Chương 4 phần 2: Tích phân 2 lớp trong tọa độ cực

VNU University of Engineering and Technology

28th April 2026

"Sáng tạo và vun đắp giá trị nhân văn của công nghệ"

3.Tích phân 2 lớp trong tọa độ cực

Giả sử ta muốn tính tích phân 2 lớp $\iint_R f(x,y)dA$, trong đó miền R là một hình tròn với tâm ở gốc tọa độ. Khi đó cách mô tả R theo tọa độ Descartes sẽ phức tạp hơn là mô tả bằng tọa độ cực. Nói chung, nếu R là một miền mà dễ mô tả bằng tọa độ cực, thì khi đó tích phân 2 lớp trên R sẽ dễ tính hơn nếu ta chuyển sang tọa độ cực.

Nhắc lại về tọa độ cực Tọa độ cực (r,θ) của một điểm trong mặt phẳng có liên hệ với tọa độ Descartes (x,y) như sau:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

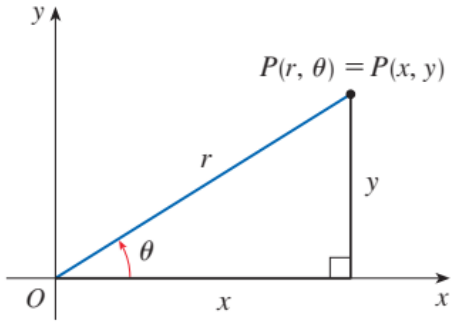
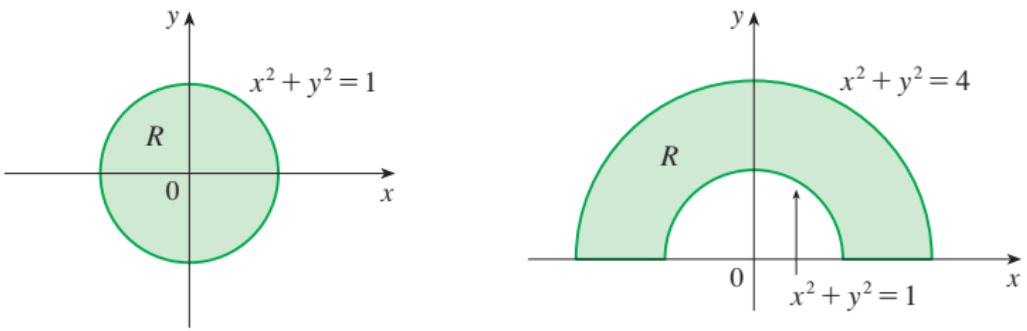


Figure: Hình 1: Tọa độ cực và tọa độ Descartes

Phương trình của đường tròn với tâm là gốc tọa độ rất dễ mô tả bằng tọa độ cực, ví dụ như đường tròn đơn vị có thể mô tả bởi phương trình $r = 1$; còn miền giới hạn bởi đường tròn này được minh họa ở Hình 2(a). Hình 2(b) biểu diễn một miền khác mà cũng rất dễ mô tả bằng tọa độ cực.



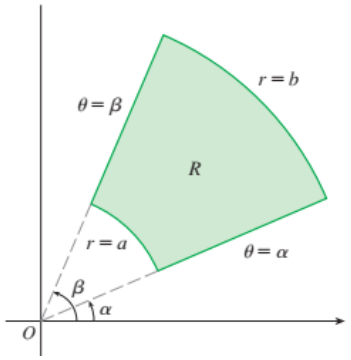
(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Figure: Hình 2: Một số miền dễ mô tả bằng tọa độ cực

Các miền trong Hình 2 là các trường hợp đặc biệt của hình chữ nhật cực

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

được minh họa ở Hình 3.



Để tính tích phân bội $\iint_R f(x,y)dA$, trong đó R là một hình chữ nhật cực, ta chia $[a,b]$ thành m đoạn con $[r_{i-1}, r_i]$ có độ dài bằng nhau và bằng $\Delta r = (b-a)/m$ và chia đoạn $[\alpha, \beta]$ thành n đoạn con $[\theta_{j-1}, \theta_j]$

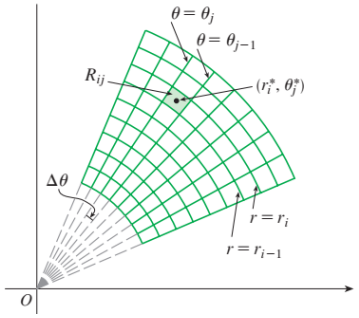


Figure: Hình 4: Chia R thành các hình chữ nhật con cực

Tâm của mỗi hình chữ nhật con cực

$$R_{ij} = \{(r,\theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$

có các tọa độ cực:

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Ta tính diện tích của R_{ij} bằng cách sử dụng tính chất đã biết: diện tích của một hình quạt của một hình tròn với bán kính r và góc ở tâm θ là $\frac{1}{2}r^2\theta$. Lấy hiệu của 2 diện tích của 2 hình quạt có góc ở tâm $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, ta tính được diện tích của R_{ij} là

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(r_i + r_{i-1}\right)\left(r_i - r_{i-1}\right)\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

Tọa độ Descartes của tâm của R_{ij} là $\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right)$, nên một tổng Riemann điển hình là

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right)\Delta A_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right) r_i^* \Delta r \Delta\theta \quad (3.1)$$

Nếu ta viết $g(r,\theta) = rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$, thì tổng Riemann trong phương trình (3.1) là:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g\left(r_i^*, \theta_j^*\right)\Delta r \Delta\theta$$

là tổng Riemann của tích phân 2 lớp: $\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta) dr d\theta$.

Do đó ta có:

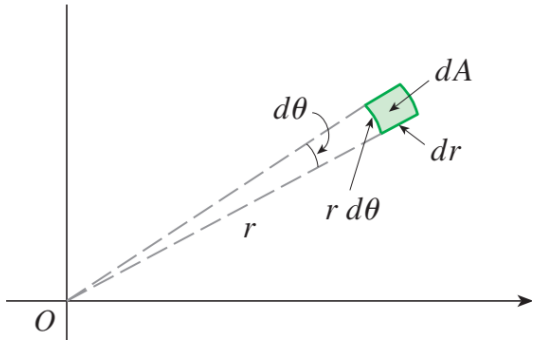
$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*\right)\Delta A_i \\ &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g\left(r_i^*, \theta_j^*\right)\Delta r\Delta\theta = \int_\alpha^\beta\int_a^b g(r,\theta)drd\theta \\ &= \int_\alpha^\beta\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta\end{aligned}$$

Chú ý 3.1

Nếu f là một hàm liên tục trong một hình chữ nhật cực R được cho bởi $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, where $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, thì

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta \qquad (3.2)$$

Công thức (3.2) ta chuyển từ tọa độ Descartes sang tọa độ cực bằng cách đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, đổi sang cận phù hợp của r và θ, và thay dA bằng $rdrd\theta$. Chú ý không quên thừa số r trong vế phải của (3.2). Một cách cổ điển để nhớ công thức này là ta có thể hình dung hình chữ nhật "vô cùng bé" như một hình chữ nhật thông thường với các kích thước $rd\theta$ và dr và do đó có diện tích $dA = rdrd\theta$.



Ví dụ 3.1

Tính $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, *trong đó* R *là miền ở nửa trên của mặt phẳng tọa độ được giới hạn bởi các đường tròn* $x^2 + y^2 = 1$ *và* $x^2 + y^2 = 4$.

ĐÁP ÁN: Miền R có thể được mô tả như sau:

$$R = \left\{(x, y) \mid y \geqslant 0, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$$

Nó có dạng một khuyên như ở hình 2(b), và trong tọa độ cực nó được cho bởi $1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Do đó theo công thức (3.2):

$$\iint_R \left(3x + 4y^2\right) dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 \left[3(r\cos\theta) + 4(r\sin\theta)^2\right] r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_1^2 \left(3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta\right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi} \left(7\cos\theta + 15\sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[7\cos\theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= 7\sin\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2} \quad (3.3)$$

Ví dụ 3.2

Tính tích phân 2 lớp

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dydx$$

ĐÁP ÁN: Tích phân lặp này là tích phân 2 lớp trên miền R được minh họa ở Hình 6 và được mô tả như sau:

$$R=\left\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}$$

Miền này là một nửa hình tròn, nên nó dễ dàng được mô tả bởi tọa độ cực:

$$R=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant \theta\leqslant \pi, 0\leqslant r\leqslant 1\}$$

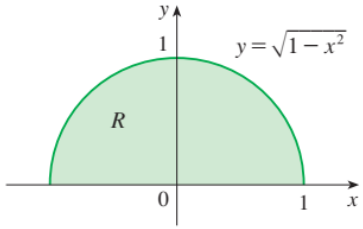


Figure: Hình 6

Do đó ta có:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dydx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1}\left(r^2\right)rdrd\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}d\theta = \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 3.3

Tính thể tích của khối được giới hạn bởi mặt phẳng $z = 0$ và paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$.

ĐÁP ÁN: Nếu ta đặt $z = 0$ trong phương trình của paraboloid, ta được $x^2 + y^2 = 1$. Tức là mặt phẳng $z = 0$ cắt paraboloid theo đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, nên khối nằm phía dưới paraboloid và phía trên miền D được cho bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1$ [xem Hình 7].

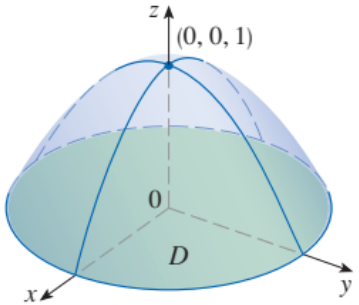


Figure: Hình 7

Trong tọa độ cực D được cho bởi $0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Vì $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, thể tích là

$$V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r dr d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(r - r^3\right) dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Nếu trong Ví dụ 3.3, ta dùng tọa độ Descartes mà không dùng tọa độ cực, thì

$$V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dydx$$

không dễ tính vì có chứa $\int \left(1 - x^2\right)^{3/2} dx$.

Phương pháp tính tích phân bằng tọa độ cực ở trên có thể áp dụng cho các miền phức tạp hơn như trong Hình 8. Chúng tương tự như các miền hình chữ nhật dạng 2 mà ta đã xét trong chương 4 phần 1.

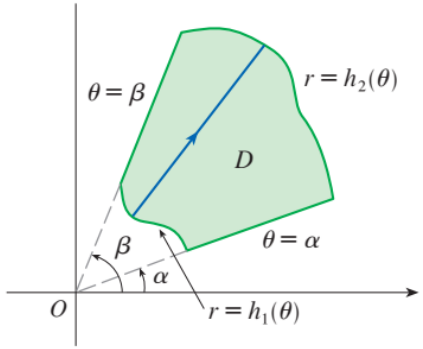


Figure: $D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$

Kết hợp công thức (3.2) và chương 4 phần 1, ta có:

Định lý 3.1

Nếu f liên tục trong một miền cực có dạng
$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$
thì

$$\iint_D f(x, y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta \tag{3.4}$$

Nói riêng, nếu lấy $f(x, y) = 1, h_1(\theta) = 0$, và $h_2(\theta) = h(\theta)$ trong công thức này, ta thấy diện tích của miền D được giới hạn bởi $\theta = \alpha, \theta = \beta$, và $r = h(\theta)$ là

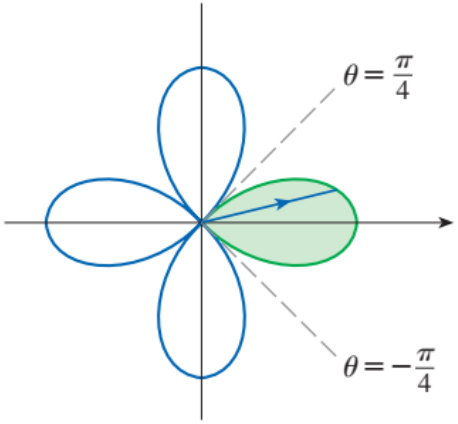
$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} rdrd\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[h(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

Ví dụ 3.4

Dùng tích phân 2 lớp để tính diện tích của một lá của vùng được giới hạn bởi đường cỏ 4 lá $r = \cos 2\theta$.

ĐÁP ÁN: Ta thấy một lá được cho bởi miền

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4, 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\}$$



Do đó diện tích một lá là

$$
\begin{aligned}
A(D) &= \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 3.5

Tính thể tích của khối nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, phía trên mặt phẳng xy và bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

ĐÁP ÁN: Khối cần tính thể tích nằm phía trên miền D có biên với phương trình $x^2 + y^2 = 2x$ hay:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

(Xem Hình 10)

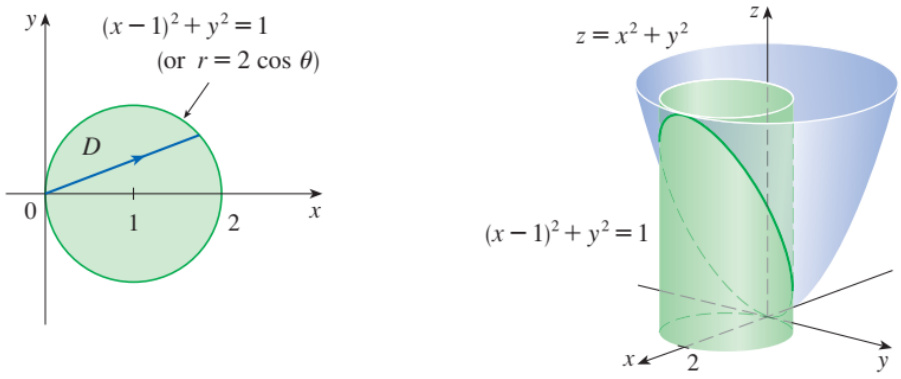


Figure: Hình 10

Trong tọa độ cực, ta có $x^2 + y^2 = r^2$ và $x = r\cos\theta$, nên đường tròn biên $x^2 + y^2 = 2x$ trở thành $r^2 = 2r\cos\theta$, hay $r = 2\cos\theta$. Do đó hình tròn D được cho bởi

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

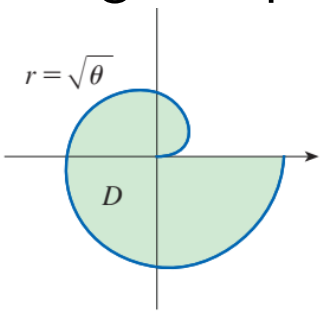
Theo công thức (3.4), ta có:

$$V = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

Bài tập

Dùng tích phân 2 lớp để tính diện tích của miền D: