# MỤC LỤC

# LỜI NÓI ĐẦU

Theo dòng lịch sử, môn *Đại số tuyến tính* khởi đầu với việc giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Về sau, để có thể hiểu thấu đáo cấu trúc của tập nghiệm và điều kiện để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm, người ta xây dựng những khái niệm trừu tượng hơn như không gian véctơ và ánh xạ tuyến tính. Người ta cũng có nhu cầu khảo sát các không gian với nhiều thuộc tính hình học hơn, trong đó có thể đo độ dài của véctơ và góc giữa hai véctơ. Xa hơn, hướng nghiên cứu này dẫn tới bài toán phân loại các dạng toàn phương, và tổng quát hơn phân loại các tenxơ, dưới tác động của một nhóm cấu trúc nào đó.

Ngày nay, Đại số tuyến tính được ứng dụng vào hàng loạt lĩnh vực khác nhau, từ Giải tích tới Hình học vi phân và Lý thuyết biểu diễn nhóm, từ Cơ học, Vật lý tới Kỹ thuật... Vì thế, nó đã trở thành một môn học cơ sở cho việc đào tạo các giáo viên trung học, các chuyên gia bậc đại học và trên đại học thuộc các chuyên ngành khoa học cơ bản và công nghệ trong tất cả các trường đại học.

Đã có hàng trăm cuốn sách về Đại số tuyến tính được xuất bản trên toàn thế giới. Chúng tôi nhận thấy có hai khuynh hướng chủ yếu trong việc trình bày môn học này.

Khuynh hướng thứ nhất bắt đầu với các khái niệm ma trận, định thức và hệ phương trình tuyến tính, rồi đi tới các khái niệm trừu tượng hơn như không gian véctơ và ánh xạ tuyến tính. Khuynh hướng này *dễ tiếp thu*. Nhưng nó không cho phép trình bày lý thuyết về định thức và hệ phương trình tuyến tính bằng một ngôn ngữ cô đọng và đẹp đẽ.

Khuynh hướng thứ hai trình bày các khái niệm không gian véctơ và ánh xạ tuyến tính trước, rồi áp dụng vào khảo sát định thức và hệ phương trình tuyến tính. Ưu điểm của phương pháp này là *đề cao vẻ đẹp trong tính nhất quán về cấu trúc* của các đối tượng được khảo sát. Nhược điểm của nó là khi xét tính độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính, thật ra người ta đã phải đối mặt với việc giải hệ phương trình tuyến tính.

Cách trình bày nào cũng có cái lý của nó. Theo kinh nghiệm của chúng tôi thì nên chọn cách trình bày thứ hai cho các sinh viên có khả năng tư duy trừu tượng tốt hơn và có mục đích hướng tới một mặt bằng kiến thức cao hơn về toán.

Cuốn sách này được chúng tôi biên soạn nhằm mục đích làm *giáo trình* và *sách tham khảo* cho sinh viên, sinh viên cao học và nghiên cứu sinh các ngành khoa học tự nhiên và công nghệ của các trường đại học khoa học tự nhiên, đại học sư phạm và đại học kỹ thuật. Cuốn sách được viết trên cơ sở các bài giảng về Đại số tuyến tính của tôi trong nhiều năm cho sinh viên một số khoa của trường Đại học Tổng hợp (nay là Đại học khoa học Tự nhiên) Hà Nội và của một số trường đại học sư phạm. Đặc biệt, tôi đã giảng giáo trình này trong 3 năm học 1997-1998, 1998-1999, 1999-2000 cho sinh viên các ngành Toán, Cơ, Lý, Hoá, Sinh, Địa chất, Khí tượng thuỷ văn... của Chương trình đào tạo Cử nhân khoa học tài năng, Đại học khoa học Tự nhiên Hà Nội.

Chúng tôi chọn khuynh hướng thứ hai trong hai khuynh hướng trình bày đã nói ở trên. Tất nhiên, với đôi chút thay đổi, cuốn sách này có thể dùng để giảng Đại số tuyến tính theo khuynh hướng trình bày thứ nhất.

*Tư tưởng cấu trúc* được chúng tôi nhấn mạnh như một mạch chính của cuốn sách. Mỗi đối tượng đều được nghiên cứu trong mối tương quan với nhóm các phép biến đổi bảo toàn cấu trúc của đối tượng đó: Khảo sát không gian véctơ gắn liền với nhóm tuyến tính tổng quát $GL(n, \mathbf{K})$, không gian véctơ Euclid và không gian véctơ Euclid định hướng gắn liền với nhóm trực giao $O(n)$ và nhóm trực giao đặc biệt $SO(n)$, không gian Unita gắn liền với nhóm unita $U(n)$... Kết quả phân loại các dạng toàn phương phụ thuộc căn bản vào việc quá trình phân loại được tiến hành dưới tác động của nhóm nào (tuyến tính tổng quát, trực giao...).

Theo kinh nghiệm, chúng tôi không thể giảng hết nội dung của cuốn sách này trong một giáo trình tiêu chuẩn về Đại số tuyến tính cho sinh viên các trường đại học, ngay cả đối với sinh viên chuyên ngành toán. Các chủ đề về *dạng chuẩn tắc Jordan của tự đồng cấu, dạng chính tắc của tự đồng cấu trực giao, việc đưa đồng thời hai dạng toàn phương về dạng chính tắc, đại số tenxơ, đại số đối xứng và đại số ngoài...* nên dùng để giảng chi tiết cho các *sinh viên cao học và nghiên cứu sinh* các ngành Toán, Cơ học và Vật lý.

Chúng tôi cố gắng bình luận ý nghĩa của các khái niệm và ưu khuyết điểm của các phương pháp được trình bày. Cuối mỗi chương đều có phần bài tập, được tuyển chọn chủ yếu từ cuốn sách nổi tiếng "Bài tập Đại số tuyến tính" của I. V. Proskuryakov. Để nắm vững kiến thức, độc giả nên đọc rất kỹ phần lý thuyết trước khi làm càng nhiều càng tốt các bài tập cuối mỗi chương.

Việc sử dụng cuốn sách này sẽ đặc biệt thuận lợi nếu người đọc coi nó là phần một của một bộ sách mà phần hai của nó là cuốn *Đại số đại cương* của cùng tác giả, do Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội ấn hành năm 1998 và tái bản năm 1999.

Tác giả chân thành cảm ơn Ban điều hành Chương trình đào tạo Cử nhân khoa học tài năng, Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội, đặc biệt là Giáo sư Đàm Trung Đồn và Giáo sư Nguyễn Duy Tiến, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả giảng dạy cho sinh viên của Chương trình trong ba năm qua và viết cuốn sách này trên cơ sở những bài giảng đó.

Tác giả mong nhận được sự chỉ giáo của các độc giả và đồng nghiệp về những thiếu sót khó tránh khỏi của cuốn sách.

Hà Nội, 12/1999

# Chương 0

# KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Nhiệm vụ của chương này là trình bày dưới dạng giản lược nhất một số kiến thức chuẩn bị cho phần còn lại của cuốn sách: Tập hợp, quan hệ, ánh xạ, nhóm, vành, trường, đa thức... Trường số thực sẽ được xây dựng chặt chẽ ở §5. Nhưng vì các tính chất của nó rất quen thuộc với những ai đã học qua chương trình trung học phổ thông, cho nên chúng ta vẫn nói tới trường này trong các ví dụ ở các tiết §1 - §4.

## 1 Tập hợp

Trong tiết này, chúng ta trình bày về tập hợp theo quan điểm của *"Lý thuyết tập hợp ngây thơ"*.

Cụ thể, tập hợp là một khái niệm "nguyên thuỷ", không được định nghĩa, mà được hiểu một cách trực giác như sau: Một *tập hợp* là một sự quần tụ các đối tượng có cùng một thuộc tính nào đó; những đối tượng này được gọi là các *phần tử* của tập hợp đó. (Tất nhiên, mô tả nói trên không phải là một định nghĩa của tập hợp, nó chỉ diễn đạt khái niệm tập hợp qua một khái niệm có vẻ gần gũi hơn là "quần tụ". Tuy vậy, bản thân khái niệm quần tụ lại chưa được định nghĩa.)

Người ta cũng thường gọi tắt tập hợp là "tập".

Để có một số ví dụ, chúng ta có thể xét tập hợp các sinh viên của một trường đại học, tập hợp các xe tải của một công ty, tập hợp các số nguyên tố ...

Các tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ in hoa: $A, B, C, ..., X, Y, Z...$ Các phần tử của một tập hợp thường được ký hiệu bởi các chữ in thường: $a, b, c, ..., x, y, z...$ Để nói $x$ là một phần tử của tập hợp $X$, ta viết $x \in X$ và đọc là

"$x$ thuộc $X$". Trái lại, để nói $y$ không là phần tử của $X$, ta viết $y \notin X$, và đọc là "$y$ không thuộc $X$".

Để xác định một tập hợp, người ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của nó. Chẳng hạn,

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Người ta cũng có thể xác định một tập hợp bởi một tính chất đặc trưng $\mathcal{P}(x)$ nào đó của các phần tử của nó. Tập hợp $X$ các phần tử $x$ có tính chất $\mathcal{P}(x)$ được ký hiệu là

$$X = \{x|\ \mathcal{P}(x)\},$$

hoặc là

$$X = \{x:\ \mathcal{P}(x)\}.$$

Ví dụ:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \{x|\ x \text{ là số tự nhiên}\}, \\ \mathbf{Z} &= \{x|\ x \text{ là số nguyên }\}, \\ \mathbf{Q} &= \{x|\ x \text{ là số hữu tỷ}\}, \\ \mathbf{R} &= \{x|\ x \text{ là số thực}\}. \end{aligned}$$

Nếu mọi phần tử của tập hợp $A$ cũng là một phần tử của tập hợp $X$ thì ta nói $A$ là một *tập hợp con* của $X$, và viết $A \subset X$. Tập con $A$ gồm các phần tử $x$ của $X$ có tính chất $\mathcal{P}(x)$ được ký hiệu là

$$A = \{x \in X|\ \mathcal{P}(x)\}.$$

Hai tập hợp $X$ và $Y$ được gọi là *bằng nhau* nếu mỗi phần tử của tập hợp này cũng là một phần tử của tập hợp kia và ngược lại, tức là $X \subset Y$ và $Y \subset X$. Khi đó ta viết $X = Y$.

Tập hợp không chứa một phần tử nào cả được ký hiệu bởi $\emptyset$, và được gọi là *tập rỗng*. Ta quy ước rằng $\emptyset$ là tập con của mọi tập hợp. Tập hợp rỗng rất tiện lợi, nó đóng vai trò như *số không* trong khi làm toán với các tập hợp.

Các phép toán hợp, giao và hiệu của hai tập hợp được định nghĩa như sau.

Cho các tập hợp $A$ và $B$.

*Hợp* của $A$ và $B$ được ký hiệu bởi $A \cup B$ và được định nghĩa như sau

$$A \cup B = \{x|\ x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

*Giao* của $A$ và $B$ được ký hiệu bởi $A \cap B$ và được định nghĩa như sau

$$A \cap B = \{x|\ x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

*Hiệu* của $A$ và $B$ được ký hiệu bởi $A \setminus B$ và được định nghĩa như sau

$$A \setminus B = \{x|\ x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B$ được gọi là *phần bù* của $B$ trong $A$, và được ký hiệu là $C_A(B)$.

Các phép toán hợp, giao và hiệu có các tính chất sơ cấp sau đây:

Kết hợp:
$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C),\\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C).\end{aligned}$$

Giao hoán:
$$\begin{aligned}A \cup B &= B \cup A,\\ A \cap B &= B \cap A.\end{aligned}$$

Phân phối:
$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C),\\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C).\end{aligned}$$

Công thức De Morgan:
$$\begin{aligned}X \setminus (A \cup B) &= (X \setminus A) \cap (X \setminus B),\\ X \setminus (A \cap B) &= (X \setminus A) \cup (X \setminus B).\end{aligned}$$

Giả sử $A_i$ là một tập hợp với mỗi $i$ thuộc một tập chỉ số $I$ (có thể hữu hạn hay vô hạn). Khi đó, hợp và giao của họ tập hợp $\{A_i\}_{i \in I}$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} A_i &= \{x|\ x \in A_i \text{ với một } i \text{ nào đó trong } I\},\\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x|\ x \in A_i \text{ với mọi } i \in I\}.\end{aligned}$$

Ta có dạng tổng quát của công thức De Morgan:

$$\begin{aligned}X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) &= \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i),\\ X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) &= \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).\end{aligned}$$

Việc sử dụng quá rộng rãi khái niệm tập hợp đã dẫn tới một số nghịch lý. Một trong số đó là nghịch lý Cantor sau đây.

Ta nói tập hợp $X$ là *bình thường* nếu $X \notin X$. Xét tập hợp

$$\mathcal{X} = \{X|\ X \text{ là tập bình thường}\}.$$

Nếu $\mathcal{X} \in \mathcal{X}$ thì theo định nghĩa của $\mathcal{X}$, nó là một tập bình thường. Do đó, theo định nghĩa tập bình thường, $\mathcal{X} \notin \mathcal{X}$. Trái lại, nếu $\mathcal{X} \notin \mathcal{X}$, thì $\mathcal{X}$ là một tập không bình thường, và do đó $\mathcal{X} \in \mathcal{X}$. Cả hai trường hợp đều dẫn tới mâu thuẫn.

Để tránh những nghịch lý loại như vậy, người ta sẽ không dùng khái niệm tập hợp để chỉ "những thực thể quá lớn". Ta sẽ nói *"lớp tất cả các tập hợp"*, chứ không nói *"tập hợp tất cả các tập hợp"*. Theo quan niệm này $\mathcal{X}$ chỉ là một lớp chứ không là một tập hợp. Vì thế, ta tránh được nghịch lý nói trên.

Phần còn lại của tiết này được dành cho việc trình bày sơ lược về lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại.

Ta thường cần phải phát biểu những mệnh đề có dạng: *"Mọi phần tử $x$ của tập hợp $X$ đều có tính chất $\mathcal{P}(x)$"*. Người ta quy ước ký hiệu mệnh đề đó như sau:

$$\forall x \in X,\ \ \mathcal{P}(x).$$

Dãy ký hiệu trên được đọc là *"Với mọi $x$ thuộc $X$, $\mathcal{P}(x)$"*.

Ký hiệu $\forall$ được gọi là *lượng từ phổ biến*.

Tương tự, ta cũng hay gặp các mệnh đề có dạng: *"Tồn tại một phần tử $x$ của $X$ có tính chất $\mathcal{P}(x)$"*. Mệnh đề này được quy ước ký hiệu như sau:

$$\exists x \in X,\ \ \mathcal{P}(x).$$

Dãy ký hiệu đó được đọc là *"Tồn tại một $x$ thuộc $X$, $\mathcal{P}(x)$"*.

Ký hiệu $\exists$ được gọi là *lượng từ tồn tại*.

Mệnh đề *"Tồn tại duy nhất một phần tử $x$ của $X$ có tính chất $\mathcal{P}(x)$"* được viết như sau:

$$\exists! x \in X,\ \ \mathcal{P}(x).$$

Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại có mối quan hệ quan trọng sau đây. Gọi $\overline{\mathcal{P}}$ là phủ định của mệnh đề $\mathcal{P}$. Ta có

$$\begin{aligned}\overline{\forall x \in X, \mathcal{P}(x)} &\equiv \exists x \in X, \overline{\mathcal{P}(x)},\\ \overline{\exists x \in X, \mathcal{P}(x)} &\equiv \forall x \in X, \overline{\mathcal{P}(x)}.\end{aligned}$$

Chúng tôi đề nghị độc giả tự chứng minh những khẳng định trên xem như một bài tập.

## 2 Quan hệ và Ánh xạ

Tích trực tiếp (hay tích Descartes) của hai tập hợp $X$ và $Y$ là tập hợp sau đây:

$$X \times Y = \{(x, y) |\ x \in X, y \in Y\}.$$

Trường hợp đặc biệt, khi $X = Y$, ta có tích trực tiếp $X \times X$ của tập $X$ với chính nó.

**Định nghĩa 2.1** Mỗi tập con $\mathcal{R}$ của tập hợp tích $X \times X$ được gọi là một *quan hệ hai ngôi* trên $X$. Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì ta nói $x$ *có quan hệ* $\mathcal{R}$ *với* $y$, và viết $x\mathcal{R}y$. Ngược lại, nếu $(x, y) \notin \mathcal{R}$ thì ta nói $x$ *không có quan hệ* $\mathcal{R}$ *với* $y$, và viết $x\overline{\mathcal{R}}y$.

Chẳng hạn, nếu $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} |\ x \text{ chia hết cho } y\}$, thì $6\mathcal{R}2$, nhưng $5\overline{\mathcal{R}}3$.

**Định nghĩa 2.2** Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên $X$ được gọi là một *quan hệ tương đương* nếu nó có ba tính chất sau đây:

(a) Phản xạ: $x\mathcal{R}x,\ \ \forall x \in X$.

(b) Đối xứng: Nếu $x\mathcal{R}y$, thì $y\mathcal{R}x,\ \ \forall x, y \in X$.

(c) Bắc cầu: Nếu $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z$, thì $x\mathcal{R}z,\ \ \forall x, y, z \in X$.

Các quan hệ tương đương thường được ký hiệu bởi dấu $\sim$.

Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $X$. Lớp tương đương theo quan hệ $\sim$ của một phần tử $x \in X$ được định nghĩa như sau:

$$[x] = \{y \in X |\ x \sim y\} \subset X.$$

**Bổ đề 2.3** *Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương. Khi đó, với mọi $x, y \in X$, các lớp $[x]$ và $[y]$ hoặc trùng nhau, hoặc rời nhau (tức là $[x] \cap [y] = \emptyset$).*

**Chứng minh:** Giả sử $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Ta sẽ chứng minh rằng $[x] = [y]$. Lấy một phần tử $z \in [x] \cap [y]$. Ta có $x \sim z$ và $y \sim z$.

Do tính đối xứng của quan hệ tương đương, $x \sim z$ kéo theo $z \sim x$. Giả sử $t \in [x]$, tức là $x \sim t$. Do tính bắc cầu, $z \sim x$ và $x \sim t$ kéo theo $z \sim t$. Tiếp theo, $y \sim z$ và $z \sim t$ kéo theo $y \sim t$. Nghĩa là $t \in [y]$. Như vậy, $[x] \subset [y]$. Do vai trò như nhau của các lớp $[x]$ và $[y]$, ta cũng có bao hàm thức ngược lại, $[y] \subset [x]$. Vậy $[x] = [y]$. □

Theo bổ đề này, nếu $y \in [x]$ thì $y \in [x] \cap [y] \neq \emptyset$, do đó $[x] = [y]$. Vì thế, ta có thể dùng từ *lớp tương đương* để chỉ lớp tương đương của bất kỳ phần tử nào trong lớp đó. Mỗi phần tử của một lớp tương đương được gọi là một *đại biểu* của lớp tương đương này.

Dễ dàng thấy rằng $X$ là hợp rời rạc của các lớp tương đương theo quan hệ $\sim$. (Nói cách khác, $X$ là hợp của các lớp tương đương theo quan hệ $\sim$, và các lớp này rời nhau.) Người ta cũng nói $X$ được phân hoạch bởi các lớp tương đương.

**Định nghĩa 2.4** Tập hợp các lớp tương đương của $X$ theo quan hệ $\sim$ được gọi là *tập thương của $X$ theo $\sim$* và được ký hiệu là $X/\!\sim$.

**Ví dụ 2.5** Giả sử $n$ là một số nguyên dương bất kỳ. Ta xét trên tập $X = \mathbf{Z}$ quan hệ sau đây:

$$\sim = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} |\ x - y \text{ chia hết cho } n\}.$$

Rõ ràng đó là một quan hệ tương đương. Hơn nữa $x \sim y$ nếu và chỉ nếu $x$ và $y$ có cùng phần dư trong phép chia cho $n$. Vì thế, $\mathbf{Z}/\!\sim$ là một tập có đúng $n$ phần tử :

$$\mathbf{Z}/\!\sim = \{[0], [1], ..., [n-1]\}.$$

Nó được gọi là *tập các số nguyên modulo* $n$, và thường được ký hiệu là $\mathbf{Z}/n$.

**Định nghĩa 2.6** Giả sử $\leq$ là một quan hệ hai ngôi trên $X$. Nó được gọi là một *quan hệ thứ tự* nếu nó có ba tính chất sau đây:

(a) Phản xạ: $x \leq x, \ \forall x \in X$.

(b) Phản đối xứng: Nếu $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y, \ \forall x, y \in X$.

(c) Bắc cầu: Nếu $x \leq y, y \leq z$, thì $x \leq z, \ \forall x, y, z \in X$.

Tập $X$ được trang bị một quan hệ thứ tự được gọi là một *tập được sắp*. Nếu $x \leq y$, ta nói $x$ *đứng trước* $y$, hay $x$ nhỏ hơn hoặc bằng $y$.

Ta nói $X$ được sắp *toàn phần* (hay *tuyến tính*) bởi quan hệ $\leq$ nếu với mọi $x, y \in X$, thì $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Khi đó $\leq$ được gọi là một quan hệ thứ tự toàn phần (hay tuyến tính) trên $X$.

Chẳng hạn, trường số hữu tỷ $\mathbf{Q}$ là một tập được sắp toàn phần đối với quan hệ thứ tự $\leq$ thông thường. Một ví dụ khác: nếu $X$ là tập hợp tất cả các tập con của một tập $A$ nào đó, thì $X$ được sắp theo quan hệ bao hàm. Đây không phải là một thứ tự toàn phần nếu tập $A$ chứa nhiều hơn một phần tử.

Bây giờ ta chuyển qua xét các ánh xạ.

Người ta thường mô tả các ánh xạ một cách trực giác như sau.

Giả sử $X$ và $Y$ là các tập hợp. Một *ánh xạ* $f$ từ $X$ vào $Y$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử xác định $y = f(x) \in Y$. Ánh xạ đó được ký hiệu bởi $f : X \to Y$.

Tất nhiên mô tả nói trên không phải là một định nghĩa chặt chẽ, vì ta không biết thế nào là một quy tắc. Nói cách khác, trong định nghĩa nói trên quy tắc chỉ là một tên gọi khác của ánh xạ.

Ta có thể khắc phục điều đó bằng cách đưa ra một định nghĩa chính xác nhưng hơi cồng kềnh về ánh xạ như sau.

Mỗi tập con $\mathcal{R}$ của tích trực tiếp $X \times Y$ được gọi là một *quan hệ giữa $X$ và $Y$*. Quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là một *ánh xạ* từ $X$ vào $Y$ nếu nó có tính chất sau: với mọi $x \in X$ có một và chỉ một $y \in Y$ để cho $(x, y) \in \mathcal{R}$. Ta ký hiệu phần tử duy nhất đó là $y = f(x)$. Khi đó

$$\mathcal{R} = \{(x, f(x))|\ x \in X\}.$$

Ánh xạ này thường được ký hiệu là $f : X \to Y$ và quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là *đồ thị* của ánh xạ $f$.

Các tập $X$ và $Y$ được gọi lần lượt là tập nguồn và tập đích của ánh xạ $f$. Tập hợp $f(X) = \{f(x)|\ x \in X\}$ được gọi là tập giá trị của $f$.

Giả sử $A$ là một tập con của $X$. Khi đó, $f(A) = \{f(x)|\ x \in A\}$ được gọi là ảnh của $A$ bởi $f$. Nếu $B$ là một tập con của $Y$, thì $f^{-1}(B) = \{x \in X|\ f(x) \in B\}$ được gọi là nghịch ảnh của $B$ bởi $f$. Trường hợp đặc biệt, tập $B = \{y\}$ chỉ gồm một điểm $y \in Y$, ta viết đơn giản $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$.

**Định nghĩa 2.7** (a) Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *đơn ánh* nếu với mọi $x \neq x'$, $(x, x' \in X)$ thì $f(x) \neq f(x')$.

(b) Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *toàn ánh* nếu với mọi $y \in Y$ tồn tại (ít nhất) một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

(c) Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *song ánh* (hay một *tương ứng một-một*) nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.

Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Ta ký hiệu phần tử $x$ đó như sau: $x = f^{-1}(y)$. Như thế, tương ứng $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ xác định một ánh xạ, được ký hiệu là $f^{-1} : Y \to X$ và được gọi là ánh xạ ngược của $f$. Hiển nhiên, $f^{-1}$ cũng là một song ánh, hơn nữa $(f^{-1})^{-1} = f$.

Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Khi đó ánh xạ $h : X \to Z$ được xác định bởi

$$h(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X,$$

được gọi là *ánh xạ tích* (hay *ánh xạ hợp*) của $f$ và $g$, và được ký hiệu là $h = gf$ hoặc $h = g \circ f$.

Chúng tôi đề nghị độc giả tự chứng minh hai mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 2.8** *Hợp thành của hai đơn ánh lại là một đơn ánh. Hợp thành của hai toàn ánh lại là một toàn ánh. Hợp thành của hai song ánh lại là một song ánh.*

Gọi $id_X : X \to X$ là ánh xạ đồng nhất trên $X$, được xác định như sau

$$id_X(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

**Mệnh đề 2.9** *(i) Giả sử $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là các ánh xạ. Khi đó, nếu $gf$ là một đơn ánh thì $f$ cũng vậy; nếu $gf$ là một toàn ánh thì $g$ cũng vậy.*

*(ii) Ánh xạ $f : X \to Y$ là một song ánh nếu và chỉ nếu tồn tại một ánh xạ $g : Y \to X$ sao cho $gf = id_X$, $fg = id_Y$.*

# 3 Lực lượng của tập hợp

Đối với các tập hợp hữu hạn, khi cần xét xem tập nào có nhiều phần tử hơn, người ta đếm số phần tử của chúng. Nhưng động tác đơn giản ấy không thực hiện được đối với các tập có vô hạn phần tử. Để so sánh "số lượng phần tử" của các tập vô hạn, người ta trở lại với cách làm của người nguyên thuỷ khi chưa biết đếm. Cụ thể là, nếu muốn xem số rìu tay có đủ cho mỗi người một chiếc hay không người ta phát cho mỗi người một chiếc rìu, tức là lập một tương ứng giữa tập hợp người và tập hợp rìu.

**Định nghĩa 3.1** Ta nói tập hợp $X$ *cùng lực lượng* với tập hợp $Y$ nếu tồn tại một song ánh từ $X$ vào $Y$.

Rõ ràng quan hệ cùng lực lượng là một quan hệ tương đương.

Giả sử tập $A$ có $n$ phần tử. Điều này có nghĩa là có một tương ứng một-một giữa các phần tử của $A$ với các số tự nhiên $1, 2, 3, ..., n$. Nói cách khác, $A$ có $n$ phần tử nếu và chỉ nếu nó cùng lực lượng với tập hợp $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

Sau đây chúng ta sẽ khảo sát lớp các tập hợp vô hạn có "ít phần tử nhất", đó là các tập đếm được.

**Định nghĩa 3.2** Tập $X$ được gọi là *đếm được* nếu nó cùng lực lượng với tập hợp $\mathbf{N}$ các số tự nhiên.

Chẳng hạn, $\mathbf{Z}$ là một tập đếm được. Thật vậy, ánh xạ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} f(2n-1) &= -n+1, \\ f(2n) &= n \quad (n = 1, 2, 3, ...) \end{aligned}$$

là một song ánh.

Tương tự, tập hợp các số tự nhiên chẵn và tập hợp các số tự nhiên lẻ đều là các tập đếm được.

Các ví dụ trên cho thấy một tập vô hạn có thể có cùng lực lượng với một tập con thật sự của nó. Ta có

**Mệnh đề 3.3** *Mỗi tập con vô hạn của một tập đếm được cũng là một tập đếm được.*

**Chứng minh:** Giả sử $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ là một tập đếm được, và $B$ là một tập con vô hạn của $A$. Gọi $i_1$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a_{i_1} \in B$, $i_2$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a_{i_2} \in B \setminus \{a_{i_1}\}$. Một cách quy nạp, $i_n$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a_{i_n} \in B \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{n-1}}\}$...

Bằng cách đó, các phần tử của $B$ được xếp thành một dãy vô hạn

$$B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}, ...\}.$$

Nói cách khác, có một song ánh $\mathbf{N} \to B$ đặt $n$ tương ứng với $a_{i_n}$. Như thế $B$ đếm được. □

**Mệnh đề 3.4** *Tích trực tiếp của hai tập đếm được cũng là một tập đếm được.*

**Chứng minh:** Không giảm tổng quát, ta chỉ cần chứng minh $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ là đếm được.

Ta xếp tất cả các phần tử $(a, b)$ của $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ thành một dãy vô hạn bằng cách sau. Trước hết ta xếp cặp $(a, b)$ với $a + b = 2$. Giả sử đã xếp xong các cặp $(a, b)$ với $a + b = n - 1$, ta xếp tiếp các cặp $(a, b)$ với $a + b = n$, trong đó cặp $(a, b)$ được xếp trước cặp $(a', b')$ nếu $a + b = a' + b' = n$ và $a < a'$.

Như vậy, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ là một tập đếm được. □

**Hệ quả 3.5** *Tập hợp $\mathbf{Q}$ các số hữu tỷ là một tập đếm được.*

**Chứng minh:** Ta sẽ chứng minh tập hợp $\mathbf{Q}^+$ các số hữu tỷ dương là đếm được. Do đó $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+$ cùng lực lượng với $\mathbf{Z} = \mathbf{N}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$, trong đó $\mathbf{Q}^-$ là tập hợp các số hữu tỷ âm và $\mathbf{N}^-$ là tập hợp các số nguyên âm. Vì thế $\mathbf{Q}$ là đếm được.

Mỗi số hữu tỷ dương được biểu thị duy nhất dưới dạng một phân số $\frac{p}{q}$, trong đó $p, q \in \mathbf{N}$ và cặp $p, q$ nguyên tố cùng nhau. Tương ứng $\frac{p}{q} \mapsto (p, q)$ là một song ánh từ $\mathbf{Q}^+$ lên một tập con của tích trực tiếp $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Do đó, theo hai mệnh đề trên thì $\mathbf{Q}^+$ là một tập đếm được. □

Chúng ta thừa nhận kết quả sau đây, vì muốn chứng minh nó ta cần một hiểu biết sâu sắc hơn về các số thực.

**Mệnh đề 3.6** *Tập hợp* **R** *các số thực là một tập không đếm được.*

Người ta nói tập hợp các số thực có lực lượng *continum*.

# 4 Nhóm, Vành và Trường

Các khái niệm nhóm, vành và trường được giới thiệu trong tiết này chỉ dừng ở mức đủ dùng cho các diễn đạt trong phần sau của cuốn sách.

Giả sử $G$ là một tập hợp. Mỗi ánh xạ

$$\circ : G \times G \to G$$

được gọi là một *phép toán hai ngôi* (hay một *luật hợp thành*) trên $G$. Ảnh của cặp phần tử $(x, y) \in G \times G$ bởi ánh xạ $\circ$ sẽ được ký hiệu là $x \circ y$, và được gọi là *tích* hay *hợp thành* của $x$ và $y$.

**Định nghĩa 4.1** Một nhóm là một tập hợp khác rỗng $G$ được trang bị một phép toán hai ngôi $\circ$ thoả mãn ba điều kiện sau đây:

(G1) Phép toán có tính kết hợp:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \ \ \forall x, y, z \in G.$$

(G2) Có một phần tử $e \in G$, được gọi là *phần tử trung lập*, với tính chất

$$x \circ e = e \circ x = x, \ \ \forall x \in G.$$

(G3) Với mọi $x \in G$, tồn tại phần tử $x' \in G$, được gọi là nghịch đảo của $x$, sao cho

$$x \circ x' = x' \circ x = e.$$

**Nhận xét:**

Phần tử trung lập của một nhóm là duy nhất. Thật vậy, nếu $e$ và $e'$ đều là các phần tử trung lập của nhóm $G$ thì

$$e = e \circ e' = e'.$$

Với mọi $x \in G$, phần tử nghịch đảo $x'$ nói ở mục (G3) là duy nhất. Thật vậy, nếu $x_1'$ và $x_2'$ là các phần tử nghịch đảo của $x$ thì

$$x_1' = x_1' \circ e = x_1' \circ (x \circ x_2') = (x_1' \circ x) \circ x_2' = e \circ x_2' = x_2'.$$

Trong nhóm có luật giản ước, tức là

$$\begin{aligned} x \circ y = x \circ z \quad &\Longrightarrow \quad y = z, \\ x \circ z = y \circ z \quad &\Longrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Thật vậy, để có luật giản ước, chỉ cần nhân hai vế của đẳng thức $x \circ y = x \circ z$ với nghịch đảo $x'$ của $x$ từ bên trái, và nhân hai vế của đẳng thức $x \circ z = y \circ z$ với nghịch đảo $z'$ của $z$ từ bên phải.

Nếu phép toán $\circ$ có tính giao hoán, tức là

$$x \circ y = y \circ x, \;\; \forall x, y \in G,$$

thì $G$ được gọi là một nhóm *giao hoán* (hay *abel*).

Theo thói quen, luật hợp thành $\circ$ trong một nhóm abel thường được ký hiệu theo lối cộng "+". Hợp thành của cặp phần tử $(x, y)$ được ký hiệu là $x + y$ và được gọi là tổng của $x$ và $y$. Phần tử trung lập của nhóm được gọi là *phần tử không*, ký hiệu 0. Nghịch đảo của $x$ (xác định bởi điều kiện (G3)) được gọi là *phần tử đối* của $x$, ký hiệu $(-x)$.

Trường hợp tổng quát, phép toán $\circ$ trong nhóm thường được ký hiệu theo lối nhân "$\cdot$". Hợp thành của cặp phần tử $(x, y)$ được ký hiệu là $x \cdot y$, hay đơn giản $xy$, và được gọi là tích của $x$ và $y$. Phần tử trung lập của nhóm được gọi là *phần tử đơn vị*. Phần tử nghịch đảo của $x$ được ký hiệu là $x^{-1}$.

**Ví dụ:**

(a) Các tập hợp số $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ lập thành nhóm abel đối với phép cộng.

(b) Các tập $\mathbf{Z}^* = \{\pm 1\}, \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}, \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ làm thành nhóm abel đối với phép nhân.

(c) Ta định nghĩa phép cộng trong $\mathbf{Z}/n$ như sau:

$$[x] + [y] = [x + y].$$

Dễ kiểm tra rằng phép toán này không phụ thuộc đại biểu của các lớp tương đương $[x]$ và $[y]$. Hơn nữa, $\mathbf{Z}/n$ cùng với phép cộng nói trên lập thành một nhóm abel.

(d) Mỗi song ánh từ tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ vào chính nó được gọi là một phép thế (hay phép hoán vị) trên $n$ phần tử. Tập hợp $S_n$ tất cả các phép thế trên $n$ phần tử làm thành một nhóm đối với phép hợp thành các ánh xạ

$$(\alpha \cdot \beta)(i) = \alpha(\beta(i)), \quad \forall \alpha, \beta \in S_n, 0 \leq i \leq n.$$

$S_n$ được gọi là *nhóm đối xứng trên $n$ phần tử*. Đây là một nhóm không abel khi $n > 2$. (Xem chi tiết ở Chương III.)

(e) Trong Chương II chúng ta sẽ khảo sát một lớp nhóm không abel rất quan trọng đối với môn Đại số tuyến tính, đó là nhóm $GL(V)$ các biến đổi tuyến tính không suy biến trên không gian véctơ $V$.

**Định nghĩa 4.2** Giả sử $G$ và $G'$ là các nhóm (với phép toán viết theo lối nhân). Ánh xạ $\varphi : G \to G'$ được gọi là một *đồng cấu nhóm* nếu

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in G.$$

**Nhận xét:** Đồng cấu nhóm $\varphi$ chuyển đơn vị $e$ của $G$ thành đơn vị $e'$ của $G'$:

$$\varphi(e) = e'.$$

Nó cũng chuyển phần tử nghịch đảo của $x$ thành phần tử nghịch đảo của $\varphi(x)$:

$$\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

**Định nghĩa 4.3** (a) Một đồng cấu nhóm đồng thời là một đơn ánh được gọi là một *đơn cấu* nhóm.

(b) Một đồng cấu nhóm đồng thời là một toàn ánh được gọi là một *toàn cấu* nhóm.

(c) Một đồng cấu nhóm đồng thời là một song ánh được gọi là một *đẳng cấu* nhóm.

Nếu có một đẳng cấu nhóm giữa $G$ và $G'$ thì ta nói $G$ đẳng cấu với $G'$ và viết $G \cong G'$.

**Ví dụ:**

(a) Phép nhúng $i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ định nghĩa bởi công thức $i(x) = x$ là một đơn cấu nhóm.

(b) Phép chiếu $pr : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n$ xác định bởi công thức $pr(x) = [x]$ là một toàn cấu nhóm.

(a) Ánh xạ mũ $exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $exp(x) = e^x$ là một đẳng cấu từ nhóm cộng các số thực $\mathbf{R}$ vào nhóm nhân các số thực dương $\mathbf{R}^+$.

Bây giờ ta chuyển sang khảo sát các vành và trường.

**Định nghĩa 4.4** Một vành là một tập hợp $R \neq \emptyset$ được trang bị hai phép toán hai ngôi, gồm phép cộng

$$+ : R \times R \to R, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

và phép nhân

$$\cdot : R \times R \to R, \quad (x, y) \mapsto xy,$$

thoả mãn ba điều kiện sau đây:

(R1) $R$ là một nhóm abel đối với phép cộng.

(R2) Phép nhân có tính chất kết hợp:

$$(xy)z = x(yz), \ \ \forall x, y, z \in R.$$

(R3) Phép nhân phân phối về hai phía đối với phép cộng:

$$\begin{aligned} (x+y)z &= xz + yz, \\ z(x+y) &= zx + zy, \ \ \forall x, y, z \in R. \end{aligned}$$

Vành $R$ được gọi là *giao hoán* nếu phép nhân của nó có tính giao hoán:

$$xy = yx, \ \ \forall x, y \in R.$$

Vành $R$ được gọi là *có đơn vị* nếu phép nhân của nó có đơn vị, tức là có phần tử $1 \in R$ sao cho:

$$1x = x1 = x, \ \ \forall x \in R.$$

**Ví dụ:**

(a) Các tập hợp số $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ là các vành giao hoán và có đơn vị đối với các phép toán cộng và nhân thông thường. Tập hợp số tự nhiên $\mathbf{N}$ không là một vành, vì nó không là một nhóm đối với phép cộng.

(b) Ta định nghĩa phép nhân trên nhóm cộng $\mathbf{Z}/n$ các số nguyên modulo $n$ như sau:

$$[x][y] = [xy], \ \ \forall x, y \in \mathbf{Z}/n.$$

Phép nhân này không phụ thuộc đại biểu của các lớp $[x]$ và $[y]$. Nó biến nhóm cộng $\mathbf{Z}/n$ thành một vành giao hoán và có đơn vị, được gọi là vành các số nguyên modulo $n$.

(c) Trong Chương II ta sẽ xét một lớp vành đặc biệt quan trọng đối với môn Đại số tuyến tính, đó là vành $M(n \times n, \mathbf{K})$ các ma trận vuông cấp $n$ với các phần tử trong trường $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 4.5** Giả sử $R$ và $R'$ là các vành. Ánh xạ $\varphi : R \to R'$ được gọi là một *đồng cấu vành* nếu

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi(x)+\varphi(y),\\ \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y), \ \forall x, y \in R.\end{aligned}$$

Các khái niệm đơn cấu vành, toàn cấu vành, đẳng cấu vành được định nghĩa tương tự như đối với trường hợp nhóm.

Chẳng hạn, phép nhúng $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ là một đơn cấu vành. Phép chiếu $pr : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n$ là một toàn cấu vành.

Phần tử $x$ trong một vành có đơn vị $R$ được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại phần tử $x' \in R$ sao cho

$$xx' = x'x = 1.$$

Dễ chứng minh rằng phần tử $x'$ có tính chất như vậy nếu tồn tại thì duy nhất. Nó được ký hiệu là $x^{-1}$.

**Định nghĩa 4.6** Một vành giao hoán, có đơn vị $1 \neq 0$ sao cho mọi phần tử khác 0 trong nó đều khả nghịch được gọi là một *trường*.

Vành $\mathbf{Q}$ là một trường. Vành số nguyên $\mathbf{Z}$ không là một trường, vì các số khác $\pm 1$ đều không khả nghịch trong $\mathbf{Z}$.

**Định nghĩa 4.7** Giả sử $\leq$ là một quan hệ thứ tự trên trường $\mathbf{K}$. Khi đó $\mathbf{K}$ được gọi là một *trường được sắp* đối với thứ tự $\leq$ nếu các điều kiện sau đây được thoả mãn:

(a) Nếu $x \leq y$ thì $x + z \leq y + z$, với mọi $z \in \mathbf{K}$;

(b) Nếu $x \leq y$ và $0 \leq z$ thì $xz \leq yz$.

Trường số hữu tỷ $\mathbf{Q}$ là một trường được sắp đối với thứ tự thông thường.

Dưới đây ta sẽ xét xem khi nào thì vành $\mathbf{Z}/n$ là một trường.

**Định nghĩa 4.8** Nếu vành $R$ chứa các phần tử $a \neq 0$, $b \neq 0$ sao cho $ab = 0$ thì ta nói $R$ có *ước của không*.

Trái lại, nếu từ đẳng thức $ab = 0$ (với $a, b \in R$) suy ra hoặc $a = 0$ hoặc $b = 0$, thì vành $R$ được gọi là *không có ước của không*.

Vành $\mathbf{Z}/6$ có ước của không, bởi vì $[2] \neq 0, [3] \neq 0$ và

$$[2][3] = [6] = [0] = 0.$$

Nói chung, nếu $n$ là một hợp số thì $\mathbf{Z}/n$ có ước của không. Thật vậy, vì $n$ là một hợp số cho nên $n = rs$ trong đó $0 < r, s < n$. Khi đó, $[r] \neq 0, [s] \neq 0$ và $[r][s] = [n] = [0] = 0$.

**Mệnh đề 4.9** *Mỗi trường đều là một vành không có ước của không.*

**Chứng minh:** Giả sử $\mathbf{K}$ là một trường, $a$ và $b$ là các phần tử thuộc $\mathbf{K}$ với $ab = 0$. Nếu $a \neq 0$ thì $a$ khả nghịch. Ta có

$$b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0.$$

Vậy $\mathbf{K}$ không có ước của không. □

**Mệnh đề 4.10** $\mathbf{Z}/n$ *là một trường nếu và chỉ nếu $n$ là một số nguyên tố.*

**Chứng minh:** Nếu $n$ là một hợp số thì $\mathbf{Z}/n$ có ước của không, do đó không là một trường.

Giả sử $n = p$ là một số nguyên tố. Mỗi phần tử khác không trong $\mathbf{Z}/p$ đều có dạng $[q]$ trong đó đại biểu $q$ thoả mãn điều kiện $0 < q < p$. Khi đó $p$ và $q$ nguyên tố cùng nhau, vì thế có các số nguyên $k$ và $\ell$ sao cho $kp + \ell q = 1$. Hay là

$$[\ell][q] = [1] - [kp] = [1]$$

trong $\mathbf{Z}/p$. Điều này có nghĩa là $[q]$ khả ngịch, và $[q]^{-1} = [\ell]$. □

Trường $\mathbf{Z}/p$ thường được ký hiệu là $\mathbf{F}_p$.

Trong vành $\mathbf{Z}/n$ có hiện tượng sau đây:

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0.$$

Chuyện này không xảy ra trong các vành $\mathbf{Z}$ và $\mathbf{Q}$. Ta đi tới định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 4.11** Cho $R$ là một vành có đơn vị. Nếu có số nguyên dương $n$ sao cho $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = 0$, thì số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất đó được gọi là *đặc số* của vành $R$. Ngược lại, nếu không có số nguyên dương $n$ nào như thế thì ta nói $R$ có *đặc số* bằng 0. Đặc số của $R$ được ký hiệu là $Char(R)$.

**Ví dụ:** $Char(\mathbf{Z}) = Char(\mathbf{Q}) = 0$,

$Char(\mathbf{Z}/n) = n$, với mọi số nguyên dương $n$.

**Mệnh đề 4.12** *Nếu* $\mathbf{K}$ *là một trường thì* $Char(\mathbf{K})$ *hoặc bằng* 0 *hoặc là một số nguyên tố.*

**Chứng minh:** Đặt $m \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m} \in \mathbf{K}$. Giả sử $n = Char(\mathbf{K})$ là một hợp số với phân tích $n = rs$ $(0 < r, s < n)$. Dễ thấy rằng $n \cdot 1 = (r \cdot 1)(s \cdot 1) = 0$. Vì trường $\mathbf{K}$ không có ước của không, nên hoặc $(r \cdot 1) = 0$ hoặc $(s \cdot 1) = 0$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của đặc số, vì $r$ và $s$ là các số tự nhiên nhỏ hơn $n$. $\square$

## 5 Trường số thực

Tất cả các học trò tốt nghiệp trung học phổ thông đều đã tính toán thuần thục với các số thực. Thế nhưng, nếu hỏi họ "Số thực là gì?" thì chắc chắn họ sẽ không trả lời được. Thật ra, đó là một vấn đề rất khó.

Trong tiết này, chúng ta sẽ xây dựng trường số thực $\mathbf{R}$ như là một "bổ sung" của trường số hữu tỷ $\mathbf{Q}$, nhằm giải quyết tình trạng khó xử mà Pythagore đã gặp từ hơn 2000 năm trước, đó là: Nếu chỉ dùng các số hữu tỷ thì đường chéo của một hình vuông đơn vị sẽ không có độ dài. Nói cách khác, không tồn tại số hữu tỷ $a$ thoả mãn hệ thức $a^2 = 2$. Thật vậy, giả sử $a$ có dạng phân số tối giản $\frac{p}{q}$, với $p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$, khi đó $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Hay là $p^2 = 2q^2$. Từ đó suy ra $p$ là một số chẵn. Ta đặt $p = 2p_1$ trong đó $p_1 \in \mathbf{Z}$. Đẳng thức trên trở thành $2p_1^2 = q^2$. Do đó $q$ cũng là một số chẵn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết nói rằng $\frac{p}{q}$ là một phân số tối giản.

Định nghĩa sau đây được gợi ý từ một nhận xét trực giác là: mỗi lát cắt vào "đường thẳng số thực" đều "chạm" phải một số thực duy nhất.

**Định nghĩa 5.1** (Dedekind). Tập hợp $\alpha$ các số hữu tỷ được gọi là một *lát cắt* (trong $\mathbf{Q}$) nếu:

(a) $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbf{Q}$,

(b) Nếu $r \in \alpha$, và $s \in \mathbf{Q}, s < r$, thì $s \in \alpha$,

(c) $\alpha$ không có phần tử lớn nhất.

Chẳng hạn, tập hợp sau đây (được ký hiệu bởi $\sqrt{2}$) là một lát cắt trong $\mathbf{Q}$:

$$\sqrt{2} := \{r \in \mathbf{Q} | \quad r^2 < 2\}.$$

Đối với mỗi số hữu tỷ $r$, ta xét lát cắt sau đây

$$r^* = \{s \in \mathbf{Q} | \quad s < r\}.$$

Để ý rằng $r = \min(\mathbf{Q} \setminus r^*)$.

**Định nghĩa 5.2** Giả sử $\alpha$ là một lát cắt. Nếu có số nhỏ nhất trong tập hợp $\mathbf{Q} \setminus \alpha$ thì $\alpha$ được gọi là một lát cắt hữu tỷ. Trái lại, nếu không có số nhỏ nhất trong tập hợp $\mathbf{Q} \setminus \alpha$ thì $\alpha$ được gọi là một lát cắt vô tỷ.

Tất nhiên, mọi lát cắt hữu tỷ đều có dạng $r^*$ với một số hữu tỷ $r$ nào đó.

Tập hợp các lát cắt được sắp thứ tự theo quan hệ $\leq$ sau đây.

**Định nghĩa 5.3** Giả sử $\alpha, \beta$ là các lát cắt. Ta nói $\alpha < \beta$ (hay $\beta > \alpha$) nếu $\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$. Ta nói $\alpha \leq \beta$ (hay $\beta \geq \alpha$) nếu $\alpha < \beta$ hoặc $\alpha = \beta$. Một lát cắt được gọi là *dương* hay *âm* tuỳ theo nó lớn hơn hay nhỏ hơn lát cắt $0^*$.

Phép cộng các lát cắt được định nghĩa như sau.

**Định nghĩa 5.4** Giả sử $\alpha, \beta$ là các lát cắt. Khi đó lát cắt sau đây được gọi là tổng của $\alpha$ và $\beta$, ký hiệu là $\alpha + \beta$:

$$\alpha + \beta = \{r + s | \ \ r \in \alpha, s \in \beta\}.$$

Dễ dàng kiểm tra lại rằng tập hợp $\alpha + \beta$ trong định nghĩa nói trên là một lát cắt trong $\mathbf{Q}$.

Với mỗi lát cắt $\alpha$ tồn tại duy nhất một lát cắt, được ký hiệu là $-\alpha$, sao cho $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0^*$. Lát cắt này được định nghĩa như sau:

$$-\alpha = \{-r | \ \ r \in (\mathbf{Q} \setminus \alpha), r \text{ không là số nhỏ nhất trong } \mathbf{Q} \setminus \alpha\}.$$

Chúng ta gặp một số khó khăn về kỹ thuật khi định nghĩa tích hai lát cắt. Để tránh những khó khăn đó, chúng ta đưa ra khái niệm giá trị tuyệt đối.

**Định nghĩa 5.5** *Giá trị tuyệt đối* (còn gọi tắt là *trị tuyệt đối*) của lát cắt $\alpha$ là lát cắt sau đây:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } \alpha \geq 0, \\ -\alpha & \text{nếu } \alpha < 0. \end{cases}$$

Tất nhiên $|\alpha| \geq 0$ với mọi $\alpha$, hơn nữa $|\alpha| = 0$ khi và chỉ khi $\alpha = 0$.

Giả sử $\alpha$ và $\beta$ là các lát cắt với $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$. Khi đó tập hợp sau đây là một lát cắt, được gọi là tích của $\alpha$ và $\beta$, và được ký hiệu là $\alpha\beta$:

$$\alpha\beta = \mathbf{Q}^- \cup \{rs | \ \ r \in \alpha, r \geq 0, s \in \beta, s \geq 0\}.$$

Bây giờ tích của hai lát cắt bất kỳ được định nghĩa như sau:

**Định nghĩa 5.6** Giả sử $\alpha, \beta$ là các lát cắt. Khi đó lát cắt sau đây được gọi là tích của $\alpha$ và $\beta$, ký hiệu là $\alpha\beta$:

$$\alpha\beta = \begin{cases} |\alpha||\beta| & \text{nếu } \alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^* \text{ hoặc } \alpha < 0^*, \beta < 0^* \ , \\ -(|\alpha||\beta|) & \text{nếu } \alpha < 0^*, \beta \geq 0^* \text{ hoặc } \alpha \geq 0^*, \beta < 0^* \ . \end{cases}$$

**Định nghĩa 5.7** Ta ký hiệu bởi $\mathbf{R}$ tập hợp tất cả các lát cắt trong $\mathbf{Q}$.

Định lý sau đây được chứng minh không mấy khó khăn, nhưng đòi hỏi một lao động tỉ mỉ.

**Định lý 5.8** *Tập hợp* $\mathbf{R}$ *được trang bị hai phép toán cộng và nhân nói trên là một trường có đặc số bằng* 0*. Trường này được sắp đối với thứ tự* $\leq$*. Ánh xạ* $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}, r \mapsto r^*$ *là một đơn cấu trường bảo toàn thứ tự.*

Trên cơ sở định lý này, mỗi lát cắt trong $\mathbf{Q}$ được gọi là một *số thực*. Mỗi lát cắt hữu tỷ $r^*$ được đồng nhất với số hữu tỷ $r$. Mỗi lát cắt vô tỷ được gọi là một *số vô tỷ*.

So với trường số hữu tỷ $\mathbf{Q}$ thì trường số thực $\mathbf{R}$ ưu việt hơn ở *tính đủ*. Để diễn đạt tính đủ của $\mathbf{R}$ ta cần định nghĩa lát cắt trong $\mathbf{R}$. Bạn đọc hãy so sánh định nghĩa sau đây với Định nghĩa 5.1 về lát cắt trong $\mathbf{Q}$.

**Định nghĩa 5.9** Tập hợp $\alpha$ các số thực được gọi là một *lát cắt* (trong $\mathbf{R}$) nếu:

(a) $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbf{R}$,

(b) Nếu $r \in \alpha$, và $s \in \mathbf{R}, s < r$, thì $s \in \alpha$,

(c) $\alpha$ không có phần tử lớn nhất.

Theo định nghĩa, lát cắt $\alpha$ trong $\mathbf{Q}$ là hữu tỷ hay vô tỷ tuỳ theo tập hợp $\mathbf{Q} \setminus \alpha$ có phần tử nhỏ nhất hay không. Nói một cách trực giác, các lát cắt vô tỷ không "chạm" phải phần tử nào của $\mathbf{Q}$. Một trong những biểu hiện của tính đủ của trường số thực là mọi lát cắt trong $\mathbf{R}$ đều "chạm" phải một số thực nào đó. Cụ thể, ta có

**Định lý 5.10** (Tính đủ của trường số thực). *Với mọi lát cắt $\alpha$ trong $\mathbf{R}$, phần bù của nó $\mathbf{R} \setminus \alpha$ luôn luôn có phần tử nhỏ nhất.*

**Chứng minh:** Đặt $\bar{\alpha} := \alpha \cap \mathbf{Q}$. Khi đó $\bar{\alpha}$ là một lát cắt trong $\mathbf{Q}$. Nói cách khác, $\bar{\alpha}$ là một số thực. Dễ dàng chứng minh rằng với mọi $s \in \alpha$ và mọi $t \in \mathbf{R} \setminus \alpha$, ta có $s < \bar{\alpha} \leq t$. Kết hợp điều đó với sự kiện $\alpha$ không có phần tử lớn nhất, ta suy ra $\bar{\alpha} \notin \alpha$. Vì thế $\bar{\alpha} = \min(\mathbf{R} \setminus \alpha)$. □

Chúng ta trở lại với bài toán đo độ dài của đường chéo của hình vuông đơn vị. Số (lát cát) vô tỷ

$$\sqrt{2} := \{r \in \mathbf{Q} | \ \ r^2 < 2\}$$

chính là số thực thoả mãn phương trình $X^2 = 2$.

Một cách tổng quát, có thể chứng minh được rằng nếu đã chọn một đơn vị độ dài thì mỗi đoạn thẳng đều có độ dài là một số thực nào đó. Ngược lại, mỗi số thực đều là độ dài của một đoạn thẳng có hướng nào đó.

# 6 Trường số phức

Mở đầu tiết trước, chúng ta đã chứng minh rằng phương trình $X^2 - 2 = 0$ không có nghiệm hữu tỷ. Đó chính là điểm khởi đầu cho việc xây dựng trường số thực $\mathbf{R}$ như là một "bổ sung" của trường số hữu tỷ $\mathbf{Q}$, nhằm tìm nghiệm cho phương trình đó.

Có một tình trạng tương tự là phương trình $X^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực, bởi vì bình phương của mọi số thực đều không âm. Để thoát ra khỏi tình trạng này, ta cần "mở rộng" trường số thực $\mathbf{R}$ bằng cách xây dựng thêm "các số mới".

Ta gọi $i$ là một ký hiệu hình thức (tức một "số mới") là nghiệm của phương trình nói trên, tức là

$$i^2 = -1.$$

Ta muốn thực hiện được mọi phép toán cộng, trừ, nhân và chia (cho các số khác 0) sau khi đã ghép thêm $i$ vào trường số thực $\mathbf{R}$. Điều này dẫn ta tới việc chấp nhận các "số mới" dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbf{R}$. Tập hợp các số như vậy khép kín đối với bốn phép toán nói trên. Thật vậy, sử dụng hệ thức $i^2 = -1$ ta có:

$$\begin{aligned}
(a+bi) \pm (c+di) &= (a+c) \pm (b+d)i, \\
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd) + (ad+bc)i, \\
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}, \\
&\quad (\text{với } c+di \neq 0, \text{ tức là } c \neq 0 \text{ hoặc } d \neq 0).
\end{aligned}$$

Tuy nhiên, vẫn còn một câu hỏi: "Vậy $i$ là cái gì ?".

Để tránh tình trạng khó sử này ta hãy đồng nhất $a + bi$ với cặp số thực $(a, b)$. Những phân tích ở trên dẫn ta tới định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 6.1** Một cặp có thứ tự hai số thực $(a, b)$ được gọi là một số phức. Tập hợp tất cả các số phức được ký hiệu bởi $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbf{R}\}.$$

Ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân các số phức như sau:

$$\begin{aligned}
(a, b) + (c, d) &= (a+c, b+d), \\
(a, b)(c, d) &= (ac-bd, ad+bc).
\end{aligned}$$

Mệnh đề sau đây được kiểm tra một cách dễ dàng.

**Mệnh đề 6.2** *Tập các số phức* $\mathbf{C}$ *cùng với hai phép toán cộng và nhân định nghĩa ở trên lập nên một trường có đặc số bằng không.* □

Phần tử trung lập đối với phép cộng là $0 = (0, 0)$. Đơn vị của phép nhân là $1 = (1, 0)$. Nghịch đảo của số phức $(a, b) \neq 0$ là

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

**Nhận xét:** Theo định nghĩa, hai số phức $(a, b)$ và $(c, d)$ bằng nhau nếu và chỉ nếu $a = c, b = d$.

Ta có

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0),\\ (a, 0)(b, 0) &= (ab, 0).\end{aligned}$$

Nói cách khác, ánh xạ

$$\begin{aligned}\iota : \mathbf{R} &\to \mathbf{C},\\ a &\mapsto (a, 0)\end{aligned}$$

là một đơn cấu vành. Vì thế, ta có thể đồng nhất số thực $a \in \mathbf{R}$ với số phức có dạng $(a, 0)$. Khi đó tập hợp các số thực $\mathbf{R}$ được đồng nhất với tập hợp các số phức dạng $\{(a, 0)|a \in \mathbf{R}\}$. Người ta nói trường số thực $\mathbf{R}$ là một trường con của trường số phức $\mathbf{C}$.

Đặt $i = (0, 1) \in \mathbf{C}$. Ta có $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$. Như thế, ta đã có "vật liệu" để xây dựng "số mới" $i$. Ta gọi $i$ là *đơn vị ảo.*

Mỗi số phức $z = (a, b)$ có thể viết dưới dạng

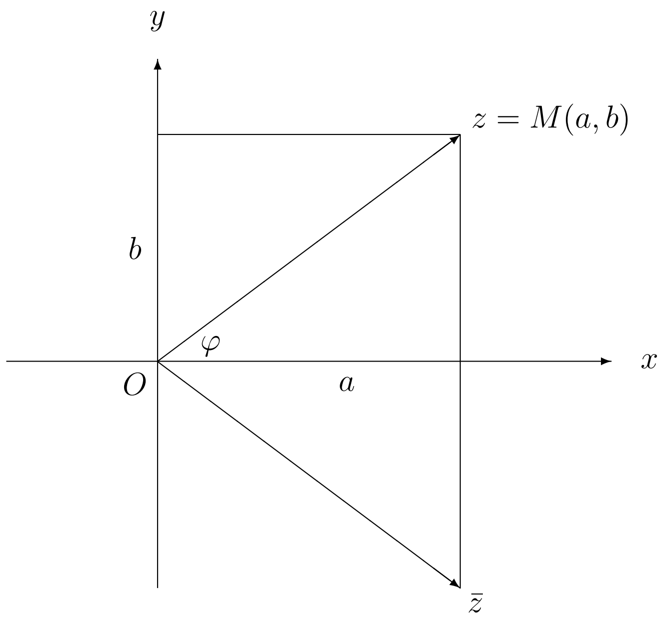
$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

trong đó $a, b \in \mathbf{R}$. Đó là *dạng đại số của số phức.* Ta gọi $a$ là phần thực của $z$, ký hiệu $a = Rez$, còn $b$ là phần ảo của $z$, ký hiệu $Imz$.

Số phức $z$ mà $Imz = 0$ chính là một số thực. Số phức $z$ có $Rez = 0$ được gọi là một *số thuần ảo.*

Bây giờ ta xét *biểu diễn hình học* của các số phức.

Trên mặt phẳng xét một hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxy$. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn trên mặt phẳng bởi điểm $M$ có toạ độ $(a, b)$, hoặc bởi véc tơ $\vec{OM}$ đi từ điểm gốc toạ độ $O$ tới điểm $M$. Cộng các số phức chính là cộng các véctơ tương ứng với chúng.




Mặt phẳng toạ độ được gọi là *mặt phẳng phức*. Các số thực được biểu diễn trên trục $Ox$, được gọi là *trục thực*. Các số thuần ảo được biểu diễn trên trục $Oy$, được gọi là *trục ảo*.

Phép đối xứng qua trục thực được gọi là phép liên hợp phức. Cụ thể hơn, ta có

**Định nghĩa 6.3** Số phức $\bar{z} = a - bi$ được gọi là *liên hợp* của số phức $z = a + bi$, trong đó $a, b$ là các số thực.

Ta dễ dàng kiểm tra lại rằng

$$\begin{aligned}\overline{z+t} &= \bar{z} + \bar{t},\\ \overline{zt} &= \bar{z}\bar{t}.\end{aligned}$$

Phần cuối của tiết này được dành cho việc khảo sát *dạng lượng giác* của số phức. Dạng lượng giác đặc biệt thuận tiện cho việc nâng lên luỹ thừa và khai căn các số phức.

Giả sử $z = a + bi \neq 0$ (tức là $a^2 + b^2 \neq 0$). Ta có

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right).$$

Ta đặt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ và nhận xét rằng tồn tại góc $\varphi$ xác định sai khác $2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ sao cho

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Khi đó $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

**Định nghĩa 6.4** Số thực không âm $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là *môđun* của số phức $z = a + bi$, ký hiệu $r = |z|$; còn góc $\varphi$ được gọi là *argument* của $z$, ký hiệu $\varphi = \arg z$. Argument của số phức $z = 0$ không được định nghĩa.

Giả sử $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), t = |t|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Khi đó

$$\begin{aligned} zt &= |z||t|[(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)] \\ &= |z||t|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned}$$

Nói cách khác

$$\begin{aligned} |zt| &= |z||t|, \\ arg(zt) &= arg(z) + arg(t), \end{aligned}$$

trong đó điều kiện để có đẳng thức cuối là $arg(z)$ và $arg(t)$ được định nghĩa.

Nói riêng, ta có

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Đặc biệt, với $|z| = 1$, ta có **C**ông thức Moivre:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Tiếp theo, ta xét bài toán *khai căn bậc n* của số phức $z$, tức là tìm tất cả các số phức $u$ sao cho $u^n = z$.

Nếu $z = 0$ thì $u = 0$ là lời giải duy nhất.

Nếu $z \neq 0$, ta đặt $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và tìm $u$ dưới dạng $u = |u|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ta có

$$u^n = z \iff |u|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\iff \begin{cases} |u|^n &= |z|, \\ n\theta &= \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |u| &= \sqrt[n]{|z|} \quad (\text{căn số học}), \\ \theta &= \frac{\varphi+2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

Như vậy, có đúng $n$ căn bậc $n$ của mỗi số phức $z \neq 0$, ứng với các giá trị $k = 1, 2, ..., n-1$. Các căn này lập nên $n$ đỉnh của một đa giác đều $n$ cạnh với tâm tại gốc toạ độ.

Nói riêng, có đúng $n$ căn bậc $n$ của đơn vị 1, đó là

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, ..., n-1).$$

Căn $\omega_k$ được gọi là một *căn nguyên thuỷ* bậc $n$ của 1 nếu mọi căn bậc $n$ của 1 đều là một luỹ thừa nào đó của $\omega_k$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $k$ và $n$ nguyên tố cùng nhau.

Tất cả các căn bậc $n$ của mỗi số phức $z$ đều nhận được bằng cách nhân một căn như thế với tất cả các căn bậc $n$ của đơn vị.

Việc khảo sát các căn phức đã cho thấy trường số phức "phong phú" hơn rất nhiều so với trường số thực. Trở lại xét phương trình $X^2 + 1 = 0$, ta đã biết rằng nó có đúng hai nghiệm phức $(\pm i)$, là các căn bậc hai của $(-1)$. Trong tiết sau ta sẽ thấy trường số phức cung cấp "đủ nghiệm" cho tất cả các đa thức hệ số phức.

## 7 Đa thức

Chúng ta trình bày ở đây một cách hiểu trực giác nhất về đa thức.

Giả sử $\mathbf{K}$ là một trường. Biểu thức hình thức

$$f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

trong đó $a_0, a_1, .., a_n \in \mathbf{K}$, được gọi là một *đa thức* của ẩn $X$ (hay biến $X$) với hệ số trong $\mathbf{K}$.

Nếu $a_n \neq 0$ thì ta nói $f(X)$ có bậc $n$, và viết $\deg f(X) = n$; còn $a_n$ được gọi là hệ số bậc cao nhất của $f(X)$. Nếu $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ thì $f(X)$ được gọi là đa thức 0, và được coi là có bậc bằng $-\infty$.

Tập hợp các đa thức ẩn $X$ với hệ số trong $\mathbf{K}$ được ký hiệu là $\mathbf{K}[X]$. Ta trang bị cho tập hợp này hai phép toán cộng và nhân như sau:

Phép cộng:

$$\begin{aligned}(a_nX^n + \cdots + a_0) \quad &+ \quad (b_mX^n + \cdots + b_0) \\ &:= \quad a_nX^n + \cdots + a_{m+1}X^{m+1} + (a_m + b_m)X^m + \cdots + (a_0 + b_0),\end{aligned}$$

(ở đây ta giả sử không giảm tổng quát $n \geq m$).

Phép nhân:

$$(a_nX^n + \cdots + a_0)(b_mX^n + \cdots + b_0) := c_{n+m}X^{n+m} + \cdots + c_0,$$

trong đó $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

**Mệnh đề 7.1** $\mathbf{K}[X]$ *cùng với hai phép toán nói trên lập nên một vành giao hoán, có đơn vị, không có ước của không với đặc số* $Char\mathbf{K}[X] = Char\mathbf{K}$.

**Chứng minh:** Nhận xét rằng đối với các đa thức $f(X)$ và $g(X)$ ta có

$$\deg(f(X)g(X)) = \deg f(X) + \deg g(X).$$

Tính chất này dẫn tới sự kiện $\mathbf{K}[X]$ không có ước của không.

Các khẳng định còn lại của mệnh đề đều dễ kiểm tra. $\square$

Ta thừa nhận định lý sau đây.

**Định lý 7.2** (Phép chia Euclid với dư). *Giả sử* $f(X)$ *và* $g(X) \neq 0$ *là các đa thức của vành* $\mathbf{K}[X]$. *Khi đó tồn tại duy nhất các đa thức* $q(X)$ *và* $r(X)$ *trong* $\mathbf{K}[X]$ *sao cho*

$$f(X) = g(X)q(X) + r(X),$$

*trong đó* $\deg r(X) < \deg g(X)$.

Các đa thức $q(X)$ và $r(X)$ được gọi tương ứng là *thương* và *phần dư* trong phép chia $f(X)$ cho $g(X)$. Nếu $r(X) = 0$, tức là $f(X) = g(X)q(X)$, ta nói $f(X)$ *chia hết cho* $g(X)$ trong $\mathbf{K}[X]$, hoặc $g(X)$ là một *ước* của $f(X)$ trong $\mathbf{K}[X]$.

Phần tử $c \in \mathbf{K}$ được gọi là một *nghiệm* của đa thức $f(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ nếu

$$f(c) = a_nc^n + \cdots + a_1c + a_0 = 0 \in \mathbf{K}.$$

Ta có định lý sau đây liên hệ giữa nghiệm và tính chia hết của đa thức.

**Định lý 7.3** (Bézout). *Đa thức $f(X) \in \mathbf{K}[X]$ nhận $c \in \mathbf{K}$ là một nghiệm nếu và chỉ nếu tồn tại một đa thức $q(X) \in \mathbf{K}[X]$ sao cho*

$$f(X) = (X - c)q(X).$$

**Chứng minh:** Nếu $f(X) = (X - c)q(X)$ thì $f(c) = (c - c)q(c) = 0 \in \mathbf{K}$. Do đó $c$ là một nghiệm của $f(X)$.

Ngược lại, giả sử $c$ là một nghiệm của $f(X)$. Ta chia $f(X)$ cho đa thức khác không $(X - c)$:

$$f(X) = (X - c)q(X) + r(X),$$

trong đó $q(X), r(X) \in \mathbf{K}[X]$ và $\deg r(X) < \deg(X - c) = 1$. Như thế, $\deg r(X)$ hoặc bằng 0 hoặc bằng $-\infty$. Trong cả hai trường hợp $r(X)$ đều là đa thức hằng, $r(X) = r \in \mathbf{K}$. Ta có

$$0 = f(c) = (c - c)q(c) + r = r.$$

Vậy $r = 0$. Từ đó $f(X) = (X - c)q(X)$. $\square$

**Định nghĩa 7.4** Phần tử $c \in \mathbf{K}$ được gọi là một *nghiệm bội $k$* của đa thức $f(X)$ nếu $f(X)$ chia hết cho $(X - c)^k$, nhưng không chia hết cho $(X - c)^{k+1}$ trong $\mathbf{K}[X]$.

**Ví dụ:** Đa thức $f(X) = X(X - 1)^2$ có các nghiệm $X = 0$ với bội 0 và $X = 1$ với bội 2.

**Định nghĩa 7.5** Đa thức $f(X) \in \mathbf{K}[X]$ được gọi là *bất khả quy* trên $\mathbf{K}$ nếu nó có bậc dương và nếu nó không thừa nhận một phân tích nào có dạng $f(X) = g(X)h(X)$, trong đó các đa thức $g(X), h(X) \in \mathbf{K}[X]$ đều có bậc nhỏ hơn $\deg f(X)$. Một đa thức được gọi là *khả quy* trên $\mathbf{K}$ nếu nó không bất khả quy trên $\mathbf{K}$.

Nói cách khác, đa thức $f(X) \in \mathbf{K}[X]$ là *bất khả quy* trên $\mathbf{K}$ nếu nó có bậc dương và chỉ chia hết cho các đa thức bậc dương có dạng $kf(X) \in \mathbf{K}[X]$, trong đó $k \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$.

**Ví dụ:**

(1) Mọi đa thức bậc nhất đều bất khả quy.

(2) Đa thức bậc hai bất khả quy trên $\mathbf{K}$ nếu và chỉ nếu nó vô nghiệm trong $\mathbf{K}$.

(3) Đa thức bậc lớn hơn 1 có nghiệm trong $\mathbf{K}$ thì không bất khả quy trên $\mathbf{K}$

(4) Đa thức $X^2 - 2$ bất khả quy trên $\mathbf{Q}$ nhưng khả quy trên $\mathbf{R}$.

(5) Đa thức $X^2 + 1$ bất khả quy trên $\mathbf{R}$, nhưng khả quy trên $\mathbf{C}$.

Chúng ta thừa nhận định lý sau đây, nói về tính *đóng đại số* của trường số phức.

**Định lý 7.6** (Định lý cơ bản của Đại số học).
*Mọi đa thức bậc dương với hệ số phức đều có nghiệm phức.*

Nói cách khác, một đa thức hệ số phức là bất khả quy trên $\mathbf{C}$ khi và chỉ khi nó là một đa thức bậc nhất.

Như vậy, nếu $f(X) \in \mathbf{C}[X]$ có bậc $n$ thì nó thừa nhận phân tích

$$f(X) = a_n(X - z_1) \cdots (X - z_n)$$

trong đó $a_n \neq 0$ là hệ số bậc cao nhất của $f(X)$, và $z_1, ..., z_n$ là các số phức nào đó.

Cho tới nay, mọi chứng minh đã biết của định lý này đều mang bản sắc Tôpô, Hình học hoặc Giải tích. Chưa có một chứng minh thuần tuý đại số nào cho định lý này.

Nhắc lại rằng tam thức bậc hai hệ số thực $aX^2 + bX + c$ không có nghiệm thực nếu và chỉ nếu biệt thức của nó $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Một ứng dụng của định lý cơ bản của đại số học là khẳng định sau đây.

**Định lý 7.7** *Một đa thức hệ số thực là bất khả quy trên* $\mathbf{R}$ *nếu và chỉ nếu nó hoặc là một đa thức bậc nhất hoặc là một đa thức bậc hai với biệt thức âm. Hơn nữa, mọi đa thức* $f(X) \in \mathbf{R}[X]$ *đều thừa nhận phân tích*

$$f(X) = a_n(X - x_1)^{k_1} \cdots (X - x_r)^{k_r}(X^2 + b_1X + c_1)^{\ell_1} \cdots (X^2 + b_sX + c_s)^{\ell_s},$$

*trong đó* $a_n$ *là hệ số bậc cao nhất của* $f(X)$, $\sum_{i=1}^{r} k_i + \sum_{j=1}^{s} \ell_j = n = \deg f(X)$, $x_1, ..., x_r$ *là các số thực và các tam thức bậc hai hệ số thực* $(X^2 + b_iX + c_i)$ *đều không có nghiệm thực.*

**Chứng minh:** Rõ ràng mọi đa thức hệ số thực bậc nhất hoặc bậc hai với biệt thức âm đều bất khả quy trên $\mathbf{R}$. Khẳng định ngược lại được bao hàm trong phân tích cần tìm cho mọi đa thức $f(X)$ nói trong định lý.

Gọi $x_1, ..., x_r$ là tất cả các nghiệm thực của $f(X)$ với bội tương ứng bằng $k_1, ..., k_r$. Ta có

$$f(X) = a_n(X - x_1)^{k_1} \cdots (X - x_r)^{k_r}P(X),$$

trong đó $P(X)$ là một đa thức hệ số thực nhưng không có nghiệm thực. Giả sử $z_1$ là một nghiệm phức của $P(X)$, khi đó $\bar{z}_1$ cũng là một nghiệm của $P(X)$. Thật vậy, $P(X)$ có dạng

$$P(X) = d_mX^m + \cdots + d_1X + d_0,$$

trong đó $d_m, ..., d_0$ là các số thực, tức là $\bar{d}_i = d_i$. Dễ thấy rằng

$$0 = \overline{P(z_1)} \quad = \quad \overline{d_mz_1^m + \cdots + d_1z_1 + d_0}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{d}_m \overline{z_1^m} + \cdots + \bar{d}_1 \bar{z}_1 + \bar{d}_0 \\ &= d_m \bar{z}_1^m + \cdots + d_1 \bar{z}_1 + d_0 \\ &= P(\bar{z}_1). \end{aligned}$$

Theo định lý Bézout $P(X) = (X - z_1)P_1(X)$. Từ đó

$$P(\bar{z}_1) = (\bar{z}_1 - z_1)P_1(\bar{z}_1) = 0.$$

Vì $z_1$ không phải là số thực, nên $(\bar{z}_1 - z_1) \neq 0$. Do đó $P_1(\bar{z}_1) = 0$. Áp dụng định lý Bézout một lần nữa cho $P_1(X)$ ta nhận được

$$P(X) = (X - z_1)(X - \bar{z}_1)Q(X),$$

trong đó $Q(X)$ là một đa thức. Nhận xét rằng

$$\begin{aligned} (X - z_1)(X - \bar{z}_1) &= X^2 - (z_1 + \bar{z}_1)X + z_1\bar{z}_1 \\ &= X^2 - 2(Re(Z_1)X + |z_1|^2 \end{aligned}$$

là một tam thức bậc hai hệ số thực nhưng không có nghiệm thực. Do tính duy nhất của phép chia đa thức $P(X)$ cho đa thức $X^2 - 2(Re(Z_1)X + |z_1|^2$ trong các vành $\mathbf{R}[X]$ và $\mathbf{C}[X]$, ta kết luận $Q(X)$ cũng là một đa thức hệ số thực. Nó không có nghiệm thực vì $P(X)$ cũng vậy. Như thế, có thể lặp lại những lập luận ở trên với $Q(X)$ thay cho $P(X)$. Bởi vì $\deg Q(X) < \deg P(X)$, cho nên ta nhận được phân tích của $f(X)$ như nói trong định lý bằng cách quy nạp theo $\deg P(X)$. □

## Bài tập

1. Chứng minh các tính chất kết hợp, giao hoán, phân phối của các phép toán hợp và giao trên tập hợp. Chứng minh công thức đối ngẫu De Morgan cho hiệu của hợp và giao của một họ tuỳ ý các tập hợp.

2. Chứng minh rằng

   (a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \iff A = B$,

   (b) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$,

   (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

   (d) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,

   (e) $A \cup (B \setminus A) = (A \cup B)$,

   (f) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

3. Chứng minh rằng

   (a) $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset \iff A \cap B \neq \emptyset$,

   (b) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

4. Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ và $A, B \subset X$. Chứng minh rằng

   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

   (b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,

   (c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

   Hãy tìm các ví dụ để chứng tỏ rằng không có dấu bằng ở các mục (b) và (c).

5. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và các tập con $A, B \subset Y$. Chứng minh rằng

   (a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,

   (b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

   (c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

6. Chứng minh hai mệnh đề về ánh xạ ở cuối §2.

7. Xét xem ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi công thức $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có phải là một đơn ánh hay toàn ánh hay không. Tìm $f(\mathbf{R})$, $f(0)$, $f^{-1}(0)$, $f([0,5])$, $f^{-1}([0,5])$.

8. Giả sử $A$ là một tập gồm đúng $n$ phần tử. Chứng minh rằng tập hợp $\mathcal{P}(A)$ các tập con của $A$ có đúng $2^n$ phần tử.

9. Chứng minh rằng tập hợp $\mathbf{R}^+$ các số thực dương có lực lượng continum. (Gợi ý: Xét ánh xạ $exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, với $exp(x) = e^x$.)

10. Cho hai số thực $a, b$ với $a < b$. Chứng minh rằng khoảng số thực $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} |\ a < x < b\}$ có lực lượng continum. (Gợi ý: Xét ánh xạ $\varphi : (a, b) \to \mathbf{R}^+$ xác định bởi $\varphi(x) = \frac{a-x}{x-b}$.)

11. Một số thực được gọi là một *số đại số* nếu nó là nghiệm của một phương trình đa thức nào đó với các hệ số nguyên. Chứng minh rằng tập các số đại số là một tập đếm được. Từ đó suy ra rằng tập hợp các số thực không phải là số đại số là một tập vô hạn không đếm được.

12. Lập bảng cộng và bảng nhân của vành $\mathbf{Z}/n$ với $n = 12$ và $n = 15$. Dựa vào bảng, tìm các phần tử khả nghịch đối với phép nhân trong hai vành đó.

13. Gọi $(\mathbf{Z}/n)^*$ là tập hợp các phần tử khả nghịch đối với phép nhân trong $\mathbf{Z}/n$. Chứng minh rằng

$$(\mathbf{Z}/n)^* = \{[x] |\ x \text{ và } n \text{ nguyên tố cùng nhau}\}.$$

14. Cho $R$ là một vành có đơn vị. Gọi $R^*$ là tập hợp các phần tử khả nghịch đối với phép nhân trong $R$. Chứng minh rằng $R^*$ là một nhóm đối với phép nhân của $R$.

15. Cho $R$ là một vành có đơn vị $1 \neq 0$ và các phần tử $x, y \in R$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $xy$ và $yx$ khả nghịch thì $x$ và $y$ khả nghịch.

(b) Nếu $R$ không có ước của không và $xy$ khả nghịch thì $x$ và $y$ khả nghịch.

16. Cho $R$ là một vành hữu hạn. Chứng minh rằng

    (a) Nếu $R$ không có ước của không thì nó có đơn vị và mọi phần tử khác không của $R$ đều khả nghịch. (Gợi ý: Các phép nhân bên phải hoặc bên trái với một phần tử cố định khác không đều là các song ánh $R \to R$.)

    (b) Nếu $R$ có đơn vị thì mọi phần tử khả nghịch một phía trong $R$ đều khả nghịch.

17. Chứng minh rằng tập hợp các số thực

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} |\ a, b \in \mathbf{Q}\}$$

lập nên một trường với các phép toán cộng và nhân thông thường.

18. Chứng minh rằng các trường $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ và $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ không đẳng cấu với nhau.

19. Chứng minh rằng nếu số phức $z \notin \mathbf{R}$ thì trường gồm các phần tử có dạng

$$\mathbf{R}(z) = \{a + bz |\ a, b \in \mathbf{R}\}$$

trùng với trường số phức $\mathbf{C}$.

20. Chứng minh rằng các trường $\mathbf{C}$ và $\mathbf{Z}/p$, với $p$ nguyên tố, không là trường được sắp toàn phần đối với bất kỳ thứ tự nào.

21. Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*$ xác định bởi công thức $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$ là một đồng cấu từ nhóm $\mathbf{R}$ với phép cộng vào nhóm $\mathbf{C}^*$ với phép nhân. Tìm tập giá trị của $\varphi$. Đồng cấu $\varphi$ có phải là một toàn cấu hay một đơn cấu không?

22. Chứng minh rằng đối với số phức $z$:

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbf{R},$$
$$z = -\bar{z} \iff z \text{ là thuần ảo.}$$

23. Khi nào thì tích của hai số phức là một số thực? Khi nào thì tổng và tích của hai số phức đều là số thực?

24. Tính $i^{77}, i^{99}, i^{-57}, i^n, (1+i)^n$ với $n \in \mathbf{Z}$.

25. Chứng minh các đẳng thức

$$\begin{aligned} (1+i)^{8n} &= 2^{4n}, \\ (1+i)^{4n} &= (-1)^n 2^{2n}, \quad (n \in \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

26. Chứng minh rằng nếu $z+z^{-1} = 2\cos\varphi$ trong đó $\varphi \in \mathbf{R}$ thì $z^n+z^{-n} = 2\cos n\varphi$, với mọi $n \in \mathbf{N}$.

27. Tính

$$\text{(a)} \frac{1-2i}{4+3i}, \quad \text{(b)} \frac{(1-i)^n}{(1-\sqrt{3}i)^n}, \quad \text{(c)} \frac{(1+\sqrt{3}i)^n}{(1+i)^{n+1}}.$$

28. (a) Tìm dạng lượng giác của số phức $(1+itg\varphi)/(1-itg\varphi)$,

    (b) Trên mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm tương ứng với

$$\{z = (1+ti)/(1-ti) |\ t \in \mathbf{R}\}.$$

29. Đẳng thức sau đây có đúng không $\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}$, trong đó $z \in \mathbf{C}$, $n, s \in \mathbf{N}$ ?

30. (a) Tìm các căn bậc ba của $1+i$, và $1-\sqrt{3}i$ .

    (b) Tìm các căn bậc $n$ của $i$, $1-i$, và $1+\sqrt{3}i$ .

31. Chứng minh rằng tổng của tất cả các căn bậc $n$ của một số phức bất kỳ đều bằng 0.

32. Phân tích các đa thức sau đây thành các nhân tử bất khả quy trong các vành $\mathbf{R}[X]$ và $\mathbf{C}[X]$:

    (a) $X^3 + 3X^2 + 5X + 3$,

    (b) $X^3 - X^2 - X - 2$.

33. Chứng minh rằng đa thức $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$ chia hết cho đa thức $X^2 + X + 1$, với mọi $m, n, p$ nguyên dương.

34. Tìm tất cả các bộ ba nguyên dương $m, n, p$ sao cho đa thức $X^{3m} - X^{3n+1} + X^{3p+2}$ chia hết cho đa thức $X^2 - X + 1$.

# Chương I

# KHÔNG GIAN VÉCTƠ

Đối tượng ban đầu của môn Đại số tuyến tính là việc giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Tuy vậy, để có thể hiểu thấu đáo điều kiện đảm bảo cho một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm và cấu trúc nghiệm của nó, người ta đã đưa ra khái niệm không gian véctơ và khái niệm này đã trở thành một trong những trụ cột của môn Đại số tuyến tính. Không gian véctơ sau đó đã được sử dụng phổ biến trong mọi lĩnh vực của toán học.

## 1 Khái niệm không gian véctơ

Trong suốt chương này, ta luôn giả sử $\mathbf{K}$ là một trường.

**Định nghĩa 1.1** Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một *không gian véctơ* trên $\mathbf{K}$ nếu nó được trang bị hai phép toán, gồm

(a) Phép cộng véctơ:

$$\begin{aligned} + : \quad & V \times V \to V \\ & (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta, \end{aligned}$$

(b) Phép nhân véctơ với vô hướng:

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbf{K} \times V \to V \\ & (a, \alpha) \mapsto a\alpha; \end{aligned}$$

Các phép toán này thoả mãn những điều kiện (hoặc tiên đề) sau đây:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(V1)} & (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), & \forall \alpha,\beta,\gamma \in V,\\
\text{(V2)} & \exists 0 \in V : 0+\alpha=\alpha+0=\alpha, & \forall \alpha \in V,\\
\text{(V3)} & \forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V : \alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha=0, & \\
\text{(V4)} & \alpha+\beta=\beta+\alpha, & \forall \alpha,\beta \in V,\\
\text{(V5)} & (a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha, & \forall a,b \in \mathbf{K}, \forall \alpha \in V,\\
\text{(V6)} & a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta, & \forall a \in \mathbf{K}, \forall \alpha,\beta \in V,\\
\text{(V7)} & a(b\alpha)=(ab)\alpha, & \forall a,b \in \mathbf{K}, \forall \alpha \in V,\\
\text{(V8)} & 1\alpha=\alpha, & \forall \alpha \in V.
\end{array}
$$

Các phần tử của $V$ được gọi là các *véctơ*, các phần tử của $\mathbf{K}$ được gọi là các *vô hướng*.

Bốn tiên đề đầu nói rằng $V$ là một nhóm abel đối với phép cộng. Các tiên đề (V5) - (V7) nói rằng phép nhân với vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng vô hướng, phân phối đối với phép cộng véctơ và có tính chất của một "tác động". Tiên đề (V8) nói rằng phép nhân với vô hướng được chuẩn hoá.

Một không gian véctơ trên $\mathbf{K}$ còn được gọi là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ, hay đơn giản: một không gian véctơ, nếu $\mathbf{K}$ đã rõ.

Khi $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $V$ được gọi là một không gian véctơ thực. Khi $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $V$ được gọi là một không gian véctơ phức.

**Ví dụ 1.2** (a) Các véctơ tự do trong hình học sơ cấp với các phép toán cộng véctơ và nhân véctơ với số thực lập nên một không gian véctơ thực.

(b) Tập hợp các đa thức $\mathbf{K}[X]$ (của một ẩn $X$, với hệ số trong $\mathbf{K}$) với phép cộng đa thức và phép nhân đa thức với vô hướng thông thường lập nên một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$.

(c) $\mathbf{K}$ là một không gian véctơ trên chính nó đối với phép cộng và phép nhân của trường $\mathbf{K}$. $\mathbf{R}$ vừa là một $\mathbf{Q}$-không gian véctơ vừa là một $\mathbf{R}$-không gian véctơ. $\mathbf{C}$ là một không gian véctơ đồng thời trên các trường $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ và $\mathbf{C}$.

(d) Tập hợp $\{0\}$ gồm chỉ một véctơ 0 là một không gian véctơ trên mỗi trường $\mathbf{K}$, với các phép toán tầm thường

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0, \\ a0 &= 0, \qquad \forall a \in \mathbf{K}. \end{aligned}$$

(e) Gọi $\mathbf{K}_n$ là tập hợp gồm tất cả các hàng $n$-thành phần $(x_1, ..., x_n)$ với $x_i \in \mathbf{K}$. Nó lập nên một $\mathbf{K}$-không gian véctơ với hai phép toán sau đây:

$$\begin{aligned} (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) &= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \\ a(x_1, ..., x_n) &= (ax_1, ..., ax_n), \qquad a \in \mathbf{K}. \end{aligned}$$

(f) Gọi $\mathbf{K}^n$ là tập hợp gồm tất cả các cột $n$-thành phần $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, với $x_i \in \mathbf{K}$. Nó cũng lập nên một $\mathbf{K}$-không gian véctơ với hai phép toán sau đây:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}.$$

Để trình bày cho gọn, chúng ta sẽ đôi khi ký hiệu véctơ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bởi $(x_1, ..., x_n)^t$.

(g) Một ma trận $m$ hàng, $n$ cột với các phần tử trong $\mathbf{K}$ là một bảng có dạng

$$(a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbf{K}$. Gọi $M(m \times n, \mathbf{K})$ là tập hợp tất cả các ma trận $m$ hàng, $n$ cột với các phần tử trong $\mathbf{K}$. Nó lập nên một $\mathbf{K}$-không gian véctơ với hai phép toán sau đây:

$$\begin{aligned} (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} &= (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \\ a(a_{ij})_{m\times n} &= (aa_{ij})_{m\times n}. \end{aligned}$$

Chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ hơn về các ma trận ở chương sau.

(h) Tập hợp $C[a, b]$ các hàm thực liên tục trên đoạn $[a, b] \subset \mathbf{R}$ là một không gian véctơ thực với các phép toán thông thường

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x). \end{aligned}$$

(i) Giả sử $V$ và $W$ là các $\mathbf{K}$-không gian véctơ. Khi đó, $V \times W$ cũng là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ đối với các phép toán định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} (v, w) + (v', w') &= (v + v', w + w') \\ a(v, w) &= (av, aw), \end{aligned}$$

trong đó $a \in \mathbf{K}$, $v, v' \in V, w, w' \in W$. Không gian $V \times W$ được gọi là *tích trực tiếp* của các không gian $V$ và $W$

Giả sử $V$ là một không gian véctơ. Các tính chất sau đây được suy ngay từ định nghĩa của không gian véctơ.

(1) Phần tử trung lập của phép cộng $0 \in V$ là duy nhất. Nó được gọi là *véctơ không*.

Thật vậy, giả sử $0_1$ cũng là một phần tử trung lập của phép cộng trong $V$. Khi đó

$$\begin{aligned} 0 + 0_1 &= 0_1 \qquad \text{(vì 0 là trung lập)} \\ &= 0 \qquad \text{(vì } 0_1 \text{ là trung lập).} \end{aligned}$$

Vậy $0 = 0_1$.

(2) Với mọi véctơ $\alpha \in V$, phần tử đối $\alpha'$ thoả mãn tiên đề (V3) là duy nhất. Nó sẽ được ký hiệu là $(-\alpha)$.

Thật vậy, giả sử $\alpha'_1$ cũng là một phần tử đối của $\alpha$. Khi đó

$$\begin{aligned}
(\alpha' + \alpha) + \alpha'_1 &= 0 + \alpha'_1 = \alpha'_1 && \text{(vì } \alpha' \text{ là một phần tử đối)}\\
&= \alpha' + (\alpha + \alpha'_1) && \text{(theo tiên đề (V1))}\\
&= \alpha' + 0 = \alpha' && \text{(vì } \alpha'_1 \text{ là một phần tử đối).}
\end{aligned}$$

Như vậy, $\alpha' = \alpha'_1$.

Ta định nghĩa: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

(3) Ta có các quy tắc giản ước và chuyển vế:

$$\begin{aligned}
\alpha + \gamma = \beta + \gamma &\implies \alpha = \beta,\\
\alpha + \beta = \gamma &\implies \alpha = \gamma - \beta.
\end{aligned}$$

Thật vậy, cộng $(-\gamma)$ vào hai vế của đẳng thức $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ và cộng $(-\beta)$ vào hai vế của đẳng thức $\alpha + \beta = \gamma$ ta thu được điều phải chứng minh.

(4) $0\alpha = 0$ và $a0 = 0$.

Thật vậy,

$$0\alpha + 0 = 0\alpha = (0 + 0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha.$$

Từ đó, theo luật giản ước, $0\alpha = 0$. Tương tự,

$$a0 + 0 = a0 = a(0 + 0) = a0 + a0.$$

Cũng theo luật giản ước, ta có $a0 = 0$.

(5) Nếu $a\alpha = 0$ (với $a \in \mathbf{K}, \alpha \in V$), thì hoặc $a = 0$ hoặc $\alpha = 0$.

Thật vậy, giả sử $a \neq 0$, nhân hai vế của đẳng thức đã cho với $a^{-1} \in \mathbf{K}$ ta có

$$\alpha = 1\alpha = (a^{-1}a)\alpha = a^{-1}(a\alpha) = a^{-1}0 = 0.$$

(6) $(-a)\alpha = a(-\alpha) = -(a\alpha), \qquad \forall a \in \mathbf{K}, \alpha \in V.$

Thật vậy,

$$a\alpha + (-a)\alpha = (a + (-a))\alpha = 0\alpha = 0.$$

Từ đó, $(-a)\alpha = -(a\alpha)$. Tương tự,

$$a\alpha + a(-\alpha) = a(\alpha + (-\alpha)) = a0 = 0.$$

Do đó, $a(-\alpha) = -(a\alpha)$.

(7) $(\sum_{i=1}^m a_i)(\sum_{j=1}^n \alpha_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_i\alpha_j)$.

Đẳng thức này có thể được chứng minh bằng quy nạp theo $m$ và $n$, trên cơ sở sử dụng các tiên đề (V5) và (V6).

# 2 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Trong suốt tiết này ta luôn giả sử $V$ là một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 2.1** (Tổ hợp tuyến tính, biểu thị tuyến tính)

(a) Một *tổ hợp tuyến tính* của các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$ là một biểu thức dạng

$$\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n,$$

trong đó $a_i \in \mathbf{K}$.

(b) Giả sử $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n \in V$. Đẳng thức đó được gọi là một *biểu thị tuyến tính* của $\alpha$ qua các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (hoặc qua hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$). Khi có đẳng thức đó, ta nói $\alpha$ biểu thị tuyến tính được qua $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

**Nhận xét:** Một véctơ có thể có nhiều biểu thị tuyến tính khác nhau qua một hệ véctơ.

Ta nói hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, ..., \beta_m)$ nếu mỗi véctơ $\alpha_i$, trong đó $1 \leq i \leq n$, biểu thị tuyến tính được qua $(\beta_1, ..., \beta_m)$.

Giả sử hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, ..., \beta_m)$, và hệ $(\beta_1, ..., \beta_m)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\gamma_1, ..., \gamma_k)$. Khi đó, rõ ràng $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ cũng biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\gamma_1, ..., \gamma_k)$.

**Định nghĩa 2.2** (Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.)

(a) Hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu hệ thức

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0$$

chỉ xảy ra khi $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

(b) Hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu nó không độc lập tuyến tính.

Nếu hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính, ta cũng nói các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính.

Đẳng thức $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0$ được gọi là một ràng buộc tuyến tính giữa các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Nếu $a_1 = \cdots = a_n = 0$ thì ta gọi ràng buộc đó là *tầm thường*. Theo định nghĩa, hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu mọi ràng buộc tuyến tính giữa $\alpha_1, ..., \alpha_n$ đều là ràng buộc tầm thường. Hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có các vô hướng $a_1, ..., a_n \in \mathbf{K}$ không đồng thời bằng 0 để cho

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0,$$

nghĩa là có một ràng buộc tuyến tính không tầm thường giữa các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

**Ví dụ 2.3** (a) Trong không gian các véctơ tự do của hình học sơ cấp, hệ 2 véctơ là độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu chúng không đồng phương, hệ 3 véctơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng, hệ 4 véctơ bất kỳ luôn luôn phụ thuộc tuyến tính.

(b) Trong không gian $\mathbf{R}_2$, các véctơ $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, hệ thức

$$a_1e_1 + a_2e_2 = (a_1, a_2) = (0, 0)$$

xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = 0$.

Với mọi $\alpha \in \mathbf{R}_2$, các véctơ $e_1, e_2, \alpha$ phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, nếu $\alpha = (a, b)$ thì

$$\alpha - ae_1 - be_2 = 0.$$

(c) Hãy xét xem các véc tơ sau đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbf{C}_3$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (5, 3, 4), \\ \alpha_2 &= (3, 2, 3), \\ \alpha_3 &= (8, 3, 1). \end{aligned}$$

Ta muốn tìm xem có hay không một ràng buộc tuyến tính không tầm thường giữa các véctơ đó, tức là có hay không các số phức $x_1, x_2, x_3$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$x_1(5, 3, 4) + x_2(3, 2, 3) + x_3(8, 3, 1) = (0, 0, 0).$$

Phương trình véctơ đó tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 &= 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình này có thể giải bằng cách khử thông thường. Trước hết, nhân phương trình cuối lần lượt với $(-8)$ và $(-3)$ rồi cộng vào các phương trình thứ nhất và thứ hai, ta thu được:

$$\begin{cases} -27x_1 - 21x_2 &= 0 \\ -9x_1 - 7x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0. \end{cases}$$

Hai phương trình đầu của hệ này tương đương với nhau. Do đó, một nghiệm không tầm thường của hệ này là:

$$x_1 = 7, x_2 = -9, x_3 = -1.$$

Như vậy, ba véctơ đã cho phụ thuộc tuyến tính.

**Nhận xét:** Từ ví dụ trên ta thấy rằng việc xét xem một hệ véctơ độc lập hay phụ thuộc tuyến tính được đưa về việc giải một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Tương tự, việc xét xem một véctơ có biểu thị tuyến tính được hay không qua một hệ véctơ được đưa về việc giải một hệ phương trình tuyến tính (nói chung không thuần nhất).

Lý thuyết tổng quát về hệ phương trình tuyến tính sẽ được trình bày ở Chương III của cuốn sách này.

Các tính chất sau đây là hệ quả trực tiếp của các định nghĩa.

**Các tính chất:**

(1) Hệ một véctơ $(\alpha)$ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu $\alpha = 0$.

Thật vậy, vì $1 \cdot 0 = 0$ là một ràng buộc tuyến tính không tầm thường, nên hệ $(0)$ phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, giả sử $(\alpha)$ phụ thuộc tuyến tính, tức là có $a \neq 0$ sao cho $a\alpha = 0$. Nhân hai vế với $a^{-1}$ ta có

$$\alpha = (a^{-1}a)\alpha = a^{-1}(a\alpha) = a^{-1}0 = 0.$$

(2) Với $n > 1$, hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu một véctơ nào đó của hệ biểu thị tuyến tính được qua các véctơ còn lại của hệ.

Thật vậy, giả sử có một ràng buộc tuyến tính không tầm thường

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0.$$

Nếu $a_i \neq 0$, ta nhân hai vế của đẳng thức trên với $a_i^{-1}$ và thu được

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} (a_i^{-1}a_j)\alpha_j.$$

Ngược lại, nếu $\alpha_i$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$, tức là có các vô hướng $b_j$ sao cho

$$\alpha_i = b_1\alpha_1 + \cdots + b_{i-1}\alpha_{i-1} + b_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + b_n\alpha_n,$$

thì ta có ràng buộc tuyến tính không tầm thường

$$b_1\alpha_1 + \cdots + b_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + b_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + b_n\alpha_n = 0.$$

Do đó, hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ phụ thuộc tuyến tính.

(3) Mỗi hệ con của một hệ độc lập tuyến tính cũng là một hệ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một hệ độc lập tuyến tính. Xét một ràng buộc tuyến tính bất kỳ

$$a_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + a_{i_k}\alpha_{i_k} = 0$$

giữa các véctơ của một hệ con $(\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k})$. Ta coi nó là một ràng buộc tuyến tính $\sum_i a_i\alpha_i = 0$ giữa các véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ bằng cách chọn $a_i = 0$ với mọi $i \neq i_1, ..., i_k$. Bởi vì hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính, nên tất cả các hệ số của ràng buộc đều bằng 0:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Do đó, hệ con $(\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k})$ độc lập tuyến tính.

Một cách phát biểu khác của tính chất trên là như sau:

(4) Mỗi hệ véctơ chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính cũng là một hệ phụ thuộc tuyến tính. Nói riêng, mỗi hệ chứa véctơ 0 đều phụ thuộc tuyến tính.

(5) Giả sử hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu $\beta$ biểu thị tuyến tính được qua $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Trong trường hợp đó, biểu thị tuyến tính này là duy nhất.

Thật vậy, nếu $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$ phụ thuộc tuyến tính, thì có một ràng buộc tuyến tính không tầm thường

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n + b\beta = 0.$$

Khi đó, $b \neq 0$, vì nếu trái lại thì có một ràng buộc tuyến tính không tầm thường $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0$ giữa các véctơ của hệ độc lập tuyến tính $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Điều này vô lý. Vì $b \neq 0$, nên ta có biểu thị tuyến tính sau đây của $\beta$ qua $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$:

$$\beta = -\sum_{i=1}^{n}(b^{-1}a_i)\alpha_i.$$

Ngược lại, mỗi biểu thị tuyến tính như thế

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i$$

đều dẫn tới một ràng buộc tuyến tính không tầm thường $\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i - \beta = 0$ giữa các vétơ của hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$. . Do đó, hệ này phụ thuộc tuyến tính.

Giả sử có hai biểu thị tuyến tính của $\beta$ qua hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$:

$$\begin{aligned}\beta &= b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n \\ &= b'_1\alpha_1 + \cdots + b'_n\alpha_n.\end{aligned}$$

Khi đó $0 = (b_1 - b'_1)\alpha_1 + \cdots + (b_n - b'_n)\alpha_n$. Do $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính, nên hệ thức trên kéo theo

$$b_1 = b'_1, \cdots, b_n = b'_n.$$

**Nhận xét 2.4** Các khái niệm tổ hợp tuyến tính, biểu thị tuyến tính, độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính được mở rộng cho hệ tuỳ ý (có thể có vô hạn véctơ) như sau.

Giả sử $(\alpha_i)_{i\in I}$ là một hệ véctơ tuỳ ý của $\mathbf{K}$-không gian véctơ $V$. Một tổ hợp tuyến tính của hệ này là một tổng $\sum_{i\in I} a_i\alpha_i$ trong đó $a_i \in \mathbf{K}$, và hầu hết (có thể trừ một số hữu hạn) $a_i$ đều bằng 0. Như thế, tổng này thật ra là một tổng hữu hạn, và do đó có nghĩa trong $V$.

Trên cơ sở đó, các khái niệm biểu thị tuyến tính, độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính được định nghĩa đối với họ đó.

**Ví dụ:** Trong không gian véctơ các đa thức $\mathbf{K}[X]$, hệ vô hạn véctơ $(1, X, X^2, ...)$ là một hệ độc lập tuyến tính.

# 3 Cơ sở và số chiều của không gian véctơ

Số chiều của một không gian véctơ là chỉ số đo độ "lớn", độ "thoải mái" của không gian véctơ đó.

**Định nghĩa 3.1** (a) Một hệ véctơ của $V$ được gọi là một *hệ sinh* của $V$ nếu mọi véctơ của $V$ đều biểu thị tuyến tính được qua hệ đó.

(b) Một hệ véctơ của $V$ được gọi là một *cơ sở* của $V$ nếu mọi véctơ của $V$ đều biểu thị tuyến tính duy nhất qua hệ này.

Như vậy, mỗi cơ sở đều là một hệ sinh. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu sâu hơn mối quan hệ giữa các khái niệm hệ sinh, cơ sở và độc lập tuyến tính.

Ta cần thuật ngữ sau đây: Một hệ véctơ của không gian $V$ được gọi là *độc lập tuyến tính cực đại* nếu nó độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véctơ nào của $V$ vào hệ đó thì hệ mới thu được trở thành phụ thuộc tuyến tính.

**Định lý 3.2** *Cho hệ hữu hạn các véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của $V$. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương:*

*(i) $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $V$.*

*(ii) $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của $V$.*

*(iii) $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính cực đại của $V$.*

**Chứng minh:** $(i) \Longrightarrow (ii)$ : $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $V$ nên nó là một hệ sinh của $V$. Hơn nữa, véctơ 0 có biểu thị tuyến tính duy nhất qua $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$:

$$0 = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_n.$$

Nói cách khác, hệ thức $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = 0$ tương đương với $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Điều này có nghĩa là hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ : Mọi véctơ $\beta \in V$ đều biểu thị tuyến tính được qua $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, cho nên hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$ phụ thuộc tuyến tính.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ : Vì hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính cực đại nên mỗi véctơ $\beta \in V$ đều biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Nói cách khác, hệ này sinh ra $V$. Biểu thị tuyến tính của mỗi véctơ $\beta \in V$ qua hệ độc lập tuyến tính $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là duy nhất.
□

**Định nghĩa 3.3** Không gian véctơ $V$ được gọi là *hữu hạn sinh* nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử.

**Định lý 3.4** *Giả sử $V \neq \{0\}$ là một không gian véctơ hữu hạn sinh. Khi đó, $V$ có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa, mọi cơ sở của $V$ đều có số phần tử bằng nhau.*

Trên cơ sở kết quả này, ta đi đến định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 3.5**

(i) Số phần tử của mỗi cơ sở của **K**-không gian véctơ hữu hạn sinh $V \neq \{0\}$ được gọi là *số chiều* (hay *thứ nguyên*) của $V$ trên trường **K**, và được ký hiệu là $\dim V$, hoặc rõ hơn $\dim_K V$. Nếu $V = \{0\}$, ta quy ước $\dim V = 0$.

(ii) Nếu $V$ không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì nó được gọi là một không gian véctơ *vô hạn chiều*.

Để chuẩn bị cho việc chứng minh định lý trên, ta cần bổ đề sau đây.

**Bổ đề 3.6** *Trong không gian véctơ $V$, giả sử hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, ..., \beta_s)$. Khi đó $r \leq s$.*

**Chứng minh:** Theo giả thiết, có một biểu thị tuyến tính

$$\alpha_1 = a_1\beta_1 + \cdots + a_s\beta_s \qquad (a_i \in \mathbf{K}).$$

Vì hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ độc lập tuyến tính, nên $\alpha_1 \neq 0$. Do đó, có ít nhất một vô hướng $a_i \neq 0$. Không giảm tổng quát, ta giả sử $a_1 \neq 0$. Khi đó, $\beta_1$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\alpha_1, \beta_2, ..., \beta_s)$:

$$\beta_1 = a_1^{-1}\alpha_1 - \sum_{i=2}^{n}(a_1^{-1}a_i)\beta_i.$$

Như vậy, hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua hệ $(\beta_1, ..., \beta_s)$; hệ thứ hai lại biểu thị tuyến tính qua hệ $(\alpha_1, \beta_2, ..., \beta_s)$. Hệ quả là $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, \beta_2, ..., \beta_s)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_s)$ với mọi $i \leq \min\{r, s\}$ (sai khác một phép đánh số lại các véctơ $\beta_1, ..., \beta_s$). Thật vậy, ở trên ta đã chứng minh khẳng định này cho $i = 1$. Giả sử khẳng định đã được chứng minh cho $i$. Ta sẽ chứng minh nó còn đúng cho $i+1$, nếu số này $\leq \min\{r, s\}$. Theo giả thiết quy nạp, $\alpha_{i+1}$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_s)$:

$$\alpha_{i+1} = b_1\alpha_1 + \cdots + b_i\alpha_i + c_{i+1}\beta_{i+1} + \cdots + c_s\beta_s.$$

Có ít nhất một vô hướng $c_j \neq 0$, bởi vì nếu trái lại thì $\alpha_{i+1}$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i)$, điều này trái với giả thiết hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ độc lập tuyến tính. Nếu cần thì đánh số lại các véctơ $\beta_{i+1}, ..., \beta_s$, ta có thể giả sử mà không giảm tổng quát $c_{i+1} \neq 0$. Kết hợp điều này với đẳng thức trên ta có một biểu thị tuyến tính của $\beta_{i+1}$ qua $(\alpha_1, ..., \alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, ..., \beta_s)$. Vì $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_s)$, hệ này lại biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, ..., \beta_s)$, nên $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, ..., \beta_s)$.

Nếu $r > s$, áp dụng điều vừa được chứng minh với $i = s$, ta khẳng định $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_s)$. Điều này mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$. Như vậy, ta có $r \leq s$. □

**Chứng minh Định lý 2.5.**

Giả sử $(\gamma_1, ..., \gamma_s)$ là một hệ sinh hữu hạn của $V$. Vì $V \neq \{0\}$, nên có véctơ $\alpha \neq 0$ trong $V$. Hệ gồm một véctơ khác không $(\alpha_1)$ độc lập tuyến tính. Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại, thì có hệ $(\alpha_1, \alpha_2)$ độc lập tuyến tính.

Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ là một hệ độc lập tuyến tính trong $V$. Hệ này biểu thị tuyến tính qua $(\gamma_1, ..., \gamma_s)$. Theo Bổ đề 3.6, ta có $r \leq s$. Như thế quá trình chọn các véctơ $\alpha_1, \alpha_2, ...$ để thu được một hệ độc lập tuyến tính phải dừng lại sau một số hữu hạn bước. Ta có một hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính cực đại trong $V$, với $n \leq s$. Theo Định lý 3.2, hệ này là một cơ sở của $V$.

Giả sử $(\beta_1, ..., \beta_m)$ cũng là một cơ sở của $V$. Vì $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua $(\beta_1, ..., \beta_m)$, nên theo Bổ đề 3.6, ta có $n \leq m$. Tráo đổi vai trò của hai cơ sở nói trên, ta cũng có $m \leq n$. Như vậy, $m = n$. □

**Ví dụ 3.7** (a) $\mathbf{K}^n$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ $n$ chiều. Các véctơ sau đây lập nên một cơ sở, được gọi là *cơ sở chính tắc* của không gian $\mathbf{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Thật vậy, véctơ $0 \in \mathbf{K}^n$ là véctơ có mọi thành phần bằng $0 \in \mathbf{K}$, vì thế hệ thức

$$a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Như vậy, hệ $(e_1, e_2, ..., e_n)$ độc lập tuyến tính trong $\mathbf{K}^n$. Hệ này sinh ra $\mathbf{K}^n$, bởi vì mỗi véctơ $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)^t$ đều có biểu thị tuyến tính

$$\beta = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n.$$

(b) $\mathbf{C}$ là một $\mathbf{C}$-không gian véctơ 1 chiều với cơ sở $(1)$. Đồng thời $\mathbf{C}$ cũng là một $\mathbf{R}$-không gian véctơ 2 chiều với cơ sở $(1, i)$, trong đó $i$ là đơn vị ảo. Điều này suy từ chỗ mọi số phức $z$ đều có biểu thị duy nhất dưới dạng $z = a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbf{R}$.

Một cách tổng quát $\mathbf{C}^n$ là một không gian véctơ thực $2n$ chiều.

(c) Đường thẳng số thực $\mathbf{R}$ là một không gian véctơ vô hạn chiều trên trường số hữu tỷ $\mathbf{Q}$. Thật vậy, giả sử phản chứng $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $\mathbf{R}$ trên $\mathbf{Q}$. Mỗi phần tử $\beta \in \mathbf{R}$ có biểu thị tuyến tính duy nhất $\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$ với $a_i \in \mathbf{Q}$. Tương ứng $\mathbf{R} \to \mathbf{Q}_n$, $\beta \mapsto (a_1, ..., a_n)$ là một song ánh. Do đó $\mathbf{R}$ có lực lượng đếm được. Điều vô lý này bác bỏ giả thiết phản chứng.

**Mệnh đề 3.8** *Giả sử $V$ là một không gian véctơ hữu hạn sinh. Khi đó, mọi hệ sinh của $V$ đều chứa một cơ sở. Mọi hệ độc lập tuyến tính trong $V$ đều có thể bổ sung để trở thành một cơ sở của $V$. Nếu $\dim V = n$, thì mọi hệ độc lập tuyến tính gồm $n$ véctơ của $V$ đều là một cơ sở.*

**Chứng minh:** Giả sử $\Gamma$ là một hệ sinh của $V$. Gọi $\Gamma'$ là một hệ độc lập tuyến tính cực đại trong $\Gamma$. Khi đó $\Gamma$ biểu thị tuyến tính qua $\Gamma'$, và do đó $V$ cũng biểu thị tuyến tính qua $\Gamma'$. Như thế $\Gamma'$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính, tức là một cơ sở của $V$. (Theo Bổ đề 3.6, $\Gamma'$ có hữu hạn phần tử. Cụ thể hơn, số phần tử của $\Gamma'$ không vượt quá số phần tử của mọi hệ sinh hữu hạn của $V$.)

Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_i)$ là một hệ độc lập tuyến tính trong $V$. Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại thì có thể bổ sung các véctơ $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, ...$ để hệ thu được vẫn độc lập tuyến tính. Quá trình này phải dừng lại sau một số hữu hạn bước, bởi vì theo Định lý 2.5, $\dim V < \infty$. Ta thu được hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính cực đại trong $V$, tức là một cơ sở của $V$.

Nếu $\dim V = n$, thì mọi hệ độc lập tuyến tính gồm $n$ véctơ $(\beta_1, ..., \beta_n)$ đều cực đại. Thậy vậy, giả sử phản chứng có thể thêm vào hệ đó một véctơ $\beta_{n+1}$ nào đó của $V$ sao cho hệ thu được vẫn độc lập tuyến tính. Khi đó, hệ $(\beta_1, ..., \beta_{n+1})$ biểu thị tuyến tính qua một cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ nào đó của $V$, cho nên theo Bổ đề 3.6, ta có $n + 1 \leq n$. Điều vô lý này bác bỏ giả thiết phản chứng. Vậy, theo Định lý 3.2, $(\beta_1, ..., \beta_n)$ là một cơ sở của $V$. $\square$

Trong suốt giáo trình này, nếu không nói gì ngược lại, *chúng ta chỉ nghiên cứu các không gian véctơ hữu hạn chiều.*

**Nhận xét:** Người ta chứng minh được rằng, trong một *không gian véctơ vô hạn sinh* (tức là không hữu hạn sinh), hai cơ sở bất kỳ đều có cùng lực lượng. Nhưng một hệ véctơ độc lập tuyến tính có cùng lực lượng với cơ sở thì không nhất thiết là một cơ sở.

Chẳng hạn, hệ véctơ $(1, X, X^2, ...)$ là một cơ sở của $\mathbf{K}$-không gian véctơ $\mathbf{K}[X]$. Hệ $(X, X^2, X^3, ...)$ độc lập tuyến tính và có cùng lực lượng với cơ sở $(1, X, X^2, ...)$, nhưng không phải là một cơ sở của $\mathbf{K}[X]$, bởi vì đa thức 1 không biểu thị tuyến tính được qua hệ đó.

Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ $V$. Mỗi véctơ $\alpha \in V$ có biểu thị tuyến tính duy nhất

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n, \qquad a_i \in \mathbf{K}.$$

**Định nghĩa 3.9** (Toạ độ). Bộ vô hướng $(a_1, ..., a_n)$ xác định bởi điều kiện $\alpha = \sum_i a_i\alpha_i$ được gọi là *toạ độ* của véctơ $\alpha$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Vô hướng $a_i$ được gọi là *toạ độ thứ $i$* của $\alpha$ trong cơ sở đó.

Giả sử $\alpha$ và $\beta$ có toạ độ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tương ứng là $(a_1, ..., a_n)$ và $(b_1, ..., b_n)$. Khi đó, từ tính độc lập tuyến tính của $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ suy ra rằng $\alpha = \beta$

nếu và chỉ nếu $(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_n)$. Thật vậy, $\alpha = \beta$ khi và chỉ khi

$$\alpha - \beta = (a_1 - b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_n - b_n)\alpha_n = 0.$$

Điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$.

Hơn nữa, $\alpha + \beta$ có toạ độ là $(a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$ và $k\alpha$ có toạ độ là $(ka_1, ..., ka_n)$, $(k \in \mathbf{K})$, trong hệ cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Bây giờ ta xét xem toạ độ của một véctơ trong những cơ sở khác nhau có liên hệ với nhau như thế nào.

Giả sử $(\beta_1, ..., \beta_n)$ cũng là một cơ sở của không gian véctơ $V$. Mỗi véctơ $\beta_j$ biểu thị tuyến tính được qua cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, tức là có các vô hướng $c_{ij}$ để cho

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i, \qquad (j = 1, ..., n).$$

Giả sử $\alpha$ có toạ độ là $(a_1, ..., a_n)$ và $(b_1, ..., b_n)$ tương ứng trong các cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $(\beta_1, ..., \beta_n)$. Ta có

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_j c_{ij}\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_j)\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i.
\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của toạ độ của $\alpha$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, ta nhận được

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}b_j, \qquad (i = 1, ..., n).$$

Người ta gọi hệ thức nói trên là *công thức đổi toạ độ khi đổi cơ sở*. Ma trận $C = (c_{ij})_{n\times n}$ được gọi là *ma trận chuyển* từ cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_n)$.

Công thức đổi toạ độ sẽ được diễn đạt dưới một hình thức dễ tiếp nhận hơn nhờ khái niệm tích của các ma trận, sẽ được nghiên cứu ở chương sau.

## 4 Không gian con - Hạng của một hệ véctơ

Giả sử $V$ là một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$. Chúng ta quan tâm đến những tập con của $V$ có tính chất là chúng cũng lập nên những không gian véctơ đối với các phép toán là thu hẹp của những phép toán tương ứng trên $V$. Ta có định nghĩa hình thức sau đây:

**Định nghĩa 4.1** Tập con không rỗng $W \subset V$ được gọi là một *không gian véctơ con* của $V$ nếu $W$ khép kín đối với hai phép toán trên $V$, nghĩa là nếu

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta \in W, && \forall \alpha, \beta \in W, \\ &a\alpha \in W, && \forall a \in \mathbf{K}, \forall \alpha \in W. \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Khi đó, $W$ với hai phép toán là hạn chế của hai phép toán trên $V$ cũng là một không gian véctơ trên $\mathbf{K}$. Thật vậy, các tiên đề (V1), (V4), (V5), (V6), (V7), (V8) nghiệm đúng với mọi phần tử của $V$, nên cũng nghiệm đúng với mọi phần tử của $W$. Ta chỉ cần kiểm tra lại các tiên đề (V2), (V3) nói về sự tồn tại của các phầnt ử 0 và phần tử đối.

Vì $W \neq \emptyset$, nên có ít nhất một phần tử $\alpha \in W$. Khi đó $0 = 0\alpha \in W$. Phần tử $0 \in V$ đóng vai trò phần tử $0 \in W$. mặt khác, với mọi $\alpha \in W$, ta có $(-\alpha) = (-1)\alpha \in W$. Đó cũng chính là phần tử đối của $\alpha$ trong $W$.

**Ví dụ 4.2** (a) $\{0\}$ và $V$ là hai không gian véctơ con của $V$. Chúng được gọi là các không gian véctơ con *tầm thường* của $V$.

(b) Đường thẳng số thực $\mathbf{R}$ là một $\mathbf{R}$-không gian véctơ con của mặt phẳng phức $\mathbf{C}$.

(c) Tập hợp các đa thức bậc $\leq n$ là một không gian véctơ con của $\mathbf{K}[X]$.

(d) Không gian $C^1[a, b]$ các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$ là một không gian véctơ con của không gian các hàm liên tục $C[a, b]$.

(e) Giả sử $m \leq n$. Khi đó tập hợp các véctơ có dạng

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

trong đó $x_1, ..., x_m \in \mathbf{K}$, là một không gian véctơ con có số chiều bằng $m$ của không gian $\mathbf{K}^n$.

**Mệnh đề 4.3** *Nếu $W$ là một không gian véctơ con của $V$ thì* $\dim W \leq \dim V$. *Đẳng thức* $\dim W = \dim V$ *xảy ra khi và chỉ khi* $W = V$.

**Chứng minh:** Vì $W$ là một không gian véctơ con của $V$, nên mỗi hệ độc lập tuyến tính trong $W$ thì cũng độc lập tuyến tính trong $V$. Do đó $\dim W \leq \dim V$. Đẳng thức $\dim W = \dim V$ xảy ra khi và chỉ khi mỗi cơ sở của $W$ cũng là một cơ sở của $V$. Điều này tương đương với $W = V$. □

**Mệnh đề 4.4** *Giao của một họ bất kỳ (có thể vô hạn) các không gian véctơ con của $V$ lại là một không gian véctơ con của $V$.*

**Chứng minh:** Giả sử $\{V_i\}_{i \in I}$ là một họ các không gian con của $V$. Vì mỗi $V_i$ khép kín đối với phép cộng véctơ và phép nhân véctơ với vô hướng, nên giao của chúng $\cap_{i \in I} V_i$ cũng có tính chất đó. □

**Định nghĩa 4.5** Giả sử $X$ là một tập con của không gian véctơ $V$. Giao của tất cả các không gian véctơ con của $V$ chứa $X$ được gọi là *không gian véctơ con của $V$ sinh bởi $X$* và được ký hiệu là $\mathcal{L}(X)$.

Từ định nghĩa suy ngay ra rằng $\mathcal{L}(X)$ là không gian véctơ con nhỏ nhất của $V$ chứa $X$.

Hai trường hợp đặc biệt là $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$ và $\mathcal{L}(W) = W$ đối với mọi không gian véctơ con $W$ của $V$.

**Mệnh đề 4.6** *Giả sử $X \neq \emptyset$. Khi đó $\mathcal{L}(X)$ là tập hợp các tổ hợp tuyến tính của các phần tử của $X$. Nói riêng, nếu $X = \{\gamma_1, ..., \gamma_k\}$ thì*

$$\mathcal{L}(\gamma_1, ..., \gamma_k) = \{\sum_{i=1}^{k} a_i\gamma_i | a_i \in \mathbf{K}\}.$$

**Chứng minh:** Tập hợp các tổ hợp tuyến tính của các phần tử của $X$ tất nhiên là một không gian véctơ con chứa $X$. Mặt khác, mỗi tổ hợp tuyến tính của các phần tử của $X$ đều nằm trong mọi không gian véctơ con chứa $X$. Vậy tập hợp các tổ hợp tuyến tính của các phần tử của $X$ chính là không gian véctơ con bé nhất của $V$ chứa $X$. □

**Định nghĩa 4.7** Số chiều của không gian $\mathcal{L}(X)$ được gọi là *hạng* của tập (hoặc hệ) véctơ $X$ và được ký hiệu là $\text{rank}(X)$.

Ta gọi một tập con của $X$ là độc lập tuyến tính cực đại trong $X$ nếu tập đó độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véctơ nào của $X$ vào tập đó thì ta thu được một tập phụ thuộc tuyến tính.

Mệnh đề sau đây chỉ ra cách tính hạng của một tập véctơ trong thực hành.

**Mệnh đề 4.8** *Hạng của tập véctơ $X$ bằng số véctơ của mỗi tập con độc lập tuyến tính cực đại trong $X$.*

**Chứng minh:** Nếu tập con $A$ độc lập tuyến tính cực đại trong $X$ thì mọi phần tử của $X$ biểu thị tuyến tính qua $A$, do đó mọi phần tử của $\mathcal{L}(X)$ cũng vậy. Nói cách khác $A$ cũng là độc lập tuyến tính cực đại trong $\mathcal{L}(X)$. Vậy số phần tử của $A$ là số chiều của không gian véctơ $\mathcal{L}(X)$. □

**Hệ quả 4.9** *Hai tập con độc lập tuyến tính cực đại trong $X$ có cùng số phần tử.*

**Nhận xét:** Trong Chương III, Nhận xét 8.2, chúng ta sẽ giới thiệu một phương pháp đơn giản, dễ thực hành để tính hạng của một hệ véctơ trong $\mathbf{K}_n$ hoặc $\mathbf{K}^n$. Phương pháp này dựa trên nhận xét là hạng của một hệ véctơ không thay đổi sau *các phép biến đổi sơ cấp*. Người ta dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa hệ véctơ đã cho về dạng "tam giác trên". Số các phần tử khác 0 trên đường chéo của "tam giác" này chính là hạng của hệ véctơ.

## 5 Tổng và tổng trực tiếp

Giả sử $W_1, ..., W_m$ là các không gian véctơ con của $V$. Tập hợp

$$W_1 + \cdots + W_m = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m | \alpha_i \in W_i, i = 1, ..., m\}$$

hiển nhiên lập nên một không gian véctơ con của $V$.

**Định nghĩa 5.1** Không gian véctơ $W_1 + \cdots + W_m$ được gọi là *tổng* của các không gian $W_1, ..., W_m$. Nó cũng được ký hiệu bởi $\sum_{i=1}^m W_i$.

Mỗi véctơ của $W_1 + \cdots + W_m$ có thể viết dưới dạng

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \quad \alpha_i \in W_i.$$

Cách viết này nói chung không duy nhất. Chẳng hạn, nếu $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, thì mỗi véctơ $\alpha \in W_1 \cap W_2 \setminus \{0\}$ có hai biểu thị $\alpha = \alpha + 0 = 0 + \alpha$, trong đó véctơ thứ nhất trong tổng thuộc $W_1$ còn véctơ thứ hai trong tổng thuộc $W_2$.

**Định nghĩa 5.2** Nếu mọi véctơ trong tổng $W_1 + \cdots + W_m$ đều viết được duy nhất dưới dạng $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, với $\alpha_i \in W_i$ $(i = 1, ..., m)$ thì $W_1 + \cdots + W_m$ được gọi là *tổng trực tiếp* của các không gian $W_1, ..., W_m$, và được ký hiệu là $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

**Định lý 5.3** *$W_1 + \cdots + W_m$ là tổng trực tiếp của $W_1, ..., W_m$ nếu và chỉ nếu một trong hai điều kiện tương đương sau đây được thoả mãn:*

*(i)* $W_i \cap (\sum_{j\neq i} W_j) = \{0\}, \quad (i = 1, ..., m),$

*(ii)* $W_i \cap (\sum_{j>i} W_j) = \{0\}, \quad (i = 1, ..., m-1).$

**Chứng minh:** Giả sử $W_1 + \cdots + W_m$ là một tổng trực tiếp. Khi đó điều kiện (i) được thoả mãn. Thật vậy, giả sử phản chứng có chỉ số $i$ sao cho

$$W_i \cap (\sum_{j\neq i} W_j) \neq \{0\}.$$

Gọi $\gamma \neq 0$ là một véctơ của giao đó. Vì $\gamma \in \sum_{j\neq i} W_j$, nên $\gamma$ có thể viết dưới dạng

$$\gamma = \sum_{j\neq i} \gamma_j, \quad \gamma_j \in W_j.$$

Ta đặt $\gamma_i = -\gamma$, và thu được hai cách biểu thi khác nhau của 0 dưới dạng tổng của những phần tử của $W_i$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_1 + \cdots + \gamma_m \\ &= 0 + \cdots + 0. \end{aligned}$$

Điều vô lý này bác bỏ giả thiết phản chứng.

Rõ ràng điều kiện (i) kéo theo điều kiện (ii).

Giả sử điều kiện (ii) được thoả mãn. Nếu $\alpha \in W_1 + \cdots + W_m$ có hai biểu thị

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = \beta_1 + \cdots + \beta_m,$$

với $\alpha_i, \beta_i \in W_i$, thì

$$\alpha_1 - \beta_1 = \sum_{j>1} -(\alpha_j - \beta_j) \in W_1 \cap (\sum_{j>1} W_j) = \{0\}.$$

Do đó $\alpha_1 = \beta_1$ và $\alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \beta_2 + \cdots + \beta_m$.

Lặp lại quá trình lập luận trên để có $\alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_m = \beta_m$. Vậy $W_1 + \cdots + W_m$ là một tổng trực tiếp. □

**Định lý 5.4** *Giả sử $U$ và $W$ là các không gian véctơ con của một không gian véctơ hữu hạn chiều $V$. Khi đó*

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

**Chứng minh:** Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ là một cơ sở của $U \cap W$. (Nếu $U \cap W = \{0\}$, thì ta coi $r = 0$.) Ta bổ sung hệ này để có một cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$ của $U$ và một cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \gamma_1, ..., \gamma_t)$ của $W$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s, \gamma_1, ..., \gamma_t)$ là một cơ sở của $U + W$.

Rõ ràng $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s, \gamma_1, ..., \gamma_t)$ là một hệ sinh của $U+W$. Để chứng minh đó là một hệ độc lập tuyến tính, ta giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = 0,$$

trong đó $a_i, b_j, c_k \in \mathbf{K}$. Véctơ

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = -c_1\gamma_1 - \cdots - c_t\gamma_t$$

vừa thuộc $U$ (do biểu thức ở vế trái), vừa thuộc $W$ (do biểu thức ở vế phải), nên nó thuộc $U \cap W$, và do đó biểu thị tuyến tính qua $\alpha_1, ..., \alpha_r$:

$$-c_1\gamma_1 - \cdots - c_t\gamma_t = d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r.$$

Ta viết lại đẳng thức này như sau

$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = 0.$$

Vì hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \gamma_1, ..., \gamma_t)$ độc lập tuyến tính, nên $c_1 = \cdots = c_t = d_1 = \cdots = d_r = 0$. Do đó

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = 0.$$

Hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$ cũng độc lập tuyến tính, cho nên $a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_s = 0$. Kết hợp điều này với các hệ thức $c_1 = \cdots = c_t = 0$ ta suy ra hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s, \gamma_1, ..., \gamma_t)$ độc lập tuyến tính, và do đó nó là một cơ sở của $U + W$.

Đếm số véctơ của các cơ sở đã xây dựng cho $U, W, U \cap W, U + W$, ta có

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= r + s + t = (r + s) + (r + t) - r \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \qquad \square \end{aligned}$$

**Hệ quả 5.5**

$$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W. \qquad \square$$

**Định nghĩa 5.6** Nếu $V = U \oplus W$ thì $W$ được gọi là một *phần bù tuyến tính* của $U$ trong $V$, và $\dim W = \dim V - \dim U$ được gọi là *đối chiều* của $U$ trong $V$.

Giả sử $V = U \oplus W$. Khi đó mỗi véctơ $v \in V$ có thể viết duy nhất dưới dạng $v = u + w$, trong đó $u \in U$, $w \in W$. Ta định nghĩa một ánh xạ

$$\begin{aligned} pr_U : V &\to U, \\ pr_U(v) &= u. \end{aligned}$$

Nó được gọi là phép chiếu của $V$ lên $U$ theo phương $W$.

Phép chiếu $pr_W$ của $V$ lên $W$ theo phương $U$ được định nghĩa tương tự.

Phép chiếu có các tính chất sau:

$$\begin{aligned} pr_U(v + v') &= pr_U(v) + pr_U(v'), \qquad \forall v, v' \in V, \\ pr_U(av) &= a pr_U(v), \qquad \forall a \in \mathbf{K}, v \in V. \end{aligned}$$

## 6 Không gian thương

Giả sử $W$ là một không gian véctơ con của không gian $V$. Ta định nghĩa quan hệ $\sim$ trên $V$ như sau:

$$\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in W.$$

Dễ dàng kiểm tra lại rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương, tức là một quan hệ có ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Tập thương của $V$ theo quan hệ $\sim$ được ký hiệu là $V/W$. Lớp tương đương của phần tử $\alpha \in V$ được ký hiệu là $[\alpha]$, hoặc $\alpha + W$.

Ta trang bị cho $V/W$ hai phép toán sau đây:

$$\begin{aligned} [\alpha] + [\beta] &= [\alpha + \beta], \qquad \forall \alpha, \beta \in V, \\ a[\alpha] &= [a\alpha], \qquad \forall a \in \mathbf{K}, \alpha \in V. \end{aligned}$$

**Mệnh đề 6.1** *Hai phép toán nói trên được định nghĩa không phụ thuộc vào việc chọn đại biểu. Hơn nữa, $V/W$ được trang bị hai phép toán đó là một* **K***-không gian véctơ.*

**Định nghĩa 6.2** Không gian véctơ $V/W$ được gọi là *không gian thương* của $V$ theo không gian con $W$.

**Chứng minh Mệnh đề 6.1.** Giả sử $[\alpha] = [\alpha'], [\beta] = [\beta']$, nghĩa là $\alpha - \alpha' \in W, \beta - \beta' \in W$. Khi đó, vì $W$ là một không gian véctơ con, cho nên

$$(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') \in W.$$

Điều này chứng tỏ rằng $[\alpha + \beta] = [\alpha' + \beta']$.

Tương tự, nếu $[\alpha] = [\alpha']$, tức là $\alpha - \alpha' \in W$, thì

$$a\alpha - a\alpha' = a(\alpha - \alpha') \in W.$$

Điều này có nghĩa là $[a\alpha] = [a\alpha']$.

Phần tử trung lập của phép cộng trong $V/W$ chính là $[0] = 0 + W$. Phần tử đối của $[\alpha]$ chính là $[-\alpha]$. Dễ dàng kiểm tra rằng các tiên đề khác về không gian véctơ được thoả mãn cho không gian $V/W$. □

Hai trường hợp đặc biệt của không gian thương là

$$\begin{aligned} V/V &= \{0\}, \\ V/\{0\} &= V. \end{aligned}$$

**Định lý 6.3**

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

**Chứng minh:** Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ là một cơ sở của $W$. (Nếu $W = \{0\}$ thì ta coi $r = 0$.) Ta bổ sung hệ véctơ nói trên để có một cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$ của $V$. Ta sẽ chứng minh rằng $([\beta_1], ..., [\beta_s])$ là một cơ sở của $V/W$.

Giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$b_1[\beta_1] + \cdots + b_s[\beta_s] = [0].$$

Điều này có nghĩa là $b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s \in W$. Vì thế véctơ đó biểu thị tuyến tính qua cơ sở đã chọn của $W$:

$$b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r.$$

Vì hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$ độc lập tuyến tính, nên $a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_s = 0$. Như thế, hệ $([\beta_1], ..., [\beta_s])$ độc lập tuyến tính.

Mặt khác, rõ ràng $([\beta_1], ..., [\beta_s])$ là một hệ sinh của không gian $V/W$. Thật vậy, mỗi véctơ $\alpha \in V$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$:

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r + d_1\beta_1 + \cdots + d_s\beta_s \qquad (c_i, d_j \in \mathbf{K}).$$

Vì $c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r \in W$, cho nên

$$[\alpha] = [d_1\beta_1 + \cdots + d_s\beta_s] = d_1[\beta_1] + \cdots + d_s[\beta_s].$$

Như vậy, mỗi véctơ $[\alpha] \in V/W$ đều biểu thị tuyến tính được qua $([\beta_1], ..., [\beta_s])$.

Đếm số véctơ của các cơ sở đã xây dựng cho $W, V, V/W$ ta có

$$\dim V/W = s = (r+s) - r = \dim V - \dim W. \qquad \square$$

Ta định nghĩa ánh xạ

$$\begin{aligned} \pi : V &\to V/W, \\ \pi(\alpha) &= [\alpha] = \alpha + W. \end{aligned}$$

và gọi nó là phép chiếu từ $V$ lên $V/W$. Phép chiếu có những tính chất sau đây:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha + \beta) &= \pi(\alpha) + \pi(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V, \\ \pi(a\alpha) &= a\pi(\alpha), \quad \forall a \in \mathbf{K}, \beta \in V. \end{aligned}$$

Trong chương sau chúng ta sẽ nghiên cứu một cách có hệ thống những ánh xạ có hai tính chất như thế. Chúng được gọi là các ánh xạ tuyến tính.

# Bài tập

1. Xét xem các tập hợp sau đây có lập thành $\mathbf{K}$-không gian véctơ hay không đối với các phép toán thông thường (được định nghĩa theo từng thành phần):

   (a) Tập hợp tất cả các dãy $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}_n$ thoả mãn điều kiện $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

   (b) Tập hợp tất cả các dãy $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}_n$ thoả mãn điều kiện $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

   (c) Tập hợp tất cả các dãy $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}_n$ thoả mãn điều kiện $x_1 = x_n = -1$.

   (d) Tập hợp tất cả các dãy $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K}_n$ thoả mãn điều kiện $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots$, $x_2 = x_4 = x_6 = \cdots$.

   (e) Tập hợp các ma trận vuông $(a_{ij})_{n\times n}$ *đối xứng* cấp $n$, nghĩa là các ma trận thoả mãn $a_{ij} = a_{ji}$, với $1 \leq i, j \leq n$.

2. Tập hợp tất cả các dãy $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}_n$ với tất cả các thành phần $x_1, ..., x_n$ đều nguyên có lập thành một $\mathbf{R}$-không gian vectơ hay không?

3. Với các phép toán thông thường, $\mathbf{Q}$ có là một $\mathbf{R}$-không gian véctơ hay không? $\mathbf{R}$ có là một $\mathbf{C}$-không gian véctơ hay không?

4. Chứng minh rằng nhóm $\mathbf{Z}$ không đẳng cấu với nhóm cộng của bất kỳ một không gian véctơ trên bất kỳ trường nào.

5. Chứng minh rằng nhóm abel $A$ đối với phép cộng $+$ có thể trở thành một không gian véctơ trên trường $\mathbf{F}_p$ nếu và chỉ nếu

$$px = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p} = 0, \quad \forall x \in A.$$

6. Xét xem các véctơ sau đây độc lập hay phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbf{R}_4$:

   (a) $e_1 = (-1, -2, 1, 2)$, $e_2 = (0, -1, 2, 3)$, $e_3 = (1, 4, 1, 2)$, $e_4 = (-1, 0, 1, 3)$.

   (b) $\alpha_1 = (-1, 1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (-3, 1, -2, -1)$.

7. Chứng minh rằng hai hệ véctơ sau đây là các cơ sở của $\mathbf{C}_3$. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai:
   $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$;
   $e'_1 = (3, 1, 4)$, $e'_2 = (5, 2, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -6)$.

8. Chứng minh rằng hai hệ véctơ sau đây là các cơ sở của $\mathbf{C}_4$. Tìm mối liên hệ giữa toạ độ của cùng một véctơ trong hai cơ sở đó:
   $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 2, 1)$, $e_4 = (1, 3, 2, 3)$;
   $e'_1 = (1, 0, 3, 3)$, $e'_2 = (2, 3, 5, 4)$, $e'_3 = (2, 2, 5, 4)$, $e'_4 = (2, 3, 4, 4)$.

9. Xét xem các tập hợp hàm số thực sau đây có lập thành không gian véctơ đối với các phép toán thông thường hay không? Nếu có, hãy tìm số chiều của các không gian đó.

   (a) Tập $\mathbf{R}[X]$ các đa thức của một ẩn $X$.

   (b) Tập $C^\infty(\mathbf{R})$ các hàm thực khả vi vô hạn trên $\mathbf{R}$.

   (c) Tập $C^0(\mathbf{R})$ các hàm thực liên tục trên $\mathbf{R}$.

   (d) Tập các hàm thực bị chặn trên $\mathbf{R}$.

   (e) Tập các hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \leq 1$.

   (f) Tập các hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện $f(0) = 0$.

(g) Tập các hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện $f(0) = -1$.

(h) Tập các hàm thực đơn điệu trên $\mathbf{R}$.

10. Định nghĩa hai phép toán cộng và nhân với vô hướng trên tập hợp

$$V = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y > 0\}$$

như sau:

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &= (x + u, yv), \ \ \forall (x, y), (u, v) \in V, \\ a(x, y) &= (ax, y^a), \ \ \forall a \in \mathbf{R}, (x, y) \in V. \end{aligned}$$

Xét xem $V$ có là một không gian véctơ thực đối với hai phép toán đó không. Nếu có, hãy tìm một cơ sở của không gian ấy.

11. Ma trận chuyển từ một cơ sở sang một cơ sở khác thay đổi thế nào nếu:

(a) đổi chỗ hai véctơ trong cơ sở thứ nhất?

(b) đổi chỗ hai véctơ trong cơ sở thứ hai?

(c) đặt các véctơ trong mỗi cơ sở theo thứ tự hoàn toàn ngược lại?

12. Cho $a$ là một số thực. Chứng minh rằng hai hệ véctơ $(1, X, X^2, ..., X^n)$ và $(1, (X - a), (X - a)^2, ..., (X - a)^n)$ là các cơ sở của không gian $\mathbf{R}[X]_n$ các đa thức hệ số thực với bậc không vượt quá $n$. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai.

13. Tìm các toạ độ của đa thức $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ trong hai cơ sở nói trên.

14. Cho không gian véctơ con $L$ của không gian $\mathbf{R}[X]$. Chứng minh rằng nếu $L$ chứa ít nhất một đa thức bậc $k$ với mọi $k = 0, 1, ..., n$ nhưng không chứa đa thức nào với bậc lớn hơn $n$ thì $L$ chính là không gian con $\mathbf{R}[X]_n$ tất cả các đa thức với bậc không vượct quá $n$.

15. Chứng minh rằng tập hợp các véctơ $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}_n$ thoả mãn hệ thức $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$ là một không gian véctơ con của $\mathbf{R}_n$. Tìm số chiều và một cơ sở cho không gian véctơ con đó.

16. Tìm tất cả các $\mathbf{F}_2$-không gian véctơ con một và hai chiều của $\mathbf{F}_2^3$. Giải bài toán tương tự đối với không gian $\mathbf{F}_p^3$, trong đó $p$ là một số nguyên tố.

17. Chứng minh rằng các ma trận vuông đối xứng cấp $n$ với các phần tử trong trường $\mathbf{K}$ lập thành một không gian véctơ con của $M(n \times n, \mathbf{K})$. Tìm số chiều và một cơ sở cho $\mathbf{K}$-không gian véctơ con đó.

18. Chứng minh rằng các ma trận vuông $(a_{ij})_{n\times n}$ *phản đối xứng* cấp $n$, nghĩa là các ma trận thoả mãn $a_{ij} = -a_{ji}$, với $1 \leq i, j \leq n$, lập thành một không gian véctơ con của $M(n \times n, \mathbf{K})$. Tìm số chiều và một cơ sở cho $\mathbf{K}$-không gian véctơ con đó.

19. Giả sử $V_1 \subset V_2$ là các không gian véctơ con của $V$. Chứng minh rằng $\dim V_1 \leq \dim V_2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $V_1 = V_2$. Khẳng định đó còn đúng hay không nếu $V_1$ và $V_2$ là các không gian véctơ con bất kỳ của $V$?

20. Giả sử $V_1$, $V_2$ là các không gian véctơ con của $V$. Chứng minh rằng nếu $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V$ thì $V_1 \cap V_2$ chứa ít nhất một véctơ khác không.

21. Với giả thiết như bài tập trước, chứng minh rằng nếu $\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$ thì $V_1 + V_2$ trùng với một trong hai không gian con đã cho, còn $V_1 \cap V_2$ trùng với không gian con còn lại.

    Tìm hạng của các hệ véctơ sau đây:

22. $\alpha_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 0, 1, 0), \alpha_4 = (1, 3, 0, 1)$.

23. $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 3, 1, 3)$, $\alpha_3 = (1, 2, 0, 2), \alpha_4 = (1, 2, 1, 2)$, $\alpha_5 = (3, 1, 3, 1)$.

Tìm cơ sở của tổng và giao của các không gian véctơ con sinh bởi các hệ véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ và $\beta_1, ..., \beta_\ell$ sau đây:

24. $\alpha_1 = (1, 2, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, -1)$, $\alpha_3 = (1, 3, 3)$,
$\beta_1 = (2, 3, -1)$, $\beta_2 = (1, 2, 2)$, $\beta_3 = (1, 1, -3)$.

25. $\alpha_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\alpha_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$\beta_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\beta_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\beta_3 = (1, 3, 0, -4)$.

26. $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1, 1)$,
$\beta_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\beta_2 = (0, 2, 1, 1)$, $\beta_3 = (1, 2, 1, 2)$.

27. Chứng minh rằng với mọi không gian véctơ con $V_1$ của $V$ tồn tại một không gian véctơ con $V_2$ của $V$ sao cho $V = V_1 \oplus V_2$. Không gian $V_2$ có xác định duy nhất hay không?

28. Chứng minh rằng không gian $\mathbf{C}_n$ là tổng trực tiếp của không gian véctơ con $U$ xác định bởi phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ và không gian véctơ con $V$ xác định bởi phương trình $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Tìm hình chiếu của các véctơ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{C}_n$ lên $U$ theo phương $V$ và lên $V$ theo phương $U$.

29. Cho $\mathbf{K}$ là một trường có đặc số khác 2. Chứng minh rằng không gian $M(n \times n, \mathbf{K})$ các ma trận vuông cấp $n$ là tổng trực tiếp của không gian $S(n)$ gồm các ma trận đối xứng và không gian $A(n)$ gồm các ma trận phản đối xứng. Tìm hình chiếu của ma trận $C \in M(n \times n, \mathbf{K})$ lên $S(n)$ theo phương $A(n)$ và lên $A(n)$ theo phương $S(n)$.

30. Gọi $\mathbf{K}[X]_n$ là $\mathbf{K}$-không gian véctơ các đa thức với hệ số trong $\mathbf{K}$ có bậc $\leq n$. Tìm không gian thương $\mathbf{K}[X]_n/\mathbf{K}[X]_m$ và số chiều của nó khi $m < n$.

# Chương II

# MA TRẬN VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Cấu trúc của các không gian véctơ chỉ lộ rõ khi chúng ta nghiên cứu chúng không phải như những đối tượng riêng rẽ, mà trái lại đặt chúng trong mối liên hệ với nhau. Công cụ dùng để xác lập mối liên hệ giữa các không gian véctơ là các ánh xạ tuyến tính. Ngôn ngữ giúp cho việc mô tả cụ thể các ánh xạ tuyến tính là các ma trận.

## 1 Ma trận

Giả sử $\mathbf{K}$ là một trường tuỳ ý.

**Định nghĩa 1.1** Mỗi bảng có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbf{K}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, được gọi là một *ma trận* $m$ hàng (hay dòng) $n$ cột với các phần tử trong $\mathbf{K}$. Nếu $m = n$, thì ta nói $A$ là một ma trận vuông cấp $n$. Véctơ hàng

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

được gọi là *hàng thứ* $i$ của ma trận $A$. Véctơ cột

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$$

được gọi là *cột thứ* $j$ của ma trận $A$.

Ma trận nói trên thường được ký hiệu gọn là $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Tập hợp tất cả các ma trận $m$ hàng, $n$ cột với các phần tử trong $\mathbf{K}$ được ký hiệu là $M(m \times n, \mathbf{K})$, hay $Mat(m \times n, \mathbf{K})$.

Ta định nghĩa hai phép toán cộng và nhân với vô hướng trên $M(m \times n, \mathbf{K})$ như sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ . & \dots & . \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ . & \dots & . \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$a \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \dots & aa_{1n} \\ aa_{21} & aa_{22} & \dots & aa_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ aa_{m1} & aa_{m2} & \dots & aa_{mn} \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbf{K}).$$

**Mệnh đề 1.2** *$M(m \times n, \mathbf{K})$ được trang bị hai phép toán nói trên là một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$ với số chiều bằng*

$$\dim M(m \times n, \mathbf{K}) = m \times n.$$

**Chứng minh:** Dễ dàng kiểm tra khẳng định $M(m \times n, \mathbf{K})$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ. Lưu ý rằng phần tử trung lập của phép cộng trong $M(m \times n, \mathbf{K})$ là

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

và phần tử đối của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$.

Để chứng minh khẳng định về số chiều của $M(m \times n, \mathbf{K})$ ta xét ma trận $E_{ij}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ gồm toàn phần tử 0, loại trừ phần tử duy nhất bằng 1 nằm trên giao của hàng $i$ và cột $j$. Giả sử $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M(m \times n, \mathbf{K})$. Ta có

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Như vậy hệ $(E_{ij}|1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ là một hệ sinh của $M(m \times n, \mathbf{K})$. Mặt khác, mỗi ràng buộc tuyến tính

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} E_{ij} = 0$$

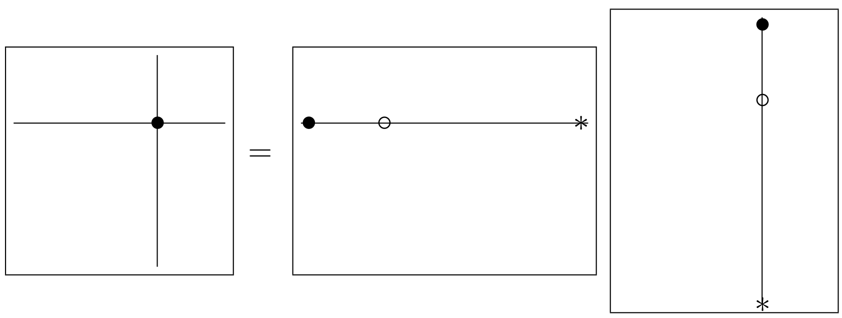
kéo theo $B = (b_{ij})_{m \times n} = 0$. Tức là $b_{ij} = 0$ với mọi $i, j$. Điều này chứng tỏ $(E_{ij}|1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ độc lập tuyến tính. □

Cho hai ma trận $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbf{K})$, $B = (b_{jk}) \in M(n \times p, \mathbf{K})$.

**Định nghĩa 1.3** Tích $AB$ của ma trận $A$ và ma trận $B$ là ma trận $C = (c_{ik}) \in M(m \times p, \mathbf{K})$ với các phần tử được xác định như sau

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p).$$

Định nghĩa này được minh họa bằng hình vẽ sau đây:




**Ví dụ:**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & t \\ y & u \\ z & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz & at + bu + cv \\ dx + ey + fz & dt + eu + fv \\ gx + hy + iz & gt + hu + iv \end{pmatrix}.$$

**Nhận xét:** Điều kiện để định nghĩa được ma trận tích $AB$ là

số cột của $A$ = số hàng của $B$.

Có thể xảy ra trường hợp tích $AB$ thì định nghĩa được, mà tích $BA$ thì không.

Trường hợp đặc biệt, khi $A$ và $B$ đều là các ma trận vuông cấp $n$ thì cả hai tích $AB$ và $BA$ đều định nghĩa được. Nhưng nói chung $AB \neq BA$. Chẳng hạn, với $n = 2$, ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Các đẳng thức sau đây được hiểu theo nghĩa: nếu một vế được xác định thì vế kia cũng vậy và hai vế bằng nhau.

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC), \\ A(B_1 + B_2) &= AB_1 + AB_2, \\ (A_1 + A_2)B &= A_1B + A_2B. \end{aligned}$$

Chúng ta chứng minh đẳng thức thứ nhất. Hai đẳng thức còn lại được xem như những bài tập.

Giả sử $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{jk})_{n\times p}, C = (c_{k\ell})_{p\times q}$. Khi đó phần tử nằm ở hàng $i$ cột $\ell$ của ma trận $(AB)C$ là

$$\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{k\ell}.$$

Còn phần tử nằm ở hàng $i$ cột $\ell$ của ma trận $A(BC)$ là

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{k\ell}).$$

Hiển nhiên cả hai phần tử nói trên đều bằng

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{k\ell}.$$

Vì điều đó đúng với mọi $i$, $\ell$, nên $(AB)C = A(BC)$.

Những nhận xét nói trên dẫn ta tới khẳng định sau đây cho các ma trận vuông.

**Mệnh đề 1.4** *Tập hợp các ma trận vuông $M(n \times n, \mathbf{K})$ cùng với các phép toán cộng và nhân ma trận lập thành một vành có đơn vị. Vành này không giao hoán nếu $n > 1$.* □

Lưu ý rằng phần tử đơn vị của vành $M(n \times n, \mathbf{K})$ là ma trận sau đây

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Nó được gọi là *ma trận đơn vị* cấp $n$.

**Định nghĩa 1.5** Ma trận $A \in M(n \times n, \mathbf{K})$ được gọi là một *ma trận khả nghịch* (hoặc *ma trận không suy biến*) nếu có ma trận $B \in M(n \times n, \mathbf{K})$ sao cho $AB = BA = E_n$. Khi đó, ta nói $B$ là *nghịch đảo* của $A$ và ký hiệu $B = A^{-1}$.

Nhận xét rằng nếu $A$ khả nghịch thì ma trận nghịch đảo của nó được xác định duy nhất. Thật vậy, giả sử $B$ và $B'$ đều là các nghịch đảo của $A$. Khi đó

$$B = BE_n = B(AB') = (BA)B' = E_nB' = B'.$$

Trong chương sau chúng ta sẽ chỉ ra một điều kiện cần và đủ rất đơn giản để cho một ma trận vuông là khả nghịch.

Sau đây là ví dụ về một lớp các ma trận khả nghịch.

**Mệnh đề 1.6** *Gọi $C$ là ma trận chuyển từ cơ sở $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sang cơ sở $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ của không gian véctơ $V$. Khi đó, $C$ là một ma trận khả nghịch, với nghịch đảo là ma trận chuyển $C'$ từ cơ sở $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ sang cơ sở $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

**Chứng minh:** Giả sử $C = (c_{ij})$, $C' = (c'_{ij})$. Ta có

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \sum_{k=1}^{n} c'_{ki}\alpha'_k = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} c'_{ki}c_{ij})\alpha'_k.$$

Vì biểu thị tuyến tính của mỗi vétơ qua cơ sở là duy nhất, nên ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{n} c'_{ki}c_{ij} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = j, \\ 0 & \text{nếu } k \neq j. \end{cases}$$

Nghĩa là $C'C = E_n$. Tương tự, tráo đổi vai trò của hai cơ sở cho nhau, ta có $CC' = E_n$. Như vậy, $C$ khả nghịch và $C^{-1} = C'$. □

**Nhận xét:** Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ $V$, và $C = (c_{ij})$ là một ma trận vuông cấp $n$ và khả nghịch. Khi đó hệ véctơ $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$ xác định bởi $\alpha'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}\alpha_i$ cũng là một cơ sở của $V$. Thật vậy, nếu $C' = (c'_{ij})$ là ma trận nghịch đảo của $C$ thì $\alpha_j = \sum_{i=1}^n c'_{ij}\alpha'_i$. Do đó $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$ là một hệ sinh của $V$. Hệ này có số phần tử đúng bằng số chiều của $V$, nên nó là một cơ sở của $V$. Tất nhiên, $C$ chính là ma trận chuyển từ cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang cơ sở $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$.

Trong ngôn ngữ tích ma trận, sự kiện $C$ là ma trận chuyển từ cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang cơ sở $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$, tức là hệ đẳng thức $\alpha'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}\alpha_i$ $(j = 1, ..., n)$, được viết gọn như sau

$$(\alpha'_1 \dots \alpha'_n) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)C.$$

Hơn nữa, nếu $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i = \sum_{j=1}^n x'_j\alpha'_j$, thì ta có

$$\alpha = (\alpha'_1 \dots \alpha'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)C\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Do biểu thị tuyến tính của mỗi véctơ qua cơ sở là duy nhất, nên

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

**Định nghĩa 1.7** Ta ký hiệu bởi $GL(n, \mathbf{K})$ tập hợp tất cả các ma trận khả nghịch trong $M(n \times n, \mathbf{K})$.

**Mệnh đề 1.8** $GL(n, \mathbf{K})$ *lập thành một nhóm đối với phép nhân các ma trận.*

**Chứng minh:** Trước hết ta chứng minh rằng $GL(n, \mathbf{K})$ khép kín đối với phép nhân ma trận. Giả sử $A, B \in GL(n, \mathbf{K})$. Khi đó, tồn tại các ma trận $A^{-1}, B^{-1} \in$

$M(n \times n, \mathbf{K})$. Ta có

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n,\\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n.\end{aligned}$$

Như vậy, $AB$ cũng khả nghịch, hơn nữa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ta đã biết rằng phép nhân các ma trận vuông (nói riêng phép nhân các ma trận trong $GL(n, \mathbf{K})$) có tính kết hợp.

Phần tử trung lập (đơn vị) đối với phép nhân trong $GL(n, \mathbf{K})$ chính là ma trận đơn vị $E_n \in GL(n, \mathbf{K})$.

Theo định nghĩa của $GL(n, \mathbf{K})$, mỗi ma trận trong nó đều có nghịch đảo. Hiển nhiên, nghịch đảo $A^{-1}$ của mỗi ma trận $A \in GL(n, \mathbf{K})$ cũng là một phần tử của $GL(n, \mathbf{K})$. □

**Định nghĩa 1.9** Hai ma trận vuông $A, A' \in M(n \times n, \mathbf{K})$ được gọi là *đồng dạng* nếu có một ma trận khả nghịch $C \in GL(n, \mathbf{K})$ sao cho $A' = C^{-1}AC$.

Dễ thấy rằng đồng dạng là một quan hệ tương đương.

Trong tiết sau chúng ta sẽ chứng minh rằng mỗi lớp tương đương của các ma trận theo quan hệ đồng dạng được đặt tương ứng một đối một với một tự đồng cấu tuyến tính của một không gian véctơ hữu hạn chiều nào đó.

# 2 Ánh xạ tuyến tính

Giả sử $V$ và $W$ là các không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 2.1** (Ánh xạ tuyến tính).

Ánh xạ $f : V \to W$ được gọi là một *ánh xạ tuyến tính* (hoặc rõ hơn, một *ánh xạ* $\mathbf{K}$*-tuyến tính*), nếu

$$\begin{aligned}f(\alpha + \beta) &= f(\alpha) + f(\beta),\\ f(a\alpha) &= af(\alpha),\end{aligned}$$

với mọi $\alpha, \beta \in V$ và mọi vô hướng $a \in \mathbf{K}$.

Ánh xạ tuyến tính cũng được gọi là *đồng cấu tuyến tính*, hay *đồng cấu* cho đơn giản.

Nhận xét rằng hai điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính tương đương với điều kiện sau:

$$f(a\alpha + b\beta) = af(\alpha) + bf(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V, \forall a, b \in \mathbf{K}.$$

Các tính chất sau đây của ánh xạ tuyến tính được suy ngay từ định nghĩa. Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, ta có

(1) $f(0) = 0$.

Thật vậy, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Theo luật giản ước, $f(0) = 0$.

(2) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$, $\forall \alpha \in V$.

Thật vậy, $f(\alpha) + f(-\alpha) = f(\alpha + (-\alpha)) = f(0) = 0$. Do đó, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

(3) $f(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1f(\alpha_1) + \cdots + a_nf(\alpha_n)$, $\forall a_1, ..., a_n \in \mathbf{K}, \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in V$.

Đẳng thức này có thể được chứng minh bằng quy nạp.

**Ví dụ 2.2** (a) Ánh xạ $0 : V \to W$ xác định bởi công thức $0(\alpha) = 0$ với mọi $\alpha \in V$ là một ánh xạ tuyến tính.

(b) Ánh xạ đồng nhất $id_V : V \to V$, $id_V(\alpha) = \alpha$ là một ánh xạ tuyến tính.

(c) Đạo hàm hình thức

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX} : \mathbf{K}[X] &\to \mathbf{K}[X], \\ \frac{d}{dX}(a_nX^n + \cdots + a_1X_1 + a_0) &= na_nX^{n-1} + \cdots + a_1 \end{aligned}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

(d) Phép liên hợp phức $c : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto \bar{z}$ là một ánh xạ $\mathbf{R}$-tuyến tính, nhưng không phải là một ánh xạ $\mathbf{C}$-tuyến tính. Thậy vậy,

$$-1 = c(-1) = c(i^2) \neq ic(i) = i(-i) = 1.$$

(e) Giả sử $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbf{K})$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \mathbf{K}^n &\to \mathbf{K}^m, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

(f) Các phép chiếu

$$\begin{aligned} pr_i : V_1 \times V_2 &\to V_i, \\ pr_i(v_1, v_2) &= v_i \end{aligned}$$

là các ánh xạ tuyến tính, với $i = 1, 2$.

(g) Giả sử $W$ là một không gian véctơ con của $V$. Khi đó phép chiếu

$$\begin{aligned} \pi : V &\to V/W, \\ \pi(\alpha) &= [\alpha] = \alpha + W \end{aligned}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

**Định nghĩa 2.3** Giả sử $V$ và $W$ là các $\mathbf{K}$-không gian véctơ. Tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $W$ được ký hiệu là $\mathcal{L}(V, W)$ (hoặc $\mathrm{Hom}(V, W)$).

Vì $\mathcal{L}(V, W)$ chứa ánh xạ 0, nên $\mathcal{L}(V, W) \neq \emptyset$.

Ta trang bị cho $\mathcal{L}(V, W)$ hai phép toán cộng và nhân với vô hướng được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} (f + g)(\alpha) &= f(\alpha) + g(\alpha), \\ (af)(\alpha) &= af(\alpha) \quad \alpha \in V, a \in \mathbf{K}, \end{aligned}$$

với mọi $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$.

Dễ dàng kiểm tra lại rằng $\mathcal{L}(V, W)$ là một **K**-không gian véctơ đối với hai phép toán đó.

Định lý sau đây chỉ ra một tính chất quan trọng của ánh xạ tuyến tính.

**Định lý 2.4** *Mỗi ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $W$ được hoàn toàn xác định bởi ảnh của nó trên một cơ sở. Nói rõ hơn, giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $V$, còn $\omega_1, ..., \omega_n$ là các véctơ bất kỳ của $W$. Khi đó, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ sao cho $f(\alpha_i) = \omega_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.*

**Chứng minh:** *Sự tồn tại:* Nếu $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$, thì ta đặt

$$f(\alpha) = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n.$$

Dễ dàng thử lại rằng $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính, và $f(\alpha_i) = \omega_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

*Tính duy nhất:* Nếu $f$ và $g$ là các ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $W$ với $f(\alpha_i) = g(\alpha_i) = \omega_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, thì với mọi $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$, ta có

$$f(\alpha) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(\alpha_i) = g(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i) = g(\alpha). \quad \square$$

**Định nghĩa 2.5** Một đồng cấu (tuyến tính) $f : V \to W$ đồng thời là một đơn ánh được gọi là một *đơn cấu* (tuyến tính). Một đồng cấu (tuyến tính) đồng thời là một toàn ánh được gọi là một *toàn cấu* (tuyến tính). Một đồng cấu (tuyến tính) đồng thời là một song ánh được gọi là một *đẳng cấu* (tuyến tính).

Nếu $f : V \to W$ là một đẳng cấu, thì $f^{-1} : W \to V$ cũng là một đẳng cấu; nó được gọi là *nghịch đảo* của $f$. Do đó mỗi đẳng cấu còn được gọi là một *đồng cấu khả nghịch*. Nếu có một đẳng cấu $f : V \to W$, thì ta nói $V$ đẳng cấu với $W$ và viết $V \cong W$.

Quan hệ $\cong$ là một quan hệ tương đương.

Nhận xét rằng đồng cấu $f : V \to W$ là một đẳng cấu nếu và chỉ nếu có một đồng cấu $g : W \to V$ sao cho $gf = id_V$ và $fg = id_W$. Khi đó, $g = f^{-1}$. Thật vậy, nếu $f$ là một đẳng cấu thì $f^{-1}f = id_V, ff^{-1} = id_W$. Ngược lại, nếu có một đồng cấu $g : W \to V$ sao cho $gf = id_V, fg = id_W$, thì $f$ vừa là một đơn cấu (do $gf = id_V$), vừa là một toàn cấu (do $fg = id_W$). Vì thế, $f$ là một đẳng cấu. Khi đó, nhân hai vế của đẳng thức $gf = id_V$ với $f^{-1}$ từ bên phải, ta thu được $g = f^{-1}$.

**Mệnh đề 2.6** *Giả sử $V$ và $W$ là các không gian véctơ hữu hạn chiều. Khi đó*

$$V \cong W \Longleftrightarrow \dim V = \dim W.$$

**Chứng minh:** Giả sử $V \cong W$, tức là có một đẳng cấu tuyến tính $f : V \overset{\cong}{\to} W$. Khi đó, nếu $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $V$ thì $(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n))$ là một cơ sở của $W$. Thật vậy, mỗi véctơ $\beta \in W$ có dạng $\beta = f(\alpha)$ với $\alpha$ nào đó trong $W$. Vì $\alpha$ có biểu thị tuyến tính $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$, nên

$$\beta = f(\alpha) = f(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1 f(\alpha_1) + \cdots + a_n f(\alpha_n).$$

Nếu $\beta$ còn có biểu thị tuyến tính $\beta = b_1 f(\alpha_1) + \cdots + b_n f(\alpha_n)$, thì $\alpha = f^{-1}(\beta) = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n$. Vì $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $V$ cho nên $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$. Như vậy, mỗi véctơ $\beta$ biểu thị tuyến tính duy nhất qua hệ $(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n))$, nên hệ này là một cơ sở của $W$. Nói riêng, $\dim V = \dim W$.

Ngược lại, giả sử $\dim V = \dim W = n$. Chọn các cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của $V$ và $(\beta_1, ..., \beta_n)$ của $W$. Ánh xạ tuyến tính duy nhất $\varphi : V \to W$ được xác định bởi $\varphi(\alpha_1) = \beta_1, ..., \varphi(\alpha_n) = \beta_n$ là một đẳng cấu tuyến tính. Thật vậy, nghịch đảo của $\varphi$ là ánh xạ tuyến tính $\psi : W \to V$ được xác định bởi điều kiện $\psi(\beta_1) = \alpha_1, ..., \psi(\beta_n) = \alpha_n$. □

Tương ứng đặt mỗi ánh xạ tuyến tính với *ma trận của nó* mà ta sắp định nghĩa là một ví dụ điển hình về đẳng cấu tuyến tính. Nhờ đẳng cấu này mà người ta có thể tính toán cụ thể với các ánh xạ tuyến tính.

Giả sử $V$ và $W$ là các **K**-không gian véctơ với các cơ sở tương ứng là $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $(\beta_1, ..., \beta_m)$. Theo Định lý 2.4, ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ được xác định duy nhất bởi $f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)$. Các véctơ này lại có biểu thị tuyến tính duy nhất qua cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_m)$ của $W$:

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i \quad (j = 1, ..., n),$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbf{K}$. Nói gọn lại, ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ được xác định duy nhất bởi hệ thống các vô hướng $\{a_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, chúng được xếp thành ma trận sau đây:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Ta gọi $A$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $(\beta_1, ..., \beta_m)$.

Nếu véctơ $\alpha$ có toạ độ $(x_1, ..., x_n)$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ thì toạ độ của $f(\alpha)$ trong cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_m)$ được tính bằng công thức

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, 2, ..., m).$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} y_i\beta_i = f(\alpha) &= f(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\alpha_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)\beta_i. \end{aligned}$$

Vì biểu thị tuyến tính của mỗi véctơ thuộc $W$ qua cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_m)$ là duy nhất, nên ta thu được công thức xác định $(y_1, ..., y_m)$ qua ma trận $A$ và $(x_1, ..., x_n)$ đã nói ở trên.

Trong ngôn ngữ tích ma trận, sự kiện $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $(\beta_1, ..., \beta_m)$, tức là hệ đẳng thức $f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i$ $(j = 1, ..., n)$ được *quy ước* viết như sau:

$$(f(\alpha_1) \,...\, f(\alpha_n)) = (\beta_1 \,...\, \beta_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Công thức tính toạ độ $(y_1, ..., y_m)$ của $f(\alpha)$ trong cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_m)$ qua toạ độ $(x_1, ..., x_n)$ của $\alpha$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ được diễn đạt lại trong ngôn ngữ ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Định lý 2.7** *Ánh xạ đặt tương ứng đồng cấu $f$ với ma trận của nó $A = M(f)$ trong một cặp cơ sở cố định của $V$ và $W$ là một đẳng cấu tuyến tính từ $\mathcal{L}(V, W)$ lên $M(m \times n, \mathbf{K})$. Nói riêng,* $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \times \dim W$.

**Chứng minh:** Giả sử trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của $V$ và $(\beta_1, ..., \beta_m)$ của $W$ các đồng cấu $f$ và $g$ có các ma trận tương ứng là $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$. tức là:

$$\begin{aligned} f(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\beta_i, \\ g(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\beta_i, \quad (j = 1, ..., n). \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (f+g)(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij})\beta_i, \\ (af)(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^{m} aa_{ij}\beta_i, \quad (j = 1, ..., n). \end{aligned}$$

Như vậy, ma trận của $f+g$ là $A+B$, ma trận của $af$ là $aA$ (trong cặp cơ sở đã cho). Nói cách khác

$$\begin{aligned} M(f+g) &= M(f)+M(g), \\ M(af) &= aM(f). \end{aligned}$$

Các hệ thức này chứng tỏ rằng phép đặt tương ứng mỗi đồng cấu với ma trận của nó trong một cặp cơ sở cố định là một ánh xạ tuyến tính.

Mặt khác, theo Định lý 2.4, ánh xạ nói trên là một song ánh. Tóm lại, đó là một đẳng cấu tuyến tính. □

**Mệnh đề 2.8** *Nếu $f : V \to W$ và $g : W \to Z$ là các ánh xạ tuyến tính, thì $gf : V \to Z$ cũng là một ánh xạ tuyến tính.*

**Chứng minh:** Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} gf(a\alpha+b\beta) &= g(af(\alpha)+bf(\beta)) \\ &= a(gf)(\alpha)+b(gf)(\beta), \end{aligned}$$

với mọi $a, b \in \mathbf{K}$ và mọi $\alpha, \beta \in V$. □

**Mệnh đề 2.9** *Giả sử đồng cấu $f$ có ma trận $A$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $(\beta_1, ..., \beta_m)$ và đồng cấu $g$ có ma trận $B$ trong cặp cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_m)$, $(\gamma_1, ..., \gamma_\ell)$. Khi đó, ma trận của đồng cấu $gf$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $(\gamma_1, ..., \gamma_\ell)$ chính là ma trận tích $BA$.*

**Chứng minh:** Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} f(\alpha_i) &= \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\beta_j, \\ g(\beta_j) &= \sum_{k=1}^{\ell} b_{kj}\gamma_k. \end{aligned}$$

Từ đó, do $g$ là một ánh xạ tuyến tính, ta có

$$\begin{aligned}(gf)(\alpha_i) &= g(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\beta_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} g(\beta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \sum_{k=1}^{\ell} b_{kj}\gamma_k = \sum_{k=1}^{\ell}(\sum_{j=1}^{m} b_{kj}a_{ji})\gamma_k.\end{aligned}$$

Gọi $C = (c_{ki})_{\ell\times n}$ là ma trận của $gf$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $(\gamma_1, ..., \gamma_\ell)$. Khi đó

$$(gf)(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{\ell} c_{ki}\gamma_k.$$

Vì biểu thị tuyến tính của $(gf)(\alpha_i)$ qua cơ sở $(\gamma_1, ..., \gamma_\ell)$ là duy nhất, nên ta thu được

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj}a_{ji}, \quad (1 \le k \le \ell, 1 \le i \le n).$$

Hệ đẳng thức này tương đương với đẳng thức ma trận

$$C = BA. \qquad \square$$

Nếu một trong hai vế của các đẳng thức sau đây giữa các ánh xạ tuyến tính là có nghĩa thì vế kia cũng vậy. Khi đó, ta có các đẳng thức (dễ kiểm tra):

$$\begin{aligned}h(gf) &= (hg)f, \\ g(f_1 + f_2) &= gf_1 + gf_2, \\ (g_1 + g_2)f &= g_1 f + g_2 f.\end{aligned}$$

**Định nghĩa 2.10** Mỗi đồng cấu (tuyến tính) từ không gian véctơ $V$ vào chính nó được gọi là một *tự đồng cấu* (tuyến tính) của $V$. Một tự đồng cấu của $V$ đồng thời là một đẳng cấu được gọi là một *tự đẳng cấu* của $V$.

Không gian véctơ tất cả các tự đồng cấu của $V$ được ký hiệu là $End(V)$. Tập hợp tất cả các tự đẳng cấu của $V$ được ký hiệu là $GL(V)$.

Dễ dàng kiểm tra lại rằng $End(V)$ là một vành đối với hai phép toán cộng và nhân (hợp thành) các tự đồng cấu. Nó được gọi là *vành các tự đồng cấu* của $V$. Vành này có đơn vị là $id_V$ và không giao hoán nếu $\dim V > 1$.

Để cho gọn, ta sẽ gọi ma trận của $f \in End(V)$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là ma trận của $f$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

**Định lý 2.11** *Giả sử $V$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ với $\dim V = n$. Khi đó ánh xạ đặt tương ứng mỗi tự đồng cấu $f \in End(V)$ với ma trận của nó $M(f)$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một đẳng cấu vành từ $End(V)$ vào $M(n \times n, \mathbf{K})$.*

**Chứng minh:** Đây là một hệ quả trực tiếp của Định lý 2.7 và Mệnh đề 4.5. □

Nhận xét rằng $f \in End(V)$ là một đẳng cấu nếu và chỉ nếu tồn tại đồng cấu $g \in End(V)$ sao cho

$$gf = fg = id_V.$$

Khi đó $g = f^{-1}$.

Do nhận xét này ta dễ dàng kiểm tra rằng $GL(V)$ là một nhóm đối với phép nhân là phép hợp thành các ánh xạ. $GL(V)$ được gọi là *nhóm tuyến tính tổng quát* của không gian véctơ $V$.

Theo Định lý 2.11, $f \in End(V)$ là một đẳng cấu nếu và chỉ nếu $M(f) \in M(n \times n, \mathbf{K})$ là một ma trận khả nghịch.

Tương ứng $f \leftrightarrow M(f)$ nói trong Định lý 2.11 được mô tả trong biểu đồ sau:

$$\begin{array}{ccc}
End(V) & \overset{\text{đẳng cấu vành}}{\longleftrightarrow} & M(n \times n, \mathbf{K}) \\
\cup & & \cup \\
GL(V) & \overset{\text{đẳng cấu nhóm}}{\longleftrightarrow} & GL(n, \mathbf{K}).
\end{array}$$

**Mệnh đề 2.12** *Giả sử $A$ là ma trận của tự đồng cấu $f : V \to V$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, và $C$ là ma trận chuyển từ cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang cơ sở $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$. Khi đó, ma trận của $f$ trong cơ sở $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$ là $C^{-1}AC$.*

**Chứng minh:** $C$ là ma trận chuyển từ cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang cơ sở $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n)$ của không gian véctơ $V$, nghĩa là ta có

$$(\alpha'_1 \; ... \; \alpha'_n) = (\alpha_1 \; ... \; \alpha_n)C.$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên với $C^{-1}$ từ bên phải, ta thu được

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n) = (\alpha'_1 \dots \alpha'_n)C^{-1}.$$

Tự đồng cấu $f \in End(V)$ có ma trận là $A$ trong cơ sở $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, nghĩa là

$$(f(\alpha_1) \dots f(\alpha_n)) = (\alpha_1 \dots \alpha_n)A.$$

Vì $f$ là một đồng cấu, cho nên ta có

$$\begin{aligned}(f(\alpha'_1) \dots f(\alpha'_n)) &= (f(\alpha_1) \dots f(\alpha_n))C \\ &= (\alpha_1 \dots \alpha_n)AC \\ &= (\alpha'_1 \dots \alpha'_n)C^{-1}AC.\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của biểu thị tuyến tính của mỗi véctơ qua một cơ sở, cho nên $C^{-1}AC$ chính là ma trận của $f$ trong cơ sở $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$. □

Một hệ luận trực tiếp của mệnh đề trên là như sau.

**Hệ quả 2.13** *Hai ma trận vuông đồng dạng với nhau nếu và chỉ nếu chúng là ma trận của cùng một tự đồng cấu của một không gian véctơ trong các cơ sở nào đó của không gian này.* □

# 3 Hạt nhân và ảnh của đồng cấu

Chúng ta mở đầu tiết này bằng nhận xét đơn giản sau đây.

**Mệnh đề 3.1** *Giả sử $f : V \to W$ là một đồng cấu. Khi đó, ảnh bởi $f$ của mỗi không gian véctơ con của $V$ là một không gian véctơ con của $W$. Nghịch ảnh bởi $f$ của mỗi không gian véctơ con của $W$ là một không gian véctơ con của $V$.*

**Chứng minh:** Giả sử $T$ là một không gian véctơ con của $V$. Khi đó, $f(T) \neq \emptyset$, bởi vì nó chứa véctơ 0. Hơn nữa, nếu $\alpha', \beta'$ là những véctơ của $f(T)$ thì chúng có dạng $\alpha' = f(\alpha)$, $\beta' = f(\beta)$, trong đó $\alpha, \beta \in T$. Khi đó, vì $f$ là một đồng cấu, cho nên với vô hướng bất kỳ $a \in \mathbf{K}$, ta có

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' &= f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta) \in f(T), \\ a\alpha' &= af(\alpha) = f(a\alpha) \in f(T). \end{aligned}$$

Vậy $f(T)$ là một không gian véctơ con của $W$.

Bây giờ giả sử $U$ là một không gian véctơ con của $W$. Khi đó, $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, bởi vì nó cũng chứa véctơ 0. Nếu $\alpha, \beta \in f^{-1}(U)$ thì $f(\alpha), f(\beta) \in U$. Vì $f$ là một đồng cấu, cho nên với mọi vô hướng $a \in \mathbf{K}$, ta có

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= f(\alpha) + f(\beta) \in U, \\ f(a\alpha) &= af(\alpha) \in U \end{aligned}$$

Vì thế $\alpha + \beta$ và $a\alpha \in f^{-1}(U)$. Vậy $f^{-1}(U)$ là một không gian véctơ con của $V$. □

Hạt nhân và ảnh của một đồng cấu là những không gian véctơ đặc biệt quan trọng đối với việc khảo sát đồng cấu đó. Chúng được định nghĩa như sau.

**Định nghĩa 3.2** Giả sử $f : V \to W$ là một đồng cấu.

(i) $Ker(f) = f^{-1}(0) = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V$ được gọi là *hạt nhân* (hay *hạch*) của $f$. Số chiều của $Ker(f)$ được gọi là *số khuyết* của $f$.

(ii) $Im(f) = f(V) = \{f(x) | x \in V\} \subset W$ được gọi là *ảnh* của $f$. Số chiều của $Im(f)$ được gọi là *hạng* của $f$ và được ký hiệu là $\operatorname{rank}(f)$.

Hai định lý sau đây nêu những điều kiện cần và đủ để một đồng cấu là một toàn cấu hay một đơn cấu.

**Định lý 3.3** *Đồng cấu $f : V \to W$ là một toàn cấu nếu và chỉ nếu* $\operatorname{rank}(f) = \dim W$.

**Chứng minh:** Theo định nghĩa, $f$ là một toàn cấu nếu và chỉ nếu $Im(f) = W$. Vì $Im(f)$ là một không gian véctơ con của $W$, cho nên đẳng thức nói trên tương đương với $\text{rank}(f) := \dim f(V) = \dim W$.

Thật vậy, nếu $f(V) = W$ thì hiển nhiên $\dim f(V) = \dim W$. Ngược lại, giả sử $\dim f(V) = \dim W$; do $f(V)$ là một không gian véctơ con của $W$, nên mỗi cơ sở của $f(V)$ cũng là một hệ độc lập tuyến tính trong $W$ với số phần tử bằng $\dim f(V) = \dim W$. Nói cách khác, mỗi cơ sở của $f(V)$ cũng là một cơ sở của $W$. Vậy $f(V) = W$. $\square$

**Định lý 3.4** *Đối với đồng cấu $f : V \to W$ các điều kiện sau đây là tương đương:*

*(i)* *$f$ là một đơn cấu.*

*(ii)* *$Ker(f) = \{0\}$.*

*(iii)* *Ảnh bởi $f$ của mỗi hệ véctơ độc lập tuyến tính là một hệ véctơ độc lập tuyến tính.*

*(iv)* *Ảnh bởi $f$ của mỗi cơ sở của $V$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính.*

*(v)* *Ảnh bởi $f$ của một cơ sở nào đó của $V$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính.*

*(vi)* $\text{rank}(f) = \dim V$.

**Chứng minh:** $(i) \Rightarrow (ii)$ : Giả sử $\alpha \in Ker(f)$. Khi đó $f(\alpha) = f(0) = 0$. Vì $f$ là một đơn cấu, cho nên $\alpha = 0$. Do đó $Ker(f) = \{0\}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ : Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính trong $V$. Nếu có một ràng buộc tuyến tính giữa các ảnh bởi $f$ của các phần tử đó

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f(\alpha_i) = 0 \;\; (a_i \in \mathbf{K}),$$

thì $f(\sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i) = 0$. Vì $Ker(f) = \{0\}$, cho nên $\sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i = 0$. Từ đó, ta có $a_1 = \cdots = a_k = 0$, bởi vì hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ độc lập tuyến tính. Như thế, hệ $(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_k))$ cũng độc lập tuyến tính.

Các suy luận $(iii) \Rightarrow (iv)$, $(iv) \Rightarrow (v)$ đều hiển nhiên.

$(v) \Rightarrow (vi)$ : Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $V$ sao cho $(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n))$ là một hệ độc lập tuyến tính. Rõ ràng hệ này sinh ra $f(V)$. Ta có

$$\text{rank}(f) = \dim f(V) = \text{rank}(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) = n = \dim V.$$

$(vi) \Rightarrow (i)$ : Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $V$. Ta có

$$\text{rank}(f) = \text{rank}(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) = \dim V = n,$$

cho nên hệ véctơ $(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n))$ độc lập tuyến tính. Giả sử $\alpha = \sum_i a_i\alpha_i$, $\beta = \sum_i b_i\alpha_i$ và $f(\alpha) = f(\beta)$. Khi đó,

$$0 = f(\alpha) - f(\beta) = f(\alpha - \beta) = f(\sum_i (a_i - b_i)\alpha_i = \sum_i (a_i - b_i)f(\alpha_i).$$

Từ đó $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$, bởi vì $(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n))$ độc lập tuyến tính. Điều này có nghĩa là $\alpha = \beta$. Vậy $f$ là một đơn cấu. □

**Định lý 3.5** (Định lý về đồng cấu các không gian véctơ). *Giả sử $f : V \to W$ là một đồng cấu. Khi đó, ánh xạ $\overline{f} : V/Ker(f) \to W$, xác định bởi $\overline{f}([\alpha]) = f(\alpha)$, là một đơn cấu. Nó cảm sinh đẳng cấu $\overline{f} : V/Ker(f) \xrightarrow{\cong} Im(f)$.*

**Chứng minh:** Trước tiên, cần chứng tỏ rằng $\overline{f}$ được định nghĩa không phụ thuộc việc chọn đại biểu của lớp $[\alpha]$. Thật vậy, nếu $[\alpha] = [\alpha']$, thì $\alpha - \alpha' \in Ker(f)$. Nói cách khác $f(\alpha - \alpha') = 0$, hay là $f(\alpha) = f(\alpha')$.

Vì $f$ là một đồng cấu, nên dễ dàng kiểm tra $\overline{f}$ cũng là một đồng cấu.

Giả sử $\overline{f}([\alpha]) = \overline{f}([\beta])$, tức là $f(\alpha) = f(\beta)$; khi đó $f(\alpha - \beta) = 0$. Vì thế $\alpha - \beta \in Ker(f)$, nghĩa là $[\alpha] = [\beta]$. Điều đó chứng tỏ rằng $\overline{f}$ là một đơn cấu. Hơn nữa, từ định nghĩa của $\overline{f}$ ta có $Im(\overline{f}) = Im(f)$. Cho nên, nếu xét $\overline{f}$ như một đồng cấu từ $V/Ker(f)$ tới $Im(f)$ thì đó là một đẳng cấu. □

**Hệ quả 3.6** *Đối với đồng cấu bất kỳ $f : V \to W$, ta có*

$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f).$$

**Chứng minh:** Theo định lý trên, ta có

$$\dim Im(f) = \dim Im(\overline{f}) = \dim V/Ker(f) = \dim V - \dim Ker(f). \quad \square$$

**Hệ quả 3.7** *Giả sử $f : V \to W$ là một đồng cấu. Khi đó, với mọi không gian véctơ con $U$ của $V$, ta có*

$$\dim f(U) \leq \dim U.$$

*Nói cách khác, ánh xạ tuyến tính không làm tăng chiều của các không gian véctơ.*

**Chứng minh:** Xét hạn chế $f|_U$ của ánh xạ $f$ trên không gian véctơ con $U$, ta có

$$\dim U = \dim Ker(f|_U) + \dim Im(f|_U) \geq \dim Im(f|_U) = \dim f(U). \quad \square$$

**Hệ quả 3.8** *Giả sử $f : V \to V$ là một tự đồng cấu của không gian véctơ hữu hạn chiều $V$. Khi đó, các khẳng định sau đây là tương đương:*

*(i) $f$ là một đẳng cấu.*

*(ii) $f$ là một đơn cấu.*

*(iii) $f$ là một toàn cấu.*

**Chứng minh:** Theo Định lý 3.4, $f$ là một đơn cấu nếu và chỉ nếu $\dim Ker(f) = 0$. Mặt khác, theo Định lý 3.3, $f$ là một toàn cấu khi và chỉ khi $\dim Im(f) = \dim V$. Theo Hệ quả 3.6, hai điều kiện nói trên tương đương với nhau. Do đó, chúng cùng tương đương với sự kiện $f$ là một đẳng cấu. $\square$

**Nhận xét:** Hệ quả trên không còn đúng nếu $V$ là một không gian véctơ vô hạn chiều. Thật vậy, đồng cấu

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{K}[X] &\to \mathbf{K}[X] \\ \varphi(X^n) &= X^{n+1} \ (n = 0, 1, 2...) \end{aligned}$$

là một đơn cấu nhưng không là một toàn cấu. Ngược lại, đồng cấu

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{K}[X] &\to \mathbf{K}[X] \\ \varphi(X^n) &= X^{n-1} \ (n = 0, 1, 2...), \end{aligned}$$

trong đó quy ước $X^{-1} = \psi(1) = 0$, là một toàn cấu nhưng không là một đơn cấu.

Trên cơ sở hệ quả nói trên, các Định lý 3.3 và 3.4 cho ta hàng loạt điều kiện để một tự đồng cấu tuyến tính của một không gian véctơ hữu hạn chiều là một đẳng cấu.

**Định nghĩa 3.9** (Hạng của ma trận). Giả sử $A$ là một ma trận $m$ hàng $n$ cột với các phần tử trong trường $\mathbf{K}$. Hạng của hệ $n$ véctơ cột của $A$ trong $\mathbf{K}^m$ được gọi là *hạng của ma trận* $A$ và được ký hiệu là $\mathrm{rank}A$.

Định lý sau đây cho ta một phương pháp để tính hạng của các đồng cấu.

**Định lý 3.10** *Giả sử đồng cấu $f : V \to W$ có ma trận là $A$ trong một cặp cơ sở nào đó của $V$ và $W$. Khi đó:*

$$\mathrm{rank}f = \mathrm{rank}A.$$

**Chứng minh:** Giả sử $f$ có ma trận là $A$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của $V$ và $(\beta_1, ..., \beta_m)$ của $W$. Theo định nghĩa, ta có

$$\mathrm{rank}f = \dim Im(f) = \mathrm{rank}(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)).$$

Vì $(\beta_1, ..., \beta_m)$ là một cơ sở của $W$ cho nên ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : W &\to \mathbf{K}^m, \\ \sum_{j=1}^m b_j\beta_j &\mapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

là một đẳng cấu tuyến tính. (Thật vậy, ánh xạ đó chuyển cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_m)$ thành cơ sở chính tắc của $\mathbf{K}^m$.)

Đẳng cấu $\varphi$ đưa $f(\alpha_i)$ vào cột thứ $i$ của ma trận $A$, bởi vì

$$f(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\beta_j \overset{\varphi}{\mapsto} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Vì các đẳng cấu tuyến tính đều bảo toàn hạng của mỗi hệ véctơ, nên ta có

$$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank}(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) = \mathrm{rank} A. \qquad \square$$

## 4 Không gian véctơ đối ngẫu

Ý chính của tiết này là ta có thể nghiên cứu một không gian véctơ thông qua tập hợp tất cả các hàm tuyến tính trên không gian này. Nói một cách nôm na, tập hợp các hàm như thế lập nên cái gọi là không gian véctơ đối ngẫu, nó có thể coi là "ảnh đối xứng qua gương" của không gian véctơ đã cho.

Giả sử $V$ là một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 4.1** Không gian $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbf{K})$ các ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $\mathbf{K}$ được gọi là *không gian véctơ đối ngẫu* của $V$. Mỗi phần tử của $V^*$ được gọi là một *dạng tuyến tính* trên $V$.

Ta đã biết rằng $V^*$ là một không gian véctơ với số chiều bằng

$$\dim V^* = \dim V \cdot \dim \mathbf{K} = \dim V.$$

Như thế $V^* \cong V$ nếu $\dim V < \infty$. Điều này không còn đúng nếu $V$ là một không gian véctơ vô hạn chiều. Tính không tự nhiên của đẳng cấu nói trên sẽ được thảo luận ở phần sau của tiết này.

Giả sử $f : V \to W$ là một đồng cấu. Ta định nghĩa ánh xạ $f^* : W^* \to V^*$ bởi công thức sau đây

$$(f^*(\varphi))(\alpha) = \varphi(f(\alpha)), \ \ \forall \varphi \in W^*, \ \forall \alpha \in V.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng $f^*$ là một đồng cấu từ $W^*$ vào $V^*$. Thật vậy, với mọi vô hướng $a, b \in \mathbf{K}$ và mọi $\varphi, \psi \in W^*$ ta có

$$\begin{aligned} f^*(a\varphi + b\psi)(\alpha) &= (a\varphi + b\psi)(f(\alpha)) \\ &= a\varphi(f(\alpha)) + b\psi(f(\alpha)) \\ &= af^*(\varphi)(\alpha) + bf^*(\psi)(\alpha) \\ &= (af^*(\varphi) + bf^*(\psi))(\alpha). \end{aligned}$$

Hệ thức này đúng với mọi $\alpha \in V$, nên ta thu được

$$f^*(a\varphi + b\psi) = af^*(\varphi) + bf^*(\psi).$$

Điều này chứng tỏ $f^*$ là một đồng cấu.

**Định nghĩa 4.2** $f^* : W^* \to V^*$ được gọi là *đồng cấu* (hay *ánh xạ*) *đối ngẫu* của đồng cấu $f : V \to W$.

Nếu ta ký hiệu giá trị của dạng tuyến tính $\theta \in V^*$ trên véctơ $\alpha \in V$ bởi $\langle \alpha, \theta \rangle \in \mathbf{K}$, thì công thức dùng để định nghĩa $f^*$ có thể viết lại thành

$$\langle \alpha, f^*(\varphi) \rangle = \langle f(\alpha), \varphi \rangle.$$

Ý nghĩa của tính đối ngẫu được thấy rõ trong cách diễn đạt này.

Người ta gọi ánh xạ $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to \mathbf{K}$ là phép *ghép cặp đối ngẫu*. Đó là một ánh xạ *song tuyến tính*, tức là nó tuyến tính với từng biến khi cố định biến còn lại.

Giả sử $V$ có số chiều bằng $n$, với một cơ sở là $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Trên cơ sở Định lý 2.4, ta định nghĩa các dạng tuyến tính $\alpha_1^*, ..., \alpha_n^* \in V^*$ bởi hệ điều kiện sau đây:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j^* \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = j, \\ 0, & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

**Mệnh đề 4.3** *Giả sử* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *là một cơ sở của* $V$. *Khi đó* $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$ *là một cơ sở của* $V^*$.

**Chứng minh:** Thật vậy, mỗi $\theta \in V^*$ thừa nhận biểu thị tuyến tính sau đây:

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_j, \theta \rangle \alpha_j^*.$$

Để chứng tỏ điều đó ta chỉ cần chứng minh rằng hai vế có giá trị như nhau trên các véctơ của cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Thật vậy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_j, \theta \rangle \alpha_j^*(\alpha_i) &= \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_j, \theta \rangle \delta_{ij} \\ &= \langle \alpha_i, \theta \rangle = \theta(\alpha_i), \quad (1 \le i \le n). \end{aligned}$$

Như thế, hệ gồm $n$ véctơ $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$ sinh ra không gian véctơ $n$ chiều $V$. Do đó, hệ này là một cơ sở của $V^*$. □

**Định nghĩa 4.4** Cơ sở $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$ của không gian $V^*$ được gọi là *cơ sở đối ngẫu* với cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của không gian $V^*$.

Ta có đẳng cấu tuyến tính

$$\begin{aligned} V &\to V^* \\ \alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i &\mapsto \alpha^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i^*. \end{aligned}$$

Đẳng cấu này *không tự nhiên*, vì nó phụ thuộc vào cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ đã chọn.

Tuy vậy, đẳng cấu $V \to V^{**}$, biến $\alpha$ thành $\alpha^{**}$, trong đó $\alpha^{**}$ được xác định bởi hệ thức sau

$$\langle \varphi, \alpha^{**} \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in V^*,$$

là một đẳng cấu tự nhiên, vì nó được định nghĩa không phụ thuộc vào cơ sở.

Để chứng minh rằng tương ứng nói trên là một đồng cấu, cần thử lại rằng

$$(a\alpha + b\beta)^{**} = a\alpha^{**} + b\beta^{**}, \quad \forall a, b \in \mathbf{K}, \ \forall \alpha, \beta \in V.$$

Thật vậy, hệ thức trên được chứng minh bằng các đẳng thức sau, trong đó $\varphi$ là phần tử bất kỳ trong $V^*$:

$$\begin{aligned}\langle\varphi,(a\alpha+b\beta)^{**}\rangle &= \langle a\alpha+b\beta,\varphi\rangle\\ &= a\langle\alpha,\varphi\rangle+b\langle\beta,\varphi\rangle\\ &= a\langle\varphi,\alpha^{**}\rangle+b\langle\varphi,\beta^{**}\rangle\\ &= \langle\varphi,a\alpha^{**}+b\beta^{**}\rangle.\end{aligned}$$

Nhận xét rằng $\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$. Vì thế, để chứng minh rằng tương ứng $V\to V^{**}$ nói trên là một đẳng cấu, ta chỉ cần chứng tỏ nó là một đơn cấu. Nói rõ hơn, ta chỉ cần chứng minh rằng nếu $\alpha^{**}=0$ thì $\alpha=0$. Giả sử phản chứng $\alpha\neq 0$. Ta chọn một cơ sở $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ của $V$ sao cho $\alpha_1=\alpha$. Khi đó, với $\varphi=\alpha_1^*$, ta có

$$1=\langle\alpha,\alpha_1^*\rangle=\langle\alpha_1^*,\alpha^{**}\rangle.$$

Đẳng thức này chứng tỏ $\alpha^{**}\neq 0$. Điều vô lý này bác bỏ giả thiết phản chứng.

**Nhận xét 4.5** Với mỗi $\alpha\in V$, phần tử $\alpha^{**}\in V^{**}$ được xác định hoàn toàn và chỉ phụ thuộc vào $\alpha$. Ngược lại, $\alpha^*$ chỉ được xác định khi đã chọn một cơ sở của $V$ và $\alpha^*$ phụ thuộc vào cơ sở này. Tuy vậy, ta có thể coi

$$\alpha^{**}=(\alpha^*)^*,$$

trong đó, đối ngẫu thứ nhất được lấy theo một cơ sở $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ nào đó của $V$, còn đối ngẫu thứ hai được lấy theo cơ sở đối ngẫu $(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*)$ của $V^*$. Mỗi phép đối ngẫu như thế đều phụ thuộc vào cơ sở đã chọn, nhưng kết quả của hai lần đối ngẫu liên tiếp thì lại không phụ thuộc bất kỳ cơ sở nào.

Để chứng minh đẳng thức trên ta giả sử

$$\alpha=\sum_{i=1}^n a_i\alpha_i.$$

Khi đó, $\alpha^* = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i^*$, và $(\alpha^*)^* = \sum_{i=1}^n a_i(\alpha_i^*)^*$. Theo định nghĩa của $\alpha^{**}$, ta có

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j^*, \alpha^{**}\rangle &= \langle \alpha, \alpha_j^*\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i, \alpha_j^*\rangle = a_j.\end{aligned}$$

Giả sử $\alpha^{**}$ có biểu thị tuyến tính

$$\alpha^{**} = \sum_{i=1}^n b_i(\alpha_i^*)^*.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j^*, \alpha^{**}\rangle &= \langle \alpha_j^*, \sum_{i=1}^n b_i(\alpha_i^*)^*\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i\delta_{ji} = b_j.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a_j = b_j$ với $j = 1, 2, ..., n$. Kết quả là $\alpha^{**} = (\alpha^*)^*$. □

Ta cần định nghĩa sau đây trước khi phát biểu định lý chính của tiết này.

**Định nghĩa 4.6** *Chuyển vị* của ma trận $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbf{K})$ là ma trận $A^t = (a_{ji}^t) \in M(n \times m, \mathbf{K})$ được xác định bởi hệ thức

$$a_{ji}^t = a_{ij} \quad (i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n).$$

Nói một cách không hình thức, chuyển vị một ma trận $A$ tức là viết các véctơ hàng của nó thành các véctơ cột của ma trận mới $A^t$. Khi đó, các véctơ cột của $A$ cũng trở thành các véctơ hàng tương ứng của $A^t$.

Một hệ quả trực tiếp của định nghĩa trên là

$$(A^t)^t = A,$$

với mọi ma trận $A$.

**Ví dụ:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 8 \\ 0 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Định lý 4.7** *Giả sử đồng cấu $f : V \to W$ có ma trận là $A$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $(\beta_1, ..., \beta_m)$. Khi đó, đồng cấu đối ngẫu $f^* : W^* \to V^*$ có ma trận là $A^t$ trong cặp cơ sở $(\beta_1^*, ..., \beta_m^*)$, $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$.*

**Chứng minh:** Vì $f$ có ma trận là $A$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $(\beta_1, ..., \beta_m)$, cho nên

$$f(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\beta_k \quad (j = 1, ..., n).$$

Theo định nghĩa của ánh xạ đối ngẫu, ta có

$$\begin{aligned}\langle \alpha_j, f^*(\beta_i^*)\rangle &= \langle f(\alpha_j), \beta_i^*\rangle \\ &= \langle \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\beta_k, \beta_i^*\rangle = a_{ij}.\end{aligned}$$

Sử dụng công thức được đưa ra trong chứng minh Mệnh đề 4.3 áp dụng cho véctơ $\theta = f^*(\beta_i^*)$, ta thu được

$$\begin{aligned}f^*(\beta_i^*) &= \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_j, f^*(\beta_i^*)\rangle \alpha_j^* \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j^*.\end{aligned}$$

Mặt khác, gọi $B = (b_{ji}) \in M(n \times m, \mathbf{K})$ là ma trận của $f^*$ trong cặp cơ sở $(\beta_1^*, ..., \beta_m^*)$, $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$, ta có

$$f^*(\beta_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\alpha_j^*.$$

Véctơ $f^*(\beta_i^*)$ có biểu thị tuyến tính duy nhất qua cơ sở $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$, cho nên

$$b_{ji} = a_{ij}, \quad (i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n).$$

Điều này có nghĩa là $B = A^t$. $\square$

Định lý sau đây cho thấy các khái niệm đơn cấu và toàn cấu là đối ngẫu với nhau.

**Định lý 4.8** *Gọi $f^* : W^* \to V^*$ là đồng cấu đối ngẫu của đồng cấu $f : V \to W$. Khi đó:*

*(i) $f$ là một đơn cấu nếu và chỉ nếu $f^*$ là một toàn cấu.*

*(ii) $f$ là một toàn cấu nếu và chỉ nếu $f^*$ là một đơn cấu.*

*(iii) $f$ là một đẳng cấu nếu và chỉ nếu $f^*$ là một đẳng cấu.*

Độc giả hãy tự tìm một chứng minh trực tiếp cho định lý này. Trong chương sau ta sẽ chứng minh rằng $\text{rank}A = \text{rank}A^t$, đối với mọi ma trận $A$. Kết hợp đẳng thức đó với Định lý 4.7 ta sẽ có một chứng minh gián tiếp cho định lý nói trên.

## Bài tập

1. Tính tích của hai ma trận sau đây:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 4 \\ -8 & 9 & -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Tính các lũy thừa sau đây

2.
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n.$$

3.
$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}.$$

5. Cho hai ma trận $A$ và $B$ với các phần tử trong $\mathbf{K}$. Chứng minh rằng nếu các tích $AB$ và $BA$ đều có nghĩa và $AB = BA$, thì $A$ và $B$ là các ma trận vuông cùng cấp.

6. Ma trận tích $AB$ sẽ thay đổi thế nào nếu ta

   (a) đổi chỗ các hàng thứ $i$ và thứ $j$ của ma trận $A$ ?

   (b) cộng vào hàng thứ $i$ của $A$ tích của vô hướng $c$ với hàng thứ $j$ của $A$?

   (c) đổi chỗ các cột thứ $i$ và thứ $j$ của ma trận $B$ ?

   (d) cộng vào cột thứ $i$ của $B$ tích của vô hướng $c$ với cột thứ $j$ của $B$?

7. *Vết* của một ma trận vuông là tổng của tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận đó. Chứng minh rằng vết của $AB$ bằng vết của $BA$.

8. Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các ma trận vuông cùng cấp, với $AB \neq BA$, thì

   (a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$,

   (b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

9. Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các ma trận vuông với $AB = BA$ thì

$$(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}A^{n-2}B^2 + ... + B^n.$$

10. Hai ma trận vuông $A$ và $B$ được gọi là *giao hoán* với nhau nếu $AB = BA$. Chứng minh rằng $A$ giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp với nó nếu và chỉ nếu nó là một ma trận vô hướng, tức là $A = cE$ trong đó $c \in \mathbf{K}$ và $E$ là ma trận đơn vị cùng cấp với $A$.

11. Ma trận vuông $A$ được gọi là một *ma trận chéo* nếu các phần tử nằm ngoài đường chéo chính của nó đều bằng 0. Chứng minh rằng ma trận vuông $A$ giao hoán với mọi ma trận chéo cùng cấp với nó nếu và chỉ nếu chính $A$ là một ma trận chéo.

12. Chứng minh rằng nếu $A$ là một ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính đôi một khác nhau, thì mọi ma trận giao hoán với $A$ cũng là một ma trận chéo.

13. Gọi $D = \mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo chính lần lượt bằng $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng nhân $D$ với $A$ từ bên trái có nghĩa là nhân các hàng của $A$ theo thứ tự với $a_1, a_2, ..., a_n$; còn nhân $D$ với $A$ từ bên phải có nghĩa là nhân các cột của $A$ theo thứ tự với $a_1, a_2, ..., a_n$.

14. Tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận sau đây:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thoả mãn phương trình

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = 0.$$

16. Chứng minh rằng đối với mỗi ma trận vuông $A$, tồn tại một đa thức khác không $f(X)$ sao cho $f(A) = 0$. Hơn nữa, mọi đa thức có tính chất đó đều là

bội của một đa thức $f_0(X)$ như thế, được xác định duy nhất bởi điều kiện: hệ số của số hạng bậc cao nhất của nó bằng 1. (Đa thức $f_0(X)$ với tính chất nói trên được gọi là *đa thức tối thiểu* của ma trận $A$.)

17. Giả sử $n$ không chia hết cho đặc số $p$ của trường $\mathbf{K}$. Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận $A, B \in M(n \times n, \mathbf{K})$ sao cho $AB - BA = E_n$.

18. Giả sử $A$ là một ma trận vuông cấp 2 và $k$ là một số nguyên $\geq 2$. Chứng minh rằng $A^k = 0$ nếu và chỉ nếu $A^2 = 0$.

19. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai $A$ sao cho $A^2 = 0$.

20. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai $A$ sao cho $A^2 = E_2$.

21. Giải phương trình $AX = 0$, trong đó $A$ là ma trận vuông cấp hai đã cho còn $X$ là ma trận vuông cấp hai cần tìm.

22. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

23. Giả sử $V = V_1 \oplus V_2$, trong đó $V_1$ có cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$, $V_2$ có cơ sở $(\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$. Tìm ma trận của phép chiếu lên $V_1$ theo phương $V_2$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

24. Chứng minh rằng nếu $V = V_1 \oplus V_2$, thì $V$ đẳng cấu với tích trực tiếp $V_1 \times V_2$.

25. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất tự đồng cấu $f : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3$ chuyển các véctơ $\alpha_1 = (2, 3, 5)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)$ tương ứng thành các véctơ $\beta_1 = (1, 1, 1)$, $\beta_2 = (1, 1, -1)$, $\beta_3 = (2, 1, 2)$. Tìm ma trận của $f$ trong cơ sở chính tắc của không gian.

26. Tự đồng cấu $f$ của không gian véctơ $\mathbf{K}^n$ chuyển các véctơ độc lập tuyến tính $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tương ứng thành các véctơ $\beta_1, ..., \beta_n$. Chứng minh rằng ma trận

$M(f)$ của $f$ trong một cơ sở nào đó $(e_1, ..., e_n)$ thoả mãn hệ thức $M(f) = BA^{-1}$, trong đó các cột của ma trận $A$ và ma trận $B$ là toạ độ tương ứng của các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$ và $\beta_1, ..., \beta_n$ trong cơ sở $(e_1, ..., e_n)$.

27. Chứng minh rằng phép nhân với ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a) từ bên trái, (b) từ bên phải là các tự đồng cấu của không gian các ma trận vuông cấp hai. Hãy tìm ma trận của tự đồng cấu đó trong cơ sở gồm các ma trận sau đây:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

28. Chứng minh rằng đạo hàm là một tự đồng cấu của không gian véctơ các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá $n$. Tìm ma trận của tự đồng cấu đó trong các cơ sở sau đây:

    (a) $(1, X, ..., X^n)$,

    (b) $(1, (X-c), ..., \frac{(X-c)^n}{n!})$, trong đó $c$ là một hằng số thực.

29. Ma trận của một tự đồng cấu trong cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ thay đổi thế nào nếu ta đổi chỗ các véctơ $e_i$ và $e_j$?

30. Tự đồng cấu $f$ có ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

trong cơ sở $(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Hãy tìm ma trận của $f$ trong cơ sở $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

31. Tự đồng cấu $\varphi$ có ma trận

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

trong cơ sở $(e_1, e_2, e_3)$. Hãy tìm ma trận của $\varphi$ trong cơ sở gồm các véctơ $\epsilon_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $\epsilon_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $\epsilon_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

32. Đồng cấu $\varphi : \mathbf{C}_3 \to \mathbf{C}_3$ có ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

trong cơ sở gồm các véctơ $\alpha_1 = (8, -6, 7)$, $\alpha_2 = (-16, 7, -13)$, $\alpha_3 = (9, -3, 7)$. Tìm ma trận của $\varphi$ trong cơ sở gồm các véctơ

$$\beta_1 = (1, -2, 1),\ \beta_2 = (3, -1, 2),\ \beta_3 = (2, 1, 2).$$

33. Chứng minh rằng các ma trận của một tự đồng cấu trong hai cơ sở của không gian là trùng nhau nếu và chỉ nếu ma trận chuyển giữa hai cơ sở đó giao hoán với ma trận của đồng cấu đã cho trong mỗi cơ sở nói trên.

34. Tự đồng cấu $\varphi \in End(\mathbf{R}_2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ trong cơ sở gồm $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (2, 3)$, và tự đồng cấu $\psi \in End(\mathbf{R}_2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ trong cơ sở gồm $\beta_1 = (3, 1)$, $\beta_2 = (4, 2)$. Tìm ma trận của $\varphi + \psi$ trong cơ sở $(\beta_1, \beta_2)$.

35. Tự đồng cấu $\varphi \in End(\mathbf{R}_2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ trong cơ sở gồm $\alpha_1 = (-3, 7)$, $\alpha_2 = (1, -2)$, và tự đồng cấu $\psi \in End(\mathbf{R}_2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

trong cơ sở gồm $\beta_1 = (6, -7)$, $\beta_2 = (-5, 6)$. Tìm ma trận của $\varphi\psi$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}_2$.

36. Giả sử tự đồng cấu $\varphi : V \to V$ thoả mãn hệ thức $\varphi^2 = \varphi$. Chứng minh rằng $V = Im(\varphi) \oplus Ker(\varphi)$.

37. Cho các tự đồng cấu $\varphi, \psi \in End(V)$.

    (a) Phải chăng nếu $\varphi\psi = 0$ thì $\psi\varphi = 0$?

    (b) Phải chăng nếu $\varphi\psi = 0$ và $\psi\varphi = 0$ thì hoặc $\varphi = 0$ hoặc $\psi = 0$?

38. Giả sử $\varphi$ và $\psi$ là các tự đồng cấu của không gian véctơ hữu hạn chiều $V$. Chứng minh rằng $\varphi\psi$ là một đẳng cấu nếu và chỉ nếu $\varphi$ và $\psi$ là các đẳng cấu. Khi đó
$$(\varphi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\varphi^{-1}.$$

39. Ký hiệu vết của ma trận vuông $A$ là $Tr(A)$. Chứng minh rằng ánh xạ $Tr : M(n \times n, \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$, $A \mapsto Tr(A)$ là một đồng cấu. Tìm một cơ sở của hạt nhân của $Tr$.

40. Chứng minh rằng vết của hai ma trận đồng dạng bằng nhau. (Từ đó người ta định nghĩa *vết của một tự đồng cấu* là vết của ma trận của nó trong cơ sở bất kỳ của không gian.)

41. Chứng minh rằng nếu tích ma trận $AB$ có nghĩa thì
$$(AB)^t = B^t A^t.$$
Từ đó suy ra rằng ma trận vuông $A$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $A^t$ khả nghịch, và khi đó
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

42. Cho các đồng cấu $f : V \to W$ và $g : W \to Z$. Chứng minh mối liên hệ giữa các đồng cấu đối ngẫu:

$$(gf)^* = f^* g^*.$$

Từ đó suy ra rằng đồng cấu $f : V \to W$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $f^* : W^* \to V^*$ khả nghịch, và khi đó

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*.$$

43. Chứng minh rằng ánh xạ $\mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(W^*, V^*)$, $f \mapsto f^*$ là một đẳng cấu tuyến tính.

# Chương III

# ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Định thức là một công cụ hữu hiệu để giải các hệ phương trình tuyến tính, và góp phần giải quyết hầu hết các bài toán định lượng cũng như định tính trong Đại số tuyến tính.

## 1 Các phép thế

**Định nghĩa 1.1** Mỗi song ánh từ tập $\{1, 2, ..., n\}$ vào chính nó được gọi là một *phép thế bậc* $n$. Tập hợp tất cả các phép thế bậc $n$ được ký hiệu bởi $S_n$.

$S_n$ cùng với phép hợp thành các ánh xạ lập thành một nhóm, được gọi là nhóm đối xứng bậc $n$. Nhóm này có $n!$ phần tử.

Nếu $\sigma \in S_n$, ta thường biểu thị nó dưới dạng

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_k$ là các phần tử đôi một khác nhau trong tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$. Ta ký hiệu bởi $(x_1, x_2, ..., x_k)$ phép thế giữ nguyên các phần tử *khác* $x_1, x_2, ..., x_k$, và tác động trên các phần tử đó như sau:

$$x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_3, ..., x_{k-1} \mapsto x_k, x_k \mapsto x_1.$$

Nó được gọi là một xích độ dài $k$ trên tập nền $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Xích $(x_1, x_2, ..., x_k)$ được gọi là một xích của phép thế $\sigma$ nếu $\sigma$ tác động như $(x_1, x_2, ..., x_k)$ trên các phần tử $x_1, x_2, ..., x_k$. (Tuy nhiên, $\sigma$ có thể tác động không tầm thường trên các phần tử khác $x_1, x_2, ..., x_k$.)

**Mệnh đề 1.2** *Mọi phép thế $\sigma \in S_n$ đều là tích của tất cả các xích khác nhau của nó. Các tập nền của các xích này là các tập con rời nhau của $\{1, 2, ..., n\}$.*

**Chứng minh:** Với mọi $x_1 \in \{1, 2, ..., n\}$, nếu $\sigma(x_1) = x_1$ thì $(x_1)$ là một xích của $\sigma$. Trái lại, nếu $\sigma(x_1) \neq x_1$, ta đặt $x_2 = \sigma(x_1)$. Giả sử $x_1, x_2 = \sigma(x_1), ..., x_k = \sigma(x_{k-1})$ là những phần tử đôi một khác nhau, còn $\sigma(x_k)$ trùng với một trong các phần tử $x_1, x_2, ..., x_k$. Ta khẳng định rằng $\sigma(x_k) = x_1$. Thật vậy, nếu $\sigma(x_k) = x_i$ với $i > 1$, thì $\sigma(x_k) = \sigma(x_{i-1})$. Do đó $x_{i-1} = x_k$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng $x_1, x_2, ..., x_k$ đôi một khác nhau. Như thế $(x_1, x_2, ..., x_k)$ là một xích của $\sigma$.

Mỗi phần tử của tập $\{1, 2, ..., n\}$ đều thuộc một tập con, là tập nền của một xích nào đó của $\sigma$. Hai tập con như thế nếu có một phần tử chung thì phải trùng nhau. Thật vậy, phương trình $\sigma(x) = y$ hoàn toàn xác định $y$ theo $x$ và $x$ theo $y$ (do $\sigma$ là một song ánh). □

**Định nghĩa 1.3** Phép đổi chỗ hai phần tử khác nhau $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ và giữ nguyên các phần tử khác được gọi là một *phép thế sơ cấp*.

Nói cách khác, một phép thế sơ cấp là một xích độ dài bằng hai: $(i, j)$.

**Mệnh đề 1.4** *Mỗi phép thế cấp $n$ đều là tích của một số phép thế sơ cấp. (Nói khác đi, các phép thế sơ cấp sinh ra nhóm $S_n$.)*

**Chứng minh:** Áp dụng Mệnh đề 1.2, ta chỉ cần chứng minh mệnh đề này cho các xích. Ta dễ kiểm tra lại rằng

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, ..., x_k) &= (x_1, x_2, ..., x_{k-1})(x_{k-1}, x_k) = \cdots \\ &= (x_1, x_2)(x_2, x_3)\cdots(x_{k-1}, x_k).\end{aligned}$$

Trong đó, phép thế ở bên phải tác động trước. □

**Định nghĩa 1.5** *Dấu* của phép thế $\sigma \in S_n$ là số sau đây

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{\pm 1\}.$$

Tích này chạy trên mọi cặp số (không có thứ tự) $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Ta gọi cặp số $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$ là một *nghịch thế* của $\sigma$ nếu $\sigma(i) - \sigma(j)$ trái dấu với $i - j$, tức là nếu $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} < 0$. Như vậy, $\text{sgn}(\sigma)$ bằng $+1$ hay $-1$ tuỳ theo số nghịch thế của $\sigma$ là chẵn hay lẻ.

**Ví dụ:** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ có ba nghịch thế là $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ và $\{3, 4\}$, cho nên $\text{sgn}(\sigma) = -1$.

**Định nghĩa 1.6** $\sigma$ được gọi là một *phép thế chẵn* nếu $\text{sgn}(\sigma) = 1$, nó được gọi là một *phép thế lẻ* nếu $\text{sgn}(\sigma) = -1$.

**Mệnh đề 1.7** *Mỗi phép thế sơ cấp đều là một phép thế lẻ.*

**Chứng minh:** Giả sử $i < j$ và

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & j & ... & n \\ 1 & 2 & ... & j & ... & i & ... & n \end{pmatrix}.$$

Khi đó, tất cả các nghịch thế của $\tau$ là

$$\begin{aligned} &\{i, k\} \quad \text{với mọi } k \text{ mà } i < k \le j \\ &\{\ell, j\} \quad \text{với mọi } \ell \text{ mà } i < \ell < j. \end{aligned}$$

Vậy $\tau$ có tất cả $(j - i) + (j - i - 1) = 2(j - i) - 1$ nghịch thế, do đó $\tau$ là một phép thế lẻ. □

**Định lý 1.8**

$$\text{sgn}(\lambda\mu) = \text{sgn}(\lambda)\text{sgn}(\mu),$$

*với mọi* $\lambda, \mu \in S_n$.

**Chứng minh:** Vì $\mu$ là một song ánh, cho nên khi $\{i, j\}$ chạy một lần qua mọi cặp (không có thứ tự) trong $\{1, 2, ..., n\}$ thì $\{\mu(i), \mu(j)\}$ cũng chạy một lần qua mọi cặp như thế. Do đó

$$\text{sgn}(\lambda) = \prod_{i \neq j} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{i - j} = \prod_{i \neq j} \frac{\lambda(\mu(i)) - \lambda(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\lambda\mu) &= \prod_{i\neq j}\frac{\lambda(\mu(i))-\lambda(\mu(j))}{i-j}\\ &= \prod_{i\neq j}\frac{\lambda(\mu(i))-\lambda(\mu(j))}{\mu(i)-\mu(j)}\prod_{i\neq j}\frac{\mu(i)-\mu(j)}{i-j} = \mathrm{sgn}(\lambda)\mathrm{sgn}(\mu).\square\end{aligned}$$

**Hệ quả 1.9** *Một phép thế là chẵn hay lẻ tuỳ theo nó là tích của một số chẵn hay lẻ các phép thế sơ cấp.*

**Nhận xét:** Có nhiều cách viết một phép thế thành tích các phép thế sơ cấp, chẳng hạn $(i,j)=(i,j)^3$. Nhưng tính chẵn lẻ của số nhân tử trong tích là không thay đổi.

# 2 Định thức của ma trận

Cho một ma trận vuông $A=(a_{ij})_{n\times n}$ với các phần tử trong trường $K$.

**Định nghĩa 2.1** *Định thức* của ma trận $A$, được ký hiệu bởi $\det A$ hoặc $|A|$, là phần tử sau đây của trường $\mathbf{K}$

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Nếu $A$ là một ma trận vuông cấp $n$ thì $\det A$ được gọi là một *định thức cấp $n$*.

Tổng ở vế phải của đẳng thức trên có tất cả $|S_n|=n!$ số hạng.

**Ví dụ:** **(a)** Định thức cấp 1:

$$\det(a)=a,\qquad \forall a\in\mathbf{K}.$$

**(b)** Định thức cấp 2:

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

**(c)** Định thức cấp 3:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}. \end{array}$$

Trên thực tế người ta không trực tiếp dùng định nghĩa để tính các định thức cấp $n > 3$, vì việc này quá phức tạp. Dưới đây, chúng ta sẽ tìm hiểu những tính chất cơ bản của định thức. Từ đó, ta sẽ nhận được những phương pháp tính định thức hiệu quả và tiết kiệm sức lao động hơn so với cách trực tiếp dùng định nghĩa.

Gọi $\alpha_j \in \mathbf{K}^n$ là véctơ cột thứ $j$ của ma trận $A$, và coi $\det A$ là một hàm của các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Ta viết

$$\det A = \det(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Định thức có 3 tính chất cơ bản dưới đây.

**Tính chất 1 (Đa tuyến tính):** Định thức của ma trận là một hàm tuyến tính với mỗi cột của nó, khi cố định các cột khác. Tức là:

$$\det(\alpha_1, ..., a\alpha_j + b\beta_j, ..., \alpha_n) = a\det(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) + b\det(\alpha_1, ..., \beta_j, ..., \alpha_n),$$

với mọi $a, b \in \mathbf{K}$, $\alpha_1, ..., \alpha_j, \beta_j, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}^n$, $j = 1, ..., n$.

**Chứng minh:** Ký hiệu

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \qquad \beta_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \det(\alpha_1, ..., a\alpha_j + b\beta_j, ..., \alpha_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots (a a_{\sigma(j)j} + b b_{\sigma(j)j}) \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= a \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &\quad + b \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= a\det(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) + b\det(\alpha_1, ..., \beta_j, ..., \alpha_n). \square \end{aligned}$$

**Tính chất 2 (Thay phiên):** Nếu ma trận vuông $A$ có hai cột bằng nhau, thì $\det A = 0$.

**Chứng minh:** Giả sử $\alpha_i = \alpha_j$ với $i < j$, tức là $a_{ki} = a_{kj}(1 \leq k \leq n$. Theo định nghĩa

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Ta ghép các số hạng trong tổng thành từng cặp

$$\begin{array}{ll} & \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ \text{với} & \operatorname{sgn}(\sigma') a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)i} \cdots a_{\sigma(i)j} \cdots a_{\sigma(n)n}, \end{array}$$

trong đó $\sigma' = \tau\sigma$, ở đây $\tau$ là phép thế sơ cấp đổi chỗ $\sigma(i)$ và $\sigma(j)$. Hiển nhiên ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma') &= -\operatorname{sgn}(\sigma), \\ a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n} &= a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)i} \cdots a_{\sigma(i)j} \cdots a_{\sigma(n)n}. \end{aligned}$$

Như thế $\det A$ là một tổng có các cặp số hạng đối nhau. Vậy $\det A = 0$. □

**Tính chất 3 (Chuẩn hoá):** Định thức của ma trận đơn vị bằng 1:

$$\det E_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

**Chứng minh:** Ký hiệu $e_{ij}$ chỉ phần tử nằm ở hàng $i$ cột $j$ của $E_n$. Ta có

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j, \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Theo định nghĩa

$$\det E_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) e_{\sigma(1)1} \cdots e_{\sigma(n)n}.$$

Tổng này chỉ có đúng một số hạng khác không, ứng với phép thế đồng nhất $\sigma(1) = 1, ..., \sigma(n) = n$. Dấu của phép thế này bằng 1. Như vậy

$$\det E_n = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1. \qquad \square$$

**Nhận xét 2.2** Trong tiết sau ta sẽ chứng tỏ rằng định thức là hàm duy nhất trên các ma trận vuông có 3 tính chất nói trên.

**Hệ quả 2.3** *(i)* (Tính phản đối xứng của định thức). *Nếu đổi chỗ hai cột của một ma trận thì định thức của nó đổi dấu:*

$$\det(..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ...) = -\det(..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ...).$$

*(ii) Nếu các véctơ cột của một ma trận phụ thuộc tuyến tính thì định thức của ma trận bằng không. Nói riêng, nếu ma trận có một cột bằng* $0$ *thì định thức của nó bằng* $0$.

*(iii) Nếu thêm vào một cột của ma trận một tổ hợp tuyến tính của các cột khác thì định thức của nó không thay đổi.*

**Chứng minh:** (i) Theo các tính chất cơ bản của định thức, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \det(..., \alpha_i + \alpha_j, ..., \alpha_i + \alpha_j, ...) \\ &= \det(..., \alpha_i, ..., \alpha_i, ...) + \det(..., \alpha_j, ..., \alpha_j, ...) \\ &\quad + \det(..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ...) + \det(..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ...). \end{aligned}$$

Hai định thức đầu tiên của vế phải bằng 0, do tính thay phiên của định thức. Từ đó ta thu được

$$\det(..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ...) = -\det(..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ...).$$

(ii) Giả sử cột $j$ của ma trận $A$ là một tổ hợp tuyến tính của các cột còn lại:

$$\alpha_j = \sum_{i \neq j} a_i \alpha_i.$$

Theo tính chất đa tuyến tính của định thức, ta có

$$\det A = \sum_{i \neq j} a_i \det(..., \alpha_i, ..., \alpha_i, ...).$$

Mỗi định thức ở vế phải đều có hai cột bằng nhau, vì thế $\det A = 0$.

(iii) Theo phần (ii) ta có

$$\begin{aligned}
&\det(\alpha_1, ..., \alpha_j + \textstyle\sum_{i \neq j} a_i\alpha_i, ..., \alpha_n) \\
&\qquad = \det(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) \;+\; \det(\alpha_1, ..., \textstyle\sum_{i \neq j} a_i\alpha_i, ..., \alpha_n) \\
&\qquad = \det(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n) \;+\; 0 \\
&\qquad = \det(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n).
\end{aligned}$$

□

Trong §5 ta sẽ chứng minh rằng các tính chất của định thức đối với các hàng cũng tương tự các tính chất của định thức đối với các cột, như đã nói trong hệ quả trên. Một phương pháp tính định thức có hiệu quả là ứng dụng những tích chất đó để biến đổi ma trận thành một ma trận tam giác có cùng định thức. Chúng ta sẽ tính định thức của ma trận tam giác trong ví dụ sau đây.

**Ví dụ:** Ma trận $A$ được gọi là một *ma trận tam giác trên* nếu nó có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó $a_{ij} = 0$ với $i > j$. Tương tự, $A$ được gọi là một *ma trận tam giác dưới* nếu $a_{ij} = 0$ với $i < j$. Ma trận tam giác trên và ma trận tam giác dưới được gọi chung là *ma trận tam giác*.

Chứng minh rằng, nếu $A$ là một ma trận tam giác cấp $n$ thì

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**Lời giải:** Ta sẽ chỉ xét trường hợp $A$ là một ma trận tam giác trên. Đối với ma trận tam giác dưới, chứng minh hoàn toàn tương tự. Theo định nghĩa định thức,

ta có

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Vì $A$ là một ma trận tam giác trên, nên điều kiện để $a_{\sigma(1)1}$ có thể khác không là $\sigma(1)\le 1$, do đó $\sigma(1)=1$. Giả sử quy nạp rằng điều kiện để $a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i-1)i-1}$ có thể khác không là $\sigma(1)=1,...,\sigma(i-1)=i-1$. Khi đó, $a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(i)i}$ chỉ có thể khác không nếu $\sigma(1)=1,...,\sigma(i-1)=i-1$ và $\sigma(i)\le i$. Vì $\sigma$ là một song ánh, nên điều kiện nói trên kéo theo $\sigma(i)=i$. Như thế, số hạng duy nhất có khả năng khác không trong $\det A$ là số hạng ứng với phép thế đồng nhất

$$\sigma(1)=1,\sigma(2)=2,...,\sigma(n)=n.$$

Hiển nhiên, dấu của phép thế đó bằng 1 (vì nó không có nghịch thế nào cả). Từ đó suy ra

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

# 3 Ánh xạ đa tuyến tính thay phiên

**Định nghĩa 3.1** Giả sử $V$ và $W$ là các không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$. Ánh xạ

$$\varphi : \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k \text{ lần}} \to W$$

được gọi là *đa tuyến tính* (hay nói rõ hơn: *$k$-tuyến tính*) nếu nó tuyến tính với từng thành phần trong tích $V\times\cdots\times V$ khi cố định các thành phần còn lại, tức là nếu

$$\varphi(\alpha_1,...,a\alpha_i+b\beta_i,...,\alpha_k) = a\varphi(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_k)+b\varphi(\alpha_1,...,\beta_i,...,\alpha_k),$$

với mọi $a,b\in\mathbf{K},\alpha_1,...,\alpha_k,\beta_i\in V$ và với mọi $i=1,...,k$.

Nếu $W=\mathbf{K}$ thì $\varphi$ được gọi là một *dạng $k$-tuyến tính* trên $V$.

**Ví dụ:** Giả sử $\varphi_1,...,\varphi_k : V\to\mathbf{K}$ là các ánh xạ tuyến tính. Khi đó

$$\begin{aligned}\varphi : \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k \text{ lần}} &\to \mathbf{K}\\ \varphi(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_k) &= \varphi_1(\alpha_1)\cdots\varphi_k(\alpha_k)\end{aligned}$$

là một dạng $k$-tuyến tính trên $V$.

**Định nghĩa 3.2** Ánh xạ $k$-tuyến tính $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ được gọi là *thay phiên* nếu

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_k) = 0,$$

khi $\alpha_i = \alpha_j$, với cặp chỉ số $i \neq j$ nào đó.

**Ví dụ:**

(a) Ánh xạ đồng nhất không $0 : V \times \cdots \times V \to W$ là $k$-tuyến tính và thay phiên.

(b) Định thức $\det : \mathbf{K}^n \times \cdots \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ là một hàm $n$-tuyến tính và thay phiên.

**Mệnh đề 3.3** *Giả sử $\varphi$ là một ánh xạ $k$-tuyến tính thay phiên. Khi đó*

*(i) $\varphi$ có tính phản đối xứng, tức là*

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_k) = -\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k),$$

*với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_k \in V$ và mọi cặp chỉ số $i \neq j$.*

*(ii) Nếu hệ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ phụ thuộc tuyến tính thì*

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_k) = 0.$$

**Chứng minh:** Mệnh đề được chứng minh bằng cách lặp lại các lập luận trong chứng minh Hệ quả 2.3. □

**Nhận xét 3.4** Nếu $\mathrm{Char}(\mathbf{K}) \neq 2$ thì một ánh xạ đa tuyến tính $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ là thay phiên khi và chỉ khi nó phản đối xứng. Thật vậy, theo mệnh đề trên, tính phản đối xứng là hệ quả của tính thay phiên. Ngược lại, giả sử $\varphi$ phản đối xứng, tức là

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_k) = -\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k),$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_k \in V$ và mọi cặp chỉ số $i \neq j$. Lấy $\alpha_i = \alpha_j$, ta có

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k) = -\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k).$$

Từ đó $2\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k) = 0$. Vì $\mathrm{Char}(\mathbf{K}) \neq 2$ cho nên đẳng thức trên kéo theo

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k) = 0.$$

Điều này có nghĩa là $\varphi$ có tính thay phiên.

Nếu $\mathrm{Char}(\mathbf{K}) = 2$ thì tính thay phiên mạnh hơn tính phản đối xứng.

Khái niệm định thức như một hàm đa tuyến tính thay phiên của các véctơ cột của một ma trận vuông được tổng quát hoá như sau.

Giả sử $\dim V = n$ và $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ là một cơ sở của $V$. Giả sử $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\varepsilon_i$, nói các khác

$$(\alpha_1 ... \alpha_n) = (\varepsilon_1 ... \varepsilon_n)A,$$

trong đó $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

**Định nghĩa 3.5** Ta gọi $\det A$ là *định thức của hệ véctơ* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *trong cơ sở* $\varepsilon$ (hay đối với cơ sở $\varepsilon$), và ký hiệu là $\det_\varepsilon(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Như vậy

$$\det_\varepsilon(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

trong đó $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\varepsilon_i$.

Theo §2 thì $\det_\varepsilon$ là một dạng $n$-tuyến tính thay phiên trên $V$.

Ký hiệu bởi $\Lambda^n(V)^*$ tập hợp tất cả các dạng $n$-tuyến tính thay phiên trên $V$. Nó lập nên một không gian véctơ trên $\mathbf{K}$ đối với phép cộng ánh xạ và nhân ánh xạ với vô hướng được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(\alpha_1, ..., \alpha_n) &= \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n) + \psi(\alpha_1, ..., \alpha_n),\\ (a\varphi)(\alpha_1, ..., \alpha_n) &= a\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n),\end{aligned}$$

với mọi $\varphi, \psi \in \Lambda^n(V)^*$, $a \in \mathbf{K}$.

**Định lý 3.6** *Nếu* $\dim V = n$ *thì* $\dim \Lambda^n(V)^* = 1$*. Hơn nữa, nếu* $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ *là một cơ sở của* $V$*, thì* $(\det_\varepsilon)$ *là một cơ sở của* $\Lambda^n(V)^*$*.*

**Chứng minh:** Ta đã biết $\det_\varepsilon \in \Lambda^n(V)^*$. Giả sử $\varphi \in \Lambda^n(V)^*$. Với mọi $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\varepsilon_i$ $(j = 1, ..., n)$, ta có

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n) &= \varphi(\sum_{i_1}^n a_{i_1 1}\varepsilon_{i_1}, ..., \sum_{i_n}^n a_{i_n n}\varepsilon_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}\varphi(\varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}).\end{aligned}$$

Nếu có hai trong các chỉ số $i_1, ..., i_n$ bằng nhau, thì số hạng tương ứng bằng 0, do $\varphi$ có tính thay phiên. Vì vậy, tổng chỉ cần lấy trên các bộ chỉ số $i_1, ..., i_n$ đôi một khác nhau. Khi đó, mỗi bộ chỉ số $i_1, ..., i_n$ xác định một phép thế $\sigma \in S_n$ bởi công thức

$$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, ..., \sigma(n) = i_n.$$

Do $\varphi$ có tính phản đối xứng, nên

$$\varphi(\varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{i_n}) = \varphi(\varepsilon_{\sigma(1)}, ..., \varepsilon_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\varphi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n).$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\varphi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \\ &= \varphi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)\det_\varepsilon(\alpha_1 ... \alpha_n).\end{aligned}$$

Như thế, $\varphi$ sai khác $\det_\varepsilon$ một nhân tử $\varphi(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \mathbf{K}$. Vậy $\det_\varepsilon$ là một hệ sinh của không gian $\Lambda^n(V)^*$. Do tính chuẩn hoá của định thức, nên $\det_\varepsilon \neq 0$. Vì thế, hệ gồm một véctơ $(\det_\varepsilon)$ là một cơ sở của không gian véctơ $\Lambda^n(V)^*$. □

**Hệ quả 3.7** (Tính duy nhất của định thức). *Định thức* det *là hàm duy nhất từ tập hợp các ma trận vuông* $M(n \times n, \mathbf{K})$ *vào* $\mathbf{K}$ *có các tính chất đa tuyến tính, thay phiên và chuẩn hoá nói ở §2.*

**Chứng minh:** Chọn $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ là hệ cơ sở chính tắc của $\mathbf{K}^n$. Nếu coi định thức của ma trận $A$ là một hàm của các véctơ cột $\alpha_1, ..., \alpha_n$ của nó, thì

$$\det A = \det_{\mathbf{e}}(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Nói cách khác $\det = \det_{\mathbf{e}}$.

Giả sử $\varphi : M(n \times n, \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ là một hàm đa tuyến tính, thay phiên và chuẩn hoá theo nghĩa đã nói ở §2. Ta cũng coi $\varphi(A)$ là hàm của các cột của $A$, như vậy $\varphi \in \Lambda^n(\mathbf{K}^n)^*$. Theo Định lý 3.6,

$$\varphi = \varphi(e_1, ..., e_n)\det_{\mathbf{e}} = \varphi(e_1, ..., e_n) \det .$$

Nhưng $\varphi$ được chuẩn hoá, tức là $\varphi(e_1, ..., e_n) = 1$, cho nên $\varphi = \det$. $\square$

**Hệ quả 3.8** $\det A \neq 0$ *nếu và chỉ nếu các véctơ cột của $A$ độc lập tuyến tính trong* $\mathbf{K}^n$.

**Chứng minh:** Nếu các véctơ cột $\alpha_1, ..., \alpha_n$ của $A$ phụ thuộc tuyến tính, thì theo Hệ quả 2.3 ta có $\det(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$.

Ngược lại, giả sử $\alpha_1, ..., \alpha_n$ độc lập tuyến tính. Khi đó $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở của $\mathbf{K}^n$. Gọi $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{K}^n$. Khi đó $\det = \det_{\mathbf{e}}$ lập nên một cơ sở của $\Lambda^n(\mathbf{K}^n)^*$. Ta có

$$\det_\alpha = c \det, \qquad (c \in \mathbf{K}).$$

Do đó $c \det(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \det_\alpha(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \det E_n = 1$. Vậy

$$\det A = \det(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0. \qquad \square$$

## 4 Định thức của tự đồng cấu

Mỗi phần tử $\varphi \in \Lambda^n(V)^*$ có thể được coi là một phép đo "thể tích" có hướng trong $V$. Cụ thể, $\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ được xem như *"thể tích" của hình hộp $n$ chiều* tựa trên các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Với quan điểm đó thì định thức của một tự đồng cấu $f : V \to V$ chính là hệ số giãn nở thể tích của các hình hộp $n$-chiều sau phép biến đổi $f$. Định lý sau đây nói rõ điều đó.

**Định lý 4.1** *Giả sử $f \in End(V)$, trong đó $V$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ $n$ chiều. Khi đó, có duy nhất một phần tử được ký hiệu là $\det(f) \in \mathbf{K}$ sao cho*

$$\varphi(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) = \det(f)\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n),$$

*với mọi $\varphi \in \Lambda^n(V)^*$ và mọi $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$.*

**Định nghĩa 4.2** Ta gọi $\det(f)$ là *định thức của tự đồng cấu $f$.*

**Chứng minh Định lý 4.1.** Chọn bất kỳ một phần tử $\eta \neq 0$ trong $\Lambda^n(V)^*$. Vì $\dim \Lambda^n(V)^* = 1$, cho nên $(\eta)$ là một cơ sở của $\Lambda^n(V)^*$.

Xét ánh xạ $\theta : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ lần}} \to \mathbf{K}$ xác định như sau

$$\theta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \eta(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)).$$

Vì $f$ tuyến tính, và $\eta$ đa tuyến tính thay phiên, nên $\theta$ cũng là đa tuyến tính thay phiên, tức là $\theta \in \Lambda^n(V)^*$. Như vậy, có $d \in \mathbf{K}$ sao cho $\theta = d\eta$.

Mặt khác, vì $(\eta)$ là một cơ sở của $\Lambda^n(V)^*$, cho nên với mọi $\varphi \in \Lambda^n(V)^*$ ta có $\varphi = c\eta$ với một vô hướng nào đó $c \in \mathbf{K}$. Do đó

$$\begin{aligned} \varphi(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) &= c\eta(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) = c\theta(\alpha_1, ..., \alpha_n) \\ &= cd\eta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = d\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n). \end{aligned}$$

Đẳng thức nói trong định lý được nghiệm đúng đối với hằng số $\det(f) = d$ không phụ thuộc $\varphi$. Như vậy, ta đã chỉ ra sự tồn tại của $\det(f)$.

Để chứng minh tính duy nhất của $\det(f)$, ta chọn $\varphi = \eta$. Đẳng thức

$$\varphi(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)) = \det(f)\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

kéo theo $\theta = \det(f)\eta$. Do biểu thị tuyến tính của $\theta$ qua cơ sở $(\eta)$ là duy nhất, nên $\det(f)$ xác định duy nhất. $\square$

Định lý sau đây cho thấy mối liên hệ giữa định thức của tự đồng cấu với định thức của ma trận, đồng thời chỉ ra một phương pháp để tính định thức của tự đồng cấu.

**Định lý 4.3** *Nếu tự đồng cấu $f : V \to V$ có ma trận là $A$ trong một cơ sở nào đó của $V$, thì* $\det(f) = \det A$.

**Chứng minh:** Gọi $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ là cơ sở của không gian $V$ trong đó $f$ có ma trận là $A$. Ta có $f(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$. Nói cách khác

$$(f(\varepsilon_1)...f(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1...\varepsilon_n)A.$$

Chọn $\varphi = \det_\varepsilon \in \Lambda^n(V)$, và áp dụng Định lý 4.1, ta có

$$\begin{aligned}\det(f) &= \det(f)\det E_n = \det(f)\det_\varepsilon(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)\\ &= \det_\varepsilon(f(\varepsilon_1), ..., f(\varepsilon_n)) = \det A.\end{aligned}$$ $\square$

**Hệ quả 4.4** *Nếu $A$ và $B$ là các ma trận của tự đồng cấu $f : V \to V$ trong những cơ sở khác nhau, thì* $\det A = \det B$.

**Định lý 4.5** *(i)* $\det id_V = 1$.

*(ii)* $\det(gf) = \det(g)\det(f), \quad \forall f, g \in End(V)$.

*Nói riêng, nếu $f$ khả nghịch thì* $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$.

**Chứng minh:** (i) Đối với mỗi $\varphi \in \Lambda^n(V)^*$, ta có

$$\varphi(id_V(\alpha_1), ..., id_V(\alpha_n)) = 1 \cdot \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n),$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$. Do đó, theo định nghĩa của định thức của tự đồng cấu, $\det(id_V) = 1$.

(ii) Nếu $\varphi \in \Lambda^n(V)^*$, thì

$$\begin{aligned}\det(gf)\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n) &= \varphi(gf(\alpha_1), ..., gf(\alpha_n))\\ &= \det(g)\varphi(f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n))\\ &= \det(g)\det(f)\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_n),\end{aligned}$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V$. Do đó $\det(gf) = \det(g)\det(f)$.

Nếu $f$ khả nghịch thì tồn tại $f^{-1} \in End(V)$ sao cho $ff^{-1} = id_V$. Từ đó $\det(f)\det(f^{-1}) = \det(ff^{-1}) = \det(id_V) = 1$. Hệ quả là $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$. □

**Định lý 4.6** *Tự đồng cấu $f : V \to V$ là một đẳng cấu nếu và chỉ nếu* $\det(f) \neq 0$.

**Chứng minh:** Giả sử $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ $V$. Gọi $C$ là ma trận của $f$ trong cơ sở đó:

$$(f(\varepsilon_1) \dots f(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)C.$$

Nói cách khác, $C$ là ma trận mà véctơ cột thứ $j$ của nó là véctơ toạ độ của $f(\varepsilon_j)$ trong cơ sở $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$.

Ta có

$$\begin{aligned}\det(f) &= \det(f)\det E_n = \det(f)\det_\varepsilon(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)\\ &= \det_\varepsilon(f(\varepsilon_1), ..., f(\varepsilon_n)) = \det C.\end{aligned}$$

Nhận xét rằng, $f$ là một đẳng cấu tuyến tính nếu và chỉ nếu $(f(\varepsilon_1), ..., f(\varepsilon_n))$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính. Điều này tương đương với sự kiện hệ véctơ cột của $C$ độc lập tuyến tính, tức là tương đương với $\det C = \det(f) \neq 0$. □

# 5 Các tính chất sâu hơn của định thức

Tiết này dành để nghiên cứu sâu thêm các tính chất của định thức của ma trận.

**Định lý 5.1** *Giả sử $A, B \in M(n \times n, \mathbf{K})$. Khi đó* *(i)* $\det(AB) = \det A \det B$.

*(ii) A khả nghịch nếu và chỉ nếu* $\det A \neq 0$. *Hơn nữa*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

**Chứng minh:** (i) là một hệ quả của các Định lý 4.3 và 4.5.

(ii) là một hệ quả của Định lý 4.6 và của phần (i).

**Định lý 5.2** (Định thức của ma trận chuyển vị).

$$\det(A^t) = \det A, \quad \forall A \in M(n \times n, \mathbf{K}).$$

**Chứng minh:** Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $A^t = (a^t_{ij})_{n\times n}$. Theo định nghĩa định thức, ta có

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a^t_{\sigma(1)1}\cdots a^t_{\sigma(n)n}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Nếu $k = \sigma(j)$, thì $j = \sigma^{-1}(k)$, và $a_{j\sigma(j)} = a_{\sigma^{-1}(k)k}$. Đặt $\omega = \sigma^{-1}$. Bởi vì $\omega\sigma = id$, cho nên $\operatorname{sgn}\omega = \operatorname{sgn}\sigma$. Hơn nữa, khi $\sigma$ chạy một lượt trên $S_n$ thì $\sigma^{-1}$ cũng chạy một lượt trên $S_n$. Do đó

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{\omega\in S_n} \operatorname{sgn}(\omega) a_{\omega(1)1}\cdots a_{\omega(n)n}\\ &= \det A \qquad \text{(theo định nghĩa).} \qquad \square\end{aligned}$$

Theo định lý trên, tất cả các tính chất của định thức đối với các cột của nó vẫn đúng đối với các hàng của nó. Chẳng hạn, định thức là một hàm đa tuyến tính, thay phiên và chuẩn hoá đối với các hàng của nó...

Bây giờ ta xét bài toán tính định thức cấp $n$ thông qua các định thức cấp nhỏ hơn.

Cho $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbf{K})$ và $k$ là một số nguyên bất kỳ thoả mãn $1 \leq k < n$. Xét hai bộ chỉ số

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n,$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n.$$

Các phần tử nằm trên giao của các hàng $i_1, ..., i_k$ và các cột $j_1, ..., j_k$ của ma trận $A$ lập nên một ma trận cấp $k$ (được gọi là một ma trận con cấp $k$ của $A$), và định thức của ma trận con đó, được ký hiệu là $D^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k}$, được gọi là một định thức con cấp $k$ của $A$.

Nếu xoá tất cả các hàng $i_1, ..., i_k$ và các cột $j_1, ..., j_k$ thì phần còn lại của ma trận $A$ lập nên một ma trận vuông cấp $n - k$, mà định thức của nó được ký hiệu là $\overline{D}^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k}$ và được gọi là định thức con bù của $D^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k}$.

Ta gọi $(-1)^{s(I,J)}\overline{D}^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k}$ là phần bù đại số của $D^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k}$, trong đó $s(I, J) = (i_1 + \cdots + i_k) + (j_1 + \cdots + j_k)$.

**Định lý 5.3** (Khai triển Laplace). *Giả sử đã chọn ra $k$ cột (tương ứng, $k$ hàng) trong một định thức cấp $n$ ($1 \leq k < n$). Khi đó, định thức đã cho bằng tổng của tất cả các tích của các định thức con cấp $k$ lấy ra từ $k$ cột (tương ứng, $k$ hàng) đã chọn với phần bù đại số của chúng. Nói rõ hơn, ta có:*

*(i) Công thức khai triển định thức theo $k$ cột $j_1 < \cdots < j_k$:*

$$\det A = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-1)^{s(I,J)} D^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k} \overline{D}^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k};$$

*(ii) Công thức khai triển định thức theo $k$ hàng $i_1 < \cdots < i_k$:*

$$\det A = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (-1)^{s(I,J)} D^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k} \overline{D}^{j_1,...,j_k}_{i_1,...,i_k}.$$

**Chứng minh:** Ta sẽ chỉ chứng minh công thức khai triển Laplace theo $k$ hàng. Từ đó, áp dụng Định lý 5.2, ta thu được công thức khai triển theo $k$ cột.

Trước hết, ta chứng minh công thức khai triển Laplace theo $k$ hàng đặc biệt $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_k = k$.

Ký hiệu véctơ cột thứ $j$ của ma trận $A$ là $\alpha_j$. Với mỗi bộ chỉ số $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$, ta gọi $j'_1, ..., j'_\ell$ là bộ chỉ số $\{1, 2, ..., n\} \backslash \{j_1, ..., j_k\}$ được xếp theo thứ tự tăng dần:

$$1 \leq j'_1 < \cdots < j'_\ell \leq n.$$

Xét hàm sau đây

$$\eta(A) = \eta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} (-1)^{s(I,J)} D^{j_1,...,j_k}_{1,...,k} \overline{D}^{j_1,...,j_k}_{1,...,k}.$$

Dễ thấy rằng $\eta$ là một hàm đa tuyến tính đối với $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Nếu $A = E_n$ (ma trận đơn vị), thì $D^{j_1,...,j_k}_{1,...,k} \neq 0$ nếu và chỉ nếu $j_1 = 1, j_2 = 2, ..., j_k = k$. Khi đó $D^{1,...,k}_{1,...,k} = 1$ và $\overline{D}^{1,...,k}_{1,...,k} = 1$. Do đó, $\eta$ có tính chuẩn hoá, tức là $\eta(E_n) = 1$.

Ta sẽ chứng minh $\eta$ có tính thay phiên.

Trước hết giả sử $\alpha_r = \alpha_{r+1}$. Lấy một số hạng bất kỳ trong tổng xác định $\eta$, nếu $j_t = r$, $j_{t+1} = r + 1$ thì $D^{j_1,...,j_k}_{1,...,k} = 0$; còn nếu $j'_u = r$, $j'_{u+1} = r + 1$ thì $\overline{D}^{j_1,...,j_k}_{1,...,k} = 0$ (trong cả hai trường hợp, định thức tương ứng bằng 0 vì có hai cột bằng nhau). Các số hạng còn lại được ghép thành từng cặp: số hạng có $j_t = r$, $j'_u = r + 1$ được ghép với số hạng có $j_t = r + 1$, $j'_u = r$ (các chỉ số khác của hai số hạng này như nhau). Khi đó, hai số hạng được ghép cặp có phần $D^{j_1,...,j_k}_{1,...,k} \overline{D}^{j_1,...,j_k}_{1,...,k}$ bằng nhau (vì $\alpha_r = \alpha_{r+1}$), và có dấu $(-1)^{s(I,J)}$ trái nhau (vì chỉ số $j_t$ của chúng tương ứng bằng $r$ và $r + 1$). Do đó chúng là các phần tử đối nhau. Tóm lại, $\eta(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$ nếu $\alpha_r = \alpha_{r+1}$ với $r$ bất kỳ $(1 \leq r < n)$.

Từ đó, theo phương pháp đã dùng để chứng minh Hệ quả 2.3, ta có

$$\eta(\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_n) = -\eta(\alpha_1, ..., \alpha_{r+1}, \alpha_r, ..., \alpha_n),$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}^n$ và mọi $r$ $(1 \leq r < n)$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng $\eta$ có tính thay phiên, tức là

$$\eta(\alpha_1, ..., \alpha_r, ..., \alpha_s, ..., \alpha_n) = 0,$$

nếu $\alpha_r = \alpha_s$ với cặp chỉ số $r \neq s$ bất kỳ. Thật vậy, ta lần lượt hoán vị $\alpha_s$ với $\alpha_{s-1}$ rồi với $\alpha_{s-2}$,... để đưa $\alpha_s$ về vị trí của $\alpha_{r+1}$. Ta có

$$\eta(\alpha_1, ..., \alpha_r, ..., \alpha_s, ..., \alpha_n) = (-1)^{s-r-1}\eta(\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_s, ..., \alpha_n) = 0,$$

bởi vì $\alpha_r$ và $\alpha_s$ đứng kề nhau trong vế ở giữa.

Theo Hệ quả 3.7, định thức là hàm duy nhất trên các cột của ma trận có các tính chất đa tuyến tính, thay phiên và chuẩn hoá, cho nên

$$\det(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \eta(\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Đó chính là công thức khai triển Laplace theo $k$ hàng $i_1 = 1, ..., i_k = k$.

Cuối cùng, ta xét trường hợp $k$ hàng tùy ý $I = (i_1, ..., i_k)$. Ký hiệu $I' = (1, ..., k)$. Ta lần lượt hoán vị hàng $i_1$ với $(i_1 - 1)$ hàng đứng trước nó (để đưa hàng $i_1$ về hàng 1 và giữ nguyên vị trí tương đối của các hàng còn lại), rồi lại lần lượt hoán vị hàng $i_2$ với $(i_2 - 2)$ hàng đứng trước nó... Cuối cùng, lần lượt hoán vị hàng $i_k$ với $(i_k - k)$ hàng đứng trước nó. Sau phép biến đổi đó, các hàng $i_1, ..., i_k$ được đưa về các hàng $1, ..., k$ và vị trí tương đối của các hàng còn lại được giữ nguyên. Ma trận $A$ được biến đổi thành ma trận $A'$ với $\det A = (-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_k-k)} \det A'$. Ta cũng có

$$\begin{aligned}
(-1)^{s(I,J)} &= (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)-(1+\cdots+k)}(-1)^{s(I',J)},\\
D^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k}(A) &= D^{j_1,\ldots,j_k}_{1,\ldots,k}(A'),\\
\overline{D}^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k}(A) &= \overline{D}^{j_1,\ldots,j_k}_{1,\ldots,k}(A').
\end{aligned}$$

Dùng khai triển Laplace theo $k$ hàng $1, ..., k$ của ma trận $A'$, ta có

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{(i_1-1)+\cdots+(i_k-k)} \det A'\\
&= (-1)^{(i_1+\cdots+i_k)-(1+\cdots+k)} \sum_{j_1<\cdots<j_k} (-1)^{s(I',J)} D^{j_1,\ldots,j_k}_{1,\ldots,k}(A')\overline{D}^{j_1,\ldots,j_k}_{1,\ldots,k}(A')\\
&= \sum_{j_1<\cdots<j_k} (-1)^{s(I,J)} D^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k}(A)\overline{D}^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k}(A).
\end{aligned}$$

Định lý được hoàn toàn chứng minh. □

**Ví dụ:** Tính định thức Vandermonde

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

**Lời giải:** Ta làm cho hầu hết các phần tử trên hàng cuối của định thức trở thành bằng không bằng cách lấy cột thứ $(n-1)$ nhân với $-x_n$ rồi cộng vào cột $n$, sau đó lấy cột thứ $(n-2)$ nhân với $-x_n$ rồi cộng vào cột $(n-1)$,..., cuối cùng lấy cột thứ nhất nhân với $-x_n$ rồi cộng vào cột 2. Sau biến đổi đó, ta thu được

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1-x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1-x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_n) \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Khai triển Laplace theo hàng thứ $n$, rồi đưa các thừa số chung của mỗi hàng ra ngoài dấu định thức, ta có

$$D_n = (-1)^{n+1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Từ đó ta thu được công thức truy toán

$$D_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})D_{n-1}.$$

Xuất phát với $D_1 = 1$, và bằng quy nạp sử dụng công thức trên, ta có

$$D_n = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

Một ứng dụng quan trọng của khai triển Laplace là công thức tính ma trận nghịch đảo.

**Định lý 5.4** *Nếu ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbf{K})$ có định thức khác 0 thì A khả nghịch và*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & ... & \tilde{a}_{n1} \\ . & ... & . \\ \tilde{a}_{1n} & ... & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

*trong đó $\tilde{a}_{ij}$ là phần bù đại số của $a_{ij}$.*

**Chứng minh:** Ký hiệu ma trận nói trong định lý là $B$. Theo định lý Laplace về khai triển $\det A$ theo hàng $i$, ta có

$$a_{i1}\tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} = \det A, \quad \forall i.$$

Hơn nữa, với mọi $j \neq i$, xét ma trận thu được từ $A$ bằng cách thay hàng $j$ bởi hàng $i$ và giữ nguyên các hàng khác, kể cả hàng $i$. Ma trận này có hai hàng $i$ và $j$ đều bằng $(a_{i1}, ..., a_{in})$. Do đó, định thức của nó bằng 0. Khai triển Laplace định thức này theo hàng $j$, ta có

$$a_{i1}\tilde{a}_{j1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{jn} = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Kết hợp hai đẳng thức trên, ta thu được $AB = E_n$. Tương tự, bằng cách áp dụng khai triển Laplace theo cột, ta có $BA = E_n$.

Tóm lại, $A$ khả nghịch, và $A^{-1} = B$. □

Trong phần sau, chúng ta sẽ giới thiệu một phương pháp khác tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính.

# 6 Định thức và hạng của ma trận

Chúng ta đã định nghĩa hạng của một ma trận là hạng của hệ véctơ cột của nó. Định lý sau đây cho phép tính hạng của ma trận thông qua định thức. Đồng thời nó đặt cơ sở cho khẳng định: hạng của ma trận cũng bằng hạng của hệ véctơ hàng của ma trận đó.

**Định lý 6.1** *Giả sử $A$ là một ma trận $m$ hàng, $n$ cột với các phần tử trong trường* $\mathbf{K}$. *Khi đó, hạng của ma trận $A$ bằng cấp cao nhất của các định thức con khác* $0$ *của $A$. Nói rõ hơn,* $\mathrm{rank}A = r$ *nếu có một định thức con cấp $r$ của $A$ khác* $0$, *và mọi định thức con cấp $> r$ (nếu có) của $A$ đều bằng* $0$.

**Chứng minh:** Việc đổi chỗ các cột rõ ràng không làm thay đổi $\mathrm{rank}A$. Việc đổi chỗ các hàng cũng vậy, bởi vì đổi chỗ các hàng tương ứng với việc đổi chỗ các toạ độ của các véctơ cột trong $\mathbf{K}^n$, đó là một đẳng cấu tuyến tính của $\mathbf{K}^n$.

Mặt khác, đổi chỗ các hàng và các cột của $A$ cũng không làm thay đổi cấp cao nhất của các định thức con của $A$.

Vì thế, để cho dễ trình bày và không giảm tổng quát, ta có thể giả sử định thức con cấp $r$ ở góc trái trên của $A$ khác 0, và mọi định thức con cấp $(r+1)$ của $A$ đều bằng 0.

Khi đó, $r$ cột đầu tiên của $A$ độc lập tuyến tính. (Nếu trái lại, thì định thức cấp $r$ ở góc trái trên của $A$ bằng 0.) Ta sẽ chứng minh rằng cột thứ $j$ của $A$, ký hiệu $\alpha_j$, biểu thị tuyến tính qua $r$ cột đầu tiên, với $r < j \le n$. Để làm điều đó, với mỗi $i$ thoả mãn $1 \le i \le m$, ta xét định thức sau đây:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ . & \dots & . & . \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Định thức này luôn bằng 0. Thật vậy, nếu $1 \le i \le r$, thì định thức có 2 hàng bằng nhau; còn nếu $r < i \le m$, thì nó là một định thức con cấp $(r+1)$ của $A$. Khai triển Laplace định thức này theo hàng cuối, và gọi $\lambda_k$ là phần bù đại số của $a_{ik}$, ta có

$$\lambda_1 a_{i1} + \cdots + \lambda_r a_{ir} + \lambda a_{ij} = 0.$$

Ở đây $\lambda = \lambda_j \neq 0$, vì đó là định thức con cấp $r$ ở góc trái trên. Lưu ý rằng $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda$ đều không phụ thuộc vào $i$. Từ đó

$$\alpha_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\alpha_1 - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda}\alpha_r.$$

Theo định nghĩa hạng của ma trận, $\mathrm{rank}A = r$. □

**Hệ quả 6.2** *Hạng của một ma trận bằng hạng của hệ các véctơ hàng của nó.*

**Chứng minh:** Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}A &= \mathrm{rank}A^t \qquad \text{(theo Định lý 3.4)} \\ &= \text{Hạng của hệ véctơ cột của } A^t \\ &= \text{Hạng của hệ véctơ hàng của } A. \end{aligned}$$ □

# 7 Hệ phương trình tuyến tính - Quy tắc Cramer

Một hệ thống có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{cases}$$

trong đó $a_{ij}, b_i$ là các phần tử cho trước trong trường $\mathbf{K}$, được gọi là một hệ phương trình tuyến tính gồm $m$ phương trình với $n$ ẩn $x_1, ..., x_n$. Ký hiệu

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Khi đó, hệ phương trình nói trên có thể viết dưới dạng phương trình véctơ

$$Ax = \beta.$$

*Một nghiệm* của hệ này là một véctơ $x^0 \in \mathbf{K}^n$ sao cho $Ax^0 = \beta$. Một hệ phương trình có ít nhất một nghiệm được gọi là một *hệ phương trình tương thích.*

Hệ phương trình $Ax = 0$ được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* liên kết với hệ $Ax = \beta$.

Theo kinh nghiệm, ta cảm nhận rằng hệ phương trình tuyến tính $Ax = \beta$ có nghiệm duy nhất nếu số phương trình của hệ bằng số ẩn, và không có phương trình nào của hệ là "hệ quả" của các phương trình khác. Điều này được diễn đạt chính xác trong định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 7.1** Hệ phương trình tuyến tính $Ax = \beta$ được gọi là một *hệ không suy biến* (hay một *hệ Cramer*) nếu nó có số phương trình bằng số ẩn (nói cách khác, nếu $A$ là một ma trận vuông) và nếu $\det A \neq 0$.

**Định lý 7.2** *Hệ phương trình tuyến tính không suy biến $Ax = \beta$ có một nghiệm duy nhất, được tính bằng công thức*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad (1 \leq j \leq n),$$

*trong đó $A_j$ là ma trận nhận được từ ma trận $A$ bằng cách thay cột thứ $j$ bởi cột hệ số tự do $\beta$.*

**Chứng minh:** Vì $\det A \neq 0$, nên $A$ là một ma trận khả nghịch. Khi đó

$$\begin{aligned} Ax = \beta &\iff A^{-1}Ax = A^{-1}\beta \\ &\iff x = A^{-1}\beta. \end{aligned}$$

Theo Định lý 5.4, ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ . & \dots & . \\ \tilde{a}_{1n} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

trong đó $\tilde{a}_{ij}$ là phần bù đại số của $a_{ij}$ trong $\det A$. Từ đó $x = A^{-1}\beta$ có nghĩa là

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{\det A}(\tilde{a}_{1j}b_1 + \tilde{a}_{2j}b_2 + \cdots + \tilde{a}_{nj}b_n) \\ &= \frac{\det A_j}{\det A}, \quad (1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối nhận được bằng cách khai triển Laplace định thức của $A_j$ theo cột thứ $j$. $\square$.

**Ví dụ:** Giải hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x + y + 3z + 4t = -3 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ 2x + 3y + 11z + 5t = 2. \end{cases}$$

**Lời giải:** Trước hết ta tính định thức của ma trận hệ số

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -9 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - 2 \cdot (-2) = -14.$$

Theo quy tắc Cramer, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{28}{-14} = -2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 11 & 5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{0}{-14} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-14}{-14} = 1, \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{14}{-14} = -1.$$

# 8 Hệ phương trình tuyến tính - Phương pháp khử Gauss

Phương pháp Cramer chỉ áp dụng được cho các hệ phương trình tuyến tính không suy biến (nói riêng, các hệ này có số phương trình bằng số ẩn). Thế nhưng rất nhiều hệ phương trình tuyến tính mà người ta gặp lại suy biến. Phương pháp khử Gauss, mà ta sẽ trình bày dưới đây, có ưu điểm là có thể áp dụng cho hệ phương trình tuyến tính tùy ý. Nhược điểm của phương pháp này là không đưa ra được thông tin nào về nghiệm của hệ phương trình trước khi giải xong hệ đó.

Nội dung của phương pháp khử Gauss như sau.

Ta gọi hai hệ phương trình là *tương đương* nếu nghiệm của hệ này cũng là nghiệm của hệ kia và ngược lại.

Nhận xét rằng nếu ta áp dụng các phép biến đổi sau đây, được gọi là các phép *biến đổi sơ cấp*, trên một hệ phương trình tuyến tính, ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính tương đương với hệ ban đầu.

(1) Đổi chỗ hai phương trình của hệ.

(2) Nhân một phương trình của hệ với một vô hướng khác 0 thuộc trường **K**.

(3) Cộng vào một phương trình một tổ hợp tuyến tính của các phương trình khác trong hệ.

Bây giờ ta xét một hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Ta gọi $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là *ma trận các hệ số*, và

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

là *ma trận các hệ số mở rộng* của hệ phương trình nói trên.

Giả sử có một hệ số nào đó $a_{ij} \neq 0$. Không giảm tổng quát (nếu cần, đổi chỗ các phương trình và đánh số lại các ẩn) ta có thể coi $a_{11} \neq 0$. Khi đó, nhân phương trình thứ nhất với $(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ rồi cộng vào phương trình thứ $i$ $(i = 2, ..., m)$, ta nhận được hệ phương trình tương đương có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= . \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n &= b'_m. \end{cases}$$

Lặp lại lập luận trên đối với hệ con gồm $(n-1)$ phương trình cuối với các ẩn $x_2, ..., x_n$.

Sau một số hữu hạn bước, hệ phương trình $Ax = \beta$ được đưa về một hệ tương đương, với ma trận mở rộng có dạng

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \bar{a}_{11} & * & \ldots & * & * & \ldots & * & \bar{b}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \ldots & * & * & \ldots & * & \bar{b}_2 \\ . & . & \ldots & * & * & \ldots & * & . \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{a}_{rr} & * & \ldots & * & \bar{b}_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{b}_{r+1} \\ . & . & \ldots & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{b}_m \end{array}\right),$$

trong đó $\bar{a}_{ii} \neq 0$ $(i = 1, ..., r)$, và các dấu $*$ ký hiệu các phần tử có thể khác 0 trong trường $\mathbf{K}$.

Nếu một trong các vô hướng $\bar{b}_{r+1}, ..., \bar{b}_m$ khác 0, thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $\bar{b}_{r+1} = \cdots = \bar{b}_m = 0$, thì hệ phương trình có nghiệm. Hơn nữa, mỗi nghiệm của hệ phương trình đều có thể nhận được bằng cách gán cho $x_{r+1}, ..., x_n$ những giá trị tuỳ ý thuộc trường $\mathbf{K}$ (nếu $n > r$), rồi giải duy nhất $x_1, ..., x_r$ theo những giá trị đã gán cho $x_{r+1}, ..., x_n$. (Cụ thể, $x_r$ được tìm từ phương trình thứ $r$,..., $x_1$ được tìm từ phương trình thứ nhất.)

**Ví dụ:** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

**Lời giải:** Dùng phương pháp khử Gauss, ta thấy hệ phương trình trên tương đương với

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_2 - 14x_3 + 10x_4 = -2 \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_2 - 21x_3 + 15x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1 \\ 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4 \\ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4 \\ x_3, \quad x_4 \quad \text{tuỳ ý}. \end{cases}$$

**Nhận xét 8.1** Để cho gọn, trong quá trình giải hệ phương trình tuyến tính, ta chỉ cần ghi nhận sự biến đổi của ma trận hệ số suy rộng. Chẳng hạn trong ví dụ trên, ta chỉ cần viết

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 6 - 26x_3 + 17x_4 \\ x_2 & = & -1 + 7x_3 - 5x_4 \\ x_3, & x_4 & \text{tuỳ ý.} \end{cases}$$

**Nhận xét 8.2** Tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình tuyến tính là các phép *biến đổi sơ cấp* trên ma trận. Đó là các phép biến đổi thuộc một trong các dạng sau đây

(1) Đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) của ma trận.

(2) Nhân một hàng (hoặc một cột) của ma trận với một vô hướng khác 0.

(3) Cộng vào một hàng (hoặc một cột) một tổ hợp tuyến tính của các hàng (tương ứng: các cột) khác.

Dễ thấy rằng các phép biến đổi sơ cấp *không làm thay đổi hạng* của ma trận. Nhận xét này dẫn tới một cách tính hạng của ma trận rất có ích trong thực hành.

Cụ thể là, mỗi ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ sau một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp đều có thể đưa về một ma trận dạng (tam giác trên suy rộng)

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \bar{a}_{22} & \dots & * & * & \dots & * \\ . & . & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{rr} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó $\bar{a}_{ii} \neq 0$ $(i = 1, ..., r)$, và các dấu $*$ ký hiệu các phần tử có thể khác 0 trong trường $\mathbf{K}$.

Bằng cách trực tiếp dùng định nghĩa của hạng hoặc dùng Định lý 6.1, ta dễ thấy rằng hạng của ma trận nói trên bằng $r$.

**Nhận xét 8.3** Phương pháp khử Gauss được ứng dụng vào việc tìm ma trận nghịch đảo.

Giả sử cần tìm nghịch đảo của ma trận $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbf{K})$ nếu như nó khả nghịch. Ta xét hệ phương trình

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i \quad (i = 1, ..., n).$$

Khi đó, $A$ khả nghịch nếu và chỉ nếu hệ phương trình trên có nghiệm với mọi vế phải $y_1, ..., y_n$. Hơn nữa, nếu nghiệm của hệ được cho bởi công thức

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j \quad (i = 1, ..., n),$$

thì ma trận nghịch đảo của $A$ chính là $A^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$. (Công thức biểu thị tường minh $x_1, ..., x_n$ qua $y_1, ..., y_n$ có thể được tìm bằng cách dùng phương pháp khử Gauss.)

Thật vậy, ta xét phép biến đổi tuyến tính $\tilde{A} : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n, x \mapsto Ax$. Nó có ma trận là $A$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{K}^n$. Hệ phương trình $Ax = y$ có nghiệm với mọi $y$ nếu và chỉ nếu $\tilde{A}$ là một đẳng cấu tuyến tính, điều này xảy ra khi và chỉ khi $A$ khả nghịch. Hơn nữa, ta có $Ax = y$ tương đương với $x = A^{-1}y$. Do đó $A^{-1} = (b_{ij})_{n\times n}$.

# 9 Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ta xét các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và không thuần nhất liên kết với nhau

$$Ax = 0 \qquad \text{và} \qquad Ax = \beta,$$

trong đó $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M(m \times n, \mathbf{K}), \beta \in \mathbf{K}^m$. Như vậy, cả hai hệ phương trình nói trên đều gồm $m$ phương trình và $n$ ẩn.

**Định lý 9.1** *Tập hợp $L$ tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = 0$ là một không gian véctơ con của $\mathbf{K}^n$, có số chiều thoả mãn hệ thức* $\dim L = n - \mathrm{rank}A$.

**Chứng minh:** Ta xét ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \ \mathbf{K}^n &\to \mathbf{K}^m, \\ x &\mapsto Ax. \end{aligned}$$

Rõ ràng $L = Ker\tilde{A}$ là một không gian véctơ con của $\mathbf{K}^n$. Hơn nữa, vì ánh xạ tuyến tính $\tilde{A}$ có ma trận là $A$ trong cơ sở chính tắc của các không gian véctơ $\mathbf{K}^n$ và $\mathbf{K}^m$, cho nên

$$\begin{aligned} \dim L = \dim Ker\tilde{A} &= \dim \mathbf{K}^n - \dim Im\tilde{A} \\ &= n - \mathrm{rank}A. \qquad \square \end{aligned}$$

**Định lý 9.2** *Giả sử $L$ là không gian véctơ con gồm các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = 0$, và $x^0$ là một nghiệm của hệ $Ax = \beta$. Khi đó* *tập hợp các nghiệm của hệ $Ax = \beta$ là*

$$x^0 + L = \{x^0 + \alpha | \alpha \in L\}.$$

**Chứng minh:** $y^0$ là một nghiệm của hệ $Ax = \beta$ nếu và chỉ nếu $y^0 - x^0$ là một nghiệm của hệ $Ax = 0$, tức là nếu và chỉ nếu $y^0 - x^0 \in L$. Bao hàm thức cuối cùng tương đương với $y^0 \in x^0 + L$. □

**Định nghĩa 9.3** Với các giả thiết của định lý trên, $x^0$ được gọi là một nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất $Ax = \beta$. Còn $x^0 + \alpha$, với $\alpha \in L$, được gọi là nghiệm tổng quát của hệ phương trình đó.

**Định lý 9.4** (Tiêu chuẩn Kronecker - Capelli). *Hệ phương trình tuyến tính $Ax = \beta$ có nghiệm khi và chỉ khi* $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\overline{A}$, *trong đó*

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

*là ma trận các hệ số mở rộng của hệ.*

**Chứng minh:** Gọi $\alpha_j$ là véctơ cột thứ $j$ của $A$, còn $\beta$ là véctơ cột tự do (tức là cột cuối cùng của $\overline{A}$. Ta có

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(\alpha_1, ..., \alpha_n) \leq \mathrm{rank}(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta) = \mathrm{rank}\overline{A}.$$

Dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu $\beta$ biểu thị tuyến tính qua các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Gọi $x_1^0, ..., x_n^0$ là các hệ số của biểu thị đó, tức là

$$\beta = x_1^0\alpha_1 + \cdots + x_n^0\alpha_n.$$

Hệ thức này tương đương với việc $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)^t$ là một nghiệm của hệ phương trình $Ax = \beta$. □

## Bài tập

Thực hiện các phép nhân sau đây, viết các phép thế thu được thành tích của những xích rời rạc và tính dấu của chúng.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $(1,2)(2,3)\cdots(n,n-1)$.

4. $(1,2,3)(2,3,4)(3,4,5)\cdots(n-2,n-1,n)$.

5. Cho hai cách sắp thành dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ của $n$ số tự nhiên đầu tiên. Chứng minh rằng có thể đưa cách sắp này về cách sắp kia bằng cách sử dụng không quá $n-1$ phép thế sơ cấp.

6. Với giả thiết như bài trên, chứng minh rằng có thể đưa cách sắp này về cách sắp kia bằng cách sử dụng không quá $n(n-1)/2$ phép chuyển vị trí của hai phần tử đứng kề nhau.

7. Cho ví dụ về một cách sắp $n$ số tự nhiên đầu tiên thành dãy sao cho dãy này không thể đưa về dãy sắp tự nhiên bằng cách dùng ít hơn $n-1$ phép thế sơ cấp.

8. Biết số nghịch thế của dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ bằng $k$. Hãy tìm số nghịch thế của dãy $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$.

9. Tính các định thức sau đây

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \qquad (b) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

10. Tính các định thức sau đây bằng cách *đưa về dạng tam giác*:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$(b)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}, \qquad (c)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

11. Tính định thức của ma trận vuông cấp $n$ với phần tử nằm ở hàng $i$ cột $j$ bằng $|i-j|$.

12. Tính các định thức sau đây bằng *phương pháp rút ra các nhân tử tuyến tính*:

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}, \qquad (b)\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

13. Tính các định thức sau đây bằng cách *sử dụng các quan hệ hồi qui*:

$$(a)\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}, \qquad (b)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

14. Tính các định thức sau đây bằng cách *biểu diễn chúng thành tổng của các định thức nào đó*:

$$(a)\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}, \qquad (b)\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Tính các định thức sau đây:

15. $$\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

16. $$(a)\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}, \qquad (b)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

17. $$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}.$$

18. $$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ . & . & \dots & . \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

19.
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \dots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \dots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}.$$

20.
$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ . & . & \dots & . \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

21. Dãy Fibonacci là dãy số bắt đầu với các số hạng $1, 2$ và mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ ba, đều bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó. Chứng minh rằng số hạng thứ $n$ của dãy Fibonacci bằng định thức cấp $n$ sau đây:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

22.
$$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \dots & (a_2+b_n)^{-1} \\ . & . & \dots & . \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}.$$

23. Tính định thức sau đây bằng cách viết nó thành tích của hai định thức:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} & x^2 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

trong đó $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.

24. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ . & . & . & \ldots & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n),$$

trong đó $f(X) = a_1 + a_2X + \cdots + a_nX^{n-1}$ và $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ là các căn bậc $n$ khác nhau của 1.

25. Dùng khai triển Laplace chứng minh rằng nếu một định thức cấp $n$ có các phần tử nằm trên giao của $k$ hàng và $\ell$ cột xác định nào đó đều bằng 0, trong đó $k + \ell > n$, thì định thức đó bằng 0.

26. Giải hệ phương trình sau đây bằng phương pháp Cramer và phương pháp khử:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 &= 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 &= 0. \end{aligned}$$

27. Chứng minh rằng một đa thức bậc $n$ trong $\mathbf{K}[X]$ được hoàn toàn xác định bởi giá trị của nó tại $(n+1)$ điểm khác nhau của trường $\mathbf{K}$. Tìm ví dụ về hai đa thức khác nhau cùng bậc $n$ nhận các giá trị bằng nhau tại mọi điểm của $\mathbf{K}$, nếu số phần tử của $\mathbf{K}$ không vượt quá $n$.

Giải các hệ phương trình sau đây bằng phương pháp thích hợp:

28.
$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= p,\\ -bx + ay + dz - ct &= q,\\ -cx - dy + az + bt &= r,\\ -dx + cy - bz + at &= s. \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} x_n + a_1 x_{n-1} + a_1^2 a_{n-2} + \cdots + a_1^{n-1} x_1 + a_1^n &= 0,\\ x_n + a_2 x_{n-1} + a_2^2 a_{n-2} + \cdots + a_2^{n-1} x_1 + a_2^n &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\ .\ \ .\\ x_n + a_n x_{n-1} + a_n^2 a_{n-2} + \cdots + a_n^{n-1} x_1 + a_n^n &= 0. \end{aligned}$$

30. Đặt $s_n(k) = 1^n + 2^n + \cdots + (k-1)^n$. Hãy thiết lập phương trình

$$k^n = 1 + C_n^{n-1} s_{n-1}(k) + \cdots + C_n^1 s_1(k) + s_0(k)$$

và chứng minh rằng

$$s_{n-1}(k) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \ldots & C_n^1 & 1\\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \ldots & C_{n-1}^1 & 1\\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \ldots & C_{n-2}^1 & 1\\ . & . & . & \ldots & . & .\\ k^2 & 0 & 0 & \ldots & C_2^1 & 1\\ k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

31. Xét khai triển $\frac{x}{e^x-1} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$. Ta đặt $b_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}$, trong đó $B_n$ được gọi là số Bernoulli thứ $n$. Chứng minh rằng

$$B_n = (-1)^{n-1}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0\\ . & . & . & . & \ldots & .\\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix},$$

và chỉ ra rằng

$$b_{2n-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0$$

với mọi $n > 1$.

32. Diễn đạt hệ số $a_n$ trong khai triển

$$e^{-x} = 1 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots,$$

như một định thức cấp $n$, từ đó tính định thức thu được.

33. Không dùng ma trận, hãy chứng minh trực tiếp rằng $\det(f^*) = \det(f)$, trong đó $f^*$ là đồng cấu đối ngẫu của $f$, với mọt tự đồng cấu $f : V \to V$.

34. Tính hạng của các ma trận sau đây bằng phương pháp biến đổi sơ cấp và phương pháp dùng định thức con:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

35. Tìm giá trị của $\lambda$ sao cho ma trận sau đây có hạng thấp nhất

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

36. Tìm hạng của ma trận sau đây như một hàm phụ thuộc $\lambda$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

37. Chứng minh rằng nếu hạng của một ma trận bằng $r$ thì mỗi định thức con nằm trên giao của bất kỳ $r$ hàng độc lập tuyến tính và $r$ cột độc lập tuyến tính của ma trận đó đều khác 0.

38. Cho $A$ là một ma trận vuông cấp $n > 1$ và $\tilde{A}$ là ma trận phụ hợp (gồm những phần bù đại số của các phần tử) của $A$. Hãy xác định rank$\tilde{A}$ như một hàm của rank$A$.

39. Chứng minh rằng nếu các véctơ

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \in \mathbf{R}_n \quad (i = 1, 2, ..., s;\ s \leq n),$$

thoả mãn điều kiện $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, thì chúng độc lập tuyến tính.

40. Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các ma trận cùng số hàng và số cột thì

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

41. Chứng minh rằng mỗi ma trận có hạng $r$ có thể viết thành tổng của $r$ ma trận có hạng 1, nhưng không thể viết thành tổng của một số ít hơn $r$ ma trận có hạng 1.

42. Chứng minh bất đẳng thức Sylvester cho các ma trận vuông cấp $n$ bất kỳ $A$ và $B$:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

43. Chứng minh rằng nếu $A$ là một ma trận vuông cấp $n$ sao cho $A^2 = E$, thì $\text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - E) = n$.

44. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây bằng phương pháp định thức và phương pháp biến đổi sơ cấp:

$$(a)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad (b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Nghiên cứu tính tương thích của các hệ phương trình sau, tìm một nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của chúng:

45.
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + 4t &= 2, \\ 6x - 4y + 4z + 3t &= 3, \\ 9x - 6y + 3z + 2t &= 4. \end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned} 8x + 6y + 5z + 2t &= 21, \\ 3x + 3y + 2z + t &= 10, \\ 4x + 2y + 3z + t &= 8, \\ 3x + 5y + z + t &= 15, \\ 7x + 4y + 5z + 2t &= 18. \end{aligned}$$

# Chương IV
# CẤU TRÚC CỦA TỰ ĐỒNG CẤU

Mục đích của chương này là tìm cho mỗi tự đồng cấu (trong trường hợp có thể được) một cơ sở của không gian, sao cho trong cơ sở đó tự đồng cấu có ma trận đơn giản, cụ thể là càng gần ma trận chéo càng tốt.

## 1 Véctơ riêng và giá trị riêng

Giả sử $V$ là một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$, và $f : V \to V$ là một tự đồng cấu của $V$. Việc nghiên cứu $f$ trên toàn không gian $V$ đôi khi gặp khó khăn, vì $V$ quá lớn. Người ta muốn tránh điều đó bằng cách hạn chế $f$ lên một số không gian con nào đó $U$ của $V$. Nhưng để cho hạn chế đó vẫn còn là một tự đồng cấu của $U$ thì không gian con này phải có tính chất đặc biệt nói trong định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 1.1** Không gian véctơ con $U$ của $V$ được gọi là một *không gian con ổn định đối với $f$* (hay một *không gian con $f$-ổn định*) nếu $f(U) \subset U$.

Đôi khi người ta cũng nói cho gọn rằng $U$ là một không gian con ổn định, nếu $f$ đã rõ.

Một số tài liệu dùng thuật ngữ *không gian con bất biến* trong trường hợp này. Chúng tôi cho rằng thuật ngữ không gian con ổn định chính xác hơn. Còn thuật ngữ *không gian con bất biến đối với $f$* dùng để chỉ không gian con sau đây:

$$V^f := \{v \in V | f(v) = v\}.$$

Đối với tự đồng cấu $f : V \to V$ bất kỳ, các không gian con sau đây đều là $f$-ổn định: $\{0\}, V, Ker f, Im f$.

Nếu may mắn có các không gian con $f$-ổn định $U_1$ và $U_2$ sao cho $V = U_1 \oplus U_2$, thì $f_1 = f|_{U_1}$ và $f_2 = f|_{U_2}$ đều là các tự đồng cấu. Mỗi véctơ $v \in V$ có thể viết duy nhất dưới dạng $v = u_1 + u_2$, trong đó $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, và

$$f(v) = f(u_1) + f(u_2).$$

Khi đó việc nghiên cứu tự đồng cấu $f$ trên $V$ có thể qui về việc nghiên cứu các tự đồng cấu $f_i$ của $U_i$ $(i = 1, 2)$. Nói rõ hơn, nếu $f_1$ có ma trận $A$ trong cơ sở $(e_1, ..., e_m)$ của $U_1$, và $f_2$ có ma trận $B$ trong cơ sở $(e_{m+1}, ..., e_n)$ của $U_2$, thì $f$ có ma trận

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

trong cơ sở $(e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n)$ của $V$. Như thế,

$$\det f = \det f_1 \cdot \det f_2.$$

Nói riêng, $f$ là một đẳng cấu tuyến tính nếu và chỉ nếu $f_1$ và $f_2$ cùng là các đẳng cấu tuyến tính.

Tuy vậy, một không gian con ổn định nói chung không có phần bù tuyến tính cũng là một không gian con ổn định. Sau đây là một ví dụ.

Giả sử $V$ là một không gian véctơ 2 chiều trên $\mathbf{K}$ với một cơ sở gồm hai véctơ $\alpha$ và $\beta$. Tự đồng cấu $f : V \to V$ được xác định bởi $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = \alpha$. Khi đó $U = \mathcal{L}(\alpha)$ là không gian con $f$-ổn định một chiều duy nhất của $V$. Độc giả hãy tự chứng minh điều này xem như một bài tập.

Một câu hỏi được đặt ra là làm thế nào để tìm các không gian con ổn định đối với một tự đồng cấu đã cho? Đáng tiếc là không có một phương pháp chung nào để làm điều đó trong trường hợp tổng quát.

Sau đây ta sẽ xét một trường hợp riêng đặc biệt thú vị, có nhiều ứng dụng trong Vật lý và Cơ học. Đó là trường hợp các không gian con ổn định một chiều.

Giả sử $L$ là một không gian con $f$-ổn định một chiều. Giả sử $\alpha \in L$ là một véctơ khác 0. Khi đó $(\alpha)$ là một cơ sở của $L$. Vì $f(L) \subset L$, cho nên có một vô hướng $\lambda \in \mathbf{K}$ sao cho

$$f(\alpha) = \lambda\alpha.$$

Ngược lại, nếu có một véctơ $\alpha \neq 0$ và một vô hướng $\lambda \in \mathbf{K}$ sao cho $f(\alpha) = \lambda\alpha$, thì $L = \mathcal{L}(\alpha)$ là một không gian con $f$-ổn định một chiều. Ta đi tới định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 1.2** Giả sử $f$ là một tự đồng cấu của $\mathbf{K}$-không gian véctơ $V$. Nếu có véctơ $\alpha \neq 0$ và vô hướng $\lambda \in \mathbf{K}$ sao cho $f(\alpha) = \lambda\alpha$, thì $\lambda$ được gọi là một *giá trị riêng* của $f$ còn $\alpha$ được gọi là một *véctơ riêng* của $f$ ứng với giá trị riêng $\lambda$.

Như vậy việc tìm các không gian con ổn định một chiều tương đương với việc tìm các véctơ riêng.

Nhận xét rằng các véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng $\lambda$ cùng với véctơ 0 lập nên không gian véctơ con $Ker(f - \lambda id_V)$.

**Định nghĩa 1.3** Giả sử $\lambda$ là một giá trị riêng của tự đồng cấu $f : V \to V$. Không gian véctơ $Ker(f - \lambda id_V)$ gồm véctơ 0 và tất cả các véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng $\lambda$ được gọi là *không gian con riêng của $f$ ứng với giá trị riêng $\lambda$* .

Vấn đề đặt ra là làm thế nào để tìm các véctơ riêng và các giá trị riêng của một tự đồng cấu?

Nhận xét rằng $\lambda$ là một giá trị riêng của $f$ nếu và chỉ nếu $Ker(f - \lambda id_V) \neq \{0\}$. Điều này tương đương với $\det(f - \lambda id_V) = 0$. Nói cách khác, $\lambda$ là một nghiệm của đa thức $\det(f - Xid_V)$ với ẩn $X$.

Vì sao ta có thể khẳng định $\det(f - Xid_V)$ là một đa thức của $X$? Giả sử số chiều của $V$ bằng $n$, và $f$ có ma trận là $A$ trong một cơ sở nào đó $(e_1, ..., e_n)$ của $V$. Khi đó đồng cấu $(f - Xid_V)$ có ma trận là $(A - XE_n)$ trong cơ sở nói trên. Vì thế

$$\det(f - Xid_V) = \det(A - XE_n).$$

Nếu $A = (a_{ij})_{n\times n}$, thì

$$\det(A - XE_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$$

rõ ràng là một đa thức bậc $n$ của ẩn $X$.

**Định nghĩa 1.4** Đa thức bậc $n$ của một ẩn $X$ với hệ số trong $\mathbf{K}$

$$P_f(X) = \det(f - Xid_V)$$

được gọi là *đa thức đặc trưng* của tự đồng cấu $f$.

Đa thức bậc $n$ của một ẩn $X$ với hệ số trong $\mathbf{K}$

$$P_A(X) = \det(A - XE_n)$$

được gọi là *đa thức đặc trưng* của ma trận $A$. Nghiệm của đa thức này được gọi là *giá trị riêng* của $A$.

Những lập luận ở trên đã chứng minh mệnh đề sau đây:

**Mệnh đề 1.5** *Vô hướng $\lambda \in \mathbf{K}$ là một giá trị riêng của tự đồng cấu $f : V \to V$ nếu và chỉ nếu $\lambda$ là một nghiệm của đa thức đặc trưng* $\det(f - Xid_V) = \det(A - XE_n)$ *của $f$.* □

Trong thực hành, để tìm giá trị riêng và véctơ riêng của một tự đồng cấu $f$ người ta làm như sau:

Bước 1: Tìm ma trận $A$ của $f$ trong một cơ sở tuỳ ý $(e_1, ..., e_n)$ của $V$.

Bước 2: Tính đa thức đặc trưng $\det(A - XE_n)$.

Bước 3: Giải phương trình đa thức bậc $n$ đối với ẩn $X$:

$$\det(A - XE_n) = 0.$$

Bước 4: Giả sử $\lambda$ là một nghiệm của phương trình đó. Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất suy biến

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0. \end{cases}$$

Giả sử $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)^t$ là một nghiệm không tầm thường của hệ này. Khi đó, $\alpha = x_1^0 e_1 + \cdots + x_n^0 e_n$ là một véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng $\lambda$.

**Ví dụ:** Tự đồng cấu $f$ của không gian véctơ thực 3 chiều $V$ có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

trong cơ sở $(e_1, e_2, e_3)$. Hãy tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng của $f$.

**Lời giải:** Đa thức đặc trưng của $f$ là

$$\begin{vmatrix} 4-X & -5 & 2 \\ 5 & -7-X & 3 \\ 6 & -9 & 4-X \end{vmatrix} = -X^2(X-1).$$

Vậy $f$ có các giá trị riêng là $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$.

Với $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 5y + 2z & = & 0 \\ 5x - 7y + 3z & = & 0 \\ 6x - 9y + 4z & = & 0 \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường $x = a, y = 2a, z = 3a$ trong đó $a \neq 0$. Vậy $a(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$ với $a \neq 0$ là véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng bằng 0.

Với $\lambda_3 = 1$, hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2z &= 0 \\ 5x - 8y + 3z &= 0 \\ 6x - 9y + 3z &= 0 \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường $x = a, y = a, z = a$ trong đó $a \neq 0$. Vậy $a(e_1+e_2+e_3)$ với $a \neq 0$ là véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng bằng 1.

Trong thuật toán 4 bước để tìm véctơ riêng và giá trị riêng nói trên, bước 3 là khó hơn cả. Nói chung, ta không biết phương trình $\det(A - XE_n) = 0$ có nghiệm hay không, và nếu có thì tìm bằng cách nào.

**Mệnh đề 1.6** *Giả sử $U$ là một không gian véctơ con ổn định đối với tự đồng cấu $f : V \to V$. Gọi $\bar{f} : V/U \to V/U$, $\bar{f}[\alpha] = [f(\alpha)]$ là đồng cấu cảm sinh bởi $f$. Khi đó, đa thức đặc trưng của $f$ bằng tích các đa thức đặc trưng của $f|_U$ và của $\bar{f}$.*

**Chứng minh:** Chọn một cơ sở bất kỳ $(e_1, ..., e_m)$ của $U$ rồi bổ sung nó để nhận được một cơ sở $(e_1, ..., e_m, ..., e_n)$ của $V$. Vì $U$ là một không gian con ổn định đối với $f$ cho nên ma trận của $f$ trong cơ sở nói trên có dạng

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right),$$

trong đó $B$ là ma trận của $f|_U$ trong cơ sở $(e_1, ..., e_m)$. Vì $[e_1] = \cdots = [e_m] = 0$ trong $V/U$ cho nên $D$ chính là ma trận của $\bar{f}$ trong cơ sở $([e_{m+1}], ..., [e_n])$. Rõ ràng

$$\det(A - XE_n) = \det(B - XE_m)\det(D - XE_{n-m}).$$

Nói cách khác, ta có

$$P_f(X) = P_{f|_U}(X)P_{\bar{f}}(X).$$

$\square$

## 2 Không gian con ổn định của các tự đồng cấu thực và phức

Trong tiết này, ta sẽ xét hai trường hợp đặc biệt, trong đó **K** là trường số thực hay trường số phức, để có thêm những thông tin bổ sung về nghiệm của các đa thức với hệ số trong những trường ấy.

Vì mọi đa thức hệ số phức đều có nghiệm phức, nên ta có định lý sau đây.

**Định lý 2.1** *Mỗi tự đồng cấu của một không gian véctơ phức đều có ít nhất một giá trị riêng, và do đó có ít nhất một không gian con ổn định một chiều.*

**Chứng minh:** Giả sử tự đồng cấu $f : V \to V$ của không gian véctơ phức $V$ có ma trận là $A$ trong một cơ sở nào đó $(e_1, ..., e_n)$ của $V$. Vì **C** là một trường đóng đại số nên phương trình đa thức với hệ số phức $P_f(X) = \det(A - XE_n) = 0$ có ít nhất một nghiệm phức, ký hiệu là $\lambda$. Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A - \lambda E_n)x = 0$, trong đó $x$ là một ẩn véctơ cột gồm $n$ thành phần phức. Vì $\det(A - \lambda E_n) = 0$ nên hệ nói trên có nghiệm không tầm thường $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)^t \in \mathbf{C}^n$. Khi đó $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i^0 e_i$ là một véctơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$. □

Các đa thức hệ số thực có thể không có nghiệm thực, nhưng luôn luôn có nghiệm phức. Điều đó là cơ sở của định lý sau đây.

**Định lý 2.2** *Mỗi tự đồng cấu của một không gian véctơ thực đều có ít nhất một không gian con ổn định một hoặc hai chiều.*

**Chứng minh:** Giả sử $V$ là một không gian véctơ thực, và tự đồng cấu $f : V \to V$ có ma trận là $A = (a_{kj})$ trong một cơ sở nào đó $(e_1, ..., e_n)$ của $V$. Khi đó đa thức đặc trưng $P_f(X) = \det(A - XE_n)$ là một đa thức với hệ số thực.

Nếu phương trình $\det(A - XE_n) = 0$ có một nghiệm thực thì $f$ có véctơ riêng, do đó nó có không gian con ổn định một chiều.

Trái lại, giả sử phương trình $\det(A - XE_n) = 0$ không có nghiệm thực. Gọi $\lambda = a + ib$ là một nghiệm phức không thực của nó, ở đây $i$ là đơn vị ảo, $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$. Ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất suy biến hệ số phức

$$(A - \lambda E_n)z = 0,$$

trong đó $z$ là một ẩn véctơ cột gồm $n$ thành phần. Gọi $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0)^t \in \mathbf{C}^n$ là một nghiệm không tầm thường của hệ đó. Giả sử $z_j^0 = x_j^0 + iy_j^0$, $(j = 1, 2, ..., n)$. Ta có

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j=1}^n a_{kj} z_j^0 = \lambda z_k^0 \\ \iff \quad & \textstyle\sum_{j=1}^n a_{kj}(x_j^0 + iy_j^0) = \lambda(x_k^0 + iy_k^0) \quad (k = 1, ..., n) \end{aligned}$$

$$\iff \quad \begin{cases} \sum_j a_{kj} x_j^0 & = & a x_k^0 - b y_k^0 \\ \sum_j a_{kj} y_j^0 & = & b x_k^0 + a y_k^0 \,. \end{cases}$$

Đặt $\alpha = \sum_{j=1}^n x_j^0 e_j,\ \beta = \sum_{j=1}^n y_j^0 e_j \in V$. Các hệ thức trên tương đương với

$$\begin{cases} f(\alpha) & = & a\alpha - b\beta \\ f(\beta) & = & b\alpha + a\beta \,. \end{cases}$$

Nghĩa là $L = \mathcal{L}(\alpha, \beta)$ là một không gian con ổn định của $f$. Ta khẳng định rằng $\dim \mathcal{L}(\alpha, \beta) = 2$. Giả sử trái lại $\dim \mathcal{L}(\alpha, \beta) \neq 2$. Vì $z^0 \neq 0$, cho nên hoặc $\alpha \neq 0$ hoặc $\beta \neq 0$. Do đó $\dim \mathcal{L}(\alpha, \beta) = 1$. Như thế $L$ là một không gian con $f$-ổn định một chiều, nói cách khác $f$ có một giá trị riêng thực. Điều này mâu thuẫn với giả thiết phương trình đặc trưng $\det(A - XE_n) = 0$ không có nghiệm thực. $\square$

**Mệnh đề 2.3** *Mỗi tự đồng cấu của một không gian véctơ thực số chiều lẻ đều có ít nhất một không gian con ổn định một chiều.*

**Chứng minh:** Nếu không gian véctơ $V$ có số chiều $n$ lẻ, thì đa thức đặc trưng $P_f(X)$ của mỗi tự đồng cấu $f$ cũng có bậc lẻ, cụ thể là bằng $n$. Do đó đa thức này có ít nhất một nghiệm thực. Thật vậy, giả sử trái lại $P_f(X)$ không có một nghiệm thực nào. Nhận xét rằng nếu $z = a + ib$ là một nghiệm của $P_f(X)$ thì liên hợp phức của nó $\bar{z} = a - ib$ cũng vậy. Hai nghiệm này phân biệt, vì $z$ không là một số thực. Như vậy, $n$ nghiệm phức của $P_f(X)$ được ghép thành từng cặp liên hợp với nhau. Vì thế $n$ là một số chẵn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Ta đã chứng minh đa thức đặc trưng $P_f(X)$ có ít nhất một nghiệm thực. Vậy $f$ có ít nhất một giá trị riêng thực. Do đó, nó có ít nhất một không gian con ổn định một chiều. □

**Ví dụ:** Phép quay mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ xung quanh gốc tọa độ một góc $\varphi$ có ma trận trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của phép quay này là

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - X & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - X \end{vmatrix} = (\cos\varphi - X)^2 + \sin^2\varphi = X^2 - 2\cos\varphi X + 1.$$

Biệt thức $\Delta' = \cos^2\varphi - 1 = -\sin^2\varphi < 0$ nếu $\varphi \neq k\pi$. Vì thế, phép quay mặt phẳng $\mathbf{R}^2$ xung quanh gốc tọa độ một góc $\varphi$ không có véctơ riêng nếu $\varphi \neq k\pi$.

Tuy nhiên, nếu ta xét tự đồng cấu $f$ của $\mathbf{C}^2$ cũng có ma trận là $A$ trong cơ sở chính tắc, thì đa thức đặc trưng của $f$ cũng là đa thức nói trên. Vậy $f$ có hai giá trị riêng phức là $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Dễ thấy rằng $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ là các véctơ riêng của $f$ ứng với các giá trị riêng nói trên.

## 3 Tự đồng cấu chéo hoá được

Chúng ta vẫn giả sử $V$ là một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 3.1** Tự đồng cấu $f$ của không gian véctơ $V$ được gọi là *chéo hoá được* nếu có một cơ sở của $V$ gồm toàn những véctơ riêng của $f$. Nói cách khác, $f$ chéo hoá được nếu ma trận của nó trong một cơ sở nào đó của $V$ là một ma trận chéo.

Gọi $A \in M(n \times n, \mathbf{K})$ là ma trận của $f$ trong một cơ sở bất kỳ của $V$. Từ định nghĩa ta suy ngay ra rằng $f$ là chéo hoá được nếu và chỉ nếu có một ma trận khả nghịch $C \in M(n \times n, \mathbf{K})$ sao cho $C^{-1}AC$ là một ma trận chéo. Nói cách khác, $f$ là chéo hoá được nếu và chỉ nếu $A$ đồng dạng (trên $\mathbf{K}$) với một ma trận chéo.

**Định nghĩa 3.2** Ma trận $A \in M(n \times n, \mathbf{K})$ đồng dạng (trên $\mathbf{K}$) với một ma trận chéo được gọi là *chéo hoá được* (trên $\mathbf{K}$).

Theo định nghĩa, $A$ chéo hoá được nếu và chỉ nếu mọi ma trận đồng dạng với nó cũng chéo hoá được.

Việc tìm một cơ sở (nếu có) của $V$ gồm toàn những véctơ riêng của $f$ được gọi là việc *chéo hoá tự đồng cấu $f$*.

Việc tìm một ma trận khả nghịch $C$ (nếu có) sao cho $C^{-1}AC$ là một ma trận chéo được gọi là việc *chéo hoá ma trận $A$*.

Định lý sau đây sẽ cho một điều kiện đủ cho sự chéo hoá.

**Định lý 3.3** *Giả sử $\alpha_1, ..., \alpha_k$ là các véctơ riêng của tự đồng cấu $f : V \to V$ ứng với những giá trị riêng đôi một khác nhau $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Khi đó, các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ độc lập tuyến tính.*

**Chứng minh:** Định lý được chứng minh bằng quy nạp theo $k$.

Với $k = 1$, véctơ riêng $\alpha_1 \neq 0$, nên hệ chỉ gồm một véctơ $\alpha_1$ độc lập tuyến tính. Giả sử quy nạp rằng định lý đã được chứng minh cho hệ gồm $k-1$ véctơ. Bây giờ ta giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_k\alpha_k = 0,$$

trong đó $a_1, ..., a_k \in \mathbf{K}$. Tác động $f$ vào hai vế của đẳng thức trên, ta nhận được

$$a_1 f(\alpha_1) + \cdots + a_k f(\alpha_k) = a_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + a_k\lambda_k\alpha_k = 0.$$

Nhân đẳng thức thứ nhất với $\lambda_k$ rồi trừ vào đẳng thức thứ hai, ta có

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} = 0.$$

Theo giả thiết quy nạp, các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ độc lập tuyến tính, cho nên

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \cdots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Từ đó, do $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ $(i = 1, ..., k-1)$, nên

$$a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0.$$

Thay các giá trị đó vào đẳng thức đầu tiên, ta thu được $a_k\alpha_k = 0$. Vì véctơ riêng $\alpha_k \neq 0$, nên $a_k = 0$.

Tóm lại $a_1 = \cdots = a_{k-1} = a_k = 0$. Điều này chứng tỏ hệ véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ là một hệ độc lập tuyến tính. $\square$

**Hệ quả 3.4** *Giả sử $V_1, ..., V_k$ là các không gian con riêng của tự đồng cấu $f : V \to V$ ứng với những giá trị riêng đôi một khác nhau $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Khi đó, tổng $V_1 + \cdots + V_k$ là một tổng trực tiếp.*

**Chứng minh:** Theo định lý trên

$$V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\},$$

với mọi $i = 1, ..., k$. Vậy, tổng $V_1 + \cdots + V_k$ là một tổng trực tiếp. $\square$

**Hệ quả 3.5** *(i) Nếu $\dim V = n$ và tự đồng cấu $f : V \to V$ có $n$ giá trị riêng đôi một khác nhau, thì $f$ chéo hoá được.*

*(ii) Nếu ma trận $A \in M(n \times n, \mathbf{K})$ có $n$ giá trị riêng đôi một khác nhau trong $\mathbf{K}$, thì $A$ chéo hoá được trên $\mathbf{K}$.*

**Chứng minh:** Gọi $\alpha_1, ..., \alpha_n$ là hệ gồm $n$ véctơ riêng ứng với $n$ giá trị riêng đôi một khác nhau của $f$. Theo định lý trên, đó là một hệ độc lập tuyến tính. Vì $\dim V$ đúng bằng số véctơ của hệ, cho nên hệ này lập nên một cơ sở của $V$. Như vậy $f$ và ma trận của nó trong cơ sở bất kỳ của $V$ chéo hoá được. $\square$

**Nhận xét:** Hệ quả nói trên chỉ nêu một điều kiện đủ, mà *không phải là điều kiện cần* cho sự chéo hoá. Thật vậy, tự đồng cấu $f = id_V$ có giá trị riêng $\lambda = 1$ với bội $n$, nhưng $id_V$ đương nhiên chéo hoá được.

Định lý sau đây là một thái cực khác của điều kiện đủ cho sự chéo hoá. Nó chỉ ra rằng mọi phép chiếu lên một không gian con nào đó đều chéo hoá được, mặc dù các phép chiếu này chỉ có thể có các giá trị riêng bằng 0 hoặc 1, thường là với bội rất lớn. Định lý này cũng đồng thời cho một tiêu chuẩn để nhận biết các phép chiếu.

**Định lý 3.6** *Giả sử tự đồng cấu $f : V \to V$ có tính chất $f^2 = f$. Khi đó $f$ chéo hoá được.*

**Chứng minh:** Đặt $U = Imf$ và $W = Kerf$. Ta sẽ chứng minh rằng $V = U \oplus W$ và $f = pr_U$ là phép chiếu từ $V$ lên $U$ theo phương $W$ . Trước hết, nhắc lại rằng $U$ và $W$ là các không gian con $f$-ổn định. Giả sử $\alpha \in U \cap W$. Vì $\alpha \in W$, nên $f(\alpha) = 0$. Mặt khác $\alpha \in U = Imf$, nên $\alpha = f(\beta)$ với $\beta$ nào đó thuộc $V$. Ta có $f(\alpha) = f(f(\beta)) = f^2(\beta) = f(\beta) = \alpha$. Kết hợp hai sự kiện trên, ta có $\alpha = f(\alpha) = 0$. Vậy $U \cap W = \{0\}$.

Mỗi véctơ $\gamma \in V$ đều có thể phân tích

$$\gamma = f(\gamma) + (\gamma - f(\gamma)),$$

trong đó $f(\gamma) \in U$ và $\gamma - f(\gamma) \in W$. Thậy vậy,

$$f(\gamma - f(\gamma)) = f(\gamma) - f^2(\gamma) = f(\gamma) - f(\gamma) = 0.$$

Tóm lại, ta đã chứng minh rằng $V = U \oplus W$.

Giả sử $(e_1, ..., e_m)$ là một cơ sở của $U$, (ở đây $m = 0$ nếu $U = \{0\}$). Trong phần trên ta đã chỉ ra rằng $f|_U = id_U$. Vì thế các véctơ $e_1, ..., e_m$ đều là véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng bằng 1.

Giả sử $(e_{m+1}, ..., e_n)$ là một cơ sở của $W$, (ở đây $n - m = 0$ nếu $W = \{0\}$). Vì $W = Kerf$, nên các véctơ $e_{m+1}, ..., e_n$ đều là véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng bằng 0.

Bởi vì $V = U \oplus W$, cho nên $(e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n)$ là một cơ sở của $V$ gồm toàn những véctơ riêng của $f$. Điều này có nghĩa là $f$ chéo hoá được. □

Định lý sau đây đưa ra điều kiện cần và đủ cho sự chéo hoá.

**Định lý 3.7** *Tự đồng cấu $f$ của $\mathbf{K}$-không gian véctơ $n$ chiều $V$ chéo hoá được nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau đây được thoả mãn:*

*(i) Đa thức đặc trưng của $f$ có đủ nghiệm trong trường $\mathbf{K}$:*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_m)^{s_m},$$

*trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_m$ là các vô hướng đôi một khác nhau trong $\mathbf{K}$.*

*(ii)* $\mathrm{rank}(f - \lambda_i id_V) = n - s_i$ *(với $i = 1, ..., m$).*

**Chứng minh:** Giả sử $f$ chéo hoá được. Cụ thể hơn, giả sử ma trận của $f$ trong một cơ sở nào đó của $V$ là một ma trận chéo $D$ với $s_1$ phần tử trên đường chéo bằng $\lambda_1$,..., $s_m$ phần tử trên đường chéo bằng $\lambda_m$, trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_m$ đôi một khác nhau, và $n = s_1 + \cdots + s_m$. Khi đó

$$\begin{aligned} P_f(X) = P_D(X) &= (\lambda_1 - X)^{s_1} \cdots (\lambda_m - X)^{s_m} \\ &= (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_m)^{s_m}. \end{aligned}$$

Nhận xét rằng ma trận $(D - \lambda_i E_n)$ là một ma trận chéo, với $s_i$ phần tử trên đường chéo bằng $\lambda_i - \lambda_i = 0$, các phần tử còn lại bằng $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ (với $j \neq i$ nào đó). Vì thế

$$\mathrm{rank}(f - \lambda_i id_V) = \mathrm{rank}(D - \lambda_i E_n) = n - s_i,$$

với $i = 1, ..., m$.

Ngược lại, giả sử các điều kiện (i) và (ii) được thoả mãn. Xét không gian con riêng của $f$ ứng với giá trị riêng $\lambda_i$ : $V_i = Ker(f - \lambda_i id_V) \quad (i = 1, ..., m)$. Ta có

$$\dim V_i = \dim Ker(f - \lambda_i id_V) = n - \operatorname{rank}(f - \lambda_i id_V) = s_i.$$

Theo Hệ quả 3.4, tổng $V_1 + \cdots + V_m$ là một tổng trực tiếp, với số chiều bằng $s_1 + \cdots + s_m = n$. Vậy tổng đó bằng toàn bộ không gian $V$:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

Lấy một cơ sở bất kỳ $(e_{i1}, ..., e_{is_i})$ của $V_i$ (với $i = 1, ..., m$). Khi đó $(e_{11}, ..., e_{1s_1}, ..., e_{m1}, ..., e_{ms_m})$ là một cơ sở của $V$ gồm toàn những véctơ riêng của $f$. Như vậy $f$ chéo hoá được. □

# 4 Tự đồng cấu lũy linh

Không phải bất kỳ tự đồng cấu nào cũng chéo hoá được. Tuy thế, với những giả thiết nhẹ, người ta có thể đưa ma trận của một tự đồng cấu về một dạng rất gần với dạng chéo, được gọi là dạng chuẩn tắc Jordan. Đối với mỗi tự đồng cấu, dạng này được xác định duy nhất, sai kém thứ tự của các khối khác 0 trên đường chéo.

Cho $f : V \to V$ là một tự đồng cấu của $V$. Giả sử ta có phân tích $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, trong đó mỗi $V_i$ là một không gian con $f$-ổn định. Giả sử thêm rằng tự đồng cấu $f|_{V_i}$ có ma trận là $J_i$ trong cơ sở $(e_{i1}, ..., e_{is_i})$ của $V_i$. Khi đó, ma trận của $f$ trong cơ sở $(e_{11}, ..., e_{1s_1}, ..., e_{r1}, ..., e_{rs_r})$ của $V$ có dạng (đường) chéo khối sau đây, được gọi là *tổng trực tiếp của các ma trận* $J_1, ..., J_r$ :

$$J_1 \oplus \cdots \oplus J_r := \left( \begin{array}{ccccccc} J_1 & | & 0 & | & ... & & 0 \\ -- & . & -- & . & ... & & \\ 0 & | & J_2 & | & ... & & 0 \\ -- & . & -- & . & ... & & \\ . & . & . & & ... & & . \\ & & & & & . & -- \\ 0 & & 0 & & ... & | & J_r \end{array} \right).$$

Trong tiết này, chúng ta sẽ nghiên cứu một lớp các tự đồng cấu $f$ mà ma trận của nó trong một cơ sở nào đó có dạng chéo khối như trên, với các khối $J_i$ thật "đơn giản". Đó là lớp các tự đồng cấu luỹ linh.

**Định nghĩa 4.1** (i) Tự đồng cấu $\varphi$ của $\mathbf{K}$-không gian véctơ $V$ được gọi là *lũy linh* nếu có số nguyên dương $k$ sao cho $\varphi^k = 0$. Nếu thêm vào đó $\varphi^{k-1} \neq 0$, thì $k$ được gọi là *bậc lũy linh* của $\varphi$.

(ii) Cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ của $V$ được gọi là một *cơ sở xyclic* đối với $\varphi$ nếu $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_3, ..., \varphi(e_n) = 0$.

(iii) Không gian véctơ con $U$ của $V$ được gọi là một *không gian con xyclic* đối với $\varphi$ nếu $U$ có một cơ sở xyclic đối với $\varphi$.

Nhận xét rằng mỗi tự đồng cấu luỹ linh đều có giá trị riêng duy nhất bằng 0. Thật vậy, giả sử $\varphi$ có bậc luỹ linh bằng $k$. Theo định nghĩa, tồn tại véctơ $\alpha$ sao cho $\varphi^{k-1}(\alpha) \neq 0$ và $\varphi^k(\alpha) = 0$. Như thế $\beta = \varphi^{k-1}(\alpha)$ chính là một véctơ riêng của $\varphi$ ứng với giá trị riêng bằng 0. Ngược lại, giả sử $\alpha$ là một véctơ riêng của $\varphi$ ứng với giá trị riêng $\lambda$. Ta có $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$, do đó $\varphi^k(\alpha) = \lambda^k\alpha$. Vì $k$ là bậc luỹ linh của $\varphi$ nên $\varphi^k = 0$. Do đó $\lambda^k\alpha = 0$. Vì $\alpha$ là một véctơ riêng, nên $\alpha \neq 0$. Từ đó suy ra $\lambda = 0$.

Hơn nữa, $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở xyclic đối với $\varphi$ nếu và chỉ nếu ma trận của $\varphi$ trong cơ sở này có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Định lý 4.2** *Giả sử $\varphi$ là một tự đồng cấu lũy linh của không gian véctơ hữu hạn chiều $V$. Khi đó, $V$ phân tích được thành tổng trực tiếp của các không gian con xyclic đối với $\varphi$. Hơn nữa, với mỗi số nguyên dương $s$, số không gian con $s$ chiều xyclic đối với $\varphi$ trong mọi phân tích như thế là không đổi, và bằng*

$$\mathrm{rank}(\varphi^{s-1}) - 2\mathrm{rank}(\varphi^s) + \mathrm{rank}(\varphi^{s+1}).$$

**Chứng minh:** Gọi $k$ là bậc lũy linh của $\varphi$. Đặt $V_i = \varphi^{k-i}(V)$, ta thu được dãy không gian véctơ lồng nhau:

$$V = V_k \supset V_{k-1} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 = \{0\}.$$

Ta sẽ xây dựng các không gian véctơ con $V_i^j$ với $1 \le j \le i \le k$ có các tính chất sau đây:

(1) $\varphi|_{V_n^j} : V_n^j \xrightarrow{\cong} V_{n-1}^j \quad (n > 1, j = 1, 2, ..., n-1)$,

(2) $\mathrm{Ker}(\varphi|_{V_n}) = V_1^1 \oplus V_2^2 \oplus \cdots \oplus V_n^n \quad (1 \le n \le k)$,

(3) $V_n = \oplus_{1 \le j \le i \le n} V_i^j \quad (1 \le n \le k)$.

Ta đặt $V_1^1 = V_1$ và dễ dàng kiểm tra lại 3 tính chất trên với $n = 1$.

Giả sử đã xây dựng được các không gian $V_i^j$ với $1 \le j \le i < n$ thoả mãn các tính chất nói trên. Vì $\varphi|_{V_n} : V_n \to V_{n-1}$ là một toàn ánh, nên có thể chọn các không gian $V_n^1, ..., V_n^{n-1}$ sao cho

$$\varphi|_{V_n^j} : V_n^j \xrightarrow{\cong} V_{n-1}^j, \ (j = 1, ..., n-1).$$

Tiếp theo, ta chọn $V_n^n$ là một phần bù tuyến tính của $Ker(\varphi|_{V_{n-1}})$ trong $Ker(\varphi|_{V_n})$. Như vậy, ta có

$$\begin{aligned} Ker(\varphi|_{V_n}) &= Ker(\varphi|_{V_{n-1}}) \oplus V_n^n \\ &= V_1^1 \oplus V_2^2 \oplus \cdots \oplus V_n^n. \end{aligned}$$

Khi đó, có thể chứng minh đẳng thức sau bằng quy nạp theo $n$:

$$V_n = (\oplus_{j=1}^{n-1} V_n^j) \oplus (\oplus_{1 \le j < i < n} V_i^j) \oplus Ker(\varphi|_{V_n}).$$

Kết hợp hai đẳng thức ở trên ta thu được

$$V_n = \oplus_{1 \le j \le i \le n} V_i^j.$$

Như vậy họ không gian con $V_i^j$ với $1 \le j \le i \le k$ đã được xây dựng bằng quy nạp theo $i$.

Xét dãy các không gian véctơ

$$V_k^j \xrightarrow{\cong} V_{k-1}^j \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} V_{j+1}^j \xrightarrow{\cong} V_j^j \to 0,$$

trong đó các mũi tên đều chỉ các hạn chế của đồng cấu $\varphi$. Nhận xét rằng mỗi véctơ $e \neq 0$ trong $V_k^j$ được đặt tương ứng với một không gian con xyclic $(k-j+1)$ chiều đối với $\varphi$, với một cơ sở xyclic gồm các véctơ sau đây:

$$(e, \varphi(e), ..., \varphi^{k-j}(e)).$$

Như thế $V_k^j \oplus V_{k-1}^j \oplus \cdots \oplus V_j^j$ là tổng trực tiếp của một số hữu hạn không gian con xyclic $(k-j+1)$ chiều đối với $\varphi$. (Số không gian trong tổng này bằng $\dim V_k^j$.)

Do đó

$$V = V_k = \oplus_{j=1}^{k}(V_k^j \oplus V_{k-1}^j \oplus \cdots \oplus V_j^j)$$

là tổng trực tiếp của một số hữu hạn không gian con xyclic đối với $\varphi$.

Giả sử $V = \oplus_i W_i$ là một phân tích của $V$ thành tổng tực tiếp của các không gian con xyclic đối với $\varphi$. Vì mỗi $W_i$ đều là một không gian $\varphi$-ổn định, cho nên

$$\text{rank}(\varphi) = \sum_i \text{rank}(\varphi|_{W_i}).$$

Nếu $W_i$ là một không gian $m$ chiều xyclic đối với $\varphi$ thì dễ thấy rằng

$$\text{rank}(\varphi^s|_{W_i}) = \begin{cases} m - s & \text{nếu } s \leq m, \\ 0 & \text{nếu } s > m. \end{cases}$$

Từ đó

$$\text{rank}(\varphi^{s-1}|_{W_i}) - 2\text{rank}(\varphi^s|_{W_i}) + \text{rank}(\varphi^{s+1}|_{W_i}) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } s = m, \\ 0 & \text{nếu } s \neq m. \end{cases}$$

Vì thế, với mỗi số nguyên dương $s$,

$$\text{rank}(\varphi^{s-1}) - 2\text{rank}(\varphi^s) + \text{rank}(\varphi^{s+1})$$

chính là số không gian con $s$ chiều xyclic đối với $\varphi$ trong mọi phân tích của $V$. □

# 5 Ma trận chuẩn tắc Jordan của tự đồng cấu

Bây giờ ta giả sử $f : V \to V$ là một đồng cấu bất kỳ, không nhất thiết lũy linh. Với mỗi $\lambda \in \mathbf{K}$, ta xét tập

$$R_\lambda = \{\alpha \in V : \exists m = m(\alpha) \text{ sao cho } (f - \lambda id_V)^m(\alpha) = 0\}.$$

Đó là một không gian véctơ con, bởi vì nó là hợp của một dãy các không gian véctơ con lồng vào nhau

$$R_\lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} Ker(f - \lambda id_V)^m.$$

Vì $f$ giao hoán với $f - \lambda id_V$, cho nên $R_\lambda$ là một không gian con ổn định đối với $f$. Thật vậy, nếu $\alpha \in R_\lambda$ thì có $m > 0$ sao cho $(f - \lambda id_V)^m(\alpha) = 0$. Do đó

$$(f - \lambda id_V)^m f(\alpha) = f(f - \lambda id_V)^m(\alpha) = f(0) = 0.$$

Nhận xét rằng $R_\lambda \neq \{0\}$ nếu và chỉ nếu $\lambda$ là một giá trị riêng của $f$. Thật vậy, nếu $\lambda$ là một giá trị riêng của $f$, thì không gian con riêng $P_\lambda = Ker(f - \lambda id_V)$ là một không gian con của $R_\lambda$: $P_\lambda \subset R_\lambda$. Ngược lại, giả sử $\alpha \in R_\lambda \backslash \{0\}$, chọn $m$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $(f - \lambda id_V)^m(\alpha) = 0$. Khi đó $\beta = (f - \lambda id_V)^{m-1}(\alpha) \neq 0$ là một véctơ riêng của $f$ ứng với giá trị riêng $\lambda$, bởi vì $(f - \lambda id_V)(\beta) = 0$.

**Định nghĩa 5.1** Giả sử $\lambda$ là một giá trị riêng của $f$.

(a) $R_\lambda$ được gọi là *không gian con riêng suy rộng* ứng với giá trị riêng $\lambda$.

(b) $\dim P_\lambda$ và $\dim R_\lambda$ được gọi tương ứng là *số chiều hình học* và *số chiều đại số* của giá trị riêng $\lambda$.

Mệnh đề sau đây giải thích một phần ý nghĩa của những thuật ngữ này.

**Mệnh đề 5.2** *Nếu $\lambda$ là một giá trị riêng của tự đồng cấu $f : V \to V$ thì $\dim R_\lambda$ bằng bội của $\lambda$ xem như nghiệm của đa thức đặc trưng của $f$.*

**Chứng minh:** Theo định nghĩa của không gian con riêng suy rộng, đồng cấu $(f - \lambda id_V)|_{R_\lambda}$ là luỹ linh. Do đó, áp dụng Định lý 4.2 cho $(f - \lambda id_V)|_{R_\lambda}$, ta có thể chọn một cơ sở của $R_\lambda$ sao cho trong cơ sở đó ma trận của $f|_{R_\lambda}$ có dạng chéo khối, với các khối trên đường chéo có dạng

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra đa thức đặc trưng của $f|_{R_\lambda}$ là

$$P_{f|_{R_\lambda}}(X) = (\lambda - X)^{\dim R_\lambda}.$$

Theo Mệnh đề 1.6, ta có

$$\begin{aligned} P_f(X) &= P_{f|_{R_\lambda}}(X)P_{\bar{f}}(X) \\ &= (\lambda - X)^{\dim R_\lambda} P_{\bar{f}}(X), \end{aligned}$$

trong đó $\bar{f}$ là đồng cấu cảm sinh bởi $f$ trên không gian thương $V/R_\lambda$. Vì thế, nếu gọi $s$ là bội của $\lambda$ xem như nghiệm của đa thức đặc trưng của $f$, thì $\dim R_\lambda \leq s$.

Giả sử phản chứng $\dim R_\lambda < s$. Khi đó $\lambda$ là một nghiệm của $P_{\bar{f}}(X)$. Gọi $[\alpha] \in V/R_\lambda$ là một véctơ riêng của $\bar{f}$ ứng với giá trị riêng $\lambda$. Khi đó $\bar{f}[\alpha] = \lambda[\alpha]$. Nghĩa là có véctơ $\beta \in R_\lambda$ sao cho $f(\alpha) = \lambda\alpha + \beta$. Do đó $\beta = (f - \lambda id_V)(\alpha) \in R_\lambda$. Vì thế, có số nguyên $m$ sao cho $(f - \lambda id_V)^m(\alpha) = 0$, nghĩa là $\alpha \in R_\lambda$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $[\alpha] \neq 0$ trong $V/R_\lambda$, vì đó là một véctơ riêng.

Tóm lại, ta có $\dim R_\lambda = s$. $\square$

Định lý sau đây là một tổng quát hoá của Hệ quả 3.5.

**Định lý 5.3** (Dạng chuẩn Jordan của ma trận của tự đồng cấu tuyến tính). *Giả sử tự đồng cấu $f$ của $\mathbf{K}$-không gian véctơ $n$ chiều $V$ có đa thức đặc trưng $P_f(X)$ phân tích được thành các nhân tử tuyến tính trong $\mathbf{K}[X]$, tức là*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_m)^{s_m},$$

*trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_m$ là những vô hướng đôi một khác nhau trong $\mathbf{K}$. Khi đó, $V$ phân tích được thành tổng trực tiếp các không gian con riêng suy rộng ứng với những giá trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_m$:*

$$V = R_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_m},$$

*ở đây $\dim R_{\lambda_k} = s_k$. Hơn nữa, $V$ có một cơ sở sao cho ma trận của $f$ trong đó là* *tổng trực tiếp của các khối Jordan cấp $s$ có dạng*

$$J_{s,\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

*Số khối Jordan cấp $s$ với phần tử $\lambda_k$ trên đường chéo bằng*

$$\text{rank}(f - \lambda_k id_V)^{s-1} - 2\text{rank}(f - \lambda_k id_V)^s + \text{rank}(f - \lambda_k id_V)^{s+1}.$$

*Ma trận này được xác định duy nhất bởi $f$ sai khác thứ tự sắp xếp các khối Jordan trên đường chéo chính.*

Ma trận nói trong định lý trên được gọi là *ma trận dạng chuẩn Jordan* của tự đồng cấu $f$.

**Chứng minh:** Ta sẽ chứng minh định lý theo nhiều bước.

**Bước 1:** Giả sử $\lambda \neq \mu$ là các giá trị riêng của $f$. Vì các đồng cấu $(f - \lambda id_V)$ và $(f - \mu id_V)$ giao hoán với nhau, nên ta có đồng cấu

$$(f - \lambda id_V)|_{R_\mu} : R_\mu \to R_\mu.$$

Ta sẽ chứng minh rằng đó là một đẳng cấu. Vì $R_\mu$ hữu hạn chiều, cho nên chỉ cần chứng minh đồng cấu nói trên là một đơn cấu. Giả sử phản chứng tồn tại véctơ $\alpha \in R_\mu \setminus \{0\}$ sao cho $(f - \lambda id_V)(\alpha) = 0$. Theo định nghĩa của không gian con riêng suy rộng, có số nguyên dương $m$ sao cho

$$\begin{aligned} \beta = (f - \mu id_V)^{m-1}(\alpha) &\neq 0, \\ (f - \mu id_V)(\beta) = (f - \mu id_V)^m(\alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Vì các đồng cấu $(f - \lambda id_V)$ và $(f - \mu id_V)$ giao hoán với nhau, cho nên

$$\begin{aligned} (f - \lambda id_V)(\beta) &= (f - \lambda id_V)(f - \mu id_V)^{m-1}(\alpha) \\ &= (f - \mu id_V)^{m-1}(f - \lambda id_V)(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Kết hợp hai đẳng thức trên ta có $f(\beta) = \lambda\beta = \mu\beta$. Vì $\lambda \neq \mu$, nên đẳng thức trên dẫn tới $\beta = 0$. Mâu thuẫn này bác bỏ giả thiết phản chứng.

**Bước 2:** Ta chứng tỏ rằng $R_{\lambda_1} + \cdots + R_{\lambda_m}$ là một tổng trực tiếp trong $V$. Để làm điều đó, ta chứng minh rằng với mọi $\alpha_i \in R_{\lambda_i} \setminus \{0\}$, hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ độc lập tuyến tính.

Khẳng định đó hiển nhiên đúng với $m = 1$. Giả sử qui nạp điều đó đúng với $m - 1$. Xét một ràng buộc tuyến tính bất kỳ $\sum_{i=1}^m a_i\alpha_i = 0$ với các hệ số $a_i \in \mathbf{K}$. Chọn số nguyên dương $k$ sao cho $(f - \lambda_m id_V)^k(\alpha_m) = 0$. Tác động $(f - \lambda_m id_V)^k$ vào hai vế của ràng buộc tuyến tính nói trên, ta thu được

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i(f - \lambda_m id_V)^k(\alpha_i) = 0,$$

trong đó, theo Bước 1, các véctơ $\beta_i = (f - \lambda_m id_V)^k(\alpha_i)$ đều khác không trong $R_{\lambda_i}$ với mọi $i = 1, ..., m - 1$. Do đó, theo giả thiết qui nạp, các véctơ đó độc lập tuyến tính, nghĩa là

$$a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0.$$

Thay các giá trị này vào ràng buộc tuyến tính ban đầu, ta có $a_m\alpha_m = 0$. Từ đó, vì $\alpha_m \neq 0$, nên $a_m = 0$. Vậy hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ độc lập tuyến tính.

**Bước 3:** $V = R_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_m}$.

Thật vậy, theo Mệnh đề 5.2, $\dim R_{\lambda_i} = s_i$. Do đó, điều phải chứng minh được suy từ đẳng thức sau

$$\dim (R_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_m}) = \sum_{i=1}^{m} s_i = n = \dim V.$$

**Bước 4:** Bởi vì $(f - \lambda_k id_V)$ luỹ linh trên $R_{\lambda_k}$, cho nên theo Định lý 4.2 thì $f|_{R_{\lambda_k}}$ có ma trận dạng chuẩn Jordan trong một cơ sở nào đó của $R_{\lambda_k}$. Mặt khác, $V = R_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_m}$, cho nên $f$ có ma trận dạng chuẩn Jordan trong một cơ sở nào đó của $V$.

**Bước 5:** Theo Bước 1, với mỗi $\lambda_k \neq \lambda_i$, đồng cấu hạn chế $(f - \lambda_k id_V)|_{R_{\lambda_i}} : R_{\lambda_i} \to$

$R_{\lambda_i}$ là một đẳng cấu. Vì thế, ta có

$$\text{rank}(f-\lambda_k id_V)|_{R_{\lambda_i}}^{s-1} - 2\text{rank}(f-\lambda_k id_V)|_{R_{\lambda_i}}^{s} + \text{rank}(f-\lambda_k id_V)|_{R_{\lambda_i}}^{s+1} = 0.$$

Kết hợp điều này với đẳng thức $V = R_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus R_{\lambda_m}$ và một lần nữa áp dụng Định lý 4.2, ta thấy trong mọi ma trận dạng chuẩn Jordan của $f$, số khối Jordan cấp $s$ với phần tử $\lambda_k$ trên đường chéo chính bằng

$$\begin{aligned}
& \text{rank}(f-\lambda_k id_V)^{s-1} - 2\text{rank}(f-\lambda_k id_V)^{s} + \text{rank}(f-\lambda_k id_V)^{s+1} \\
= \; & \text{rank}(f-\lambda_k id_V)|_{R_{\lambda_k}}^{s-1} - 2\text{rank}(f-\lambda_k id_V)|_{R_{\lambda_k}}^{s} + \text{rank}(f-\lambda_k id_V)|_{R_{\lambda_k}}^{s+1}.
\end{aligned}$$

Vì số này như nhau đối với mọi ma trận dạng chuẩn Jordan của $f$, cho nên hai ma trận như vậy chỉ khác nhau thứ tự của các khối Jordan trên đường chéo. □

Một trường hợp riêng quan trọng của định lý trên là hệ quả sau đây.

**Hệ quả 5.4** *Nếu* $\mathbf{K}$ *là một trường đóng đại số (chẳng hạn* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$*), thì mọi tự đồng cấu của một* $\mathbf{K}$*-không gian véctơ đều có ma trận dạng chuẩn Jordan trong một cơ sở nào đó của không gian.* □

**Ví dụ:** Tìm dạng chuẩn Jordan trên trường số thực của ma trận sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Lời giải:** Trước hết ta tìm đa thức đặc trưng của $A$:

$$\det(A - XE_4) = \begin{vmatrix} 3-X & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-X & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-X & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)^2.$$

Đa thức này có đủ nghiệm thực $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Vậy, ma trận $A$ đồng dạng trên trường số thực với một ma trận Jordan $J$. Các khối Jordan của ma trận $J$ này có các phần tử trên đường chéo bằng 1 hoặc $-1$, và có cấp tối đa bằng 2 (là bội của các giá trị riêng 1 và $-1$). Với $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ta có

$$\operatorname{rank}(A - 1E_4) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3,$$

bởi vì ma trận này suy biến, và có định thức con cấp 3 ở góc trái trên khác 0. Hơn nữa,

$$\operatorname{rank}(A - 1E_4)^2 = \operatorname{rank} 4\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{rank} 4\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

bởi vì hai hàng cuối của ma trận bằng 0, và định thức cấp 2 ở góc trái trên khác 0. Như thế, số khối Jordan cấp 1 của ma trận Jordan $J$ với phần tử trên đường chéo bằng 1 là

$$\operatorname{rank}(A - 1E_4)^0 - 2\operatorname{rank}(A - 1\cdot E_4)^1 + \operatorname{rank}(A - 1\cdot E_4)^2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Kết hợp điều đó với sự kiện $\lambda = 1$ là nghiệm kép của đa thức đặc trưng của $A$, ta suy ra $J$ chứa đúng một khối Jordan cấp 2 với các phần tử trên đường chéo bằng 1. Tương tự, với $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$, ta có

$$\operatorname{rank}(A + 1E_4) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} 2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

bởi vì đó là một ma trận suy biến và định thức con cấp 3 ở góc phải dưới của nó khác 0. Tiếp theo,

$$\operatorname{rank}(A+1E_4)^2 = \operatorname{rank} 4 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{rank} 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Như thế, số khối Jordan cấp 1 của ma trận Jordan $J$ với phần tử trên đường chéo bằng -1 là

$$\operatorname{rank}(A+1E_4)^0 - 2\operatorname{rank}(A+1\cdot E_4)^1 + \operatorname{rank}(A+1\cdot E_4)^2 = 4-6+2 = 0.$$

Từ đó, vì $\lambda = -1$ là nghiệm kép của đa thức đặc trưng của $A$, ta suy ra $J$ chứa đúng một khối Jordan cấp 2 với các phần tử trên đường chéo bằng $-1$.

Tóm lại, dạng chuẩn Jordan của ma trận $A$ là

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## Bài tập

1. Tìm giá trị riêng và véctơ riêng của các tự đồng cấu có ma trận sau đây trong một cơ sở nào đó của không gian:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(c)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (d)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

$$(e)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (f)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Chứng minh rằng nếu tự đồng cấu $\varphi$ của không gian véctơ $n$ chiều $V$ có $n$ giá trị riêng khác nhau và $\psi$ là một tự đồng cấu giao hoán với $\varphi$, thì mỗi véctơ riêng của $\varphi$ cũng là một véctơ riêng của $\psi$ và $\psi$ có một cơ sở gồm toàn véctơ riêng của nó.

3. Xác định xem những tự đồng cấu được cho bởi các ma trận sau trong một cơ sở nào đó của không gian véctơ $V$ có chéo hoá được không. Nếu có, hãy xác định cơ sở trong đó ma trận của tự đồng cấu có dạng chéo và xác định ma trận này.

$$(a)\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (b)\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (d)\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Cho ma trận cấp $n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận khả nghịch $T$ sao cho $B = T^{-1}AT$ là một ma trận chéo, và tìm $B$.

5. Ma trận $A$ có các vô hướng $a_1, a_2, ..., a_n$ nằm trên đường chéo thứ hai (theo thứ tự từ hàng một tới hàng $n$) còn tất cả các phần tử khác bằng 0. Tìm điều kiện để $A$ chéo hoá được.

6. Tìm giá trị riêng và véctơ riêng của tự đồng cấu xác định bởi phép đạo hàm trong không gian véctơ các đa thức hệ số thực có bậc không vượt quá $n$.

7. Chứng minh rằng nếu ít nhất một trong hai ma trận $A$ và $B$ khả nghịch, thì các ma trận tích $AB$ và $BA$ đồng dạng với nhau. Tìm ví dụ về các ma trận $A, B$ sao cho $AB$ không đồng dạng với $BA$.

8. Tìm tất cả các ma trận chỉ đồng dạng với chính nó mà thôi.

9. Ma trận $B$ nhận được từ ma trận $A$ bằng cách đổi chỗ các hàng $i$ và $j$ đồng thời đổi chỗ các cột $i$ và $j$. Tìm ma trận không suy biến $T$ sao cho $B = T^{-1}AT$.

10. Chứng minh rằng ma trận $A$ đồng dạng với ma trận $B$ nhận được từ $A$ bằng phép đối xứng qua tâm của nó.

11. Giả sử $(i_1, i_2, ..., i_n)$ là một phép thế bất kỳ của $(1, 2, ..., n)$. Chứng minh rằng

các ma trận sau đồng dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \dots & a_{i_1i_n} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \dots & a_{i_2i_n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{i_ni_1} & a_{i_ni_2} & \dots & a_{i_ni_n} \end{pmatrix}.$$

Các ma trận sau đây có đồng dạng với nhau hay không ?

12.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}.$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{pmatrix}.$$

14. Chứng minh rằng các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận $A$ có thể mô tả như sau:

$$|A - XE| = (-X)^n + c_1(-X)^{n-1} + c_2(-X)^{n-2} + \cdots + c_n,$$

trong đó $c_k$ là tổng của tất cả các định thức con chính cấp $k$ của ma trận $A$. (Một định thức con được gọi là *chính* nếu các chỉ số hàng và các chỉ số cột của nó trùng nhau.)

15. Giả sử $p > 0$ là bội của $\lambda_0$ xem như nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận vuông $A$ cấp $n$. Gọi $r$ là hạng của ma trận $(A - \lambda_0 E)$. Chứng minh rằng

$$1 \leq n - r \leq p.$$

16. Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận nghịch đảo $A^{-1}$ bằng nghịch đảo của các giá trị riêng của ma trận $A$ (kể cả bội).

17. Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận $A^2$ bằng bình phương của các giá trị riêng của ma trận $A$ (kể cả bội).

18. Chứng minh rằng nếu $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận $A$ và $f(X)$ là một đa thức thì $f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của ma trận $f(A)$.

19. Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các ma trận vuông cùng cấp thì các đa thức đặc trưng của các ma trận $AB$ và $BA$ trùng nhau.

20. Tìm các giá trị riêng của ma trận xyclic

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

21. Tìm các giá trị riêng của ma trận cấp $n$ sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tìm dạng chuẩn Jordan của các ma trận sau đây:

22.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$(c)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \qquad (d)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \text{(với } a \neq 0).$$

23.

$$(a)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (b)\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

24.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

25.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n \end{pmatrix}.$$

26.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a \\ a & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

27.
$$\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix},$$
trong đó $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n} \neq 0$.

28. Giả sử **K** là một trường đóng đại số. Chứng minh rằng ma trận $A$ với các phần tử trong **K** là lũy linh (tức là $A^k = 0$ với một số nguyên dương $k$ nào đó) nếu và chỉ nếu tất cả các giá trị riêng của nó bằng 0.

29. Chứng minh rằng mọi ma trận lũy linh khác 0 đều không chéo hoá được.

30. Tìm dạng chuẩn Jordan của ma trận *lũy đẳng* $A$ (tức là ma trận với tính chất $A^2 = A$).

31. Chứng minh rằng mọi ma trận *đối hợp* $A$ (tức là ma trận với tính chất $A^2 = E$) đều đồng dạng với một ma trận chéo. Tìm dạng của các ma trận chéo đó.

32. Chứng minh rằng mọi ma trận *tuần hoàn* $A$ (tức là ma trận với tính chất $A^k = E$, với một số nguyên dương $k$ nào đó) đều đồng dạng với một ma trận chéo. Tìm dạng của các ma trận chéo đó.

33. Cho $A$ là một khối Jordan cấp $n$
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng giá trị của đa thức $f(X)$ khi thay $X = A$ được hco bởi công thức sau đây

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \frac{f''(a)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ 0 & f(a) & \frac{f'(a)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(a) \end{pmatrix}.$$

34. Tìm dạng chuẩn Jordan của bình phương của một khối Jordan với 0 nằm trên đường chéo chính.

35. Tìm dạng chuẩn Jordan của ma trận sau đây với cấp $n \geq 3$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \dots & a \end{pmatrix}.$$

36. Chứng minh rằng mọi ma trận vuông với các phần tử trong một trường đóng đại số đều có thể viết thành tích của hai ma trận đối xứng mà một trong hai ma trận ấy không suy biến.

37. Chứng minh rằng nếu ma trận $A$ có dạng đường chéo khối

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix},$$

trong đó $A_1, A_2, ..., A_s$ là các ma trận vuông, và $f(X)$ là một đa thức của ẩn $X$ thì

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & f(A_s) \end{pmatrix}.$$

38. Cho $A$ là một ma trận vuông cấp $n$ với các phần tử trong một trường đóng đại số $\mathbf{K}$. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng (kể cả bội) của $A$. Chứng minh rằng nếu $f(X)$ là một đa thức với các hệ số trong $\mathbf{K}$ thì

$$\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n).$$

# Chương V
# KHÔNG GIAN VÉCTƠ EUCLID

Cấu trúc không gian véctơ cho phép diễn đạt các khái niệm như độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính, tập sinh, hạng, cơ sở và toạ độ, không gian con $k$ chiều (đường thẳng, mặt phẳng)... Tuy nhiên cấu trúc này chưa cho phép nói đến các khái niệm mang nội dung hình học nhiều hơn như *độ dài của véctơ* và *góc giữa hai véctơ*... Để diễn đạt những khái niệm này, người ta cần cấu trúc không gian véctơ Euclid.

Các không gian véctơ loại đặc biệt này không định nghĩa được trên một trường cơ sở tùy ý. Vì thế trong hầu như toàn bộ chương này ta chỉ xét các không gian véctơ (trên trường số) thực. Tiết cuối của chương sẽ được dành để xét những thay đổi cần thiết khi chuyển sang không gian véctơ phức.

## 1 Không gian véctơ Euclid

Nhắc lại rằng, trong hình học sơ cấp, tích vô hướng của hai véctơ được định nghĩa bằng tích của độ dài hai véctơ đó và côsin của góc xen giữa chúng. Dễ thấy rằng, ngược lại, độ dài của véctơ và góc xen giữa hai véctơ có thể biểu thị qua tích vô hướng. Người ta nhận thấy rằng, để đưa những khái niệm này vào các không gian véctơ trừu tượng, việc trực tiếp trừu tượng hoá các khái niệm độ dài của véctơ và góc xen giữa hai véctơ khó hơn nhiều so với việc trừu tượng hoá khái niệm tích vô hướng. Vì thế, trước hết chúng ta nghiên cứu khái niệm tích vô hướng. Rồi sử dụng nó để định nghĩa độ dài của véctơ và góc xen giữa hai véctơ.

Giả sử $E$ là một không gian véctơ thực. Nhắc lại rằng một hàm

$$\eta : E \times E \to \mathbf{R}$$

được gọi là song tuyến tính nếu nó tuyến tính đối với từng biến khi cố định biến còn lại. Mỗi hàm song tuyến tính như thế được gọi là một *dạng song tuyến tính* trên $E$.

**Định nghĩa 1.1** (i) Dạng song tuyến tính $\eta : E \times E \to \mathbf{R}$ được gọi là *đối xứng* nếu

$$\eta(\alpha, \beta) = \eta(\beta, \alpha), \quad \forall \alpha, \beta \in E.$$

(ii) $\eta$ được gọi là *dương* nếu

$$\eta(\alpha, \alpha) \geq 0, \quad \forall \alpha \in E.$$

(iii) $\eta$ được gọi là *xác định dương* nếu nó dương và

$$\eta(\alpha, \alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0.$$

(iv) Một dạng song tuyến tính, đối xứng và xác định dương trên $E$ được gọi là một *tích vô hướng* trên $E$.

Tích vô hướng trên không gian $E$ thường được ký hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle : & E \times E & \to & \mathbf{R} \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & \langle \alpha, \beta \rangle. \end{array}$$

Số thực $\langle \alpha, \beta \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai véctơ $\alpha$ và $\beta$. Những điều kiện để $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một tích vô hướng được liệt kê như sau:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Tính song tuyến tính} & \langle \alpha_1 + \alpha_2, \beta \rangle & = & \langle \alpha_1, \beta \rangle + \langle \alpha_2, \beta \rangle, \\ & \langle a\alpha, \beta \rangle & = & a\langle \alpha, \beta \rangle, \\ & \langle \alpha, \beta_1 + \beta_2 \rangle & = & \langle \alpha, \beta_1 \rangle + \langle \alpha, \beta_2 \rangle, \\ & \langle \alpha, a\beta \rangle & = & a\langle \alpha, \beta \rangle, \\ \text{Tính đối xứng} & \langle \alpha, \beta \rangle & = & \langle \beta, \alpha \rangle, \\ \text{Tính xác định dương} & \langle \alpha, \alpha \rangle & \geq & 0, \\ & \eta(\alpha, \alpha) = 0 & \Leftrightarrow & \alpha = 0. \end{array}$$

với mọi $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_j \in E, a \in \mathbf{R}$.

**Định nghĩa 1.2** Không gian véctơ thực $E$ cùng với một tích vô hướng trên $E$ được gọi là một *không gian véctơ Euclid*.

**Ví dụ 1.3** (a) Không gian các véctơ tự do đã học ở hình học sơ cấp là một không gian véctơ Euclid với tích vô hướng thông thường

$$\langle \alpha, \beta \rangle = |\alpha||\beta| \cos \angle(\alpha, \beta).$$

(b) Giả sử $E$ là một không gian véctơ thực $n$ chiều và $(e_1, e_2, ..., e_n)$ là một cơ sở của nó. Có thể định nghĩa một tích vô hướng trên $E$ như sau. Nếu $\alpha = \sum_i x_i e_i, \beta = \sum_i y_i e_i$, thì ta đặt

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nói riêng, nếu $E = \mathbf{R}^n$ và $(e_1, e_2, ..., e_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^n$, thì tích vô hướng của hai véctơ $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ được định nghĩa là

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nó được gọi là *tích vô hướng chính tắc* trên $\mathbf{R}^n$. Nhận xét rằng theo cách này mỗi cơ sở của $E$ cho phép xác định trên $E$ một tích vô hướng. Hai tích vô hướng xác định bởi hai cơ sở khác nhau thì nói chung khác nhau.

(c) Giả sử $E = C[a, b]$ là không gian các hàm thực liên tục trên $[a, b]$. Công thức

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad f, g \in C[a, b]$$

xác định một tích vô hướng trên không gian vô hạn chiều $C[a, b]$. Tính liên tục của các hàm trong $C[a, b]$ được dùng để chứng minh tính xác định dương của dạng song tuyến tính $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$.

Mỗi không gian véctơ con $F$ của không gian véctơ Euclid $E$ được trang bị một tích vô hướng, là thu hẹp của tích vô hướng đã cho trên $E$. Vì thế $F$ cũng là một không gian véctơ Euclid. Nó được gọi là một *không gian véctơ Euclid con* của $E$.

Bây giờ ta định nghĩa độ dài của véctơ và góc giữa hai véctơ trong một không gian véctơ Euclid.

**Định nghĩa 1.4** Giả sử $E$ là một không gian véctơ Euclid với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Khi đó, *độ dài* (hay *chuẩn*) của véctơ $\alpha \in E$ là số thực không âm $|\alpha| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$.

Nhận xét rằng, ngược lại, tích vô hướng cũng được hoàn toàn xác định bởi độ dài véctơ. Thật vậy

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \frac{1}{2}\{|\alpha+\beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2\}.$$

Để định nghiã được góc giữa hai véctơ, ta cần mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 1.5** (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

$$|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq |\alpha||\beta|, \quad \forall\alpha,\beta \in E.$$

**Chứng minh:** Ta có $\langle t\alpha+\beta, t\alpha+\beta\rangle \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}$. Hay là

$$t^2\langle\alpha,\alpha\rangle + 2t\langle\alpha,\beta\rangle + \langle\beta,\beta\rangle \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Vế trái là một tam thức bậc hai đối với $t$. Nó không âm với mọi giá trị của $t$, cho nên

$$\Delta' = \langle\alpha,\beta\rangle^2 - \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle \leq 0.$$

Từ đó

$$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leq \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle.$$

Khai căn hai vế của bất đẳng thức, ta có

$$|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle} = |\alpha||\beta|. \qquad \square$$

Trong $\mathbf{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc, bất đẳng thức trên có dạng

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \quad \forall x_i, y_i \in \mathbf{R}.$$

**Định nghĩa 1.6** *Góc giữa hai véctơ khác không* $\alpha$ và $\beta$ được ký hiệu bởi $\angle(\alpha, \beta)$ và được xác định duy nhất bởi các điều kiện sau

$$\begin{cases} \cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}, \\ 0 \le \angle(\alpha,\beta) \le \pi. \end{cases}$$

Ta coi góc giữa véctơ 0 và một véctơ khác là không xác định.

**Định nghĩa 1.7** Hai véctơ $\alpha, \beta \in E$ được gọi là *vuông góc* (hay *trực giao*) với nhau, và được ký hiệu là $\alpha \perp \beta$, nếu

$$\langle\alpha,\beta\rangle = 0.$$

Như vậy, $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$ nếu và chỉ nếu hoặc là ít nhất một trong hai véctơ $\alpha, \beta$ bằng 0, hoặc là $\angle(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}$.

**Mệnh đề 1.8** (Định lý Pythagore) *Nếu* $\alpha \perp \beta$*, thì*

$$|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

**Chứng minh:** Ta có

$$\langle\alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle + 2\langle\alpha,\beta\rangle + \langle\beta,\beta\rangle.$$

Vì $\alpha \perp \beta$, cho nên $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$. Do đó $|\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. $\square$

Các tính chất cơ bản của độ dài véctơ được liệt kê trong mệnh đề sau đây.

**Mệnh đề 1.9** *(i)* $|\alpha| \ge 0, \quad \forall\alpha \in E,$

$$|\alpha| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

*(ii)* $|a\alpha| = |a||\alpha| \quad \forall a \in \mathbf{R}, \forall\alpha \in E.$

*(iii)* (Bất đẳng thức tam giác)

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad \forall \alpha, \beta \in E.$$

**Chứng minh:** Các phần (i) và (ii) được suy ngay từ định nghĩa của độ dài véctơ.

(iii) Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2. \qquad \square \end{aligned}$$

.

Khoảng cách từ véctơ $\alpha$ tới véctơ $\beta$ được định nghĩa như sau:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|.$$

Hàm khoảng cách có những tính chất cơ bản sau đây:

(i) $d(\alpha, \beta) \geq 0, \quad \forall \alpha, \beta \in E,$

$d(\alpha, \beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta.$

(ii) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in E.$

(iii) (Bất đẳng thức tam giác)

$$d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in E.$$

**Định nghĩa 1.10** (i) Hệ véctơ $(e_1, ..., e_k)$ của không gian véctơ Euclid $E$ được gọi là một *hệ trực giao* nếu các véctơ của hệ đôi một vuông góc với nhau, tức là

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \text{nếu } i \neq j.$$

(ii) Hệ véctơ $(e_1, ..., e_k)$ được gọi là một *hệ trực chuẩn* nếu nó là một hệ trực giao và mỗi véctơ của hệ đều có độ dài bằng 1, tức là

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{nếu } i \neq j, \\ 1, & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

**Mệnh đề 1.11** *(i) Mỗi hệ trực giao không chứa véctơ* $0$ *đều độc lập tuyến tính.*

*(ii) Nếu hệ véctơ* $(e_1, ..., e_k)$ *là trực giao và không chứa véctơ* $0$*, thì hệ* $(\frac{e_1}{|e_1|}, ..., \frac{e_k}{|e_k|})$ *là trực chuẩn.*

**Chứng minh:** (i) Giả sử $(e_1, ..., e_k)$ là một hệ trực giao và không chứa véctơ $0$. Giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$a_1e_1 + \cdots + a_ke_k = 0.$$

Nhân vô hướng hai vế với $e_k$, và sử dụng giả thiết $e_j \perp e_j$ với $i \neq j$, ta có:

$$\begin{aligned} 0 = \langle a_1e_1 + \cdots + a_ke_k, e_k\rangle &= a_1\langle e_1, e_k\rangle + \cdots + a_k\langle e_k, e_k\rangle \\ &= a_k\langle e_k, e_k\rangle. \end{aligned}$$

Vì $e_k \neq 0$, nên $\langle e_k, e_k\rangle > 0$. Do đó $a_k = 0$. Từ đó ta thu được ràng buộc

$$a_1e_1 + \cdots + a_{k-1}e_{k-1} = 0.$$

Lặp lại lập luận trên với $k$ được thay bởi $k-1$, ta thu được $a_{k-1} = 0$. Cuối cùng ta thu được

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Vậy hệ $(e_1, ..., e_k)$ độc lập tuyến tính.

(ii) Ta có

$$\langle \frac{e_i}{|e_i|}, \frac{e_j}{|e_j|}\rangle = \frac{1}{|e_i||e_j|}\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{nếu } i \neq j, \\ 1, & \text{nếu } i = j. \square \end{cases}$$

Một cơ sở của $E$ đồng thời là một hệ trực chuẩn được gọi là một *cơ sở trực chuẩn*. Định lý sau đây nói lên tính phổ biến của cơ sở trực chuẩn.

**Định lý 1.12** *Mọi không gian véctơ Euclid hữu hạn chiều đều có cơ sở trực chuẩn.*

**Chứng minh:** Định lý được chứng minh bằng *phép trực giao hoá Shmidt.*

Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở bất kỳ của không gian véctơ Euclid $E$. Trực giao hoá Shmidt là phép dựng một cơ sở trực giao $(e_1, ..., e_n)$ của $E$ với tính chất sau

$$\mathcal{L}(e_1, ..., e_k) = \mathcal{L}(\alpha_1, ..., \alpha_k), \qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

Sau đó, ta chuẩn hoá $(e_1, ..., e_n)$ để thu được một cơ sở trực chuẩn của $E$.

Ta đặt $e_1 = \alpha_1$. Như thế $\mathcal{L}(e_1) = \mathcal{L}(\alpha_1)$. Giả sử đã xây dựng được hệ trực giao $(e_1, ..., e_{i-1})$ sao cho

$$\mathcal{L}(e_1, ..., e_k) = \mathcal{L}(\alpha_1, ..., \alpha_k), \qquad (k = 1, 2, ..., i-1).$$

Tiếp theo, ta tìm $e_i$ dưới dạng

$$e_i = \lambda_{i1}e_1 + \cdots + \lambda_{ii-1}e_{i-1} + \alpha_i,$$

trong đó $\lambda_{i1}, ..., \lambda_{ii-1}$ là $i-1$ số thực được xác định bởi $i-1$ điều kiện $e_i \perp e_1, ..., e_i \perp e_{i-1}$. Tức là

$$\begin{cases} \langle e_i, e_1\rangle & = & \lambda_{i1}\langle e_1, e_1\rangle + \langle \alpha_i, e_1\rangle & = & 0 \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots\ldots & . & . \\ \langle e_i, e_{i-1}\rangle & = & \lambda_{ii-1}\langle e_{i-1}, e_{i-1}\rangle + \langle \alpha_i, e_{i-1}\rangle & = & 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất

$$\lambda_{ik} = -\frac{\langle \alpha_i, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} \qquad (k = 1, 2, ..., i-1).$$

Vì $\alpha_i$ không nằm trong không gian $\mathcal{L}(e_1, ..., e_{i-1}) = \mathcal{L}(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1})$, cho nên

$$e_i = \lambda_{i1}e_1 + \cdots + \lambda_{ii-1}e_{i-1} + \alpha_i \neq 0.$$

Hơn nữa, theo đẳng thức trên $\alpha_i \in \mathcal{L}(e_1, ..., e_i)$, và $e_i \in \mathcal{L}(e_1, ..., e_{i-1}, \alpha_i) = \mathcal{L}(\alpha_1, ..., \alpha_i)$. Kết hợp điều đó với giả thiết $\mathcal{L}(e_1, ..., e_{i-1}) = \mathcal{L}(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1})$, ta có

$$\mathcal{L}(e_1, ..., e_i) = \mathcal{L}(\alpha_1, ..., \alpha_i).$$

Quá trình này tiếp diễn cho tới $i = n$. Hệ gồm $n$ véctơ trực giao $e_1, ..., e_n$ sinh ra không gian $n$ chiều $E$. Vậy hệ đó là một cơ sở trực giao của $E$. Cuối cùng, chuẩn hoá cơ sở trực giao này như đã làm ở phần (ii) của mệnh đề trước, ta thu được một cơ sở trực chuẩn của $E$. □

**Ví dụ:** Trực giao hoá hệ véctơ sau đây trong không gian $\mathbf{R}_4$ với tích vô hướng (định nghĩa nhờ cơ sở) chính tắc:

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, 0),$$
$$\alpha_2 = (2, 1, 0, 0),$$
$$\alpha_3 = (3, 2, 1, 0),$$
$$\alpha_4 = (4, 3, 2, 1).$$

**Lời giải:** Ta đặt $e_1 = \alpha_1 = (1, 0, 0, 0)$. Véctơ thứ hai được tìm dưới dạng $e_2 = \lambda_{21} e_1 + \alpha_2$, trong đó

$$\lambda_{21} = -\frac{\langle \alpha_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = -\frac{1.2}{1.1} = -2.$$

Vậy $e_2 = -2e_1 + \alpha_2 = -2(1, 0, 0, 0) + (2, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$. Véctơ thứ ba được tìm dưới dạng $e_3 = \lambda_{31} e_1 + \lambda_{32} e_2 + \alpha_3$, trong đó

$$\lambda_{31} = -\frac{\langle \alpha_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = -\frac{1.3}{1.1} = -3,$$
$$\lambda_{32} = -\frac{\langle \alpha_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} = -\frac{1.2}{1.1} = -2.$$

Vậy $e_3 = -3e_1 - 2e_2 + \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)$. Tương tự, $e_4 = \lambda_{41} e_1 + \lambda_{42} e_2 + \lambda_{43} e_3 + \alpha_4$, trong đó

$$\lambda_{41} = -\frac{\langle \alpha_4, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = -\frac{1.4}{1.1} = -4,$$
$$\lambda_{42} = -\frac{\langle \alpha_4, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} = -\frac{1.3}{1.1} = -3,$$
$$\lambda_{43} = -\frac{\langle \alpha_4, e_3 \rangle}{\langle e_3, e_3 \rangle} = -\frac{1.2}{1.1} = -2.$$

Như thế $e_4 = -4e_1 - 3e_2 - 2e_3 + \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Tóm lại, hệ $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ chính là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}_4$.

Mệnh đề sau đây cho thấy cơ sở trực chuẩn giúp cho việc tính tích vô hướng được dễ dàng.

**Mệnh đề 1.13** *Giả sử* $(e_1, ..., e_n)$ *là một cơ sở trực chuẩn của không gian véctơ Euclid* $E$. *Khi đó, nếu* $\alpha = \sum_i a_i e_i$, *và* $\beta = \sum_i b_i e_i$, *thì*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

**Chứng minh:** Do tính song tuyến tính của tích vô hướng, ta có

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \sum_i a_i e_i, \sum_j b_j e_j \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Vì $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn, cho nên

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i a_i b_i \langle e_i, e_i \rangle = \sum_i a_i b_i. \qquad \square$$

**Định nghĩa 1.14** Giả sử $U$ và $V$ là các không gian véctơ con của không gian véctơ Euclid $E$.

(i) Ta nói véctơ $\alpha \in E$ *vuông góc* (hay *trực giao*) với $U$, và viết $\alpha \perp U$, nếu $\alpha \perp u$ với mọi $u \in U$.

(ii) Ta nói $U$ *vuông góc* (hay *trực giao*) với $V$, và viết $U \perp V$, nếu

$$u \perp v, \qquad \forall u \in U, \forall v \in V.$$

Do tính đối xứng của tích vô hướng, nếu $U \perp V$ thì $V \perp U$. Khi đó $U \cap V = \{0\}$. Thật vậy, nếu $\alpha \in U \cap V$ thì $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$, do đó $\alpha = 0$. Khi đó, tổng $U + V$ là một tổng trực tiếp, $U \oplus V$. Nó được gọi là tổng trực giao của $U$ và $V$, và được ký hiệu là $U \oplus^{\perp} V$.

Giả sử $U_1, ..., U_k$ là các không gian con của $E$ đôi một trực giao với nhau: $U_i \perp U_j$ với $i \neq j$. Dễ thấy rằng $U_i \perp (\sum_{j \neq i} U_j)$, cho nên

$$U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}, \qquad (i = 1, ..., k).$$

Do đó, tổng $U_1 + \cdots + U_k$ là một tổng trực tiếp.

**Định nghĩa 1.15** Tổng trực tiếp của các không gian con đôi một trực giao với nhau $U_1, ..., U_k$ được gọi là một *tổng trực giao*, và được ký hiệu là $U_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp U_k$.

Nếu $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn của $E$ thì $E$ phân tích được thành tổng trực giao

$$E = \mathcal{L}(e_1) \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp \mathcal{L}(e_n).$$

**Định nghĩa 1.16** Giả sử $U$ là một không gian véctơ con của $E$. Khi đó

$$U^\perp = \{\alpha \in E | \alpha \perp U\}$$

được gọi là *phần bù trực giao* của $U$ trong $E$.

Dễ thấy rằng $U^\perp$ cũng là một không gian véctơ con của $E$.

**Mệnh đề 1.17** *Giả sử $U$ là một không gian véctơ con của không gian véctơ Euclid hữu hạn chiều $E$. Khi đó, $(U^\perp)^\perp = U$, và $E$ có thể phân tích thành tổng trực giao $E = U \oplus^\perp U^\perp$.*

**Chứng minh:** Chọn một cơ sở trực giao $(e_1, ..., e_m)$ của $U$, và bổ sung nó để có một cơ sở $(e_1, ..., e_m, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n)$ của $E$. Áp dụng phép trực giao hoá Shmidt cho cơ sở đó, ta thấy $m$ véctơ đầu của cơ sở không thay đổi, bởi vì chúng đã trực giao sẵn rồi. Kết quả là ta thu được một cơ sở trực giao $(e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n)$ của $E$. Các véctơ $e_{m+1}, ..., e_n$ trực giao với mỗi phần tử trong cơ sở $(e_1, ..., e_m)$ của $U$, cho nên chúng trực giao với $U$. Vì thế, $e_{m+1}, ..., e_n \in U^\perp$.

Hơn nữa, nếu $\alpha$ là một véc tơ bất kỳ của $U^\perp$, ta xét khai triển của nó theo cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ của $E$: $\alpha = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$. Do tính trực giao của cơ sở nói trên, ta thu được:

$$a_1 = \frac{\langle \alpha, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} = 0, ..., a_m = \frac{\langle \alpha, e_m \rangle}{\langle e_m, e_m \rangle} = 0.$$

Hệ quả là $\alpha$ biểu thị tuyến tính qua $(e_{m+1}, ..., e_n)$. Kết hợp điều này với việc $e_{m+1}, ..., e_n \in U^\perp$, ta suy ra $(e_{m+1}, ..., e_n)$ là một cơ sở của $U^\perp$.

Từ đó, lập luận tương tự ta thấy: nếu $\beta \perp U^{\perp}$, thì $\beta$ biểu thị tuyến tính qua $(e_1, ..., e_m)$, tức là $\beta \in U$. Như vậy, $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

Cuối cùng, ta có phân tích trực giao

$$E = \mathcal{L}(e_1, ..., e_m) \oplus^{\perp} \mathcal{L}(e_{m+1}, ..., e_n) = U \oplus^{\perp} U^{\perp}. \qquad \square$$

Bây giờ ta trở lại với chủ đề khoảng cách trong không gian véctơ Euclid.

Khoảng cách từ tập con $A$ tới tập con $B$ của $E$ được định nghĩa như sau:

$$d(A, B) = \inf_{\alpha \in A, \beta \in B} d(\alpha, \beta).$$

Nói riêng, nếu $A$ chỉ gồm một phần tử $\alpha$ thì ta sẽ ký hiệu đơn giản $d(\{\alpha\}, B)$ bởi $d(\alpha, B)$. Như vậy

$$d(\alpha, B) = \inf_{\beta \in B} d(\alpha, \beta).$$

Tập $\alpha + U = \{\alpha + u | u \in U\}$, trong đó $U$ là một không gian véctơ con của $E$ được gọi là *phẳng* song song với $U$ và đi qua $\alpha$. Ta sẽ xét trường hợp đặc biệt khi $A$ và $B$ là những phẳng song song với các không gian véctơ con $U$ và $V$.

**Mệnh đề 1.18** *Giả sử $\alpha - \beta = v + v^{\perp}$, trong đó $v \in V, v^{\perp} \in V^{\perp}$. Khi đó*

$$d(\alpha, \beta + V) = |v^{\perp}|.$$

*Tổng quát hơn, nếu $\alpha - \beta = t + t^{\perp}$, trong đó $t \in (U + V), t^{\perp} \in (U + V)^{\perp}$, thì*

$$d(\alpha + U, \beta + V) = |t^{\perp}|.$$

**Chứng minh:** Rõ ràng $d(\alpha, \beta + V)$ là một trường hợp đặc biệt của $d(\alpha + U, \beta + V)$ với $U = \{0\}$. Theo định nghĩa

$$d(\alpha + U, \beta + V) = \inf_{u \in U, v \in V} d(\alpha + u, \beta + v) = \inf_{u \in U, v \in V} |\alpha - \beta + u - v|.$$

Đặt $u - v = t' \in (U + V)$. Ta có

$$\alpha - \beta + t' = t^{\perp} + (\alpha - \beta - t^{\perp} + t').$$

Vì $(\alpha - \beta - t^{\perp} + t') = t + t' \in (U + V)$, nên $t^{\perp} \perp (\alpha - \beta - t^{\perp} + t')$. Theo định lý Pythagore, ta có

$$|\alpha - \beta + t'|^2 = |t^{\perp}|^2 + |\alpha - \beta - t^{\perp} + t'|^2 \geq |t^{\perp}|^2.$$

Vì thế $d(\alpha + U, \beta + V) = \inf_{t' \in (U+V)} |\alpha - \beta + t'| = |t^{\perp}|$. Giá trị nhỏ nhất này đạt được với $t' = -t$ . □

**Ví dụ:** Trong không gian $\mathbf{R}_4$ với tích vô hướng chính tắc, tìm khoảng cách từ $\alpha = (2, 4, -4, 2)$ tới phẳng $B$ xác định bởi hệ phương trình

$$x + 2y + z - t = 1,$$
$$x + 3y + z - 3t = 2.$$

**Lời giải:** Rõ ràng $\beta = (0, 1, -1, 0) \in B$. Vậy $B = \beta + V$, trong đó $V$ là không gian các nghiệm của hệ phương trình thuần nhất

$$x + 2y + z - t = 0,$$
$$x + 3y + z - 3t = 0.$$

Do đó, $V^{\perp}$ là không gian sinh bởi hai véctơ hệ số của hệ phương trình trên: $V^{\perp} = \mathcal{L}((1, 2, 1, -1), (1, 3, 1, -3))$. Giả sử $\alpha - \beta = (2, 3, -3, 2) = v + v^{\perp}$, trong đó $v \in V, v^{\perp} \in V^{\perp}$. Khi đó $v^{\perp}$ thừa nhận phân tích

$$v^{\perp} = r(1, 2, 1, -1) + s(1, 3, 1, -3) = (r + s, 2r + 3s, r + s, -r - 3s).$$

Vì thế, véctơ

$$\begin{aligned} v &= \alpha - \beta - v^{\perp} = (2, 3, -3, 2) - (r + s, 2r + 3s, r + s, -r - 3s) \\ &= (2 - r - s, 3 - 2r - 3s, -3 - r - s, 2 + r + 3s) \end{aligned}$$

thoả mãn hệ phương trình xác định $V$. Tức là

$$\begin{aligned} (2 - r - s) + 2(3 - 2r - 3s) + (-3 - r - s) - (2 + r + 3s) &= 3 - 7r - 11s = 0, \\ (2 - r - s) + 3(3 - 2r - 3s) + (-3 - r - s) - 3(2 + r + 3s) &= 2 - 11r - 20s = 0. \end{aligned}$$

Từ đó $r = 2, s = -1$. Thay các giá trị đó vào $v^\perp$ ta có

$$d(\alpha, B) = |v^\perp| = |(1,1,1,1)| = 2.$$

# 2 Ánh xạ trực giao

Để nghiên cứu cấu trúc của các không gian véctơ Euclid, người ta cần sử dụng các ánh xạ không chỉ bảo toàn các phép toán trên véctơ, mà còn bảo toàn tích vô hướng.

**Định nghĩa 2.1** Giả sử $E$ và $E'$ là các không gian véctơ Euclid. Ánh xạ $f : E \to E'$ được gọi là một *ánh xạ trực giao* nếu nó là một ánh xạ tuyến tính và nó bảo toàn tích vô hướng, nghĩa là:

$$\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in E.$$

Hiển nhiên là mỗi ánh xạ trực giao đều bảo toàn dộ dài của các véctơ:

$$|f(\alpha)| = |\alpha|, \qquad \forall \alpha \in E.$$

**Mệnh đề 2.2** *Nếu $f : E \to E'$ bảo toàn tích vô hướng thì nó là một ánh xạ tuyến tính, và do đó là một ánh xạ trực giao.*

**Chứng minh:** Đặt $\omega = f(a\alpha + b\beta) - af(\alpha) - bf(\beta)$ với $a, b \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta \in E$. Vì $f$ bảo toàn tích vô hướng, nên với mỗi $\gamma \in E$, ta có

$$\begin{aligned}
\langle \omega, f(\gamma)\rangle &= \langle f(a\alpha + b\beta) - af(\alpha) - bf(\beta), f(\gamma)\rangle \\
&= \langle f(a\alpha + b\beta), f(\gamma)\rangle - a\langle f(\alpha), f(\gamma)\rangle - b\langle f(\beta), f(\gamma)\rangle \\
&= \langle a\alpha + b\beta, \gamma\rangle - a\langle \alpha, \gamma\rangle - b\langle \beta, \gamma\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Như thế $\omega$ trực giao với mọi véctơ có dạng $f(\gamma)$, do đó $\omega$ trực giao với mọi tổ hợp tuyến tính của các véctơ có dạng $f(\gamma)$. Nói riêng, $\omega \perp \omega$. Từ đó suy ra $\omega = 0$, hay là

$$f(a\alpha + b\beta) = af(\alpha) + bf(\beta) \quad \forall a, b \in \mathbf{R}, \forall \alpha, \beta \in E. \qquad \square$$

**Mệnh đề 2.3** *Giả sử $E$ và $E'$ là các không gian véctơ Euclid. Khi đó ánh xạ tuyến tính $f : E \to E'$ là một ánh xạ trực giao nếu nó biến mỗi cơ sở trực chuẩn của $E$ thành một hệ trực chuẩn của $E'$.*

**Chứng minh:** Nếu $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn của $E$ thì

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = j, \\ 0, & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Vậy $(f(e_1), ..., f(e_n))$ là một hệ trực chuẩn của $E'$. (Nó có thể không phải là một cơ sở của $E'$ nếu số chiều của $E'$ lớn hơn $n$.)

Ngược lại, giả sử $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn của $E$, và $(f(e_1), ..., f(e_n))$ là một hệ trực chuẩn của $E'$. Khi đó, với mọi $\alpha = \sum_i a_i e_i, \beta = \sum_j b_j e_j$, ta có

$$\begin{aligned}
\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle &= \langle f(\sum_i a_i e_i), f(\sum_j b_j e_j)\rangle \\
&= \langle \sum_i a_i f(e_i), \sum_j b_j f(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \sum_i a_i b_i \\
&\quad \text{(do tính trực chuẩn của hệ} (f(e_1), ..., f(e_n))) \\
&= \langle \sum_i a_i e_i, \sum_j b_j e_j\rangle \\
&= \langle \alpha, \beta\rangle.
\end{aligned}$$

Như vậy, $f$ là một ánh xạ trực giao. □

**Mệnh đề 2.4** *Mỗi ánh xạ trực giao đều là một đơn cấu tuyến tính. Nói riêng, nếu $\varphi : E \to E$ là một tự đồng cấu trực giao của một không gian véctơ Euclid hữu hạn chiều $E$, thì $\varphi$ là một đẳng cấu tuyến tính.*

**Chứng minh:** Giả sử $f : E \to E'$ là một ánh xạ trực giao. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì $|\alpha| = |f(\alpha)| = 0$, nên $\alpha = 0$. Như thế $Kerf = \{0\}$. Do đó $f$ là một đơn cấu tuyến tính.

Nếu $\varphi : E \to E$ là một ánh xạ trực giao, thì

$$\dim E = \dim Im\varphi + \dim Ker\varphi.$$

Vậy $\dim E = \dim Im\varphi$. Do đó, $\varphi$ là một toàn cấu. Phần trên của mệnh đề đã khẳng định $\varphi$ là một đơn cấu. Tóm lại, $\varphi$ là một đẳng cấu tuyến tính. □

Theo mệnh đề trên thì mọi ánh xạ trực giao $h : E \to E'$ đều là một đẳng cấu từ $E$ vào $Im(h)$. Hơn nữa, mọi đẳng cấu trực giao $f : E \to Im(h)$ đều có dạng $f = h\varphi$, trong đó $\varphi$ là một tự đẳng cấu trực giao của $E$. Thật vậy, chỉ cần lấy $\varphi = h^{-1}f : E \to E$.

Như vậy, việc nghiên cứu các ánh xạ trực giao có thể quy về việc nghiên cứu các *tự đẳng cấu trực giao* (hay còn được gọi là các *phép biến đổi trực giao*).

**Mệnh đề 2.5** *Tập hợp $O(E)$ các phép biến đổi trực giao của một không gian véctơ Euclid $E$ lập nên một nhóm đối với phép hợp thành các ánh xạ. Đó là một nhóm con của nhóm $GL(E)$ tất cả các tự đẳng cấu tuyến tính của $E$.*

**Chứng minh:** Theo định nghĩa của phép biến đổi trực giao, nếu $f, g \in O(E)$ thì $f \circ g \in O(E)$.

Giả thiết thêm $h \in O(E)$. Hiển nhiên ta có

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Phần tử $id_E \in O(E)$ là đơn vị của phép nhân trong $O(E)$. Thật vậy, với mọi $f \in O(E)$ ta có

$$id_E \circ f = f \circ id_E = f.$$

Ánh xạ ngược $f^{-1}$ của $f \in O(E)$ cũng là một phép biến đổi trực giao, tức là $f^{-1} \in O(E)$, và ta có

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_E.$$

Mỗi phép biến đổi trực giao đều là một tự đẳng cấu tuyến tính, nghĩa là $O(E) \subset GL(E)$. Hơn nữa, phép nhân trong $O(E)$ là thu hẹp của phép nhân trong $GL(E)$. Vậy $O(E)$ là một nhóm con của $GL(E)$. □

**Định nghĩa 2.6** $O(E)$ được gọi là *nhóm biến đổi trực giao* của không gian véctơ Euclid $E$ .

Mệnh đề sau đây là hiển nhiên

**Mệnh đề 2.7** *Nếu $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao của $E$ thì nó biến mỗi cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực chuẩn. Ngược lại, nếu tự đồng cấu $\varphi : E \to E$ biến một cơ sở trực chuẩn nào đó thành một cơ sở trực chuẩn thì $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao.*

Giả sử $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian véctơ Euclid $E$, và $A$ là ma trận chuyển từ cơ sở đó sang một cơ sở nào đó $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ của $E$. Như vậy

$$(\varepsilon_1 ... \varepsilon_n) = (e_1 ... e_n)A.$$

Điều kiện cần và đủ để hệ $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ cũng là một cơ sở trực chuẩn của $E$ là

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle &= \langle \sum_k a_{ki} e_k, \sum_k a_{kj} e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, ..., n). \end{aligned}$$

Nói cách khác

$$A^t A = E_n.$$

**Định nghĩa 2.8** Ma trận thực $A$ vuông cấp $n$ được gọi là *trực giao* nếu $A^t A = E_n$, nói cách khác, nếu hệ véctơ cột của $A$ là một hệ trực chuẩn trong $\mathbf{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc.

Theo phân tích ở trên, ta đã chứng minh khẳng định sau đây:

**Mệnh đề 2.9** *Giả sử $A$ là ma trận chuyển từ một cơ sở trực chuẩn $(e_1, ..., e_n)$ sang một cơ sở nào đó $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Khi đó, $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ cũng là một cơ sở trực chuẩn nếu và chỉ nếu $A$ là một ma trận trực giao.*

**Mệnh đề 2.10** *Giả sử $A$ là một ma trận thực, vuông cấp $n$. Khi đó, các tính chất sau đây là tương đương:*

*(i)* *$A$ trực giao.*

*(ii)* *$A$ khả nghịch và $A^{-1} = A^t$.*

*(iii)* *Hệ véctơ hàng của $A$ là trực chuẩn trong $\mathbf{R}_n$ với tích vô hướng chính tắc, hay là*

$$AA^t = E_n.$$

**Chứng minh:** Giả sử $A^tA = E_n$. Khi đó $(\det A)^2 = \det(A^tA) = \det E_n = 1$. Do đó ma trận $A$ khả nghịch. Nhân hai vế của đẳng thức $A^tA = E_n$ với $A^{-1}$ từ bên phải, ta thu được $A^t = A^tAA^{-1} = E_nA^{-1} = A^{-1}$. Bây giờ lại nhân hai vế của đẳng thức $A^t = A^{-1}$ với $A$ từ bên trái, ta nhận được $AA^t = E_n$. Như vậy ta đã chứng minh rằng $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Suy luận ngược lại được tiến hành hoàn toàn tương tự. □

**Mệnh đề 2.11** *Nếu $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao của $E$ thì ma trận của nó trong mỗi cơ sở trực chuẩn của $E$ là một ma trận trực giao. Ngược lại, nếu $\varphi$ có ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó của $E$ là một ma trận trực giao thì $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao.*

**Chứng minh:** Giả sử $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao và $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở trực chuẩn của $E$. Khi đó $(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$ cũng là một cơ sở trực chuẩn. Gọi $A$ là ma trận của $\varphi$ trong cơ sở $(e_1, ..., e_n)$. Khi đó, $A$ chính là ma trận chuyển từ cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ tới cơ sở $(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$. Theo Mệnh đề 2.9, $A$ là một ma trận trực giao.

Ngược lại, nếu $\varphi$ có ma trận $A$ trong một cơ sở trực chuẩn nào đó $(e_1, ..., e_n)$ là một ma trận trực giao, thì cũng theo Mệnh đề 2.9 $(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)) = (e_1, ..., e_n)A$ là một cơ sở trực chuẩn. Do đó, $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao. □

**Hệ quả 2.12** *Tập hợp $O(n)$ các ma trận trực giao cấp $n$ lập nên một nhóm đối với phép nhân ma trận. Đó là một nhóm con của nhóm $GL(n, \mathbf{R})$ các ma trận thực cấp $n$ khả nghịch.*

**Chứng minh:** Cố định một cơ sở trực chuẩn $(e_1, ..., e_n)$ của không gian véctơ Euclid $n$ chiều $E$. Khi đó, mỗi phần tử $\varphi \in O(E)$ được đặt tương ứng 1-1 với ma trận của nó $A_\varphi \in O(n)$ trong cơ sở nói trên. Tương ứng này bảo toàn phép toán, nghĩa là

$$A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi \circ A_\psi.$$

Vì $O(E)$ là một nhóm, nên $O(n)$ cũng vậy. Ngoài ra, ta có

$$\begin{array}{ccc} GL(E) & \longleftrightarrow & GL(n, \mathbf{R}) \\ \cup & & \cup \\ O(E) & \longleftrightarrow & O(n). \end{array} \qquad \square$$

**Định nghĩa 2.13** $O(n)$ được gọi là *nhóm các ma trận trực giao cấp $n$.*

**Mệnh đề 2.14** *Nếu $A$ là một ma trận trực giao thì*

$$\det A = \pm 1.$$

**Chứng minh:** Từ đẳng thức $AA^t = E_n$, ta có

$$1 = \det E_n = \det(AA^t) = \det A \det A^t = (\det A)^2.$$

Kết quả là $\det A = \pm 1$. $\square$

**Mệnh đề 2.15** $SO(E) = \{\varphi \in O(E) | \det \varphi = 1\}$ *và* $SO(n) = \{A \in O(n) | \det A = 1\}$ *là các nhóm con tương ứng của $O(E)$ và $O(n)$.*

**Chứng minh:** Nếu $\varphi, \psi \in SO(E)$ thì $\varphi\psi \in O(E)$ và

$$\det(\varphi\psi) = \det\varphi \cdot \det\psi = 1 \cdot 1 = 1.$$

Như thế, theo định nghĩa, $\varphi\psi \in SO(E)$.

Nếu $\varphi \in SO(E)$ thì $\varphi^{-1} \in O(E)$ và

$$\det(\varphi^{-1}) = (\det\varphi)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Từ đó $\varphi^{-1} \in SO(E)$.

Tóm lại $SO(E)$ là một nhóm con của nhóm $O(E)$.

Trường hợp $SO(n)$ được chứng minh tương tự. □

Kết quả là ta có biểu đồ sau đây:

$$\begin{array}{ccc} GL(E) & \longleftrightarrow & GL(n, \mathbf{R}) \\ \cup & & \cup \\ O(E) & \longleftrightarrow & O(n) \\ \cup & & \cup \\ SO(E) & \longleftrightarrow & SO(n)\ . \end{array}$$

$SO(E)$ được gọi là *nhóm biến đổi trực giao đặc biệt* của $E$, còn $SO(n)$ được gọi là *nhóm các ma trận trực giao đặc biệt* cấp $n$.

Bây giờ ta xét cấu trúc của một phép biến đổi trực giao.

**Mệnh đề 2.16** *Nếu $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao, thì mọi giá trị riêng (nếu có) của $\varphi$ đều bằng $\pm 1$. Các không gian con riêng $P_1(\varphi)$ và $P_{-1}(\varphi)$ (nếu có) của $\varphi$ (ứng với các giá trị riêng $1$ và $-1$) trực giao với nhau.*

**Chứng minh:** Giả sử $\alpha$ là một véctơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$ của $\varphi$, nghĩa là $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$. Ta có

$$\langle\alpha, \alpha\rangle = \langle\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)\rangle = \langle\lambda\alpha, \lambda\alpha\rangle = \lambda^2\langle\alpha, \alpha\rangle.$$

Vì $\alpha \neq 0$, nên $\lambda^2 = 1$. Do đó, $\lambda = \pm 1$.

Giả sử $\alpha \in P_1(\varphi), \beta \in P_{-1}(\varphi)$. Ta có

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha, -\beta \rangle = -\langle \alpha, \beta \rangle.$$

Từ đó $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ và $\alpha \perp \beta$. □

**Mệnh đề 2.17** *(i) $A \in O(1)$ nếu và chỉ nếu $A = (\pm 1)$.*

*(ii) $A \in O(2)$ nếu và chỉ nếu $A$ là một trong hai ma trận dạng sau đây*

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}.$$

*Ma trận $A_1$ chéo hoá được nếu và chỉ nếu $\omega = k\pi$ với $k \in \mathbf{Z}$. Ma trận $A_2$ luôn chéo hoá được nhờ một ma trận trực giao. Nói rõ hơn, tồn tại $Q \in O(2)$ sao cho*

$$Q^{-1}A_2Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Chứng minh:** (i) $A = (a) \in O(1)$ nếu và chỉ nếu $a^2 = 1$, tức là $a = \pm 1$.

(ii) Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Khi đó, $A \in O(2)$ nếu và chỉ nếu

$$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0.$$

Hai đẳng thức cuối chứng tỏ $(c, d)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình tuyến tính không suy biến

$$\begin{cases} ax + by &= 0, \\ cx + dy &= 1. \end{cases}$$

Theo quy tắc Cramer, ta có

$$c = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}}{\det A} = -\frac{b}{\det A}, d = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A}.$$

Ta xét hai trường hợp:

**Trường hợp 1:** $\det A = 1$. Khi đó $c = -b, d = a$. Kết quả là

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{với } a^2 + b^2 = 1.$$

Đặt $a = \cos\omega, b = \sin\omega$, ta thu được

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của $A$ bằng $X^2 - 2\cos\omega X + 1$. Nó có nghiệm thực nếu và chỉ nếu $\Delta' = -\sin^2\omega \geq 0$, hay là $\omega = k\pi$ với $k$ là một số nguyên. Khi đó

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

**Trường hợp 2:** $\det A = -1$. Khi đó $c = b, d = -a$, và

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \qquad \text{với } a^2 + b^2 = 1.$$

Đặt $a = \cos\omega, b = \sin\omega$, ta có

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của $A$ là

$$\det \begin{pmatrix} \cos\omega - X & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega - X \end{pmatrix} = X^2 - (\cos^2\omega + \sin^2\omega) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

Vậy $A$ có hai giá trị riêng là 1 và $-1$.

Giả sử $\varphi$ là phép biến đổi trực giao của $\mathbf{R}^2$ có ma trận là $A$ trong cơ sở chính tắc. Gọi $\alpha$ và $\beta$ là các véctơ riêng có độ dài bằng đơn vị của $\varphi$ ứng với các giá trị riêng 1 và $-1$. Ta biết rằng $\alpha \perp \beta$. Vậy $(\alpha, \beta)$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^2$.

Nếu $Q$ là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^2$ sang cơ sở $(\alpha, \beta)$ thì $Q \in O(2)$ và

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Phép biến đổi trực giao $\varphi$ của không gian véctơ Euclid hai chiều $E$ có ma trận dạng

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \text{hoặc} \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}$$

trong một cơ sở trực chuẩn nào đó được gọi thứ tự là *phép quay góc $\omega$ xung quanh gốc toạ độ* và *phép đối xứng trục.*

**Mệnh đề 2.18** *Giả sử $\varphi$ là một phép biến đổi trực giao của không gian véctơ Euclid $E$. Khi đó, nếu $U \subset E$ là một không gian véctơ con $\varphi$-ổn định thì $U^\perp$ cũng vậy.*

**Chứng minh:** $\varphi|_U : U \to U$ là một phép biến đổi trực giao, nên nó là một đẳng cấu tuyến tính. Nói riêng, $\varphi(U) = U$. Với mỗi $u \in U$, có một $t \in U$ nào đó sao cho $u = \varphi(t)$. Giả sử $v \in U^\perp$. Ta có

$$\langle \varphi(v), u \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(t) \rangle = \langle v, t \rangle = 0.$$

Nghĩa là $\varphi(v) \in U^\perp$. $\square$

**Mệnh đề 2.19** *Giả sử $\varphi \in O(E)$, trong đó $E$ hữu hạn chiều. Khi đó, tồn tại một cơ sở trực chuẩn của $E$ sao cho ma trận của $\varphi$ trong cơ sở này có dạng*

$$E_p \oplus (-E_q) \oplus \begin{pmatrix} \cos\omega_1 & -\sin\omega_1 \\ \sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \cos\omega_r & -\sin\omega_r \\ \sin\omega_r & \cos\omega_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos\omega_1 & -\sin\omega_1 & & & \\ & & & & & & \sin\omega_1 & \cos\omega_1 & & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\omega_r & -\sin\omega_r \\ & & & & & & & & & \sin\omega_r & \cos\omega_r \end{pmatrix},$$

*trong đó $\omega_1, ..., \omega_r$ là những số thực khác $k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.*

**Chứng minh:** Áp dụng mệnh đề trước và nhớ rằng mỗi phép biến đổi tuyến tính thực đều có không gian con ổn định một hoặc hai chiều, ta nhận được phân tích trực giao

$$E = U_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} U_m,$$

trong đó mỗi $U_i$ là một không gian con $\varphi$-ổn định một hoặc hai chiều. Bây giờ ta áp dụng Mệnh đề 2.17 cho $\varphi|_{U_i}$. Nhớ rằng mọi phép đối xứng trục hoặc phép quay góc $k\pi$ đều có thể chéo hoá được. Vì thế, $\varphi$ có ma trận như nói trong mệnh đề trong một cơ sở trực chuẩn nào đó của $E$. □

**Định nghĩa 2.20** Ma trận nói ở Mệnh đề 2.19

$$E_p \oplus (-E_q) \oplus \begin{pmatrix} \cos\omega_1 & -\sin\omega_1 \\ \sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \cos\omega_r & -\sin\omega_r \\ \sin\omega_r & \cos\omega_r \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận trực giao dạng chính tắc.*

**Hệ quả 2.21** *Với mỗi ma trận trực giao $A$ cấp $n$, có một ma trận trực giao $Q$ cùng cấp $n$ sao cho $Q^{-1}AQ = Q^tAQ$ là ma trận trực giao dạng chính tắc.*

**Ví dụ:** Tìm dạng chính tắc $B$ của ma trận trực giao

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

và ma trận trực giao $Q$ sao cho $B = Q^{-1}AQ$.

**Lời giải:** Trước hết ta tìm đa thức đặc trưng của $A$:

$$P_A(X) = \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - X & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - X & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - X \end{pmatrix} = -(X-1)(X^2 - X + 1).$$

Đa thức này có 3 nghiệm: $X_1 = 1, X_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Gọi $\varphi$ là phép biến đổi tuyến tính của $\mathbf{R}^3$ có ma trận là $A$ trong cơ sở chính tắc. Véctơ riêng $e_1 = (x, y, z)^t$ của $\varphi$ ứng với giá trị riêng $X_1 = 1$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (\frac{2}{3} - 1)x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z &= 0 \\ \frac{2}{3}x + (\frac{2}{3} - 1)y - \frac{1}{3}z &= 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + (\frac{2}{3} - 1)z &= 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x = y = z$. Nếu ta đòi hỏi thêm $e_1$ có độ dài đơn vị thì $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta chọn $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^t$.

Tiếp theo, ta xét không gian $\varphi$-ổn định hai chiều ứng với các nghiệm phức liên hợp $X_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ của $P_A(X)$. Muốn thế, ta tìm nghiệm phức của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (\frac{2}{3} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z &= 0 \\ \frac{2}{3}x + (\frac{2}{3} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})y - \frac{1}{3}z &= 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + (\frac{2}{3} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})z &= 0. \end{cases}$$

Hệ này có họ nghiệm phụ thuộc một tham số phức $t$:

$$x = -2t, y = (1 + \sqrt{3}i)t, z = (1 - \sqrt{3}i)t.$$

Chọn $t = 1$ và tách riêng phần thực và phần ảo của véctơ nghiệm, ta thu được hai véctơ

$$e'_2 = (-2, 1, 1)^t, e'_3 = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})^t.$$

Hai véc tơ này trực giao với nhau. Ta chuẩn hoá chúng để có một hệ trực chuẩn :

$$e_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^t, e_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^t.$$

Theo chứng minh Định lý IV.2.2 ta có

$$(\varphi(e_2)\ \ \varphi(e_3)) = (e_2\ \ e_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Như vậy, trong cơ sở trực chuẩn $(e_1, e_2, e_3)$ phép biến đổi $\varphi$ có ma trận dạng chính tắc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ma trận chuyển $Q$ từ cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ sang cơ sở trực chuẩn $(e_1, e_2, e_3)$ chính là ma trận trực giao với các cột là các véctơ tọa độ của $e_1, e_2, e_3$:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Hiển nhiên là $B = Q^{-1}AQ$.

# 3 Phép biến đổi liên hợp và phép biến đổi đối xứng

Để định nghĩa được phép biến đổi liên hợp, ta cần bổ đề sau đây.

**Bổ đề 3.1** *Giả sử $\ell : E \to \mathbf{R}$ là một dạng tuyến tính trên không gian véctơ Euclid hữu hạn chiều $E$. Khi đó tồn tại duy nhất véctơ $\alpha \in E$ sao cho $\ell(x) = \langle x, \alpha \rangle$ với mọi $x \in E$.*

**Chứng minh: Tính duy nhất:** Giả sử có các véctơ $\alpha, \beta \in E$ sao cho

$$\ell(x) = \langle x, \alpha \rangle = \langle x, \beta \rangle, \quad \forall x \in E.$$

Khi đó $\langle x, \alpha - \beta \rangle = 0$ với mọi $x \in E$. Nói riêng

$$|\alpha - \beta|^2 = \langle \alpha - \beta, \alpha - \beta \rangle = 0.$$

Do đó $\alpha = \beta$. □

**Sự tồn tại:** Nếu $\ell = 0$ thì ta chọn $\alpha = 0$. Ngược lại, nếu $\ell \neq 0$, thì $Im(\ell) = \mathbf{R}$. Ta có

$$\dim E = \dim Ker\ell + \dim \mathbf{R}.$$

Ký hiệu $n = \dim E$, ta có $\dim Ker\ell = n - 1$. Do đó, không gian $(Ker\ell)^\perp$ có số chiều bằng 1. Gọi $e \in (Ker\ell)^\perp$ là một véctơ với độ dài đơn vị $|e| = 1$. Như thế, $e \neq 0$, và $(Ker\ell)^\perp = \mathcal{L}(e)$. Ta đặt $\alpha = \ell(e) \cdot e \in E$. Mỗi $x \in E$ đều có phân tích

$$x = te + z \qquad (t \in \mathbf{R}, z \in Ker\ell).$$

Ta có

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha \rangle &= \langle te + z, \ell(e) \cdot e \rangle = \langle te, \ell(e) \cdot e \rangle = t\ell(e) \langle e, e \rangle \\ &= t\ell(e) = \ell(te) = \ell(te + z) = \ell(x). \qquad \square \end{aligned}$$

**Hệ quả 3.2** *Giả sử $E$ là một không gian véctơ Euclid hữu hạn chiều. Khi đó ánh xạ $f : E \to E^*$ đặt tương ứng mỗi $\alpha$ với $f_\alpha \in E^*$ xác định bởi hệ thức*

$$f_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle, \quad \forall x \in E$$

*là một đẳng cấu tuyến tính.*

**Chứng minh:** Rõ ràng $f_\alpha$ xác định bởi hệ thức trên là một dạng tuyến tính trên $E$. Hơn nữa, dễ kiểm tra rằng

$$\begin{cases} f_{\alpha+\beta} &= f_\alpha + f_\beta, \qquad \alpha, \beta \in E, \\ f_{a\alpha} &= a f_\alpha, \qquad a \in \mathbf{R}, \alpha \in E. \end{cases}$$

Nói cách khác, $f : E \to E^*$ là một ánh xạ tuyến tính. Sự tồn tại và tính duy nhất của véctơ $\alpha$ nói ở bổ đề trước chứng tỏ $f$ là một đẳng cấu. $\square$

Ánh xạ $f$ được gọi là *đẳng cấu chính tắc* giữa $E$ và $E^*$. Nó được định nghĩa không phụ thuộc vào cơ sở của $E$. Nếu ta viết $f_\alpha(x)$ dưới dạng $\langle x, f_\alpha\rangle$, trong đó $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E^* \to \mathbf{R}$ là ghép cặp đối ngẫu giữa $E$ và $E^*$, thì hệ thức xác định $f_\alpha$ trở thành

$$\langle x, f_\alpha\rangle = \langle x, \alpha\rangle.$$

Như thế, đẳng cấu $f$ cho phép đồng nhất ghép cặp đối ngẫu giữa $E$ và $E^*$ với tích vô hướng trong $E$.

Bây giờ giả sử $\varphi : E \to E$ là một phép biến đổi tuyến tính. Với mỗi $\beta$ cố định trong $E$, tương ứng

$$\begin{aligned} E &\to \mathbf{R} \\ \alpha &\mapsto \langle \varphi(\alpha), \beta\rangle \end{aligned}$$

là một dạng tuyến tính trên $E$. Do đó, theo Bổ đề 3.1, có duy nhất phần tử được ký hiệu là $\varphi^*(\beta)$ trong $E$ sao cho

$$\langle \varphi(\alpha), \beta\rangle = \langle \alpha, \varphi^*(\beta)\rangle.$$

Ta dễ kiểm tra lại rằng ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi^* : E &\to E \\ \beta &\mapsto \varphi^*(\beta) \end{aligned}$$

là một ánh xạ tuyến tính.

**Định nghĩa 3.3** *$\varphi^*$ được gọi là phép biến đổi liên hợp của $\varphi$.*

Phép biến đổi liên hợp có những tính chất sau đây:

**Mệnh đề 3.4** *Với mọi $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, E)$, $a \in \mathbf{R}$, ta có*

*(i)*
$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)^* &= \varphi^* + \psi^*,\\ (a\varphi)^* &= a\varphi^*.\end{aligned}$$

*(ii)* $(\varphi^*)^* = \varphi$.

*(iii)* $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.

*(iv) Nếu $\varphi$ khả nghịch thì $\varphi^*$ cũng vậy, và*

$$(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}.$$

**Chứng minh:** Ta chỉ chứng minh tính chất (iii). Các phần còn lại được coi như bài tập. Theo định nghĩa, với mọi $\alpha, \beta \in E$, ta có

$$\langle \varphi\psi(\alpha), \beta\rangle = \langle \alpha, (\varphi\psi)^*(\beta)\rangle.$$

Mặt khác
$$\langle \varphi\psi(\alpha), \beta\rangle = \langle \psi(\alpha), \varphi^*(\beta)\rangle = \langle \alpha, \psi^*\varphi^*(\beta)\rangle.$$

Vì $\langle \alpha, (\varphi\psi)^*(\beta)\rangle = \langle \alpha, \psi^*\varphi^*(\beta)\rangle$ với mọi $\alpha, \beta \in E$, cho nên ta có $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$. □

**Mệnh đề 3.5** *Nếu $A$ là ma trận của $\varphi$ trong một cơ sở trực chuẩn nào đó của $E$, thì $A^t$ là ma trận của $\varphi^*$ trong cùng cơ sở ấy.*

**Chứng minh:** Giả sử $\varphi$ và $\varphi^*$ có ma trận lần lượt là $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ trong cơ sở trực chuẩn $(e_1, ..., e_n)$ của $E$. Ta có

$$\langle \varphi(e_j), e_i\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k, e_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\langle e_k, e_i\rangle = a_{ij}.$$

Tương tự
$$\langle e_j, \varphi^*(e_i)\rangle = \langle \varphi^*(e_i), e_j\rangle = b_{ji}$$
Điều kiện $\langle \varphi(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, \varphi^*(e_i)\rangle$ tương đương với $a_{ij} = b_{ji}$ với mọi $i, j$, hay là
$$B = A^t. \qquad \square$$

Định nghĩa sau đây đưa ra một lớp các ánh xạ tuyến tính quan trọng.

**Định nghĩa 3.6** (i) Phép biến đổi tuyến tính $\varphi : E \to E$ được gọi là một *phép biến đổi đối xứng* (hay *tự liên hợp*) nếu $\varphi = \varphi^*$, tức là
$$\langle \varphi(\alpha), \beta\rangle = \langle \alpha, \varphi(\beta)\rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in E.$$

(ii) Ma trận vuông $A$ được gọi là *đối xứng* nếu $A = A^t$.

**Hệ quả 3.7** *Nếu phép biến đổi tuyến tính $\varphi : E \to E$ là đối xứng thì ma trận của nó trong mọi cơ sở trực chuẩn của $E$ là ma trận đối xứng. Ngược lại, nếu phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ có ma trận đối xứng trong một cơ sở trực chuẩn nào đó của $E$ thì $\varphi$ là đối xứng.*

**Chứng minh:** Ta dùng các ký hiệu của mệnh đề trước. Khi đó, $\varphi$ đối xứng (tức là $\varphi = \varphi^*$) nếu và chỉ nếu $A = A^t$. $\square$

**Mệnh đề 3.8** *Các không gian con riêng ứng với những giá trị riêng khác nhau của một phép biến đổi đối xứng là trực giao với nhau.*

**Chứng minh:** Giả sử $\alpha$ và $\beta$ là các véctơ riêng của phép biến đổi đối xứng $\varphi$ ứng với các giá trị riêng khác nhau $\lambda$ và $\mu$. Nghĩa là $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha, \varphi(\beta) = \mu\beta$ $(\lambda \neq \mu)$. Ta có
$$\begin{array}{rrcl}
 & \langle \varphi(\alpha), \beta\rangle & = & \langle \alpha, \varphi(\beta)\rangle \\
\Longleftrightarrow & \langle \lambda\alpha, \beta\rangle & = & \langle \alpha, \mu\beta\rangle \\
\Longleftrightarrow & (\lambda - \mu)\langle \alpha, \beta\rangle & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & \langle \alpha, \beta\rangle & = & 0. \qquad \square
\end{array}$$

**Mệnh đề 3.9** *Mọi giá trị riêng của một ma trận thực đối xứng bất kỳ đều là số thực.*

**Chứng minh:** Giả sử $A = (a_{ij})$ là một ma trận thực đối xứng bất kỳ, có cấp $n$. Giả sử $\lambda$ là một nghiệm phức của phương trình đặc trưng

$$\det(A - XE_n) = 0.$$

Hệ phương trình $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \lambda x_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$ có định thức $\det(A - \lambda E_n) = 0$, nên hệ đó có một nghiệm phức không tầm thường $(b_1, ..., b_n)$. Tức là

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j = \lambda b_i \quad (i = 1, ..., n).$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên với liên hợp phức $\overline{b_i}$ của $b_i$ rồi cộng lại theo $i$, ta có

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_j\overline{b_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i\overline{b_i} = \lambda(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2).$$

Hệ số $\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$ là một số thực, nên để chứng minh $\lambda$ là thực ta chỉ cần chứng minh vế trái cũng là một số thực. Ta có

$$\begin{aligned}
\overline{\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_j\overline{b_i}} &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}b_j\overline{b_i}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_j}b_i \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\overline{b_j}b_i \qquad (\text{do } A \text{ đối xứng}) \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_i}b_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_j\overline{b_i}.
\end{aligned}$$

□

**Bổ đề 3.10** *Giả sử $\varphi$ là một phép biến đổi đối xứng của $E$. Nếu $U$ là một không gian véctơ con $\varphi$-ổn định của $E$ thì $U^\perp$ cũng vậy.*

**Chứng minh:** Nếu $u \in U$ thì $\varphi(u) \in U$. Với mọi $v \in U^\perp$, ta có

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = 0.$$

Do đó $\varphi(v) \in U^\perp$. □

**Định lý 3.11** *Phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ của không gian véctơ Euclid hữu hạn chiều $E$ là đối xứng nếu và chỉ nếu có một cơ sở trực chuẩn của $E$ gồm toàn những véctơ riêng của $\varphi$.*

**Chứng minh:** Nếu $E$ có một cơ sở trực chuẩn gồm những véctơ riêng của $\varphi$ thì ma trận của $\varphi$ trong cơ sở đó là một ma trận chéo, và do đó đối xứng. Vì thế $\varphi$ đối xứng.

Ngược lại, giả sử $\varphi$ đối xứng, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n = \dim E$ rằng có một cơ sở trực chuẩn của $E$ gồm toàn những véctơ riêng của $\varphi$. Kết luận là hiển nhiên với $n = 1$, vì khi đó mỗi véctơ khác 0 trong $E$ đều là véctơ riêng của $\varphi$. Giả sử quy nạp rằng kết luận đúng với mọi không gian có số chiều nhỏ hơn $n$. Theo Mệnh đề 3.9, $\varphi$ có một giá trị riêng thực $\lambda_1$. Gọi $e_1$ là một véctơ riêng có độ dài bằng 1, ứng với giá trị riêng $\lambda_1$. Khi đó $\mathcal{L}(e_1)$ là một không gian véctơ con $\varphi$-ổn định. Theo bổ đề trên, không gian $\mathcal{L}(e_1)^\perp$ cũng là $\varphi$-ổn định. Ngoài ra, ta có

$$\dim \mathcal{L}(e_1)^\perp = \dim E - 1 = n - 1 < n.$$

Theo giả thiết quy nạp, có một cơ sở trực chuẩn $(e_2, ..., e_n)$ của $\mathcal{L}(e_1)^\perp$ gồm toàn những véctơ riêng của $\varphi$. Khi đó $(e_1, e_2, ..., e_n)$ là cơ sở trực chuẩn của $E$ cũng gồm toàn những véctơ riêng của $\varphi$. $\square$

**Hệ quả 3.12** *Mọi ma trận thực đối xứng đều chéo hoá được nhờ các ma trận trực giao. Cụ thể hơn, nếu $A$ là một ma trận thực đối xứng, thì tồn tại ma trận trực giao $Q$ để cho*

$$B = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$$

*là một ma trận chéo.*

**Chứng minh:** Chọn một không gian véctơ Euclid $E$ số chiều $n$, là số hàng và số cột của ma trận $A$. Gọi $\varphi$ là tự đồng cấu của $E$ nhận $A$ làm ma trận trong một cơ sở trực chuẩn nào đó $(e_1, ..., e_n)$ của $E$. Khi đó $\varphi$ là một phép biến đổi đối xứng, vì $A$ là đối xứng.

Theo Định lý 3.11, có một cơ sở trực chuẩn $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ của $E$ gồm toàn những véctơ riêng của $\varphi$. Ma trận $B$ của $\varphi$ trong cơ sở này tất nhiên là một ma trận chéo.

Bây giờ gọi $Q$ là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $(e_1, ..., e_n)$ sang cơ sở trực chuẩn $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Khi đó, $Q$ là một ma trận trực giao. Hơn nữa, ta có

$$B = Q^{-1}AQ = Q^tAQ. \qquad \square$$

**Ví dụ:** Tìm một ma trận trực giao $Q$ làm chéo hoá ma trận đối xứng sau đây:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lời giải:** Trước hết ta tìm đa thức đặc trưng của $A$:

$$\det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} = (X-2)^3(X+2).$$

Sau đó, ta tìm véctơ riêng của $A$ ứng với giá trị riêng $\lambda_4 = -2$:

$$(A + 2E_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z + t \\ x + 3y - z - t \\ x - y + 3z - t \\ x - y - z + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ này có họ nghiệm phụ thuộc một tham số $-x = y = z = t$. Véctơ $e_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$ thoả mãn hệ phương trình đó và có độ dài bằng đơn vị.

Tiếp theo, ta tìm các véctơ riêng của $A$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$(A - 2E_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + z + t \\ x - y - z - t \\ x - y - z - t \\ x - y - z - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ này tương đương với chỉ một phương trình

$$x - y - z - t = 0.$$

Nếu chọn $x = y$ thì $z = -t$. Ta muốn tìm các véctơ riêng có độ dài bằng đơn vị, tức là $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2x^2 + 2z^2 = 1$. Do đó $x^2 + z^2 = \frac{1}{2}$. Từ đây ta có thể chọn hai véctơ riêng độc lập tuyến tính $e_1, e_2$ với các toạ độ tương ứng là

$$\begin{aligned} & x_1 = y_1 = z_1 = \tfrac{1}{2}, t_1 = -\tfrac{1}{2}, \\ \text{và} \quad & x_2 = y_2 = t_2 = \tfrac{1}{2}, z_2 = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

May mắn, hai véctơ này trực giao với nhau. (Nếu trái lại, ta tiến hành trực giao hoá chúng). Cuối cùng, ta tìm véctơ riêng $e_3$ ứng với $\lambda = 2$ bằng cách đòi hỏi nó trực giao với hai véctơ $e_1, e_2$, tức là thoả mãn thêm hai phương trình

$$\begin{cases} x + y + z - t &= 0, \\ x + y - z + t &= 0. \end{cases}$$

Ngoài ra, ta muốn $|e_3| = 1$. Từ đó, $e_3$ có các toạ độ $x_3 = z_3 = t_3 = \frac{1}{2}, y_3 = -\frac{1}{2}$.

Ma trận cần tìm $Q$ có các véctơ cột chính là các véctơ riêng $(e_1, e_2, e_3, e_4)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$B = Q^{-1}AQ = Q^tAQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

## 4 Vài nét về không gian Unita

Trong tiết này ta nói vài nét về những thay đổi cần thiết khi nghiên cứu việc đo độ dài của các véctơ trong một không gian véctơ phức. Trong những không gian như thế, ta *không định nghĩa được khái niệm góc* giữa hai véctơ bất kỳ. Tuy thế, khái niệm trực giao thì vẫn có nghĩa.

Giả sử $E$ là một không gian véctơ phức.

**Định nghĩa 4.1** Một hàm $\eta : E \times E \to \mathbf{C}$ được gọi là một *dạng Hermit* trên $E$ nếu nó thoả mãn hai điều kiện sau đây:

(1) $\eta$ tuyến tính đối với biến thứ nhất:

$$\begin{aligned}\eta(\alpha_1+\alpha_2,\beta) &= \eta(\alpha_1,\beta)+\eta(\alpha_2,\beta) \quad \forall \alpha_1,\alpha_2,\beta\in E,\\ \eta(a\alpha,\beta) &= a\eta(\alpha,\beta), \qquad\qquad\quad \forall a\in\mathbf{C},\alpha,\beta\in E.\end{aligned}$$

(2) $\eta$ là một hàm *liên lợp đối xứng*:

$$\eta(\beta,\alpha)=\overline{\eta(\alpha,\beta)}, \qquad \forall \alpha,\beta\in E,$$

trong đó $\overline{\eta(\alpha,\beta)}$ là liên hợp phức của $\eta(\alpha,\beta)$.

Mỗi dạng Hermit đều liên hợp tuyến tính đối với biến thứ hai. Tức là

$$\begin{aligned}\eta(\alpha,\beta_1+\beta_2) &= \eta(\alpha,\beta_1)+\eta(\alpha,\beta_2) \quad \forall \alpha,\beta_1,\beta_2\in E,\\ \eta(\alpha,b\beta) &= \bar{b}\eta(\alpha,\beta), \qquad\qquad\quad \forall b\in\mathbf{C},\alpha,\beta\in E.\end{aligned}$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned}\eta(\alpha,\beta_1+\beta_2) &= \overline{\eta(\beta_1+\beta_2,\alpha)}=\overline{\eta(\beta_1,\alpha)+\eta(\beta_2,\alpha)}\\ &= \overline{\eta(\beta_1,\alpha)}+\overline{\eta(\beta_2,\alpha)}=\eta(\alpha,\beta_1)+\eta(\alpha,\beta_2).\\ \eta(\alpha,b\beta) &= \overline{\eta(b\beta,\alpha)}=\overline{b\eta(\beta,\alpha)}\\ &= \bar{b}\,\overline{\eta(\beta,\alpha)}=\bar{b}\eta(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Đặc biệt, lấy $\alpha=\beta$, ta có

$$\eta(\alpha,\alpha)=\overline{\eta(\alpha,\alpha)}.$$

Vì thế, $\eta(\alpha,\alpha)$ là một số thực, với mọi $\alpha\in E$.

**Định nghĩa 4.2** Dạng Hermit $\eta$ được gọi là một *tích vô hướng* nếu nó có tính xác định dương:

$$\eta(\alpha, \alpha) \geq 0, \qquad \forall \alpha \in E,$$
$$\eta(\alpha, \alpha) = 0 \iff \alpha = 0.$$

Không gian véctơ phức $E$ cùng với một tích vô hướng đã cho trên $E$ được gọi là một *không gian Unita*.

Khi đó $\eta(\alpha, \beta)$ được gọi là tích vô hướng của $\alpha$ và $\beta$, và thường được ký hiệu bởi $\langle \alpha, \beta \rangle$.

**Nhận xét:** Không thể định nghĩa tích vô hướng trên không gian véctơ phức như một dạng song tuyến tính, đối xứng và xác định dương. Lý do đơn giản là vì không tồn tại một dạng như vậy. Thật thế, nếu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là một dạng song tuyến tính, đối xứng và xác định dương thì

$$\langle a\alpha, a\alpha \rangle = a^2 \langle \alpha, \alpha \rangle, \forall a \in \mathbf{C}, \alpha \in E.$$

Nếu $\langle \alpha, \alpha \rangle$ là một số thực dương thì $a^2 \langle \alpha, \alpha \rangle$ không thực, chẳng hạn với $a = \sqrt{i}$, trong đó $i$ là đơn vị ảo.

**Ví dụ:** Không gian $\mathbf{C}^n$ là một không gian Unita với *tích vô hướng chính tắc* định nghĩa như sau:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n},$$

trong đó $\alpha = (x_1, ..., x_n)^t, \beta = (y_1, ..., y_n)^t$.

Trong không gian Unita $E$, số thực không âm $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ được gọi là độ dài của véctơ $\alpha$.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vẫn còn đúng trong các không gian Unita. Tuy thế, tỷ số $\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}$ nói chung là một số phức mà không là số thực, nên ta không định nghĩa được góc giữa hai véc tơ khác 0 bất kỳ.

Mặc dầu vậy, ta vẫn nói $\alpha$ trực giao với $\beta$ và viết $\alpha \perp \beta$ nếu $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

Mọi không gian unita đều có cơ sở trực chuẩn. Điều này có thể được chứng minh bằng cách trực giao hoá Shmidt một cơ sở tuỳ ý của $E$ để xây dựng một cơ sở trực giao, rồi chuẩn hoá để có một cơ sở trực chuẩn của $E$.

**Định nghĩa 4.3** Tự đồng cấu $f : E \to E$ được gọi là một *biến đổi unita* nếu $f$ bảo toàn tích vô hướng:

$$\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle, \qquad \forall \alpha, \beta \in E.$$

Một phép biến đổi tuyến tính là unita nếu và chỉ nếu nó biến mỗi cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực chuẩn.

Giả sử $A = (a_{ij})$ là một ma trận phức vuông cấp $n$. Ma trận phụ hợp phức $A^* = (a^*_{ij})$ của $A$ được định nghĩa như sau:

$$a^*_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

**Định nghĩa 4.4** $A$ được gọi là một *ma trận* unita nếu $AA^* = A^*A = E_n$.

Ma trận chuyển giữa hai cơ sở trực chuẩn bất kỳ của $E$ là một ma trận unita.

Một phép biến đổi tuyến tính là unita nếu và chỉ nếu ma trận của nó trong mỗi cơ sở trực chuẩn của $E$ là một ma trận unita.

Khác với các phép biến đổi trực giao, mọi phép biến đổi unita đều chéo hoá được. Điều này là hệ quả của tính đóng đại số của trường số phức. Mọi giá trị riêng của một phép biến đổi unita đều có môđun bằng 1.

**Định nghĩa 4.5** Phép biến đổi tuyến tính $f : E \to E$ được gọi là *tự liên hợp* nếu

$$\langle f(\alpha), \beta\rangle = \langle \alpha, f(\beta)\rangle, \qquad \forall \alpha, \beta \in E.$$

Ma trận $A$ được gọi là tự liên hợp nếu $A = A^*$.

Một phép biến đổi tuyến tính là tự liên hợp nếu và chỉ nếu ma trận của nó trong mỗi cơ sở trực chuẩn của $E$ là một ma trận tự liên hợp.

Mỗi phép biến đổi tự liên hợp của $E$ đều có một cơ sở trực chuẩn của $E$ gồm toàn những véctơ riêng của nó. Mọi giá trị riêng của các phép biến đổi tự liên hợp đều thực.

Hệ quả là mọi ma trận tự liên hợp $A$ đều có một ma trận unita $C$ sao cho $C^*AC = C^{-1}AC$ là ma trận chéo, với các phần tử trên đường chéo đều thực.

## Bài tập

1. Chứng minh rằng các véctơ $(1, -2, 2, -3)$ và $(2, -3, 2, 4)$ trực giao với nhau. Bổ sung hệ véctơ đó để thu được một cơ sở trực giao của không gian.

2. Bổ sung hệ gồm 2 véctơ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ và $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ để thu được một cơ sở trực chuẩn của không gian.

3. Dùng phép trực giao hoá để xây dựng một cơ sở trực giao của không gian con sinh bởi các véctơ sau đây:
$$(2, 1, 3, -1),\ (7, 4, 3, 3),\ (1, 1, -6, 0),\ (5, 7, 7, 8).$$

4. Tìm một cơ sở trực giao cho phần bù trực giao $U^\perp$ của không gian con $U$ trong $\mathbf{R}^4$ sinh bởi các véctơ sau đây:
$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 1),\ \alpha_2 = (2, 1, 2, 3),\ \alpha_3 = (0, 1, -2, 1).$$

5. Không gian véctơ con $U$ được xác định bởi hệ phương trình
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 0. \end{array}$$
Tìm hệ phương trình xác định phần bù trực giao $U^\perp$ của $U$ trong $\mathbf{R}^4$.

6. Xác định hình chiếu trực giao của véctơ $\alpha = (4, -1, -3, 4)$ lên không gian con $U$ sinh bởi các véctơ

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1),\ \alpha_2 = (1, 2, 2, -1),\ \alpha_3 = (1, 0, 0, 3).$$

7. Xác định hình chiếu trực giao của véctơ $\alpha = (7, -4, -1, 2)$ lên không gian con $U$ xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 9x_4 & = & 0. \end{array}$$

8. Tìm khoảng cách từ véctơ $\alpha = (2, 4, -4, 2)$ tới phẳng được xác định bởi hệ phương trình:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 2. \end{array}$$

9. Chứng minh rằng khoảng cách $d$ từ véctơ $\alpha$ tới phẳng $\beta + U$, trong đó $U$ là không gian con có cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$, nghiệm đúng công thức

$$d^2 = \frac{G(\alpha_1, ..., \alpha_k, \alpha - \beta)}{G(\alpha_1, ..., \alpha_k)}.$$

Ở đây

$$G(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \det(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{k \times k}$$

là định thức Gram (còn gọi là định thức Gram - Shmidt) của hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$.

10. Tìm khoảng cách giữa hai phẳng $\alpha + U$ và $\beta + V$, trong đó $\alpha = (4, 5, 3, 2)$ $\beta = (1, -2, 1, -3)$, không gian con $U$ sinh bởi các véctơ

$$(1, 2, 2, 2) \text{ và } (2, -2, 1, 2),$$

và không gian con $V$ sinh bởi các véctơ

$$(2, 0, 2, 1) \text{ và } (1, -2, 0, -1).$$

11. Cho các véctơ $\alpha$ và $\beta$ trong không gian véctơ Euclid $E$. Chứng minh rằng:

    (a) $\alpha = a\beta$ với số thực nào đó $a > 0$ nếu và chỉ nếu góc giữa hai véctơ $\alpha$ và $\beta$ bằng 0;

    (b) $\alpha = a\beta$ với số thực nào đó $a < 0$ nếu và chỉ nếu góc giữa hai véctơ $\alpha$ và $\beta$ bằng $\pi$.

12. Chứng minh rằng góc giữa véctơ $\alpha$ với các véctơ $\beta \in L$, trong đó $L$ là một không gian véctơ con, đạt giá trị nhỏ nhất khi $\beta$ là hình chiếu vuông góc $\beta_0$ của $\alpha$ lên $L$. Đẳng thức $\cos\angle(\alpha, \beta) = \cos\angle(\alpha, \beta_0)$, trong đó $\beta \in L$, xảy ra nếu và chỉ nếu $\beta = a\beta_0$ với số thực nào đó $a > 0$.

13. Ta gọi góc giữa $\alpha$ và hình chiếu vuông góc của nó lên $L$ là góc giữa $\alpha$ và $L$ (xem bài tập trước). Tìm góc giữa $\alpha = (1, 0, 3, 0)$ và không gian con $L$ sinh bởi các véctơ sau đây:

$$(5, 3, 4, -3),\ (1, 1, 4, 5),\ (2, -1, 1, 2).$$

14. Cho một hệ véctơ độc lập tuyến tính $(e_1, ..., e_k)$ và hai hệ véctơ trực giao $(f_1, ..., f_k)$ và $(g_1, ..., g_k)$ sao cho các véctơ $f_s$ và $g_s$ biểu thị tuyến tính được qua các véctơ $e_1, ..., e_s$ (với $s = 1, 2, ..., k$). Chứng minh rằng $f_s = a_s g_s$ trong đó $a_s$ là một số thực khác không $(s = 1, 2, ..., k)$.

15. Xét tích vô hướng sau đây trong không gian $\mathbf{R}[X]_n$ các đa thức thực có bậc không vượt quá $n$:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(X)g(X)dX.$$

    Chứng minh rằng nếu áp dụng quá trình trực giao hoá vào cơ sở $(1, X, ..., X^n)$ của không gian nói trên thì ta thu được hệ đa thức chỉ khác với các đa thức Legendre sau đây các nhân tử thực khác không:

$$P_0(X) = 1,\ \ P_k(X) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dX^k}[(X^2-1)^k],$$

    với $(k = 1, 2, ..., n)$. Tìm các nhân tử đó.

16. Chứng minh rằng định thức Gram $G(\alpha_1, ..., \alpha_k) = \det(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{k \times k}$ không thay đổi sau quá trình trực giao hoá. Cụ thể, giả sử $(e_1, ..., e_k)$ là kết quả của quá trình trực giao hoá áp dụng cho hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$. Khi đó

$$G(\alpha_1, ..., \alpha_k) = G(e_1, ..., e_k) = \langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle \cdots \langle e_k, e_k \rangle.$$

(Trên cơ sở đó, người ta gọi $\sqrt{G(\alpha_1, ..., \alpha_k)}$ là thể tích $k$-chiều của hình hộp với các cạnh $\alpha_1, ..., \alpha_k$.)

17. Chứng minh rằng các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu $G(\alpha_1, ..., \alpha_k) \neq 0$.

18. Chứng minh rằng nếu $(e_1, ..., e_k)$ là kết quả của quá trình trực giao hoá áp dụng cho hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ thì

$$|e_k|^2 = \frac{G(\alpha_1, ..., \alpha_k)}{G(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1})},$$

với $k = 1, 2, ..., n$. (Định thức Gram của một hệ gồm không véctơ được qui ước coi là bằng 1.)

19. Chứng minh bất đẳng thức

$$0 \leq G(\alpha_1, ..., \alpha_k) \leq |\alpha_1|^2 \cdots |\alpha_k|^2,$$

trong đó dấu bằng xảy ra ở bất đẳng thức thứ hai nếu và chỉ nếu các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_k$ đôi một trực giao hoặc ít nhất một trong các véctơ đó bằng 0.

20. Chứng minh bất đẳng thức

$$G(\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_\ell) \leq G(\alpha_1, ..., \alpha_k) G(\beta_1, ..., \beta_\ell),$$

trong đó dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu

$$\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = 0 \;\; (i = 1, ..., k;\; j = 1, ..., \ell)$$

hoặc một trong các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_\ell$ bằng 0.

21. Các cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ và $f_1, ..., f_n)$ của một không gian vectơ Euclid được gọi là nghịch đảo của nhau nếu

$$\langle e_i, f_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j, \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất cơ sở nghịch đảo đối với mỗi cơ sở $(e_1, ..., e_n)$.

22. Cho hai hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ và $(\beta_1, ..., \beta_k)$ của một không gian véctơ Euclid $E$. Chứng minh rằng tồn tại một tự đồng cấu trực giao $\varphi$ của $E$ sao cho $\varphi(\alpha_i) = \beta_i \ (i = 1, 2, ..., k)$ nếu và chỉ nếu các ma trận Gram của hai hệ véctơ đó trùng nhau:

$$(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{k \times k} = (\langle \beta_i, \beta_j \rangle)_{k \times k}.$$

23. Phép biến đổi trực giao $\varphi$ có ma trận là $A$ như dưới đây trong một cơ sở trực chuẩn nào đó. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn sao cho ma trận $B$ của $\varphi$ trong cơ sở đó có dạng chính tắc, và tìm ma trận $B$:

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Tìm dạng chính tắc $B$ của ma trận trực giao $A$ sau đây và ma trận trực giao $Q$ sao cho $B = Q^{-1}AQ$:

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

25. Chứng minh toàn bộ Mệnh đề 3.4.

26. Giả sử $(e_1, e_2)$ là một cơ sở trực chuẩn của mặt phẳng và tự đồng cấu $\varphi$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ trong cơ sở gồm $f_1 = e_1$ và $f_2 = e_1 + e_2$. Tìm ma trận của tự đồng cấu liên hợp $\varphi^*$ trong cùng cơ sở $(f_1, f_2)$.

27. Phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ của không gian véctơ Euclid $\mathbf{R}_3$ có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

trong cơ sở gồm các véctơ $f_1 = (1, 2, 1)$, $f_2 = (1, 1, 2)$, $f_3 = (1, 1, 0)$. Tìm ma trận của phép biến đổi liên hợp $\varphi^*$ trong cùng cơ sở đó.

28. Tìm ma trận của phép biến đổi liên hợp $\varphi^*$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}_3$ nếu $\varphi$ biến các véctơ $\alpha_1 = (0, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ tương ứng thành các véctơ $\beta_1 = (1, 2, 1)$, $\beta_2 = (3, 1, 2)$, $\beta_3 = (7, -1, 4)$.

29. Cho một phân tích của không gian véctơ Euclid $E$ thành tổng trực tiếp của hai không gian con: $E = U_1 \oplus U_2$. Gọi $\varphi$ là phép chiếu lên $U_1$ theo phương $U_2$. Chứng minh rằng $E = U_1^\perp \oplus U_2^\perp$, và $\varphi^*$ là phép chiếu lên $U_2^\perp$ theo phương $U_1^\perp$.

30. Chứng minh rằng nếu $U$ là một không gian con ổn định đối với phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ thì $U^\perp$ là một không gian con ổn định đối với phép biến đổi liên hợp $\varphi^*$.

31. Chứng minh rằng hai phép biến đổi tuyến tính liên hợp với nhau có cùng đa thức đặc trưng.

32. Chứng minh rằng nếu phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ có ma trận $A$ trong cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ thì phép biến đổi liên hợp $\varphi^*$ có ma trận $A^t$ trong cơ sở nghịch đảo với cơ sở nói trên.

33. Giả sử $U = (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{n\times n}$ là ma trận Gram của cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Chứng minh rằng ma trận $A$ của phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ và ma trận $B$ của phép biến đổi liên hợp $\varphi^*$ trong cơ sở nói trên liên hệ với nhau bởi công thức:

   (a) $B = U^{-1}A^tU$ đối với không gian véctơ Euclid;

   (b) $\overline{B} = U^{-1}A^tU$ đối với không gian unita.

   Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để $\varphi$ là một phép biến đổi tự liên hợp.

34. Giả sử $U$ là ma trận Gram của một cơ sở nào đó của không gian và $A$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ trong cơ sở đó. Tìm ma trận của phép biến đổi liên hợp $\varphi^*$ trong cùng cơ sở nói trên, cho biết

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

35. Gọi $\varphi$ là phép chiếu lên $U_1$ theo phương $U_2$ (hoặc phép phản xạ qua $U_1$ theo phương $U_2$). Chứng minh rằng $\varphi$ là đối xứng nếu và chỉ nếu các không gian con $U_1$ và $U_2$ trực giao.

36. Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi$ xác định bởi ma trận $A$ sau đây trong một cơ sở trực chuẩn nào đó của không gian. Tìm một cơ sở trực chuẩn gồm những véctơ riêng của $\varphi$ và ma trận của nó trong cơ sở ấy:

$$(a)\, A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad (b)\, A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

37. Chứng minh rằng không gian véctơ Euclid $E$ có một cơ sở trực chuẩn gồm các véctơ đồng thời là các véctơ riêng của hai phép biến đổi đối xứng $\varphi$ và $\psi$ nếu và chỉ nếu hai phép biến đổi này giao hoán với nhau.

38. Chứng minh rằng mỗi tự đồng cấu $\varphi$ của một không gian véctơ Euclid đều có thể phân tích thành $\varphi = \psi_1\chi_1$ và $\varphi = \chi_2\psi_2$, trong đó $\psi_1$, $\psi_2$ là các phép biến đổi đối xứng có mọi giá trị riêng đều dương, còn $\chi_1, \chi_2$ là các phép biến đổi trực giao. Chứng minh rằng mỗi cách phân tích nói trên đều duy nhất.

39. Phân tích các ma trận sau đây theo các cách nói ở bài trước:

$$(a)\; A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\; A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

40. Chứng minh rằng phép biến đổi đối xứng $\varphi$ là xác định dương (tức là $\langle\varphi(\alpha), \alpha\rangle > 0$ với mọi $\alpha \neq 0$) nếu và chỉ nếu các hệ số của đa thức đặc trưng của nó $X^n + c_1X^{n-1} + \cdots + c_n$ đều khác không và đan dấu; Hơn nữa, $\varphi$ là không âm (tức là $\langle\varphi(\alpha), \alpha\rangle \geq 0$ với mọi $\alpha$) nếu và chỉ nếu có một chỉ số $k$ sao cho $c_0 = 1, c_1, ..., c_k$ khác không và đan dấu, còn $c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$.

41. Chứng minh rằng nếu $\varphi$ và $\psi$ là các phép biến đổi đối xứng, trong đó $\varphi$ xác định dương, thì các giá trị riêng của $varphi\psi$ đều thực.

42. Chứng minh rằng nếu $\varphi$ và $\psi$ là các phép biến đổi đối xứng với các giá trị riêng không âm và một trong hai phép biến đổi là không suy biến thì các giá trị riêng của $varphi\psi$ đều thực và không âm.

43. Chứng minh rằng mỗi phép biến đổi đối xứng không âm có hạng $r$ đều là tổng của $r$ phép biến đổi đối xứng không âm có hạng 1.

44. Phép biến đổi $\varphi$ của không gian Euclid $E$ được gọi là phản đối xứng nếu $\varphi^* = -\varphi$ . Chứng minh rằng $\varphi$ là phản đối xứng nếu và chỉ nếu ma trận của nó trong mỗi cơ sở trực chuẩn của không gian đều là ma trận phản đối xứng.

45. Chứng minh rằng nếu không gian $U$ ổn định đối với phép biến đổi phản đối xứng $\varphi$ thì phần bù trực giao $U^\perp$ của nó cũng vậy.

# Chương VI

# DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Nội dung chính của chương này là phân loại tất cả các dạng song tuyến tính đối xứng và các dạng toàn phương trên không gian véctơ thực hữu hạn chiều.

## 1 Khái niệm dạng song tuyến tính và dạng toàn phương

Giả sử $V$ là một không gian véctơ thực.

**Định nghĩa 1.1** Ánh xạ $\eta : V \times V \to \mathbf{R}$ được gọi là một *dạng song tuyến tính* trên $V$ nếu nó tuyến tính với mỗi biến khi cố định biến còn lại; tức là

$$\begin{aligned}
\eta(\alpha_1+\alpha_2,\beta) &= \eta(\alpha_1,\beta)+\eta(\alpha_2,\beta),\\
\eta(a\alpha,\beta) &= a\eta(\alpha,\beta),\\
\eta(\alpha,\beta_1+\beta_2) &= \eta(\alpha,\beta_1)+\eta(\alpha,\beta_2),\\
\eta(\alpha,a\beta) &= a\eta(\alpha,\beta),
\end{aligned}$$

với mọi $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_j \in V, a \in \mathbf{R}$.

Dạng song tuyến tính $\eta$ được gọi là đối xứng nếu

$$\eta(\alpha,\beta) = \eta(\beta,\alpha)$$

với mọi $\alpha, \beta \in V$.

**Định nghĩa 1.2** Giả sử $\eta$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $V$. Khi đó ánh xạ $H : V \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$H(\alpha) = \eta(\alpha,\alpha)$$

được gọi là *dạng toàn phương* trên $V$ ứng với dạng song tuyến tính đối xứng $\eta$.

**Nhận xét:** $\eta$ được hoàn toàn xác định bởi $H$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\eta(\alpha+\beta,\alpha+\beta) &= \eta(\alpha,\alpha)+\eta(\alpha,\beta)+\eta(\beta,\alpha)+\eta(\beta,\beta)\\ &= \eta(\alpha,\alpha)+2\eta(\alpha,\beta)+\eta(\beta,\beta).\end{aligned}$$

Từ đó, ta nhận được

$$\begin{aligned}\eta(\alpha,\beta) &= \frac{1}{2}[\eta(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-\eta(\alpha,\alpha)-\eta(\beta,\beta)]\\ &= \frac{1}{2}[H(\alpha+\beta)-H(\alpha)-H(\beta)].\end{aligned}$$

Vì thế, $\eta$ được gọi là dạng cực của dạng toàn phương $H$.

**Ví dụ 1.3** (a) $\eta(x,y)=xy$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên không gian véctơ $V=\mathbf{R}$. Dạng toàn phương ứng với $\eta$ là

$$H(x)=x^2.$$

(b) Mỗi tích vô hướng trên $V$ là một dạng song tuyến tính, đối xứng và xác định dương. Dạng toàn phương ứng với nó chính là

$$H(\alpha)=|\alpha|^2.$$

Giả sử $V$ là một không gian véctơ thực hữu hạn chiều, và $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ là một cơ sở của nó. Nếu $\alpha=\sum_i x_i\alpha_i, \beta=\sum_j y_j\alpha_j$, thì

$$\eta(\alpha,\beta)=\eta(\sum_i x_i\alpha_i,\sum_j y_j\alpha_j)=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j\eta(\alpha_i,\alpha_j).$$

Như vậy, $\eta$ hoàn toàn được xác định bởi bộ các giá trị $(\eta(\alpha_i,\alpha_j))_{i,j=1}^n$ .

Ta xét ma trận $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n=(\eta(\alpha_i,\alpha_j))_{i,j=1}^n$. Dạng $\eta$ là đối xứng nếu và chỉ nếu $A$ là một ma trận đối xứng. Thật vậy, nếu $\eta$ đối xứng thì

$$a_{ij}=\eta(\alpha_i,\alpha_j)=\eta(\alpha_j,\alpha_i)=a_{ji},$$

với mọi $i, j$, nên $A$ đối xứng. Ngược lại, nếu $A$ đối xứng thì

$$\begin{aligned}\eta(\alpha,\beta) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \eta(\alpha_i,\alpha_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j = \eta(\beta,\alpha),\end{aligned}$$

với mọi $\alpha, \beta \in V$, tức là $\eta$ đối xứng.

**Định nghĩa 1.4** *Ma trận* $A = (a_{ij})_{n\times n} = (\eta(\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ *được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính* $\eta$ *(hoặc ma trận của của dạng toàn phương* $H$ *ứng với* $\eta$*) trong cơ sở* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Ký hiệu các véctơ cột toạ độ của $\alpha$ và $\beta$ bởi

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Đồng nhất ma trận vuông cấp một $x^t A y$ với phần tử duy nhất $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ của nó, ta có

$$\eta(\alpha,\beta) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x^t A y.$$

Ta gọi đó là biểu thức toạ độ của của dạng song tuyến tính $\eta$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Cũng như vậy, biểu thức

$$H(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^t A x$$

được gọi là biểu thức toạ độ của của dạng toàn phương $H$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Mệnh đề sau đây cho thấy ma trận của dạng song tuyến tính thay đổi thế nào khi đổi cơ sở.

**Mệnh đề 1.5** *Giả sử $A$ và $B$ là ma trận của dạng song tuyến tính $\eta$ (hay cũng vậy, của dạng toàn phương $H$) tương ứng trong các cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $(\beta_1, ..., \beta_n)$. Nếu $C$ là ma trận chuyển từ cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_n)$ thì ta có*

$$B = C^t AC.$$

**Chứng minh:** Ký hiệu $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}, C = (c_{ij})_{n\times n}$, ta có

$$\begin{aligned} b_{k\ell} &= \eta(\beta_k, \beta_\ell) = \eta(\sum_i c_{ik}\alpha_i, \sum_j c_{j\ell}\alpha_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_{ik}c_{j\ell}\eta(\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{i,j=1}^n c_{ik}a_{ij}c_{j\ell}, \end{aligned}$$

với mọi $k, \ell$. Đó chính là phần tử nằm ở hàng $k$ cột $\ell$ của ma trận $C^tAC$. Điều này tương đương với

$$B = C^t AC. \qquad \square$$

## 2 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Giả sử $\eta$ là một dạng song tuyến tính đối xứng (không nhất thiết xác định dương) trên không gian véctơ thực $V$ và $H$ là dạng toàn phương ứng với nó. Khái niệm $\eta$-trực giao sau đây là một tổng quát hoá của khái niệm trực giao đối với một tích vô hướng trong không gian véctơ Euclid.

Đối với các véctơ $\alpha, \beta \in V$, nếu $\eta(\alpha, \beta) = 0$ thì ta nói $\alpha$ $\eta$-vuông góc (hay $\eta$-trực giao) với $\beta$, và ký hiệu $\alpha \perp_\eta \beta$.

Lưu ý rằng, vì $\eta$ không nhất thiết xác định dương, nên rất có thể $\alpha \perp_\eta \alpha$ với một số véctơ $\alpha \neq 0$ nào đó.

**Định nghĩa 2.1** Cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của $V$ được gọi là một *cơ sở $\eta$-trực giao* (hay $H$-trực giao, hay đơn giản, *trực giao*, khi $\eta$ và $H$ đã rõ) nếu

$$\eta(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \qquad \forall i \neq j.$$

Điều này tương đương với sự kiện ma trận $A$ của $\eta$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một ma trận chéo, hay cũng vậy, biểu thức toạ độ của dạng toàn phương $H$ ứng với $\eta$ trong cơ sở đó có dạng

$$H(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2,$$

ở đây $a_i = a_{ii}$.

Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là một cơ sở $\eta$-trực giao. Khi đó, sau một phép hoán vị các phần tử trong cơ sở đó (nếu cần), biểu thức tọa độ của dạng toàn phương $H$ tương ứng với $\eta$ trong cơ sở này có dạng

$$H(\alpha) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_p x_p^2 - a_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - a_{p+q} x_{p+q}^2,$$

trong đó $a_i > 0 (0 < i \leq p+q, 0 \leq p+q \leq n)$. Biểu thức này được gọi là *dạng chính tắc* của dạng toàn phương $H = H_\eta$.

Ta "chuẩn hoá" cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ bằng cách đặt

$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}} \alpha_i \ (i = 1, ..., p+q), \beta_i = \alpha_i (i > p+q).$$

Khi đó $\alpha = \sum_i x_i \alpha_i = \sum_i y_i \beta_i$, trong đó

$$y_i = \sqrt{a_i} x_i \ (i = 1, ..., p+q), y_i = x_i (i > p+q).$$

Biểu thức toạ độ của $H$ trong cơ sở mới $(\beta_1, ..., \beta_n)$ là

$$H(\alpha) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2.$$

Biểu thức này được gọi là *dạng chuẩn tắc* của dạng toàn phương $H = H_\eta$.

**Định lý 2.2** *Tồn tại một cơ sở $\eta$-trực giao cho mỗi dạng song tuyến tính đối xứng $\eta$ trên không gian véctơ thực hữu hạn chiều $V$.*

**Chứng minh:** Gọi $A$ là ma trận của $\eta$ trong một cơ sở nào đó $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Vì $A$ là một ma trận đối xứng thực, nên tồn tại ma trận trực giao $Q$ sao cho $B =$

$Q^{-1}AQ = Q^tAQ$ là một ma trận chéo. Gọi $(\beta_1, ..., \beta_n)$ là cơ sở mà ma trận chuyển từ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang nó là $Q$. Khi đó, theo Mệnh đề 1.5, $B$ là ma trận của $\eta$ trong cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_n)$. Vì $B$ là một ma trận chéo, nên $(\beta_1, ..., \beta_n)$ là một cơ sở $\eta$-trực giao. □

**Hệ quả 2.3** *Giả sử $\eta$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên một không gian véctơ Euclid $E$. Khi đó, tồn tại một cơ sở trực chuẩn của $E$ đồng thời là một cơ sở $\eta$-trực giao.*

**Chứng minh:** Ta lặp lại chứng minh của định lý trước, nhưng xuất phát từ một cơ sở *trực chuẩn* nào đó $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của $E$. Tồn tại ma trận trực giao $Q$ sao cho $B = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$ là một ma trận chéo. Đó chính là ma trận của $\eta$ trong cơ sở $(\beta_1, ..., \beta_n)$ xác định bởi điều kiện ma trận chuyển từ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sang cơ sở đó là $Q$. Vì $B$ là một ma trận chéo, nên $(\beta_1, ..., \beta_n)$ là một cơ sở $\eta$-trực giao. Vì $Q$ trực giao, cho nên $(\beta_1, ..., \beta_n)$ cũng là một cơ sở trực chuẩn của $E$. □

Có thể nhìn hệ quả nói trên từ một khía cạnh khác. Theo cách nhìn này hệ quả khẳng định có thể đưa đồng thời hai dạng toàn phương, trong đó có một dạng xác định dương, về dạng chéo trong cùng một cơ sở.

Bây giờ ta trình bày *Phương pháp Lagrange đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc*. Phương pháp này tiện lợi hơn trong thực hành so với phương pháp được trình bày trong chứng minh Định lý 2.2.

Giả sử dạng toàn phương $H$ được cho trong một cơ sở nào đó $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ bởi biểu thức

$$H(\alpha) = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j, \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Ta xét 3 trường hợp sau đây.

**Trường hợp 1:** Giả sử $a_{ii} \neq 0$ với $i$ nào đó. Sau một phép đánh số lại các phần tử của cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ nếu cần, ta có thể giả sử $a_{11} \neq 0$. Khi đó

$$H = a_{11}(x_1^2 + 2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i) + (\text{những số hạng không chứa } x_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i)^2 + (\text{một dạng toàn phương của } x_2, ..., x_n) \\
&= a_{11}y_1^2 + \sum_{k,\ell=2}^{n} b_{k,\ell} y_k y_\ell \qquad (b_{k\ell} = b_{\ell k}),
\end{aligned}
$$

trong đó

$$
\begin{cases} y_1 &= x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i, \\ y_k &= x_k \qquad (k = 2, 3, ..., n) \end{cases}
$$

là một phép biến đổi toạ độ không suy biến.

Việc đưa $H$ về dạng chính tắc được quy về việc đưa dạng toàn phương $H' = \sum_{k,\ell=2}^n b_{k,\ell} y_k y_\ell$ của $(n-1)$ biến về dạng chính tắc. Điều này có thể thực hiện bằng quy nạp.

**Trường hợp 2:** Mọi $a_{ii} = 0$ $(i = 1, ..., n)$ nhưng có $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$. không giảm tổng quát ta giả sử $a_{12} \neq 0$. Thực hiện phép biến đổi toạ độ không suy biến

$$
\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_k &= y_k \qquad (k = 3, ..., n), \end{cases}
$$

ta có

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2).$$

Từ đó

$$H = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = \sum_{ij} b_{ij} y_i y_j$$

có hệ số của $y_1^2$ là $2a_{12} \neq 0$. Ta trở về trường hợp 1 đã xét.

**Trường hợp 3:** Mọi $a_{ij} = 0$ $(i, j = 1, ..., n)$.

Khi đó $H$ có dạng chính tắc trong bất kỳ cơ sở nào của không gian $V$.

**Ví dụ:** Chứng minh rằng một trong hai dạng toàn phương sau đây

$$
\begin{aligned}
H &= 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3, \\
K &= x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3
\end{aligned}
$$

là xác định dương. Tìm một phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa dạng đó về dạng chuẩn tắc, đồng thời đưa dạng còn lại về dạng chính tắc.

**Lời giải:** Ta sẽ theo sát các bước của chứng minh Hệ quả 2.3.

Dùng phương pháp Lagrange đưa $K$ về dạng chính tắc, ta nhận thấy $K$ xác định dương, bởi vì

$$K = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2.$$

Trước hết ta đưa $K$ về dạng chuẩn tắc bằng phép đổi biến $y_1 = x_1 + x_3, y_2 = 2x_2, y_3 = x_3$. Khi đó

$$\begin{aligned} H &= 8y_1^2 - 7y_2^2 + 8y_3^2 + 8y_1y_2 - 2y_1y_3 + 8y_2y_3, \\ K &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{aligned}$$

Ma trận của $H$ trong cơ sở mới ứng với các biến $y_1, y_2, y_3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Cái khó của bước tiếp theo là phải tìm một phép biến đổi tuyến tính đưa $H$ về dạng chính tắc nhưng không làm thay đổi dạng chuẩn tắc của $K$. Ta sẽ *tìm một biến đổi như thế trong lớp các biến đổi trực giao.*

Để làm điều đó, trước hết ta tính đa thức đặc trưng của ma trận $A$ của dạng toàn phương $H$:

$$\det(A - XE_3) = \det \begin{pmatrix} 8-X & 4 & -1 \\ 4 & -7-X & 4 \\ -1 & 4 & 8-X \end{pmatrix} = -(X-9)^2(X+9).$$

Đa thức này có 3 nghiệm thực kể cả bội $X_1 = X_2 = 9, X_3 = -9$.

Ta tìm các véctơ riêng ứng với các giá trị riêng $X_1 = X_2 = 9$ (của tự đồng cấu của $\mathbf{R}^3$ có ma trận $A$ trong cơ sở chính tắc) bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -x+4y-z &= 0 \\ 4x-16y+4z &= 0 \\ -x+4y-z &= 0. \end{cases}$$

Hệ này tương đương với phương trình đầu tiên của hệ. Ta chọn 2 nghiệm độc lập tuyến tính của nó:

$$\alpha_1 = (1, 0, -1)^t, \quad \alpha_2 = (0, 1, 4)^t.$$

Trực giao hoá hệ gồm hai véctơ nói trên:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \alpha_1, \\ e'_2 &= \alpha_2 + \lambda e'_1, \end{aligned}$$

trong đó $\lambda$ được xác định duy nhất bởi điều kiện $e'_1 \perp e'_2$:

$$\lambda = -\frac{\langle \alpha_2, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle} = -\frac{-4}{2} = 2.$$

Kết quả là $e'_2 = \alpha_2 + 2e'_1 = (2, 1, 2)^t$. Ta chuẩn hoá hai véctơ $e'_1, e'_2$, tức là chia mỗi véctơ cho độ dài của nó, để thu được:

$$\begin{aligned} e_1 &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^t, \\ e_2 &= (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta tìm véctơ riêng ứng với giá trị riêng $X_3 = -9$ bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 17x+4y-z &= 0 \\ 4x+2y+4z &= 0 \\ -x+4y+17z &= 0. \end{cases}$$

Hệ này có hạng bằng 2, nên không gian nghiệm của nó có số chiều bằng 1, và được sinh bởi véctơ sau đây:

$$e'_3 = (1, -4, 1)^t.$$

Chuẩn hoá véctơ này, ta thu được

$$e_3 = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}})^t.$$

Vì $A$ là một ma trận đối xứng, nên hệ $(e_1, e_2, e_3)$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^3$. Xét ma trận trực giao với các cột (theo thứ tự) là $e_1, e_2, e_3$:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Đó chính là ma trận của phép biến đổi trực giao của $\mathbf{R}^3$ biến cơ sở chính tắc thành cơ sở $(e_1, e_2, e_3)$.

Trong cơ sở mới $(e_1, e_2, e_3)$, dạng $K$ vẫn có ma trận đơn vị, bởi vì $Q^t E_3 Q = Q^{-1}Q = E_3$; còn $H$ có ma trận chéo, với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng của $A$:

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Nói cách khác, sau phép đổi biến thực hiện bởi ma trận $Q$:

$$\begin{cases} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3 \\ z_2 &= \frac{1}{3}y_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y_3 \\ z_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_3 \end{cases}$$

biểu thức của các dạng toàn phương $H$ và $K$ như sau:

$$\begin{aligned} H &= 9z_1^2 + 9z_2^2 - 9z_3^2, \\ K &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2. \end{aligned}$$

Thế các biểu thức của $y_i$ theo $x_i$ vào $z_i$, ta thu được sự phụ thuộc tường minh của các biến mới vào các biến ban đầu:

$$\begin{cases} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x_3 \\ z_2 &= \frac{2}{3}x_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x_3 \\ z_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{3}x_3. \end{cases}$$

Đó chính là phép biến đổi tuyến tính không suy biến phải tìm.

Nhận xét rằng nghiệm của bài toán trên không duy nhất. Thật vậy, có nhiều phép biến đổi khác nhau đưa $K$ về dạng chuẩn tắc; cũng có nhiều cách khác nhau để chọn cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{R}^3$ gồm toàn những véctơ riêng của ma trận $A$.

## 3 Hạng và hạch của dạng toàn phương

Giả sử $\eta$ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên không gian véctơ thực $V$. Để có cơ sở sâu sắc cho việc định nghĩa hạng và hạch của $\eta$, ta xây dựng ánh xạ tuyến tính liên kết $f = f_\eta : V \to V^*$ bằng điều kiện sau:

$$f(\beta)(\alpha) = \langle \alpha, f(\beta) \rangle := \eta(\alpha, \beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in V,$$

ở đây $\langle \cdot, \cdot \rangle$ chỉ phép ghép cặp đối nhẫu giữa $V$ và $V^*$. Do $\eta$ tuyến tính đối với biến thứ nhất, nên theo Bổ đề V.3.1, $f(\beta)$ hoàn toàn xác định với mọi $\beta \in E$. Vì $\eta$ tuyến tính đối với biến thứ hai, nên $f$ là một ánh xạ tuyến tính.

**Mệnh đề 3.1** *Ma trận của $\eta$ trong một cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ trùng với ma trận của $f = f_\eta$ trong cặp cơ sở đối ngẫu $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$.*

**Chứng minh:** Giả sử véctơ $\alpha^* \in V$ có phân tích qua cơ sở $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$ như sau

$$\alpha^* = x_1\alpha_1^* + \cdots + x_n\alpha_n^*.$$

Tác động cả hai vế lên $\alpha_i$ ta có $x_i = \langle \alpha_i, \alpha^* \rangle$. Kết quả là

$$\alpha^* = \langle \alpha_1, \alpha^* \rangle \alpha_1^* + \cdots + \langle \alpha_n, \alpha^* \rangle \alpha_n^*.$$

Gọi $A = (a_{ij})$ là ma trận của $\eta$ trong cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $A' = (b_{ij})$ là ma trận của $f$ trong cặp cơ sở $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ và $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$. Theo định nghĩa ma trận của một ánh xạ tuyến tính

$$f(\alpha_j) = \sum_i b_{ij}\alpha_i^*.$$

Ta có

$$b_{ij} = \langle \alpha_i, f(\alpha_j) \rangle = \eta(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij},$$

với mọi $i, j$. Do đó $A = A'$. □

**Định nghĩa 3.2** (i) *Hạng* của dạng song tuyến tính đối xứng $\eta$ (hay hạng của dạng toàn phương $H$ tương ứng) là hạng của ánh xạ tuyến tính liên kết với nó $f_\eta$.

(ii) Nếu rank$H = \dim V$, thì dạng toàn phương $H$ và dạng cực $\eta$ của nó được gọi là *không suy biến*. Trái lại, nếu rank$H < \dim V$, thì $H$ và $\eta$ được gọi là *suy biến*.

Theo mệnh đề trên, hạng của $\eta$ hay của $H$ bằng hạng của ma trận của chúng trong cơ sở bất kỳ của $V$.

Nếu $W$ là một không gian véctơ con của $V$ thì $H|_W$ cũng là một dạng toàn phương trên $W$.

Lưu ý rằng $H$ (hoặc $\eta$) có thể không suy biến trên $V$ nhưng lại suy biến trên một không gian con nào đó của $V$. Đấy là điểm khác nhau căn bản giữa các dạng song tuyến tính và các dạng tuyến tính.

**Ví dụ:** Dạng toàn phương có biểu thức toạ độ trong một cơ sở nào đó $H = x^2 - y^2$ không suy biến trên không gian 2 chiều, vì ma trận của nó trong cơ sở đó là

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nhưng $H = (x - y)(x + y)$ suy biến trên các không gian con một chiều xác định tương ứng bởi các phương trình $x = y$ và $x = -y$.

**Định nghĩa 3.3** Không gian véctơ sau đây được gọi là *hạch* hay *hạt nhân* của dạng song tuyến tính đối xứng $\eta$ (hoặc hạch của dạng toàn phương $H$ tương ứng):

$$V^0 = Ker f_\eta = \{\alpha \in V | \ \ \eta(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in V\}.$$

Vì $f_\eta$ là một ánh xạ tuyến tính, nên $V^0$ là một không gian véctơ con của $V$.

Giả sử $T$ và $U$ là các không gian véctơ con của $V$. Ta nói $T$ vuông góc (hay trực giao) với $U$ theo nghĩa $\eta$, và viết $T \perp_\eta U$ nếu $t \perp_\eta u$, với mọi $t \in T, u \in U$.

Nếu $T \cap U = \{0\}$ và $T \perp_\eta U$, thì tổng trực tiếp $T \oplus U$ được gọi là một tổng $\eta$-trực giao (hoặc $H$-trực giao), và được ký hiệu là $T \oplus^\perp U$. (Lưu ý rằng nếu $\eta$ suy biến thì điều kiện $T \perp_\eta U$ *không* kéo theo $T \cap U = \{0\}$.)

Theo định nghĩa, ta có $V^0 \perp_\eta V$.

**Mệnh đề 3.4** *Gọi $V^0$ là hạch của dạng song tuyến tính đối xứng $\eta$ trên không gian véctơ $V$. Khi đó*

$$\text{rank}\eta = \dim V - \dim V^0.$$

*Hơn nữa, nếu $W$ là một phần bù tuyến tính của $V^0$ trong $V$, thì $\eta|_W$ không suy biến và $V$ là tổng $\eta$-trực giao của $V^0$ và $W$.*

**Chứng minh:** Ta xét ánh xạ tuyến tính $f_\eta : V \to V^*$ liên kết với $\eta$. Theo định lý về mối liên hệ giữa hạng và số chiều của hạt nhân của một ánh xạ tuyến tính, ta có

$$\text{rank} f_\eta = \dim V - \dim Ker f_\eta.$$

Theo định nghĩa $\text{rank}\eta = \text{rank} f_\eta$ và $V^0 = Ker f_\eta$, cho nên

$$\text{rank}\eta = \dim V - \dim V^0.$$

Bây giờ giả sử $W$ là một phần bù tuyến tính của $V^0$ trong $V$, tức là $V = V^0 \oplus W$. Hiển nhiên $V^0 \perp_\eta W$, bởi vì $V^0 \perp_\eta V$. Ta chỉ còn phải chứng minh $\eta|_W$ là không suy biến.

Giả sử phản chứng $\eta|_W$ suy biến. Theo phần trên của mệnh đề, hạch $W^0$ của $\eta|_W$ có số chiều bằng

$$\dim W^0 = \dim W - \text{rank}\eta|_W > 0.$$

Lấy một véctơ bất kỳ $\alpha \in W^0 \backslash \{0\}$, ta có $\eta(\alpha, \beta) = 0, \ \forall \beta \in W$. Mặt khác, theo định nghĩa $V^0$, ta có $\eta(\alpha, \beta) = 0, \ \forall \beta \in V^0$. Vì $V = V^0 \oplus W$, nên

$$\eta(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \beta \in V.$$

Nghĩa là $\alpha \in V^0$. Từ đó $\alpha \in V^0 \cap W = \{0\}$, vậy $\alpha = 0$. Điều vô lý này bác bỏ giả thiết phản chứng. $\square$

**Hệ quả 3.5** *Dạng song tuyến tính $\eta$ không suy biến khi và chỉ khi hạch của nó bằng* 0.

**Chứng minh:** Hạch $V^0$ của $\eta$ có số chiều bằng

$$\dim V^0 = \dim V - \mathrm{rank}\eta.$$

$\eta$ không suy biến nghĩa là $\mathrm{rank}\eta = \dim V$. Điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $\dim V^0 = 0$, tức là tương đương với $V^0 = \{0\}$. $\square$

# 4 Chỉ số quán tính

Khái niệm dạng toàn phương xác định dương thật ra đã được định nghĩa ở chương không gian véctơ Euclid. Sau đây ta đặt định nghĩa đó trong mối liên hệ với một số khái niệm liên quan.

Trong tiết này chúng ta sẽ chứng minh tính duy nhất của dạng chuẩn tắc của một dạng toàn phương. Nói cách khác, mỗi dạng toàn phương được đưa về cùng một dạng chuẩn tắc trong những cơ sở khác nhau của không gian.

Giả sử $H$ là một dạng toàn phương trên không gian véctơ thực $V$.

**Định nghĩa 4.1** (i) $H$ được gọi là *dương* nếu $H(\alpha) \geq 0$ với mọi $\alpha \in V$.

(ii) $H$ được gọi là *xác định dương* nếu nó không âm và

$$H(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0.$$

(iii) $H$ được gọi là *âm* (tương ứng: *xác định âm*) nếu $-H$ là dương (tương ứng: xác định dương).

Ta cũng nói dạng cực $\eta$ của $H$ là không âm, không dương, xác định dương, xác định âm nếu $H$ là như thế.

**Định lý 4.2** (Định lý Sylvester về chỉ số quán tính). *Giả sử $H$ là một dạng toàn phương trên $V$. Khi đó $V$ thừa nhận một phân tích $H$-trực giao*

$$V = V_+ \oplus^\perp V_- \oplus^\perp V_0,$$

*trong đó $H|_{V_+}$ xác định dương, $H|_{V_-}$ xác định âm, $H|_{V_0} = 0$. Trong bất kỳ phân tích nào như vậy thì $V_0$ là hạch của $H$, $\dim V_+ = p, \dim V_- = q$ là những hằng số.*

**Định nghĩa 4.3** Ta gọi $p$ là *chỉ số quán tính dương*, $q$ là *chỉ số quán tính âm* và cặp số $(p, q)$ là *chỉ số quán tính* của dạng toàn phương $H$ (hay của dạng cực $\eta$ tương ứng với $H$). Hiệu số $p - q$ được gọi là *kí số* của $H$ (hay của $\eta$).

**Chứng minh Định lý 4.2:**

Giả sử trong cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ của $V$ dạng toàn phương $H$ có dạng chuẩn tắc

$$H(\alpha) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

với $\alpha = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Ta đặt

$$\begin{aligned} V_+ &= \mathcal{L}(e_1, ..., e_p), \\ V_- &= \mathcal{L}(e_{p+1}, ..., e_{p+q}), \\ V_0 &= \mathcal{L}(e_{p+q+1}, ..., e_n). \end{aligned}$$

Khi đó, rõ ràng $H|_{V_+}$ xác định dương, $H|_{V_-}$ xác định âm, $H|_{V_0} = 0$. Hơn nữa, $V$ thừa nhận phân tích $H$-trực giao:

$$V = V_+ \oplus^\perp V_- \oplus^\perp V_0,$$

điều này được suy ra từ chỗ dạng cực $\eta$ của $H$ được xác định bởi công thức

$$\eta(\alpha, \beta) = x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_{p+q}y_{p+q},$$

với $\alpha = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $\beta = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$.

Bây giờ ta hãy xét một phân tích $H$-trực giao (tức là $\eta$-trực giao) bất kỳ nào đó $V = V_+ \oplus^\perp V_- \oplus^\perp V_0$, trong đó $H|_{V_+}$ xác định dương, $H|_{V_-}$ xác định âm, và $H|_{V_0} = 0$. Trước hết ta chứng minh rằng $V_0 = V^0$ là hạch của $\eta$. Giả sử $\alpha \in V_0$, vì $V_+ \perp_\eta V_0, V_- \perp_\eta V_0$, cho nên

$$\eta(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \beta \in V_+ \oplus^\perp V_-.$$

Hơn nữa, vì $H|_{V_0} = 0$, nên $\eta|_{V_0} = 0$, tức là

$$\eta(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \beta \in V_0.$$

Gộp cả hai kết luận trên lại, ta có

$$\eta(\alpha, \beta) = 0, \quad \forall \beta \in V = V_+ \oplus^\perp V_- \oplus^\perp V_0.$$

Theo định nghĩa của hạch của dạng song tuyến tính, ta thu được $\alpha \in V^0$, tức là $V_0 \subset V^0$.

Mặt khác, giả sử $\alpha = \alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0 \in V^0$, trong đó $\alpha_+ \in V_+$, $\alpha_- \in V_-$, $\alpha_0 \in V_0$. Vì $\alpha \in V^0$, nên ta có

$$0 = \eta(\alpha, \alpha_+) = \eta(\alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0, \alpha_+) = \eta(\alpha_+, \alpha_+).$$

Đẳng thức này cùng với giả thiết $H|_{V_+}$ xác định dương dẫn tới $\alpha_+ = 0$. Tương tự, $\alpha_- = 0$. Do đó, $\alpha = \alpha_0 \in V_0$. Vì điều đó đúng với mọi $\alpha \in V^0$, cho nên $V^0 \subset V_0$.

Hai bao hàm thức ngược nhau $V_0 \subset V^0$ và $V^0 \subset V_0$ chứng tỏ $V_0 = V^0$.

Bây giờ giả sử $V$ có hai phân tích $H$-trực giao như trên

$$V = V_+ \oplus^\perp V_- \oplus^\perp V^0 = V'_+ \oplus^\perp V'_- \oplus^\perp V^0.$$

Ta sẽ chứng minh

$$p = \dim V_+ = \dim V'_+ = p'$$
$$q = \dim V_- = \dim V'_- = q'.$$

Giả sử phản chứng $p > p'$. Vì $p + q = p' + q' = \dim V - \dim V^0$, nên $q < q'$. Do đó $\dim(V_+ \oplus^\perp V^0) + \dim V'_- = p + q' + \dim V^0 > \dim V$. Bởi vậy, có véctơ khác không $\alpha \in (V_+ \oplus^\perp V^0) \cap V'_-$. Khi đó $H(\alpha) \geq 0$ vì $\alpha \in (V_+ \oplus^\perp V^0)$ (ta nhấn mạnh điều kiện $V_+ \perp_\eta V^0$). Mặt khác, $H(\alpha) < 0$ vì $\alpha \in V'_-$. Đó là một mâu thuẫn.

Do vai trò đối xứng của hai phân tích của không gian $V$, giả thiết $p < p'$ cũng dẫn tới mâu thuẫn. Vậy $p = p'$, do đó $q = q'$. □

**Hệ quả 4.4** (Dạng toạ độ của định lý Sylvester) *Giả sử dạng toàn phương $H$ được đưa về dạng chuẩn tắc trong hai cơ sở khác nhau, như sau*

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \\ &= y_1^2 + \cdots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \cdots - y_{p'+q'}^2. \end{aligned}$$

*Khi đó $p = p', q = q'$ là các chỉ số quán tính dương và âm của $H$, còn $\dim V - (p+q)$ là số chiều của hạch của $H$.* □

**Định nghĩa 4.5** Hai dạng toàn phương $H$ và $K$ trên không gian véctơ thực $V$ được gọi là *tương đương* nếu có một tự đẳng cấu tuyến tính $\varphi : V \to V$ sao cho $H(\alpha) = K(\varphi(\alpha))$.

Đó thực sự là một quan hệ tương đương.

**Hệ quả 4.6** *Hai dạng toàn phương trên không gian véctơ thực $V$ tương đương với nhau nếu và chỉ nếu chúng có cùng chỉ số quán tính.*

**Chứng minh:** Giả sử hai dạng toàn phương $H$ và $K$ tương đương, tức là có một tự đẳng cấu tuyến tính $\varphi : V \to V$ sao cho $H(\alpha) = K(\varphi(\alpha))$. Giả sử $H$ có dạng chuẩn tắc trong cơ sở $(e_1, ..., e_n)$, nói rõ hơn

$$H(\alpha) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

với $\alpha = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Vì $\varphi$ là một đẳng cấu tuyến tính, nên hệ véctơ $\varepsilon_1 = \varphi(e_1), ..., \varepsilon_n = \varphi(e_n)$ cũng lập nên một cơ sở của $V$. Đặt

$$\begin{aligned}\beta = \varphi(\alpha) &= x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n)\\ &= x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n.\end{aligned}$$

Ta có

$$K(\beta) = K(\varphi(\alpha)) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Vậy $H$ và $K$ có cùng chỉ số quán tính.

Ngược lại, giả sử $H$ và $K$ có cùng chỉ số quán tính $(p, q)$. Gọi $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở trong đó $H$ nhận dạng chuẩn tắc

$$H(\alpha) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

với $\alpha = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Giả sử $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ là một cơ sở trong đó $K$ nhận dạng chuẩn tắc

$$K(\beta) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

với $\beta = y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n$. Gọi $\varphi$ là tự đẳng cấu của $V$ chuyển cơ sở $(e_1, ..., e_n)$ thành cơ sở $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. Khi đó, nếu $\alpha = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, thì $\varphi(\alpha) = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$. Vì thế, ta có

$$H(\alpha) = K(\varphi(\alpha)) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Như thế, hai dạng toàn phương $H$ và $K$ tương đương. $\square$

Theo hệ quả trên, mỗi lớp tương đương các dạng toàn phương trên không gian véctơ thực $n$ chiều được đặt tương ứng một-một với một cặp số nguyên không âm $(p, q)$ sao cho $p + q \leq n$. Vậy, số các lớp tương đương của các dạng toàn phương trên không gian véctơ thực $n$ chiều bằng

$$(n + 1) + n + \cdots + 1 = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

**Nhận xét 4.7** Ta nói đôi điều về các dạng song tuyến tính và các dạng toàn phương (trên không gian véctơ) phức. Mỗi dạng toàn phương $H$ trên không gian véctơ phức $V$ đều đưa được về dạng chính tắc trong một cơ sở nào đó của không gian:

$$H(\alpha) = a_1 z_1^2 + \cdots + a_r z_r^2, \quad a_i \in \mathbf{C},$$

trong đó $r = \text{rank}H \leq n = \dim V$. Vì mọi số phức đều có căn bậc hai, nên mỗi dạng toàn phương phức $H$ đều đưa được về dạng chuẩn tắc:

$$H(\alpha) = t_1^2 + \cdots + t_r^2,$$

trong đó $t_1, ..., t_n$ là toạ độ của $\alpha$ trong một cơ sở nào đó của $V$. Như vậy, các dạng toàn phương phức được đặc trưng hoàn toàn bởi hạng của nó. Do đó, có tất cả $(n+1)$ lớp tương đương của các dạng toàn phương phức dưới tác động của nhóm tự đẳng cấu $GL(V)$.

# 5 Dạng toàn phương xác định dấu

**Định nghĩa 5.1** Giả sử $A$ là một ma trận vuông. Các *định thức con chính* của $A$ là các định thức ở góc trái trên, bao gồm

$$\det(a_{11}), \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, ..., \det A.$$

**Định lý 5.2** (Sylvester) *Giả sử dạng toàn phương $H$ trên không gian véctơ hữu hạn chiều $V$ có ma trận $A$ trong một cơ sở nào đó. Khi đó*

*(i) $H$ là xác định dương nếu và chỉ nếu mọi định thức con chính của $A$ đều dương.*

*(ii) $H$ là xác định âm nếu và chỉ nếu mọi định thức con chính cấp chẵn của $A$ đều dương, và mọi định thức con chính cấp lẻ của $A$ đều âm.*

Gọi $\eta$ là dạng cực của $H$, và $(e_1, ..., e_n)$ là cơ sở của không gian $V$ trong đó $H$ có ma trận là $A$. Ký hiệu $V_k = \mathcal{L}(e_1, ..., e_k)$ $(k = 1, ..., n)$. Nếu $H$ xác định dương hoặc xác định âm thì $H|_{V_k}$ không suy biến với mọi $k = 1, ..., n$.

Lặp lại quá trình trực giao hoá Shmidt ta có bổ đề sau.

**Bổ đề 5.3** *Giả sử hạn chế của $H$ trên mỗi $V_k = \mathcal{L}(e_1, ..., e_k)$ đều không suy biến $(k = 1, ..., n)$. Khi đó hệ véctơ $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$ xây dựng bởi quy nạp*

$$\begin{cases} \varepsilon_1 &= e_1, \\ \varepsilon_k &= e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\eta(e_k, \varepsilon_i)}{H(\varepsilon_i)} \varepsilon_i \end{cases}$$

*là một cơ sở $\eta$-trực giao của $V_k$ $(k = 1, ..., n)$.* □

**Chứng minh Định lý 5.2:**

Trong cơ sở $\eta$-trực giao $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, $H$ có ma trận chéo

$$B = \begin{pmatrix} H(\varepsilon_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & H(\varepsilon_2) & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & H(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

Gọi $A_k$ (tương ứng $B_k$) là ma trận nằm ở giao của $k$ hàng đầu và $k$ cột đầu của $A$ (tương ứng của $B$). Khi đó $A_k$ và $B_k$ là ma trận của $H|_{V_k}$ tương ứng trong các cơ sở $(e_1, ..., e_k)$ và $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k)$. Gọi $C_k$ là ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai, ta có

$$B_k = C_k^t A_k C_k.$$

Theo Bổ đề 5.3, $C_k$ là một ma trận tam giác trên với các phần tử trên đường chéo bằng 1. Vì thế $\det C_k = \det C_k^t = 1$. Hệ quả là

$$\det A_k = \det B_k = H(\varepsilon_1) \cdots H(\varepsilon_k) \quad (k = 1, ..., n).$$

$H$ là xác định dương khi và chỉ khi $H(\varepsilon_k) > 0$ với mọi $k = 1, ..., n$, tức là nếu và chỉ nếu $\det A_k > 0$ $(k = 1, ..., n)$.

$H$ là xác định âm khi và chỉ khi $H(\varepsilon_k) < 0$ với mọi $k = 1, ..., n$, tức là nếu và chỉ nếu $\det A_k$ âm với mọi $k$ lẻ và $\det A_k$ dương với mọi $k$ chẵn $(k = 1, ..., n)$. $\square$

**Ví dụ:** Định thức Gram-Shmidt của hệ véctơ $(u_1, ..., u_k)$ trong không gian véctơ Euclid $E$ được định nghĩa như sau:

$$G(u_1, ..., u_k) = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle & ... & \langle u_1, u_k\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle & ... & \langle u_2, u_k\rangle \\ . & . & ... & . \\ \langle u_k, u_1\rangle & \langle u_k, u_2\rangle & ... & \langle u_k, u_k\rangle \end{pmatrix}.$$

Nếu véctơ $u_j$ biểu thị tuyến tính qua những véctơ còn lại của hệ thì cột thứ $j$ của định thức là một tổ hợp tuyến tính của những cột còn lại. Vậy, định thức Gram-Shmidt của một hệ véctơ phụ thuộc tuyến tính thì bằng 0.

Ngược lại, định thức Gram-Shmidt của một hệ véctơ độc lập tuyến tính luôn luôn dương. Thật vậy, nếu $(u_1, ..., u_k)$ là một hệ véctơ độc lập tuyến tính thì ma trận $(\langle u_i, u_j\rangle)_{i,j=1}^k$ chính là ma trận của tích vô hướng trong cơ sở $(u_1, ..., u_k)$ của không gian $\mathcal{L}(u_1, ..., u_k)$. Vì tích vô hướng cảm sinh một dạng toàn phương xác định dương, nên theo Định lý 5.2

$$G(u_1, ..., u_k) > 0.$$

## Bài tập

Tìm dạng chuẩn tắc của các dạng toàn phương sau đây trên trường số thực:

1. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

   Tìm dạng chuẩn tắc của các dạng toàn phương sau đây và những phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa dạng đã cho về dạng chuẩn tắc:

3. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

4. $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Đưa các dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc với hệ số nguyên bằng cách sử dụng các phép biến đổi tuyến tính không suy biến với hệ số hữu tỉ:

5. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

6. $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$.

Tìm phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa dạng toàn phương $H$ về dạng toàn phương $K$:

7. $H = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$,
$K = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

8. $H = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3$,
$K = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2$.

9. $H = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$K = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3$.

Đưa các dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc và biểu thị các ẩn mới qua các ẩn cũ:

10. $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<j}^n x_ix_j$.

11. $\sum_{i<j}^n x_ix_j$.

12. $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

13. $\sum_{i=1}^n (x_i - s)^2$, trong đó $s = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

14. $\sum_{i<j}^n |i-j|x_ix_j$.

15. Cho dạng toàn phương

$$H = f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_p^2 - f_{p+1}^2 - f_{p+2}^2 - \cdots - f_{p+q}^2,$$

trong đó $f_1, ..., f_{p+q}$ là các dạng tuyến tính thực của các biến $x_1, ..., x_n$. Chứng minh rằng chỉ số quán tính dương của $H$ không vượt quá $p$ và chỉ số quán tính âm của nó không vượt quá $q$.

16. Chứng minh rằng nếu có thể đưa mỗi dạng toàn phương $H$ và $K$ về dạng kia bằng một phép biến đổi tuyến tính (không nhất thiết khả nghịch) thì các dạng này tương đương với nhau.

17. Các dạng toàn phương sau đây có tương đương với nhau trên trường số thực hay không:

$$\begin{aligned} H &= x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3, \\ K &= y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3, \\ L &= -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3. \end{aligned}$$

18. Tìm hạng và kí số của dạng toàn phương thực $H$ nếu nó tương đương với $-H$ bởi một phép biến đổi tuyến tính thực không suy biến.

19. Tìm số lớp tương đương của các dạng toàn phương thực $n$ ẩn có kí số bằng $s$ đã cho.

20. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một dạng toàn phương $H$ viết được thành tích của hai dạng tuyến tính là:

    (a) Đối với trường số thực: hạng của $H$ không vượt quá 2, và nếu hạng của $H$ bằng 2 thì kí số của nó bằng 0.

    (b) Đối với trường số phức: hạng của $H$ không vượt quá 2.

21. Chứng minh rằng dạng toàn phương thực $H$ xác định dương nếu và chỉ nếu ma trận của nó có thể viết dưới dạng $A = C^tC$, trong đó $C$ là một ma trận thực không suy biến.

22. Chứng minh rằng trong một dạng toàn phương thực xác định dương mọi hệ số của các bình phương của các ẩn đều là số dương; nhưng điều kiện đó không đủ để một dạng toàn phương là xác định dương.

23. Chứng minh rằng:

    (a) Điều kiện cần và đủ để ma trận đối xứng $A$ viết được dưới dạng $A = C^tC$, trong đó $C$ là một ma trận thực không suy biến là các định thức con chính của $A$ đều dương.

    (b) Điều kiện cần và đủ để ma trận đối xứng $A$ viết được dưới dạng $A = C^tC$, trong đó $C$ là một ma trận vuông thực là các định thức con chính của $A$ đều không âm. Hơn nữa, nếu hạng của $A$ bằng $r$ thì hạng của $C$ cũng vậy, ngoài ra ta có thể chọn $C$ với $r$ hàng đầu độc lập tuyến tính và các hàng còn lại bằng 0.

Tìm tất cả các giá trị của tham số $\lambda$ để cho dạng toàn phương sau đây xác định dương:

24. $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

25. $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

26. Ta gọi hợp thành của hai dạng toàn phương $H = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ và $K = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_ix_j$ là dạng toàn phương $(H, K) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}x_ix_j$. Chứng minh rằng:

    (a) Nếu $H$ và $K$ không suy biến thì $(H, K)$ cũng vậy.

    (b) Nếu $H$ và $K$ xác định dương thì $(H, K)$ cũng vậy.

Tìm một phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa một trong hai dạng toàn phương sau đây về dạng chuẩn tắc đồng thời đưa dạng còn lại về dạng chính tắc, viết rõ biểu thức của các dạng thu được:

27. $H = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$,
$K = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$.

28. $H = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$,
$K = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$.

29. $H = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$,
$K = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$.

30. $H = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$,
$K = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

31. Cho cặp dạng toàn phương $H$ và $K$, trong đó $K$ xác định dương. Xét phép biến đổi tuyến tính không suy biến bất kỳ đưa $K$ về dạng chuẩn tắc, đồng thời đưa $H$ về dạng chính tắc

$$H = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Chứng minh rằng các hệ số $\lambda_1, ..., \lambda_n$ được xác định duy nhất sai khác thứ tự. Hơn nữa, chúng là các nghiệm của phương trình đa thức $\det(A - XB) = 0$ với ẩn $X$, trong đó $A$ và $B$ là các ma trận tương ứng của $H$ và $K$ trong cùng một cơ sở nào đó của không gian.

Có thể đưa cặp dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc bởi cùng một phép biến đổi tuyến tính thực không suy biến hay không?

32. $H = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$,
$K = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

33. $H = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$,
$K = x_1^2 - 2x_1x_2$.

34. Cho cặp dạng toàn phương xác định dương $H$ và $K$. Giả sử phép biến đổi tuyến tính không suy biến thứ nhất đưa $K$ về dạng chuẩn tắc, đồng thời đưa $H$ về dạng chính tắc $H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ và phép biến đổi tuyến tính không suy biến thứ hai đưa $H$ về dạng chuẩn tắc, đồng thời đưa $K$ về dạng chính tắc $K = \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i^2$. Tìm mối liên hệ giữa các hệ số $\lambda_1, ..., \lambda_n$ và $\mu_1, ..., \mu_n$.

35. Ta nói các cặp dạng toàn phương $(H_1, K_1)$ và $(H_2, K_2)$, trong đó $K_1$ và $K_2$ xác định dương, là tương đương nếu có một phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa $H_1$ về $H_2$ đồng thời đưa $K_1$ về $K_2$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai cặp dạng trên tương đương là tập hợp nghiệm (kể cả bội) của hai phương trình $\det(A_1 - XB_1) = 0$ và $\det(A_2 - XB_2) = 0$ trùng nhau. Ở đây $A_i$ và $B_i$ là ma trận tương ứng của $H_i$ và $K_i$ trong cùng một cơ sở của không gian.

36. Chứng minh rằng dạng chính tắc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ mà dạng toàn phương $H$ có thể đưa về được nhờ một phép biến đổi trực giao được xác định duy nhất sai khác thứ tự của các biến. Hơn nữa các hệ số $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận $A$ của dạng $H$.

    Tìm dạng chính tắc mà dạng toàn phương sau đây có thể đưa về nhờ một phép biến đổi trực giao. Viết biểu thức tường minh của phép biến đổi đó.

37. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} x_i x_j$.

38. $\sum_{i<j}^{n} x_i x_j$.

39. Hai dạng toàn phương được gọi là *tương đương trực giao* nếu dạng này có thể đưa về dạng kia nhờ một phép biến đổi trực giao. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai dạng toàn phương tương đương trực giao là các đa thức đặc trưng của các ma trận của chúng trùng nhau.

40. Chứng minh rằng mọi ma trận đối xứng thực $A$ đều có thể viết dưới dạng

$A = Q^{-1}BQ$, trong đó $Q$ là một ma trận trực giao và $B$ là một ma trận đường chéo thực.

41. Chứng minh rằng mọi giá trị riêng của một ma trận thực $A$ đều thuộc đoạn $[a, b]$ nếu và chỉ nếu dạng toàn phương với ma trận $(A - \lambda E)$ xác định dương với mọi $\lambda < a$ và xác định âm với mọi $\lambda > b$.

42. Giả sử $A$ và $B$ là các ma trận đối xứng thực. Chứng minh rằng nếu các trị riêng của $A$ đều thuộc đoạn $[a, b]$ và các trị riêng của $B$ đều thuộc đoạn $[c, d]$ thì các giá trị riêng của ma trận $A + B$ đều thuộc đoạn $[a + c, b + d]$.

43. Chứng minh rằng một dạng toàn phương không suy biến có thể đưa về dạng chuẩn tắc nhờ một phép biến đổi trực giao nếu và chỉ nếu ma trận của nó trong một cơ sở nào đó là một ma trận trực giao.

44. Chứng minh rằng ma trận của một dạng toàn phương xác định dương là trực giao nếu và chỉ nếu dạng toàn phương đó là tổng của các bình phương. Hãy diễn đạt sự kiện này bằng thuật ngữ ma trận.

45. Chứng minh rằng mọi ma trận không suy biến thực $A$ có thể viết một cách duy nhất dưới dạng $A = QB$, trong đó $Q$ là một ma trận trực giao và $B$ là một ma trận tam giác trên với các phần tử dương trên đường chéo chính.

46. Chứng minh rằng:

    (a) Mỗi ma trận thực không suy biến $A$ đều có thể viết dưới hai dạng $A = Q_1B_1$ và $A = B_2Q_2$, trong đó $Q_1, Q_2$ là các ma trận trực giao và $B_1, B_2$ là các ma trận đối xứng thực với các định thức con chính dương. Mỗi cách viết đó đều duy nhất.

    (b) Mỗi ma trận phức không suy biến $A$ đều có thể viết dưới hai dạng $A = Q_1B_1$ và $A = B_2Q_2$, trong đó $Q_1, Q_2$ là các ma trận unita và $B_1, B_2$

là các ma trận tự liên hợp, có các định thức con chính dương. Mỗi cách viết đó đều duy nhất.

# Chương VII

# ĐẠI SỐ ĐA TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng ta trình bày các *cấu trúc đa tuyến tính* của đại số tuyến tính. Vượt xa ra ngoài khuôn khổ của đại số tuyến tính, các cấu trúc này tìm được nhiều ứng dụng trong Cơ học và Vật lý, trong Hình học vi phân, Giải tích trên đa tạp và Lý thuyết biểu diễn nhóm...

Để chuẩn bị cho việc trình bày chương này, ta cần mấy định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 0.4** Một *đại số* trên trường $\mathbf{K}$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ $A$ được trang bị một phép nhân $\cdot : A \times A \to A$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ thoả mãn những điều kiện sau:

(a) $A$ cùng với phép cộng véctơ và phép nhân lập thành một vành.

(b) Các phép nhân với vô hướng và phép nhân của $A$ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$(a\alpha)\beta = \alpha(a\beta) = a(\alpha\beta),$$

với mọi $a \in \mathbf{K}$, $\alpha, \beta \in A$.

Tập con khác rỗng $B \subset A$ được gọi là một *đại số con* của đại số $A$ nếu nó vừa là một không gian véctơ con vừa là một vành con của $A$.

Cho các đại số $A$ và $A'$. Ánh xạ $\varphi : A \to A'$ được gọi là một *đồng cấu đại số* nếu nó vừa là một đồng cấu không gian véctơ vừa là một đồng cấu vành.

Chẳng hạn, $\mathbf{K}$-không gian véctơ các ma trận vuông $M(n \times n, \mathbf{K})$ với phép nhân ma trận là một đại số trên trường $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 0.5** Giả sử $A$ là một đại số trên $\mathbf{K}$. Không gian véctơ con $B \subset A$ được gọi là một *iđêan của đại số $A$* nếu nó có tính chất hấp thụ, tức là nếu:

$$\alpha\beta \in B, \quad \beta\alpha \in B,$$

với mọi $\alpha \in A$, $\beta \in B$.

Chẳng hạn, tập các ma trận tam giác trên với các phần tử trên đường chéo bằng 0 là một iđêan của đại số ma trận $M(n \times n, \mathbf{K})$.

Dễ thấy rằng, nếu $B$ là một iđêan của đại số $A$ thì không gian thương $A/B$ trở thành một đại số, gọi là *đại số thương*, với phép nhân định nghĩa như sau:

$$(\alpha + B)(\alpha' + B) = (\alpha\alpha') + B.$$

Nền tảng của các cấu trúc đa tuyến tính là khái niệm tích tenxơ của các không gian véctơ.

## 1 Tích tenxơ

Giả sử $L, M, N$ là các không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$. Ánh xạ $\varphi : L \times M \to N$ được gọi là *song tuyến tính* nếu

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) &= \varphi(\alpha_1, \beta) + \varphi(\alpha_2, \beta),\\
\varphi(a\alpha, \beta) &= a\varphi(\alpha, \beta),\\
\varphi(\alpha, \beta_1 + \beta_2) &= \varphi(\alpha, \beta_1) + \varphi(\alpha, \beta_2),\\
\varphi(\alpha, a\beta) &= a\varphi(\alpha, \beta),
\end{aligned}$$

với mọi $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in L,\ \beta, \beta_1, \beta_2 \in M,\ a \in \mathbf{K}$. Nói cách khác, ánh xạ song tuyến tính là một ánh xạ tuyến tính với mỗi biến khi cố định biến kia.

Gọi $F(L \times M)$ là tập hợp tất cả các *hàm có giá hữu hạn* từ $L \times M$ vào trường $\mathbf{K}$, tức là các hàm chỉ khác 0 tại một số hữu hạn điểm nào đó của $L \times M$. Tập hợp này lập nên một **K**-không gian véctơ đối với các phép toán cộng và nhân với vô hướng được định nghĩa theo giá trị của hàm, cụ thể như sau:

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha,\beta) &= f(\alpha,\beta)+g(\alpha,\beta),\\ (af)(\alpha,\beta) &= af(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

với mọi $f, g \in F(L \times M),\ a \in \mathbf{K},\ (\alpha,\beta) \in L \times M$.

Mỗi phần tử $(\alpha,\beta) \in L \times M$ được đặt tương ứng với một hàm, cũng ký hiệu là $(\alpha,\beta) \in F(L \times M)$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) : L \times M &\to \mathbf{K},\\ (\alpha,\beta) &\mapsto 1,\\ (\alpha',\beta') &\mapsto 0,\ \ \forall(\alpha',\beta') \neq (\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Giả sử $f \in F(L \times M)$ là hàm chỉ khác 0 trên tập hữu hạn $\{(\alpha_i,\beta_i)|\ i \in I\}$, với $f(\alpha_i,\beta_i) = a_i$. Dễ thấy rằng

$$f = \sum_{i\in I} a_i(\alpha_i,\beta_i).$$

Như vậy, một cách trực giác, ta có thể hiểu $F(L \times M)$ là tập hợp các *tổng hình thức* có giá hữu hạn của các phần tử trong $L \times M$ với hệ số trong **K**.

Gọi $H$ là không gian véctơ con của $F(L \times M)$ sinh bởi các phần tử có dạng sau đây:

$$\begin{aligned}&(\alpha_1+\alpha_2,\beta)-(\alpha_1,\beta)-(\alpha_2,\beta),\\ &(a\alpha,\beta)-a(\alpha,\beta),\\ &(\alpha,\beta_1+\beta_2)-(\alpha,\beta_1)-(\alpha,\beta_2),\\ &(\alpha,a\beta)-a(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

trong đó $\alpha,\alpha_1,\alpha_2 \in L,\ \ \beta,\beta_1,\beta_2 \in M,\ \ a \in \mathbf{K}$.

**Định nghĩa 1.1** Ta gọi không gian véctơ thương $F(L \times M)/H$ là *tích tenxơ* của các không gian $L$ và $M$. Nó được ký hiệu bởi $L \otimes M$, hoặc chi tiết hơn $L \otimes_{\mathbf{K}} M$.

Ảnh của phần tử $(\alpha, \beta)$ bởi phép chiếu chính tắc $F(L \times M) \to L \otimes M$ được ký hiệu là $\alpha \otimes \beta$. Như vậy

$$\alpha \otimes \beta = [(\alpha, \beta)] := (\alpha, \beta) + H.$$

Theo định nghĩa của không gian con $H$, ta có

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \beta &= \alpha_1 \otimes \beta + \alpha_2 \otimes \beta,\\
(a\alpha) \otimes \beta &= a(\alpha \otimes \beta),\\
\alpha \otimes (\beta_1 + \beta_2) &= \alpha \otimes \beta_1 + \alpha \otimes \beta_2,\\
\alpha \otimes (a\beta) &= a(\alpha \otimes \beta),
\end{aligned}$$

trong đó $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in L,\ \beta, \beta_1, \beta_2 \in M,\ a \in \mathbf{K}$. Nói cách khác, ánh xạ

$$t : L \times M \to L \otimes M$$

định nghĩa bởi công thức $t(\alpha, \beta) = \alpha \otimes \beta$ là một ánh xạ song tuyến tính.

Tích tenxơ được xây dựng nhằm mục đích tuyến tính hoá các ánh xạ song tuyến tính. Điều này được nói rõ trong định lý sau đây.

**Định lý 1.2** (Tính phổ dụng của tích tenxơ). *Với mọi ánh xạ song tuyến tính $\varphi : L \times M \to N$, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $h : L \otimes M \to N$ làm giao hoán biểu đồ*

$$\begin{tikzcd}
L \times M \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & L \otimes M \arrow[dl, "h"] \\
& N, &
\end{tikzcd}$$

*tức là $\varphi = h \circ t$.*

**Chứng minh:** Ta thác triển ánh xạ $\varphi$ thành ánh xạ $\tilde{\varphi} : F(L \times M) \to N$ xác định bởi công thức

$$\tilde{\varphi}(\sum_{i \in I} a_i(\alpha_i, \beta_i)) = \sum_{i \in I} a_i \varphi(\alpha_i, \beta_i).$$

Rõ ràng $\tilde{\varphi}$ là một ánh xạ tuyến tính. Hơn nữa, do $\varphi$ là song tuyến tính cho nên $H \subset Ker\tilde{\varphi}$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}((\alpha_1+\alpha_2,\beta)-(\alpha_1,\beta)-(\alpha_2,\beta)) = \varphi(\alpha_1+\alpha_2,\beta)-\varphi(\alpha_1,\beta)-\varphi(\alpha_2,\beta)=0,\\
&\tilde{\varphi}((a\alpha,\beta)-a(\alpha,\beta)) = \varphi(a\alpha,\beta)-a\varphi(\alpha,\beta)=0,\\
&\tilde{\varphi}((\alpha,\beta_1+\beta_2)-(\alpha,\beta_1)-(\alpha,\beta_2)) = \varphi(\alpha,\beta_1+\beta_2)-\varphi(\alpha,\beta_1)-\varphi(\alpha,\beta_2)=0,\\
&\tilde{\varphi}((\alpha,a\beta)-a(\alpha,\beta)) = \varphi(\alpha,a\beta)-a\varphi(\alpha,\beta)=0,
\end{aligned}$$

với mọi $\alpha,\alpha_1,\alpha_2 \in L,\ \beta,\beta_1,\beta_2 \in M,\ a \in \mathbf{K}$.

Do $H \subset Ker\tilde{\varphi}$, ánh xạ tuyến tính $\tilde{\varphi}$ cảm sinh ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned}
h : L\otimes M &:= F(L\times M)/H \to N\\
h[x] &= \tilde{\varphi}(x),
\end{aligned}$$

ở đây $[x] = x + H$ là lớp của phần tử $x$ bất kỳ trong $F(L\times M)$.

Với mọi $\alpha \in L, \beta \in M$, ta có

$$\varphi(\alpha,\beta) = \tilde{\varphi}(\alpha,\beta) = h[(\alpha,\beta)] = h(\alpha\otimes\beta) = h(t(\alpha,\beta)).$$

Vì thế $\varphi = h\circ t$.

Tiếp theo, ta chứng minh tính duy nhất của $h$. Giả sử $h' : L\otimes M \to N$ cũng là một ánh xạ tuyến tính thoả mãn hệ thức $\varphi = h\circ t = h'\circ t$. Như thế $h = h'$ trên $Im(t)$.

Không gian $F(L\times M)$ được sinh bởi các phần tử có dạng $(\alpha,\beta)$, do đó $L\otimes M := F(L\times M)/H$ được sinh bởi các phần tử có dạng $(\alpha,\beta)+H = \alpha\otimes\beta = t(\alpha,\beta)$. Nói cách khác, $Im(t)$ sinh ra không gian $L\otimes M$. Các ánh xạ tuyến tính $h$ và $h'$ bằng nhau trên $Im(t)$, nên chúng bằng nhau trên toàn không gian $L\otimes M$. □

Gọi $\mathcal{L}(L,M;N)$ là không gian véctơ các ánh xạ song tuyến tính từ $L\times M$ vào $N$. Định lý 1.2 cho phép xây dựng một ánh xạ $\mathcal{L}(L,M;N)\to\mathcal{L}(L\otimes M,N)$ bằng cách chuyển $\varphi$ thành $h$. Đó là một đẳng cấu tuyến tính:

**Hệ quả 1.3** $\mathcal{L}(L,M;N)\cong\mathcal{L}(L\otimes M,N)$. □

Tích tenxơ của hai ánh xạ tuyến tính được định nghĩa như sau. Giả sử $f : L \to N$ và $g : M \to P$ là các ánh xạ tuyến tính. Dễ thấy rằng ánh xạ

$$\begin{aligned} f \times g : L \times M &\to N \otimes P, \\ (f \times g)(\alpha, \beta) &= f(\alpha) \otimes g(\beta), \quad \alpha \in L, \beta \in M \end{aligned}$$

là song tuyến tính. Do đó, theo Định lý 1.2, tồn tại duy nhất một ánh xạ được ký hiệu là $f \otimes g : L \otimes M \to N \otimes P$ có tính chất $(f \otimes g)(\alpha \otimes \beta) = f(\alpha) \otimes g(\beta)$. Ánh xạ $f \otimes g$ được gọi là tích tenxơ của $f$ và $g$.

## 2 Các tính chất cơ bản của tích tenxơ

Trong các mệnh đề sau đây, giả sử $L, M, N$ là các không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$.

**Mệnh đề 2.1** (Tính kết hợp). *Tồn tại duy nhất một đẳng cấu tuyến tính*

$$(L \otimes M) \otimes N \xrightarrow{\cong} L \otimes (M \otimes N),$$

*sao cho* $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma \mapsto \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$ *với mọi* $\alpha \in L, \beta \in M, \gamma \in N$.

**Chứng minh:** Ta xét ánh xạ $\tau : (L \otimes M) \times N \to L \otimes (M \otimes N)$ xác định bởi $\tau((\alpha \otimes \beta), \gamma) = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$. Dễ kiểm tra lại rằng đó là một ánh xạ song tuyến tính đối với các biến $\alpha \otimes \beta$ và $\gamma$. Theo Định lý 1.2, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h : (L \otimes M) \otimes N \to L \otimes (M \otimes N)$ sao cho $h((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma) = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$, với mọi $\alpha \in L, \beta \in M, \gamma \in N$.

Tương tự, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $k : L \otimes (M \otimes N) \to (L \otimes M) \otimes N$ sao cho $k(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, với mọi $\alpha \in L, \beta \in M, \gamma \in N$.

Như vậy, $kh : (L \otimes M) \otimes N \to (L \otimes M) \otimes N$ là một ánh xạ tuyến tính thoả mãn $kh((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, với mọi $\alpha \in L, \beta \in M, \gamma \in N$. Nói cách khác, $kh$ trùng với ánh xạ đồng nhất $id$ trên tập các véctơ có dạng $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$; đó là một tập sinh của không gian $(L \otimes M) \otimes N$. Do đó $kh = id$, bởi vì cả hai đều là các ánh xạ tuyến tính.

Lập luận tương tự, ta có $hk = id$. Hai đẳng thức $kh = id$ và $hk = id$ chứng tỏ rằng $h$ là một đẳng cấu tuyến tính. □

Mệnh đề này cho phép ta định nghĩa tích tenxơ $L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_n$ của $n$ không gian véctơ $L_1, L_2, ..., L_n$.

Chúng tôi đề nghị độc giả tự chứng minh ba mệnh đề dưới đây, xem như những bài tập.

**Mệnh đề 2.2** (Tính giao hoán). *Tồn tại duy nhất một đẳng cấu tuyến tính*

$$L \otimes M \xrightarrow{\cong} M \otimes L,$$

*sao cho* $\alpha \otimes \beta \mapsto \beta \otimes \alpha$ *với mọi* $\alpha \in L, \beta \in M$.

**Mệnh đề 2.3** (Tính "có đơn vị"). *Tồn tại duy nhất đẳng cấu tuyến tính*

$$\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{K}} L \xrightarrow{\cong} L \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K} \xrightarrow{\cong} L,$$

*sao cho* $a \otimes \alpha \mapsto \alpha \otimes a \mapsto a\alpha$ *với mọi* $a \in \mathbf{K}, \alpha \in L$.

**Mệnh đề 2.4** (Tính phân phối).

$$\begin{aligned}(L \oplus M) \otimes N &\cong (L \otimes N) \oplus (M \otimes N),\\ L \otimes (M \oplus N) &\cong (L \otimes M) \oplus (L \otimes N).\end{aligned}$$

**Hệ quả 2.5** *Giả sử* $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ *và* $(\beta_1, ..., \beta_n)$ *là các cơ sở tương ứng của các không gian véctơ* $L$ *và* $M$. *Khi đó, hệ véctơ*

$$(\alpha_i \beta_j |\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

*là một cơ sở của không gian véctơ* $L \otimes M$. *Nói riêng*

$$\dim(L \otimes M) = \dim L \cdot \dim M.$$

**Chứng minh:** Theo định nghĩa của cơ sở, ta có các đẳng cấu tuyến tính

$$L \cong \oplus_{i=1}^{m} \mathbf{K}\alpha_i \quad M \cong \oplus_{j=1}^{n} \mathbf{K}\beta_j.$$

Áp dụng hai mệnh đề kế trên, ta có

$$\begin{aligned} L \otimes M &\cong (\oplus_{i=1}^{m} \mathbf{K}\alpha_i) \otimes (\oplus_{j=1}^{n} \mathbf{K}\beta_j) \\ &\cong \oplus_{i=1}^{m} \oplus_{j=1}^{n} (\mathbf{K}\alpha_i) \otimes (\mathbf{K}\beta_j) \\ &\cong \oplus_{i=1}^{m} \oplus_{j=1}^{n} \mathbf{K}(\alpha_i \otimes \beta_j). \end{aligned}$$

Đẳng thức này chứng tỏ hệ véctơ $(\alpha_i\beta_j|\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ là một cơ sở của không gian véctơ $L \otimes M$. $\square$

Các ví dụ sau đây giới thiệu một số đẳng cấu chính tắc liên quan đến tích tenxơ.

**Ví dụ 2.6** Nếu $L_1, ..., L_n$ là các không gian véctơ hữu hạn chiều thì

$$L_1^* \otimes \cdots \otimes L_n^* \cong (L_1 \otimes \cdots \otimes L_n)^*.$$

Bằng phép quy nạp, ta chỉ cần kiểm chứng ví dụ này cho $n = 2$. Giả sử $f_1 : L_1 \to \mathbf{K}, f_2 : L_2 \to \mathbf{K}$ là các ánh xạ tuyến tính. Xét hợp thành của ánh xạ $f_1 \otimes f_2 : L_1 \otimes L_2 \to \mathbf{K} \otimes \mathbf{K}$ với đẳng cấu tuyến tuyến tính $\iota : \mathbf{K} \otimes \mathbf{K} \to \mathbf{K},\ a \otimes b \mapsto ab$, ta có $\iota \circ (f_1 \otimes f_2) \in (L_1 \otimes L_2)^*$. Tương ứng

$$\begin{aligned} L_1^* \times L_2^* &\to (L_1 \otimes L_2)^*, \\ (f_1, f_2) &\mapsto \iota \circ (f_1 \otimes f_2) \end{aligned}$$

hiển nhiên là một ánh xạ song tuyến tính. Theo Định lý 1.2, có duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h : L_1^* \otimes L_2^* \to (L_1 \otimes L_2)^*$ sao cho $h(f_1 \otimes f_2) = \iota \circ (f_1 \otimes f_2)$.

Ánh xạ $h$ chính là đẳng cấu phải tìm.

**Ví dụ 2.7** $L^* \otimes M \cong \mathcal{L}(L, M)$.

Xét ánh xạ song tuyến tính

$$\begin{aligned} L^* \times M &\to \mathcal{L}(L, M), \\ (f, \beta) &\mapsto [\alpha \mapsto f(\alpha)\beta], \end{aligned}$$

trong đó $f \in L^*, \alpha \in L, \beta \in M$. Theo Định lý 1.2, ánh xạ nói trên cảm sinh một ánh xạ tuyến tính duy nhất

$$\begin{aligned} L^* \otimes M &\to \mathcal{L}(L, M), \\ f \otimes \beta &\mapsto [\alpha \mapsto f(\alpha)\beta]. \end{aligned}$$

Đó là một đẳng cấu tuyến tính.

**Ví dụ 2.8** $\mathcal{L}(L \otimes M, N) \cong \mathcal{L}(L, \mathcal{L}(M, N))$.

Ta đã biết rằng $\mathcal{L}(L \otimes M, N) \cong \mathcal{L}(L, M; N)$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L, M; N) &\to \mathcal{L}(L, \mathcal{L}(M, N)), \\ f &\mapsto [\alpha \mapsto [\beta \mapsto f(\alpha, \beta)]], \end{aligned}$$

trong đó $f \in \mathcal{L}(L, M; N), \alpha \in L, \beta \in M$, chính là đẳng cấu tuyến tính cần tìm.

# 3 Đại số tenxơ

Với mỗi **K**-không gian véctơ $L$, ta xét tích tenxơ

$$T_p^q(L) = \underbrace{L^* \otimes \cdots \otimes L^*}_{p} \otimes \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{q}.$$

**Định nghĩa 3.1** Mỗi phần tử của không gian $T_p^q(L)$ được gọi là một *tenxơ kiểu* $(p, q)$ hay là một *tenxơ p lần thuận biến và q lần phản biến* trên không gian $L$.

Ta có thể đồng nhất $T_p^q(L)$ với $(\underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{p} \otimes \underbrace{L^* \otimes \cdots \otimes L^*}_{q})^*$. Vì thế, mỗi tenxơ $p$ lần thuận biến và $q$ lần phản biến được đồng nhất với một ánh xạ đa tuyến tính

$$\underbrace{L \times \cdots \times L}_{p} \times \underbrace{L^* \times \cdots \times L^*}_{q} \to \mathbf{K}.$$

Các đẳng cấu tuyến tính nói trong các Mệnh đề 2.1 và 2.2 cho phép xác định đẳng cấu tuyến tính chính tắc (có được bằng cách tráo đổi thứ tự các nhân tử)

$$\mu_p^q : (\underbrace{L^* \otimes \cdots \otimes L^*}_{p} \otimes \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{q}) \otimes (\underbrace{L^* \otimes \cdots \otimes L^*}_{p'} \otimes \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{q'}) \to \underbrace{L^* \otimes \cdots \otimes L^*}_{p+p'} \otimes \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{q+q'}.$$

Ta viết gọn đẳng cấu nói trên dưới dạng

$$\mu_p^q : T_p^q(L) \otimes T_{p'}^{q'}(L) \to T_{p+p'}^{q+q'}(L).$$

Xét tổng trực tiếp

$$T(L) = \oplus_{p,q=0}^{\infty} T_p^q(L).$$

Họ các ánh xạ $\{\mu_p^q | 0 \leq p, q < \infty\}$ xác định một ánh xạ tuyến tính

$$\mu : T(L) \otimes T(L) \to T(L).$$

Nói cách khác, $T(L)$ được trang bị một phép nhân định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} T(L) \times T(L) &\to T(L), \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \mu(\alpha \otimes \beta). \end{aligned}$$

Định lý sau đây được kiểm nghiệm không mấy khó khăn.

**Định lý 3.2** *$T(L)$ là một đại số trên trường* $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 3.3** $T(L)$ được gọi là *đại số tenxơ* của không gian véctơ $L$.

Đại số tenxơ $T(L)$ có hai đại số con hiển nhiên, đó là $T_*(L) = \oplus_{p=0}^{\infty} T_p^0(L)$ và $T^*(L) = \oplus_{q=0}^{\infty} T_0^q(L)$. Hạn chế của tích $\mu$ của $T(L)$ trên các đại số con này đơn giản chỉ là việc "viết liền" các tenxơ với nhau. Vì thế, tích của các đại số con này được ký hiệu đơn giản bởi $\otimes$.

Tiếp theo, ta xét biểu thức toạ độ của một tenxơ.

Giả sử $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ $L$. Trong lý thuyết tenxơ, để cho gọn người ta thường ký hiệu cơ sở đối ngẫu với $(e_1, ..., e_n)$ là $(e^1, ..., e^n)$. Đó là cơ sở của $L^*$ được xác định bởi điều kiện sau đây:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L^* &\rightarrow \mathbf{K}, \\ \langle e_j, e^i \rangle &= \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = j, \\ 0, & \text{nếu } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Theo Hệ quả 2.5, hệ véctơ sau đây lập nên một cơ sở của không gian véctơ $T^q_p(L)$:

$$(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} |\ 1 \leq i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q \leq n).$$

Như vậy, mỗi tenxơ $T \in T^q_p(L)$ có biểu thị tuyến tính duy nhất

$$T = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q},$$

trong đó $T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} \in \mathbf{K}$ là các toạ độ của $T$ trong cơ sở nói trên.

Dấu tổng trong công thức trên quá cồng kềnh. Để đơn giản hoá, người ta đặt ra qui ước cổ điển sau đây.

**Quy ước 3.4** *Trong các phép tính với tenxơ, ta sẽ không viết (mà hiểu ngầm) dấu tổng trong trường hợp tổng được lấy theo một cặp chỉ số giống nhau, trong đó có một chỉ số trên và một chỉ số dưới.*

Theo qui ước này thì công thức ở trên có thể viết lại như sau:

$$T = T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}.$$

Giả sử $(e'_1, ..., e'_n)$ cũng là một cơ sở của $L$, và $A = (a^j_\ell)$, trong đó $a^j_\ell$ là phần tử nằm ở hàng $j$ cột $\ell$ của ma trận $A$, là ma trận chuyển từ $(e_1, ..., e_n)$ sang $(e'_1, ..., e'_n)$, nghĩa là

$$e'_\ell = a^j_\ell e_j.$$

Gọi $B = (b_i^k)$ là *chuyển vị* của *ma trận chuyển* từ $(e^1, ..., e^n)$ sang $(e'^1, ..., e'^n)$, nghĩa là $e'^k = b_i^k e^i$. Ta có

$$\begin{aligned}\delta_\ell^k &= \langle e'_\ell, e'^k\rangle = \langle a_\ell^j e_j, b_i^k e^i\rangle = a_\ell^j b_i^k \langle e_j, e^i\rangle \\ &= a_\ell^j b_i^k \delta_j^i = a_\ell^i b_i^k.\end{aligned}$$

Điều này tương đương với đẳng thức ma trận $BA = E_n$. Hay là $B = A^{-1}$.

Giả sử biểu thức toạ độ của tenxơ $T$ trong cơ sở mới là

$$T = T'^{\ell_1,...,\ell_q}_{k_1,...,k_p} e'^{k_1} \otimes \cdots \otimes e'^{k_p} \otimes e'_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes e'_{\ell_q}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}T &= T'^{\ell_1,...,\ell_q}_{k_1,...,k_p} (b_{i_1}^{k_1} e^{i_1}) \otimes \cdots \otimes (b_{i_p}^{k_p} e^{i_p}) \otimes (a_{\ell_1}^{j_1} e_{j_1}) \otimes \cdots \otimes (a_{\ell_q}^{j_q} e_{j_q}) \\ &= a_{\ell_1}^{j_1} \cdots a_{\ell_q}^{j_q} b_{i_1}^{k_1} \cdots b_{i_p}^{k_p} T'^{\ell_1,...,\ell_q}_{k_1,...,k_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}.\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của toạ độ của một véctơ trong một cơ sở, ta nhận được

$$T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} = a_{\ell_1}^{j_1} \cdots a_{\ell_q}^{j_q} b_{i_1}^{k_1} \cdots b_{i_p}^{k_p} T'^{\ell_1,...,\ell_q}_{k_1,...,k_p}.$$

Đó là *công thức đổi toạ độ* của tenxơ.

Sau đây là các ví dụ về một vài tenxơ quan trọng.

**Ví dụ 3.5** (a) *Ma trận và ánh xạ tuyến tính:* Theo Ví dụ 2.7, không gian các ánh xạ tuyến tính $\mathcal{L}(L, L)$ được đồng nhất với tích tenxơ $L^* \otimes L = T_1^1(L)$. Mỗi phần tử $f$ của nó với biểu thức toạ độ

$$f = a_j^i e^j \otimes e_i$$

được đồng nhất với ánh xạ tuyến tính $f : L \to L$ xác định bởi

$$f(e_j) = a_j^i e_i.$$

Nói cách khác, ma trận $A = (a_j^i)$ với phần tử $a_j^i$ nằm ở hàng $i$ cột $j$ chính là ma trận của ánh xạ $f$ trong cơ sở $(e_1, ..., e_n)$.

(b) *Tenxơ mêtríc:* Theo Hệ quả 1.3 và Ví dụ 2.6, tích tenxơ $T_2^0(L) = L^* \otimes L^*$ được đồng nhất với không gian $(L \otimes L)^* \equiv \mathcal{L}(L, L; \mathbf{K})$ các ánh xạ song tuyến tính từ $L \times L$ vào $\mathbf{K}$. Mỗi phần tử của nó

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j$$

được đồng nhất với dạng song tuyến tính $g : L \times L \to \mathbf{K}$ xác định bởi

$$g(e_i, e_j) = g_{ij}.$$

Hàm $g$ là đối xứng nếu và chỉ nếu $g_{ij} = g_{ji}$ với mọi $i, j$. Giả sử $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, hàm $g$ đối xứng và ma trận Gram-Shmidt $G = (g_{ij})$ có các định thức con chính đều dương. Khi đó, tenxơ $g$ là một tích vô hướng trên $L$. Nó được gọi là một tenxơ mêtríc.

(c) *Tenxơ cấu trúc đại số:* Theo Hệ quả 1.3 cùng các Ví dụ 2.6 và 2.7, tích tenxơ $T_2^1(L) = L^* \otimes L^* \otimes L$ được đồng nhất với không gian các ánh xạ $\mathcal{L}(L \otimes L, L) \equiv \mathcal{L}(L, L; L)$. Mỗi phần tử của tích tenxơ đó

$$m = m_{ij}^t e^i \otimes e^j \otimes e_t$$

được đồng nhất với một ánh xạ tuyến tính $m : L \otimes L \to L$ xác định bởi

$$m(e_i \otimes e_j) = m_{ij}^t e_t.$$

Ánh xạ này trang bị cho $L$ một cấu trúc đại số nếu và chỉ nếu nó có tính kết hợp, nghĩa là:

$$m(m(e_i \otimes e_j) \otimes e_k) = m(e_i \otimes m(e_j \otimes e_k)),$$

với mọi $i, j, k$. Đẳng thức này tương đương với

$$m_{ij}^t m_{tk}^\ell = m_{it}^\ell m_{jk}^t,$$

với mọi $i, j, k, \ell$. Nói cách khác, mỗi tenxơ $m$ thoả mãn hệ thức trên được đồng nhất với một cấu trúc đại số trên không gian véctơ $L$. Nó được gọi là một tenxơ cấu trúc đại số trên $L$.

## 4 Đại số đối xứng

Trong các cách định nghĩa khác nhau của khái niệm tenxơ đối xứng và đại số đối xứng, chúng ta chọn cách không phụ thuộc vào đặc số của trường $\mathbf{K}$.

Ta vẫn giả sử $L$ là một không gian véctơ trên trường $\mathbf{K}$.

Gọi $A_q$ là không gian véctơ con của $T^q(L) := T_0^q(L)$ sinh bởi các véctơ có dạng

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q - \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(q)},$$

trong đó $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$, $\sigma \in S_q$ (nhóm đối xứng trên $q$ phần tử).

**Định nghĩa 4.1** Không gian thương

$$S^q(L) := T^q(L)/A_q$$

được gọi là *luỹ thừa đối xứng* cấp $q$ của $L$. Mỗi phần tử của $S^q(L)$ được gọi là một *tenxơ đối xứng* trên $L$.

Để cho gọn, ta ký hiệu $L^{(q)} := L \times \cdots \otimes L$ ($q$ lần).

**Định nghĩa 4.2** Giả sử $M$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ. Ánh xạ đa tuyến tính $\psi : L^{(q)} \to M$ được gọi là *đối xứng* nếu

$$\psi(\alpha_1, ..., \alpha_q) = \psi(\alpha_{\sigma(1)}, ..., \alpha_{\sigma(q)}),$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$, $\sigma \in S_q$.

Hợp thành của ánh xạ đa tuyến tính chính tắc

$$\begin{aligned} t = t_q : L^{(q)} &\to T^q(L), \\ t(\alpha_1, ..., \alpha_q) &= \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q \end{aligned}$$

và phép chiếu tuyến tính $\pi = \pi_q : T^q(L) \to S^q(L)$ là ánh xạ đa tuyến tính

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_q : L^{(q)} &\to S^q(L), \\ \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q) &= \pi(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q). \end{aligned}$$

Theo định nghĩa của luỹ thừa đối xứng $S^q(L)$, ánh xạ $\varphi$ có tính đối xứng.

Hơn nữa, cặp $(\varphi, S^q(L))$ có tính chất *phổ dụng* sau đây: Với mọi ánh xạ đa tuyến tính đối xứng $\psi : L^{(q)} \to M$ trong đó $M$ là một **K**-không gian véctơ bất kỳ, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h : S^q(L) \to M$ làm giao hoán biểu đồ

$$\begin{tikzcd} L^{(q)} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & S^q(L) \arrow[dl, "h"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

tức là $\psi = h \circ \varphi$.

Dễ kiểm tra lại rằng $A = \oplus_{q=0}^{\infty} A_q$ là một iđêan của đại số $T^*(L) = \oplus_{q=0}^{\infty} T^q(L)$. Do đó,

$$S(L) := T^*(L)/A = \oplus_{q=0}^{\infty} T^q(L)/A_q = \oplus_{q=0}^{\infty} S^q(L)$$

là một đại số trên **K**.

**Định nghĩa 4.3** $S(L)$ được gọi là *đại số đối xứng* của không gian véctơ $L$.

Tích của hai phần tử $x \in S^q(L)$ và $y \in S^r(L)$ được ký hiệu bởi $x \cdot y$, hoặc đơn giản bởi $xy \in S^{q+r}(L)$.

**Mệnh đề 4.4**

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q) \cdot \varphi(\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}) = \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}),$$

*với mọi* $\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r} \in L$.

**Chứng minh:** Gọi $\times : L^{(q)} \times L^{(r)} \to L^{(q+r)}$ là ánh xạ tự nhiên

$$\times((\alpha_1, ..., \alpha_q), (\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r})) = (\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}).$$

Ta có biểu đồ giao hoán sau đây:

$$\begin{tikzcd}
L^{(q)} \times L^{(r)} \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "t_q \times t_r"'] & L^{(q+r)} \arrow[d, "t_{q+r}"] \\
T^q(L) \times T^r(L) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\pi_q \times \pi_r"'] & T^{q+r}(L) \arrow[d, "\pi_{q+r}"] \\
S^q(L) \times S^r(L) \arrow[r, "\cdot"] & S^{q+r}(L)
\end{tikzcd},$$

trong đó "$\otimes$" là tích của đại số $T^*(L)$, "$\cdot$" là tích của đại số $S(L)$. Như thế

$$\cdot(\pi_q \times \pi_r)(t_q \times t_r) = \pi_{q+r} t_{q+r} \times .$$

Một mặt, ta có

$$\begin{aligned}
\cdot(\pi_q \times \pi_r)(t_q \times t_r)((\alpha_1, ..., \alpha_q), \quad (\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}))& \\
&= \cdot(\pi_q \times \pi_r)(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q, \alpha_{q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{q+r}) \\
&= \cdot(\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q), \varphi(\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}) \\
&= \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q) \cdot \varphi(\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\pi_{q+r} t_{q+r} \times ((\alpha_1, ..., \alpha_q), \quad (\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}))& \\
&= \pi_{q+r} t_{q+r}(\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}) \\
&= \pi_{q+r}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q \otimes \alpha_{q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{q+r}) \\
&= \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}).
\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

**Hệ quả 4.5**

$$\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q) := \pi(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q) = \alpha_1 \cdots \alpha_q,$$

*với mọi* $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$.

**Chứng minh:** Hệ quả được chứng minh bằng quy nạp theo $q$.

Với $q = 1$, đẳng thức $\varphi(\alpha_1) := \pi(\alpha_1) = \alpha_1$ được suy trực tiếp từ định nghĩa của $\varphi$. Giả sử hệ quả đã được chứng minh cho $q-1$. Theo mệnh đề trên ta có

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1, ..., \alpha_q) &= \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_{q-1}) \cdot \varphi(\alpha_q) \\ &= (\alpha_1 \cdots \alpha_{q-1}) \cdot \alpha_q \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_q.\end{aligned}$$

Như vậy, hệ quả cũng đúng đối với $q$. □

**Mệnh đề 4.6** *$xy = yx$ với mọi $x \in S^q(L)$, $y \in S^r(L)$.*

**Chứng minh:** Trước hết xét trường hợp $x = \alpha \in S^1(L) = L$, $y = \beta \in S^1(L) = L$. Theo định nghĩa, $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \in A_2$. Do đó

$$\begin{aligned}\alpha\beta - \beta\alpha &= \varphi((\alpha, \beta) - (\beta, \alpha)) = \pi t((\alpha, \beta) - (\beta, \alpha)) \\ &= \pi(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha) = 0 \in S^2(L).\end{aligned}$$

Để chứng minh $xy = yx$ ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_q)(\beta_1 \cdots \beta_r) = (\beta_1 \cdots \beta_r)(\alpha_1 \cdots \alpha_q),$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_q, \beta_1, ..., \beta_r \in L$. Theo Mệnh đề 4.4 và phần đầu của chứng minh mệnh đề này, ta có thể tráo đổi thứ tự từng $\alpha_i$ với từng $\beta_j$ mà tích không thay đổi. Mệnh đề được chứng minh. □

**Định lý 4.7** *Giả sử $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của $\mathbf{K}$-không gian véctơ $L$. Khi đó hệ véctơ sau đây lập nên một cơ sở của không gian véctơ $S(L)$:*

$$(e_1^{i_1} \cdots e_n^{i_n} : i_1, ..., i_n \geq 0).$$

*Hơn nữa, đại số $S(L)$ đẳng cấu với đại số đa thức trên $n$ phần tử $e_1, ..., e_n$, nghĩa là $S(L) \cong \mathbf{K}[e_1, ..., e_n]$.*

**Chứng minh:** Gọi $\mathbf{K}[X_1,...,X_n]$ là đại số đa thức của $n$ ẩn, và $(\mathbf{K}[X_1,...,X_n])_q$ là không gian con các đa thức thuần nhất bậc $q$. Ta xét ánh xạ đa tuyến tính $\eta : L^{(q)} \to (\mathbf{K}[X_1,...,X_n])_q$ xác định bởi hệ thức $\eta(e_{j_1},...,e_{j_q}) = X_{j_1}\cdots X_{j_q}$. Vì đại số $\mathbf{K}[X_1,...,X_n]$ giao hoán, nên $\eta$ đối xứng. Do tính phổ dụng của $S^{(q)}$, tồn tại ánh xạ tuyến tính $h_q : S^{(q)} \to (\mathbf{K}[X_1,...,X_n])_q$ sao cho

$$h_q(e_{j_1}\cdots e_{j_q}) = X_{j_1}\cdots X_{j_q}.$$

Vì các đại số $S(L)$ và $\mathbf{K}[X_1,...,X_n]$ đều giao hoán, nên hệ thức trên có thể viết lại thành

$$h_q(e_1^{i_1}\cdots e_n^{i_n}) = X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n},$$

trong đó $i_1+\cdots+i_n = q$.

$h_q$ là một toàn cấu, bởi vì theo công thức trên mọi đơn thức bậc $q$ của các biến $X_1,...,X_n$ đều thuộc ảnh của $h_q$. Mặt khác, theo Hệ quả 2.5 và Mệnh đề 4.6, không gian $S^{(q)}(L)$ được sinh bởi hệ véctơ $(e_1^{i_1}\cdots e_n^{i_n} : i_1+\cdots+i_n = q)$. Do đó, $\dim S^{(q)}(L) \le \dim(\mathbf{K}[X_1,...,X_n])_q$.Vì thế, toàn cấu $h_q$ là một đẳng cấu.

Hệ quả là $h = \oplus h_q : S(L) \to \mathbf{K}[X_1,...,X_n]$ cũng là một đẳng cấu tuyến tính. Từ Mệnh đề 4.4 suy ra rằng $h(xy) = h(x)h(y)$. Vậy $h$ là một đẳng cấu đại số. Định lý được chứng minh. □

Mỗi ánh xạ tuyến tính $f : L \to M$ cảm sinh một đồng cấu đại số $S(f) : S(L) \to S(M)$. Đó là tổng trực tiếp của các đồng cấu thành phần $S^q(f) : S^q(L) \to S^q(M)$, $(0 \le q < \infty)$, được định nghĩa như sau. Xét ánh xạ đa tuyến tính đối xứng

$$\begin{aligned}\tilde{S}^q(f) : L^{(q)} &\to S^q(M),\\ \tilde{S}^q(f)(\alpha_1,...,\alpha_q) &= f(\alpha_1)\cdots f(\alpha_q).\end{aligned}$$

Do tính phổ dụng của $S^q(L)$, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $S^q(f) : S^q(L) \to S^q(M)$ sao cho $\tilde{S}^q(f) = S^q(f)\circ\varphi$, trong đó $\varphi : L^{(q)} \to S^q(L)$ là ánh xạ đa tuyến tính đối xứng chính tắc. Ta thu được biểu thức tường minh cho $S^q(f)$ :

$$S^q(f)(\alpha_1\cdots\alpha_q) = S^q(f)(\varphi(\alpha_1,...,\alpha_q)) = \tilde{S}^q(f)(\alpha_1,...,\alpha_q)$$

$$= \quad f(\alpha_1)\cdots f(\alpha_q),$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$.

Dễ dàng kiểm tra lại rằng $S(gf) = S(g)S(f)$, với mọi cặp ánh xạ tuyến tính $f : L \to M$, $g : M \to N$. Hơn nữa $S(id_L) = id_{S(L)}$.

**Nhận xét 4.8** Nếu Char($\mathbf{K}$) = 0, người ta có một cách khác để định nghĩa luỹ thừa đối xứng $S^q(L)$ như sau.

Toán tử đối xứng hoá

$$S : T^q(L) \to T^q(L)$$

là ánh xạ tuyến tính được định nghĩa bởi hệ thức

$$S(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(q)}.$$

Vì Char($\mathbf{K}$) = 0 cho nên $q!$ khả nghịch trong trường $\mathbf{K}$, với mọi $q \in \mathbf{N}$. Dễ dàng chứng minh rằng $S^2 = S$. Xét không gian ảnh của toán tử thay phiên hoá

$$\tilde{S}^q(L) := \mathrm{Im}(S) \subset T^q(L).$$

Như vậy, $x \in T^q(L)$ là một phần tử của $\tilde{S}^q(L)$ nếu và chỉ nếu $x = S(x)$.

Người ta chứng minh được rằng, nếu Char($\mathbf{K}$) = 0 thì phép hợp thành

$$\tilde{S}^q(L) \subset T^q(L) \xrightarrow{\pi} S^q(L) = T^q(L)/A_q$$

là một đẳng cấu tuyến tính. Đẳng cấu này chuyển $S(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q)$ thành $\alpha_1 \cdots \alpha_q$.

Do đó, trong những lĩnh vực mà trường $\mathbf{K}$ luôn luôn là trường số thực hoặc trường số phức, người ta thường dùng định nghĩa sau đây:

$$\begin{aligned} S^q(L) &:= \mathrm{Im}(S) \subset T^q(L), \\ \alpha_1 \cdots \alpha_q &:= S(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q). \end{aligned}$$

## 5 Đại số ngoài

Cũng giống như ở tiết trước, trong các cách định nghĩa khác nhau của khái niệm lũy thừa ngoài và đại số ngoài, chúng ta chọn cách không phụ thuộc vào đặc số của trường $\mathbf{K}$.

Gọi $B_q$ là không gian véctơ con của $T^q(L)$ sinh bởi các phần tử có dạng $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q$ trong đó $\alpha_i = \alpha_j$ với các chỉ số $i \neq j$ nào đó.

**Định nghĩa 5.1** Không gian thương

$$\Lambda^q(L) := T^q(L)/B_q$$

được gọi là *luỹ thừa ngoài* bậc $q$ của $L$.

**Định nghĩa 5.2** Giả sử $M$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ. Ánh xạ đa tuyến tính $\eta : L^{(q)} \to M$ được gọi là *thay phiên* nếu

$$\eta(\alpha_1, ..., \alpha_q) = 0,$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$ trong đó $\alpha_i = \alpha_j$ với các chỉ số $i \neq j$ nào đó.

Hợp thành của ánh xạ đa tuyến tính chính tắc

$$\begin{aligned} t = t_q : L^{(q)} &\to T^q(L), \\ t(\alpha_1, ..., \alpha_q) &= \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q \end{aligned}$$

và phép chiếu tuyến tính $\pi = \pi_q : T^q(L) \to \Lambda^q(L)$ là ánh xạ đa tuyến tính

$$\begin{aligned} \xi = \xi_q : L^{(q)} &\to \Lambda^q(L), \\ \xi(\alpha_1, ..., \alpha_q) &= \pi(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q). \end{aligned}$$

Theo định nghĩa của luỹ thừa ngoài, $\xi$ là một ánh xạ thay phiên.

Hơn nữa, cặp $(\xi, \Lambda^q(L))$ có tính *phổ dụng* sau đây: Với mọi ánh xạ đa tuyến tính thay phiên $\eta : L^{(q)} \to M$, trong đó $M$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ bất kỳ, tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h : \Lambda^q(L) \to M$ làm giao hoán biểu đồ

$$\begin{tikzcd} L^{(q)} \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & \Lambda^q(L) \arrow[dl, "h"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

tức là $\eta = h \circ \xi$.

Dễ thấy rằng $B = \oplus_{q=0}^{\infty} B_q$ là một iđêan của đại số $T^*(L)$. Do đó

$$\Lambda(L) := T^*(L)/B = \oplus_{q=0}^{\infty} T^q(L)/B_q = \oplus_{q=0}^{\infty} \Lambda^q(L)$$

là một đại số trên $\mathbf{K}$.

**Định nghĩa 5.3** $\Lambda(L)$ được gọi là *đại số ngoài* của không gian véctơ $L$.

Tích trong $\Lambda(L)$ của $\omega \in \Lambda^q(L)$ và $\eta \in \Lambda^r(L)$ được ký hiệu là $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{q+r}(L)$, và được gọi là tích ngoài của $\omega$ và $\eta$.

**Mệnh đề 5.4**

$$\xi(\alpha_1, ..., \alpha_q) \wedge \xi(\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}) = \xi(\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}),$$

*với mọi* $\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r} \in L$.

**Chứng minh:** Gọi $\wedge : \Lambda^q(L) \times \Lambda^r(L) \to \Lambda^{q+r}(L)$ là (hạn chế của) tích trong đại số $\Lambda(L)$. Ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd} L^{(q)} \times L^{(r)} \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "t_q \times t_r"'] & L^{(q+r)} \arrow[d, "t_{q+r}"] \\ T^q(L) \times T^r(L) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\pi_q \times \pi_r"'] & T^{q+r}(L) \arrow[d, "\pi_{q+r}"] \\ \Lambda^q(L) \times \Lambda^r(L) \arrow[r, "\wedge"] & \Lambda^{q+r}(L) , \end{tikzcd}$$

Từ đó

$$\wedge(\pi_q \times \pi_r)(t_q \times t_r) = \pi_{q+r} t_{q+r} \times .$$

Một mặt, ta có

$$\begin{aligned}\wedge(\pi_q \times \pi_r)(t_q \times t_r)((\alpha_1, ..., \alpha_q), \quad & (\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r})) \\ = \quad & \wedge(\pi_q \times \pi_r)(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q, \alpha_{q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{q+r}) \\ = \quad & \wedge(\xi(\alpha_1, ..., \alpha_q), \xi(\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r})) \\ = \quad & \xi(\alpha_1, ..., \alpha_q) \wedge \xi(\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}).\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\pi_{q+r} t_{q+r} \times ((\alpha_1, ..., \alpha_q), \quad & (\alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r})) \\ = \quad & \pi_{q+r} t_{q+r}(\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}) \\ = \quad & \pi_{q+r}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q \otimes \alpha_{q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{q+r}) \\ = \quad & \xi(\alpha_1, ..., \alpha_q, \alpha_{q+1}, ..., \alpha_{q+r}).\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

**Hệ quả 5.5**

$$\xi(\alpha_1, ..., \alpha_q) := \pi(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q,$$

*với mọi* $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$.

**Chứng minh:** Hệ quả được chứng minh bằng quy nạp theo $q$.

Với $q = 1$, đẳng thức $\xi(\alpha_1) := \pi(\alpha_1) = \alpha_1$ được suy trực tiếp từ định nghĩa của $\xi$. Giả sử hệ quả đã được chứng minh cho $q - 1$. Theo mệnh đề trên ta có

$$\begin{aligned}\xi(\alpha_1, ..., \alpha_q) &= \xi(\alpha_1, ..., \alpha_{q-1}) \wedge \xi(\alpha_q) \\ &= (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{q-1}) \wedge \alpha_q \\ &= \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q.\end{aligned}$$

Như thế, hệ quả cũng đúng đối với $q$. □

**Mệnh đề 5.6** *$\omega \wedge \eta = (-1)^{qr}\eta \wedge \omega$ với mọi $\omega \in \Lambda^q(L)$, $\eta \in \Lambda^r(L)$.*

**Chứng minh:** Trước hết xét trường hợp $\omega = \alpha \in \Lambda^1(L) = L$, $\eta = \beta \in \Lambda^1(L) = L$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha,$$

Thật vậy, theo định nghĩa của $\Lambda^2(L)$ ta có $\alpha \wedge \alpha = \beta \wedge \beta = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha+\beta) \wedge (\alpha+\beta) = \alpha \wedge \alpha + \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha + \beta \wedge \beta \\ &= \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha. \end{aligned}$$

Để chứng minh $\omega \wedge \eta = (-1)^{qr}\eta \wedge \omega$ ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q) \wedge (\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_r) = (-1)^{qr}(\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_r) \wedge (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q),$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_q, \beta_1, ..., \beta_r \in L$. Theo Mệnh đề 5.4 và phần đầu của chứng minh mệnh đề này, mỗi lần tráo đổi thứ tự từng $\alpha_i$ với từng $\beta_j$ đứng sát nó thì tích ngoài đổi dấu. Để biến đổi $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_r$ thành $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_r \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q$ ta cần thực hiện $qr$ lần tráo đổi như thế. Mệnh đề được chứng minh. □

Một hệ quả hiển nhiên của mệnh đề trên là

$$\alpha_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\sigma(q)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q,$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$, $\sigma \in S_q$. Trên cơ sở đó, ta có định lý sau đây.

**Định lý 5.7** *(i) $\Lambda^q(L) = 0$ với mọi $q > n = \dim_K L$.*

*(ii) Giả sử $(e_1, ..., e_n)$ là một cơ sở của không gian véctơ $L$. Khi đó, với $0 \le q \le n$, hệ véctơ sau đây lập thành một cơ sở của không gian véctơ $\Lambda^q(L)$:*

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} : 1 \le i_1 < \cdots < i_q \le n).$$

*Nói riêng, $\dim_K \Lambda^q(L) = \begin{pmatrix} n \\ q \end{pmatrix}$.*

**Chứng minh:** Do tính đa tuyến tính của tích $\wedge$, không gian véctơ $\Lambda^q(L)$ được sinh bởi các véctơ $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}$, với $1 \leq i_1, ..., i_q \leq n$.

(i) Nếu $q > n$ thì trong mỗi phần tử như vậy có ít nhất hai chỉ số nào đó bằng nhau: $i_s = i_t$ với $s \neq t$. Vì thế, tất cả các phần tử nói trên đều bằng 0. Do đó $\Lambda^q(L) = 0$.

(ii) Nếu $q = n$, theo lý thuyết định thức, có duy nhất một ánh xạ đa tuyến tính, thay phiên $\det : L^{(q)} \to \mathbf{K}$ sao cho $\det(e_1, ..., e_n) = 1$. Do đó, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính

$$\overline{\det} : \Lambda^q(L) \to \mathbf{K}$$

sao cho $\overline{\det}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$. Từ đó suy ra hệ chỉ gồm một véctơ $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ là một cở sở của không gian véctơ $\Lambda^q(L)$. Như thế $\dim \Lambda^q(L) = 1$.

Bây giờ xét trường hợp $1 \leq q \leq n$. Giả sử có một ràng buộc tuyến tính

$$\sum_{(i)} a_{(i)} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} = 0,$$

trong đó $(i) = (i_1, ..., i_q)$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n$, $a_{(i)} \in \mathbf{K}$. Với mỗi bộ chỉ số cố định $(j) = (j_1, ..., j_q)$ thoả mãn $j_1 < \cdots < j_q$, ta chọn $j_{q+1}, ..., j_n$ sao cho $(j_1, ..., j_q, j_{q+1}, ..., j_n)$ là một hoán vị nào đó của $(1, 2, ..., n)$. Nhân ngoài hai vế của đẳng thức trên với $e_{j_{q+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}$ ta thu được một tổng với hầu hết các số hạng $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} \wedge e_{j_{q+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}$ bằng 0, vì có các chỉ số trùng lặp, loại trừ một số hạng duy nhất với các chỉ số không trùng lặp

$$a_{(j)} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_q} \wedge e_{j_{q+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} = 0.$$

Hay là $\pm a_{(j)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = 0$. Do đó $a_{(j)} = 0$.

Như vậy, hệ véctơ $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n)$ độc lập tuyến tính trong $\Lambda^q(L)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Mỗi ánh xạ tuyến tính $f : L \to M$ cảm sinh một đồng cấu đại số $\Lambda(f) : \Lambda(L) \to \Lambda(M)$. Đó là tổng trực tiếp của các đồng cấu thành phần $\Lambda^q(f) : \Lambda^q(L) \to \Lambda^q(M)$,

$(0 \le q < \infty)$, được định nghĩa như sau. Xét ánh xạ đa tuyến tính thay phiên

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^q(f) : L^{(q)} &\to \Lambda^q(M), \\ \tilde{\Lambda}^q(f)(\alpha_1, ..., \alpha_q) &= f(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f(\alpha_q). \end{aligned}$$

Do tính phổ dụng của $\Lambda^q(L)$, tồn tại duy nhất ánh xạ tuyến tính $\Lambda^q(f) : \Lambda^q(L) \to \Lambda^q(M)$ sao cho $\tilde{\Lambda}^q(f) = \Lambda^q(f) \circ \xi$, trong đó $\xi : L^{(q)} \to \Lambda^q(L)$ là ánh xạ đa tuyến tính thay phiên chính tắc. Ta thu được biểu thức tường minh cho $\Lambda^q(f)$ :

$$\begin{aligned} \Lambda^q(f)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q) &= \Lambda^q(f)(\xi(\alpha_1, ..., \alpha_q)) \\ &= \tilde{\Lambda}^q(f)(\alpha_1, ..., \alpha_q) \\ &= f(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f(\alpha_q), \end{aligned}$$

với mọi $\alpha_1, ..., \alpha_q \in L$.

Dễ kiểm tra lại rằng $\Lambda(gf) = \Lambda(g)\Lambda(f)$, với mọi cặp ánh xạ tuyến tính $f : L \to M$, $g : M \to N$. Hơn nữa $\Lambda(id_L) = id_{\Lambda(L)}$.

**Nhận xét 5.8** Nếu $\mathrm{Char}(\mathbf{K}) = 0$, người ta có một cách khác để định nghĩa luỹ thừa ngoài $\Lambda^q(L)$ như trình bày dưới đây. Cách này thường được các nhà giải tích và hình học vi phân ưa dùng.

Toán tử thay phiên hoá

$$\mathrm{Alt} : T^q(L) \to T^q(L)$$

là ánh xạ tuyến tính được định nghĩa bởi hệ thức

$$\mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (\mathrm{sgn}\sigma) \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(q)}.$$

Điều kiện $\mathrm{Char}(\mathbf{K}) = 0$ đảm bảo cho $q!$ khả nghịch trong trường $\mathbf{K}$. Dễ dàng thử lại rằng $\mathrm{Alt}^2 = \mathrm{Alt}$. Xét không gian ảnh của toán tử thay phiên hoá

$$\tilde{\Lambda}^q(L) := \mathrm{Im}(\mathrm{Alt}) \subset T^q(L).$$

Như thế, $\omega \in T^q(L)$ là một phần tử của $\tilde{\Lambda}^q(L)$ nếu và chỉ nếu $\omega = \mathrm{Alt}(\omega)$.

Người ta chứng minh được rằng, nếu $\mathrm{Char}(\mathbf{K}) = 0$ thì phép hợp thành

$$\tilde{\Lambda}^q(L) \subset T^q(L) \xrightarrow{\pi} \Lambda^q(L) = T^q(L)/B_q$$

là một đẳng cấu tuyến tính. Đẳng cấu này chuyển $\mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q)$ thành $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q$.

Vì thế, trong Giải tích hoặc Hình học vi phân (là lĩnh vực mà trường $\mathbf{K}$ luôn luôn là $\mathbf{R}$ hoặc $\mathbf{C}$), người ta thường dùng định nghĩa sau đây:

$$\begin{aligned} \Lambda^q(L) &:= \mathrm{Im}(\mathrm{Alt}) \subset T^q(L), \\ \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q &:= \mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q). \end{aligned}$$

**Định nghĩa 5.9** Gọi $L^*$ là không gian đối ngẫu của $L$. Khi đó mỗi phần tử của $\Lambda^q(L^*)$ được gọi là một *$q$-dạng (ngoài)* trên $L$.

Mệnh đề sau đây giải thích cấu trúc của không gian các $q$-dạng ngoài.

**Mệnh đề 5.10** *Nếu $L$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ hữu hạn chiều thì*

$$\Lambda^q(L^*) \cong \Lambda^q(L)^*,$$

*trong đó vế phải là không gian đối ngẫu của $\Lambda^q(L)$.*

**Chứng minh:** Nhận xét rằng ánh xạ

$$\begin{aligned} L^q \times (L^*)^q &\to \mathbf{K} \\ ((\alpha_1, ..., \alpha_q), (\varphi_1, ..., \varphi_q)) &\mapsto \det(\langle \alpha_i, \varphi_j \rangle) \end{aligned}$$

là đa tuyến tính thay phiên đối với các biến $\alpha_1, ..., \alpha_q$, đồng thời cũng đa tuyến tính thay phiên đối với các biến $\varphi_1, ..., \varphi_q$. (Ở đây $\langle \alpha_i, \varphi_j \rangle$ là giá trị của $\varphi_j$ trên véctơ $\alpha_i$.) Vì thế, nó cảm sinh ánh xạ song tuyến tính

$$\begin{aligned} \Lambda^q(L) \times \Lambda^q(L^*) &\to \mathbf{K} \\ (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_q) &\mapsto \det(\langle \alpha_i, \varphi_j \rangle). \end{aligned}$$

Ánh xạ này cho phép xem mỗi phần tử của $\Lambda^q(L^*)$ như một dạng tuyến tính trên $\Lambda^q(L)$, tức là như một phần tử của $\Lambda^q(L)^*$.

Gọi $e_1, ..., e_n$ là một cơ sở của $L$ và $e^1, ..., e^n$ là cơ sở đối ngẫu của $L^*$. Sử dụng phép đồng nhất nói trên ta thấy cơ sở $(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_q} | j_1 < \cdots < j_q)$ chính là đối ngẫu của cơ sở $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} | i_1 < \cdots < i_q)$. Thật vậy,

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_q}) \mapsto \det(\langle e_{i_k}, e^{j_\ell} \rangle).$$

Vế phải bằng 1 khi và chỉ khi $i_1 = j_1, ..., i_q = j_q$ và bằng 0 trong các trường hợp khác. Như thế $\Lambda^q(L^*) \cong \Lambda^q(L)^*$. $\square$

**Ví dụ 5.11** Xét không gian véctơ thực $L = \mathbf{R}^n$ với cơ sở chính tắc $(e_1, ..., e_n)$:

$$\begin{cases} e_1 & = & (1, 0, ..., 0)^t, \\ e_2 & = & (0, 1, ..., 0)^t, \\ . & . & ............... \\ e_n & = & (0, 0, ..., 1)^t. \end{cases}$$

Gọi $(dx^1, ..., dx^n)$ là cơ sở đối ngẫu của $(\mathbf{R}^n)^*$ được xác định bởi hệ điều kiện sau

$$dx^i(e_j) = \delta^i_j, \ \ (1 \le i, j \le n).$$

(Cách ký hiệu này có cơ sở từ Lý thuyết vi phân của hàm nhiều biến.)

Ta xét không gian $\Lambda^q(\mathbf{R}^{n*}) \cong \Lambda^q(\mathbf{R}^n)^*$ các $q$-dạng trên $\mathbf{R}^n$. Nó có một cơ sở là hệ véctơ sau đây

$$(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q} | 1 \le i_1 < ... < i_q \le n).$$

Mỗi véctơ $\omega \in \Lambda^q(\mathbf{R}^{n*})$ có biểu thị tuyến tính duy nhất qua cơ sở đó:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_q \le n} a_{i_1, ..., i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q},$$

ở đây $a_{i_1, ..., i_q} \in \mathbf{R}$.

Trường hợp đặc biệt khi $q = n$, không gian $\Lambda^n(\mathbf{R}^{n*})$ có số chiều bằng 1, với cơ sở gồm phần tử duy nhất

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Theo đẳng cấu chính tắc $\Lambda^n(\mathbf{R}^{n*}) \cong \Lambda^n(\mathbf{R}^n)^*$ nêu trong chứng minh Mệnh đề 5.10, $n$-dạng $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ được đồng nhất với ánh xạ tuyến tính $\Lambda^n(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ xác định bởi điều kiện chuẩn hoá

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \det(dx^j(e_i)) = 1.$$

Ta định nghĩa ánh xạ đa tuyến tính thay phiên duy nhất $(\mathbf{R}^n)^{(n)} \to \mathbf{R}$, cũng được ký hiệu là $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, bằng công thức sau đây

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n).$$

Theo lý thuyết định thức

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \det .$$

Thật vậy, cả hai vế đều là ánh xạ đa tuyến tính thay phiên duy nhất $(\mathbf{R}^n)^{(n)} \to \mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện chuẩn hoá.

Do tính đa tuyến tính thay phiên, mỗi phần tử $\omega \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)^*$ có thể xem như một *thước đo thể tích định hướng* $n$ chiều trên $\mathbf{R}^n$ mà giá trị $\omega(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)$ là thể tích của hình hộp $n$ chiều có hướng tựa trên các véctơ $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Giả sử $U$ là một tập mở trong $\mathbf{R}^n$. Mỗi hàm khả vi vô hạn từ $U$ vào $\Lambda^q(\mathbf{R}^n)^*$ được gọi là một *$q$-dạng vi phân* trên $U$. Như thế, mỗi $q$-dạng vi phân trên $U$ được biểu thị duy nhất dưới dạng

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n} a_{i_1,\ldots,i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q},$$

trong đó $a_{i_1,\ldots,i_q}(x)$ là các hàm khả vi vô hạn theo biến $x \in U$.

Không gian các $q$-dạng vi phân trên $U$ dược ký hiệu là $\Omega^q(U)$. Nói cách khác

$$\Omega^q(U) = C^\infty(U, \Lambda^q(\mathbf{R}^n)^*).$$

## Bài tập

1. Chứng minh chi tiết các khẳng định về tích tenxơ trong các Ví dụ 2.6, 2.7 và 2.8.

2. Cho $e_1, ..., e_n$ là một cơ sở của $L$ và $e^1, ..., e^n$ là cơ sở đối ngẫu của $L^*$. Mỗi tenxơ kiểu $(1, 1)$ có dạng toạ độ như sau
$$f = a^i_j e^j \otimes e_i.$$
Gọi $A = (a^i_j)$ là ma trận với phần tử $a^i_j$ nằm ở hàng $i$ cột $j$. Hãy tìm công thức mô tả sự thay đổi của $A$ khi đổi cơ sở.

3. Với giả thiết như bài trên, mỗi tenxơ kiểu $(2, 0)$ có dạng toạ độ như sau
$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j$$
Gọi $G = (g_{ij})$ là ma trận với phần tử $g_{ij}$ nằm ở hàng $i$ cột $j$. Hãy tìm công thức mô tả sự thay đổi của $G$ khi đổi cơ sở.

4. Giải quyết vấn đề tương tự với bài tập trên cho các tenxơ kiểu $(0, 2)$.

5. Giả sử tenxơ hai lần thuận biến $g$ có ma trận $G = (g_{ij})$ trong cơ sở $(e^1, ..., e^n)$ là một ma trận khả nghịch. Xét tenxơ hai lần phản biến $g^{-1}$ xác định như sau $g^{-1} = g^{ij} e_i \otimes e_j$, trong đó $g^{ij}$ là phần tử của ma trận $G^{-1}$. Chứng minh rằng ma trận của hai tenxơ nói trên trong hai cơ sở đối ngẫu bất kỳ đều là các ma trận nghịch đảo của nhau.

6. Cho tự đồng cấu $f : L \to L$ của $\mathbf{K}$-không gian véctơ hữu hạn chiều $L$. Hãy diễn đạt hàm $F : L \times L^* \to \mathbf{K}$ xác định bởi công thức $F(\alpha, \ell) = \ell(f(\alpha))$ như một tenxơ. So sánh các toạ độ của tenxơ này trong một cơ sở với ma trận của $f$ trong cùng cơ sở ấy.

7. Tìm số chiều của tích đối xứng $S^q(L)$ biết rằng $\dim L = n$.

8. Giả sử $f : L \to L$ là một tự đồng cấu của không gian véctơ $n$ chiều $L$. Khi đó $\Lambda^n(f) : \Lambda^n(L) \to \Lambda^n(L)$ là phép nhân với một vô hướng. Chứng minh rằng $\Lambda^n(f) = \det(f)$.

9. Giả sử $L$ là một không gian véctơ $n$ chiều trên trường $\mathbf{K}$ và $f : L \to L$ là một tự đồng cấu. Gọi $\alpha_r(f) = Tr\Lambda^r(f)$ là vết của tự đồng cấu $\Lambda^r(f) : \Lambda^r(L) \to \Lambda^r(L)$ (xem bài tập 40 Chương II). Chứng minh rằng
$$\det(id + f) = \sum_{r \geq 0} \alpha_r(f).$$
Nói riêng, ta có $\alpha_0(f) = 1$, $\alpha_1(f) = Tr(f)$, $\alpha_n(f) = \det(f)$, $\alpha_r(f) = 0$ (với $r > n$). Hãy diễn đạt $\alpha_r(f)$ theo các hệ số của đa thức đặc trưng của $f$.

10. Giả sử $f : L \to M$ là một đồng cấu giữa các không gian véctơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbf{K}$. Sử dụng phép đối ngẫu trong chứng minh Mệnh đề 5.10 giữa các không gian $\Lambda^r(L), \Lambda^r(M)$ và $\Lambda^r(L^*), \Lambda^r(M^*)$, hãy chứng minh rằng đồng cấu $\Lambda^r(f^*) : \Lambda^r(M^*) \to \Lambda^r(L^*)$ là đối ngẫu của đồng cấu $\Lambda^r(f) : \Lambda^r(L) \to \Lambda^r(M)$.

# TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. G. Birkhoff và S. MacLane, *Tổng quan về Đại số hiện đại* (Bản dịch tiếng Việt), NXB ĐH và THCN, Hà Nội, 1979.

2. I. M. Gelfand, *Bài giảng Đại số tuyến tính*, NXB Nauka, Moskva, 1971 (Tiếng Nga).

3. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số đại cương*, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1999 (tái bản).

4. A. I. Kostrikin và YU. I. Manin, *Đại số và Hình học tuyến tính*, NXB Đại học Moskva, Moskva, 1980.

5. A. I. Kostrikin, *Nhập môn đại số*, NXB Nauka, Moskva, 1977 (Tiếng Nga).

6. A. G. Kurosh, *Giáo trình Đại số cao cấp*, NXB Nauka, Moskva, 1971 (Tiếng Nga).

7. S. Lang, *Algebra*, Addison - Wesley publishing company, Massachusetts, 1965.

8. I. V. Proskuryakov, *Problems in Linear Algebra*, Mir publishers, Moscow, 1978.

9. Đoàn Quỳnh (chủ biên), *Giáo trình Đại số tuyến tính và Hình học giải tích*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, (không ghi năm xuất bản).

10. M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin Inc., New York - Amsterdam, 1965.