Chương 4 phần 5: Tích phân 3 lớp

VNU University of Engineering and Technology

12th May 2026

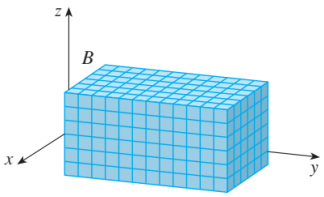
"Innovative thinking for the future"

5.1. Tích phân 3 lớp trên hình hộp chữ nhật

Cho hàm 3 biến f xác định trên hình hộp chữ nhật:

$$B = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

Ta chia B thành các hình hộp chữ nhật con bằng cách chia đoạn $[a, b]$ thành l đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ có cùng độ dài Δx, chia đoạn $[c, d]$ thành m đoạn con $[y_{j-1}, y_j]$ có cùng độ dài Δy, chia đoạn $[r, s]$ thành n đoạn con $[z_{k-1}, z_k]$ có cùng độ dài Δz. Sau đó vẽ các mặt phẳng đi qua các điểm chia và song song với các mặt phẳng tọa độ. Ta nhận được các hình hộp chữ nhật con: $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$.



Mỗi hình chữ hộp chữ nhật con có thể tích $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Tổng Riemann 3 lớp là:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V, \quad (5.1)$$

Định nghĩa

trong đó điểm mẫu $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in B_{ijk}$.

Định nghĩa 5.1

Tích phân 3 lớp *của hàm f trên hình hộp chữ nhật B là*

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V \quad (5.2)$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

Cũng giống như tích phân 2 lớp, nếu f liên tục thì tích phân 3 lớp của f tồn tại. Ta có thể chọn các điểm mẫu là các điểm bất kỳ trong các hình hộp chữ nhật con, nhưng nếu ta chọn điểm mẫu là (x_i, y_j, z_k) thì ta sẽ nhận được biểu thức trông đơn giản hơn:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V \quad (5.3)$$

Định nghĩa

trong đó điểm mẫu $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in B_{ijk}$.

Định nghĩa 5.1

Tích phân 3 lớp *của hàm f trên hình hộp chữ nhật B là*

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V \quad (5.2)$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

Cũng giống như tích phân 2 lớp, nếu f liên tục thì tích phân 3 lớp của f tồn tại. Ta có thể chọn các điểm mẫu là các điểm bất kỳ trong các hình hộp chữ nhật con, nhưng nếu ta chọn điểm mẫu là (x_i, y_j, z_k) thì ta sẽ nhận được biểu thức trông đơn giản hơn:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V \quad (5.3)$$

Định lý Fubini cho tích phân 3 lớp

Định lý 5.1

Nếu hàm 3 biến f liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, thì:

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz. \qquad (5.4)$$

Tích phân lặp ở vế phải của biểu thức trên có nghĩa là lấy tích phân theo x trước, rồi theo y và cuối cùng là theo z. Nếu ta hoán vị thứ tự biến để lấy tích phân thì ta nhận được cùng 1 kết quả. Do đó ta thường chọn thứ tự lấy tích phân thuận tiện nhất.

Ví dụ 5.1

Tính $\iiint_B xyz^2 dV$, *trong đó* $B = [0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$.

Giải.

Theo định lý Fubini, ta có:

$$\iiint_B xyz^2\, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 yz^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy\, dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\, dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\, dz = \left. \frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

□

5.2. Tích phân 3 lớp trên một vùng E tổng quát bị chặn trong không gian 3 chiều

Dùng 1 hình hộp chữ nhật B bao quanh E. Ta định nghĩa hàm F như sau: $F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) \text{ nếu } (x,y,z) \in E \\ 0 \text{ nếu } (x,y,z) \in B \setminus E \end{cases}$.

Khi đó ta định nghĩa

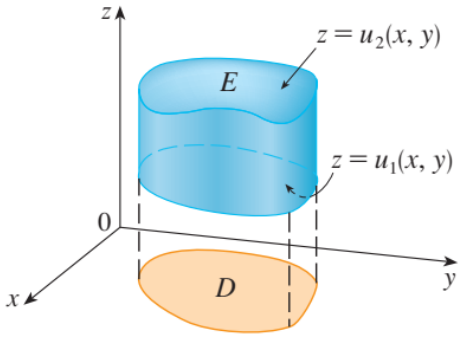
$$\iiint_E (x,y,z)dV = \iiint_B F(x,y,z)dV. \tag{5.5}$$

Tích phân sẽ tồn tại nếu f liên tục trên E và biên của E là một đường cong trơn. Tích phân 3 lớp cũng có các tính chất tương tự như tích phân 2 lớp. (Xem các tính chất 5-8 của tích phân 2 lớp trong chương 4 phần 1)

Trong khóa học này, ta chủ yếu xét các hàm liên tục trên các vùng thuộc một số dạng nhất định.

Khi E là vùng dạng 1: Vùng nằm giữa 2 đồ thị của 2 hàm 2 biến liên tục

$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$, trong đó D là hình chiếu của E lên mặt phẳng tọa độ 0xy.



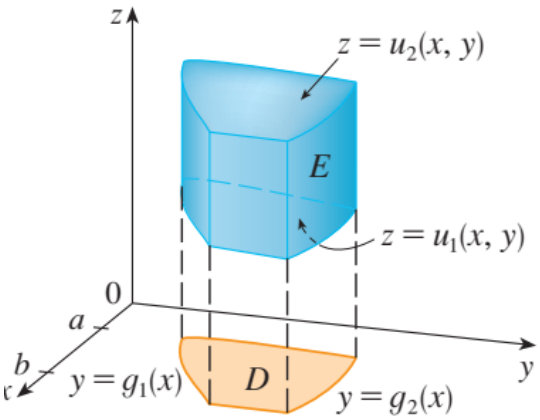
Tương tự như tích phân 2 lớp: trong trường hợp này ta có:

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA}$$

Trong tích phân ở trong ngoặc vuông của vế phải của đẳng thức trên, x, y được cố định, do đó $u_1(x, y), u_2(x, y)$ được xem như các hằng số và ta lấy tích phân theo biến z.

Khi D là miền dạng 1

Nếu D là miền dạng 1, tức là $E = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$,

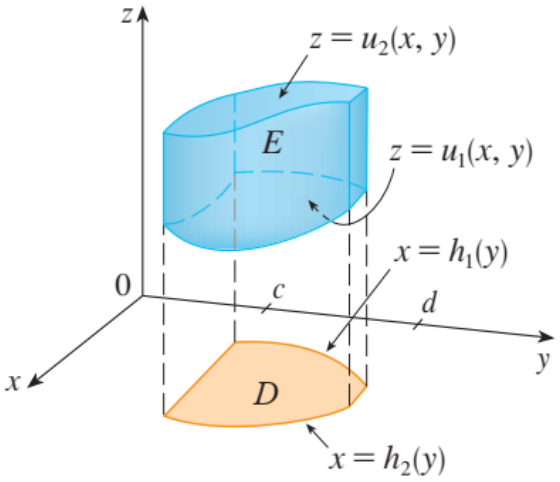


thì:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Khi D là miền dạng 2

Nếu D là miền dạng 2, tức là: $E = \{(x, y, z) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$,



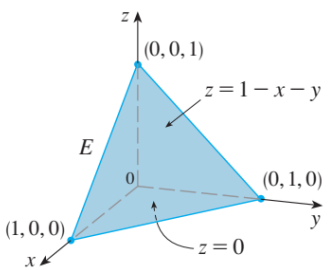
thì:

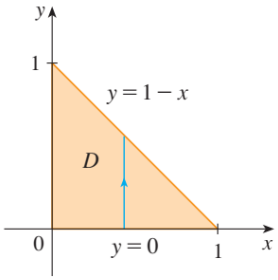
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

Ví dụ 5.2

Tính tích phân $\iiint_E z dV$, trong đó E là vùng nằm trong tứ diện với 4 mặt nằm trên các mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Giải: Khi tính tích phân 3 lớp để thuận tiện hơn, ta nên vẽ 2 hình: đầu tiên là vùng E, và sau đó là hình chiếu của nó lên mặt phẳng 0xy.





Ta thấy mặt biên dưới của E là mặt phẳng $z = 0$, còn mặt biên trên của nó là mặt phẳng $x + y + z = 1$ hay $z = 1 - x - y$. Do đó $u_1(x, y) = 0, u_2(x, y) = 1 - x - y$.
Dễ thấy rằng mặt phẳng $z = 1 - x - y$ và mặt phẳng $z = 0$ cắt nhau theo đường thẳng $1 - x - y = 0$ hay $y = 1 - x$. Vì vậy, hình chiếu của E lên mặt phẳng 0xy là miền trong tam giác được biểu diễn ở hình trên.

Giải Ví dụ 3.2

Ta có $E = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$
Do đó E thuộc dạng 1 và

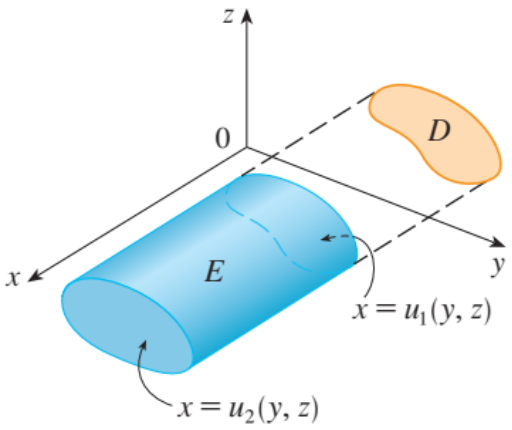
$$\iiint_E z\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\, dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1 - x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Khi E là vùng dạng 2

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\},$$

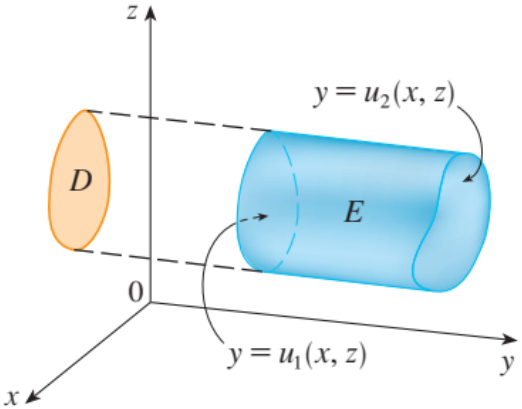


trong đó D là hình chiếu của E lên $0yz$.
Ta có:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

Khi E là vùng dạng 3

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\},$$



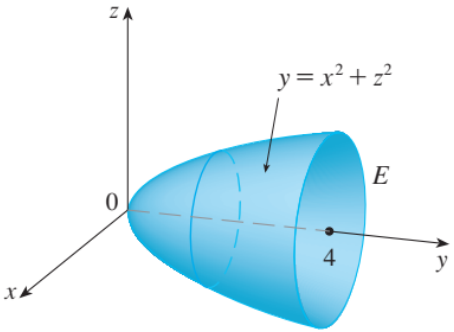
trong đó D là hình chiếu của E lên $0xz$.
Ta có:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

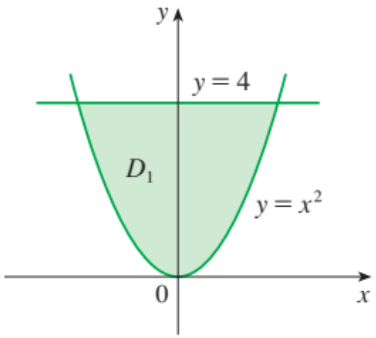
Ví dụ 5.3

Tính tích phân $\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV$, *trong đó* E *là vùng giới hạn bởi paraboloid* $y = x^2 + z^2$ *và mặt phẳng* $y = 4$.

Giải: Vùng E được biểu diễn trong hình dưới đây:



Nếu ta xem E như là vùng dạng 1, ta cần xét hình chiếu D_1 của E lên mặt phẳng xy.



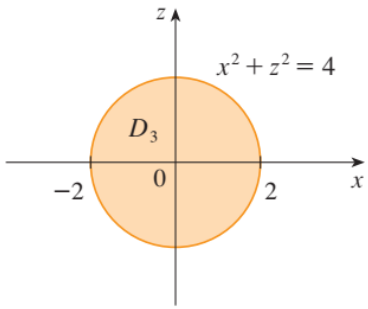
Từ $y = x^2 + z^2$, ta được $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, nên biên dưới của E là $z = -\sqrt{y - x^2}$, biên trên của E là $z = -\sqrt{y - x^2}$. Do đó cách mô tả E như một vùng dạng 1 là:

$$E = \{(x, y, z) | -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}.$$

Do đó: $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} dzdydx$.

Tích phân này rất khó tính. Tình huống tương tự cũng xảy ra khi ta xem E như một vùng dạng 2.

Xét E như là vùng dạng 3. Biên trên của E là mặt phẳng $y = 4$, còn biên dưới của E là mặt $y = x^2 + z^2$. Khi chiếu E lên mặt phẳng 0xz ta được miền $D_3 = \{(x, z)|x^2 + z^2 \leq 4\}$.



Ta có:

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy \right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

Chuyển sang tọa độ cực : $x = r\cos\theta, z = r\sin\theta$. Khi đó ta được

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}$$

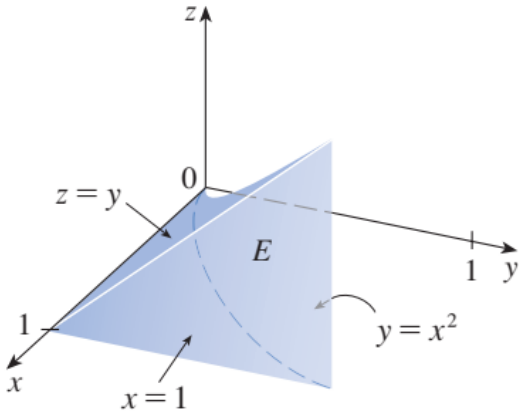
Đổi thứ tự lấy tích phân

Định lý Fubini về tích phân 3 lớp cho phép ta biểu diễn tích phân bội ba dưới dạng tích phân lặp, và có sáu thứ tự tích phân khác nhau mà ta có thể thực hiện điều này. Với một tích phân lặp, việc thay đổi thứ tự tích phân có thể mang lại lợi ích vì việc tính toán tích phân lặp theo một thứ tự có thể đơn giản hơn so với thứ tự khác. Trong ví dụ tiếp theo, ta sẽ nghiên cứu các tích phân lặp tương đương sử dụng các thứ tự tích phân khác nhau.

Ví dụ 5.4

Viết tích phân lặp $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)dzdydx$ *như là một tích phân 3 lớp, sau đó viết lại nó như một tích phân lặp theo mỗi thứ tự sau:*
a) Lấy tích phân theo x *trước, rồi đến* z*, rồi đến* y*.*
b) Lấy tích phân theo y *trước, rồi đến* x*, rồi đến* z*.*

Giải: Ta có : $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)dzdydx = \iiint_E f(x,y,z)dV$, trong đó $E = \{(x,y,z)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2, 0 \le z \le y\}$.
Từ cách mô tả E như là một vùng dạng 1, ta thấy E nằm giữa mặt $z = 0$ và $z = y$, và hình chiếu của nó lên mặt phẳng xy là: $\{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$.

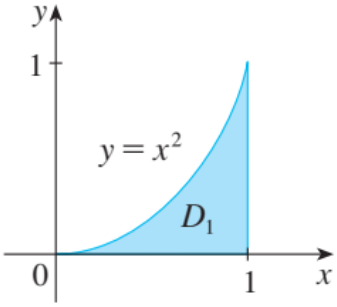


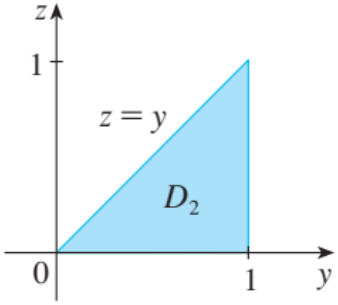
Các hình chiếu của E lên các mặt phẳng tọa độ $0xy, 0yz, Oxz$ lần lượt là:

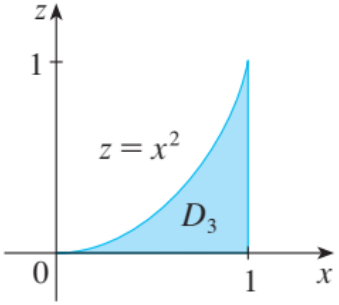
$$D_1 = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le y^2\} = \{(x,y)|0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le 1\}$$

$$D_2 = \{(y,z)|0 \le y \le 1, 0 \le z \le y\}$$

$$D_3 = \{(x,z)|0 \le x \le 1, 0 \le z \le x^2\}$$







a) Nếu ta muốn lấy tích phân theo x rồi đến z, rồi đến y, ta sẽ sử dụng cách miêu tả E như một vùng dạng 2:

$$E = \{(x, y, z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$$

Khi đó:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$$

b) Nếu ta muốn lấy tích phân theo y, rồi đến x, rồi đến z, ta dùng cách mô tả E như một vùng dạng 3:

$$E = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leqslant z \leqslant 1, \sqrt{z} \leqslant x \leqslant 1, z \leqslant y \leqslant x^2\right\}$$

Khi đó:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_z^{x^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$$

3.2. Ứng dụng của tích phân 3 lớp

Khi $f(x, y, z) = 1$ với mọi $(x, y, z) \in E$, thì tích phân 3 lớp của f chính là thể tích của E: $V(E) = \iiint_E dV$.
Chẳng hạn như, khi E là vùng dạng 1, thì

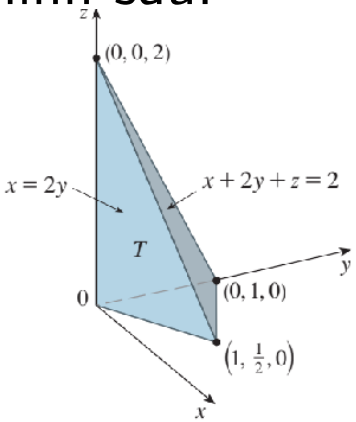
$$\iiint_E 1\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\, dA$$

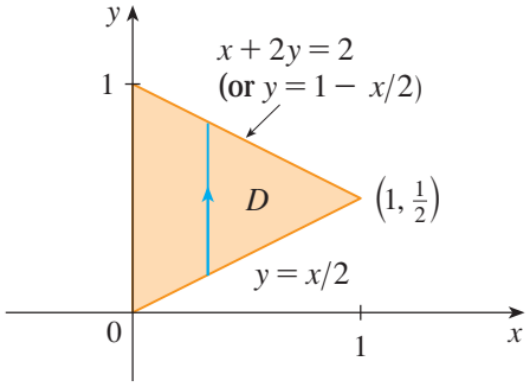
Và trong phần tích phân 2 lớp, ta đã biết rằng đó chính là thể tích của khối nằm giữa mặt $z = u_1(x, y)$ và $z = u_2(x, y)$.

Ví dụ 5.5

Dùng tích phân 3 lớp để tính thể tích của hình tứ diện T giới hạn bởi các mặt phẳng $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0, z = 0$.

Giải: Tứ diện T và hình chiếu của nó lên 0xy được biểu diễn ở hình sau:





Ta có:

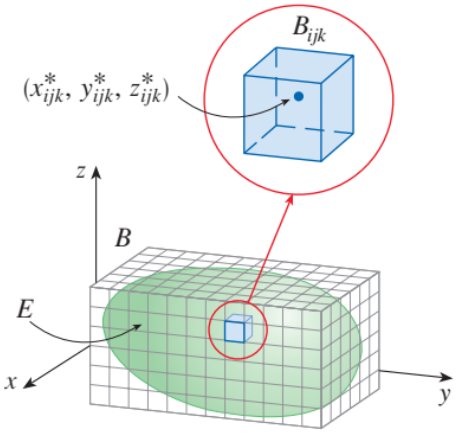
$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx = \frac{1}{3}$$

Chú ý

Không nhất thiết phải dùng tích phân 3 lớp để tính thể tích. Tích phân 3 lớp chỉ cung cấp 1 phương pháp tính thể tích khác bên cạnh việc dùng tích phân 2 lớp.

Tất cả các ứng dụng của tích phân 2 lớp trong vật lý đều có thể mở rộng cho tích phân 3 lớp. Chẳng hạn như, một khối chiếm một vùng E có mật độ $\rho(x, y, z)$ (số đơn vị khối lượng trên 1 đơn vị thể tích) tại mỗi điểm (x, y, z) của E. Để tìm khối lượng m của E, ta chia hình hộp chữ nhật B chứa E thành các hình hộp chữ nhật con B_{ijk} có cùng kích cỡ:



Cho $\rho(x, y, z) = 0$ ngoài E. Nếu ta chọn 1 điểm mẫu $(x^*_{ijl}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ trong B_{ijk}, thì khối lượng của phần của khối E mà chiếm B_{ijk} xấp xỉ $\rho(x^*_{ijl}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V$, trong đó ΔV là thể tích của B_{ijk}.

Khi cộng tất cả các khối lượng này vào, ta được một xấp xỉ của khối lượng của khối E. Như vậy:

$$m = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\,\Delta V = \iiint_E \rho(x,y,z)\,dV$$

Tương tự, mô men của E quanh 3 mặt phẳng tọa độ là:

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x,y,z)\,dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x,y,z)\,dV$$

Trọng tâm của E có các tọa độ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, trong đó $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$.

Các mô men quán tính của E quanh các trục tọa độ là:

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$

Tổng điện tích của khối chiếm vùng E và có mật độ điện tích $\sigma(x, y, z)$ là: $Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)dV$.

Nếu ta có 3 biến ngẫu nhiên liên tục X, Y, Z thì hàm mật độ liên hợp của chúng là một hàm 3 biến $f(x, y, z)$ sao cho:

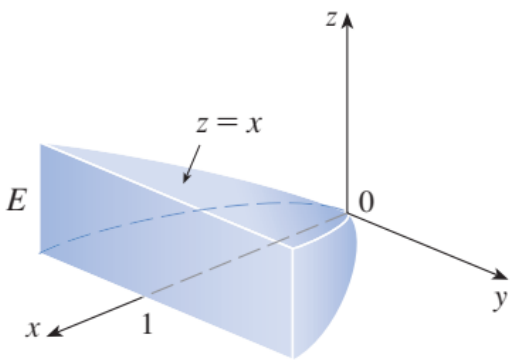
$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)dV. \tag{5.6}$$

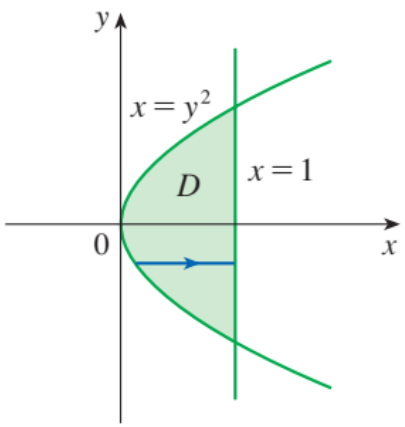
Nói riêng:
$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d, r \leq Z \leq s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)dzdydx.$
Hàm mật độ liên hợp thỏa mãn:
$f(x, y, z) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)dzdydx = 1.$

Ví dụ 5.6

Tìm trọng tâm của khối có mật độ hằng và được giới hạn bởi mặt trụ parabola $y = x^2$ và các mặt phẳng $x = z, z = 0, x = 1$.

ĐÁP ÁN: Khối E và hình chiếu của nó lên mặt phẳng xy được minh họa ở hình sau:





Các mặt trên và mặt dưới của E là $z = x$ và $z = 0$.
$E = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$.

Do đó nếu hàm mật độ của E là $\rho(x, y, z) = \rho$, thì khối lượng là:

$$m = \iiint_E \rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x \rho \, dz \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} (1 - y^4) \, dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) \, dy$$

$$= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{5}$$

Vì E và ρ đối xứng qua mặt phẳng xz, nên $M_{xz} = 0 \implies \bar{y} = 0$.
Các mô men còn lại là:

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x x\rho \, dz \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2 \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7}$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x z\rho \, dz \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{7}$$

Do đó trọng tâm là:

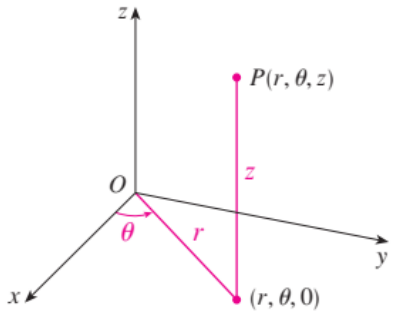
$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\tfrac{5}{7}, 0, \tfrac{5}{14} \right)$$

5.3. Dùng tọa độ trụ để tính tích phân 3 lớp

Tọa độ trụ (Cylindrical coordinates)

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z \tag{5.7}$$

Tức là mỗi điểm P trong không gian 3 chiều được biểu diễn bởi bộ ba (r, θ, z), trong đó r và θ là tọa độ cực của hình chiếu của P lên mặt phẳng 0xy, z là khoảng cách từ P đến mặt phẳng 0xy.

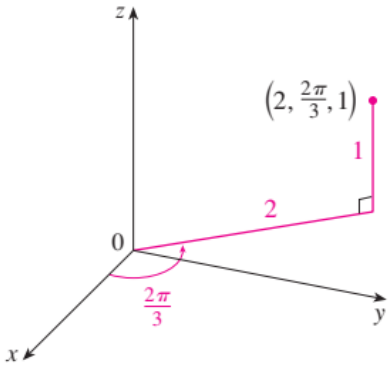


Để chuyển từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ trụ, ta sử dụng các đẳng thức $r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \frac{y}{x}, z = z$.

Ví dụ 5.7

a) Vẽ điểm có tọa độ trụ là $(2, 2\pi/3, 1)$ *và tìm tọa độ chữ nhật của nó.*
b)Tìm tọa độ trụ của điểm có tọa độ chữ nhật là $(3, -3, -7)$.

Giải: a) Điểm có tọa độ trụ $(2, 2\pi/3, 1)$ được biểu diễn ở hình sau:

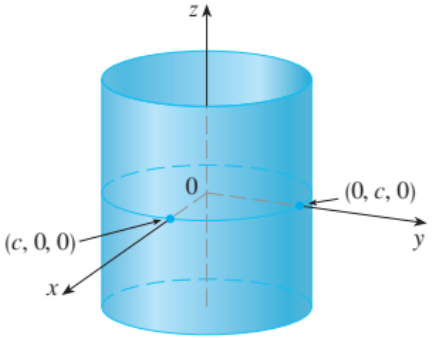


Tọa độ chữ nhật của nó là:
$x = 2\cos(2\pi/3) = -1, y = 2\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}, z = 1.$

b) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \tan\theta = \frac{y}{x} = -1 \implies$
$\theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, z = -7.$
Vậy tọa độ trụ của điểm đã cho là $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$ hoặc $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$... (có vô số cách chọn giống như tọa độ cực)

Nhận xét

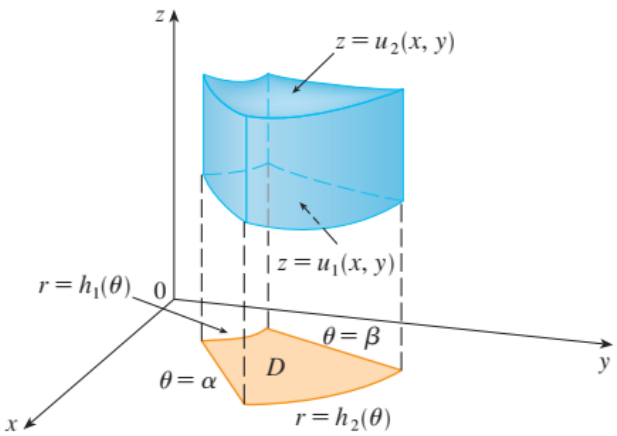
Tọa độ trụ rất có ích trong các bài toán có liên quan đến đối xứng qua trục 0z. Chẳng hạn như, trục đối xứng của mặt trụ tròn có phương trình $x^2 + y^2 = c^2, c > 0$ là 0z và trong tọa độ trụ, phương trình của mặt này rất đơn giản: $r = c$.



Tính tích phân 3 lớp bằng tọa độ trụ

Giả sử E là một vùng dạng 1 mà hình chiếu D của nó lên mặt phẳng 0xy rất thuận tiện để mô tả bằng tọa độ cực. Nói riêng, giả sử f liên tục và
$E = \{(x, y, z)|(x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$, trong đó D được cho bởi tọa độ cực như sau:

$$D = \{(r, \theta)|\alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$



$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D [\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dA.$

Mà ta đã biết cách tính tích phân 2 lớp qua tọa độ cực, nên:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

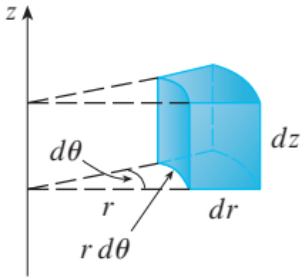


Figure: $dV = rdzdrd\theta$

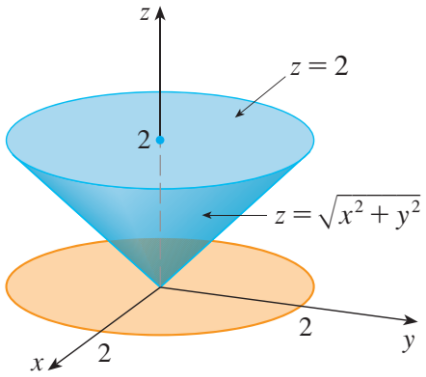
Chú ý 5.1

Tọa độ trụ rất thuận tiện để tính tích phân 3 lớp nếu như E dễ dàng mô tả bằng tọa độ trụ và nếu $f(x,y,z)$ có chứa biểu thức $x^2 + y^2$.

Ví dụ 5.8

Tính tích phân lặp $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx$.

Giải: Tích phân nói trên chính là tích phân 3 lớp trên vùng $E = \{(x,y,z)| -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$.
Hình chiếu của E lên mặt phẳng 0xy là hình tròn $x^2+y^2 \le 4$.



E dễ dàng được mô tả qua tọa độ trụ như sau:
$E = \{(r,\theta,z)|0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r \le z \le 2\}$.

Do đó:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2+y^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

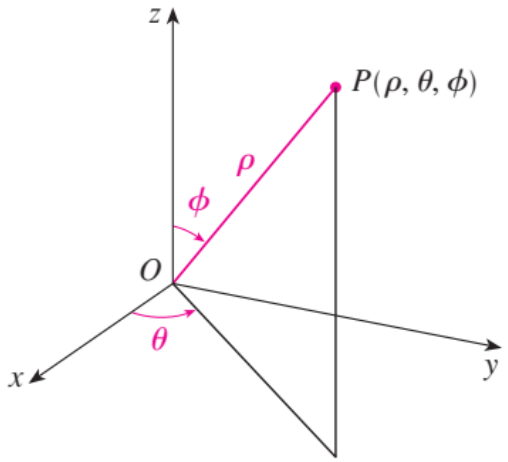
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)\,dr$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$

5.4. Dùng tọa độ cầu để tính tích phân 3 lớp

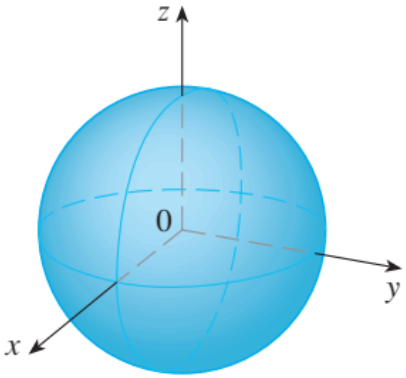
Tọa độ cầu (Spherical coordinates)

Tọa độ cầu (ρ, θ, ϕ) của một điểm P được xác định bởi $\rho = OP$ (khoảng cách từ 0 đến P), θ là góc giống như trong tọa độ cực, ϕ là góc giữa tia $0z$ và OP. Chú ý rằng $\rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi$.

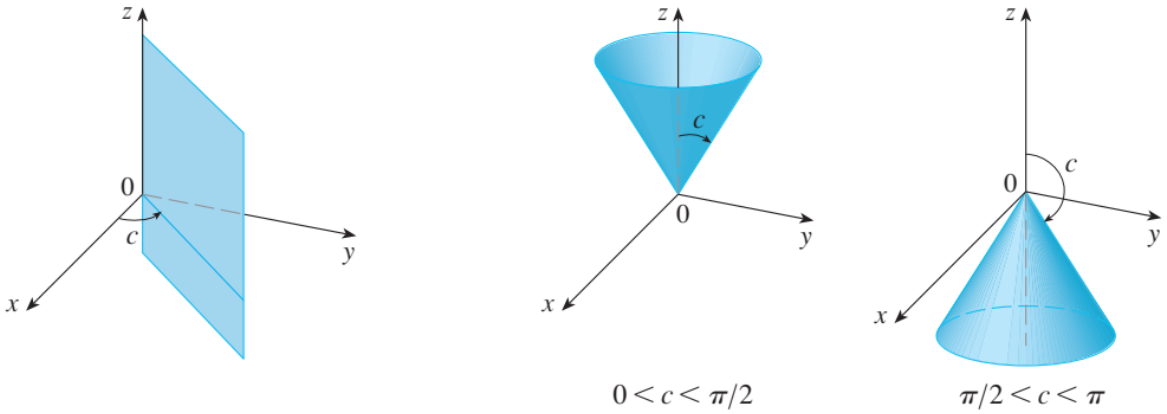


Nhận xét

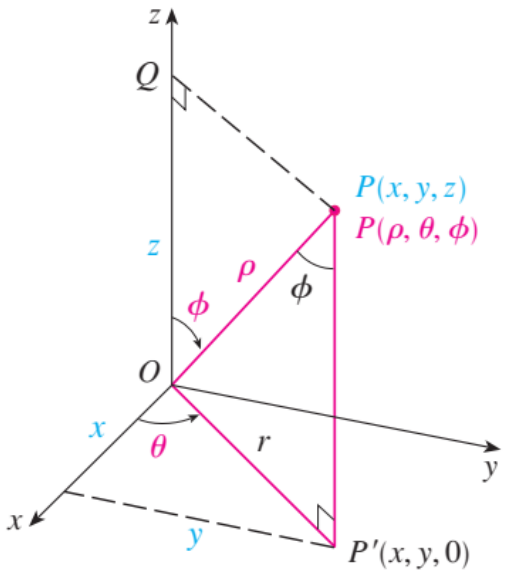
Tọa độ cầu rất có ích trong các bài toán có liên quan đến đối xứng tâm, nói riêng, đối xứng qua gốc tọa độ. Chẳng hạn như, mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ và bán kính c có thể mô tả bằng phương trình rất đơn giản là $\rho = c$. Đó là lý do tại sao tọa độ này được gọi là tọa độ cầu.



Đồ thị của phương trình $\theta = c$ là nửa mặt phẳng thẳng đứng, đồ thị của phương trình $\phi = c$ là nửa mặt nón có trục đối xứng là 0z.



Liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cầu



Trong tam giác vuông OPQ ta có : $z = \rho\cos\phi$. Trong tam giác vuông OPP' ta có: $r = \rho\sin\phi$.
Mà $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, nên:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi \tag{5.8}$$

Ngoài ra:

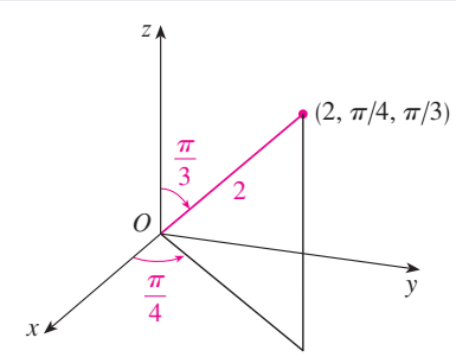
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{5.9}$$

Ví dụ 5.9

Vẽ điểm mà có tọa độ cầu là $(2, \pi/4, \pi/3)$ *và tìm tọa độ Descartes của nó.*

Giải.

điểm mà có tọa độ cầu là $(2, \pi/4, \pi/3)$ được biểu diễn ở hình sau:



Theo công thức (5.8) ta tìm được:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 2 \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 2 \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos\phi = 2 \cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

□

Ví dụ 5.10

Cho điểm có tọa độ Descartes $(0, 2\sqrt{3}, -2)$. *Tìm tọa độ cầu của nó.*

Giải.

Theo đẳng thức (5.9) ta có
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + 12 + 4} = 4.$
Theo công thức (5.8) ta tìm được:

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

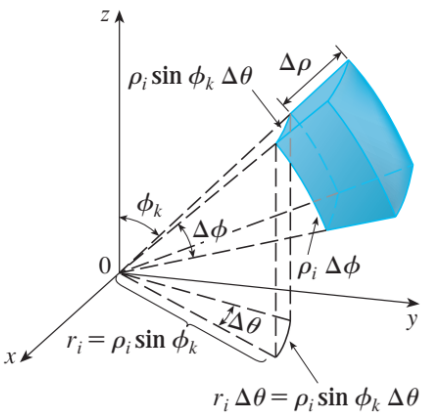
Chú ý rằng $\theta \neq 3\pi/2$ vì $y = 2\sqrt{3} > 0$. Vậy tọa độ cầu của điểm đã cho là $(4, \pi/2, 2\pi/3)$. □

Dùng tọa độ cầu để tính tích phân 3 lớp

Trong hệ tọa độ cầu, đóng vai trò thay cho mỗi hình hộp chữ nhật là một nêm hình cầu (spherical wedge):

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\},$$

trong đó $\alpha \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi, d - c \leq \pi$. Ta chia E thành các nêm hình cầu nhỏ E_{ijk} bằng các mặt cầu cách đều nhau có phương trình $\rho = \rho_i$, các nửa mặt phẳng $\theta = \theta_j$, và các nửa mặt nón $\phi = \phi_k$.



Hình bên cho thấy E_{ijk} có thể xấp xỉ với một hình hộp chữ nhật có kích thước $\Delta\rho, \rho_i\Delta\phi$(độ dài cung của đường tròn bán kính ρ_i tương ứng với góc $\Delta\phi$, và $\rho_i \sin\phi_k\Delta\theta$ (độ dài cung của đường tròn bán kính $\rho_i \sin\phi_k$)tương ứng với góc $\Delta\theta$). Do đó thể tích xấp xỉ của E_{ijk} là

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i\Delta\phi)(\rho_i \sin\phi_k\Delta\theta) = \rho_i^2 \sin\phi_k\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi. \quad (5.10)$$

Trên thực tế, bằng cách dùng định lý giá trị trung bình, có thể chỉ ra rằng: $\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \sin\tilde{\phi}_k \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$, trong đó $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\varphi}_k)$ là một điểm nào đó trong E_{ijk}. Gọi $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ là tọa độ Descartes của điểm này. Khi đó ta có

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\, \Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \sin\tilde{\phi}_k \cos\tilde{\theta}_j,\ \tilde{\rho}_i \sin\tilde{\phi}_k \sin\tilde{\theta}_j,\ \tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k)\ \tilde{\rho}_i^2 \sin\tilde{\phi}_k\, \Delta\rho\, \Delta\theta\, \Delta\phi$$

Mà tổng xuất hiện ở vế phải chính là tổng Riemann của hàm $F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi$.

Công thức tính tích phân 3 lớp theo tọa độ cầu

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

trong đó E là nêm hình cầu được cho bởi

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

Công thức này có thể mở rộng cho vùng dạng cầu tổng quát hơn:

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, g_1(\theta, \phi) \leq \phi \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

Khi đó trong công thức trên chỉ cần thay các cận c, d bằng $g_1(\theta, \phi), g_2(\theta, \phi)$.
Tọa độ cầu thường dùng để tính các tích phân 3 lớp khi các mặt như mặt nón và mặt cầu là các biên của vùng lấy tích phân.

Ví dụ 5.11

Tính $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$, *trong đó* B *là hình cầu đơn vị:* $B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Giải.

Vì biên của B là mặt cầu, nên ta dùng tọa độ cầu: $B = \{(\rho, \theta, \phi) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$. Khi đó:

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin\phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$$

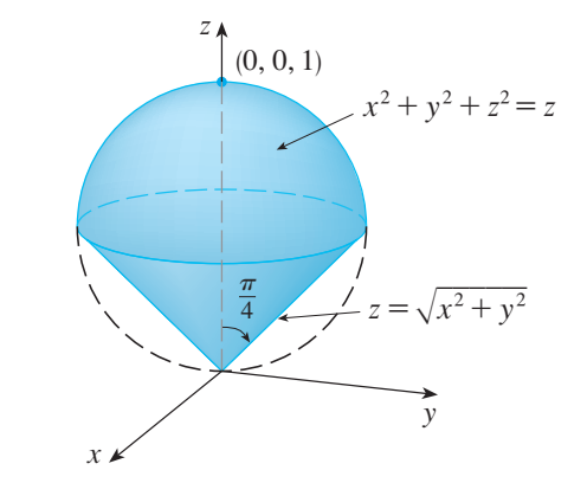
$$= \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho$$

$$= \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} (2\pi) \left[\tfrac{1}{3} e^{\rho^3}\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e - 1)$$

□

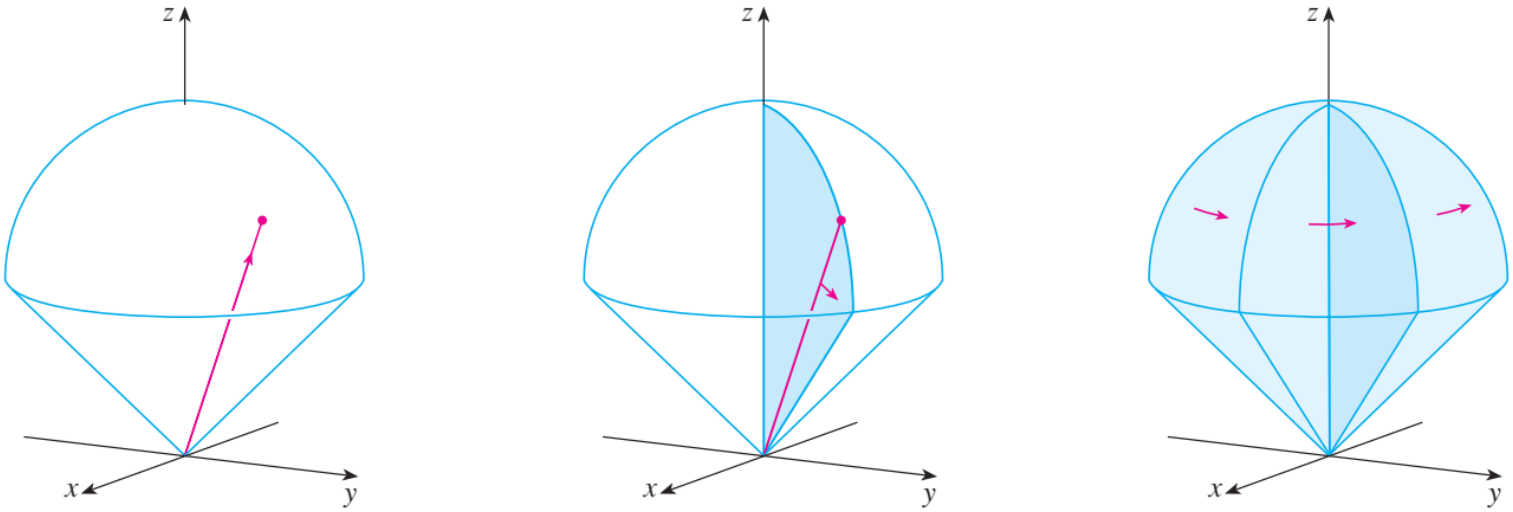
Ví dụ 5.12

Dùng tọa độ cầu để tính thể tích của khối nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và nằm phía dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



Giải: Hình cầu có tâm là $(0, 0, 1/2)$. Dùng tọa độ cầu, phương trình của mặt cầu trở thành: $\rho^2 = \rho \cos\phi \Leftrightarrow \rho = \cos\phi$.
Phương trình mặt nón trở thành:
$\rho \cos\phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta} = \rho \sin\phi \Leftrightarrow \sin\phi = \cos\phi \implies \phi = \pi/4$ (vì $0 \le \phi \le \pi$.)
Như vậy với tọa độ cầu, khối E cần tính thể tích trở thành:
$E = \{(\rho, \theta, \phi) | 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \rho \le \cos\phi\}$.

Hình vẽ dưới đây thể hiện E được tạo ra như thế nào khi ρ, ϕ, θ thay đổi.



ρ varies from 0 to $\cos\phi$ while ϕ and θ are constant.

ϕ varies from 0 to $\pi/4$ while θ is constant.

θ varies from 0 to 2π.

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} \sin\phi \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$