Chương 4: Tích phân nhiều lớp

VNU University of Engineering and Technology

24th April 2026

"Sáng tạo và vun đắp giá trị nhân văn của công nghệ"

1.Tích phân 2 lớp trên hình chữ nhật

1.1. Nhắc lại về tích phân xác định của hàm 1 biến

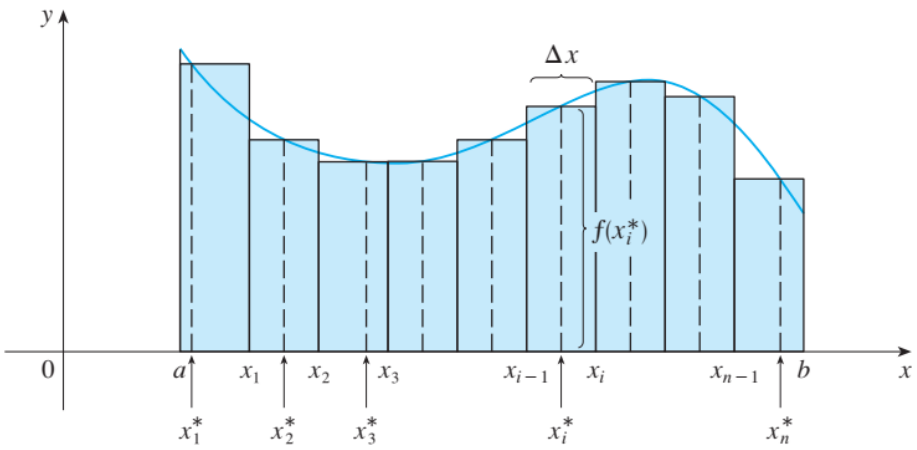
Cho hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$. Ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, ..., n$ có độ dài bằng nhau $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ và trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ ta chọn một điểm mẫu (sample point) x_i^*. Ta lập tổng Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x. \tag{1.1}$$

rồi lấy giới hạn của tổng này khi $n \to \infty$ và nếu giới hạn này tồn tại, ta gọi đó là tích phân xác định của f từ a đến b:

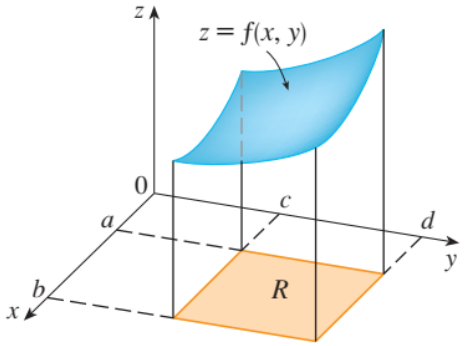
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x. \tag{1.2}$$

Trong trường hợp $f(x) \geq 0$ tổng Riemann có thể hình dung như là tổng các diện tích của các hình chữ nhật trong hình dưới đây, còn $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích của miền nằm dưới đường cong $y = f(x)$ khi $x \in [a, b]$.

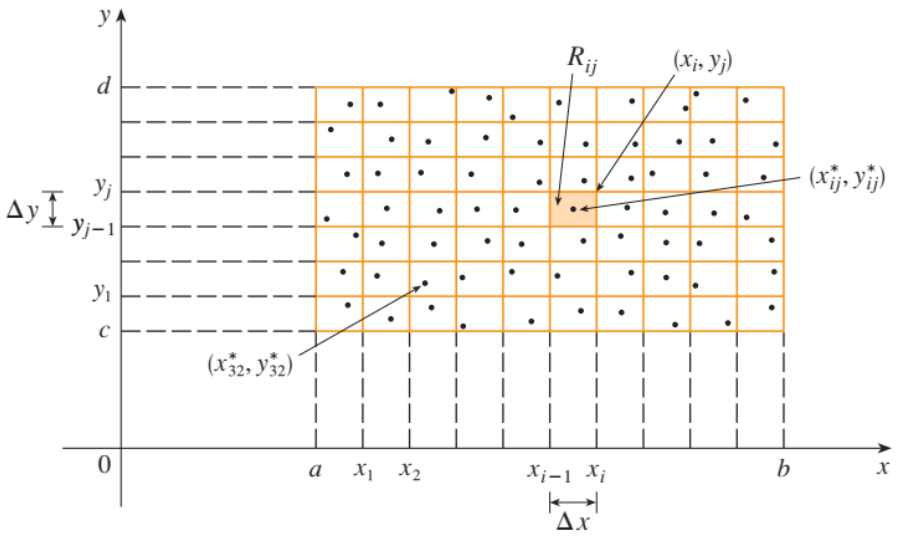


1.2. Thể tích và tích phân 2 lớp

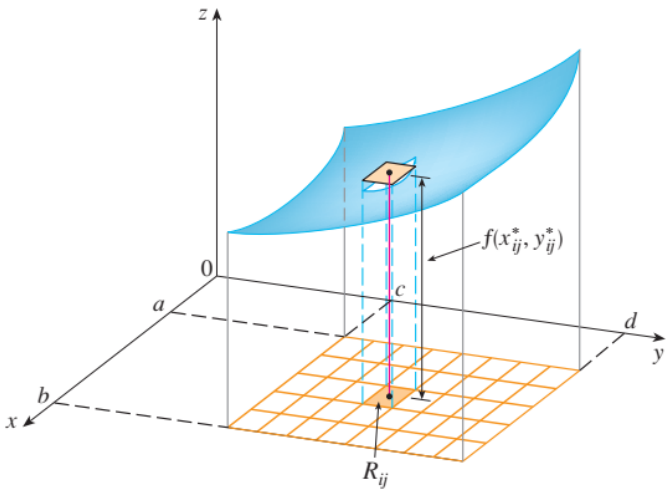
Xét hàm 2 biến $f(x, y)$ xác định trên một hình chữ nhật đóng:
$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.
Giả sử $f(x, y) \leq 0$. Đồ thị của f là mặt có phương trình $z = f(x, y)$. Cho S là hình khối nằm phía trên R và nằm phía dưới đồ thị của f. Tức là:
$S = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Ta muốn tìm thể tích của S.

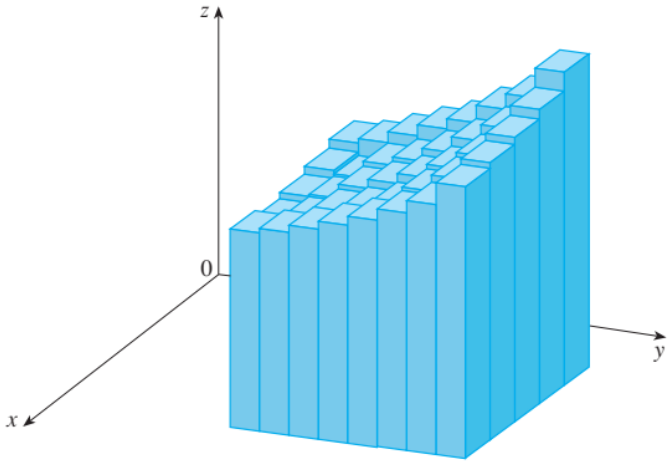


Đầu tiên ta chia hình chữ nhật R thành các hình chữ nhật nhỏ hơn bằng cách chia $[a, b]$ thành m đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ có độ dài bằng nhau $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ và chia $[c, d]$ thành n đoạn nhỏ có độ dài bằng nhau $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. Sau đó tại các điểm chia, ta kẻ các đường song song với các trục tọa độ như trong hình dưới đây. Ta nhận được các hình chữ nhật con:
$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$,
mỗi hình có diện tích là $\Delta A = \Delta x \Delta y$.



Nếu ta chọn một điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) trong mỗi hình chữ nhật R_{ij},, thì ta có thể xấp xỉ mỗi phần của khối S mà nằm trên R_{ij} với một hình hộp chữ nhật rất mỏng với đáy là R_{ij} và chiều cao $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ như hình dưới đây.





Thể tích của mỗi hình hộp chữ nhật này là $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$. Như vậy, ta có thể xấp xỉ thể tích của khối S với tổng thể tích của tất cả các hình hộp chữ nhật nhỏ:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A. \tag{1.3}$$

Rõ ràng rằng khi m, n càng lớn (tức là ta chia khối S thành càng nhiều hình hộp chữ nhật nhỏ), thì xấp xỉ bởi biểu thức (1.3) càng chính xác. Như vậy,

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \tag{1.4}$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

Định nghĩa 1.1

Tích phân 2 lớp của hàm f trên hình chữ nhật R là

$$\int\int_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \qquad (1.5)$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.
Tức là: với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số nguyên N đủ lớn sao cho với mọi $m, n > N$ ta luôn có:

$$|\int\int_R f(x,y)dA - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A| < \varepsilon. \qquad (1.6)$$

Hàm f được gọi là **khả tích** nếu giới hạn ở vế phải trong định nghĩa trên tồn tại.

Nói riêng, người ta đã chứng minh được rằng tất cả các hàm liên tục đều khả tích. Hơn nữa, nếu f bị chặn trên R (tức là tồn tại hằng số M sao cho $|f(x,y)| \leq M$ với mọi $(x,y) \in R$ và f liên tục tại mọi điểm trên R ngoại trừ các điểm nằm trên một số hữu hạn đường cong trơn, thì f khả tích trên R.
Các điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) có thể chọn một cách tùy ý. Nếu ta chọn các điểm này chính là các điểm (x_i, y_j) thì biểu thức cho tích phân 2 lớp sẽ đơn giản hơn:

$$\int\int_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A \tag{1.7}$$

Từ (1.4) và (1.5) ta suy ra:

Chú ý 1.1

Nếu $f(x,y) \geq 0$, thì thể tích V của khối S nằm phía trên của R và phía dưới mặt $z = f(x,y)$ là

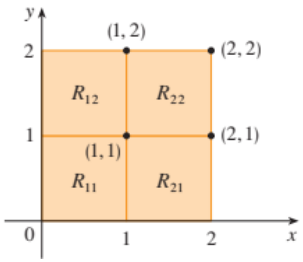
$$V = \iint_R f(x,y)dA \tag{1.8}$$

Tổng $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$ được gọi là tổng Riemann 2 lớp.

Ví dụ 1.1

Ước lượng thể tích của khối nằm phía trên hình vuông $R = [0,2] \times [0,2]$ và phía dưới elliptic paraboloid $z = 16 - x^2 - 2y^2$ bằng cách chia R thành 4 hình vuông bằng nhau và chon điểm mẫu là điểm ở góc trên bên phải của R_{ij}.

Giải:



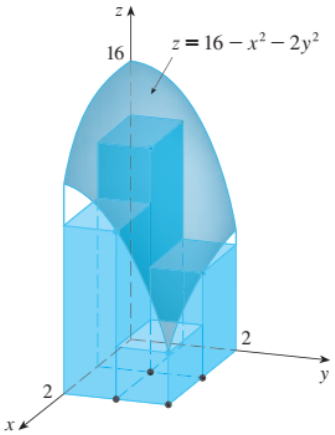
Ta chia hình vuông R thành 4 hình vuông nhỏ như ở hình bên. Xấp xỉ thể tích bằng tổng Riemann khi $m = n = 2$, ta có:

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\Delta A = f(1,1)\Delta A + f(1$$

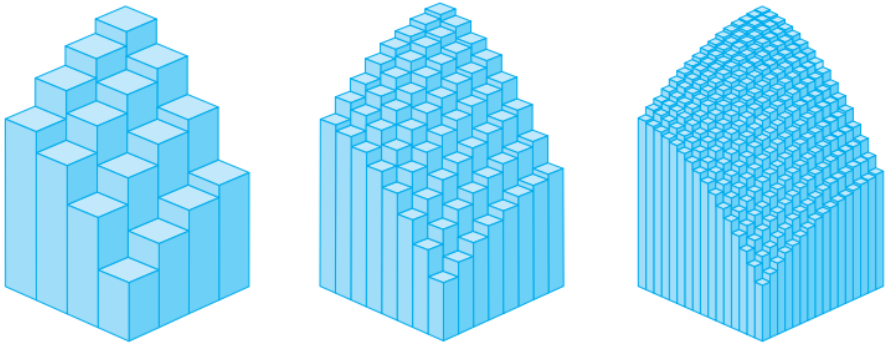
$$+ f(2,1)\Delta A + f(2,2)\Delta A =$$

$$= 13\times1 + 7\times1 + 10\times1 + 4\times1 = 34.$$

Việc tính xấp xỉ thể tích vừa rồi có thể được minh họa trong hình sau:



Trong Ví dụ vừa rồi, độ chính xác của việc tính xấp xỉ thể tích càng tăng lên khi ta chia R thành càng nhiều hình vuông nhỏ.



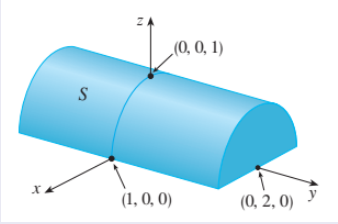
(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

Ví dụ 1.2

Nếu $R = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, *hãy ước lượng tích phân:* $\iint_R \sqrt{1 - x^2} dA$.

Giải.

Sẽ rất khó để tính tích phân trên theo Định nghĩa. Tuy vậy, vì $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$, ta có thể tính tích phân này như thể tích của một khối. Nếu $z = \sqrt{1 - x^2}$, thì $x^2 + z^2 = 1$, do đó tích phân 2 lớp cần tính chính là thể tích của khối S nằm phía dưới mặt trụ tròn $x^2 + z^2 = 1$ và phía trên hình chữ nhật R.



Thể tích của khối S bằng diện tích nửa hình tròn nhân với chiều dài của hình chữ nhật R, như vậy:

$\iint_R \sqrt{1 - x^2} dA = \frac{1}{2}\pi \times 1^2 \times 4 = 2\pi$. □

1.3. Quy tắc trung điểm (The Midpoint Rule)

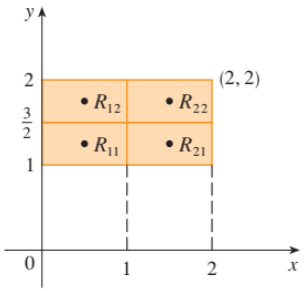
Nếu ta chọn các điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) là các tâm $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ của các hình chữ nhật nhỏ R_{ij} (tức là $x_{ij}^* = \bar{x}_i$ là trung điểm của $[x_{i-1}, x_i]$, $y_{ij}^* = \bar{y}_i$ là trung điểm của $[y_{i-1}, y_i]$, thì ta có

$$\iint_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta A. \tag{1.10}$$

Ví dụ 1.3

Dùng quy tắc trung điểm với $m = n = 2$ để ước lượng giá trị của tích phân $\iint (x - 3y^2)dA$, trong đó $R = \{(x, y)|0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$.

Giải: Để ước lượng tích phân đã cho khi $m = n = 2$, ta tính $f(x, y) = x - 3y^2$ tại các tâm của 4 hình chữ nhật nhỏ trong hình bên.



Do đó $\bar{x}_1 = 1/2, \bar{x}_2 = 3/2, \bar{y}_1 = 5/4, \bar{y}_2 = 7/4$. Diện tích của mỗi hình chữ nhật nhỏ là $1/2$. Do đó:

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\
&= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A \\
&= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A \\
&= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2} \\
&= -\tfrac{95}{8} = -11.875
\end{aligned}$$

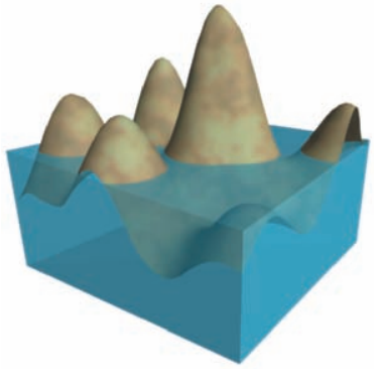
Trong phần tiếp theo, ta sẽ có một phương pháp hiệu quả hơn để tính tích phân 2 lớp, và ta sẽ thấy rằng giá trị chính xác của tích phân trong Ví dụ vừa rồi là -12. (Chú ý rằng tích phân 2 lớp chỉ có thể biểu diễn thông qua thể tích nếu f là một hàm dương, nhưng trong Ví dụ vừa rồi $f(x, y) = x - 3y^2$ không phải là một hàm dương, do đó tích phân 2 lớp của nó không phải là thể tích của một khối. Trong phần tiếp theo, ta cũng sẽ nói đến việc biểu diễn tích phân của một hàm không luôn luôn dương thông qua thể tích).

Number of subrectangles	Midpoint Rule approximation
1	−11.5000
4	−11.8750
16	−11.9687
64	−11.9922
256	−11.9980
1024	−11.9995

Trong Ví dụ vừa rồi, nếu ta lại tiếp tục chia mỗi hình chữ nhật con thành 4 hình chữ nhật nhỏ hơn, ta sẽ nhận được các xấp xỉ theo quy tắc trung điểm được cho trong bảng bên. Dễ thấy rằng các giá trị xấp xỉ tìm được tiến tới 12.

1.4. Giá trị trung bình

Nhắc lại: Từ Giải tích 1, ta đã biết giá trị trung bình của hàm một biến f xác định trên $[a, b]$ là $f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
Đối với hàm 2 biến, tương tự như vậy, ta định nghĩa giá trị trung bình của hàm 2 biến f trên hình chữ nhật R là:
$f_{ave} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x, y)dA$, trong đó $A(R)$ là diện tích của R.
Nếu $f(x, y) \geq 0$, đẳng thức $A(R) \times f_{ave} = \iint_R f(x, y)dA$ cho thấy hình hộp chữ nhật với đáy R và chiều cao f_{ave} có thể tích bằng thể tích của khối nằm phía trên R và phía dưới đồ thị của f.



(Ta có thể tưởng tượng $z = f(x, y)$ miêu tả một vật thể gồ ghề và nếu ta cắt bớt các mỏm sao cho nó chỉ có chiều cao bằng f_{ave}, thì những phần thừa ra có thể lấp đầy các vùng trũng sao cho vật này trở thành một vật bằng phẳng.)

1.5.Các tính chất của tích phân 2 lớp

Định lý 1.1

Giả sử các tích phân 2 lớp dưới đây tồn tại. Khi đó ta có

$$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA. \tag{1.11}$$

$$\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA. \tag{1.12}$$

Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in R$, thì ta có:

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA. \tag{1.13}$$

Tích phân 2 lớp thường rất khó tính được bằng Định nghĩa. Tuy nhiên, định lý cơ bản của Giải tích sẽ cho ta một phương pháp tính tích phân dễ hơn: tính tích phân 2 lớp thông qua việc tính 2 tích phân 1 lớp.

Giả sử f là một hàm 2 biến khả tích trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$. Ta dùng ký hiệu $\int_c^d f(x, y)dy$ để thể hiện rằng ta cố định biến x và tính tích phân của $f(x, y)$ theo y từ c đến d. Quá trình này được gọi là **tính tích phân riêng theo** y. Đặt $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Nếu lấy tích phân hàm $A(x)$ từ a đến b thì ta được

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b [\int_c^d f(x, y)dy]dx. \tag{2.1}$$

Vế phải của đẳng thức 2.1 được gọi là **tích phân lặp**. Các dấu ngoặc thường được bỏ đi. Như vậy,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_a^b [\int_c^d f(x, y)dy]dx. \tag{2.2}$$

(có nghĩa là ta lấy tích phân theo y từ c đến d trước, rồi lấy tích phân theo x từ a đến b).

Tương tự,

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)dx]dy. \qquad (2.3)$$

Ví dụ 2.1

Tính các tích phân lặp:
a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 ydydx$
b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 ydxdy$

Giải. a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 ydydx = \int_0^3 [\int_1^2 x^2 ydy]dx = \int_0^3 [x^2 \frac{y^2}{2}]|_1^2 dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{3}{2}\frac{x^3}{3}|_0^3 = \frac{27}{2}$.
b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 ydxdy = \int_1^2 [\int_0^3 x^2 ydx]dy = \int_1^2 [\frac{x^3}{3}y|_0^3]dy = \int_1^2 9ydy = 9\frac{y^2}{2}|_1^2 = \frac{27}{2}$.
Nhận xét: Ta thấy kết quả của phần a) và b)giống nhau, tức là dù ta lấy tích phân theo y trước, theo x sau thì cũng có kết quả giống như khi ta lấy tích phân theo x trước, theo y sau.

Tương tự,

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)dx]dy. \qquad (2.3)$$

Ví dụ 2.1

Tính các tích phân lặp:
a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 ydydx$
b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 ydxdy$

Giải. a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 ydydx = \int_0^3 [\int_1^2 x^2 ydy]dx = \int_0^3 [x^2 \frac{y^2}{2}]|_1^2 dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{3}{2}\frac{x^3}{3}|_0^3 = \frac{27}{2}$.
b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 ydxdy = \int_1^2 [\int_0^3 x^2 ydx]dy = \int_1^2 [\frac{x^3}{3}y|_0^3]dy = \int_1^2 9ydy = 9\frac{y^2}{2}|_1^2 = \frac{27}{2}$.
Nhận xét: Ta thấy kết quả của phần a) và b)giống nhau, tức là dù ta lấy tích phân theo y trước, theo x sau thì cũng có kết quả giống như khi ta lấy tích phân theo x trước, theo y sau.

Định lý Fubini

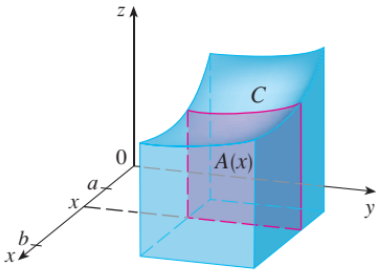
Định lý 2.1

Nếu f liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$, thì

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy. \tag{2.4}$$

Tổng quát hơn, đẳng thức trên cũng đúng khi f bị chặn trên R và chỉ gián đoạn tại các điểm trên một số hữu hạn các đường cong trơn và các tích phân lặp tồn tại.

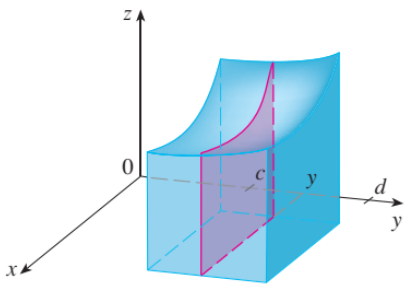
Chứng minh định lý Fubini khá phức tạp so với nội dung khóa học này. Vì vậy, ta chỉ đưa ra hình dung trực quan vì sao định lý này đúng trong trường hợp $f(x, y) \geq 0$. Khi f dương, ta có thể hình dung tích phân 2 lớp $\iint_R f(x, y)dA$ như là thể tích của khối S nằm phía dưới đồ thị của f và nằm phía trên R. Ngoài ra, từ Giải tích 1, ta đã biết thể tích này còn được tính theo cách khác như sau: $V = \int_a^b A(x)dx$, trong đó $A(x)$ là diện tích của thiết diện khi ta cắt S bằng mặt phẳng đi qua x và vuông góc với trucj $0x$.



Từ hình bên, ta thấy $A(x)$ chính là diện tích của miền nằm phía dưới đường cong C có phương trình là $z = f(x, y)$, trong đó x cố định. Do đó: $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Vậy

$$\iint_R f(x, y)dA = V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx.$$

Lập luận tương tự khi xét các thiết diện vuông góc với trục $0y$ ta có:



$$\iint_R f(x,y)dA = V = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

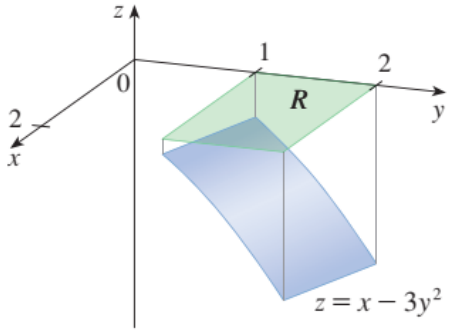
Quay trở lại tích phân mà ta đã tính xấp xỉ trong Ví dụ 1.3.

Ví dụ 2.2

Tính tích phân $\iint_R (x - 3y^2)dA$, *trong đó* $R = \{(x, y)|0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Cách 1. Theo định lý Fubini:
$\iint_R (x - 3y^2)dA = \int_0^2 (\int_1^2 (x - 3y^2)dy)dx = \int_0^2 [xy - y^3]|_1^2 dx = \int_0^2 (x - 7)dx = (\frac{x^2}{2} - 7x)_0^2 = -12.$
Cách 2. Cũng theo định lý Fubini:
$\iint_R (x - 3y^2)dA = \int_1^2 (\int_0^2 (x - 3y^2)dx)dy = \int_1^2 [\frac{x^2}{2} - 3xy^2]|_0^2 dy = \int_1^2 (2 - 6y^2)dy = (2y - 2y^3)|_1^2 = -12.$

Chú ý rằng đáp án âm trong ví dụ trên không có gì mâu thuẫn, hàm $f(x, y) = x - 3y^2$ không phải là một hàm dương, vì thế tích phân của nó không biểu diễn một thể tích. Trên thực tế, trong trường hợp này, f luôn âm trên R, nên giá trị của tích phân là số đối của thể tích của khối nằm phía dưới R và phía trên mặt đồ thị của f.

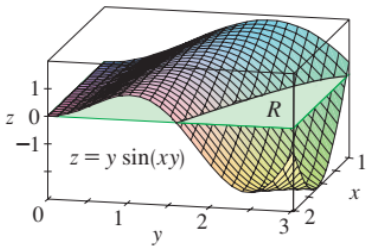


Ví dụ 2.3

Tính $\iint_R y\sin(xy)dA$, *trong đó* $R = [1,2] \times [0,\pi]$.

ĐÁP ÁN: Theo Định lý Fubini:

$$\begin{aligned}
\iint_R y\sin(xy)\,dA &= \int_0^{\pi}\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\,dy \\
&= \int_0^{\pi} y\left[-\frac{1}{y}\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2} dy \\
&= \int_0^{\pi} (-\cos 2y + \cos y)\,dy \\
&= -\tfrac{1}{2}\sin 2y + \sin y\Big]_0^{\pi} = 0
\end{aligned}$$

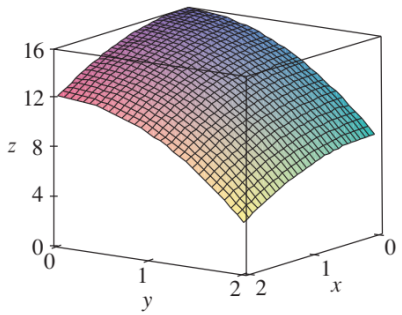


Với hàm f mà nhận cả giá trị dương và âm, $\iint_R f(x,y)dA$ là hiệu của các thể tích $V_1 - V_2$, trong đó V_1 là thể tích của khối phía trên R và phía dưới đồ thị của f, còn V_2 là thể tích của khối phía dưới R và phía trên đồ thị của f. Trong Ví dụ trên, tích phân bằng 0 chứng tỏ 2 thể tích V_1 và V_2 bằng nhau.

Ví dụ 2.4

Tìm thể tích của khối S mà bị chặn bởi elliptic paraboloid $x^2 + 2y^2 + z = 16$, *các mặt phẳng* $x = 2$, $y = 2$, *và 3 mặt phẳng tọa độ.*

Giải



Ta thấy S chính là khối nằm phía dưới mặt $z = 16 - x^2 - 2y^2$ và phía trên hình chữ nhật $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Theo định lý Fubini, ta có:

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)dA = \int_0^2 (\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)dx)dy = \int_0^2 [16x - \frac{x^3}{3} - 2xy^2]_0^2 dy = \int_0^2 (\frac{88}{3} - 4y^2)dy = (\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3)|_0^2 = 48.$$

Khi $f(x, y)$ có thể phân tích thành tích của 2 hàm 1 biến, thì tích phân 2 lớp của $f(x, y)$ có thể viết ở dạng đơn giản.
Giả sử $f(x, y) = g(x)h(y)$ và $R = [a, b] \times [c, d]$. Theo định lý Fubini:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)\, h(y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)\, h(y)\, dx \right] dy$$

Trong tích phân ở trong móc vuông ta xem y như là hằng số, do đó $h(y)$ cũng là hằng số. Do vậy:

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)\, h(y)\, dx \right] dy = \int_c^d \left[h(y) \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \right] dy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$$

Như vậy,

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy. \qquad (2.5)$$

khi $f(x, y) = g(x)h(y)$.

Ví dụ 2.5

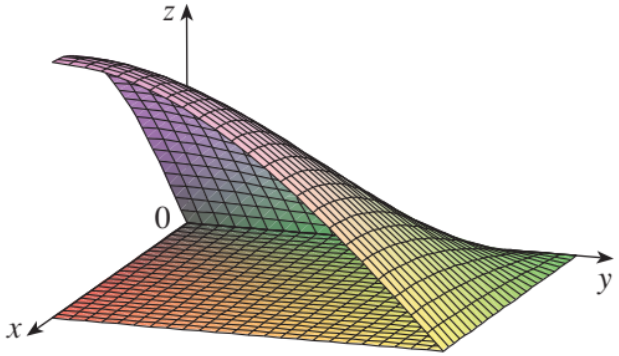
Tính $\iint_R \sin x \cos y dA$ *với* $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Giải.

$$\iint_R \sin x \cos y \, dA = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy$$
$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

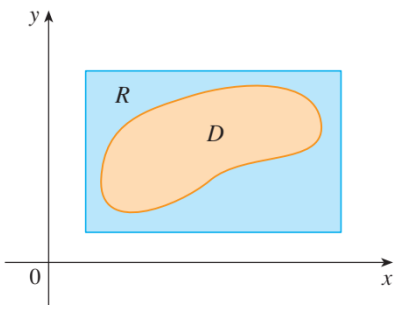
□

Vì $f(x, y) = \sin x \cos y \geq 0$ trên R nên tích phân ta vừa tính chính là thể tích của khối S nằm phía trên R và phía dưới đồ thị của f.



Khi tính tích phân hàm 1 biến, miền mà ta tính tích phân luôn là một đoạn. Đối với hàm 2 biến, ta muốn tính tích phân không chỉ trên các hình chữ nhật, mà trên các miền có hình dạng phức tạp hơn.

Giả sử D là một miền bị chặn, có nghĩa là D được chứa trong 1 hình chữ nhật.



Ta định nghĩa một hàm F trên R như sau:

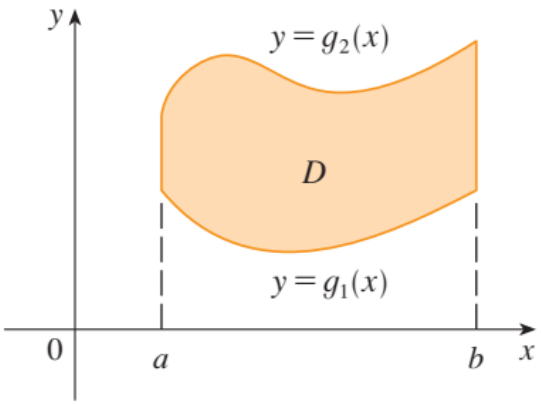
$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{nếu } (x,y) \in D \\ 0 \text{nếu } (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}.$$

Nếu F khả tích trên R, thì ta định nghĩa **tích phân 2 lớp** của f trên D như sau:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA \tag{3.1}$$

Tích phân 2 lớp trên miền có dạng 1

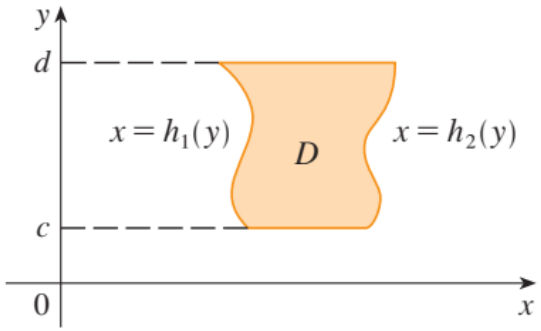
Ta nói miền D có dạng 1, nếu
$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(y)\}$.



Giả sử f liên tục trên D. Khi đó vì $F(x, y) = 0$ khi $y < g_1(x)$ hoặc $y > g_2(x)$, nên theo định lý Fubini:
$\iint_D f(x, y)dA = \iint_R F(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$.

Tích phân 2 lớp trên một miền có dạng 2

Ta nói miền D có dạng 2, nếu:
$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(y)\}$.

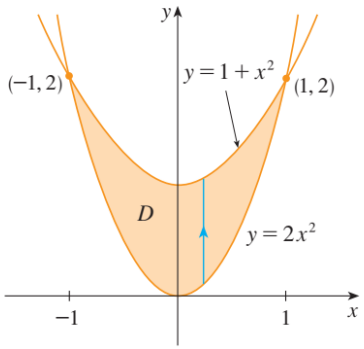


Giả sử f liên tục trên D. Khi đó vì $F(x, y) = 0$ khi $x < h_1(x)$ hoặc $x > h_2(x)$, nên theo định lý Fubini:
$\iint_D f(x, y)dA = \iint_R F(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy$.

Ví dụ 3.1

Tính $\iint_D f(x,y)dA$, *trong đó* D *là miền bị chặn bởi 2 parabol* $y = 2x^2$ *và* $y = 1 + x^2$.

Giải:



2 parabol cắt nhau khi $2x^2 = 1 + x^2$, tức là $x = \pm 1$. Ta thấy miền D thuộc dạng 1, nên ta có:

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx$$

$$= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Chú ý

Khi tính tích phân 2 lớp như trong Ví dụ trên, việc vẽ sơ đồ là rất cần thiết. Thường thì việc vẽ một mũi tên dọc như trong Hình 8 sẽ rất hữu ích. Sau đó, giới hạn tích phân cho tích phân bên trong có thể được đọc từ sơ đồ như sau: Mũi tên bắt đầu từ biên dưới $y = g_1(x)$, cho cận dưới của tích phân, và mũi tên kết thúc tại biên trên $y = g_2(x)$, cho cận trên của tích phân. Đối với miền dạng 2, mũi tên được vẽ theo chiều ngang từ biên trái đến biên phải.

Ví dụ 3.2

Tính thể tích của khối nằm giữa paraboloid $z = x^2 + y^2$ và phía trên miền D trong mặt phẳng xy giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x$ và parabola $y = x^2$.

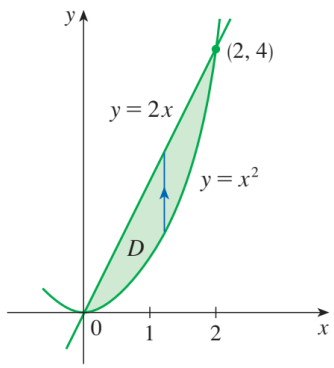


Figure: Hình 1: Miền D như là miền dạng 1.

CÁCH 1: Từ Hình 35, ta thấy D có thể xem như một miền dạng 1:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, x^2 \leqslant y \leqslant 2x\right\}$$

Do đó thể tích của khối nằm phía dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và phía trên D là

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + y^2\right) dydx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{\left(x^2\right)^3}{3}\right] dx \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3}\right) dx \\
&= -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6}\Big]_0^2 = \frac{216}{35}
\end{aligned}
$$

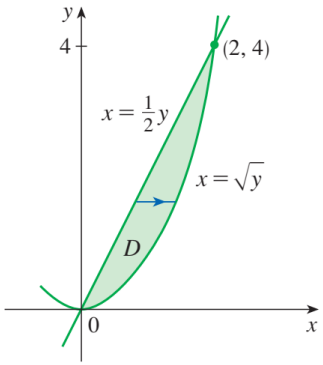


Figure: Hình 2: Miền D như là miền dạng 2.

CÁCH 2:Từ Hình 37 ta thấy D cũng có thể xem là một miền dạng 2:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4, \frac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\}$$

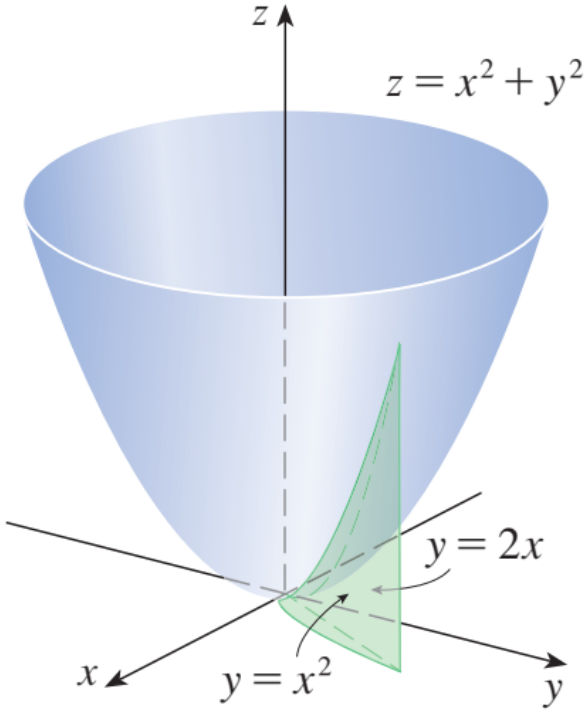
Do đó một cách tính khác cho V là:

$$V = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy$$

$$= \frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4\Big]_0^4 = \frac{216}{35}$$

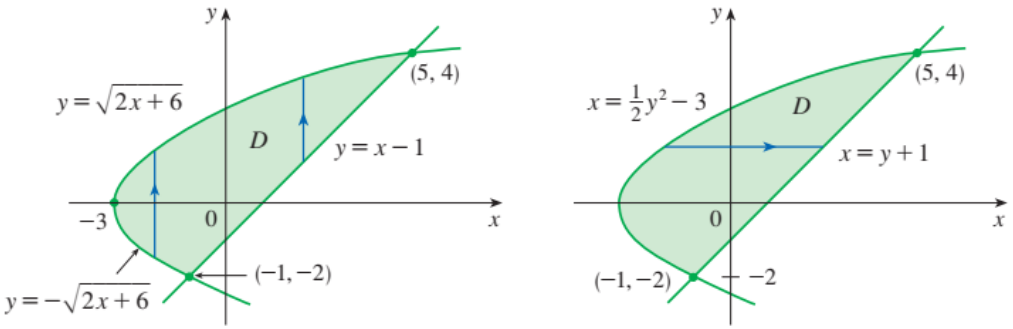
□



Hình trên minh họa khối mà ta đã tính thể tích ở Ví dụ trước. Khối này nằm phía trên mặt phẳng xy, phía dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, và nằm giữa mặt phẳng $y = 2x$ và mặt trụ parabola $y = x^2$.

Ví dụ 3.3

Tính $\iint_D xydA$, *trong đó* D *là miền giới hạn bởi đường thẳng* $y = x - 1$ *và parabola* $y^2 = 2x + 6$.



(a) D as a type I region (b) D as a type II region

ĐÁP ÁN: Miền D được minh họa ở hình trên. Ta thấy D có thể xem là miền dạng 1, cũng như là miền dạng 2, nhưng nếu ta xét D như miền dạng 1 thì việc tính toán sẽ phức tạp hơn vì biên dưới bao gồm 2 phần. Do đó cách tốt hơn là xem D như miền dạng 2:

$$D = \left\{(x, y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leqslant x \leqslant y + 1\right\}$$

$$\iint_D xydA = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xydxdy = \int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2-3\right)^2\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24}+y^4+2\frac{y^3}{3}-4y^2\right]_{-2}^{4} = 36$$

Nếu trong Ví dụ này, ta xem D như một miền dạng 1, thì đường cong biên dưới là

$$g_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{2x+6} & \text{if } -3 \leqslant x \leqslant -1 \\ x-1 & \text{if } -1 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

và ta sẽ có

$$\iint_D xydA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xydydx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xydydx$$

Khi đó quá trình tính toán sẽ phức tạp hơn.

Ví dụ 3.4

Tính thể tích của tứ diện được giới hạn bởi các mặt phẳng $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0$, *và* $z = 0$.

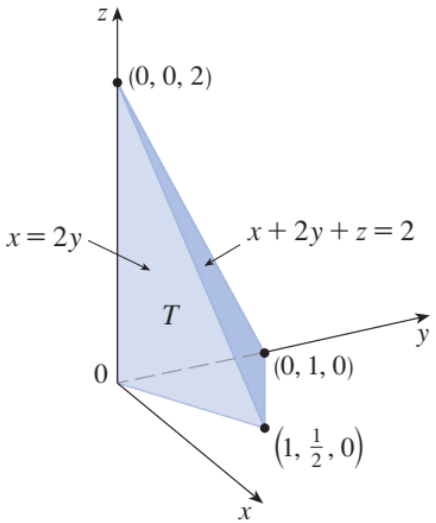
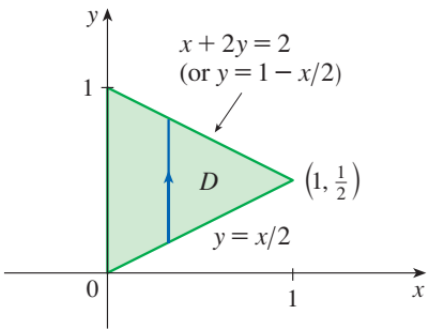


Figure: Tứ diện T

ĐÁP ÁN: Trong những bài toán như thế này, ta nên vẽ hai hình: một hình khối 3 chiều và miền phẳng D mà khối này nằm ở phía trên. Hình bên biểu diễn tứ diện T được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$, mặt phẳng thẳng đứng $x = 2y$, và mặt phẳng $x + 2y + z = 2$. Vì mặt phẳng $x + 2y + z = 2$ cắt mặt phẳng xy (có phương trình $z = 0$) theo đường thẳng $x + 2y = 2$, ta thấy T nằm phía trên miền tam giác D trong mặt phẳng xy được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 2y, x + 2y = 2$, và $x = 0$.



Mặt phẳng
$x + 2y + z = 2$ có thể viết dưới dạng
$z = 2 - x - 2y$, nên thể tích cần
tính nằm phía dưới đồ thị của hàm
$z = 2 - x - 2y$ và phía trên miền

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

Do đó:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (2 - x - 2y)\,dA \\
&= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\
&= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big]_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Đổi thứ tự lấy tích phân

Theo Định lý Fubini, ta có thể biểu diễn một tích phân bội như là một tích phân lặp theo 2 thứ tự khác nhau. Đôi khi một thứ tự sẽ khó tính tích phân hơn thứ tự kia, hoặc thậm chí không thể tính tích phân. Ví dụ sau đây cho thấy ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân như thế nào khi gặp một tích phân lặp mà khó tính.

Ví dụ 3.5

Tính tích phân lặp $\int_0^1 \int_x^1 \sin\left(y^2\right) dydx$.

ĐÁP ÁN: Nếu ta thử tính tích phân như đề bài cho, ta sẽ phải đối mặt với việc tính $\int \sin\left(y^2\right) dy$. Nhưng điều này là không thể sau hữu hạn bước vì $\int \sin\left(y^2\right) dy$ không phải là một hàm sơ cấp. Vì vậy ta phải đổi thứ tự lấy tích phân.

Đầu tiên ta viết lại tích phân trên dưới dạng tích phân bội:

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin\left(y^2\right) dydx = \iint_D \sin\left(y^2\right) dA$$
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$$

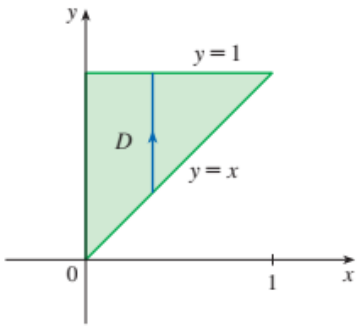


Figure: Hình 3: Miền D như là miền dạng 1.

Ta vẽ miền D như trong hình 3 .
Từ Hình 4 ta thấy,
D cũng có thể được mô tả như sau:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

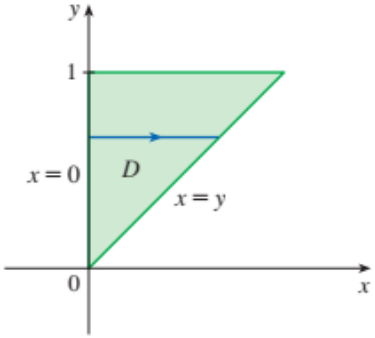


Figure: Hình 4: Miền D như là miền dạng 2.

Do đó ta có thể biểu diễn tích phân bội đã cho như là một tích phân lặp nhưng theo thứ tự ngược lại:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^1 \sin\left(y^2\right) dydx &= \iint_D \sin\left(y^2\right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sin\left(y^2\right) dxdy = \int_0^1 \left[x \sin\left(y^2\right)\right]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \sin\left(y^2\right) dy = -\frac{1}{2}\cos\left(y^2\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1\end{aligned}$$

Các tính chất của tích phân bội

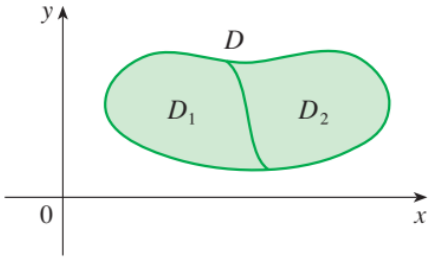
Giả sử tất cả các tích phân sau đều tồn tại. Với các miền D có dạng hình chữ nhật 3 tính chất đầu tiền có thể chứng minh tương tự như tích phân một biến. Với miền D tổng quát, các tính chất này được chứng minh dựa vào định nghĩa tích phân trên miền tổng quát.

1. $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$
2. $\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA$ trong đó c là một hằng số.
3. Nếu $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ với mọi (x,y) trong D, thì

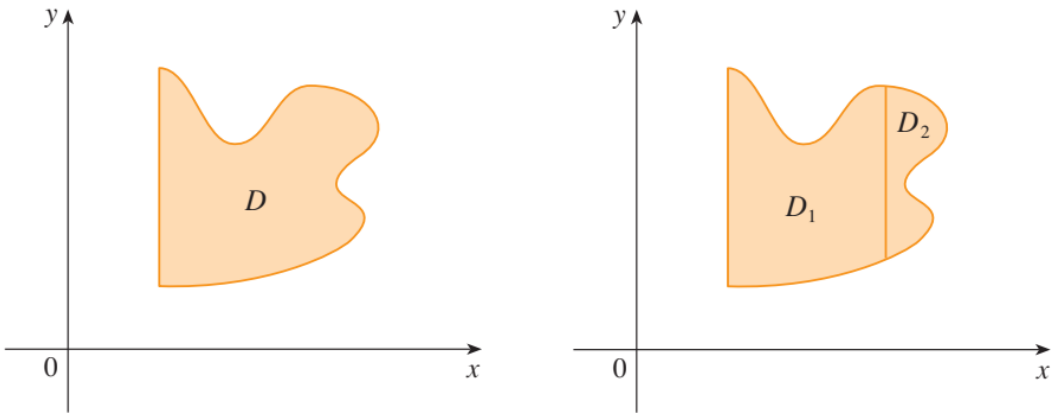
$$\iint_D f(x,y)dA \geqslant \iint_D g(x,y)dA$$

Tính chất sau đây của tích phân bội tương tự như tính chất của tích phân 1 biến: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Nếu $D = D_1 \cup D_2$, trong đó D_1 và D_2 không chồng lên nhau ngoại trừ phần biên (xem Hình 5), thì
Tính chất 4:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$



Tính chất trên có thể dùng để tính các tích phân 2 lớp trên miền D không thuộc dạng 1 cũng không thuộc dạng 2 nhưng có thể biểu diễn như là hợp của các miền dạng 1 hoặc dạng 2.

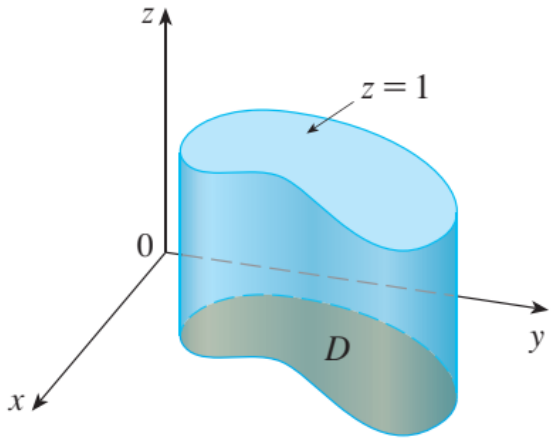


(a) D is neither type I nor type II. (b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 is type I, D_2 is type II.

Tính chất sau đây của tích phân nói rằng nếu ta lấy tích phân của hàm hằng $f(x, y) = 1$ trên miền D, ta được diện tích của miền D:
Tính chất 5:

$$\iint_D 1dA = A(D)$$

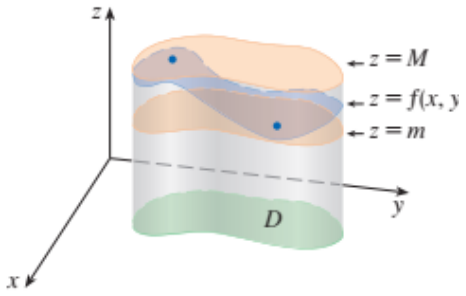
Hình dưới đây cho thấy tại sao đẳng thức trên lại đúng: Một khối trụ có đáy là D và chiều cao là 1 có thể tích là $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mà thể tích này có thể tính bằng $\iint_D 1dA$.



Ta có thể kết hợp các tính chất 2,3,5 để thu được tính chất sau đây:
Tính chất 6: Nếu $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ với mọi (x, y) trong D, thì

$$m \cdot A(D) \leqslant \iint_D f(x, y) dA \leqslant M \cdot A(D)$$

Hình sau minh họa tính chất 6 khi $m > 0$. Thể tích của khối nằm phía dưới đồ thị $z = f(x, y)$ và phía trên D bị chặn bởi các thể tích của các hình trụ với đáy D và các chiều cao m và M.



Ví dụ 3.6

Dùng tính chất 6 để đánh giá tích phân $\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$, trong đó D là hình tròn với tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng 2.

ĐÁP ÁN:Vì $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ và $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, ta có $-1 \leqslant \sin x \cos y \leqslant 1$ và do hàm e^z là một hàm tăng, nên ta có

$$e^{-1} \leqslant e^{\sin x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Do đó, nếu lấy $m = e^{-1} = 1/e, M = e$, và $A(D) = \pi(2)^2$ trong Tính chất 6, ta được

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leqslant 4\pi e$$