Симулација 2Д карлинга

Пројекат из нумеричких алгоритама и нумеричког софтвера

Нови Сад, Децембар 2021.

Немања Вујадиновић, SV28-2020

1 Кратак опис проблема

Задатак и идеја овог пројекта је имплементација 2д карлинга. Акценат истог је на кинематици, сударима и осталим параметрима линеарног кретања међу облицима, конкретно, у овом случају, 2д кругова.

Карлинг је спортска игра на леду, у којој два тима имају за циљ да своје камење "слајдују" (поставе) што ближе одређеној мети, познатијој као кући (енгл. "house"). За оне које не знају довољно о самој игри или желе додатно да се упознају с њом, то могу урадити преко сајта Светске карлинг организације. Како је у питању симулација ове игре, пројекат ће бити њена упрошћенија верзија, а свака измена оригинала ће бити напоменута у даљем тексту.

Сама срж карлинга јесу кретање и судари камења, стога, потребно је првобитно имплементирати њихово линеарно кретање, а после и сударе. Типови могућих судара су:

- Круг на круг - судар два камена
- Круг на дуж - судар камена и ивице терена

При сваком судару, потребно је израчунати пренос и губитке брзине, енергије и импулса. Осим тога, на заустављање камења могућ је утицај и трења подлоге (леда).
С обзиром да је могуће да се истовремено деси више од једног судара, биће потребно имплементирати *constrain solver*.

На крају сваке рунде, потребно је израчунати удаљеност камења од центра-куће. Одређује се чији камен је ближи, као и да ли исти тај играч има више од једног камена ближе кући у односу на противника. На претходно наведене начине се долази до бодова, а победник је онај који има бољи скор по завршетку свих рунди.

Игра ће бити направљена за дуел два играча. За разлику од стварних 8, симулација ће нудити избор до 4 рунде. Такође, играч(и) ће моћи да бирају између 3 или 4 камења у свакој рунди. Саму почетну брзину и смер и угао кретања, играч ће моћи да подеси пре сваког потеза.

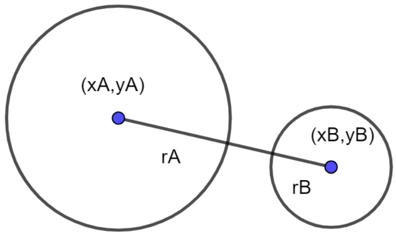
2 Детаљна спецификација проблема

2.1 Кинематика

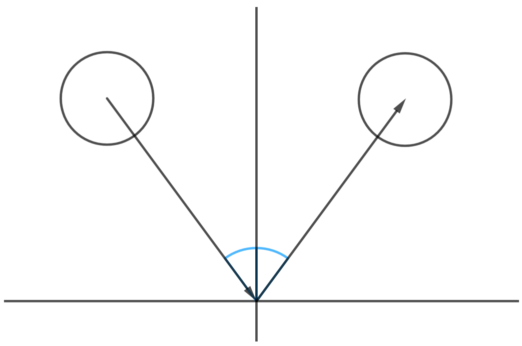
Кретање и кинематика у пројекту ће бити описани диференцијалним једначинама 2. Њутновог закона. Оне ће бити решаване Ојлеровом методом (уколико то време и знање буде дозволило, биће имплементирана $RK4$ метода).

2.2 Откривање судара

- *Судар круг-круг*
  Судар два круга догодиће се онда када је удаљеност (дистанца) вектора положаја њихових центара једнака збиру њихових полупречника.



- *Судар круг-дуж*
  До судара у овом случају долази онда када је удаљеност x координате центра круга, односно y координате, ка њима одговарајућој оси терена, једнака управо полупречнику круга. Овакав судар можемо посматрати и као део ограниченог кретања, јер се њиме спречава кретање камена ван граница терена.



  Камен ће се одбити под истим углом при ком је дошло до еластичног судара. Такође, услед самог судара, као и трења, доћи ће до губитка његове брзине.

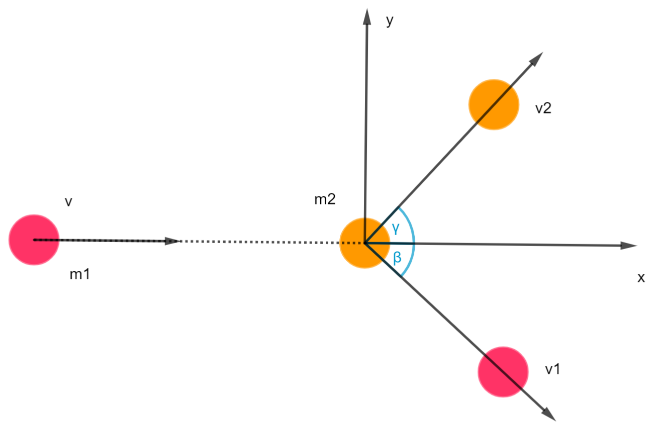
- *Откривање судара*
  За откривање судара користиће се векторска алгебра. Са обзиром на већи број објеката, (опционо) пројекат ће садржати један од следећа два механизма:

  - *Binning*
  - *Sweep and Prune*

  На овај начин могуће је убрзати откривање судара индексирањем објеката.

2.3 Ограничено кретање

Ограничено кретање биће одређено контактима (међу телима и између тела и подлоге). Претходно смо објаснили у којим случајевима долази до контаката, као и које су последице контакта између круга и дужи. У наставку ће бити објашњене последице судара два круга.
При судару два круга, долази до промене интензитета, правца и смера и њихове брзине. На слици је приказан судар два круга:



За почетак, запишимо једначине одржања импулса

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$$

и кинетичке енергије

$$\tfrac{1}{2}m_1v^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2. \ (1)$$

Сада је одржање импулса по осама дато са

$$p_x = p_{1x} + p_{2x},$$
$$m_1v = m_1v_{1x} + m_2v_{2x},$$
$$m_1v = m_1v_1\cos\beta + m_2v_2\cos\gamma, \ (2)$$

односно

$$p_y = p_{1y} - p_{2y},$$
$$0 = m_1v_{1y} - m_2v_{2y},$$
$$m_1v_1\sin\beta = m_2v_2\sin\gamma. \ (3)$$

С обзиром да су масе кругова тј. камења једнаке, из (1) онда важи

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2. \ (*)$$

С обзиром да су масе једнаке, из (2) и (3) имамо

$$v = v_1\cos\beta + v_2\cos\gamma$$
$$v_1\sin\beta = v_2\sin\gamma.$$

Даље, квадрирањем је

$$v^2 = v_1^2\cos^2\beta + v_2^2\cos^2\gamma + 2v_1v_2\cos\beta\cos\gamma$$
$$0 = v_1^2\sin^2\beta + v_2^2\sin^2\gamma - 2v_1v_2\sin\beta\sin\gamma,$$

а потом и сабирањем

$$v^2 = v_1^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + v_2^2(\cos^2\gamma + \cos^2\gamma) + 2v_1v_2(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma).$$

Због основног тригонометријског идентитета, као и идентитета косинуса збира, једначина се своди на

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\beta + \gamma)$$

Коначно, комбинујући претходни израз са $(*)$

$$0 = 2v_1v_2\cos(\beta + \gamma)$$

тј.

$$\cos(\beta + \gamma) = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ.$$

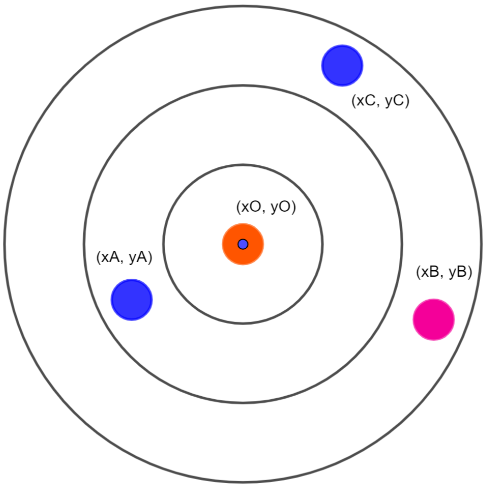
Дошли смо до закључка који ће бити користан за одређивање правца вектора брзине објеката после судара. Заправо, посматрајући једнакост $(*)$ могло се претпоставити да је троугао $\vec{v}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$ правоугли, са хипотенузом $\vec{v}$, а та тврдња потврдити последњом једнакошћу, међутим, то није увек случај, јер су могући и изузеци. Један од њих би био тај да је угао β управо правоугли, што би значило да је први камен сав свој импулс и брзину пренео на други и зауставио своје кретање.

С обзиром на могућност више истовремених судара потребно је моделовати и решити систем ограничења (енгл. constraints). У зависности од крајњег исхода, пројекат ће садржати један од следећих механизама:

- *Mixed Linear Complementarity Problem*
- *Sequential Impulse constraint solving*

2.4 Одређивање победника

Као што је већ речено, бодови се остварују на основу удаљености камења од центра куће. На слици је приказан упрошћен пример са три камена.



Играч који са собом односи бодове је онај чији је камен најближи центру. Потребно је наћи најближи камен првог играча и његову удаљеност од центра упоредити са удаљеношћу најближег камена другог играча.
Додатно, на овом примеру је приказан и други камен плавог играча. Са слике је очигледно да је његов први камен најближи центру, али он може да добије и додатне бодове ако постоји још један или више каменова који су ближи од супарничког најближег, те је у оваквим случајевима потребно наставити поређење удаљености.

2.5 Алати за имплементацију пројекта

Пројекат ће бити писан у програмском језику *Python*. За *GUI* ће се користити библиотека *PyGame*. За рачунање биће коришћена библиотека *numpy*.

2.6 Мењање параметара

У пројекту ће бити омогућено мењање брзине и масе камена како би се што боље приказало њихово утицање на понашање система. Осим ових измена, као што је већ речено, биће могуће на утицати број камења и број рунди меча.

3 Примери готових решења

Нажалост, решења проблема карлинга нисам успео да пронађем. Слично решење (билијар) који дели одређене проблеме са овим пројектом, налази се у прилогу:

- Имплементација 2д билијара

4 Литература

- Материјали са вежби и предавања
- Наташа Чалуковић, *Физика 1 за први разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2016.
- https://www.youtube.com/watch?v=IOk9SVzqHsk
- https://stackoverflow.com/
- https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method