3. laboratorijska vježba

Estimacija položaja satelita u planarnoj orbiti oko Zemlje

Ime i prezime: Luka Vukelić **JMBAG:** 0036530728

Uvodne napomene

- **Svrha vježbe**
  Implementacija Kalmanova filtra za estimaciju stanja dinamičkog stohastičkog nelinearnog sustava.
- **Priprema**
  Ova se vježba radi u Matlabu. Primjenjuju se različiti oblici Kalmanova filtra za praćenje položaja satelita u planarnoj orbiti oko Zemlje. Uz vježbu dobivate m-funkciju modela sustava koju je potrebno upotpuniti traženim izvedbama Kalmanova filtra. Proučite poglavlja predavanja o svojstvima i izvedbama Kalmanova filtra.
- **Grafovi i jednadžbe**
  Odzive snimite kao slike te ih priložite u izvještaj u naznačena polja. Jednadžbe napišite u alatu po svojem izboru te ih priložite u izvještaj također kao slike u naznačena polja. (Za Adobe Reader: Tools->Comment & Markup->Attach a File as a Comment).
- **Korisne Matlab funkcije:**
  `help, diag, trace, expm, cond, chol, std, mean`

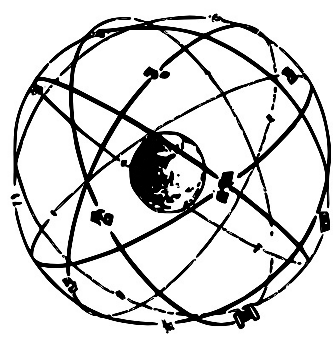
Rad na vježbi

Zadatak 1: Estimacija položaja satelita u planarnoj orbiti oko Zemlje

Planarni model satelita koji se giba u Zemljinoj orbiti dan je sljedećim sustavom nelinearnih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2} + w \qquad (1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{\theta}\dot{r}}{r}, \qquad (2)$$



Slika 1: Sustav satelita

gdje je r udaljenost satelita od središta Zemlje, θ kutna pozicija satelita na njegovoj orbiti, $G = 6.6742 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg/s^2 univerzalna gravitacijska konstanta, $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg masa Zemlje te $w \sim (0, 10^{-6})$ kontinuirani Gaussov bijeli šum koji je posljedica poremećaja na satelit uslijed međudjelovanja drugih objekata u orbiti, atmosferskog otpora, propuštanja materijala u niskotlačnoj atmosferi itd. Pretpostavite da mjerenja radijusa satelita r i njegova otklona θ dolaze svake minute. Pogreške mjerenja modeliraju se kao diskretni Gaussov bijeli šum nultog očekivanja i standardne devijacije 100 m i 0.1 rad.

a) Odredite model sustava u prostoru stanja $\dot{x} = f(x, u, w)$, $z = h(x, v)$ uz varijable stanja $x_1 = r$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$.

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_3 = x_4,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 x_4^2 - \frac{GM}{x_1^2} + w, \qquad \dot{x}_4 = -\frac{2x_2x_4}{x_1}.$$
$$z = h(x,v) = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + v$$

b) Kolika mora biti nazivna kutna brzina satelita $\omega_0 = \dot{\theta}$ da bi orbita satelita imala konstantan radijus uz $w = 0$?

Radijus je konstantan ako je radijalna brzina jednaka nuli skupa s radijalnim ubrzanjem. Koristeć

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

c) Linearizirajte dobiveni model u točki $r = r_0$, $\dot{r} = 0$, $\theta = \omega_0 T$, $\dot{\theta} = \omega_0$. Napišite matrice $A = \frac{\partial f(x,u,w)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$, $B = \frac{\partial f(x,u,w)}{\partial u}\Big|_{u=u_0}$, $H = \frac{\partial h(x,v)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$.

$$A = \frac{\partial f(x,u,w)}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2GM}{r_0^3} & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f(x,u,w)}{\partial u}\Big|_{u=u_0} = 0,$$

$$H = \frac{\partial h(x,v)}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Diskretizirajte u nazivnoj točki dobiveni linearizirani model sustava egzaktnom metodom i aproksimacijom uz pretpostavku dovoljno malog vremena uzorkovanja uz vrijeme diskretizacije $T = 60\,\text{s}$. Rezultat aproksimativne metode prikazati u analitičkom obliku. Napišite matrice A, B, L, H, M.

$$A = I + A^T$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ \frac{2\cdot G\cdot T\cdot M}{r_0^3} & 1 & 0 & 2\cdot T\cdot\omega_0\cdot r_0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & -2\cdot\omega_0\cdot T & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

U nastavku vježbe odaberite jednu od metoda diskretizacije. Aproksimativna eksponencijalna diskretizacija

e) Projektirajte diskretni linearizirani Kalmanov filtar (LKF)[1] za estimaciju danog sustava. Implementirajte filtar u dobivenoj m-funkciji `Satelit.m` te u prostor ispod izdvojite jednadžbe predikcije i korekcije estimacije tog filtra.

$$\hat{x}_k^- = A_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + B_{k-1}u_{k-1}$$

$$P_k^- = A_{k-1}P_{k-1}^+A_{k-1}^{\mathrm{T}} + Q_{k-1}$$
$$K_k = P_k^- H_k^{\mathrm{T}}(H_k P_k^- H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-)$$
$$P_k^+ = (I - K_kH_k)P_k^-(I - K_kH_k)^{\mathrm{T}} + K_kR_kK_k^{\mathrm{T}}$$

f) Simulirajte vladanje LKF-a kroz 3 sata. Inicijalizirajte sustav s $x(0) = [r_0; 0; 0; 1.1\omega_0]$, $\hat{x}(0) = x(0)$ i $P(0) =$ `diag([0,0,0,0])`. Kako ste inicijalizirali matrice kovarijanci procesnog i mjernog šuma, Q i R, diskretnog filtra?

Q	R
[0 0 0 0; 0 10^-6 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0]	[100 0; 0 0.1]

g) Iscrtajte pogrešku estimacije radijusa satelita.

```
>> Satelit('LKF')
Srednja vrijednost greske estimacije radiusa LKF:6288246.5909 m
Standardna devijacija greske estimacije radiusa LKF:1296761.6525 m
```

[1] LKF radi na istom principu kao Kalmanov filtar, osim što koristi diskretni linearni model sustava dobiven linearizacijom nelinearnog sustava u nazivnoj točki.

Koji je razlog relativno lošeg vladanja LKF-a? Kako možete popraviti vladanje LKF-a?

Osjetljiv je na početne uvjete prilikom linearizacije. Postoje nelinearni sustavi kojima dobro upravlja, ali su to uglavnom sustavi sličnih svojstava kao njihove linearizirane verzije.
Udaljavanjem od radne točke estimacija prestaje biti precizna.
Popraviti vladanje može se eventualnim povećanjem vrijednosti matrice šuma modela te s time više vjerovati mjerenju nego modelu.

h) Simulirajte sustav s predloženim izmjenama te iscrtajte pogrešku estimacije radijusa satelita i vremensku ovisnost traga a posteriori matrice kovarijanci estimacije.

```
>> Satelit('LKF')
Trace:
   5.4411e+05

Srednja vrijednost greske estimacije radiusa LKF:6238131.5498 m
Standardna devijacija greske estimacije radiusa LKF:1384680.5442 m
```

i) Ponovite e) i f), ali s diskretnim proširenim Kalmanovim filtrom (EKF). Inicijalizirajte Q i R jednako kao kod LKF-a prije izmjena. Za predikciju stanja koristite diskretni nelinarni model korišten za simulaciju sustava u skripti `Satelit.m`. Napišite jednadžbe predikcije i korekcije EKF-a

$$\hat{x}_k^- = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) \qquad P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^{\mathrm{T}} + L_{k-1}Q_{k-1}L_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

$$K_k = P_k^- H_k^{\mathrm{T}}(H_k P_k^- H_k^{\mathrm{T}} + M_k R_k M_k^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - h_k(\hat{x}_k^-, 0))$$

$$P_k^+ = (I - K_k H_k)P_k^-$$

Iscrtajte pogrešku estimacije radijusa satelita i trag a posteriori matrice kovarijanci estimacije. U zaključku usporedite i objasnite razlike u odnosu na LKF!

```
>> Satelit('EKF')
Trace:
   10.3782

Srednja vrijednost greske estimacije radiusa EKF:4150062.5177 m
Standardna devijacija greske estimacije radiusa EKF:982974.4491 m
```

j) Za model mjerenja pod i) projektirajte diskretni iterativni prošireni Kalmanov filtar (IEKF). Simulacijom pronađite dovoljan broj iteracija filtra N_{iter}, te usporedite na istoj slici pogrešku estimacije radijusa IEKF-a i EKF-a ($N_{\mathrm{iter}} = 0$).

$N_{\mathrm{iter}} =$ /

Usporedba pogreške estimacije radijusa satelita

Zaključak

Vaš zaključak nakon vježbe koji daje sažet prikaz i komentar dobivenih rezultata.

Laboratorijska vježba estimira položaj satelita u orbiti oko Zemlje.
Za estimaciju koristimo tri vrste Kalmanovog filtera. Prije postupka Kalmanovog filtera neophodno je nelinearan sustav iz prostora stanja linearizirat te diskretizirat u radnoj točki.
Nakon dobivenih matrica za modeliranje sustava i mjerenja uvodimo LKF, linearizirani Kalmanov filtar, koji koristi standardan Kalmanov filtar, ali ne daje dobra rješenja jer čim se udaljavamo od radne točke estimacije postaje sve nepreciznija. Nakon LKF uvodi se EKF koji kao prošireni Kalmanov filtar linearizira nelinearne funkcije oko trenutne procjene stanja. Osim te glavne razlike također su matrice šuma modelirane dodatnim matricama koje se mijenjaju vremenom. Kod iterativnog Kalmana korekcija se ponavlja više puta kako bismo dobili bolju vrijednost.
Nažalost nešto sam pogriješio u implemntaciji IEKF-a pa nisam na zadnje pitanje mogao dati adekvatan odgovor. Napisao sam kod, ali nešto mi je promaklo.