Chương 3 phần 1: Hàm nhiều biến: định nghĩa và các khái niệm cơ bản

VNU University of Engineering and Technology

11th March 2026

"Innovative thinking for the future"

3.1. Hàm hai biến

Định nghĩa 1.1

Cho D là một tập con của $\mathbb{R}^2$. Hàm $f : D \to \mathbb{R}$ với 2 biến x, y là một quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số thực (x, y) với một và chỉ một số thực được ký hiệu là $f(x, y)$.
Ta thường viết $z = f(x, y)$. Các biến x, y là các biến độc lập và biến z là biến phụ thuộc.

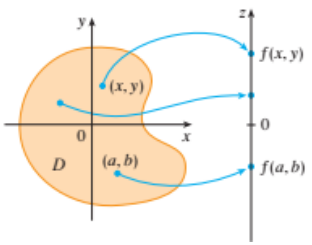


Figure: Minh họa hàm 2 biến

Một ví dụ về hàm hai biến là nhiệt độ T tại một điểm trên bề mặt Trái Đất. Nhiệt độ T phụ thuộc vào kinh độ và vĩ độ của điểm đó. Do đó T chính là một hàm với 2 biến x (vĩ độ) và y (kinh độ): $T = f(x, y)$. Và hình vẽ trên có thể hình dung như sau: $f(x, y)$ biểu thị nhiệt độ tại 1 điểm trên đĩa kim loại có hình như miền D, còn đường thẳng $0z$ giống như một chiếc nhiệt kế để đo nhiệt độ.

Tập xác định (domain) của hàm hai biến

Nếu hàm f được cho bởi một công thức và tập xác định của f không được ghi rõ, thì tập xác định của f được hiểu là tập tất cả các cặp số thực (x, y) sao cho công thức của f có nghĩa.

Ví dụ 1.1

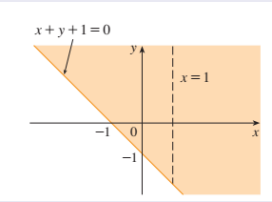
Tính $f(3,2)$, tìm và phác họa tập xác định của hàm số $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$.

Giải.

$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Công thức của f có nghĩa khi và chỉ khi $x + y + 1 \geq 0$ và $x \neq 1$.

Vậy tập xác định của f là $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x + y \geq -1, x \neq 1\}$.



D được minh họa trong hình sau: đó là tập hợp tất cả các điểm nằm phía trên đường thẳng $x + y = -1$, loại đi đường thẳng $x = 1$. □

Figure: Tập xác định của $f = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

Không phải tất cả các hàm đều có thể cho bởi công thức tường minh. Hàm số trong ví dụ sau đây được mô tả bằng lời và các giá trị ước lượng của nó.

Ví dụ 1.2

Tại các vùng có mùa đông khắc nghiệt, chỉ số gió lạnh (the wind-chill index) W thường dùng để đo mức độ lạnh. Chỉ số W này là nhiệt độ mà con người cảm nhận, phụ thuộc vào nhiệt độ thực tế T và tốc độ gió v.Như vậy, W là một hàm của 2 biến T và v. Ta viết: $W = f(T, v)$. Bảng sau ghi lại chỉ số gió lạnh bởi Trung tâm khí tượng của Mỹ và Canada:

Actual temperature (°C) \ Wind speed (km/h) v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
T 5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Figure: *Bảng chỉ số gió lạnh*

Nhìn vào bảng, ta thấy khi nhiệt độ thực tế là -5^0 C và tốc độ gió là 50km/h thì con người sẽ cảm thấy lạnh như là -15^0 C khi không có gió. Tức là $f(-5, 50) = -15$.

Tập giá trị

Tập giá trị (range) của một hàm là tập tất cả các giá trị mà hàm đó có thể nhận.

Ví dụ 1.3

Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Giải.

Tập xác định của g là $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9\}$.

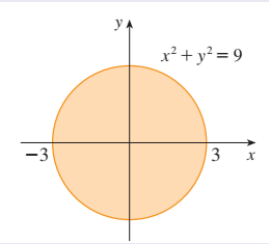


Figure: Tập xác định của $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Tập giá trị của g là $\{z | z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$.
Ta có $z \geq 0$ và $z \leq \sqrt{9} = 3$ (vì $x^2 + y^2 \geq 0$.)
Vậy tập giá trị của g là $\{[0, 3]\}$ □

Đồ thị

Một trong những phương pháp biểu diễn hàm là sử dụng đồ thị.

Định nghĩa 1.2

Nếu f là một hàm 2 biến có tập xác đinh là D thì đồ thị của f là $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$.

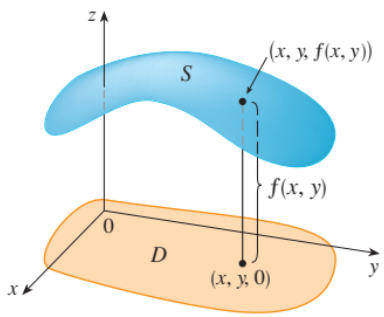


Figure: Đồ thị của hàm f

Nếu như đồ thị của hàm 1 biến là một đường cong có phương trình $y = f(x)$, thì đồ thị của hàm f với 2 biến là một mặt S có phương trình $z = f(x, y)$.

Ví dụ 1.4

Phác họa đồ thị của hàm $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

Giải.

$z = f(x, y) = 6 - 3x - 2y \implies 3x + 2y + z = 6.$
Do đó đồ thị của f chính là mặt phẳng có phương trình $3x + 2y + z = 6$. □

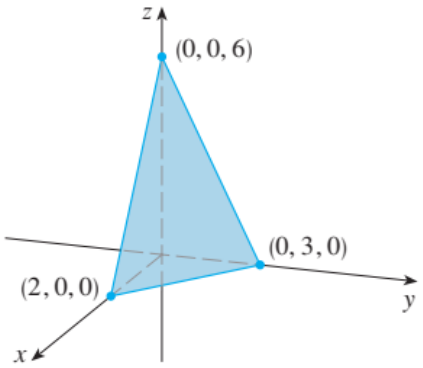


Figure: Đồ thị của hàm $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

Hàm tuyến tính 2 biến

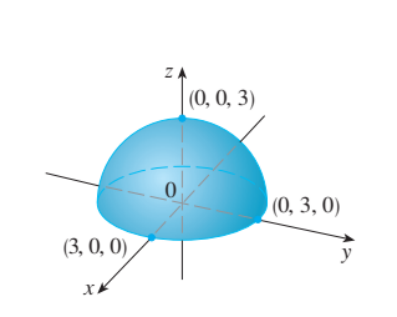
Hàm có dạng $f(x, y) = ax + by + c$ được gọi là một **hàm tuyến tính 2 biến**. Đồ thị của nó là mặt phẳng có phương trình $ax + by - z + c = 0$.

Ví dụ 1.5

Phác họa đồ thị của hàm $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Giải.

Đồ thị của hàm g có phương trình
$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \implies z^2 = 9 - x^2 - y^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
Đó chính là mặt cầu có tâm tại $(0, 0, 0)$ và bán kính là 3. Tuy nhiên, do $z \geq 0$ nên đồ thị của g chỉ là nửa trên của mặt cầu.



□

Như ta thấy ở ví dụ trên:

Chú ý 1.1

Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ không thể biểu diễn bằng 1 hàm với 2 biến x, y. Trên thực tế, nửa trên của mặt cầu này biểu diễn bởi hàm $z = \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$, còn nửa dưới của mặt cầu này biểu diễn bởi hàm $z = -\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$.

Các đường mức (Level curves)

Bên cạnh đồ thị, một phương pháp khác để biểu diễn hàm 2 biến là dùng **bản đồ đường viền** (contour map) mà trên đó các điểm có cùng độ cao được nối với nhau bằng các *đường viền (contour lines)* hay các *đường mức (level curves)*.

Định nghĩa 1.3

*Các **đường mức** của hàm 2 biến $f(x, y)$ là các đường cong có các phương trình $f(x, y) = k$, trong đó k là một hằng số trong tập giá trị của f.*

Liên hệ giữa các đường mức và đồ thị của hàm

Các đường mức của hàm $f(x, y)$ chính là các vết (trace) của đồ thị của f trên mặt phẳng nằm ngang $z = k$ sau khi được chiếu lên mặt phẳng $0xy$. Do đó khi ta vẽ các đường mức của hàm $f(x, y)$ và hình dung chúng được nâng lên thành theo một độ cao tương ứng, thì ta có thể hình dung được đồ thị của f. Đồ thị sẽ dốc khi các đường mức dày, còn sẽ bằng phẳng khi các đường mức thưa nhau.

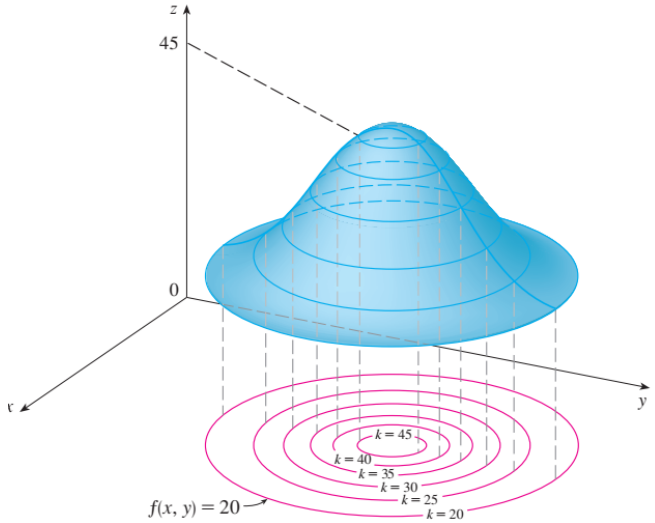
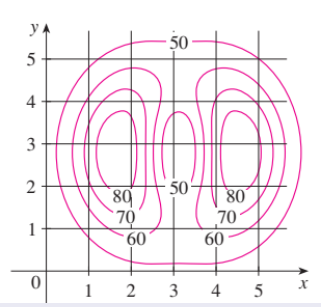


Figure: Các đường mức của 1 hàm $f(x, y)$ và đồ thị của nó.

Ví dụ 1.6

Một bản đồ đường viền của một hàm $f(x, y)$ được cho như hình dưới đây. Hãy ước lượng giá trị của $f(1, 3)$ và $f(4, 5)$.



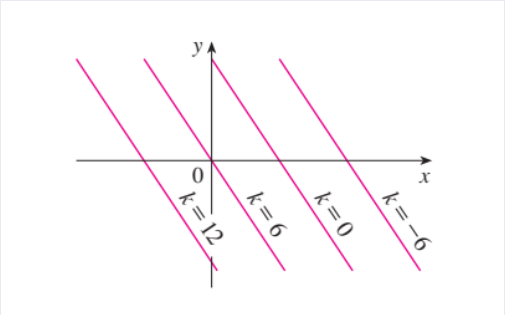
Giải: Ta thấy điểm $(1, 3)$ nằm giữa hai đường mức $f(x, y) = 70$ và $f(x, y) = 80$. Dựa vào tỉ lệ, ta có thể ước lượng $f(1, 3) \approx 73$. Tương tự, $f(4, 5) \approx 56$.

Ví dụ 1.7

Vẽ các đường mức của hàm $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ *khi* $k = -6, 0, 6, 12$.

Giải.

Đường mức $f(x, y) = 6 - 3x - 2y = k \Leftrightarrow 3x + 2y + (k - 6) = 0$ là một đường thẳng có hệ số góc là $-3/2$.
Ta vẽ được các đường mức khi $k = -6, 0, 6, 12$ như sau:



□

Ví dụ 1.8

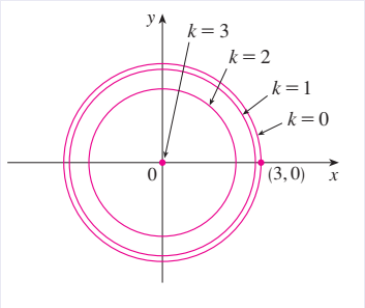
Vẽ các đường mức của hàm $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ *khi* $k = 0, 1, 2, 3$.

Giải.

Các đường mức của g là:

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \implies x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

với $0 \leq k \leq 3$.
Đó chính là các đường tròn tâm $(0, 0)$, bán kính $\sqrt{9 - k^2}$.
Khi $k = 0, 1, 2, 3$ ta vẽ được các đường mức như sau:

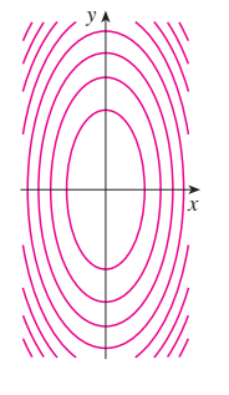


Ví dụ 1.9

Phác họa 1 vài đường mức của hàm $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

Giải.

Các đường mức của f có phương trình
$4x^2 + y^2 + 1 = k \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}(k-1)} + \frac{y^2}{k-1} = 1$ với $k > 1$.
Do đó các đường mức của f chính là các ellipse với các tiêu cự là $\frac{1}{2}\sqrt{k-1}$ và $\sqrt{k-1}$.



□

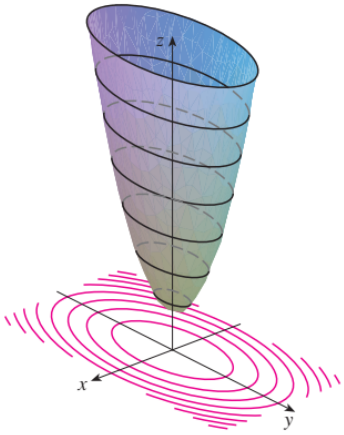


Figure: Đồ thị và các đường mức của $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$.

Hình bên thể hiện đồ thị của f nhận được khi nâng các đường mức của f lên các độ cao tương ứng. Đó là một mặt elliptic paraboloid.

3.2. Hàm ba biến hoặc nhiều biến hơn

Một hàm f với n biến là một quy tắc cho tương ứng mỗi bộ n số thực $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ với một và chỉ một số thực được ký hiệu là $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Khi $n = 3$, ta có hàm 3 biến. Ví dụ như, khi nhiệt độ T tại một điểm trên bề mặt Trái Đất phụ thuộc vào vĩ độ x , kinh độ y và cả thời gian t thì ta có T là một hàm 3 biến x, y, t: $T = f(x, y, t)$.

Ví dụ 1.10

Tìm tập xác định của hàm $f(x, y, z) = ln\,(z - y) + xy \sin z$.

Giải.

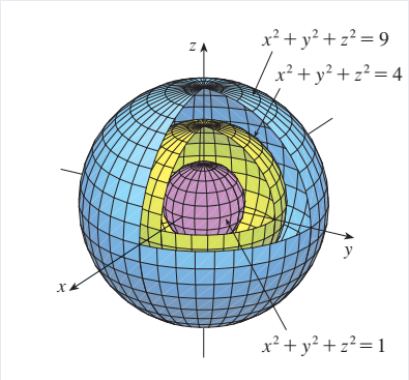
Biểu thức của f có nghĩa khi và chỉ khi $z - y > 0$ hay $y < z$. Vậy $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y < z\}$. (Đó là nửa không gian gồm tất cả các điểm nằm phía trên mặt phẳng $z = y$.) □

Các mặt mức

Rất khó để biểu thị đồ thị của một hàm 3 biến, vì nó sẽ nằm trong không gian 4 chiều. Do đó ta có thể biểu thị đồ thị của hàm 3 biến qua các mặt mức (level surfaces). Các mặt mức của hàm $f(x, y, z)$ là các mặt có phương trình $f(x, y, z) = k$, trong đó k là một hằng số trong tập giá trị của f.

Ví dụ 1.11

Các mặt mức của hàm $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = k$, trong đó $k \geq 0$. Đó chính là các mặt cầu tâm là gốc tọa độ, bán kính là $\sqrt{k}$.



Một ví dụ về hàm n biến là khi một công ty dùng n nguyên liệu để tạo ra một thực phẩm. Cho c_i là chi phí để mua một đơn vị khối lượng nguyên liệu thứ i, x_i là số đơn vị khối lượng của nguyên liệu thứ i cần dùng. Khi đó chi phí cần dùng để tạo ra thực phẩm này là:

$$C = f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n. \qquad (1.1)$$

Nếu ta kí hiệu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \mathbf{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ thì phương trình (1.1) có thể viết lại là $C = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}.\mathbf{x}$, trong đó $\mathbf{c}.\mathbf{x}$ là tích chấm (tích vô hướng thông thường) của 2 vector $\mathbf{c}$ và $\mathbf{x}$

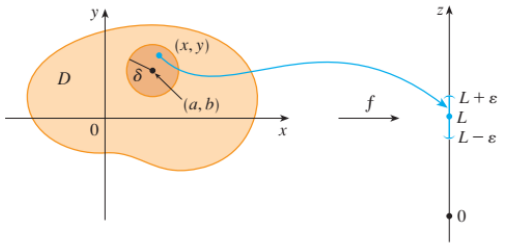
3.3. Giới hạn, tính liên tục của hàm nhiều biến

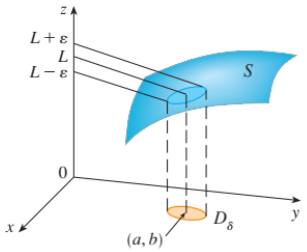
Định nghĩa 2.1

Cho f là một hàm 2 biến mà tập xác định D của nó có chứa các điểm gần (a, b) một cách tùy ý. Khi đó ta nói giới hạn của f khi (x, y) tiến tới (a, b) bằng L nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho nếu $(x, y) \in D$ và $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ thì $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

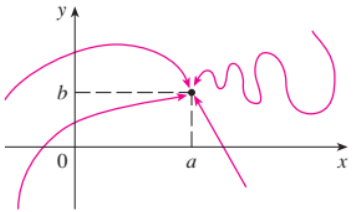
Ta viết: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ *hoặc* $\lim_{x\to a, y\to b} f(x, y) = L$

Ta thấy $|f(x,y) - L|$ chính là khoảng cách giữa 2 số $f(x,y)$ và L, còn $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ chính là khoảng cách giữa 2 điểm (x,y) và (a,b). Định nghĩa trên nói rằng khoảng cách giữa 2 số $f(x,y)$ và L có thể làm cho nhỏ tùy ý khi khoảng cách giữa 2 điểm (x,y) và (a,b) đủ nhỏ (nhưng vẫn lớn hơn 0).





Với hàm một biến, khi $x \to a$ chỉ có 2 hướng để x tiến tới a, đó là từ bên trái hoặc từ bên phải. Ta đã biết rằng khi $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ thì $\lim_{x\to a} f(x)$ không tồn tại.
Với hàm 2 biến thì tình huống phức tạp hơn vì (x, y) có thể tiến tới (a, b) theo vô số hướng khác nhau như hình minh họa sau:



Định nghĩa 1 chỉ nói đến khoảng cách giữa (x, y) và (a, b), không nói đến (x, y) tiến tới (a, b) theo hướng nào. Do đó khi $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ tồn tại thì cho dù (x, y) tiến tới (a, b) theo hướng nào, thì $f(x, y)$ cũng chỉ tiến đến cùng một giá trị. Như vậy, nếu như ta có thể tìm được 2 đường đi mà $(x, y) \to (a, b)$ theo 2 đường đi này cho ta 2 giới hạn khác nhau của $f(x, y)$, thì $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ không tồn tại.

Ví dụ 2.1

Chứng minh rằng $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *không tồn tại.*

Giải.

Đặt $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Đầu tiên, cho $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo trục $0x$, tức là $y = 0$. Ta có $f(x, y) \to 1$.
Tiếp theo, cho $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo trục $0y$, tức là $x = 0$. Ta được $f(x, y) \to -1$.
Vậy không tồn tại $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. □

Ví dụ 2.2

Nếu $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *thì có tồn tại* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *không?*

Chứng minh.

Nếu ta cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục $0x$ ta được $f(x,y) \to 0$.
Nếu ta cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục $0y$ ta cũng được $f(x,y) \to 0$. Nhưng điều đó vẫn không có nghĩa là giới hạn trên tồn tại.
Thật vậy, cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = x$ ta được $\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x} f(x,y) = \lim_{x\to 0,y=x} \frac{x^2}{2x^2} = 1/2 \neq 0$.
Vậy không tồn tại $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

□

Ví dụ 2.3

Nếu $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, *thì có tồn tại* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *không?*

Giải.

Cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = x$ ta được
$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = 0.$
Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo hướng của đường parabol $x = y^2$ ta được
$\lim_{(x,y)\to(0,0),x=y^2} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+1} = 1/2.$
Vậy không tồn tại $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. □

Ví dụ 2.3

Nếu $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, *thì có tồn tại* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *không?*

Giải.

Cho $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = x$ ta được
$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = 0.$
Cho $(x,y) \to (0,0)$ theo hướng của đường parabol $x = y^2$ ta được
$\lim_{(x,y)\to(0,0),x=y^2} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+1} = 1/2.$
Vậy không tồn tại $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. □

Ví dụ 2.4

Tìm $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ *nếu tồn tại.*

Giải: Đặt $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

Nếu cho $(x,y) \to (0,0)$ theo hướng của đường thẳng $y = ax$ với a tùy ý, ta đều được $f(x,y) \to 0$.

Nếu cho $(x,y) \to (0,0)$ theo hướng các parabol $y = x^2$ hoặc $x = y^2$ ta cũng được giới hạn của f bằng 0. Do đó ta dự đoán giới hạn tồn tại và chứng minh nó bằng 0.

Cho $\varepsilon > 0$. Ta muốn tìm $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ thì $|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}| < \varepsilon$.

Vì $x^2 \le x^2 + y^2 \implies \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$.Do đó:

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le 3|y| = 3\sqrt{y^2} \le 3\sqrt{x^2+y^2}. \tag{0.1}$$

Như vậy, nếu chọn $\delta = \varepsilon/3$ và cho $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ thì $\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\varepsilon/3 = \varepsilon$.

Do đó theo định nghĩa giới hạn, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Đối với hàm 2 biến, khi các giới hạn tồn tại ta cũng có

Định lý 2.1

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)\pm g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y). \tag{0.2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y). \tag{0.3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$$

$$(khi\ g(x,y) \neq 0, \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0) \tag{0.4}$$

Tính liên tục

Định nghĩa 2.2

*Hàm 2 biến $f(x, y)$ được gọi là **liên tục** tại điểm (a, b) nếu*
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$
*Ta nói f **liên tục trên tập** D nếu f liên tục tại mọi điểm trên D.*

Ta có thể hình dung việc f liên tục tại điểm (a, b) có nghĩa là khi (x, y) thay đổi một chút, trong lân cận của (a, b) thì $f(x, y)$ cũng chỉ thay đổi một chút, vẫn nằm trong lân cận của $f(a, b)$. Tức là đồ thị của hàm $f(x, y)$ không có điểm gián đoạn.

Chú ý 2.1

Theo định lý 2.1 ta có tổng, hiệu, tích và thương của các hàm liên tục cũng là các hàm liên tục.

Tính liên tục

Định nghĩa 2.2

*Hàm 2 biến $f(x, y)$ được gọi là **liên tục** tại điểm (a, b) nếu*
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$
*Ta nói f **liên tục trên tập** D nếu f liên tục tại mọi điểm trên D.*

Ta có thể hình dung việc f liên tục tại điểm (a, b) có nghĩa là khi (x, y) thay đổi một chút, trong lân cận của (a, b) thì $f(x, y)$ cũng chỉ thay đổi một chút, vẫn nằm trong lân cận của $f(a, b)$. Tức là đồ thị của hàm $f(x, y)$ không có điểm gián đoạn.

Chú ý 2.1

Theo định lý 2.1 ta có tổng, hiệu, tích và thương của các hàm liên tục cũng là các hàm liên tục.

Hàm đa thức, hàm hữu tỉ

Một hàm đa thức (hay đa thức) với 2 biến x, y là một tổng các số hạng có dạng $cx^m y^n$, trong đó c là một hằng số và m, n là các số nguyên không âm.
Một **hàm hữu tỉ** là thương của các hàm đa thức.

Ví dụ 2.5

$f(x, y) = x^4 + 5xy^2 + 6y^3 - 7xy + 6$ là một hàm đa thức với 2 biến x, y, còn $g(x, y) = \frac{4x^5y^3 - 3x^2y + 2y - 1}{5x^3y^2 + xy^4 - x^2y + 2x - 8}$ là một hàm hữu tỉ với 2 biến x, y.

Dễ thấy $\lim \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c = c$, trong đó c là một hằng số.
Do đó các hàm $f(x,y) = x, g(x,y) = y, h(x,y) = c$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Mà các hàm đa thức được tạo từ tích và tổng của các hàm f, g, h, nên các hàm đa thức cũng liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Mỗi hàm hữu tỉ liên tục trên tập xác định của nó vì nó là thương của các hàm đa thức.

Ví dụ 2.6

Tính $\lim \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y.$

Giải.

Hàm $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ là một hàm đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Do đó $\lim \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y = f(1,2) = 1^2 \times 2^3 - 1^3 \times 2^2 + 3 \times 1 + 2 \times 2 = 11.$ □

Ví dụ 2.7

Hàm $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *liên tục trên tập xác định của nó, tức là trên tập* $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ví dụ 2.8

Cho hàm $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ nếu } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 \text{ nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Hàm g *xác định tại* $(0,0)$ *nhưng nó không liên tục tại* $(0,0)$ *vì không tồn tại* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *(xem Ví dụ 2.1).*

Ví dụ 2.7

Hàm $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *liên tục trên tập xác định của nó, tức là trên tập* $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ví dụ 2.8

Cho hàm $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ nếu } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 \text{ nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Hàm g xác định tại $(0,0)$ *nhưng nó không liên tục tại* $(0,0)$ *vì không tồn tại* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *(xem Ví dụ 2.1).*

Ví dụ 2.9

Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \text{ nếu } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 \text{ nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Hàm f liên tuc tại mọi điểm $(x,y) \neq (0,0)$ *vì nó là hàm phân thức. Tại* $(0,0)$ *ta cũng có f liên tục vì* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ *theo Ví dụ 2.4.)*

Hàm hợp của hàm 2 biến

Cho $f : A \to B$ là 1 hàm 2 biến và $g : B \to C$ là một hàm một biến. Khi đó hàm hợp (hợp thành) của f và g là $h = g \circ f : A \to C$ được xác định bởi $h(x, y) = g(f(x, y))$.

Chú ý 2.2

Nếu f là hàm liên tục trên A, g liên tục trên B thì $h = g \circ f$ cũng là hàm liên tục trên A.

Ví dụ 2.10

Tại đâu thì $h(x, y) = \arctan(y/x)$ liên tục?

Giải.

Ta có $f(x, y) = y/x$ liên tục tại mọi điểm (x, y) mà $x \neq 0$.
$g(z) = \arctan z$ liên tục tại mọi x.
Do đó $h = g \circ f$ liên tục tại mọi (x, y) mà $x \neq 0$. □

Hàm hợp của hàm 2 biến

Cho $f : A \to B$ là 1 hàm 2 biến và $g : B \to C$ là một hàm một biến. Khi đó hàm hợp (hợp thành) của f và g là $h = g \circ f : A \to C$ được xác định bởi $h(x, y) = g(f(x, y))$.

Chú ý 2.2

Nếu f là hàm liên tục trên A, g liên tục trên B thì $h = g \circ f$ cũng là hàm liên tục trên A.

Ví dụ 2.10

Tại đâu thì $h(x, y) = \arctan(y/x)$ liên tục?

Giải.

Ta có $f(x, y) = y/x$ liên tục tại mọi điểm (x, y) mà $x \neq 0$.
$g(z) = \arctan z$ liên tục tại mọi x.
Do đó $h = g \circ f$ liên tục tại mọi (x, y) mà $x \neq 0$. □

Giới hạn và tính liên tục của hàm n biến

Định nghĩa 2.3

Cho $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *là một hàm với* n *biến* $x_1, x_2, ..., x_n$. *Đặt* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Ta nói $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ *nếu với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *sao cho với mọi* $\mathbf{x} \in D$ *mà thỏa mãn* $0 < \| \mathbf{x} - \mathbf{a} \| \leq \delta$ *ta đều có* $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.
Ta nói f *liên tục tại* $\mathbf{a}$ *nếu* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Ví dụ 2.11

Hàm $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$ *là hàm hữu tỉ, liên tục tại mọi điểm* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *mà* $x^2 + y^2 + z^2 \neq 1$, *tức là tại mọi điểm không thuộc mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.