Übungen zu Theoretische Physik IV, WS 2014/2015

Dr. Bernard Metsch/Dr. Deborah Rönchen HISKP (Theorie), Nußallee 14-16, D-53115 Bonn. Tel. 732378

1. Übung $\boxed{\text{14-16.10.2014}}$

A.1: Stirlingsche Formel

Überprüfen Sie, daß für große N

$$N! \approx \sqrt{2\pi\, N}\, N^N\, \exp\left(-N\right).$$

gilt. Betrachten Sie dazu das Integral

$$N! = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^N\, \exp\left(-x\right). \tag{1}$$

Beachten Sie, dass der Integrand $f(x) = x^N\, \exp\left(-x\right)$ für $N \gg 1$ eine scharfes Maximum an der Stelle $x_0 = N$ besitzt. Passen Sie die Funktion $g(x) = A\, \exp\left(-\frac{(x-N)^2}{a^2}\right)$ bis zur zweiten Ordnung an den Integranden $f(x)$ an und verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \exp\left(-b^2\, x^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{b}$$

um das Integral (1) näherungsweise auszurechnen.

A2: Poisson-Verteilung

Gegeben sei die Binomialverteilung

$$w_\lambda(N, m) := \binom{N}{m}\, \lambda^m\, \left(1-\lambda\right)^{N-m}$$

mit $0 \le \lambda \le 1$ und $0 \le m \le N$. In der Hausübung sollten Sie u.A. überprüfen, daß hierfür

$$\sum_{m=0}^{N} w_\lambda(N, m) = 1\,, \quad \langle m \rangle = N\,\lambda\,, \quad \left\langle m^2 \right\rangle = N(N-1)\,\lambda^2 + N\,\lambda \quad \text{und} \quad (\Delta m)^2 = N\,\lambda\,(1-\lambda)$$

gilt. Wir betrachten jetzt den Grenzfall $\lambda \to 0$, $N \to \infty$ wobei allerdings das Produkt $\overline{m} := \lambda\, N (= \langle m \rangle)$ konstant gehalten wird.

1. Überprüfen Sie zunächst, daß die Binomialverteilung auch in der Form

$$w_\lambda(N, m) = \overline{m}^m\, \frac{1}{m!}\, \left(1 - \frac{\overline{m}}{N}\right)^N \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{N}\right)}{\left(1-\lambda\right)^m}$$

   geschrieben werden kann.

2. Verwenden Sie $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \exp(x)$ um zu zeigen, daß in dem oben angedeuteten Grenzfall die Wahrscheinlichkeitsverteilung näherungsweise durch eine POISSON-Verteilung
$$w_{\overline{m}}(m) = \frac{\overline{m}^m}{m!}\exp(-\overline{m})$$
gegeben ist.

3. Zeigen Sie, daß für die POISSON-Verteilung $w_{\overline{m}}(m)$
$$\sum_{m=0}^{\infty} w_{\overline{m}}(m) = 1\,, \quad \langle m\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m\, w_{\overline{m}}(m) = \overline{m} \quad \text{und} \quad (\Delta m)^2 = \left\langle m^2\right\rangle - \langle m\rangle^2 = \overline{m}$$
gilt.

A3: Eindimensionaler "Random Walk"

Ein Teilchen gehe bei jedem Schritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit um die Distanz 1 nach rechts (+) oder nach links (−).

1. Berechnen Sie für die Zufallsgröße $Y := N_+ - N_-$ den Mittelwert $\langle Y\rangle$ sowie $\langle Y^2\rangle$ nach $N = N_+ + N_-$ Schritten.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der STIRLINGsche Formel in der Form:
$$\log(n!) \approx \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n) - n\,,$$
daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(y)$ zu Y für $N \gg 1$ einer GAUSS-Verteilung
$$w(y) \propto \exp\left(-\frac{y^2}{2\,N}\right)$$
entspricht. Entwicklen Sie dazu die Funktion $g(y) := \log(w(y))$ um ihr Maximum.

3. Welches Ergebnis erhalten Sie aus dem zentralen Grenzwertsatz?

1. Hausübung $\boxed{\text{Abgabe 21.- 23.10.2014}}$

H.1: Ein Spinsystem

Betrachtet wird ein System von N wechselwirkungsfreien Spins, die einzeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einer der beiden Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ anzutreffen seien.

1. Begründen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit $w(N,m)$ in diesem System genau m Spins im Zustand $|\uparrow\rangle$ und dementsprechend $N-m$ im Zustand $|\downarrow\rangle$ anzutreffen, durch eine Binomialverteilung
$$w(N,m) = \binom{N}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{N-m}$$
gegeben ist.

2. Überprüfen Sie für eine allgemeine Binomialverteilung
$$w_\lambda(N,m) := \binom{N}{m} \lambda^m \, (1-\lambda)^{N-m} \ ,$$
daß die Normierung, die ersten zwei Momente und die Schwankung durch
$$\sum_{m=0}^{N} w_\lambda(N,m) = 1\,, \quad \langle m\rangle = N\,\lambda\,, \quad \left\langle m^2\right\rangle = N(N-1)\,\lambda^2 + N\,\lambda\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta m = \sqrt{N\,\lambda\,(1-\lambda)}$$
gegeben sind.

3. Berechnen Sie $\langle m\rangle$, Δm sowie die relative Schwankung $\frac{\Delta m}{\langle m\rangle}$ für obiges Spinsystem.

4. Die (dimensionslose) Magnetisierung sei durch $M := 2m - N$ definiert. Berechnen Sie die mittlere Magnetisierung $\langle M\rangle$ und die Schwankung ΔM .