2 lần ràng buộc thứ hai ($y_1, y_2 \geq 0$), dẫn đến

$$(y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2x_3 \leq y_1 + 3y_2$$

Nếu chọn y_1, y_2 sao cho các hệ số của x_1, x_2, x_3 trong bất đẳng thức trên không nhỏ hơn các hệ số tương ứng trong f, tức là nếu chọn y_1, y_2 sao cho

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ 4y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_2 \geq 3 \end{cases}$$

thì ta sẽ có $f \leq y_1 + 3y_2$.

Như vậy, muốn tìm chặn trên tốt nhất, ta phải tìm y_1, y_2 mà $y_1 + 3y_2$ nhỏ nhất. Điều này dẫn đến bài toán sau

$$Min\ y_1 + 3y_2$$

ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ 4y_1 - y_2 \geq 1 \\ \quad y_2 \geq 3 \\ \ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán này đgl bài toán đối ngẫu của bài toán ban đầu.

§2.Bài toán đối ngẫu

Cho bài toán QHTT

$$Max\ \ f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i (i = 1,2, \dots, m) \\ \qquad x_j \geq 0 (j = 1,2, \dots, n) \end{cases} \tag{2.1}$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên, được định nghĩa là bài toán

$$Min\ \ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j \\ \quad y_i \geq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Mệnh đề. Bài toán đối ngẫu của bài toán (2.2) là bài toán (2.1).

Chứng minh. Dễ dàng.■

Như đã thấy ở ví dụ, bài toán đối ngẫu cho phép tìm được môt chặn trên của hàm mục tiêu của bài toán ban đầu. Điều này cũng đúng trong trường hợp tổng quát và được biết đến như là *Định Lý Đối ngẫu Yếu (Weak Duality Theorem).*

Định lý. *(Weak Duality Theorem)*

Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ lần lượt là các phương án chấp nhận được của các bài toán (2.1) và (2.2) thì

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (2.3)$$

Chứng minh.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. \qquad \blacksquare$$

Trong trường hợp bài toán ban đầu có nghiệm, sẽ không có sự chênh lệch giữa hai giá trị tối ưu của hai bài toán, đó là nội dung của Định lý Đối ngẫu Mạnh (Strong Duality Theorem).

Định lý. *(Strong Duality Theorem)*

Giả sử bài toán (2.1) có lời giải tối ưu $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Khi đó bài toán đối ngẫu (2.2) sẽ có lời giải tối ưu $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ và

$$\sum_{j=1}^{n} c_i x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*. \qquad (2.3)$$

Chứng minh. Chỉ cần chỉ ra một phương án chấp nhận được y^* của bài toán (2.2) thỏa mãn (2.3).

Do bài toán (2.1) có nghiệm nên nếu giải (2.1) bằng phương pháp đơn hình, với từ điển cuối cùng, hàm mục tiêu có dạng

$$f = f^* + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$

Chú ý rằng các biến ngoài cơ sở hiện tại có thể là các biến lúc đầu, có thể là các biến phụ thêm vào. Thay vì kí hiệu $\bar{c}_j$, ta sẽ dùng kí hiệu c_j^* cho các biến có trong bài toán ban đầu và dùng kí hiệu d_j^* cho các bbiến phụ thêm vào. Với các biến cơ sở là các biến có trong bài toán ban đầu ta đặt $c_j^* = 0$, với các biến cơ sở là các biến phụ thêm vào ta đặt $d_j^* = 0$. Với kí hiệu như vậy ta có

$$f = f^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} d_i^* w_i$$

Ngoài ra

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

Đặt

$$y_i^* = -d_i^* (i = 1,2, \dots, m) \qquad (2.4)$$

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ là một phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu và thỏa mãn (2.2). Thật vậy, bằng cách viết hàm mục tiêu theo 2 cách:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = f^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} d_i^* w_i$$

$$= f^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} (-y_i^*) \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

$$= f^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \right) x_j$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng trong đẳng thức trên, ta có

$$f^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \qquad (2.5)$$

và

$$c_j = c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \qquad (2.6)$$

Kết hợp (2.3) và (2.5) sẽ dẫn đến (2.2). Ngoài ra, phương án tối ưu của bài toán đầu cho ta $c_j^* \geq 0$, điều này cùng với (2.6) dẫn đến

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \geq c_j \quad (j = 1,2, \dots, n)$$

Tương tự, ta có các d_i^* là không âm, điều này cùng với (2.4) cho

$$y_i^* \geq 0 (i = 1,2, \dots, m)$$

Hai bất đẳng thức trên đây kết thúc phần chứng minh.■

Trong nhiều trường hợp, ta muốn tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu khi đã có phương án tối ưu của bài toán ban đầu. *Định lý Bổ sung Biến phụ (Complementary Slackness Theorem)* dưới đây giúp chúng ta làm điều đó.

Định lý. *(Complementary Slackness Theorem)*

Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một phương án chấp nhận được của bài toán (2.1) và $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ là một phương án chấp nhận được của bài toán (2.2). Giả sử $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ là các biến phụ thêm vào của bài toán (2.1) và $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ là các biến phụ thêm vào của bài toán (2.2). Khi đó x và y lần lượt là các phương án tối ưu của các bài toán (2.1) và (2.2) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_j z_j = 0 \ \ (j = 1,2,\dots,n) \\ w_i y_i = 0 \ \ (i = 1,2,\dots,m) \end{cases} \tag{2.7}$$

Chứng minh.

Do x và y là các phương án chấp nhận được của bài toán (2.1) và (2.2), ta có

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \right) x_j \tag{2.8}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{2.9}$$

(2.8) xảy ra dấu đẳng thức nếu và chỉ nếu $x_j = 0$ hoặc $c_j = \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \ \ (j = 1,2,\dots,n)$, tức $x_j z_j = 0 \ \ (j = 1,2,\dots,n)$. Tương tự, (2.9) xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $w_i y_i = 0 \ \ (i = 1,2,\dots,m)$.■

§3.Phương pháp đơn hình đối ngẫu

Trong mục này, chúng ta sẽ xem điều gì xảy ra nếu áp dụng phương pháp đơn hình cho bài toán đối ngẫu. Phương pháp đơn hình đối ngẫu, hiểu một cách đơn giản, cung cấp một quy tắc mới trong việc chọn biến đưa vào vào biến chuyển đi của bài toán ban đầu.

Ví dụ. Xét bài toán

$$Max\ (-x_1 - x_2)$$

ràng buộc

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -7 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu là

$$Min\ (4y_1 - 8y_2 - 7y_3)$$

ràng buộc

$$\begin{cases} -2y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -1 \\ -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq -1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Thêm vào các biến phụ, ta có cặp bài toán ban đầu và đối ngẫu như sau

(P)
$$\begin{array}{c} f = -x_1 - x_2 \\ \hline w_1 = 4 + 2x_1 + x_2 \\ w_2 = -8 + 2x_1 - 4x_2 \\ w_3 = -7 + x_1 - 3x_2 \end{array}$$

(D)
$$\begin{array}{c} -g = -4y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \hline z_1 = 1 - 2y_1 - 2y_2 - y_3 \\ z_2 = 1 - y_1 + 4y_2 + 3y_3 \end{array}$$

Chú ý rằng từ điển của bài toán (P) là suy biến, trong khi từ điển của (D) là không suy biến. Điều này gợi ý cho chúng ta giải bài toán (D) thay vì (P). Áp dụng thuật toán đơn hình để giải (D), nhưng theo dõi các *quy tắc tay lái* tương ứng cho bài toán (P). Đối với bài toán (D), biến đưa vào y_2 và biến chuyển đi là z_1. Do w_2 là bù với y_2 và x_1 là bù với z_1, chúng ta sẽ chọn w_2 là biến đưa vào và x_1 là biến chuyển đi đối với bài toán (P). Kết quả cho ta 2 từ điển

(P)
$$\begin{array}{c} f = -4 - 0.5w_2 - 3x_2 \\ \hline w_1 = 12 + w_2 + 5x_2 \\ x_1 = 4 + 0.5w_2 + 2x_2 \\ w_3 = -3 + 0.5w_2 - x_2 \end{array}$$

(D)
$$\begin{array}{c} -g = 4 - 12y_1 - 4z_1 + 3y_3 \\ \hline y_2 = 0.5 - y_1 - 0.5z_1 - 0.5y_3 \\ z_2 = 3 - 5y_1 - 2z_1 + y_3 \end{array}$$

Tiếp theo, *biến đưa vào* là y_3 và *biến chuyển đi* là y_2 đối với (D); dẫn đến *biến đưa vào* là w_2 và *biến chuyển đi* là w_3 đối với (P); ta có 2 từ điển

(P)
$$\begin{array}{c} f = -7 - w_3 - 4x_2 \\ \hline w_1 = 18 + 2w_3 + 7x_2 \\ x_1 = 7 + w_3 + 3x_2 \\ w_2 = 6 + 2w_3 + 2x_2 \end{array}$$

(D)
$$\begin{array}{c} -g = 7 - 18y_1 - 7z_1 - 6y_2 \\ \hline y_3 = 1 - 2y_1 - z_1 - 2y_2 \\ z_2 = 4 - 7y_1 - 3z_1 - 2y_2 \end{array}$$

Hai từ điển này đều là các từ điển tối ưu của 2 bài toán.

Hiển nhiên trong mỗi cặp từ điển, các hệ số bên vế phải của từ điển của bài toán (D) tạo thành ma trận bằng đối của chuyển vị của ma trận các hệ số vế phải của từ điển của bài toán (P); do đó thật ra ta không cần viết từ điển của bài toán (D). Phương pháp đơn hình đối ngẫu chỉ mô tả các từ điển của bài toán (P). Tuy nhiên, ở bước đầu tiên chúng ta phải kiểm tra từ điển của (D) là chấp nhận được, điều này có nghĩa là các hệ số của các biến ngoài cơ sở trong hàm mục tiêu bài toán (P) phải không dương. Sau đó chúng ta tiến hành như sau:

-Chọn *biến chuyển đi* là biến cơ sở mà hệ số tự do tương ứng trong từ điển là âm nhiều nhất (nếu không có, từ điển hiên tại chính là từ điển tối ưu).

-So sánh các tỷ số của các hệ số trong hàng của *biến chuyển đi* vừa chọn với các hệ số tương ứng trong hàm mục tiêu, chọn tỷ số âm nhiều nhất như đã làm trong phương pháp đơn hình cho bài toán (P). Khi đã chọn được *biến chuyển đi* và *biến đưa vào*, đi đến từ điển kế tiếp và tiếp tục.

Pha 1 của thuật toán đơn hình đối ngẫu

Xét bài toán

$$Max - x_1 + 4x_2$$

ràng buộc

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -7 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Từ điển cho bài toán này sẽ là

(P)
$$\frac{f = -x_1 + 4x_2}{\begin{array}{c} w_1 = 4 + 2x_1 + x_2 \\ w_2 = -8 + 2x_1 - 4x_2 \\ w_3 = -7 + x_1 - 3x_2 \end{array}}$$

Mặc dù không cần thiết phải tính từ điển đối ngẫu, ta vẫn viết ra là

(D)
$$\frac{-g = -4y_1 + 8y_2 + 7y_3}{\begin{array}{c} z_1 = 1 - 2y_1 - 2y_2 - y_3 \\ z_2 = -4 - y_1 + 4y_2 + 3y_3 \end{array}}$$

Không từ điển nào trong 2 từ điển trên là chấp nhận được, tuy nhiên bằng cách thay đổi hàm mục tiêu của bài toán ban đầu là $h = -x_1 - x_2$, chúng ta sẽ nhận được một từ điển đối ngẫu chấp nhận được. Đây chính là bài toán trong ví dụ trên và từ điển tối ưu là

$$\frac{h = -7 - w_3 - 4x_2}{\begin{array}{c} w_1 = 18 + 2w_3 + 7x_2 \\ x_1 = 7 + w_3 + 3x_2 \\ w_2 = 6 + 2w_3 + 2x_2 \end{array}}$$

Tuy nhiên đây không phải là từ điển tối ưu cho bài toán (P), mặc dù vậy nó là một từ điển chấp nhận được của (P) và ta giải tiếp bằng Pha 2 như sau.

Hàm mục tiêu *f* viết lại theo các biến ngoài cơ sở của từ điển trên là

$$f = -x_1 + 4x_2 = -(7 + w_3 + 3x_2) + 4x_2 = -7 - w_3 + x_2$$

Từ điển xuất phát trong Pha 2 là

$$\frac{f = -7 - w_3 + x_2}{\begin{array}{c} w_1 = 18 + 2w_3 + 7x_2 \\ x_1 = 7 + w_3 + 3x_2 \\ w_2 = 6 + 2w_3 + 2x_2 \end{array}}$$

Biến đưa vào là x_2. Bài toán là không bi chặn.

Chương 4. Phương pháp điểm trong

Chương này nhằm giới thiệu một phương pháp giải bài toán QHTT khác với phương pháp đơn hình, cụ thể là phương pháp *path-following*. Phương pháp này thuộc về một lớp phương pháp đgl các *phương pháp điểm trong (interior-point methods*). Lý do chọn phương pháp *path-following* là do tính đơn giản của nó.

§1.Bài toán chặn của bài toán QHTT

Xét bài toán QHTT

$$Max\ \ c^T x$$

ràng buộc $\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0. \end{cases}$

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là bài toán

$$Min\ \ b^T y$$

ràng buộc $\begin{cases} A^T y \ge c \\ y \ge 0. \end{cases}$

Bằng cách đưa vào biến phụ, ta đưa cặp bài toán trên về cặp bài toán

$$Max\ \ c^T x$$

ràng buộc $\begin{cases} Ax + w = b \\ x, w \ge 0. \end{cases}$ (1)

và

$$Min\ \ b^T y$$

ràng buộc $\begin{cases} A^T y - z = c \\ y, z \ge 0. \end{cases}$

Ý tưởng ở đây là chúng ta tìm cực trị của một hàm, có điều kiện. Điều này tương tự như phương pháp tìm cực trị của hàm nhiều biến bằng phương pháp nhân tử Lagrange. Muốn vậy, phải làm mất các ràng buộc ≥ hay ≤. Điều này có thể làm được một cách thô thiển, chẳng hạn đối với bài toán (1), có thể bỏ đi điều kiện $x_j \ge 0$ bằng cách thay hệ số c_j bởi

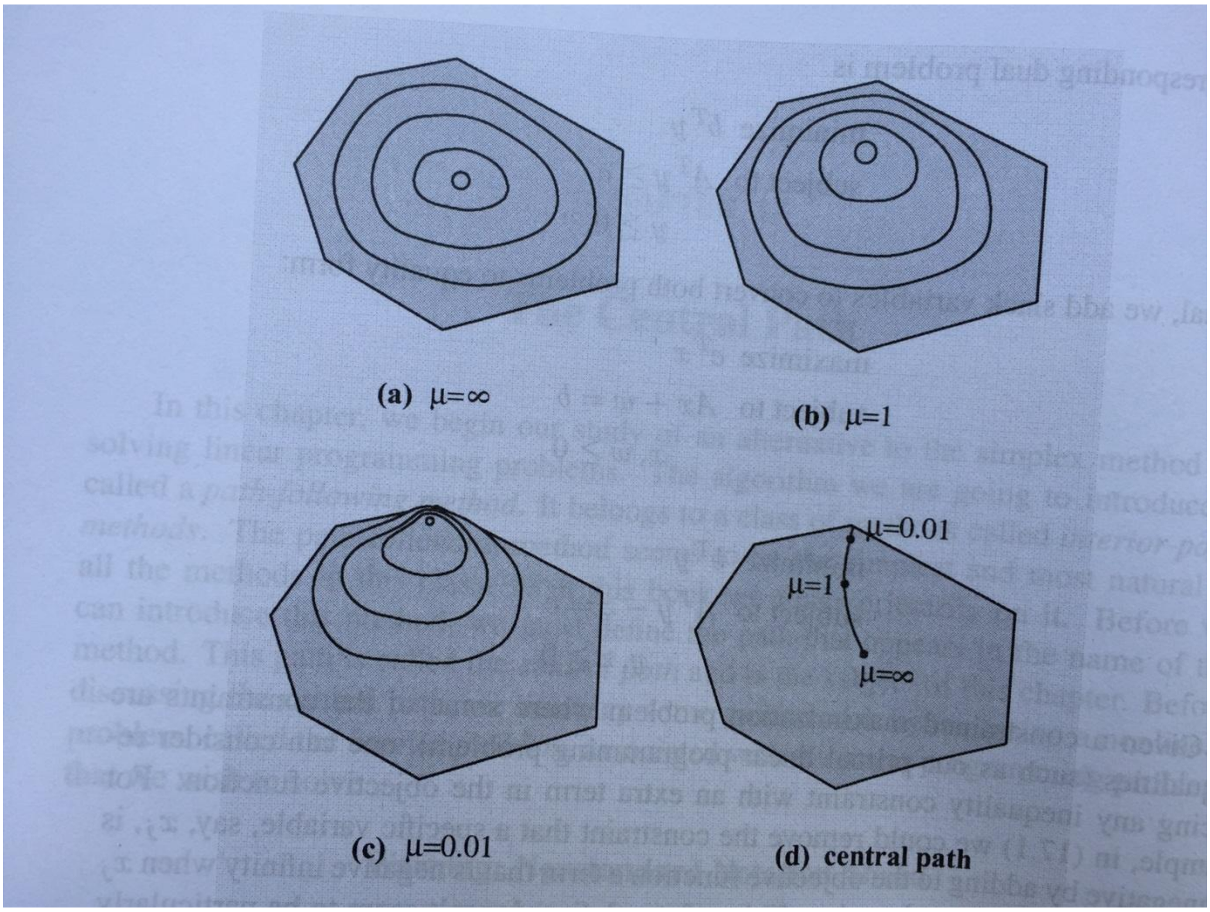
$$c'_j = \begin{cases} +\infty, & nếu\ x_j < 0, \\ c_j, & nếu\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Tuy nhiên, điều này sẽ làm mất tính liên tục của hàm mục tiêu. Chúng ta sẽ thay hàm này bằng một hàm, hữu hạn khi $x_j > 0$ và tiến về $-\infty$ khi $x_j \to 0$, đó là hàm logarith. Bài toán mới sẽ là

$$Max\ \ c^T x + \mu \sum \log x_j + \mu \sum \log w_i$$

ràng buộc $Ax + w = b$. (2)

Bài toán (2) đgl *bài toán chắn* của bài toán (1), thực ra (2) là một họ bài toán phụ thuộc vào tham số dương μ. Bài toán (2) không phải là bài toán QHTT do hàm mục tiêu không tuyến tính (nhưng có thể áp dụng phương pháp nhân tử Lagrange), hàm mục tiêu của nó đgl *hàm chắn logarith* của hàm mục tiêu của (1).



Hình 4.1. -(a), (b),(c) minh họa các mặt mức của hàm chắn với ba giá trị của μ.
-Đường cong ở (d) minh họa đường trung tâm.

Có thể hình dung về mặt hinh học như sau. Miền ràng buộc của bài toán (1) ban đầu là một đa diện (lồi) *D* với mỗi mặt của nó được đặc trưng bởi một số biến nào đó bằng 0. *Hàm chắn* có giá trị hữu hạn tại mỗi điểm trong của D nhưng có giá trị $-\infty$ trên mỗi mặt của D. Càng gần biên, hàm chắn càng tiến về $-\infty$. Hình vẽ minh họa một số mặt mức của hàm chắn với các giá trị khác nhau của μ. Với mỗi μ, bài toán chắn sẽ có lời giải tối ưu là một điểm trong của D, khi $\mu \to 0$ điểm này sẽ tiến gần đến môt điểm biên là lời giải tối ưu của bai toán (1). Khi μ thay đổi, lời giải tối ưu của bài toán chắn sẽ chạy trên một đường nằm ở phần trong của D, đường này đgl *đường trung tâm (central path)*. Trước khi khảo sát bài toán (1) theo khía cạnh này, ta nhắc lại phương pháp tìm cực trị bằng nhân tử Lagrange (Lagrange multipliers) trong phần tiếp theo như sau.

§2.Nhân tử Lagrange

Phương pháp nhân tử Lagrange dùng cho bài toán

$$Max\ \ f(x)$$

với ràng buộc $g(x) = 0$.

Trong đó f, g là các hàm khả vi cấp một. Trong lý thuyết hàm nhiều biến, ta đã biết rằng lời giải x^* của bài toán, nếu có, phải thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} g(x^*) = 0 \\ \nabla f(x^*) = y\nabla g(x^*) \end{cases}$$

trong đó y là một số thực, đgl *nhân tử Lagrange*.

Điều kiện tối ưu bậc một

Xét bài toán

$$Max\ \ \ f(x)$$

ràng buộc

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \\ \quad\vdots \\ g_m(x) = 0 \end{cases}$$

Phương pháp nhân tử Lagrange, với $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$, cho ta hệ mà lời giải tối ưu x^* của bài toán trên thỏa mãn là:

$$\begin{cases} g(x^*) = 0 \\ \nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g(x^*) \end{cases} \qquad (3)$$

Nếu định nghĩa hàm Lagrange

$$L(x, y) = f(x) - \sum y_i g_i(x)$$

thì hệ để xác định x^* là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_i y_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,2,\dots,n \\ \qquad \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = -g_i = 0, \;\; i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

Các phương trình trên đây xác định một hệ đgl *điều kiện tối ưu bậc một*.

Trong trường hợp các ràng buộc là tuyến tính, lời giải tối ưu được tìm thông qua việc khảo sát ma trận Hessian của f tại *x* là:

$$Hf(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right].$$

Định lý. Nếu các ràng buộc là tuyến tính, điểm x^* là điểm cực trị địa phương nếu

$$\xi^T Hf(x^*)\xi < 0 \qquad (4)$$

với $\xi \neq 0$ thỏa mãn

$$\xi^T \nabla g_i(x^*) = 0, \;\; i = 1,2,\dots,m. \qquad (5)$$

Chứng minh. Khai triển Taylor của hàm f tại điểm x^* có dạng

$$f(x^* + \xi) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T \xi + \frac{1}{2}\xi^T Hf(x^*)\xi + o(\|\xi\|^2)$$

Nếu ξ thỏa mãn (5) thì từ (3) và (5) ta có $\nabla f(x^*)^T \xi = 0$, do đó

$$f(x^* + \xi) = f(x^*) + \frac{1}{2}\xi^T Hf(x^*)\xi + o(\|\xi\|^2)$$

Đẳng thức trên kết hợp với (4) hoàn thành việc chứng minh.■

Chú ý rằng nếu (4) xảy ra không chỉ tại x^* mà tại *x* bất kỳ, thì x^* là điểm cực đại toàn cục duy nhất.

§3.Áp dụng vào bài toán chắn

Nhắc lại bài toán chắn

$$Max\;\; c^T x + \mu \sum \log x_j + \mu \sum \log w_i$$

ràng buộc $Ax + w = b$.

Hàm Lagrange của bài toán này là

$$L(x,w,y) = c^T x + \mu \sum \log x_j + \mu \sum \log w_i + y^T(b - Ax - w)$$

Điều kiện tối ưu bậc một sẽ là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = c_j + \mu \dfrac{1}{x_j} - \sum y_i a_{ij} = 0, \ \ j = 1,2,\dots,n \\ \dfrac{\partial L}{\partial w_i} = \mu \dfrac{1}{x_j} - y_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,m \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = b_i - \sum_j a_{ij} x_j - w_i = 0, \ \ i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

Viết điều kiên này dưới dạng ma trận:

$$\begin{cases} A^T y - \mu X^{-1} e = c \\ y = \mu W^{-1} e \\ Ax + w = b \end{cases}$$

Trong đó, *X* kí hiệu là ma trận chéo đã giới thiệu ở đầu chương tương ứng với *x*, *W* được hiểu tương tự, còn *e* là vector có tất cả các thành phần bằng *1*.

Kí hiệu $z = \mu X^{-1} e$, chúng ta viết lại điều kiện tối ưu bậc một:

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ A^T y - z = c \\ z = \mu X^{-1} e \\ y = \mu W^{-1} e \end{cases}$$

Nhân đẳng thức thứ ba cho X và đẳng thức thứ tư cho W, ta đi đến

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ A^T y - z = c \\ XZe = \mu e \\ YWe = \mu e \end{cases} \qquad (6)$$

Ràng buộc thứ nhất có trong bài toán xuất phát, còn ràng buộc thứ hai có trong bài toán đối ngẫu. Viết hai ràng buộc còn lai theo các thành phần:

$$\begin{cases} x_j z_j = \mu, \qquad j = 1,2,\dots,n \\ y_i w_i = \mu, \qquad i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

Ta thấy đây là điều kiện rất quen thuộc. Nếu cho $\mu = 0$, đây chính là điều kiện bù cho phương án tối ưu. Vì vậy, ta gọi điều kiện này là điều kiện μ −bù.

Điều kiện tối ưu bậc một, như ở (6), là hệ phương trình gồm $2n + 2m$ phương trình với $2n + 2m$ ẩn. Như vậy, việc giải bài toán QHTT không khó hơn việc giải một hệ phương trình tuyến tính. Biểu thức có thể gây ra hệ không tuyến tính chính là các số hạng $x_j z_j$, tuy vậy điều này rất ít khi gặp phải.

Một câu hỏi đặt ra là hệ (6) có nghiệm và nghiệm có duy nhất không. Chúng ta tính các đạo hàm riêng bậc hai của hàm chắn.

Các đạo hàm riêng cấp một là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = c_j + \dfrac{\mu}{x_j}, \ \ j = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial f}{\partial w_i} = \dfrac{\mu}{w_i}, \ \ i = 1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Các đạo hàm riêng cấp hai là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = -\dfrac{\mu}{x_j^2}, \qquad j = 1,2,\dots,n, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial w_i^2} = -\dfrac{\mu}{w_i^2}, \qquad i = 1,2,\dots,m. \end{cases}$$

Ngoài ra, các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp đều bằng 0. Do đó, ma trận Hessian của f là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo âm. Theo định lý ở §2, có nhiều nhất một điểm dừng và nếu có, đó là điểm cực đại toàn cục.

Bây giờ ta khảo sát sự tồn tại lời giải của bài toán chắn.

Trong một số trường hợp, bài toán chắn là không có nghiệm, như trong ví dụ sau.

Xét bài toán tầm thường sau

$$Max\ 0$$

ràng buộc $\qquad x \geq 0$

Hàm chắn cho bài toán này là

$$f(x) = \mu \log x$$

không có cực đại (chính xác, cực đại bằng $+\infty$ đạt được khi $x = +\infty$).

Trong trường hợp tổng quát, chúng ta có kết quả sau.

Định lý. Bài toán chắn có lời giải tối ưu nếu và chỉ nếu các miền ràng buộc của bài toán ban đầu và bài toán đối ngẫu có phần trong khác rỗng.

Chứng minh. Phần chứng minh "chỉ nếu" là tầm thường. Chúng ta chứng minh điều kiện "nếu" bằng cách giả sử rằng các miền ràng buộc của bài toán ban đầu và bài toán đối ngẫu có phần trong khác rỗng. Khi đó tồn tại các phương án chấp nhận được $(\bar{x}, \bar{w})$ và $(\bar{y}, \bar{z})$ của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu mà $\bar{x}, \bar{w}, \bar{y}, \bar{z} > 0$.

Giả sử (x, w) là môt phương án chấp nhận được của bài toán gốc. Ta có

$$\bar{z}^T x + \bar{y}^T w = (A^T \bar{y} - c)^T x + \bar{y}^T (b - Ax) = b^T \bar{y} - c^T x.$$

Suy ra

$$c^T x = -\bar{z}^T x - \bar{y}^T w + b^T \bar{y}.$$

Hàm chắn của bài toán có thể viết lại như sau.

$$f(x, w) = c^T x + \mu \sum \log x_j + \mu \sum \log w_i$$

$$= \sum_j \left(-\bar{z}_j x_j + \mu \log x_j\right) + \sum_i (-\bar{y}_i w_i + \mu \log w_i) + b^T \bar{y}.$$

Trong đẳng thức trên, số hạng sau cùng là môt hằng số; mỗi số hang trong 2 tổng trước là hàm một biến dạng $h(\xi) = -a\xi + \mu \log \xi$, $(0 < \xi < +\infty)$ với $a > 0$. Dễ dàng thấy rằng hàm $h(\xi)$ đạt giá trị lớn nhất tại $\xi = \frac{\mu}{a}$ và dần đến $-\infty$ khi $\xi \to +\infty$. Do đó, với mỗi hằng số c, tập $\{(x, w) \in \mathbb{R}^{n+m} : f(x, w) \geq c\}$ là bị chặn.

Đặt $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{w})$ và $\bar{P} = \left\{(x, w) : Ax + w = b, x \geq 0, w \geq 0, f(x, w) \geq \bar{f}\right\}$.

Rõ ràng $\bar{P} \neq \emptyset$ do $(\bar{x}, \bar{w}) \in \bar{P}$, ngoài ra theo trên, $\bar{P}$ là tập bị chặn. Ngoài ra

$$\bar{P} = \{(x, w) : Ax + w = b\} \cap \{(x, w) : x \geq 0, w \geq 0\} \cap \left\{(x, w) : f(x, w) \geq \bar{f}\right\}$$

là giao của 3 tập đóng nên là tập đóng.

Do đó $\bar{P}$ là tập compact. Vì *f* là hàm liên tục nên *f* đạt giá trị lớn nhất trên $\bar{P}$, tức f cũng đat giá trị lớn nhất trên tập $\{(x, w) : x > 0, w > 0\}$.■

Một hệ quả rõ ràng của định lý trên đây là như sau.

Hệ quả. Nếu tập các phương án chấp nhận được của bài toán QHTT ban đầu (hoặc của bài toán đối ngẫu) có phần trong khác rỗng và bị chặn thì với mỗi giá trị $\mu > 0$, tồn tại duy nhất lời giải $(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$ của bài toán (6).

Đường $\left\{\left(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu\right) : \mu > 0\right\}$ đgl đường trung tâm của cặp bài toán QHTT và bài toán đối ngẫu. Nó đóng vai trò cơ bản trong các phương pháp điểm trong giải bài toán QHTT.

§4.Phương pháp dò đường (Path-Following Method)

Phần này giới thiệu một phương pháp, xuất phát từ một điểm có thể không phải là một phương án chấp nhận được của bài toán QHTT ban đầu hoặc của bài toán đối ngẫu, từ điểm này chúng ta tìm cách đi đến lời giải tối ưu. Nghĩa là, chúng ta xuất phát từ điểm $(x, w, y, z) > 0$ và thực hiện các bước:

(1)Đánh giá giá trị thích hợp hơn cho μ.

(2)Tìm hướng di chuyển $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$ để đi đến "gần" điểm $\left(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu\right)$ trên đường trung tâm.

(3)Tính tham số θ sao cho các giá trị mới

$\bar{x} = x + \theta\Delta x, \bar{y} = y + \theta\Delta y, \bar{w} = w + \theta\Delta w, \bar{z} = z + \theta\Delta z$

vẫn còn nhận những giá trị dương.

(4)Thay thế (x, w, y, z) bởi $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{y}, \bar{z})$.

Các mục tiếp theo sẽ giải quyết các bước trên đây.

Tìm hướng di chuyển

Chúng ta sẽ tìm $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$ sao cho điểm mới $(x + \Delta x, w + \Delta w, y + \Delta y, z + \Delta z)$ sẽ "xấp xỉ" nằm trên đường trung tâm tại điểm $\left(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu\right)$. Nhắc lại rằng hệ xác định điểm (x, w, y, z) trên đường trung tâm là

$$\begin{cases} Ax + w = b \\ A^T y - z = c \\ XZe = \mu e \\ YWe = \mu e \end{cases}$$

Tại điểm mới $(x + \Delta x, w + \Delta w, y + \Delta y, z + \Delta z)$, hệ này là

$$\begin{cases} A(x + \Delta x) + (w + \Delta w) = b \\ A^T(y + \Delta y) - (z + \Delta z) = c \\ (X + \Delta X)(Z + \Delta Z)e = \mu e \\ (Y + \Delta Y)(W + \Delta W)e = \mu e \end{cases}$$

hay dưới dạng khác như sau

$$\begin{cases} A\Delta x + \Delta w = b - Ax - w \coloneqq \rho \\ A^T\Delta y - \Delta z = c - A^T y + z \coloneqq \sigma \\ Z\Delta x + X\Delta Z + \Delta X\Delta Ze = \mu e - XZe \\ W\Delta y + Y\Delta w + \Delta Y\Delta We = \mu e - YWe \end{cases}$$

Hệ trên là hệ phương trình theo các biến $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$, tuy vậy hệ này không phải là hệ tuyến tính. Bằng cách bỏ qua các số hạng phi tuyến, ta có hệ tuyến tính

$$\begin{cases} A\Delta x + \Delta w = \rho & (7) \\ A^T\Delta y - \Delta z = \sigma & (8) \\ Z\Delta x + X\Delta Z = \mu e - XZe & (9) \\ W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe & (10) \end{cases}$$

với $2n + 2m$ phương trình và $2n + 2m$ ẩn số. Mục sau ta sẽ chỉ ra rằng hệ này là không suy biến với giả thiết A là ma trận có hạng đầy đủ.

Nếu việc bỏ các số hạng phi tuyến làm ai đó bận tâm, chú ý rằng đây lại là một cách tiếp cận rất thông dụng để giải một hệ phi tuyến, chẳng hạn như phương pháp Newton sau đây.

Phương pháp Newton

Xét hàm số $F(\xi) = \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ F_2(\xi) \\ \vdots \\ F_N(\xi) \end{bmatrix}$ với $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix}$ từ $\mathbb{R}^N$ vào $\mathbb{R}^N$. Bài toán là tìm một nghiệm của F, tức là một điểm $\xi^* \in \mathbb{R}^N$ sao cho $F(\xi^*) = 0$. Phương pháp Newton là một phương pháp lặp để giải bài toán này. Giả sử đã cho $\xi \in \mathbb{R}^N$, mục đích của ta là tìm một bước $\Delta\xi$ mà $F(\xi + \Delta\xi) = 0$. Tất nhiên là với một hàm phi tuyến F, rất khó để tìm được $\Delta\xi$ như vậy. Do đó, ta xấp xỉ F bằng 2 số hạng đầu tiên trong khai triển Taylor của F:

$$F(\xi + \Delta\xi) \approx F(\xi) + F'(\xi)\Delta\xi,$$

trong đó

$$F'(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_N}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial \xi_N} \end{bmatrix}.$$

Hàm xấp xỉ là tuyến tính theo $\Delta\xi$. Như vậy, với xấp xỉ này, điều kiện $F(\xi + \Delta\xi) = 0$ sẽ dẫn đến

$$F'(\xi)\Delta\xi = -F.$$

Phương trình này cho phép tính được $\Delta\xi$. Với $\Delta\xi$ tìm được, ta thay ξ bởi $\xi + \Delta\xi$. Quá trình này tiếp tục cho đến khi tìm được ξ mà $F(\xi) \approx 0$. Các ví dụ một chiều chỉ ra rằng phương pháp này rất tốt, tuy nhiên có thể không thực hiện được khi điểm xuất phát nằm xa lời giải.

Bây giờ, trở lại với bài toán tìm điểm nằm trên đường trung tâm. Với

$$\xi = [x, w, y, z]'$$

và

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} Ax + w - b \\ A^T y - z - c \\ XZe - \mu e \\ YWe - \mu e \end{bmatrix}$$

ta có

$$F'(\xi) = \begin{bmatrix} A & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^T & -I \\ Z & 0 & 0 & X \\ 0 & Y & W & 0 \end{bmatrix}$$

Có thể kiểm tra hướng tìm bởi phương pháp Newton được tìm từ hệ như hệ (7)-(10).

Giá trị thích hợp cho tham số chắn

Thực nghiệm cho thấy rằng nếu chọn μ có giá tri lớn, dãy các điểm nhận được sẽ hội tụ về một điểm trong của miền ràng buộc, thường không phải là nghiệm tối ưu của bài toán. Nếu chọn gía trị nhỏ cho μ, các điểm sẽ rãi rác chung quanh đường trung tâm và thuật toán có thể dẫn đến một điểm không phải tối ưu.

Giả sử ta đã biết điểm (x, w, y, z).

Nếu điểm này nằm trên đường trung tâm, ta có thể tính được giá trị của μ. Chẳng hạn, có thể tính các gía trị $z_j x_j$ và $y_i w_i$, sau đó có thể tính gía trị trung bình của các giá trị này:

$$\mu = \frac{z^T x + y^T w}{m + n}.$$

Nếu điểm này không nằm trên đường trung tâm, chúng ta chọn μ theo công thức trên, sai khác một hệ số:

$$\mu = \delta \frac{z^T x + y^T w}{m + n},$$

trong đó $0 < \delta < 1$. Trong thực tế, người ta thấy rằng khi $\delta \approx \frac{1}{10}$ sẽ cho kết quả tốt.

Chọn tham số độ dài của bước chuyển

Độ lớn của hướng chuyển dịch, theo phương pháp Newton, là xác định các giả thiết để độ dài của tham số θ bằng 1 (tức $\bar{x} = x + \Delta x$,...). Tuy nhiên viêc chọn $\theta = 1$ có thể làm cho các biến trong bài toán ban đầu và bài toán đối ngẫu không thỏa mãn điều kiện dương. Vì vậy, chúng ta phải cần một giá trị nhỏ hơn cho tham số θ.

Chúng ta cần có $x_j + \theta \Delta x_j > 0, j = 1,2, \dots, n$.

Như vậy tham số θ cần thỏa mãn $\frac{1}{\theta} > -\frac{\Delta x_j}{x_j}, j = 1,2, \dots, n$.

Tương tự, ta có các điều kiện mà θ cần phải thỏa mãn khi thay x bởi w, y và z. Cuối cùng, giá trị lớn nhất mà θ có thể nhận được cho bởi

$$\frac{1}{\theta} = \max_{i,j} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\}.$$

Tuy nhiên, việc chọn θ theo công thức trên không đảm bảo cho các bất đẳng thức xảy ra ngặt. Vì vậy ta chọn một tham số dương r nhỏ hơn 1, và chọn

$$\theta = \min \left\{ r \left(\max_{i,j} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\} \right)^{-1}, 1 \right\}.$$

Khởi tạo $(x, w, y, z) > 0$

While (chưa phải nghiệm tối ưu){

$\rho = b - Ax - w$

$\sigma = c - A^T y + z$

$\gamma = z^T x + y^T w$

$\mu = \delta \frac{\gamma}{m+n}$

Giải hệ

$$\begin{cases} A\Delta x + \Delta w = \rho \\ A^T \Delta y - \Delta z = \sigma \\ Z\Delta x + X\Delta Z = \mu e - XZe \\ W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe \end{cases}$$

Đặt $\theta = \min \left\{ r \left(\max_{i,j} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\} \right)^{-1}, 1 \right\}$

$x \leftarrow x + \theta \Delta x, y \leftarrow y + \theta \Delta y,\ w \leftarrow w + \theta \Delta w,\ z \leftarrow z + \theta \Delta z$

}

Thuật toán dò đường

Chương 5. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính trong Excel

Có rất nhiều phần mềm thực hiện việc giải bài toán QHTT như Maple, Excel, Matlab,... Chương này hướng dẫn việc giải bài toán QHTT trong Excel. Giả sử ta muốn giải bài toán

$$Max\ /\ Min\quad f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{ràng buộc}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_1 \\ x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

§1.Khai báo các tham số bài toán

Trước khi giải, phải khai báo với Excel các thông tin:

a.Các gía trị của $c_1, c_2, \dots, c_n$. Mỗi giá trị này được nhập vào các ô trong bảng tính Excel. Thường các ô này được chọn liên tiếp nhau để việc đánh công thức (của hàm mục tiêu và các ràng buộc) được thuận tiện.

b.Khai báo với Excel các ô nào sẽ chứa gía trị của $x_1, x_2, \dots, x_n$.

c.Ô nào sẽ chứa gía trị cần cực tiểu hóa Max/Min (ô nào chứa gía trị hàm mục tiêu).

d.Các ô chứa các giá trị của các biểu thức $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ $(i = 1,2, \dots, m)$

e.Khai báo các dấu $(\le, \ge, =)$ cho mỗi ràng buộc, kèm theo với mỗi gía trị $b_i(i = 1,2, \dots, m)$.

Ví dụ Giải bài toán (2.1)

$$Max\ \ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{Ràng buộc}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Vào trang tính của Excel và khai báo như sau:

-Đối với khai báo a., ta dùng các ô A1, B1, C1 để chứa các giá trị của c_1, c_2, c_3.

-Dùng các ô A2, B2, C2 để chứa các giá trị của x_1, x_2, x_3. Vì vậy ta bỏ trống các ô này và sẽ khai báo với Excel sau.

-Dùng ô D3 để chứa giá trị của hàm mục tiêu. Vì vậy ta nhập công thức vào cho ô D3 là $A1 * A2 + B1 * B2 + C1 * C2$. Sẽ khai báo với Excel rằng ô D3 chứa giá trị hàm mục tiêu sau.

-Dùng các ô trong hình chữ nhật từ A5 đến C7 chứa giá trị của các $a_{ij} (i, j = 1,2,3)$.

Vì vậy ta nhập: .các giá trị c_{11}, c_{12}, c_{13} vào các ô A5, B5, C5,

. các giá trị c_{21}, c_{22}, c_{23} vào các ô A6, B6, C6,

. các giá trị c_{31}, c_{32}, c_{33} vào các ô A7, B7, C7.

-Dùng các ô D5, D6, D7 để chứa giá trị vế trái của các ràng buộc. Vì vậy ta nhập:

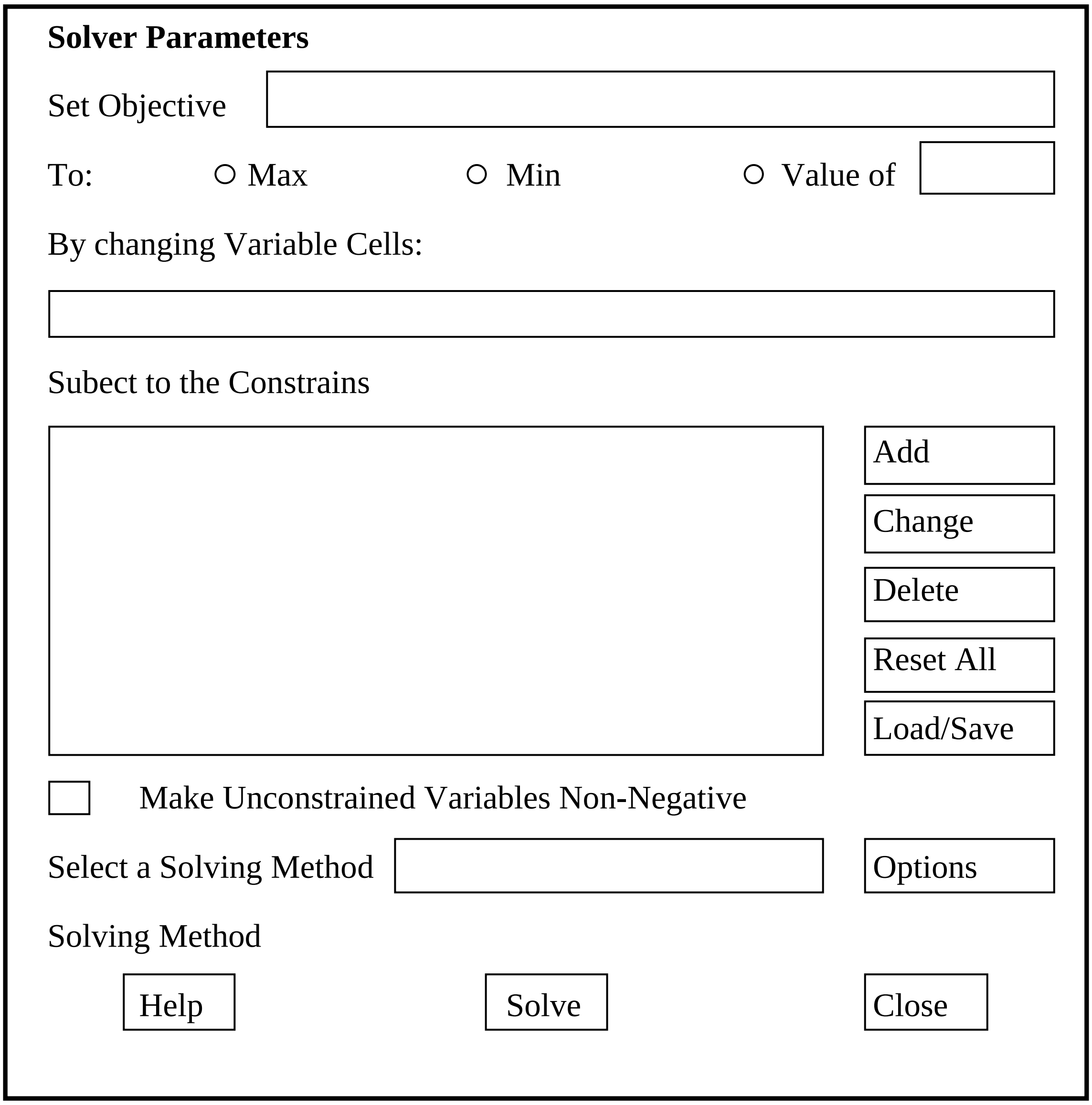
.công thức A2*A5+B2*B5+C2*C5 vào cho ô D5,

. công thức A2*A6+B2*B6+C2*C6 vào cho ô D6,

. công thức A2*A7+B2*B7+C2*C7 vào cho ô D7.

§2.Khai báo các biến, hàm mục tiêu và các ràng buộc

Sau khi khai báo các tham số của bài toán, ta chọn chức năng **Solver** trong Menu của Exel. Hộp thoại **Solver Parameters** sẽ xuất hiện, chẳng hạn trong Office 2010:



Khai báo trong khung **Set Objective** địa chỉ của ô chứa giá trị hàm mục tiêu. Trong ví dụ, ta đánh vào khung này địa chỉ D3.

Khai báo hàm mục tiêu cần tìm max/min và kiểu giá trị (nguyên, thực).

Khai báo trong khung **By Changing Variable Cells** các ô chứa các biến cần tìm giá trị. Trong ví dụ, ta đánh vào khung này A2:C2.

Khung **Subject to the Constrains** để khai báo các ràng buộc. Muốn khai báo một ràng buộc, ta click chuột vào **Add**, màn hình sẽ hiện ra hộp thoại **Add Constraint** như sau.

Add Constraint

Cell Reference   Constraint

	<=	
OK	Add	Cancel

Ta đánh ô chứa giá trị của vế trái ràng buộc vào khung **Cell Reference**, chọn dấu thích hợp từ khung giữa và đánh giá trị vế phải ràng buộc vào khung **Constraint**. Chẳng hạn, để khai báo ràng buộc $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$, ta đánh:

.D5 vào khung **Cell Reference,**

.Chọn dấu <= ở khung **Add**,

.5 vào khung **Constraint**.

§3.Giải bài toán

Sau khi đã khai báo tất cả các ràng buộc, ta chọn khung **Make Unconstrained Variables Non-Negative** trong hộp thoại **Solver Parameters** để khai báo các biến là không âm. Sau đó chọn phương pháp giải bài toán trong khung **Select a Solving Method**, trong ví dụ ta chọn phương pháp là **Simplex LP** (Simples: đơn hình, Linear Programming: quy hoạch tuyến tính). Sau đó click vào khung **Solve** trong hộp thoại **Solver Parameters**, Exel sẽ giải bài toán và đưa ra kết quả. Chẳng hạn, với ví dụ trên Excel sẽ đưa ra kết quả trong hộp thoai Solver Results như sau.

Solver Results

Solver found a solution. All constraints and optimality

conditions are satisfied.   Reports

Keep Solver Solution Restore Original Values	Answer Sensitivity Limits

☐ Return to Solver Parameters Dialog   ☐ Outline Report

OK	Cancel	Save Scenario

Kết quả sẽ được lưu lại trong các sheet khác trong cùng một file Excel, định dạng tùy theo các options được chọn trong khung **Reports.**

Mục lục