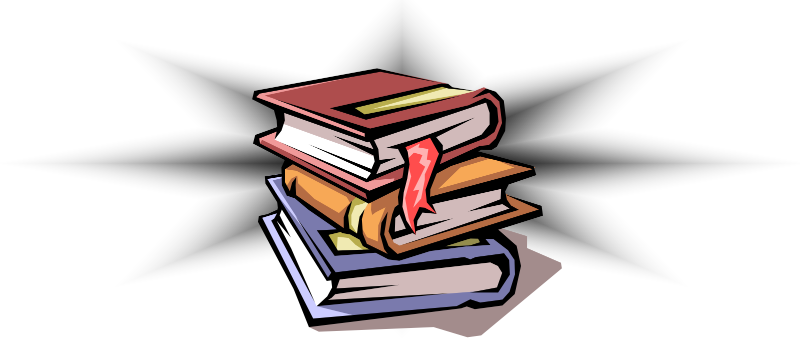
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình sưu tầm



MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI THCS

Ngày 13 tháng 2 năm 2020

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để viết chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới về số học thường được ra trong các kì thi gần đây. Các bài toán về số học thường liên quan đến quan hệ chia hết, số nguyên tố, hợp số, số chính phương, phương trình nguyên, tổ hợp suy luận…

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng chuyên đề về số học sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

Mục Lục

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG

Chương I

QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa phép chia.

Cho hai số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$ ta luôn tìm được hai số nguyên q và r duy nhất sao cho $a = bq + r$, với $0 \le r \le |b|$. Trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương, r là số dư.

Khi a chia cho b thì các số dư $r \in \{0;1;2;3;...;|b|\}$

- Nếu $r = 0$ thì $a = bq$, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b chia hết a. Ký hiệu: $a \,\vdots\, b$ hay $b|a$.

Vậy a chia hết cho b khi và chỉ khi tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

- Nếu $r \neq 0$, khi đó ta nói a chia b có số dư là r.

2. Một số tính chất cần nhớ

- Tính chất 1. Mọi số nguyên khác 0 luôn chia hết cho chính nó.
- Tính chất 2. Số nguyên a chia hết cho số nguyên b và số nguyên b chia hết cho số nguyên c thì số nguyên a chia hết cho số nguyên c.
- Tính chất 3. Số nguyên a chia hết cho số nguyên b và ngược lại thì $a = \pm b$.
- Tính chất 4. Nếu $a.b \,\vdots\, m$ và $(b,m) = 1$ thì $a \,\vdots\, m$.
- Tính chất 5. Nếu hai số nguyên a và b cùng chia hết cho m thì $(a \pm b) \,\vdots\, m$.
- Tính chất 6. Nếu a chia hết cho m và n, trong đó $(m,n) = 1$ thì $a \,\vdots\, mn$.
- Tính chất 7. Nếu số nguyên a chia hết cho số nguyên b và số nguyên c chia hết cho số nguyên d thì tích ac chia hết cho tích bd.
- Tính chất 8. Trong n số nguyên liên tiếp luôn tồn tại một số nguyên chia hết cho n.
- Tính chất 9. Nếu $a - b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên thì $a^n - b^n \,(n \in N)$ chia hết cho $a - b$.
- Tính chất 10. Nếu $a + b \neq 0$ với a, b là các số tự nhiên và n là số tự nhiên lẻ thì $a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$.

3. Một số dấu hiệu chia hết

Đặt $A=\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$, với $a_n;a_{n-1};...;a_2;a_1;a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau.

- Dấu hiệu chia hết cho 2: Số tự nhiên A chia hết cho 2 khi và chỉ khi $a_0\in\{0;2;4;6;8\}$
- Dấu hiệu chia hết cho 5: Số tự nhiên A chia hết cho 5 khi và chỉ khi $a_0\in\{0;5\}$

Từ đó suy ra A chia hết cho 10 khi và chỉ khi $a_0=0$.

- Dấu hiệu chia hết cho 4 và 25: Số tự nhiên A chia hết cho 4(hoặc 25) khi và chỉ khi $\overline{a_1a_0}$ chia hết cho 4 (hoặc 25).
- Dấu hiệu chia hết cho 8 và 125: Số tự nhiên A chia hết cho 8(hoặc 125) khi và chỉ khi $\overline{a_2a_1a_0}$ chia hết cho 8 (hoặc 125).
- Dấu hiệu chia hết cho 3 và 9: Số tự nhiên A chia hết cho 3(hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của số A chia hết cho 3(hoặc 9).
- Dấu hiệu chia hết cho 11: Số tự nhiên A chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số ở hàng lẻ và tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Sử dụng tính chất trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n (n ≥ 1)

*** Cơ sở phương pháp:** Sử dụng các tính chất cơ bản như: tích hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2, tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 và 3 do đó chia hết cho 6. Chúng ta vận dụng linh hoạt các tính chất cơ bản này trong nhiều các bài toán về chia hết.

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) Tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6

b) Tích của 2 số chẵn liên tiếp chia hết cho 8

c) Tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 120

Hướng dẫn giải

a) Trong 3 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 2 nên tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6 (do (2, 3) = 1)

b) Hai số chẵn liên tiếp có dạng 2n và (2n + 2) với $n\in Z$

Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng 4n(n + 1)

Do n và n + 1 là hai số nguyên liên tiếp nên $n(n+1)\,\vdots\,2$

Vì thế $4n(n+1)\,\vdots\,8$

c) Ta có 120 = 3.5.8

Do 5 số nguyên liên tiếp có 3 số liên tiếp nên theo ý a) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

5 số nguyên liên tiếp có 2 số chẵn liên tiếp nên theo ý b) ta có tích 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 8.

Mặt khác 5 số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 5 nên tích chúng cũng chia hết cho 5.

Vậy tích của 5 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 120.

Chú ý: Tổng quát ta có tích của n số tự nhiên liên tiếp chia hết cho n!

Bài toán 2. Chứng minh rằng tích của 3 số chẵn liên tiếp chia hết cho 48

Hướng dẫn giải

Ba số chẵn liên tiếp có dạng 2n, (2n + 2) và (2n + 4) với $n \in Z$

Do đó tích hai số nguyên liên tiếp có dạng 8n(n + 1)(n + 2)

Do n, (n + 1) và (n + 2) là 3 số nguyên liên tiếp nên $n(n+1)(n+2) \vdots 6$

Vì thế $n(n+1)(n+2) = 6m \ (m \in Z)$

Do đó tích của 3 số chẵn liên tiếp là $8n(n+1)(n+2) = 48m \vdots 48$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$$

Biểu thức là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên một trong 3 số chia hết cho 2, và một trong 3 số chia hết cho 3 mà (2, 3) = 1 nên $(n^3 - n) \vdots 6$

Bài toán 4. Chứng minh với mọi số nguyên lẻ n thì $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$n^6 - n^4 - n^2 + 1 = n^4(n^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^4 - 1) = (n^2 - 1)^2 (n^2 + 1)$$

Vì n là số lẻ nên đặt $n = 2k + 1 \ \ (k \in N)$ Ta có:

$$\left(n^2-1\right)^2=\left[\left(2k+1\right)^2-1\right]^2=\left(4k^2+4k\right)^2=\left[4k\left(k+1\right)\right]^2$$

Ta có *k(k + 1)* chia hết cho 2 nên nên $\left[4k\left(k+1\right)\right]^2 \vdots 64$

Mặt khác: $n^2+1=\left(2k+1\right)^2+1=4k^2+4k+2=2\left(2k^2+2k+1\right)\vdots 2$

Do đó $n^6-n^4-n^2+1=\left(n^2-1\right)^2\left(n^2+1\right)\vdots 128$ (đpcm)

Chú ý: Bình phương của một số lẻ là số lẻ

🗁 **Dạng 2: Phân tích thành nhân tử**

* **Cở sở phương pháp:** Để chứng minh *A(x)* chia hết cho *p* ta phân thích *A(x) = D(x).p*, còn nếu không thể đưa ra phân tích như vậy ta có thể viết *p = k.q*

Nếu *(k, q) = 1* ta chứng minh *A(x)* chia hết cho *k* và *q*.

Nếu $\left(k,q\right)\neq 1$ ta viết *A(x) = B(x).C(x)* rồi chứng minh *B(x)* chia hết cho k và *C(x)* chia hết cho *q*.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Thanh Hóa 2016-2017)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=0$

Vì a, b, c $\neq$ 0 nên a + b + c = 0

$\Rightarrow a+b=-c$

$\Rightarrow \left(a+b\right)^3=\left(-c\right)^3$

$\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

Vậy $a^3+b^3+c^3 \vdots 3$ với a, b, c $\in Z$

Bài toán 2. Cho $A=1.2.3......29,$ $B=30.31.32.....58.$

Chứng minh rằng A + B chia hết cho 59.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$B = (59-29)(59-28)(59-27)...(59-1) = 59k - 1.2.3....29 = 59k - A \;\; (k \in Z) \Rightarrow A + B = 59k \vdots 59$

Vậy A + B chia hết cho 59.

Bài toán 3. Cho 3 số nguyên dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \text{ chia hết cho } 5(x-y)(y-z)(z-x)$$

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x - y, b = y - z \Rightarrow z - x = -(a+b)$

Do đó ta cần chứng minh: $a^5 + b^5 - (a+b)^5$ chia hết cho $-5ab(a+b)$

Ta có: $a^5 + b^5 - (a+b)^5 = -(5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4)$

$= -5ab(a^3 + b^3 + 2a^2b + 2ab^2)$

$= -5ab\left[(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a+b)\right]$

$= -5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)$

Do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với ba số tự nhiên a,b,c trong đó có đúng một số lẻ và hai số chẵn ta luôn có $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (a-b+c)^3$ Chia hết cho 96

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Phú Thọ 2015)

Hướng dẫn giải

Đặt a + b - c = z; b + c - a = x; a + c - b = y thì x + y + z = a + b + c

Ta có $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(x+z) = 3.2c.2a.2b = 24abc$

Do 3 số a, b, c có 2 số chẵn nên abc chia hết cho 4 do đó 24abc chia hết cho 24.4 = 96

Vậy bài toán được chứng minh.

🗁 **Dạng 3: Sử dụng phương pháp tách tổng**

*** Cở sở phương pháp:** Để chứng minh *A(x)* chia hết cho *p* ta biết đổi *A(x)* thành tổng các hạng tử rồi chứng minh mỗi hạng tử chia hết cho *p.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh m, n là số nguyên ta có:

a) $n\left(n^2+11\right)\vdots 6$ b) $mn\left(m^2-n^2\right)\vdots 6$ c) $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\vdots 6$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $n\left(n^2+11\right)=n^3+11n=n^3-n+12n=\left(n-1\right)n\left(n+1\right)+12n$

Dễ chứng minh: $\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\vdots 6,\ 12n\vdots 6\left(n\in Z\right)$

Do đó: $n\left(n^2+11\right)\vdots 6$

b) Ta có: $mn\left(m^2-n^2\right)=mn\left[\left(m^2-1\right)-\left(n^2-1\right)\right]=mn\left(m^2-1\right)-mn\left(n^2-1\right)$

Do: $mn\left(m^2-1\right)=n\left(m-1\right)m\left(m+1\right)\vdots 6,\ \ mn\left(n^2-1\right)=m\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\vdots 6$

Do đó: $mn\left(m^2-n^2\right)\vdots 6$

c) Ta có: $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)=n\left(n+1\right)\left(n+2+n-1\right)=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)+\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$

Do: $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\vdots 6,\qquad \left(n-1\right)n\left(n+1\right)\vdots 6$

Do đó: $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)\vdots 6$

Chú ý: Tách tổng là phương pháp chứng minh chia hết mà lời giải dễ hiểu, ngắn gọn và đẹp mắt nên thường được trình bày khi bài toán có thể giải bằng nhiều phương pháp, tuy nhiên nhưng để áp dụng các em cần linh hoạt trong việc tách.

Ví dụ: như câu a) thì ta thấy 12n chia hết cho 6 nên ta tách riêng ra phần còn lại chúng ta phân có thể đưa về dạng tích, dựa vào tính chất chia hết của tích các số tự nhiên dễ dàng chứng được cũng chia 6.

Câu b) chúng ta nghĩ việc thêm bớt 1 để tạo ra tổng của hai tích của 3 số tự nhiên liên tiếp.

Tương tự câu c) dễ dàng tách 2n + 1 = (n – 1) + (n + 2) để đưa về tổng của hai tích 3 số tự nhiên tiếp .

Bài toán 2. Chứng minh rằng: n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau với n là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Để chứng minh n và n^5 có chữ số tận cùng giống nhau ta chứng minh $\left(n^5-n\right)\vdots 10$

Thật vậy: $n^5-n=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)=n\left(n^2-1\right)\left[\left(n^2-4\right)+5\right]$

$n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)+5n\left(n^2-1\right)=\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)+5\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$

Nhận xét: $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích của năm số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 5 do đó chia hết cho 10.

Mặt khác $(n-1)n(n+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 nên $5(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 10.

Do đó $(n^5-n)\vdots 10$ vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. a) Chứng minh rằng $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ là số nguyên với mọi $n\in Z$

b) Chứng minh rằng $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ là số nguyên với mọi n là số nguyên chẵn

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\frac{7n}{15}=n-\frac{8n}{15}=n-\frac{n}{5}-\frac{n}{3}$

Do đó: $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+n-\frac{n}{5}-\frac{n}{3}=\frac{n^5-n}{5}+\frac{n^3-n}{3}+n$

Từ các thí dụ trên ta dễ dàng chứng minh được: $(n^5-n)\vdots 5,(n^3-n)\vdots 3$ do đó bài toán được chứng minh.

b) Do n là số nguyên chẵn nên n = 2m (với $m\in Z$)

Do đó: $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}=\frac{m}{6}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{3}=\frac{2m^3+3m^2+m}{6}=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

Theo ý c) thí dụ 6 ta có $n(n+1)(2n+1)\vdots 6$ do đó bài toán được chứng minh.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $ax^2+bx+c\in Z,\forall x\in Z$ khi và chỉ khi $2a,a+b,c\in Z$

Hướng dẫn giải

Ta có: $ax^2+bx+c=ax^2-ax+(a+b)x+c=2a.\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c.$

Dễ thấy: $\frac{x(x-1)}{2}\in Z$ vì x và $(x-1)$ là hai số nguyên liên tiếp.

Do đó: $ax^2+bx+c\in Z,\forall x\in Z$ khi và chỉ khi $2a,a+b,c\in Z$.

Bài toán 5. Cho các số nguyên $a_1;a_2;...;a_n$. Đặt $A=a_1+a_2+...+a_n$ và $B=a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Với mọi số nguyên a ta luôn có $a^3-a\vdots 6$.

Thật vậy, ta có $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$.

Ta thấy trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 2 và có một số chia hết cho 3, lại có 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên ta suy ra được $a^3 - a = (a-1)a(a+1) \vdots 6$. Xét hiệu sau

$$B - A = \left(a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3\right) - \left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right) = \left(a_1^3 - a_1\right) + \left(a_2^3 - a_2\right) + ... + \left(a_n^3 - a_n\right)$$

Áp dụng bổ đề trên ta được $\left(a_1^3 - a_1\right) \vdots 6$; $\left(a_2^3 - a_2\right) \vdots 6$; ...; $\left(a_n^3 - a_n\right) \vdots 6$

Do đó ta được $B - A \vdots 6$. Suy ra A chia hết cho 6 khi và chỉ khi B chia hết cho 6.

🗁 Dạng 4: Sử dụng hằng đẳng thức

Cở sở phương pháp: Nếu *a, b* là các số nguyên thì:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với n là số tự nhiên và $a \neq b$.

$a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$ với n là số tự nhiên chẵn và $a \neq -b$.

$a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ với n là số tự nhiên lẻ và $a \neq -b$.

$(a+b)^n = ka + b^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên.

$(a+1)^n = ac + 1$ $\quad (a-1)^n = ac + (-1)^n$, n là số tự nhiên.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Với n là số tự nhiên chẵn. Chứng minh rằng:

a) $22^{22} + 55^{55}$ $\qquad$ b) $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $P = 22^{22} + 55^{55} = (21+1)^{22} + (56-1)^{55} = (BS\ 7 + 1)^{22} + (BS\ 7 - 1)^{55}$

= BS 7 + 1 + BS 7 – 1 = BS 7 nên $22^{22} + 55^{55}$ chia 7 dư 0

b) Ta có: $323 = 17.19$. Ta biến đổi $20^n + 16^n - 3^n - 1 = \left(20^n - 1\right) + \left(16^n - 3^n\right)$

Ta có: $\left(20^n - 1\right) : (20-1) \Rightarrow \left(20^n - 1\right) \vdots 19$

Mặt khác n là số chẵn nên $\left(16^n - 3^n\right) \vdots (16+3) \Rightarrow \left(16^n - 3^n\right) \vdots 19$

Do đó $\left(20^n - 1\right) + \left(16^n - 3^n\right) \vdots 19 \Rightarrow \left(20^n + 16^n - 3^n - 1\right) \vdots 19$ $\quad (1)$

Ta biến đổi $20^n + 16^n - 3^n - 1 = \left(20^n - 3^n\right) + \left(16^n - 1^n\right)$

Ta có: $\left(20^n - 3^n\right) : (20-3) \Rightarrow \left(20^n - 1\right) \vdots 17$

Mặt khác n là số chẵn nên $\left(16^n - 1^n\right) \vdots (16+1) \Rightarrow \left(16^n - 3^n\right) \vdots 17$ (2)

Do (17, 19) =1 nên từ (1) và (2) suy ra: $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$ b) $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$ c) $7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2.11^n + 12.12^{2n} = 121.11^n + 12.144^n$

$$= (133-12).11^n + 12.144^n = 133.11^n + 12(144^n - 11^n)$$

Do đó $133.11^n \vdots 133$ và $12(144^n - 11^n) \vdots (144-11)$ hay $12(144^n - 11^n) \vdots 133$

Nên $133.11^n + 12(144^n - 11^n) \Rightarrow 11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$ (đpcm)

b) Ta có: $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} = 51.5^n + 8.64^n$

$= (59-8).5^n + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$

Vì $(64^n - 5^n) \vdots (64-5) \Rightarrow (64^n - 5^n) \vdots 59$

Nên $59.5^n + 8(64^n - 5^n) \vdots 59 \Rightarrow 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$ (đpcm)

c) Ta có: $7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + (19-7).6^n = 19.6^n + 7(25^n - 6^n)$

Vì $(25^n - 6^n) \vdots (25-6) \Rightarrow 7(25^n - 6^n) \vdots 19$

Nên $19.6^n + 7(25^n - 6^n) \vdots 19 \Rightarrow 57.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19$ (đpcm)

Bài toán 3. Chứng minh rằng $A = 1993^{1997} + 1997^{1993} \vdots 30$

Hướng dẫn giải

Sử dụng tính chất $(a+b)^n = ka + b^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên.

Ta có:

$$A = 1993^{1997} + 1997^{1993} = (1980+13)^{1997} + (2010-13)^{1993}$$
$$= 1980c + 13^{1997} + 2010d - 13^{1993}$$
$$= 1980c + 2010d + 13^{1993}(13^4)$$
$$= 30(66c + 67d + 952.13^{1993}) \vdots 30.$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng $C = 5^n(5^n+1) - 6^n(3^n+2^n) \vdots 91$ $(n \in N)$.

(Chuyên sư phạm Hà Nội 1997 – 1998)

Hướng dẫn giải

Sử dụng tính chất $(a+b)^n = ka + b^n$, $(a+1)^n = ac+1$, $(a-1)^n = ac + (-1)^n$ với k là số nguyên, n là số tự nhiên

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= 25^n + 5^n - 18^n - 12^n \\ &= (21+4)^n + 5^n - (14+4)^n - (7+5)^n \\ &= 21c + 4^n + 5^n - 14d - 4^n - 7e - 5^n \\ &= 7(3c - 2d - e) \vdots 7. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} C &= (26-1)^n + 5^n - (13+5)^n - (13-1)^n \\ &= 26f + (-1)^n + 5^n - 13g - 5^n - 13h - (-1)^n \\ &= 13(2f - g - h) \vdots 13. \end{aligned}$$

Vì (13, 7) = 1 nên $C \vdots 7.13 = 91$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng: $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + 100$

Hướng dẫn giải

Ta có B = (1 + 100) + (2 + 99) + …+ (50 + 51) = 101.50

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + ... + (50^3 + 51^3) \\ &= (1+100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2+99)(2^2 + 2.99 + 99^2) + ... + (50+51)(50^2 + 50.51 + 51^3) \\ &= 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2.99 + 99^2 + ... + 50^2 + 50.51 + 51^2) \vdots 101 \text{ (1)} \end{aligned}$$

Ta lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + ... + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chia hết cho B.

Bài toán 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n ta có: $A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

(Chuyên sư phạm Hà Nội 2001)

Hướng dẫn giải

Ta có công thức quen thuộc $B = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lại có: $2A = (n^5+1) + \left[(n-1)^5 + 2^5\right] + \left[(n-2)^5 + 3^5\right] + ... + (1+n^5)$

Nhận thấy mỗi số hạng đều chia hết cho (n +1) nên $2A \vdots (n+1) \quad (1)$

Lại có $2A - 2n^5 = \left[(n-1)^5 + 1^5\right] + \left[(n-2)^5 + 2^5\right] + ...$ chia hết cho n

Do $2n^5 \vdots n$ nên $2A \vdots n \quad (2)$

Do $2n^5 \vdots n$ nên $2A \vdots n \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra 2A chia hết cho $n(n+1)$ do đó $2A \vdots 2B \Rightarrow A \vdots B$ (đpcm)

Chú ý: Ta có công thức tổng quát: với n là số nguyên dương và k là số tự nhiên lẻ thì:

$a) 1^k + 2^k + ... + n^k \vdots (1+2+...+n)$

$b) 1^k + 2^k + ... + (2k)^k \vdots n(2n+1)$

Đây cũng là một bài tập, bạn đọc có thể tự chứng minh để củng cố kiến thức.

🗁 **Dạng 5: Sử dụng phương pháp xét số dư**

*** Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho p ta xét số n có dạng $n = kp + r$ với $r \in \{0;1;2;...;p-1\}$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n(2n^2+7)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n(2n^2+7) = 3k\left[2(3k)^2+7\right] = 3k(18k^2+7) \vdots 3$

- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì

$$n(2n^2+7) = (3k+1)\left[2(3k+1)^2+7\right]$$
$$= (3k+1)\left[18k^2+12k+2+7\right] = 3(3k+1)(6k^2+4k+3) \vdots 3$$

- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì

$$n(2n^2+7) = (3k+2)\left[2(3k+2)^2+7\right]$$
$$= (3k+2)\left[18k^2+24k+8+7\right] = 3(3k+2)(6k^2+8k+5) \vdots 3$$

Từ 3 trường hợp trên suy ra $n(2n^2+7)$ chia hết cho 3.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $n(2n+7)(7n+1)$ chia hết cho 6

Hướng dẫn giải

Trong 2 số n và (7n + 1) phải có một số chẵn nên $n(2n+1)(7n+1)\vdots 2$

Mà (3, 2) = 1 nên ta chỉ cần chứng minh $n(2n+1)(7n+1)\vdots 3$

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n(2n+1)(7n+1) = 3k(6k+1)(21k+1)\vdots 3$

- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì $2n+7 = (6k+9)\vdots 3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1)\vdots 3$

- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì $7n+1 = (21k+15)\vdots 3 \Rightarrow n(2n+7)(7n+1)\vdots 3$

Từ 3 trường hợp trên suy ra n(2n + 7)(7n + 1) chia hết cho 6.

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $(a^3+b^3+c^3)\vdots 9$ thì một trong ba số a, b, c chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Với a, b, c là các số nguyên khi đó ta có $a = 3q_1 + r_1; b = 3q_2 + r_2; c = 3q_3 + r_3$ với $q_1; q_2; q_3$ là các số nguyên và các số dư $r_1; r_2; r_3 \in \{-1;0;1\}$.

Dễ thấy $r_1^3 = r_1; r_2^3 = r_1; r_3^3 = r_1$. Từ đó ta được

$$a^3 = (3q_1 + r_1)^3 = 9k_1 + r_1; b^3 = (3q_2 + r_2)^3 = 9k_2 + r_1; c^3 = (3q_3 + r_3)^3 = 9k_3 + r_3$$

Khi đó ta được $a^3 + b^3 + c^3 = 9(k_1 + k_2 + k_3) + (r_1 + r_2 + r_3)$.

Mà theo giả thiết ta có $(a^3+b^3+c^3)\vdots 9$. Do đó nên ta suy ra $(r_1 + r_2 + r_3)\vdots 9$.

Dễ thấy $|r_1 + r_2 + r_3| \le 3$, do đó suy ra $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

Do $r_1; r_2; r_3 \in \{-1;0;1\}$ nên từ $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ suy ra trong $r_1; r_2; r_3$ có một số bằng 0. Điều này có nghĩa là trong ba số a, b, c có một số chia hết cho 3.

Bài toán 4. Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z \quad (*)$

Chứng minh rằng $(x+y+z)$ chia hết cho 27

Hướng dẫn giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu 3 số x, y, z chia cho 3 có số dư khác nhau thì (x – y), (y – z), (z – x) sẽ đều không chia hết cho 3 do đó (x – y)(y – z)(z – x) sẽ không chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số (x + y + z) sẽ chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bài toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

- Nếu 3 số x, y, z có 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư thì (x – y), (y – z), (z – x) sẽ có một hiệu chia hết cho 3 do đó (x – y)(y – z)(z – x) sẽ chia hết cho 3. Nhưng khi đó tổng của 3 số (x + y + z) sẽ không chia hết cho 3 điều này trái với điều kiện (*) của bày toán, vì thế trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy 3 số x, y, z chia cho 3 phải cùng số dư, khi đó (x – y), (y – z), (z – x) sẽ đều chia hết cho 3 nên tích (x – y)(y – z)(z – x) sẽ chia hết cho 27. Mặt khác theo giả thiết (*) ta có (x – y)(y – z)(z – x) = x + y + z nên (x + y + z) chia hết cho 27.

Vậy bài toán được chứng minh.

🗁 Dạng 6: Sử dụng phương pháp phản chứng

*** Cơ sở phương pháp:** Để chứng minh $A(x)$ không chia hết cho n ta giả sử $A(x)$ chia hết cho n sau đó dùng lập luận để chỉ ra mâu thuẩn để chỉ ra điều giả sử là sai.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng n^2+n-16 không chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải

Giả sử n^2+n-16 chia hết cho 25.

Do n^2+n-16 chia hết cho 25 nên cũng chia hết cho 5.

Ta có: $n^2+n-16=(n+3)(n-2)-10$

Do n^2+n-16 và 10 chia hết cho 5 nên (n + 3)(n – 2) chia hết cho 5 (1)

Mặt khác (n + 3) và (n – 2) có hiệu bằng 5 nên chúng cùng chia hết cho 5 hoặc cùng không chia hết cho 5, lại do (1) nên (n + 3) và (n – 2) cùng chia hết cho 5 suy ra ta có (n + 3)(n – 2) chia hết hết cho 25.

Tức là n^2+n-16 chia cho 25 dư 15 mâu thuẫn với giả sử, vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, n^3 chia hết cho 3 thì n cũng chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Giả sử n không chia hết cho 3. Khi đó n có dạng n = 3k +1 hoặc n = 3k + 2 (với k là số tự nhiên)

Nếu n = 3k + 1 thì $n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ không chia hết cho 3

Nếu n = 3k + 2 thì $n^3 = (3k+2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 4$ không chia hết cho 3

Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn suy ra n phải choa hết cho 3 vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh 2 số dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì mỗi số đều phải chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Giả sử 2 số nguyên dương a, b có ít nhất một số không chia hết cho 3, chẳng hạn số đó là a. Khi đó a = 3k + 1 hoặc a = 3k + 2 với k là số tự nhiên, ta có $a^2 = 3l + 1$ nếu số b chia hết cho 3 hoặc không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ luôn có dạng 3m + 1 hoặc 3m +2, nghĩa là không chia hết cho 3, mâu thuẫn.

Vậy bài toán được chứng minh.

Dạng 7: Sử dụng phương pháp quy nạp

* **Cơ sở phương pháp:** Để kiểm tra mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \ge p$ ta làm như sau:

1) Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.

2) Giả sử mệnh đề đúng mới $n = k$ **(Giải thiết quy nạp)**

3) Chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Nhận xét: Trong việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp các bạn cần khai thác triệt để **giả thiết quy nạp** (là mệnh đề chia hết khi n = k), tức là trong quá trình giải bài toán ở bước chứng n = k + 1 các bạn phải biến đổi làm sao xuất hiện **giả thiết quy nạp**.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n(2n^2+7)$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

Với n = 1 thì ta có: $n(2n^2+7) = 1.(2+7) = 9 \vdots 3$, do đó bài toán đúng với n = 1

Giải sử bài toán đúng đến $n = k$ với $k \ge 1, k \in N$ tức là:

$$k(2k^2+7) \vdots 3 \text{ hay } k(2k^2+7) = 3x\left(x \in N^*\right),$$

Ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$(k+1)\left[2(k+1)^2+7\right]=(n+1)(2n^2+4n+9)$$
$$=2n^3+4n^2+9n+2n^2+4n+9$$
$$=(2n^3+7n)+(6n^2+6n+9)$$
$$=3x+3(2n^2+2n+3)=3y\vdots 3$$

Do đó $n(2n^2+7)$ chia hết cho 3 với $n=k+1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng $4^n+15n-1$ chia hết cho 9 với mọi $n\in N^*$

Hướng dẫn giải

Với $n=1$ thì ta có: $A=18$ chia hết cho 9, do đó bài toán đúng với $n=1$

Giải sử bài toán đúng đến $n=k$ với $k\ge 1, k\in N$ tức là:

$4k^2+15k-1\vdots 9$ hay $4k^2+15k-1=9x$ $(x\in N^*)\Leftrightarrow 4k^2=9x-15k+1$,

ta sẽ cần chứng minh bài toán đúng với $n=k+1$. Thật vậy:

$$4^{k+1}+15(k+1)-1=4.4^k+15k+14$$
$$=4(9x-15k+1)+15k+14$$
$$=36x-45k+18\vdots 9$$

Do đó $A=4n^2+15n-1$ chia hết cho 9 với $n=k+1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $5^{2n}+7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n.

Hướng dẫn giải

- Với $n=1$, khi đó ta có $5^2+7=32\vdots 8$ (đúng)
- Giả sử mệnh đề đúng với , tức là ta có $5^{2n}+7\vdots 8$.
- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n+1$. Thật vậy, ta có

$$5^{2(n+1)}+7=25.5^{2n}+7=24.5^{2n}+(5^{2n}+7)$$

Để ý là $5^{2n}+7\vdots 8$ và $24.5^{2n}\vdots 8$. Do đó ta được $5^{2(n+1)}+7\vdots 8$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $5^{2n}+7$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 4. Cho n là một số nguyên dương, Chứng minh rằng: $C=7.2^{2n-2}+3^{2n-1}\vdots 5$ (1)

Hướng dẫn giải

Xét với n = 1 ta có: $C = 10 \vdots 5$. Vậy (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k ($k \ge 1, k \in N$), tức là: $C_k = 7.2^{2k-2} + 3^{2k-1} \vdots 5 \quad (2)$

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh:

$$C_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} \vdots 5$$

Ta có: $C_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} = 7.2^{2k+2-2} + 3^2.3^{2k-1} = 4.7.2^{2k-2} + 9.3^{2k-1}$

$= 4\left(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}\right) + 5.3^{2k-1} = 4.C_k + 5.3^{2k-1} \vdots 5$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được $C = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 5. Chứng minh rằng số được tạo 3^n bởi chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với $n \in N^*$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 toàn quốc năm 1978)

Hướng dẫn giải

Với n = 1, ta có: $\overline{aaa} = 111.a \vdots 3$, Vậy bài toán đúng với n = 1.

Giả sử bài toán đúng đến n = k ($k \ge 1, k \in N$), tức là: $\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^k} \vdots 3^k$

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng đến n = k + 1.

Thật vậy: $\underbrace{\overline{aa...a}}_{3^{k+1}} = \overline{\underbrace{aa..a}_{3^k}\underbrace{aa..a}_{3^k}\underbrace{aa..a}_{3^k}} = \underbrace{\overline{aa..a}}_{3^k} \times 1\underbrace{00...0}_{3^k-1}1\underbrace{00..0}_{3^k-1}1 \vdots 3^{n+1}$

Vậy bài toán được chứng minh.

🗁 Dạng 8: Sử dụng nguyên lý Dirichlet

*** Cơ sở phương pháp:** Đầu tiên ta phải nắm được nguyên lý Dirichle: "Nhốt $m = kn + 1$ con thỏ vào k $(k < n)$ chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $n + 1$ con thỏ"

Áp dụng nguyên lý Dirichle vào bài toán chia hết như sau: "Trong $m = kn + 1$ số có ít nhất $n + 1$ số chia hết cho k có cùng số dư"

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh trong 5 số nguyên bất kì có thể tìm được ba số có tổng chia hết cho 3

Hướng dẫn giải

Một số khi chia cho 3 thì tồn tại 3 loại số dư là: 1, 2 hoặc 3.

Trường hợp 1: Nếu tồn tại cả 3 loại số dư khi chia cho 3 thì:

$$\begin{cases} a_1 = 3k_1 + 0 \\ a_2 = 3k_2 + 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3) + 3 \vdots 3 \\ a_3 = 3k_3 + 2 \end{cases}$$

Trường hợp 2: Chỉ tồn tại hai loại số dư, theo nguyên lý **Dirichlet** trong 5 số nguyên bất kì luôn tồn tại ít nhất 3 số cùng dư khi chia cho 3 suy ra tổng 3 số ấy chia hết cho 3.

Trường hợp 3: Chỉ tồn tài du nhất một loại số dư khi chia hết cho 3 suy ra 3 số tùy ít trong 5 số đó chia hết cho 3.

Bài toán 2. Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$A = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \vdots 12$$

Hướng dẫn giải

Theo nguyên lý **Dirichlet** trong 3 số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số nguyên tùy ý có cùng số dư khi chia hết cho 3 suy ra $A \vdots 3$

Trường hợp 1: cả 4 số đều là số chẵn nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 2: cả 4 số đều là số lẻ nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 3: 2 số chẵn và hai số lẻ nên tồn tại 4 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 4: 3 số chẵn và một số lẻ , từ 3 số chẵn đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Trường hợp 5: 3 số lẻ và một số lẻ, từ 3 số lẻ đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A \vdots 4$

Do đó A cũng chia hết cho 4 mà (3, 4) = 1 nên A chia hết cho 12.

Bài toán 3. Chứng minh trong 101 số nguyên bất kì có thể tìm được hai số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

Hướng dẫn giải

Lấy 101 số nguyên bất kì chia cho 100 thì theo nguyên lý Dirichle có có ít nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 100. Suy ra trong 101 số đã cho tồn tại ít nhất 2 số có 2 chữ số tận cùng giống nhau.

Bài toán 4. Cho 2014 số tự nhiên bất kì $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{2014}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 2014 hoặc tổng một số số chia hết cho 2014.

Hướng dẫn giải

Xét 2014 số: $S_1 = x_1; S_2 = x_1 + x_2; \ldots.; S_{2014} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014}$

Nếu tồn tại S_i với *i = 1, 2, 3, …., 2014* chia hết cho 2014 thì bài toán được chứng minh.

Nếu không tồn tại S_i với *i = 1, 2, 3, …., 2014* chia hết cho 2014. Đem 2014 số này chia cho 2014 nhận được 2014 số dư. Giá trị của các số dư nhận được thuộc vào tập hợp $\{1,2,3,....,2013\}$. Vì 2014 số dư mà chỉ có 2013 giá trị nên theo nguyên lý Dirichlet có 2 số dư bằng nhau.

Kí hiệu hai số đó là S_m, S_n có cùng số dư khi chia cho 2014 $\{m,n \in N, 1 \le n < m \le 2014\}$

Thì hiệu: $S_m - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m$ chia hết cho 2014.

Nhận xét: *Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau: Cho n số tự nhiên* $x_1; x_2; ...; x_n$. *Chứng minh rằng trong n số trên có một số chia hết cho n hoặc một số số có tổng chia hết cho n.*

🗁 Dạng 9: Xét đồng dư

Tóm tắt lý thuyết về đồng dư:

Định nghĩa: Cho *a, b* là số nguyên (*n* là số nguyên dương). Ta nói *a* đồng dư với *b* theo *modun n* và kí hiệu $a \equiv b \pmod{n}$ nếu *a* và *b* có cùng số dư khi chia cho *n.*

Như vậy: $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a-b) \vdots n$ .Ví dụ: $2019 \equiv 9 \pmod{5}$

Một số tính chất cơ bản:

1) Với mọi số nguyên a ta có: $a \equiv a \pmod{n}$

2) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}$

3) $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

4) $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm d) \pmod{n}$

Hệ quả của tính chất 4)

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, ..., a_n \equiv b_n \pmod{n}$$
$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n) \equiv b_1 + b_2 + ... + b_n \pmod{n}$$

5) $a \equiv b \pmod{n}$ **và** $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow a.c \equiv b.d \pmod{n}$

Hệ quả của tính chất 5)

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{n}, a_2 \equiv b_2 \pmod{n}, ..., a_n \equiv b_n \pmod{n}$$
$$\Rightarrow (a_1.a_2....a_n) \equiv b_1.b_2......b_n \pmod{n}$$

6) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}\ \forall n \in N$

7) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và d là ước chung của a và b sao cho $(d, m) = 1$ thì

$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$

8) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và d là ước chung của a, b, m thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$

9) Nếu $a \equiv r \pmod{m}$ và $0 \le r < m$, thì r chính là số dư của phép chia a cho m.

*** Cơ sở phương pháp:** Sử dụng định nghĩa và các tính chất của đồng dư thức để giải bài toán chia hết.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng: A $= 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + 12.6^n$

Do $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19} \Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19}$

Mà $7.6^n + 12.6^n = 19.6^n \vdots 19 \Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \vdots 19 \Rightarrow A = 7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. Chứng hai số: $A = 6^{1000} - 1$ và $B = 6^{1001} + 1$

Chứng minh rằng A và B đều là bội số của 7

Hướng dẫn giải

Ta có: $6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv (-1)^{1000} \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1000} - 1 \vdots 7$

Vậy A là bội của 7.

Từ $6^{1000} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} \equiv 6 \pmod{7}$

Mà $6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 6^{1001} + 1 \vdots 7$

Vậy B là bội của 7.

Bài toán 3. a) A = $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải

a) Xét số dư của 2222^{5555} khi chia cho 7.

Ta có: $2222 \equiv 3 \pmod 7$ (1)

=> $2222^4 \equiv 3^4 \pmod 7$

=> $2222^4 \equiv 81 \pmod 7$

Mà $81 \equiv 4 \pmod 7$

=> $2222^4 \equiv 4 \pmod 7$ (2)

Nhân vế với vế (1) và (2) ta được $2222^5 \equiv 3.4 \pmod 7$

=> $2222^5 \equiv 5 \pmod 7$

=>$2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod 7$ (3)

+ Tương tự: $5555^{2222} \equiv 2^{1111} \pmod 7$ (4)

Cộng vế với vế (3) và (4) ta có: $A \equiv 2^{1111} + 5^{1111} \pmod 7$ (5)

Mặt khác: $2^{1111} + 5^{1111} \equiv (2 + 5) \pmod 7$

$\equiv 0 \pmod 7$ (6)

Từ (5) và (6) ta được: $A \equiv 0 \pmod 7$

Vậy: $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7

b) Ta có:

Ta có: $1961 \equiv 1 \pmod 7$ => $1961^{1962} \equiv 1 \pmod 7$

Tương tự: $1963^{1964} \equiv 3^{1964}\left(\bmod 7\right) \equiv 9.\left(3^3\right)^{654}\left(\bmod 7\right) \equiv 9.27^{654}\left(\bmod 7\right) \equiv 2\left(\bmod 7\right)$

$1965^{1966} \equiv \left(-2\right)^{1966}\left(\bmod 7\right) \equiv 2.\left(2^3\right)^{655}\left(\bmod 7\right) \equiv 2.8^{655}\left(\bmod 7\right) \equiv 2\left(\bmod 7\right)$

$\Rightarrow B \equiv 1+2+2+2\left(\bmod 7\right) \equiv 0\left(\bmod 7\right)$

Vậy: $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 \vdots 7$

Bài toán 4. Tìm số dư của phép chia: $1532^5 - 1$ cho 9.

Hướng dẫn giải

Ta có: $1532 \equiv 2\left(\bmod 9\right) \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \left(\bmod 9\right)$

Mà $2^5 \equiv 5\left(\bmod 9\right) \Rightarrow 1532^5 \equiv 5\left(\bmod 9\right) \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 4\left(\bmod 9\right)$

Vậy số dư của phép chia $1532^5 - 1$ cho 9 là 4.

Dạng 10: Tìm điều kiện biến để chia hết

Bài toán 1.

a) Tìm n nguyên để $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho $B = n^2 - n$

b) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Hướng dẫn giải

a) Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n+3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n-1)$ do đó 2 chia hết cho n, ta có:

n	1	-1	2	-2
n - 1	0	-2	1	-3
n(n – 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy để giá trị biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị biểu thức $B = n^2 - n$ thì n = -1 hoặc n = 2.

b) Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$ được kết quả:

$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$

Để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$

$(4a - 1) \vdots (a^2 + 3)$

$\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1) \vdots (a^2 + 3) (a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a + 1 \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow (16a^2 - 1) \vdots (a^2 + 3)$

$\Rightarrow 49 \vdots (a^2 + 3)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + 3 = 7 \\ a^2 + 3 = 49 \ (\text{loai}) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -2 \end{array}\right.$

Thử lại ta được a = 2 và a = - 2 đều thỏa mãn.

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3$ chia hết cho 10.

Hướng dẫn giải

Ta có: $A = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^3 = 2(2n^2 + 6n + 7)$

$A \vdots 10 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 7 \vdots 5 \Leftrightarrow 2n^2 + 6n + 2 \vdots 5 \Leftrightarrow 2(n^2 + 3n + 1) \vdots 5$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 \vdots 5$

Do đó n(n + 3) có tận cùng là 4 hoặc 0 hay n có tận cùng là 1 hoặc 6

Vậy n có tận cùng bằng 1 hoặc 6 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để (n + 3)(n + 4) chia hết cho 3n.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(n+3)(n+4)\vdots 3n \Leftrightarrow n^2+7n+12\vdots 3n \Leftrightarrow n^2+n+12\vdots 3n$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2+n+12\vdots n & (1) \\ n^2+n+12\vdots 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $12\vdots n \Rightarrow n\in\{1,2,3,4,6,12\}$ (3)

Từ (2) suy ra: $n(n+1)\vdots 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=3k \\ n=3k+2 \end{array}\right.(k\in N)$

Loại các số có dạng n = 3k + 1 ở (1) ta được:

n	2	3	6	12
3n	6	9	18	36
$n^2 + n + 12$	18	24	54	168

Chỉ có n = 2 và n = 6 thì n^2+n+12 chia hết cho 3n do đó: $(n+3)(n+4)\vdots 3n$

Vậy n = 2 và n = 6.

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương x và y lớn hơn 1 sao cho x + 3 chia hết cho y và y + 3 chia hết cho x.

Hướng dẫn giải

Giải sử $2 \le x \le y$.

a) Xét y = 2 thì x = 2, không thỏa mãn x + 3 chia hết cho y.

b) Xét $y \ge 3$. Đặt x + 3 = ky $(k\in N)$ (1) thì $ky = x + 3 \le y + 3 \le y + y = 2y$ nên $k \le 2$.

Với k = 1, từ (1) có x + 3 = y. Thay vào: $y+3\vdots x$ được $x+6\vdots x$ nên lại có x > 1 nên $x\in\{2;3;6\}$.

x	2	3	6
y	5	6	9

Với k = 2, từ (1) có x + 3 = 2y. Thay vào: $y+3\vdots x$ được $2y+6\vdots x \Rightarrow x+9\vdots x \Rightarrow 9\vdots x$

do x > 1 nên $x\in\{3;9\}$.

Khi x = 3 thì y = 3, thử lại đúng.

Khi x = 9 thì y = 6, loại vì trái với x ≤ y.

Các cặp số (x, y) phải tìm là (2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3), (6; 9), (9; 6), (3; 3).

TỔNG KẾT CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG ÁP DỤNG

Để làm giải tốt các bài toán về chia hết, chúng ta cần sử dụng linh hoạt các phương pháp đã nêu trên, ở nhiều bài toán chia hết chúng ta có thể giải bằng nhiều phương pháp, nhưng có khi cũng một bài toán nhìn có vẻ tương tự như vậy nhưng chỉ có một phương pháp có thể giải quyết. Để mô phỏng về điều này tôi sẽ trích một bài viết của tác giả Nguyễn Đức Tấn trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ:

Bài toán: Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* thì n^2+n+1 không chia hết cho 9.

Cách 1: *(Sử dụng phương pháp xét số dư)*

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $n=3k\left(k\in Z\right)$ thì $n^2+n+1=3k\left(k+1\right)+1$

- Trường hợp 2: $n=3k+1\ \left(k\in Z\right)$ thì $n^2+n+1=9k\left(k+1\right)+3$

- Trường hợp 3: $n=3k+2\ \left(k\in Z\right)$ thì $n^2+n+1=3\left(3k^2+5k+2\right)+1$

Từ 3 trường hợp trên suy ra n^2+n+1 không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n*.

Cách 2: *(Sử dụng phương pháp tách tổng)*

Ta có: $n^2+n+1=\left(n-1\right)\left(n+2\right)+3$

Do $(n+2)-(n-1)=3$ nên $(n+2)$ và $(n-1)$ đồng thời hoặc không đồng thời chia hết cho 3

Nếu $\left(n+2\right)\vdots 3;\left(n-1\right)\vdots 3\Rightarrow\left(n-1\right)\left(n+2\right)\vdots 9$ nên $\left(n-1\right)\left(n+2\right)+3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu $(n+2)$ và $(n-1)$ đề không chia hết cho 3 thì $\left(n-1\right)\left(n+2\right)+3$ sẽ không chia hết cho 9.

Vậy n^2+n+1 không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n*.

Cách 3: *(Sử dụng phương pháp phản chứng)*

Giả sử $\left(n^2+n+1\right)\vdots 9$. Đặt $n^2+n+1=9m\ \left(m\in Z\right)\Rightarrow n^2+n+1-9m=0\ \left(*\right)$

Phương trình (*) có $\Delta=36m-3=3\left(12m-1\right)$

Ta thấy Δ không thể là số chính phương do chỉ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên (*) không có nghiệm . Vô lý!

Vậy n^2+n+1 không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n*.

Cách 4: Ta có: $4\left(n^2+n+1\right)=\left(2n+1\right)^2+3$

Nếu $\left(2n+1\right)\vdots 3\Rightarrow\left(2n+1\right)^2\vdots 9$ nên $\left(2n+1\right)^2+3$ sẽ không chia hết cho 9.

Nếu *(2n + 1)* không chia hết cho 3 thì $\left(2n+1\right)^2$ không chia hết cho 9 nên $\left(2n+1\right)^2+3$ sẽ không chia hết cho 3 vì thế cũng sẽ không chia hết cho 9 .

Vậy $4\left(n^2+n+1\right)$ không chia hết cho 9 nên n^2+n+1 sẽ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên *n.*

Các bạn rèn luyện khả năng sử dụng các phương pháp trong chứng minh các bài toán về chia hết thông qua các bài toán tương tự sau:

1) Chứng minh: $n^2+11n+39$ không chia hết cho 49.

2) Chứng minh: n^2+3n+5 không chia hết cho 49.

3) Chứng minh: $n^2+5n+16$ không chia hết cho 169.

Tuy nhiên với bài toán:

Chứng minh: $9n^3+9n^2+3n-16$ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên *n.*

Ta dễ thấy với các cách 1, 2, 3 có lẽ chúng ta phải bó tay, khai thác các giải 4 chú ý $343=7^3$

ta có lời giải thật "dễ thương" sau:

$9n^3+9n^2+3n-16=\left(3n+1\right)^3-49.$

Nếu $\left(3n+1\right)\vdots 7\Rightarrow\left(3n+1\right)^3\vdots 7^3=343$ nên $\left(3n+1\right)^3-49$ sẽ không chia hết cho 343.

Nếu *(3n + 1)* không chia hết cho 7 thì $\left(3n+1\right)^3-49$ không chia hết cho 7 nên $\left(3n+1\right)^3-49$ không chia hết cho $343=7^3$.

Vậy $9n^3+9n^2+3n-16$ sẽ không chia hết cho 343 với mọi số nguyên *n.*

Do đó để giỏi toán chúng ta cần linh hoạt và nắm vững các phương pháp giải để có thể vận dụng tốt ở các bài toán khác nhau!

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Chứng minh rằng $a^5-a\vdots 30\quad\left(a\in\mathbb{Z}\right)$

Câu 2. a) Đặt $A=n^3+3n^2+5n+3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n

b) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì a^2+b^2 chia hết cho 13

Câu 3. Chứng minh rằng: $A=\left[n^3\left(n^2-7\right)^2-36n\right]\vdots 7$ với $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Câu 4. Chứng minh rằng n^3-28n chia hết cho 48 với mọi n là số nguyên chẵn

Câu 5. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh n^3-n chia hết cho 24

Câu 6. Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 7. Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \vdots 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Câu 8. Chứng minh rằng : $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Câu 9. Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 10. Chứng minh rằng $A = n^2 + n + 2$ không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thủy Nguyên 2018-2019)

Câu 11. Chứng minh rằng với mọi $n \in N$ thì: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 30n - 24$ chia hết cho 24.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thanh Hà 2016-2017)

Câu 12. Cho a, b là số nguyên thỏa mãn: $2a^2 + 3ab + 2b^2$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng $a^2 - b^2$ chia hết cho 7.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Kinh Môn 2013-2013)

Câu 13. Cho n là số nguyên không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $P = 3^{2n} + 3^n + 1$ chia hết cho 13.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang 2018-2019)

Câu 14. Cho biểu thức $P = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2019}$ với $a_1; a_2; a_3; ...; a_{2019}$ là các số nguyên dương và P chia hết cho 30. Chứng minh rằng $Q = a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + ... + a_{2019}^5$ chia hết cho 30.

(Đề thi HSG Thành Phố Hải Phòng 2018-2019)

Câu 15. Cho x là số tự nhiên chẵn. Chứng tỏ rằng biểu thức $M = \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{12}$ có giá trị là số nguyên.

(Đề thi Chọn HSG lớp 9 THCS Hiệp An 2018-2019)

Câu 16. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Phù Ninh 2013-2014)

Câu 17. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

Câu 18. Cho $a_1, a_2, ..., a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 19. a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 20. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) với x > 1, y > 1 sao cho

$(3x + 1) \vdots y$ đồng thời $(3y + 1) \vdots x$.

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Hoằng Hóa năm 2014-2015)

Câu 21. Tìm số nguyên dương n bé nhất để $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48$ chia hết cho 125.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoằng Hóa 2015-2016)

Câu 22. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a,b sao cho: $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

(đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thanh Oai 2012-2013)

Câu 23. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$

Chứng minh A = xy chia hết cho 12

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vĩnh Lộc 2016-2018)

Câu 24. Chứng minh rằng số tự nhiên $A = 1.2.3....2017.2018.\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$

chia hết cho 2019.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Hoài Nhon 2018-2019)

Câu 25. Tìm số dư trong phép chia của đa thức $\left(x+2\right)\left(x+4\right)\left(x+6\right)\left(x+8\right)+2010$ cho đa thức $x^2+10x+21$

Câu 26. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 27. Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Câu 28. Giả sử f(x) là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên.

Chứng minh rằng: Nếu $f(x) \vdots 7$ với $\forall x \in Z$ thì từng hệ số của f(x) cũng $\vdots 7$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 trường Trần Mai Ninh năm 2012-2013)

Câu 29. Tìm số dư trong phép chia $\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)\left(x+9\right)+2033$ cho $x^2+12x+30$

Câu 30. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng : $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f\left(x\right)$ chia cho $x-2$ dư 26, $f\left(x\right)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư

Câu 31. Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu P(x) chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của x thì các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5

(đề thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thạch Hà 2016-2017)

Câu 32. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20} - 1$ chia hết cho 100

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Lục Nam 2018-2019)

Câu 33. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Thanh Hóa 2016-2017)

Câu 34. Cho N = $k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$, k là số nguyên. Tìm điều kiện của k để số N chia hết cho 16.

(Đề thi HSG huyện Lê Ninh 2018-2019)

Câu 35. Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Câu 36. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n\left(5^n+1\right)-6^n\left(3^n+2^n\right) \vdots 91$

Câu 37. Chứng minh rằng A = $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{11}$ chia hết cho 40.

Câu 38. Tìm đa thức $f\left(x\right)$ biết: $f\left(x\right)$ chia cho $x-2$ dư 5; $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 7; $f(x)$ chia cho $\left(x-2\right)\left(x-3\right)$ được thương là x^2-1 và đa thức dư bậc nhất với x

Câu 39. Cho số tự nhiên $n>3$. Chứng minh nếu $2^n=10a+b\left(a,b\in\mathbb{N},0<b<10\right)$ thì tích ab chia hết cho 6

Câu 40. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử các số nguyên x, y thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y đều chia hết cho p.

(Đề thi HSG lớp 9 TP Hải Phòng 2017-2018)

Câu 41. Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng abc cũng chia hết cho 14.

(Trích đề Chuyên toán Sư Phạm Hà Nội 2019-2020)

Câu 42.

a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho 2^n+1 chia hết cho 9.

b) Cho n là số tự nhiên $n>3$. Chứng minh rằng 2^n+1 không chia hết cho 2^m-1 với mọi số tự nhiên m sao cho $2<m\le n$.

(Trích đề Phổ Thông năng khiếu Hồ Chí Minh 2019-2020)

Câu 43. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số $M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019$ chia hết cho 20.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2019-2020)

Câu 44. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2019 thỏa mãn n^3+2019 chia hết cho 6.

(Trích đề Chuyên Nam Định 2018-2019)

Câu 45. Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y^2; xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5

(Trích đề Chuyên KHTN Hà Nội 2018-2019)

Câu 46. Tìm tất cả các số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6abc$ và $a^3 + b^3 + c^3 + 1$ chia hết cho $a + b + c + 1$.

(Trích đề Chuyên Nam Định 2016-2017)

Câu 47. Cho n là sô tự nhiên chẵn, chứng minh rằng số $20^n - 3^n + 16^n - 1$ chia hết cho số 323

(Trích đề Chuyên Bình Định 2018-2019)

Câu 48. Cho n số nguyên dương tùy ý, với mỗi số nguyên k ta đặt $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$

Chứng minh rằng $S_{2019} \vdots S_1$

(Trích đề Chuyên Lam Sơn 2018-2019)

Câu 49. Cho phương trình $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!(1)$ với $x; y; z$ là ẩn và 9! Là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên $x; y; z$ thỏa mãn (1) thì x, y, z đều chia hết cho 4

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn (1).

(Trích đề Chuyên Vĩnh Phúc 2018-2019)

Câu 50. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 1$ chia hết cho 24

(Trích đề Chuyên Bến Tre 2018-2019)

Câu 51. Cho số tự nhiên $n \ge 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho n đồng thời $n^3 - 1$ chia hết cho p. Chứng minh rằng $n + p$ là một số chính phương.

(Trích đề Chuyên Phan Bội Châu 2018-2019)

Câu 52. Với n là số tự nhiên chẵn, chứng minh rằng: $\left(20^n + 16^n - 3^n - 1\right) \vdots 323$

(Trích đề Chuyên Lâm Đồng 2018-2019)

Câu 53. Đặt $N = a_1 + a_2 + ... + a_{2018}$, $M = a_1^5 + a_2^5 + ... + a_{2018}^5 \left(a_1; a_2; ....a_{2018} \in \mathbb{Z}^+\right)$. Chứng minh rằng nếu N chia hết cho 30 thì M cũng chia hết cho 30

(Trích đề Chuyên Hải Dương 2018-2019)

Câu 54. Cho a, b,c là các số nguyên. Chứng minh nếu $a^{2016} + b^{2017} + c^{2018}$ chia hết cho 6 thì $a^{2018} + b^{2019} + c^{2020}$ cũng chia hết cho 6.

(Trích đề Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Câu 55. Tìm dạng tổng quát của số nguyên dương n biết: $M = n.4^n + 3^n$ chia hết cho 7.

(Trích đề Chuyên Hải Dương 2016-2017)

Câu 56. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

(Trích đề Chuyên Quảng Ngãi 2018-2019)

Câu 57. Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $4(m+n)^2 - mn$ chia hết cho 225. Chứng minh rằng: mn cũng chia hết cho 225.

(Trích đề Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Câu 58. Cho n là số nguyên dương tùy ý, với mỗi số nguyên dương k đặt $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$. Chứng minh $S_{2019} \vdots S_1$.

(Chuyên toán Thanh Hóa 2018-2019)

Câu 59. Chứng minh rằng nếu p và (p + 2) là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

(Trích đề Chuyên Hòa Bình 2015-2016)

Câu 60. Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

(Trích đề Chuyên Phú Thọ 2015-2016)

Câu 61. Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

(Trích đề Chuyên Bình Phước 2017-2018)

Câu 62. Cho $A = 2(1^{2015} + 2^{2015} + ... + n^{2015})$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho n(n + 1).

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2015-2016)

Câu 63. Cho biểu thức $Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để Q chia hết cho 16.

(Trích đề Chuyên Quảng Nam 2016-2017)

Câu 64. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 65. Cho a, b, c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Đồng Nai 2019)

Câu 66. Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương *n.*

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng A 2019)

Câu 67. Chứng minh rằng $A = 4^n + 17$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương *n.*

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An Bảng B 2019)

Câu 68. Cho $n \in N^*$. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2019)

Câu 69. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3 + 20n + 96$ chia hết cho 48.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bình Phước 2019)

Câu 70. Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được một số là bình phương của một số nguyên lẻ.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Khánh Hòa 2018)

Câu 71. Cho a, b, c là ba số nguyên khác 0 thỏa $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng: abc chia hết cho 4.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Đồng Nai 2019)

Câu 72. 1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016} - 1$ chia hết cho 60.

2. Cho x, y, z là các số dương khác nhau đôi một và $x^3 + y^3 + z^3$ chia hết cho $x^2y^2z^2$. Tìm thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2y^2z^2$

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Thanh Hóa 2017)

Câu 73. Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Nam 2017)

Câu 74. Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Tìm số dư khi chia $p + q$ cho 12.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Vĩnh Long 2016)

Câu 75. Cho các nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = 2\left(c^2 - 8d^3\right)$.

Chứng minh rằng $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thành Phố Hà Nội 2016)

Câu 76. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, số $A=3n^3+15n$ chia hết cho 18.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Gia Lai 2019)

Câu 77. Biết $a;b$ là các số nguyên dương thỏa mãn a^2-ab+b^2 chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

(Trích đề thi HSG lớp 9 Thành Phố Hà Nội 2019)

Câu 78. Chứng minh rằng $a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3$ chia hết cho 3, biết $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ là các chữ số của 2019^{2018}.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Hải Dương 2019)

Câu 79. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $46^n+296.13^n$ chia hết cho 1947

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu 2019)

Câu 80. Chứng minh rằng $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Lâm Đồng 2019)

Câu 81. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b=c^3-2018c$. Chứng minh rằng $A=a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

(Trích đề thi HSG lớp 9 tỉnh Quảng Ngãi 2019)

Câu 82. Chứng minh trong các số có dạng 20142014 ... 2014 có số chia hết cho 2013.

(Trích đề vào 10 Chuyên Lạng Sơn năm 2013-2014)

Câu 83. Cho a,b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a+20$ và $b+13$ cùng chia hết cho 21. Tìm số dư của phép chia $A=4^a+9^b+a+b$ cho 21.

(Trích đề vào 10 Chuyên Hải Phòng năm 2013-2014)

Câu 84. Cho biểu thức: $A=\left(a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}\right)-\left(a^{2016}+b^{2016}+c^{2016}\right)$ với a,b,c là các số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho 30.

(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 85. Cho hai số nguyên dương x,y với $x>1$ và thỏa mãn điều kiện: $2x^2-1=y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

(Trích đề vào 10 Chuyên Toán Lam Sơn năm 2019-2020)

Câu 86. Cho các số 1; 2; 3; ...; 100. Viết một cách tùy ý 100 số đó nối tiếp nhau theo hàng ngang ta được một số tự nhiên. Hỏi số tự nhiên đó có chia hết cho 2016 hay không?

(Trích đề vào 10 Chuyên Toán Lam Sơn năm 2015-2016)

Câu 87. Tìm k để tồn tại số tự nhiên n sao cho $\left(n^2-k\right)\vdots 4$ với $k\in\{0;1;2;3\}$.

Câu 88. Cho n là số dương. Chứng minh rằng: $(n+1)(n+2)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

Chương II

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

B. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa số chính phương.

Số chính phương là số bằng bình phương của một số nguyên.

(tức là nếu n là số chính phương thì: $n = k^2$ $(k \in Z)$)

2. Một số tính chất cần nhớ

1- Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9; không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.

2- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

3- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 4n hoặc 4n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 4n + 2 hoặc 4n + 3 (n $\in$ N).

4- Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng 3n hoặc 3n + 1. Không có số chính phương nào có dạng 3n + 2 (n $\in$ N).

5- Số chính phương tận cùng bằng 1, 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.

Số chính phương tận cùng bằng 5 thì chữ số hàng chục là 2.

Số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

6- Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4.

Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9

Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25

Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16.

7. Mọi số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ dư 1, 0, 4.

8. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

9. Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số đó là số 0.

10. Số các ước của một số chính phương là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là số lẻ thì số đó là số chính phương.

11. Nếu $n^2 < k < (n + 1)^2$ (n $\in$ Z) thì k không là số chính phương.

12. Nếu hai số tự nhiên a và b nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số a, b cũng là các số chính phương.

13. Nếu a là một số chính phương, a chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p^2.

14. Nếu tích hai số a và b là một số chính phương thì các số a và b có dạng $a = mp^2; b = mq^2$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Chứng minh một số là số chính phương, hoặc là tổng nhiều số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh một số n là số là số chính phương ta thường dựa vào định nghĩa, tức là chứng minh : $n = k^2 \ (k \in Z)$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$A = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2+3n+1 \in \mathbb{N}$. Vậy A là số chính phương.

Bài toán 2. Cho: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2)$ với k là số tự nhiên. Chứng minh rằng 4B + 1 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta thấy biểu thức B là tổng của một biểu thức chúng ta nghĩ đến việc phải thu gọn biểu thức B trước.

Ta có:

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)] = \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$$

Áp dụng:

$$1.2.3 = \frac{1}{4}(1.2.3.4 - 0.1.2.3)$$

$2.3.4 = \frac{1}{4}(2.3.4.5 - 1.2.3.4)$

$3.4.5 = \frac{1}{4}(3.4.5.6 - 2.3.4.5)$

....

$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}[k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)]$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$\Rightarrow 4B + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$

Theo ví dụ 1 ta có: $4B + 1 = (k^2 + 3k + 1)^2$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}$. Vậy $4B+1$ là số chính phương.

Bài toán 3. Chứng minh rằng: $C = \underbrace{11...1}_{2n} + \underbrace{44...4}_{n} + 1$ với n là số tự nhiên. Chứng minh rằng C là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C = \underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n} + \underbrace{11...1}_{n} + \underbrace{44...4}_{n} + 1$

Đặt $a = \underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a = \underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n = 9a + 1$

$$C = a.10^n + a + 4a + 1 = a(9a+1) + 5a + 1$$

$$\Rightarrow C = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$$

$$\Rightarrow C = \underbrace{33...3}_{n-1}4^2.$$

Vậy C là một số chính phương.

Nhận xét:

Khi biến đổi một số trong đó có nhiều chữ số giống nhau thành một số chính phương ta nên đặt $\underbrace{11...1}_{n} = a$ *và như vậy* $\underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n = 9a + 1$.

Bài toán 4. Cho $a = \underbrace{11...1}_{2016}$, $b = 1\underbrace{0...0}_{2015}5$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

<u>*Cách 1:*</u>

Ta có: $b = 1\underbrace{0...0}_{2015}5 = 1\underbrace{0...0}_{2016} - 1 + 6 = \underbrace{9...9}_{2016} + 6 = 9a + 6$.

$\Rightarrow$ ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a² + 6a + 1 = (3a + 1)²

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{(3a+1)^2} = 3a + 1 \in N$.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Cách 2:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{2016} = \dfrac{10^{2016}-1}{9}, b = 10^{2016} + 5$.

$\Rightarrow ab + 1 = \dfrac{10^{2016}-1}{9}.\left(10^{2016}+5\right) + 1 = \dfrac{\left(10^{2016}\right)^2 + 4.10^{2016} - 5 + 9}{9} = \left(\dfrac{10^{2016}+2}{3}\right)^2$.

$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \dfrac{\left(10^{2016}+2\right)}{3}$.

Mà $\left(10^{2016}+2\right) \vdots 3$. Do đó, $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Vậy $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Bài toán 5. Cho số tự nhiên *a* gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên *b* gồm 30 chữ số 2. Chứng minh *a* - *b* là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Ta có: $a = \underbrace{11...1}_{60} = \dfrac{10^{60}-1}{9}$, $b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\dfrac{10^{30}-1}{9}$.

$\Rightarrow a - b = \dfrac{10^{60}-1}{9} - \dfrac{2(10^{30}-1)}{9} = \dfrac{10^{60} - 2.10^{30} + 1}{9} = \left[\dfrac{10^{30}-1}{3}\right]^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2$.

Cách 2:

$b = \underbrace{22...2}_{30} = 2.\underbrace{11...1}_{30}$, $a = \underbrace{11...1}_{60} = \underbrace{11...1}_{30}.\underbrace{00...0}_{30} + \underbrace{11...1}_{30} = \underbrace{11...1}_{30}.10^{30} + \underbrace{11...1}_{30}$.

Đặt $c = \underbrace{11...1}_{30}$. $\Rightarrow 9c + 1 = \underbrace{99...9}_{30} + 1 = 10^{30}$.

Khi đó: $a = c.(9c+1) + c = 9c^2 + 2c$. $b = 2c$.

$\Rightarrow a - b = 9c^2 + 2c - 2c = (3c)^2 = \left(\underbrace{33...3}_{30}\right)^2$.

Bài toán tổng quát: Cho k số tự nhiên khác 0, số tự nhiên a gồm $2k$ chữ số 1 và số tự nhiên b gồm k chữ số 2. Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương.

Bài toán 6. Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n là tổng của hai số chính phương liên tiếp.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta có: $\dfrac{n^2-1}{3} = a(a+1)$.

Từ đó có $n^2 = 3a^2 + 3a + 1 \Rightarrow 4n^2 - 1 = 12a^2 + 12a + 3$

$\Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2$.

Vì $2n+1; 2n-1$ là hai số lẻ liên tiếp nên ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2n-1 = 3p^2 \\ 2n+1 = q^2 \end{cases}$.

Khi đó $q^2 = 3p^2 + 2$ (Vô lí). Vậy trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2n-1 = p^2 \\ 2n+1 = 3q^2 \end{cases}$.

Từ đó p là số lẻ nên $p = 2k+1$.

Từ đó $2n = (2k+1)^2 + 1 \Rightarrow n = k^2 + (k+1)^2$ (đpcm).

Bài toán 7. Cho k là một số nguyên dương và $a = 3k^2 + 3k + 1$

a) Chứng minh rằng $2a$ và a^2 là tổng của ba số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu a là một ước của một số nguyên duong b và b là một tổng gồm ba số chính phương thì b^n là một tổng của bà số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $2a = 6k^2 + 6k + 2 = (2k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2$

và $a^2 = 9k^4 + 18k^3 + 15k^2 + 6k + 1 = (k^2+k)^2 + (2k^2+3k+1)^2 + (2k^2+k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

b) Vì $b \vdots a$ nên đặt $b = ca$.

Vì b là tổng của ba số chính phương nên đặt $b = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Khi đó $b^2 = c^2.a^2 = c^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

Để kết thúc việc chứng minh, ta tiến hành như sau: cho $n = 2p+1$ ta được:
$b^{2p+1} = \left(b^p\right)^2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$ và cho $n = 2p+2$ ta được $b^n = \left(b^p\right)^2 b^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$

🗁 **Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương.**

*** Cơ sở phương pháp:**

Để chứng minh n không là số chính phương, tùy vào từng bài toán ta có thể sử dụng các cách sau:

1) Chứng minh n không thể viết được dưới dạng một bình phương một số nguyên.
2) Chứng minh $k^2 < n < (k+1)^2$ với k là số nguyên.
3) Chứng minh n có tận cùng là 2; 3; 7; 8
4) Chứng minh n có dạng 4k + 2; 4k + 3
5) Chứng minh n có dạng 3k + 2
6) Chứng minh n chia hết cho số nguyên tố p mà không chia hết cho p^2.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không ? tại sao?

Hướng dẫn giải

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n

Ta có : 2018 = 3m + 2 nên số tự nhiên n chia 3 dư 2, do đó số n có dạng 3k + 2 với k là số tự nhiên. Mặt khác một số chính phương trình không có dạng 3k + 2 suy ra số tự nhiên n không là số chính phương.

Bài toán 2. Chứng minh rằng số $A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ trong đó $n \in N$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$A = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = \left(n^4 + 2n^3 + n^2\right) + \left(n^2 + 2n + 1\right)$$

$$= \left(n^2 + n\right)^2 + (n+1)^2 > \left(n^2 + n\right)^2 \ \forall n > 1$$

$$\Rightarrow A > \left(n^2 + n\right)^2 \ \forall n > 1$$

Mặt khác:

$$\left(n^2+n+1\right)^2 = n^4+2n^3+2n^2+n^2+2n+1$$
$$=\left(n^4+2n^3+2n^2+2n+1\right)+n^2 = A+n^2 > A \quad \forall n>1$$

$\Rightarrow A<\left(n^2+n+1\right)^2$

Do đó $\left(n^2+n\right)^2 < A < \left(n^2+n+1\right)^2$

Ta có (n^2 + n) và (n^2 + n + 1) là hai số tự nhiên liên tiếp nên A không thể là số chính phương.

Bài toán 3. Cho $A=1+2+2^2+2^3+...+2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Hướng dẫn giải

Ta có $A=1+2+\left(2^2+2^3+2^4+2^5\right)+...+\left(2^{30}+2^{31}+2^{32}+2^{33}\right)$

$$=3+2^2.\left(1+2+2^2+2^3\right)+...+2^{30}.\left(1+2+2^2+2^3\right)$$

$$=3+2.30+...+2^{29}.30=3+\left(2+...+2^{29}\right).3.10 .$$

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3. Do đó, A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 4. Chứng minh rằng $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$2012^{4n} \vdots 4; 2014^{4n} \vdots 4, \ \forall n \in N^*$.

$2013^{4n}=2013^{4n}-1+1=\left(2013^{4n}-1\right)+1$ chia cho 4 dư 1.

$2015^{4n}=2015^{4n}-(-1)^{4n}+1$ chia cho 4 dư 1.

Do đó, $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2.

Ta có: $A \vdots 2$, nhưng A không chia hết cho 2^2, mà 2 là số nguyên tố. Suy ra A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài toán 5. Cho $2 \le n \in \mathbb{N}$, Chứng minh rằng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không thể là số chính phương

Hướng dẫn giải

Ta có $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2\left(n^4 - n^2 + 2n + 2\right)$

$$= n^2\left[n^2\left(n^2 - 1\right) + 2\left(n + 1\right)\right]$$

$$= n^2\left[n^2\left(n - 1\right)\left(n + 1\right) + 2\left(n + 1\right)\right]$$

$$= n^2\left(n + 1\right)^2\left(n^2 - 2n + 2\right)$$

Với $2 \le n \in \mathbb{N}$, ta có $n^2 - 2n + 2 > n^2 - 2n + 1 = \left(n + 1\right)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2\left(n - 1\right) < n^2$. Do đó $\left(n - 1\right)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$

Như vậy $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương nên A không phải là số chính phương.

Bài toán 6. Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử: $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, với $m, n \in \mathbb{N}$

Ta có: $a^2 + b^2 = \left(2m + 1\right)^2 + \left(2n + 1\right)^2 = 4\left(m^2 + m + n^2 + n\right) + 2 = 4k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Không có số chính phương nào có dạng $4k + 2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải số chính phương.

🗁 **Dạng 3: Điều kiện để một số là số chính phương.**

* **Cơ sở phương pháp:** Chúng ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

- Phương pháp 2: Sử dụng tính chẵn, lẻ.

- Phương pháp 3: Sử dụng tính chất chia hết và chia có dư.

- Phương pháp 4: Sử dụng các tính chất.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số nguyên n sao cho n(n + 3) là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Để A = n(n + 3) là số chính phương thì n(n + 3) = k^2 với k là số tự nhiên, do đó:

$$n^2+3n=k^2$$
$$\Leftrightarrow 4n^2+12n=4k^2$$
$$\Leftrightarrow 4n^2+12n+9=4k^2+9$$
$$\Leftrightarrow (2n+3)^2-(2k)^2=9$$
$$\Leftrightarrow (2n+2k+3)(2n-2k+3)=9$$

Ta có $(2n+2k+3)\ge(2n-2k+3)$

Và 9 = 9.1 = 3.3 = (-1).(-9) = (-3).(-3)

Trường hợp 1 : $\begin{cases}2n+2k+3=9\\2n-2k+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=3\\n-k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=1\\k=2\end{cases}\Rightarrow A=4$

Trường hợp 2 : $\begin{cases}2n+2k+3=3\\2n-2k+3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=0\\n-k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=0\\k=0\end{cases}\Rightarrow A=0$

Trường hợp 3 : $\begin{cases}2n+2k+3=-1\\2n-2k+3=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=-2\\n-k=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-4\\k=2\end{cases}\Rightarrow A=4$

Trường hợp 4 : $\begin{cases}2n+2k+3=-3\\2n-2k+3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n+k=-3\\n-k=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-3\\k=0\end{cases}\Rightarrow A=0$

Vậy khi n = -4 ; -3 ; 0 ; 1 thì ta có A là số chính phương.

Bài toán 2. Tìm số nguyên n sao cho $n+1955$ và $n+2014$ là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n+1955=a^2$; $n+2014=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}$ và $a<b$.

Khi đó $b^2-a^2=59\Leftrightarrow(b-a)(b+a)=59\Leftrightarrow\begin{cases}b-a=1\\b+a=59\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=29\\b=30\end{cases}$.

Dễ dàng suy ra $n=-1114$.

Bài toán 3. Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương:

$a)\quad A=n^2-n+2$ $\qquad$ $b)\quad B=n^5-n+2$

Hướng dẫn giải

a) Với n = 1 thì A = $n^2 - n + 2 = 2$ không là số chính phương

Với n = 2 thì A = $n^2 - n + 2 = 4$ là số chính phương

Với n > 2 thì A = $n^2 - n + 2$ không là số chính phương vì

$$(n-1)^2 = n^2 - (2n-1) < n^2 - (n-2) < n^2$$

Vậy n = 2 thì A là số chính phương.

b) Ta có: $n^5 - n = (n^2 - 1)n(n^2 + 1)$

Với n = 5k thì n chia hết cho 5.

Với $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5

Với $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Do đó $n^5 - n$ luôn chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên $B = n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy không có giá trị nào của n thỏa để B là số chính phương.

Bài toán 4. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1$, $2n+1$, $5n+1$ đều là các số chính phương.

Hướng dẫn giải

Nếu $n = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ thì $n+1 = 3k+2$, không là số chính phương.

Nếu $n = 3k+2$ thì $2n+1 = 6k+5$, cho cho 3 dư 2 nên không là số chính phương. Vậy $n \vdots 3$.

$2n+1$ là số chính phương lẻ nên chia cho 8 dư 1. Suy ra $2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow n+1$ lẻ. Do $n+1$ là số chính phương lẻ nên $n+1$ chia cho 8 dư 1, suy ra $n \vdots 8$.

n chia hết cho các số nguyên tố cùng nhau 3 và 8 nên $n \vdots 24$. Với $n = 24$ thì $n+1 = 25 = 5^2$, $2n+1 = 49 = 7^2$, $5n+1 = 121 = 11^2$.

Giá trị nhỏ nhất của n phải tìm là 24.

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên n ≥ 1 sao cho tổng 1! + 2! + 3! + … + n! là một số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 6 - Phòng giáo dục đào tạo Phúc Yên - Vĩnh Phúc)

Hướng dẫn giải

Với n = 1 thì 1! = 1 = 1^2 là số chính phương

Với n = 2 thì 1! + 2! = 3 không là số chính phương

Với n = 3 thì 1! + 2! + 3! = 1 + 1.2 + 1.2.3 = 9 = 3^2 là số chính phương

Với n ≥ 4 ta có 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 = 33 còn 5!; 6!; …; n! đều tận cùng bởi 0 do đó 1! + 2! + 3! + … n! có tận cùng bởi chữ số 3 nên nó không phải là số chính phương.

Vậy có 2 số tự nhiên n thoả mãn đề bài là n = 1; n = 3.

Bài toán 6. Tìm số nguyên dương n sao cho $A=(n+3)\left(4n^2+14n+7\right)$ là số một chính phương.

(Đề thi chọn HSG Toán 9 tỉnh Thái Bình)

Hướng dẫn giải

Ta có: $4n^2+14n+7=(n+3)(4n+2)+1$ và n là số nguyên dương nên $n+3$ và $4n^2+14n+7$ là nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, để A là số chính phương thì $4n^2+14n+7$ và n + 3 phải là số chính phương.

Do $n\in Z^+$ nên ta có $(2n+3)^2\le 4n^2+14n+7<(2n+4)^2$.

$\Rightarrow 4n^2+14n+7=(2n+3)^2\Rightarrow n=1$. Khi đó n + 3 = 4 là số chính phương.

Thử lại, với $n=1$, ta có $A=10^2$.

Vậy số nguyên dương cần tìm là $n=1$.

Bài toán 7. Tìm $3\le a\in\mathbb{N}$ sao cho $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{a(a-1)}.\overline{a(a-1)}=\overline{(a-2)aa(a-1)}\Leftrightarrow \overline{a(a-1)}^2=\overline{(a-2)aa(a-1)}$. (*)

Vì VT(*) là số chính phương nên VP(*) cũng là số chính phương.

Vì số chính phương chỉ có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{0;1;4;5;6;9\}$

nên a có chữ số tận cùng thuộc tập hợp $\{1;2;5;6;7;0\}$.

Do a là chữ số nên $a\le 9$. Kết hợp với $3\le a\in\mathbb{N}$ nên $a\in\{5;6;7\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $a=7$ thỏa mãn $76^2=5776$.

Bài toán 8. Tìm số tự nhiên n sao cho 2^n+9 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Giả sử $2^n + 9 = m^2,\ m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (m-3)(m+3) = 2^n$.

Vì $m-3 < m+3$ nên $\begin{cases} m-3 = 2^a \\ m+3 = 2^b \end{cases}$, với $a,\ b \in \mathbb{N}$ và $a < b$.

Ta có $2^b - 2^a = 6 \Leftrightarrow 2^a\left(2^{b-a} - 1\right) = 6$.

Vì $2^a\left(2^{b-a} - 1\right) \vdots 2$ mà $2^a\left(2^{b-a} - 1\right) \not\vdots 4$ nên $a = 1$. Điều này dẫn đến $m = 5$ và $n = 4$.

Dạng 4: Tìm số chính phương.

*** Cơ sở phương pháp:** Dựa vào định nghĩa về số chính phương A = k^2, với k là số nguyên và các yêu cầu của bài toán để tìm ra số chính phương thỏa bài toán.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $n^2 = \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100\left(1 + \overline{cd}\right) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100,\ n \in Z$.

$\Rightarrow 101.\overline{cd} = n^2 - 100 = (n-10)(n+10)$.

Vì $n < 100$ và 101 là số nguyên tố nên $n + 10 = 101$.

$\Rightarrow n = 91$.

Thử lại: $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$ có $82 - 81 = 1$.

Vậy $\overline{abcd} = 8281$.

Bài toán 2. Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số. Nếu ta thêm vào mỗi chữ số của A một đơn vị thì ta được số chính phương B. Hãy tìm các số A và B.

Hướng dẫn giải

Gọi $A = \overline{abcd} = k^2$.

Theo đề bài ta có:

Ta có: $\begin{cases} A = \overline{abcd} = k^2 \\ B = \overline{abcd} + 1111 = m^2 \end{cases}$.

(với $k, m \in N^*$ và $31 < k < m < 100,\ a,b,c,d = \overline{1,9}$).

$\Rightarrow m^2 - k^2 = 1111 \Leftrightarrow$ (m - k)(m + k) = 1111 (*)

Nhận xét thấy tích (m – k)(m + k) > 0 nên m – k và m + k là 2 số nguyên dương.

Và m – k < m + k < 200 nên (*) có thể viết (m – k) (m + k) = 11.101

Do đó: $\begin{cases} m-k=11 \\ m+k=101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=56 \\ n=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2025 \\ B=3136 \end{cases}$

Vậy A = 2025, B = 3136.

Bài toán 3. Tìm một số chính phương gồm 4 chữ số sao cho chữ số cuối là số nguyên tố, căn bậc hai của số đó có tổng các chữ số là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$ với a; b; c; d là các số tự nhiên

và $1 \le a \le 9; 0 \le b, c, d \le 9$.

Ta có $\overline{abcd}$ chính phương $\Rightarrow$ d $\in \{0,1,4,5,6,9\}$.

Vì d là số nguyên tố $\Rightarrow$ d = 5.

Đặt $\overline{abcd} = k^2 < 10000 \Rightarrow 32 \le k < 100,\ k \in N$.

Do k là một số có hai chữ số mà k^2 có tận cùng bằng 5 $\Rightarrow$ k tận cùng bằng 5

Tổng các chữ số của k là một số chính phương $\Rightarrow$ k = 45 (vì k tận cùng bằng 5 và có 2 chữ số)

$\Rightarrow \overline{abcd} = 2025$

Vậy số phải tìm là: 2025.

Bài toán 5. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng hiệu các bình phương của số đó và số viết bởi hai chữ số của số đó nhưng theo thứ tự ngược lại là một số chính phương.

Hướng dẫn giải

Gọi số phải tìm là $\overline{ab}$ với a, b $\in$ N, $1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9$

Theo giả thiết ta có: $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 \Leftrightarrow \overline{ab}^2 = (a+b)^2(a+b)$. Suy ra a+b là số chính phương.

Khi đó $\overline{ab}$ là một lập phương và a + b là một số chính phương.

Vì $10 \le \overline{ab} \le 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

Nếu $\overline{ab} = 27 \Rightarrow$ a + b = 9 là số chính phương

Nếu $\overline{ab} = 64 \Rightarrow$ a + b = 10 không là số chính phương $\Rightarrow$ loại

Vậy số cần tìm là 27.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho $a;b;c$ là 3 số nguyên thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ là 1 số chính phương.

Bài 2: Tìm số nguyên dương n sao cho $\dfrac{n(2n-1)}{26}$ là số chính phương .

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Lam Sơn- Thanh Hóa 2012-2013)

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A=n^4+n^3+n^2$ có giá trị là số chính phương.

(Đề TS lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An 2010-2011)

Bài 4: Chứng minh rằng mọi số nguyên x, y thì biểu thức

A= $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$ có giá trị là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng các số sau đây là số chính phương:

a) $A=224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9$ b) $B=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6$

Bài 6: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số liên tiếp không thể là số chính phương.

Bài 7: Cho dãy số $49; 4489; 444889; 44448889; ...$

Dãy số trên được xây dựng bằng cách thêm số 48 vào giữa số đứng trước nó. Chứng minh rằng tất cả các số của dãy trên đều là số chính phương

Bài 8: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không thể là các số chính phương.

Bài 9: Có hay không số tự nhiên n để 2010 + n^2 là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương

Bài 11: Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho n + 1 và 2n + 1 đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

Bài 12: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Bài 13 : Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Bài 14: Cho số nguyên dương n và các số A = $\underbrace{444....4}_{2n}$ (A gồm 2n chữ số 4); B = $\underbrace{888.....8}_{n}$ (B gồm n chữ số 8). Chứng minh rằng A + 2B + 4 là số chính phương.

(Đề vào chuyên toán Hà Nam năm 2013-2014)

Bài 15: Giả sử $N = 1.3.5.7....2007$

Chứng minh rằng trong 3 số nguyên liên tiếp $2N-1,\ 2N,$ và $2N+1$ không có số nào là số chính phương.

Bài 16: Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên $\left(S_1 = 2, S_2 = 2+3, S_3 = 2+3+5, ...\right)$. Chứng minh rằng trong dãy số $S_1, S_2, S_3, ...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là các số chính phương .

(Đề vào chuyên toán sư phạm Hà Nội năm 2013-2014)

Bài 17: Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.

(Đề vào chuyên Hưng Yên năm 2013-2014)

Bài 18: Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là 1 số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 Thanh Oai năm 2012-2013)

Bài 19: Cho các số nguyên a, b, c ≠ 0 thoả mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$

Chứng minh rằng: $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 trường Trần Mai Ninh năm 2012-2013)

Bài 20: Tìm số tự nhiên n sao cho A = $n^2 + n + 6$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vĩnh Lộc năm 2018-2019)

Bài 21: Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số $\overline{abcd}$ biết rằng nó là một số chính phương, chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

(Đề thi HSG lớp 9 quận Ngô Quyền năm 2018-2019)

Bài 22: *(Đề thi HSG lớp 9 huyện Cẩm Giang năm 2018-2019)*

Cho S = $4 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98}$. Chứng tỏ S không phải là số chính phương.

Bài 23: Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 TP Bắc Giang năm 2017-2018)

Bài 24: Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là số chính phương?

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Kim Thành năm 2012-2013)

Bài 25: Tìm các số nguyên dương n sao cho $2^n + 3^n + 4^n$ là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang năm 2018-2019)

Bài 26: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2014$ là một số chính phương

(Đề thi HSG lớp 9 Trường Thanh Văn năm 2017-2018)

Bài 27: Tìm các số nguyên x sao cho $x^3 - 3x^2 + x + 2$ là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Lục Nam năm 2018-2019)

Bài 28: Tìm số tự nhiên A biết rằng trong ba mệnh đề sau có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai:

a) $A + 51$ là số chính phương.

b) Chữ số tận cùng bên phải của A là số 1.

c) $A-38$ là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Đan Phượng năm 2018-2019)

Bài 29: Tìm các số hữu tỉ n thỏa mãn tổng sau là số chính phương: $n^2+n+503$.

Giả sử tồn tại số hữu tỉ n và số nguyên dương m để $n^2+n+503=m^2$.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Vũ Quang năm 2018-2019)

Bài 30: Tìm các số tự nhiên n sao cho $n-50$ và $n+50$ đều là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thăng Bình năm 2018-2019)

Bài 31: Tìm số tự nhiên n sao cho: n + 24 và n – 65 là hai số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Phù Ninh năm 2018-2019)

Bài 32: Chứng minh rằng: $B = 4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Tiền Hải năm 2017-2018)

Bài 33: Tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho: n^4+n^3+1 là số chính phương.

(Đề thi HSG lớp 9 huyện Thanh Oai năm 2012-2013)

Bài 34: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho $2\left(x^2+y^2-3x+2y\right)-1$ và $5\left(x^2+y^2+4x+2y+3\right)$ đều là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Nam Định năm 2019-2020)

Bài 35: Chứng minh rằng số $M=(n+1)^4+n^4+1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương.

(Đề vào 10 Chuyên Bình Thuận năm 2019-2020)

Bài 36: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2+1}+2$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Ninh năm 2019-2020)

Bài 37: Cho a, b, c là các số nguyên dương nguyên nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $a+b$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Thái Nguyên năm 2016-2017)

Bài 38: Chứng minh rằng nếu a và b là các số tự nhiên lẻ thì a^2+b^2 không phải là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Hòa Bình năm 2016-2017)

Bài 39: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho n^2+3^n là một số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Quốc Học Huế năm 2017-2018)

Bài 40: Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì b^2-4ac không là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bình Định năm 2017-2018)

Bài 41: Tìm các số nguyên m sao cho m^2+12 là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm 2017-2018)

Bài 42: Tìm tất cả các cặp (x; y) nguyên dương sao cho x^2+8y và y^2+8x là các số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Toán Hải Dương năm 2017-2018)

Bài 43: Cho biểu thức $A = (m+n)^2 + 3m + n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì $n^3 + 1$ chia hết cho m.

(Đề vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2017-2018)

Bài 44: Cho p là một số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên n để $A = n^4 + 4n^{p-1}$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2017-2018)

Bài 45: Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $m+n+1$ là một ước nguyên tố của $2(m^2+n^2)-1$. Chứng minh rằng $m.n$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Nghệ An năm 2018-2019)

Bài 46: Tìm các giá trị nguyên của x để $M = x^4 + (x+1)^3 - 2x^2 - 2x$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Hưng Yên năm 2018-2019)

Bài 47: Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Đại học Vinh Nghệ An năm 2018-2019)

Bài 48: Tìm hai số nguyên tố p và q, biết rằng $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm 2018-2019)

Bài 49: Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của một số tự nhiên n thì n là tổng 2 số chính phương liên tiếp.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Ninh năm 2018-2019)

Bài 50: Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $2018 + n^2$ là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bắc Giang năm 2018-2019)

Bài 51: Cho $A = m^2n^2 - 4m - 2n$ với m, n là các số nguyên dương. Khi $n = 2$ tìm m để A là số chính phương. Khi $n \geq 5$ chứng minh rằng A không thể là số chính phương.

(Đề vào 10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu năm 2018-2019)

Bài 52: Chứng minh nếu $a; b$ là các số nguyên thỏa mãn hệ thức $2a^2 + a = 3b^2 + b$ thì $a-b$ và 2a+2b+1 là những số chính phương.

Bài 53: Tìm số tự nhiên x để biểu thức $x^2 + 2x + 20$ có giá trị là một số chính phương.

Bài 54. Tìm các số nguyên x sao cho $A = x(x-1)(x-7)(x-8)$ là một số chính phương.

Bài 55. Cho $A = \underbrace{11...1}_{2n} - \underbrace{88...8}_{n} + 1$. Chứng minh A là một số chính phương.

Bài 56. Tìm tất cả số tự nhiên x,y để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

Bài 57. Tìm $n \in N$ để $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương .

Bài 58. Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là các số chính phương.

Bài 59. Cho các số: $\begin{cases} A = \underbrace{11.....11}_{2m} \\ B = \underbrace{11.....11}_{m+1} \\ C = \underbrace{66.....66}_{m} \end{cases}$; Chứng minh rằng: $A+B+C+8$ là một số chính phương.

Bài 60. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội năm 1992)

Bài 61. Tìm tất cả các số nguyên không âm n sao cho có các số nguyên $a,\ b$ thỏa mãn $n^2 = a+b$ và $n^3 = a^2+b^2$.

(Romanian MO 2004)

Bài 62. Hãy tìm hai số chính phương phân biệt $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ biết rằng $a_1-b_1 = a_2-b_2 = a_3-b_3 = a_4-b_4$

Bài 63. Có tồn tại hay không 2013 số nguyên dương $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{2013}$ sao cho các số

$a_1^2+a_2^2,\ a_1^2+a_2^2+a_3^2,\ a_1^2+a_2^2+...+a_{2013}^2$ đều là số chính phương?

Bài 64. Thay các dấu * bằng các chữ số sao cho số sau đây là một số tự nhiên.

$$A = \sqrt[6]{4****}$$

Bài 65. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $A_n = \left(10^n + 10^{n-1} + ... + 10 + 1\right)\left(10^{n+1} + 5\right) + 1$. Chứng minh rằng A_n là số chính phương.

Bài 66. Giả sử rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $5n+3$ là một hợp số.

Bài 67. Có hay không các số x, y phân biệt thuộc khoảng $(988;1994)$ sao cho $xy+x$ và $xy+y$ đều là các số chính phương ?

(Thi học sinh giỏi toán lớp 9, TP.HCM năm 1994)

Bài 68. Có tồn tại hay không một số tự nhiên n sao cho số $k = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ là một số hữu tỉ.

Bài 69. Cho dãy số , $a_2 = 144$, $a_3 = 1444$, $a_n = 1\underbrace{444...44}_{n\ chu\ so\ 4}$

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho a_n là số chính phương.

Bài 70. Chứng minh rằng có vô số bộ ba 3 số tự nhiên (a,b,c) sao cho a,b,c nguyên tố cùng nhau và số $n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ là một số chính phương.

Bài 71. Tìm các số nguyên m và n để cho đa thức $p(x) = x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4, x \in \mathbb{Z}$ là một số chính phương.

Bài 72.

1. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất, $a \neq 0$ sao cho a chia hết cho 6 và 1000a là số chính phương.
2. Tìm số tự nhiên b nhỏ nhất sao cho số $(b-1)$ không chia hết cho 9, b chia hết cho tích của bốn số nguyên tố liên tiếp và 2002.b là số chính phương.

Bài 73. Cho a và b là 2 số tự nhiên, $a^2 - b^2$ có thể là một số chính phương không?

Bài 74. Tìm số tự nhiên $k = \overline{ab}$ có hai chữ số sao cho $k + ab = (a+b)^2$

Bài 75. Tìm tất cả các số nguyên n để $A = 2017^2\left(n^4 + n^3 + n^2\right)$ là số chính phương

(Tạp chí Toán & học tuổi trẻ số 468)

Bài 76. Tìm số nguyên dương n để $\dfrac{n-37}{n+43}$ là bình phương của một số hữu tỷ dương tùy ý.

(HSG Nam Định 2015 -2016)

Bài 77. Tìm số tự nhiên có dạng $\overline{abc}$ thỏa mãn: $\overline{abc} = n^2 - 1$ và $\overline{cba} = (n-2)^2$ với $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$.

(HSG Sóc Trăng 2015 - 2016)

Bài 78. Tìm số tự nhiên n sao cho $n+12$ và $n-11$ đều là số chính phương.

(HSG Sóc Trăng 2016 - 2017)

Bài 79. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương.

(HSG Quảng Nam 2014 - 2015)

Bài 80. Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết n + 4 và 2n đều là các số chính phương.

(HSG Trà Vinh 2016 - 2017)

Bài 81. Cho n là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho số $A = 1010n^2 + 2010(n+p) + 10^{10^{195}}$ có thể viết dưới dạng hiệu của 2 số chính phương.

(HSG Lâm Đồng 2016 - 2017).

Bài 82. Tìm nghiệm nguyên dương x để $3^x + 171$ là số chính phương.

(HSG Lai Châu 2015 - 2016)

Bài 83. Tìm tất cả các số tự nhiên x sao cho $5^x + 12^x$ là một số chính phương.

(HSG Bắc Giang 2015 - 2016)

Bài 84. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho A là một số chính phương với $A = 4n^4 + 22n^3 + 37n^2 + 12n - 12$.

(Chuyên Yên Bái 2016 - 2017).

Bài 85. Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

(Chuyên Hải Dương 2015 - 2016).

Bài 86. Tìm số tự nhiên n (n > 1) bé nhất sao cho $\dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n}$ là số chính phương.

(Tạp chí toán học tuổi trẻ số 362).

Bài 87: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho cả hai số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương.

Bài 88: Lấy một số tự nhiên có 2 chữ số chia cho số có 2 chữ số viết theo thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư 15. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương của 2 chữ số tạo thành số đó. Tìm số tự nhiên ấy.

Bài 89. Viết các số 1, 2, 3, …, 2007 thành dãy theo thứ tự tùy ý được số A. Hỏi số $A+2008^{2007}+2009$ có phải là số chính phương hay không? Vì sao?

(Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 377)

Bài 90. Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $x^5+y^5=2x^2y^2$. Chứng minh $1-xy$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 91. Cho m,n là hai số nguyên dương lẻ sao cho n^2-1 chia hết cho $[m^2+1-n^2]$. Chứng minh rằng $[m^2+1-n^2]$ là số chính phương.

Bài 92. Chứng minh rằng trong ba số chính phương tuỳ ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Bài 93. Chứng minh rằng $n^5+1999n+2017$ $(n\in N)$ không phải là số chính phương.

(HSG Tỉnh Quảng Ngãi 2017 – 2018)

Bài 94. Giả sử n là số nguyên dương thoả mãn điều kiện n^2+n+3 là số nguyên tố. Chứng minh rằng n chia 3 dư 1 và $7n^2+6n+2017$ không phải số chính phương.

(Chuyên Tỉnh Quảng Ngãi 2017-2018)

Bài 95. Cho x,y là các số nguyên thoả mãn $2x^2+x=3y^2+y$.

Chứng minh $x-y;2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

(HSG Tỉnh Thanh Hoá 2015-2016)

Bài 96. Cho biểu thức $A=2(1^2+2^2+...+2017^2)$. Hỏi A có là bình phương của một số nguyên hay không?

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 97. Cho a và b là các số tự nhiên thoả mãn $2016a^2+a=2017b^2+b$ (1).

Chứng minh rằng $a-b$ là một số chính phương.

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 98. Cho x,y,z là các số nguyên tố cùng nhau và thoả mãn $(x-z)(y-z)=z^2$. Chứng minh rằng tích 2017^2xyz là một số chính phương.

(Toán học tuổi thơ số 120)

Bài 99: Xác định số điện thoại của THCS thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

(HSG Bình Dương 2016 – 2017)

Bài 100: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $C = 2019^n + 2020$ là số chính phương.

(HSG Quảng Bình 2018 – 2019)

Bài 101: Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

(HSG Bắc Ninh 2018 – 2019)

Bài 102: Cho $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n.(n-1).(n-2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(HSG Bắc Ninh 2018 – 2019)

Bài 103: Cho số nguyên tố $p\ (p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p + a + 1)$ là số chính phương.

(HSG Quảng Nam 2018 – 2019)

Bài 104: Từ 625 số tự nhiên liên tiếp 1; 2; 3; …; 625 chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

(HSG Hưng Yên 2017 – 2018)

Bài 105: Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương.

(HSG Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 106: Tìm các số có 2 chữ số $\overline{ab}\ (a \neq b)$ sao cho số $n = \overline{ab} - \overline{ba}$ là một số chính phương

(HSG Hưng Yên 2015 – 2016)

Bài 107: Cho $a = \underbrace{111...1}_{2017\text{ cs }1}$ và $b = 1\underbrace{000...0}_{2016\text{ cs }0}5$. Chứng minh rằng số $M = ab + 1$ là số chính phương.

(HSG Đăk Lăk 2015 – 2016)

Chương III

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa số nguyên tố, hợp số.

1) Số nguyên tố là những số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước số là 1 và chính nó.

Ví dụ: 2, 3, 5, 7 11, 13,17, 19....

2) Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước.

Ví dụ: 4 có 3 ước số: 1 ; 2 và 4 nên 4 là hợp số.

3) Các số 0 và 1 không phải là só nguyên tố cũng không phải là hợp số

4) Bất kỳ số tự nhiên lớn hơn 1 nào cũng có ít nhất một ước số nguyên tố

2. Một số tính chất.

• Nếu số nguyên tố p chia hết cho số nguyên tố q thì $p = q$.

• Nếu tích abc chia hết cho số nguyên tố p thì ít nhất một thừa số của tích abc chia hết cho số nguyên tố p.

• Nếu a và b không chia hết cho số nguyên tố p thì tích ab không chia hết cho số nguyên tố p .

3. Cách nhận biết một số nguyên tố.

a) Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố đã biết từ nhỏ đến lớn.

• Nếu có một phép chia hết thì số đó không phải là số nguyên tố.

• Nếu chia cho đến lúc số thương nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn còn số dư thì số đó là số nguyên tố.

b) Một số có 2 ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố.

4. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố:

• Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố.

+ Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của mỗi số nguyên tố là chính số đó.

+ Mọi hợp số đều phân tích được ra thừa số nguyên tố

Chẳng hạn $A = a^{\alpha}.b^{\beta}...c^{\gamma}$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố và $\alpha, \beta, ..., \gamma \in \mathbb{N}^*$

Khi đó số các ước số của A được tính bằng $(\alpha+1)(\beta+1)...(\gamma+1)$

Tổng các ước số của A được tính bằng $\dfrac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\dfrac{b^{\beta+1}-1}{b-1}...\dfrac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$

5. Số nguyên tố cùng nhau.

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b) = 1$.

Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b,c) = 1$.

Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b) = (b,c) = (c,a) = 1$.

6. Cách nhận biết số nguyên tố.

Cách 1

- Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7...

- Nếu có một phép chia hết thì số đó không là số nguyên tố.

- Nếu thực hiện phép chia cho đến lúc thương số nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn có số dư thì số đó là số nguyên tố.

Cách 2

- Một số có hai ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải là số nguyên tố.

- Ước số nguyên tố nhỏ nhất của một hợp số A là một số không vượt quá $\sqrt{A}$.

- Với quy tắt trên trong một khoảng thời gian ngắn, với các dấu hiệu chia hết thì ta nhanh chóng trả lời được một số có hai chữ số nào đó là nguyên tố hay không.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

🗁 Dạng 1: Chứng minh một số là số nguyên tố hoặc hợp số

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n>1$ thì n^5+n^4+1 là hợp số.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n^5+n^4+1=\left(n^2+n+1\right)\left(n^3-n+1\right)$.

Mà $n>1$ nên $n^2+n+1>1$ và suy ra n^5+n^4+1 là hợp số.

Bài toán 2. Nếu p và p^2+8 là các số nguyên tố thì p^2+2 là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Xét $p=3k+1$ (k nguyên) thì $p^2+8 \vdots 3$, là hợp số.

Xét $p=3k+2$ thì $p^2+8 \vdots 3$, là hợp số.

Vậy $p=3k$, mà p là số nguyên tố nên $p=3$.

Khi đó $p^2+2=11$, là số nguyên tố.

Bài toán 3. Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Hướng dẫn giải

Trong ba số nguyên 2^n-1; 2^n; 2^n+1 có một số chia hết cho 3. Mặt khác, 2^n không chia hết cho 3, do đó một trong hai số 2^n-1; 2^n+1 phải có một số chia hết cho 3, nghĩa là một trong hai số này phải có một hợp số. Để cho 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ nên chắn chắn rằng 2^n+1 là một hợp số.

Bài toán 4. Cho p và $8p-1$ là các số nguyên tố. Chứng minh $8p+1$ là hợp số.

Hướng dẫn giải

Vì $8p-1$ là số nguyên tố nên $p \neq 2$.

Nếu $p=3$ thì $8p+1=25$ là hợp số.

Nếu $p>3$ thì $8p(8p-1)(8p+1) \vdots 3$. Vì p và $8p-1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên $8p+1$ chia hết cho 3 hay $8p+1$ là hợp số.

🗁 Dạng 2: Tìm số nguyên tố thỏa mãn điều kiện cho trước

*** Cơ sở phương pháp:**

** Trong n số nguyên liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho n.*

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng* $4n \pm 1$.

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng* $3k \pm 1$.

** Mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng* $6n \pm 1$.

Chứng minh:

**) Gọi m là số nguyên tố lớn hơn 2*

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 4 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 4n – 1; 4n ; 4n + 1; 4n + 2 .

Do m là số nguyên tố lớn hơn 2 nên không thể chia hết 2 do đó m không có dạng 4n và 4n + 2.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đê có dạng: $4n \pm 1$

Không phải mọi số có dạng $4n \pm 1$ *đều là số nguyên tố.*

Chẳng hạn 4. 4 - 1 = 15 không là số nguyên tố .

**) Gọi m là số nguyên tố lớn hơn 3*

Mỗi số tự nhiên khi chia cho 6 có một trong các số dư 0, 1, 2, 3, 4, 5 do đó mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng 6n – 1; 6n ; 6n + 1; 6n + 2 ; 6n + 3

Do m là số nguyên tố lớn hơn 3 nên không thể chia hết 2 và 3 do đó m không có dạng 4n và 6n; 6n + 2; 6n + 3.

Vậy mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đê có dạng: $6n \pm 1$.

Không phải mọi số có dạng $6n \pm 1 (n \in N)$ *đều là số nguyên tố.*

Chẳng hạn 6. 4 + 1 = 25 không là số nguyên tố.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2 và p + 4 là các số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Với p = 2 thì p + 2 = 4 và p + 4 = 6 không phải là các số nguyên tố.

Với p = 3 thì p + 2 = 5 và p + 4 = 7 là các số nguyên tố.

Với p > 3 mà p là số nguyên tố nên p có dạng p = 3k + 1 hoặc p = 3k + 2

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=3(3k+1)\vdots 3$ không là số nguyên tố.

Nếu p = 3k + 2 thì $p+4=3k+6=3(3k+2)\vdots 3$ không là số nguyên tố;

Vậy với $p=3$ thì p + 2 và p + 4 là số nguyên tố.

Bài toán 2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p + 2; p + 6; p + 8; p + 14 đều là các số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Trường hợp 1: p = 5k mà p nguyên tố nên p = 5, khi đó:

p + 2 = 7; p + 6 = 11; p + 8 = 13; p + 14 = 19 đều là số nguyên tố nên p = 5 thỏa mãn bài toán.

Trường hợp 2: p = 5k + 1, khi đó: p + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 14) nên p + 14 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 1 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 3: p = 5k + 2, khi đó: p + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 10) nên p + 10 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 2 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 4: p = 5k + 3, khi đó: p + 2 = 5k + 5 = 5(k + 1) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 2) nên p + 2 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 3 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Trường hợp 5: p = 5k + 4, khi đó: p + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2) có ít nhất là 3 ước 1, 5 và (p + 6) nên p + 6 không là số nguyên tố.

Vậy với p = 5k + 4 không có tồn tại p nguyên tố thỏa mãn bài toán

Do đó p = 5 là số cần tìm.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n sao cho $\dfrac{n^3-1}{9}$ là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

$n^3-1\vdots 9\Rightarrow n^3-1\vdots 3\Rightarrow n$ chia cho 3 dư 1 (vì nếu n chia cho 3 dư 0 hoặc 2 thì n^3 chia hết cho 3 dư 0 hoặc 2). Đặt $n=3k+1$ $(k\in N)$. Ta có

$$\frac{n^3-1}{9}=\frac{(3k+1)^3-1}{9}=\frac{27k^3+27k^2+9k}{9}=3k^3+3k^2+k=k(3k^2+3k+1)$$

Để $\dfrac{n^3-1}{9}$ là số nguyên tố, phải có $k=1$. Khi đó $n=4$ và $\dfrac{n^3-1}{9}=\dfrac{64-1}{9}=7$, là số nguyên tố.

Đáp số: $n=4$.

Bài toán 4. Tìm số nguyên tố p sao cho $43p+1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Đặt $43p+1=n^3\ (n\in N)$ thì $43p=(n-1)(n^2+n+1)$

Số $43p$ có bốn ước nguyên dương là $1, 43, p, 43p$ nên có ba trường hợp:

a) $\begin{cases} n-1=1 \\ n^2+n+1=43p \end{cases}$ Khi đó $n=2$ và $43p=2^2+2+1=7$, loại.

b) $\begin{cases} n-1=43 \\ n^2+n+1=p \end{cases}$ Khi đó $n=44$ và $p=44^2+44+1=1981\vdots 7$, loại.

c) $\begin{cases} n^2+n+1=43 \\ n-1=p \end{cases}$ Khi đó $n(n+1)=42 \Rightarrow n=6, p=5$ (là số nguyên tố).

Đáp số: $p=5$.

🗁 Dạng 3: Nhận biết số nguyên tố, sự phân bố nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên

Các bài toán nhận biết số nguyên tố, sự phân bố số nguyên tố trong N, giúp cho học sinh hướng suy nghĩ để chứng minh hoặc xem xét một số có phải là số nguyên tố hay không? Thông qua việc phân tích và xét hết khả năng có thể xảy ra, đối chiếu với giả thiết và các định lý, hệ quả đã học để loại bỏ các trường hợp mâu thuẫn. Bài toán số 4 là bài tập tổng quát về sự phân bố số nguyên tố trong N. Qua đó cho học sinh thấy được sự phân bố số nguyên tố "càng về sau càng rời rạc". Từ bài toán này có thể phát triển thành bài toán khác giúp học sinh rèn luyện kỹ xảo chứng minh.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho p là số nguyên tố và một trong 2 số 8p + 1 và 8p - 1 là 2 số nguyên tố, hỏi số thứ 3 (ngoài 2 số nguyên tố, số còn lại) là số nguyên tố hay hợp số?

Hướng dẫn giải

Với p = 3 ta có 8p + 1 = 25 là hợp số, còn 8p -1 là số nguyên tố.

Với $p\neq 3$ ta có 8p -1, 8p, 8p + 1 là 3 số nguyên tố liên tiếp nên có một số chia hết cho 3.

Do p là nguyên tố khác 3 nên 8p không chia hết cho 3,do đó 8p -1 hoặc 8p+1 có một số chia hết cho 3.

Vậy số thứ 3 ngoài hai số nguyên tố là hợp số.

Bài toán 2. Nếu p < 5 và 2p + 1 là các số nguyên tố thì 4p + 1 là nguyên tố hay hợp số

Hướng dẫn giải

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp: 4p; 4p + 1; 4p + 2

Trong 3 số ắt có một số là bội của 3

Mà $p < 5,\ p \in P$ nên p có dạng 3k + 1 hoặc 3k + 2

+) Nếu p = 3k + 1 thì 4p = 4(3k + 1) <=> 3Q + 1 = p

và 4p + 2 = 4(3k + 1) + 2 <=> p = 3.Q : 3

Mặt khác: 4p + 2 = 2(2p +1) = 3Q nên 3Q : 3

=> 2(2p + 1) : 3; (2;3) = 1 nên (2p + 1) : 3 (trái với giả thiết)

+) Nếu p có dạng 3k + 2

Khi đó 4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 12k + 9 = 3M : 3

=> 4p + 1 là hợp số

Vậy trong 3 số ắt có một số là bội của 3.

Bài toán 3. Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?

Hướng dẫn giải

Chọn dãy số:

$a_1 = 1998! + 2$ $\quad a_1 : 2$

$a_2 = 1998! + 3$ $\quad a_2 : 3$

$a_3 = 1998! + 4$ $\quad a_3 : 4$

....

$a_{1997} = 1998! + 1998$ $\quad a_{1997} : 1998$

Như vậy: Dãy số $a_1; a_2; a_3; \ldots\ldots a_{1997}$ gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

Bài toán 4. (Tổng quát bài số 3)

Chứng minh rằng có thể tìm được 1 dãy số gồm n số tự nhiên liên tiếp (n > 1) không có số nào là số nguyên tố ?

Hướng dẫn giải

Ta chọn dãy số sau:

$a_1 = (n + 1)! + 2$ $\quad a_1 : 2$ $\quad a_1 > 2$ nên a_1 là hợp số

$a_2 = (n + 1)! + 3$ $\quad a_2 : 3$ $\quad a_2 > 3$ nên a_2 là hợp số

....

$a_n = (n + 1)! + (n + 1)$ $\quad a_n : (n+1)$ $\quad a_n > (n+1)$ nên a_n là hợp số

Dãy $a_1; a_2; a_3; \ldots\ldots a_n$ ở trên sẽ gồm có n số tự nhiên liên tiếp trong đó không có số nào là số nguyên tố cả.

🗁 Dạng 4: Có bao nhiêu số nguyên tố dạng ax + b (với $x \in \mathbb{N}$ và (a,b) = 1)

Mục đích của những bài tập dạng này là: Rèn luyện cho học sinh khả năng tư duy sâu, cách xem xét và kết luận về một vấn đề toán học bằng cách xét hết các khả năng có thể xảy ra, dùng những vấn đề toán học đã được chứng minh hoặc đã biết để loại bỏ các khả năng không thể xảy ra và làm sáng tỏ vấn đề cần phải chứng minh.

Sau khi thành thạo dạng toán này học sinh THCS hiểu được sâu sắc hơn, có khái niệm rõ ràng hơn. Thế nào là chứng minh một vấn đề toán học và có được những kỹ năng, kỹ xảo chứng minh cần thiết.

Tuy nhiên, với dạng toán này, ở trình độ THCS các em chỉ giải quyết được những bài tập ở dạng đơn giản. Việc chứng các bài tập ở dạng này phức tạp hơn, các em sẽ gặp nhiều khó khăn chứ không thể dễ dàng chứng minh được. Chẳng hạn chứng minh về vô số số nguyên tố có dạng 4a + 1;   6a + 1......... phức tạp hơn nhiều.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng: có vô số số nguyên tố có dạng: $3x – 1$ $(x < 1)$

Hướng dẫn giải

Mọi số tự nhiên không nhỏ hơn 2 có 1 trong 3 dạng: $3x$; $3x + 1$; hoặc $3x - 1$

+) Những số có dạng $3x$ (với $x > 1$) là hợp số

+) Xét 2 số có dạng $3x + 1$: đó là số $(3m + 1)$ và số $(3n + 1)$

Xét tích $(3m + 1)(3n + 1) = 9mn + 3m + 3n + 1 = 3x + 1$

Tích trên có dạng: $3x + 1$

+) Lấy một số nguyên tố p có dạng $3x – 1$ (với p bất kỳ là số nguyên tố) ta lập tích của p với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p rồi trừ đi ta có:

$M = 2.3.5.7....p – 1 = 3(2.5.7....p) – 1$

M có dạng: $3x – 1$

Có 2 khả năng xảy ra:

* Khả năng 1: M là số nguyên tố, đó là số nguyên tố có dạng $(3x – 1) > p$, bài toán được chứng minh.

* Khả năng 2: M là hợp số: Ta chia M cho 2, 3, 5,....,p đều tồn tại một số dư khác 0 nên các ước nguyên tố của M đều lớn hơn p, trong các ước này không có số nào có dạng $3x + 1$ (đã chứng minh trên). Do đó ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng $3x$ (hợp số) hoặc $3x + 1$....

Vì nếu tất cả có dạng $3x + 1$ thì M phải có dạng $3x + 1$ (đã chứng minh trên). Do đó, ít nhất một trong các ước nguyên tố của M phải có dạng $3x + 1$, ước này luôn lớn hơn p.

Vậy: Có vô số số nguyên tố dạng $3x – 1$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng: Có vô số số nguyên tố có dạng $4x + 3$ (với $x \in \mathbb{N}$)

Hướng dẫn giải

Các số nguyên tố lẻ không thể có dạng 4x hoặc 4x + 2.

Vậy chúng chỉ có thể tồn tại dưới 1 trong 2 dạng

4x + 1 hoặc 4x + 3. Ta sẽ chứng minh có vô số số nguyên tố có dạng 4x + 3

+) Xét tích 2 số có dạng 4x + 1 là: 4m + 1 và 4n + 1

Ta có: $(4m + 1)(4n + 1) = 16mn + 4m + 4n + 1$

$= 4(4mn + m + n) + 1$

$= 4x + 1$

Vậy tích của 2 số có dạng 4x + 1 là một số cũng có dạng 4x + 1

+) Lấy một số nguyên tố p bất kỳ có dạng 4x – 1, ta lập tích của 4p với tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn p rồi trừ đi 1 khi đó ta có:

N = 4(2.3.5.7 ..... p) – 1 Có 2 khả năng xảy ra

**** Khả năng 1:***

N là số nguyên tố => N = 4(2.3.5.7....p) – 1 có dạng 4x – 1.

Những số nguyên tố có dạng 4x – 1 cũng chính là những số có dạng 4x + 3 và bài toán được chứng minh.

**** Khả năng 2:***

N là hợp số: Chia N cho 2, 3, 5, ..., p đều được các số dư khác 0 => các ước nguyên tố của N đều lớn hơn p.

Các ước này không thể có dạng 4x hoặc 4x + 2 (vì đó là hợp số). Cũng không thể toàn các ước có dạng 4x + 1 vì như thế N phải có dạng 4x + 1. Như vậy trong các ước nguyên tố của N có ít nhất 1 ước có dạng 4x – 1 mà ước này hiển nhiên lớn hơn p.

Vậy: Có vô số số nguyên tố có dạng 4x – 1 (hay có dạng 4x + 3).

Trên đây là mộ số bài toán chứng minh đơn giản của định lý Đirielet: Có vô số số nguyên tố dạng ax + b trong đó $x \in N$,(a,b) = 1.

🗁 Dạng 5: Các bài toán về các số nguyên tố cùng nhau

Hai số a và b nguyên tố cùng nhau ƯCLN(a, b) = 1.

Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau ƯCLN(a, b, c) = 1.

Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau

ƯCLN(a, b) = ƯCLN(b, c) = ƯCLN(c, a) = 1.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a)Hai số tự nhiên liên tiếp (khác 0) là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Hai số lẻ liên tiếp là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) 2n + 1 và 3n + 1 ($n \in N$) là hai số nhuyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $d \in uc(n, n+1) \Rightarrow (n+1) - n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$. Vậy n và n + 1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $d \in uc(2n+1, 2n+3) \Rightarrow (2n+3) - (2n+1) \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1, 2\}$. Nhưng $d \neq 2$ vì d là ước của số lẻ. Vậy d=1.

c) Gọi $d \in ƯC(2n+1, 3n+1) \Rightarrow 3(2n+1) - 2(3n+1) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d$.

Bài toán 2. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng hai số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau.

a) a và a + b.   b) a^2 và a + b.   c) ab và a + b.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $d \in ƯC(a, a+b) \Rightarrow (a+b) - a \vdots d \Rightarrow b \vdots d$. Ta lại có $a \vdots d$ nên $d \in ƯC(a, b)$, do đó d = 1(vì a, b là hai số nguyên tố cùng nhau).

Vậy (a, a + b) = 1.

b) Giả sử a^2 và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d thì a chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d. Như vậy a và b cùng chia hết cho số nguyên tố d, trái với giả thiết (a, b) = 1.

Vậy a^2 và a + b là hai số nguyên tố cùng nhau.

c) Giả sử ab và a + b cùng chia hết cho số nguyên tố d. Tồn tại một trong hai thừa số a và b, chẳng hạn là a, chia hết cho d, do đó b cũng chia hết cho d, trái với (a, b) = 1.

Vậy (ab, a + b) = 1.

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n để các số 9n + 24 và 3n + 4 là các số nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử 9n + 24 và 3n + 4 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$9n + 24 - 3(3n+4) \vdots d \Rightarrow 12 \vdots d \Rightarrow d \in \{2; 3\}$.

Điều kiện để (9n + 24, 3n + 4) = 1 là $d \neq 2$ và $d \neq 3$. Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 3n + 4 không chia hết cho 3. Muốn $d \neq 2$ phải có ít nhất một trong hai số 9n + 4 và 3n + 4 không chia hết cho 2. Ta thấy:

9n + 4 là số lẻ ⇔ 9n lẻ ⇔ n lẻ,

3n + 4 là số lẻ ⇔ 3n lẻ ⇔ n lẻ.

Vậy điều kiện để (9n + 4, 3n + 4) = 1 là n là số lẻ.

🗁 **Dạng 6: Sử dụng nguyên lý Dirichlet trong bài toán số nguyên tố**

Bài toán 1. Cho $p > 5$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại một số có dạng $111\ldots11$ chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Ta xét dãy số: $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{p}$

Nếu trong dãy trên không có số nào chia hết cho p thì ta cho tương ứng mỗi số với số dư của phép chia. Tập hợp các số dư chỉ có $1, 2, 3, \ldots, p-1$ gồm $p-1$ phần tử (vì 0 không thể có trong tập này).

Nhưng vì chúng ta có p số ở dạng trên nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư. Giả sử các số đó là: $\underbrace{111\ldots1}_{m}$ và $\underbrace{111\ldots1}_{n}$ với $m > n$.

Khi đó $1 \le n < m \le p$.

Như vậy: $\underbrace{111\ldots1}_{m} - \underbrace{111\ldots1}_{n} = \underbrace{111\ldots1}_{m-n}\underbrace{000\ldots0}_{n} = \underbrace{111\ldots1}_{m-n}.10^n$

Tích này chia hết cho p vì $(p, 10) = 1$, suy ra $\underbrace{111\ldots1}_{m-n}$ chia hết cho p và nó cũng nằm trong dãy trên. Mà $1 \le m - n \le p$ mâu thuẫn với giả thiết không có số nào trong dãy chia hết cho p.

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số ký hiệu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sao cho $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6) \vdots 1800$.

Hướng dẫn giải

Vì ba số nguyên tố đầu tiên là $2, 3, 5$ nên trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Vì số nguyên tố lớn hơn 5 nên: 9 số trên khi chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 2. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất 5 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Mà 5 số này lại không chia hết cho 5, vì thế trong 5 số ấy có ít nhất 2 số mà ta có thể giả sử là p_1, p_2 sao cho $(p_1 - p_2) \vdots 5$. Ngoài ra hiển nhiên ta có $(p_1 - p_2) \vdots 3$ dẫn đến $(p_1 - p_2) \vdots 15$

Xét 7 số còn lại. theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 4 số có cùng số dư khi chia hết cho 3. Đem 4 số này chia cho 5 cho hai khả năng xảy ra:

Nếu có 2 số (chẳng hạn p_3, p_4)mà $(p_3 - p_4) \vdots 5$. Rõ ràng $(p_3 - p_4) \vdots 2$ và $(p_3 - p_4) \vdots 3$. Vì $(5; 3; 2) = 1$ nên ta có $(p_3 - p_4) \vdots 30$. Lấy hai số p_5, p_6 bất kì (ngoài ra p_1, p_2, p_3, p_4) đã chọn thì p_5, p_6 lẻ (do số nguyên tố khác 2) nên $(p_5 + p_6) \vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6) \vdots 30.30.2 = 1800$.

Nếu 4 số này khi chia cho 5 có các số dư khác nhau là $1;2;3;4$. Giả sử $(p_5-1)\vdots 5$, $(p_6-4)\vdots 5$ thì $(p_5+p_5-5)\vdots 5$ hay $(p_5+p_6)\vdots 5$

Với 2 số còn lại p_3,p_4 thì rõ ràng $(p_3-p_4)\vdots 3$ (theo cách chọn 4 số trên)

Do $p_3;p_4;p_5;p_6$ lẻ nên $(p_5+p_6)\vdots 2,(p_3-p_4)\vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_5+p_6)\vdots 10$ và $(p_3-p_4)\vdots 6$.

Do đó $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 30.10.6=1800$

Vậy tồn tại p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 là các số nguyên tố phân biên sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 1800$.

🗁 Dạng 7: Áp dụng định lý Fermat

p là số nguyên tố và $(a,p)=1$ thì $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho $n\in\mathbb{N}^*$, chứng minh rằng $2^{2^{10n+1}}+19$ và $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là những hợp số.

Hướng dẫn giải

a) Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}}+19\vdots 23$ với mọi $n\geq 1$.

Ta có: $2^{10}\equiv 1\,(\text{mod } 1)\Rightarrow 2^{10n+1}\equiv 2\,\,(\text{mod } 22)\Rightarrow 2^{10n+1}=22k+2\,(k\in\mathbb{N})$.

Theo Định lí Fermat:

$2^{22}\equiv 1\,(\text{mod } 23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=2^{22k+2}\equiv 4\,\,(\text{mod } 23)\Rightarrow 2^{2^{10n+1}}=19\vdots 23$.

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}}+19>23$ nên $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số với mọi $n\in\mathbb{N}*$.

b) Ta chứng minh $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5\vdots 11$ với mọi $n\geq 1$.

Bài toán 2. Tìm số nguyên tố p sao cho 2^p+1 chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Giả sử p là số nguyên tố thỏa mãn $2^p+1\vdots p$.

Theo Định lí Fermat:

$2^p\equiv 2\,(\text{mod } p)\Rightarrow 2^p-2\vdots p\Rightarrow 3=(2^p+1)-(2^p-2)\vdots p\Rightarrow p=3$.

Với $p=3$ ta có $2^p+1=9\vdots 3$.

Bài toán 3. Cho p là số ngyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên thỏa $n.2^n - 1$ chia hết cho p.

Hướng dẫn giải

Ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ta tìm $n = m(p-1)$ sao cho $n.2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Ta có: $n.2^n = m(p-1).2^{m(p-1)} \equiv m(p-1) \pmod{p} \Rightarrow n.2^n \equiv -m \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow m = kp - 1\ (k \in \mathbb{N}^*)$.

Vậy, với $n = (kp-1)(p-1)\quad (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $n.2^2 - 1 \vdots p$

Bài toán 4. Cho p là số nguyên tố, chứng ming rằng số $2^p - 1$ chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk + 1$.

Hướng dẫn giải

Gọi q là ước nguyên tố của $2^p - 1$ thì q lẻ, nên theo Định lí Fermat:

$2^{q-1} - 1 \vdots q \Rightarrow (2^p - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^{(p,q-1)} - 1 \vdots q \Rightarrow q - 1 \vdots p$, vì nếu $(q-1, p) = 1$ thì $1 \vdots q$, vô lí.

Mặt khác, $q - 1$ chẵn suy ra $q - 1 \vdots 2p \Rightarrow q = 2pk + 1$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng là số nguyên tố:

a) p + 2 và p + 10.

b) p + 10 và p + 20.

c) p +2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là các số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu a, a + k, a + 2k ($a, k \in N^*$) là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì k chia hết cho 6.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p - 1)(p + 1) chia hết cho 24.

Bài 5. Một số nguyên tố p chia cho 42 có dư là một hợp số r. Tìm r.

Bài 6. Một số nguyên tố p chia cho 30 có số dư là r. Tìm r biết rằng r không là số nguyên tố.

Bài 7. Chứng minh rằng số $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}$ là hợp số với $n \geq 1$.

Bài 8. Tìm n số sao cho 10101...0101 (n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 xen kẽ nhau) là số nguyên tố.

Bài 9. Các số sau là số nguyên tố hay hợp số.

a) A = 11...1(2001 chữ số 1);

b) B = 11...1 (2000 chữ số 1);

c) C = 1010101;

d) D = 1112111;

e) E = 1! + 2! + 3! +...+100!;

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28;

h) H= 311141111.

Bài 10. Cho $n \in N*$,chứng minh rằng các số sau là hợp số:

a) A = $2^{2^{2n+1}} + 3$;

b) B = $2^{2^{4n+1}} + 7$;

c) C = $2^{2^{6n+2}} + 13$.

Bài 11. p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng $p^4 \equiv 1$ (mod 240).

Bài 12. Chứng minh rằng dãy $a_n = 10^n + 3$ có vô số hợp số.

Bài 13. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p có vô số dạng $2^n - n$ chia hết cho p.

Bài 14. Tìm $n \in N*$ để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Bài 15. Tìm các số $x, y \in N*$ sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố.

Bài 16. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + 1$ $(n \geq 1)$.

Bài 17. Cho $n \in N*$, chứng minh $A = n^4 + 4^n$ là hợp số với n>1.

Bài 18. Giải phương trình nghiệm nguyên $4(a-x)(x-b) + b - a = y^2$ (1)

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và a > b.

Bài 19. Giải phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $x^2 + y^2 = 585$

b) $x^2 + y^2 = 1210$.

Bài 20. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, các số sau là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) 7n + 10 và 5n + 7 ;

b) 2n + 3 và 4n + 8.

Bài 21. Cho a và b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng các số sau cũng là hai số nguyên tố cùng nhau:

a) b và a - b (a > b) ;

b) $a^2 + b^2$ và ab.

Bài 22. Chứng minh rằng nếu số c nguyên tố cùng với a và với b thì c nguyên tố cùng nhau với tích ab.

Bài 23. Tìm số tự nhiên n, sao cho:

a) $4n - 5$ chia hết cho 13 ;

b) $5n + 1$ chia hết cho 7 ;

c) $25n + 3$ chia hết cho 53.

Bài 24. Tìm các số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau:

a) $4n + 3$ và $2n + 3$;

b) $7n + 13$ và $2n + 4$;

c) $9n + 24$ và $3n + 4$;

d) $18n + 3$ và $21n + 7$

Bài 25. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n để $n + 15$ và $n + 72$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 26. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Đồng Nai năm học 2018-2019)*

Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999

Bài 27. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Ninh Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ sao cho $pqr = p + q + r + 160$.

Bài 28. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

Bài 29. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Phú Yên năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố p, q sao cho $8q + 1 = p^2$.

Bài 30. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thái Bình năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ sao cho $\dfrac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Bài 31. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Cho số nguyên tố $p\ (p > 3)$ và hai số nguyên dương a, b sao cho $p^2 + a^2 = b^2$.

Bài 32. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2017-2018)*

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Bài 33. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2016-2017)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016} - 1$ chia hết cho 60.

Bài 34. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên tố khác nhau m, n, p, q thỏa mãn

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} = 1.$$

Bài 35. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2015-2016)*

Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình: $54x^3+1=y^3$.

Bài 36. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Vĩnh Long năm học 2015-2016)*

Cho p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p=q+2$. Tìm số dư khi chia $p+q$ cho 12.

Bài 37. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Hà Nội năm học 2015-2016)*

Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho 2^x+x^2 là số nguyên tố.

Bài 38. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Nghệ An năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n sao cho số 2015 có thể viết được thành tổng của n hợp số nhưng không thể viết được thành tổng của n + 1 hợp số.

Bài 39. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Thanh Hóa năm học 2014-2015)*

Tìm tất cả các số nguyên tố *p*, *q* sao cho tồn tại số tự nhiên *m* thỏa mãn :

$$\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+1}{m+1}.$$

Bài 40. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Hải Dương năm học 2014-2015)*

Tìm số nguyên tố *p* sao cho các số $2p^2-1;\ 2p^2+3;\ 3p^2+4$ đều là số nguyên tố.

Bài 41. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Cẩm Thủy năm học 2011-2012)*

Tìm số tự nhiên n để $A=n^{2012}+n^{2002}+1$ là số nguyên tố

Bài 42. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Tiền Hải năm học 2016-2017)*

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}} \text{ là số hữu tỉ và } a^2+b^2+c^2 \text{ là số nguyên tố}$$

Bài 43. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Gia Lộc năm học 2015-2016)*

Tìm số nguyên tố k để k^2+4 và k^2+16 đồng thời là các số nguyên tố.

Bài 44. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Lục Nam năm học 2018-2019)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{20}-1$ chia hết cho 100

Bài 45. *(Trích đề thi học sinh giỏi lớp 9 Kim Thành năm học 2018-2019)*

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2-1 \vdots 24$

Bài 46. *(Trích đề chọn học sinh giỏi lớp 9 Amsterdam năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$

Bài 47. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Hải Phòng năm học 2019-2020)*

Tìm các số nguyên tố *p*, *q* thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) p^2q+p chia hết cho p^2+q

ii) pq^2+q chia hết cho q^2-p

Bài 48. *(Trích đề vào 10 Chuyên toán Quảng Bình năm học 2019-2020)*

Cho $\overline{abc}$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49. *(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm học 2018-2019)*

Tìm các số nguyên dương *a, b* nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn $\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{9}{41}$.

Bài 50. *(Trích đề vào 10 Chuyên Tin Lam Sơn năm học 2015-2016)*

Cho dãy số tự nhiên 2; 6; 30; 210; ... được xác định như sau: số hạng thứ k bằng tích của k số nguyên tố đầu tiên $(k=1;2;3;...)$. Biết rằng có hai số hạng của dãy số đó có hiệu bằng 30000. Tìm hai số hạng đó.

Bài 51. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vinh năm học 2018-2019)*

Cho số tự nhiên $n\ge 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p-1$ chia hết cho n đồng thời n^3-1 chia hết cho p. Chứng minh rằng $n+p$ là một số chính phương

Bài 52. *(Trích đề vào 10 Chuyên Quảng Nam năm học 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố p và q, biết rằng $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

Bài 53. *(Trích đề vào 10 Chuyên Hải Dương năm học 2018-2019)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n,k để n^8+4^{2k+1} là số nguyên tố

Bài 54. *(Trích đề vào 10 Chuyên Vĩnh Long năm học 2018-2019)*

Tìm các số tự nhiên x thỏa mãn biểu thức $P=-x^4+x^2+14x+49$ là số nguyên tố

Bài 55. *(Trích đề vào 10 Chuyên Phú Thọ năm học 2015-2016)*

Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn n^2+4 và n^2+16 là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Bài 56. *(Trích đề vào 10 Chuyên Amsterdam năm học 2014-2015)*

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Bài 57. *(Trích đề vào 10 Chuyên TP Hồ Chí Minh năm học 2014-2015)*

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Bài 58. *(Trích đề vào 10 Chuyên Thái Bình năm học 2014-2015)*

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Chứng minh a + b + c + d là hợp số.

Bài 59. *(Trích đề HSG lớp 8 Gia Viễn năm học 2014-2015)*

Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$

Bài 60. *(Trích đề HSG lớp 8 Thanh Chương năm học 2012-2013)*

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

Bài 61. *(Trích đề HSG lớp 8 Bắc Ninh năm học 2018-2019)*

Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\dfrac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \dfrac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 62. *(Trích đề HSG lớp 8 Trực Ninh năm học 2017-2018)*

Cho p và $2p + 1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số

Bài 63. *(Trích đề HSG lớp 8)*

Cho số nguyên tố p > 3. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64. *(Trích đề HSG lớp 7 Triệu Sơn 2016-2017)*

Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r.

Bài 65. *(Trích đề HSG lớp 6 Hoằng Hóa 2018-2019)*

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $7p + q$ và $pq + 11$ đều là số nguyên tố.

Bài 66. *(Trích đề HSG lớp 6 Sông Lô 2018-2019)*

Biết $\overline{abcd}$ là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn $\overline{ab}$; $\overline{cd}$ cũng là các sô snguyeen tố và $b^2 = \overline{cd} + b - c$. Hãy tìm $\overline{abcd}$

Bài 67. *(Trích đề HSG lớp 6 TP Bắc Ninh 2018-2019)*

Cho các số $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b$ là các số nguyên tố $(a, b, c \in N^*)$. Chứng minh rằng ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài 68. *(Trích đề HSG lớp 6 Gia Bình 2018-2019)*

Giả sử p và $p^2 + 2$ là các số nguyên tố. Chứng tỏ $p^3 + p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 69. *(Trích đề HSG lớp 6 Nghĩa Đàn 2018-2019)*

Tìm hai số nguyên tố x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = 45$.

Bài 70. *(Trích đề HSG lớp 6 Như Thanh 2018-2019)*

1) Chứng minh rằng hai số $2n + 1$ và $10n + 7$ là hai số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên n.
2) Tìm các số x, y nguyên tố để $x^2 + 23 = y^3$.

Bài 71. *(Trích đề HSG lớp 6 Nông Cống 2018-2019)*

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}(a>b>0)$, biết $\overline{ab}-\overline{ba}$ là số chính phương

Bài 72. Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Bài 74. Cho p, q, r, s là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2-q^2+r^2-s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ sao cho $p^2-2q^2=1$.

Bài 76. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $p^3+\frac{p-1}{2}$ không phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 77. Tìm các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^q+q^p=r$

Bài 78. Tìm các số nguyên tố p,q,r thỏa mãn các điều kiện sau:

$$5\le p<q<r;49\le 2p^2-r^2;2q^2-r^2\le 193$$

Bài 79. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a,b,c đôi một khác nhau thoả mãn điều kiện

$$20abc<30(ab+bc+ca)<21abc$$

Bài 80. Tìm các số nguyến tố p, q và số nguyên x thỏa mãn $x^5+px+3q=0$

Bài 81.Tìm số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Bài 82. Chứng minh rằng nếu tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương thì x là hợp số.

Bài 83. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{p^2-p-2}{2}$ là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 84. Cho bảy số nguyên tố khác nhau $a,b,c,a+b+c,a+b-c,a+c-b,b+c-a$ trong đó hai trong ba số a, b, c có tổng bằng 800. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong bảy số nguyên tố đó. Hỏi giá trị lớn nhất của d có thể nhận là bao nhiêu.

Bài 85. Cho số nguyên tố p. Giả sử x và y là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2+py^2}{xy}$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2+py^2}{xy}=p+1$

Bài 86. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số 2016 viết được thành $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ trong đó các số $a_1;a_2;a_3;...;a_n$ là các hợp số. Kết quả trên thay đổi như thế nào nếu thay số 2016 bằng số 2017.

Bài 87. Tìm tất cả số nguyên tố p, q, r thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3)=4pqr$.

Bài 88. Cho số tự nhiên $n \ge 2$, xét các số $a_1; a_2; ...; a_n$ và các số nguyên tố phân biệt $p_1; p_2; ...; p_n$ thỏa mãn điều kiện $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = ... = p_n|a_n - a_1|$. Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bài 89. Tồn tại hay không số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b + 2011 = c$.

Bài 90.Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mỗi số nguyên tố p đó luôn tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n = x^3 + y^3$.

Bài 91. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Bài 92. Cho p là một số nguyên tố. Tìm các số nguyên k sao cho $\sqrt{k^2 - kp}$ là một số nguyên dương.

Bài 93. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Bài 94. Cho a, b là các số nguyên và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu p^4 là ước của $a^2 + b^2$ và $a(a+b)^2$ thì p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 95. Tìm các số nguyên không âm a, b sao cho $a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4$ là số nguyên tố.

Bài 96. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a là số nguyên dương. Biết $f(5) - f(4) = 2012$. Chứng minh rằng $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Bài 97. Cho đa thức bậc ba f(x) với hệ số của x^3 là một số nguyên dương và biết $f(5) - f(3) = 2010$. Chứng minh rằng $f(7) - f(1)$ là hợp số.

Bài 98. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(m; p; q)$ sao cho p, q là số nguyên tố và $2^m.p^2 + 1 = q^5$.

Bài 99.Tìm sáu số nguyên tố $p_1; p_2; p_3; p_4; p_5; p_6$ thỏa mãn $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^3 + p_5^2 = p_6^2$.

Bài 100. Cho số nguyên tố p dạng $4k + 3$. Tồn tại hay không số nguyên a nào thỏa điều kiện $(a^2 + 1) \vdots p$

Bài 101. Tìm $n \in N^*$ để:

a) $n^4 + 4$ là số nguyên tố. b) $n^{2003} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Bài 102.

a) Tìm các số nguyên số p để 2p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số nguyên tố p để 13p + 1 là lập phương của một số tự nhên.

Bài 103. Tìm tất cả các số nguyên tố x, y thỏa $x^2 - 2y^2 = 1$.

Bài 104. Tìm các số nguyên tố x, y, z thỏa $x^y + 1 = z$.

Bài 105. Chứng minh rằng nếu $1 + 2^n + 4^n (n \in N^*)$ là số nguyên tố thì $n = 3^k$ với $k \in N$.

Bài 106. Cho $a,b,c,d \in N^*$ thỏa mãn $ab = cd$. Chứng minh rằng: $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi $n \in N$.

Bài 107. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $\frac{n(n+1)}{2} - 1 \quad (n \geq 1)$.

Bài 108. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

Bài 109. a) Cho $2^k + 1$ là số nguyên tố (gọi là nguyên tố Fermat). Chứng minh rằng k = 0 hoặc $k = 2^n$.

b) Cho $2^k - 1$ là số nguyên tố (gọi là số nguyên tố Mersenne). Chứng minh rằng k là số nguyên tố.

Bài 110. Tìm k để trong 10 số tự nhiên liên tiếp: k + 1; k + 2; k + 3;....k + 10 có nhiều số nguyên tố nhất.

Bài 111. Chứng minh rằng: (p – 1)! chia hết cho p nếu p là hợp số, không chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Bài 112. Chứng minh rằng: mọi ước nguyên tố của 1994! – 1 đều lớn hơn 1994.

Bài 113. Chứng minh rằng: n > 2 thì giữa n và n! có ít nhất 1 số nguyên tố (từ đó suy ra có vô số số nguyên tố).

Bài 114. Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m = \frac{9^p - 1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1} \equiv 1$ (mod m).

Bài 115. Chứng minh rằng dãy số $2003 + 23k$ với $k = 1, 2, 3....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Bài 116. Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

Bài 117. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - y^3 = 7 \qquad (1)$

Bài 118. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

Bài 119. Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

Bài 120. Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.

Bài 121. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho chúng là hợp số.

Bài 122. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2^n - 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng n là số nguyên tố.

Bài 123. Tìm số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 124. Cho p,q là các số nguyên tố và phương trình $x^2 - px + q = 0$ có nghiệm nguyên dương. Tìm p và q .

Bài 125. Cho p,q,r là các số nguyên tố và n là các số tự nhiên thỏa $p^n + q^n = r^2$. Chứng minh rằng $n = 1$.

Bài 126. Cho p là số nguyên tố dạng $4k+3$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2$ chia hết cho p khi và chỉ khi x và y chia hết cho p .

Bài 127. Tìm các số tự nhiên m,n sao cho $x = 3^{3m^2+6n-61} + 4$ là số nguyên tố.

Bài 128. Tìm tất cả các số tự nhiên a,b,c sao cho $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố.

Bài 129. Tìm các số nguyên tố a,b,c sao cho $ab + bc + ca > abc$.

Bài 130. Tìm các số nguyên tố a,b,c và số nguyên dương k sao cho $a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$.

Bài 131. Tìm các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 \mid q^3 + 1$ và $q^2 \mid p^6 - 1$.

Bài 132. Ta gọi p, q là hai số nguyên tố liên tiếp, nếu giữa p và q không có số nguyên tố nào khác. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp p, q, r sao cho $p^2 + q^2 + r^2$ cũng là số nguyên tố.

Bài 133. Cho số $A = \dfrac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$. Chứng minh A là một hợp số.

Bài 134. Cho p và $p+2$ là số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $p+1 \vdots 6$.

Bài 135. Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố $(p > 3)$. Chứng minh rằng $p+8$ là hợp số.

Bài 136. *(Chuyên Vũng Tàu 2016-2017)*

Tìm các cặp số nguyên tố (p,q) thỏa mãn $p^2 - 5q^2 = 4$.

Bài 137. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn chọn ra được 6 số ký hiệu p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 sao cho $(p_1 - p_2)(p_4 - p_3)(p_5 + p_6) \vdots 1800$.

Bài 138. *(Đề thi HSG Toán TP.HCM năm học 2004 – 2005)*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phần nguyên của $\dfrac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n}$ là một số nguyên tố.

Bài 139. Cho p,q là hai số nguyên tố sao cho $p > q > 3$ và $p - q = 2$. Chứng minh rằng: $(p+q) \vdots 12$.

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giải phương trình nghiệm nguyên.

Giải phương trình *f(x, y, z, ...) = 0* chứa các ẩn x, y, z, ... với nghiệm nguyên là tìm tất cả các bộ số nguyên (x, y, z, ...) thỏa mãn phương trình đó.

2. Một số lưu ý khi giải phương trình nghiệm nguyên.

Khi giải các phương trình nghiệm nguyên cần vận dụng linh hoạt các tính chất về chia hết, đồng dư, tính chẵn lẻ,… để tìm ra điểm đặc biệt của các ẩn số cũng như các biểu thức chứa ẩn trong phương trình, từ đó đưa phương trình về các dạng mà ta đã biết cách giải hoặc đưa về những phương trình đơn giản hơn. Các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên là:

- Phương pháp dùng tính chất chia hết
- Phương pháp xét số dư từng vế
- Phương pháp sử dụng bất đẳng thức
- Phương pháp dùng tính chất của số chính phương
- Phương pháp lùi vô hạn, nguyên tắc cực hạn.

B. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHIA HẾT

🗁 Dạng 1: Phát hiện tính chia hết của một ẩn

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x+17y=159 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn phương trình (1). Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên $17y\,\vdots\,3 \Rightarrow y\,\vdots\,3$ (do 17 và 3 nguyên tố cùng nhau).

Đặt $y=3t\left(t\in Z\right)$ thay vào phương trình ta được $3x+17.3t=159 \Leftrightarrow x+17t=53$.

Do đó: $\begin{cases} x=53-17t \\ y=3t \end{cases}\left(t\in Z\right)$. Thử lại ta thấy thỏa mãn phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (53 – 17t, 3t) với t là số nguyên tùy ý.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x+13y=156$ (1).

Hướng dẫn giải

- Phương pháp 1: Ta có $13y \vdots 13$ và $156 \vdots 13$ nên $2x \vdots 13 \Rightarrow x \vdots 13$ (vì (2,3) = 1).

Đặt $x=13k$ $(k\in Z)$ thay vào (1) ta được: $y=-2k+12$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x=13k \\ y=-2k+12 \end{cases} (k\in Z)$.

- Phương pháp 2: Từ $(1)\Rightarrow x=\dfrac{156-13y}{2}=78-\dfrac{13y}{2}$,

Để $x\in Z\Rightarrow \dfrac{13y}{2}\in Z$ Mà $(13,2)=1\Rightarrow y \vdots 2$ Đặt $y=2t(t\in Z)\Rightarrow x=78-13t$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x=78-13t \\ y=-2t \end{cases} (t\in Z)$.

Chú ý: *Phương trình có dạng* $ax+by=c$ *với a,b,c là các số nguyên.*

** Phương pháp giải:*

- Phương pháp 1: Xét tính chia hết của các hạng tử.

- Phương pháp 2: Khử ẩn, sử dụng tính chia hết tìm điều kiện để một phân số trở thành số nguyên.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $23x+53y=109$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x=\dfrac{109-53y}{23}=\dfrac{23(4-2y)+17-7y}{23}=4-2y+\dfrac{17-7y}{23}$

Ta phải biến đổi tiếp phân số $\dfrac{17-7y}{23}$ để sao cho hệ số của biến y là 1.

Phân tích: Ta thêm, bớt vào tử số một bội thích hợp của 23

$$\frac{17-7y}{23}=\frac{17-7y+46-46}{23}=\frac{7(9-y)-46}{23}=-2+\frac{7(9-y)}{23}$$

Từ đó $x=2-2y+\dfrac{7(9-y)}{23}$, Để $x\in Z\Rightarrow \dfrac{9-y}{23}\in Z$, do $(7,23)=1$.

Đặt $9-y=23t$ $(t\in Z)\Rightarrow y=9-23t$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $\begin{cases} x=9-23t \\ y=53t-16 \end{cases} (t\in Z)$.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $11x+18y=120 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $11x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 6$ suy ra $x=6k(k\in Z)$ thay vào (1) rút gọn ta được: $11k+3y=20$

Biểu thị ẩn mà hệ số của nó có giá trị tuyệt đối nhỏ (là y) theo k ta được: $y=\dfrac{20-11k}{3}$

Tách riêng giá trị nguyên của biểu thức này: $y=7-4k+\dfrac{k-1}{3}$

Lại đặt: $\dfrac{k-1}{3}=t(t\in Z)\Rightarrow k=3t+1$.

Do đó: $y=7-4(3t+1)+t=3-11t;\quad x=6k=6(3t+1)=18t+6$

Thay các biểu thức trên vào phương trình (1) thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của phưng trình là (x, y) = (18t + 6; 3-11t) với $t \in Z$

Chú ý: *a) Nếu đề bài yêu cầu tìm nghiệm nguyên dương của phương trình (1) thì sau khi tìm được nghiệm tổng quát ta có thể giải điều kiện:*

$$\begin{cases}18t+6>0\\3-11t>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<t<\frac{3}{11}$$

Do đó t = 0 do t là số nguyên. Nghiệm nguyên dương của (1) là (x, y) = (6, 3).

Trong trường hợp tìm nghiệm nguyên dương của (1) ta còn có thể giải như sau: 11x + 18y = 120

Do $y\ge 1$ *nên* $11x\le 120-18.1=102.$

Do x nguyên nên $x\le 9$ *. Mặt khác* $x\vdots 6$ *và x nguyên dương nên x = 6* $\Rightarrow y=3$

b) Có nhiều cách tách giá trị nguyên của biểu thức $y=\dfrac{20-11k}{3}$*, chẳng hạn:*

$y=7-4k+\dfrac{k-1}{3}$ *(cách 1)*

$y=7-3k-\dfrac{1+2k}{3}$ *(cách 2)*

$y=6-3k+\dfrac{2(1-k)}{3}$ *(cách 3)*

Ta thấy: - Cách 1 gọn hơn cách 2 vì ở cách 1 hệ số của k trong phân thức bằng 1, do đó sau khi đặt $\dfrac{k-1}{3}=t$ *ta không cần thêm một ẩn phụ nào nữa*

- Trong cách 3, nhờ đặt được thừa số chung mà hệ số của k của phần phân số bằng -1, do đó sau khi đặt $\dfrac{1-k}{3}=t$ *cũng không cần dùng thêm thừa số phụ nào nữa.*

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2+5y^2=74$

Hướng dẫn giải

Ta có: $6x^2+5y^2=74 \Leftrightarrow 6\left(x^2-4\right)=5\left(10-y^2\right)(2)$

Từ (2) suy ra $6\left(x^2-4\right)\vdots 5$, mặt khác $(6,5)=1 \Rightarrow \left(x^2-4\right)\vdots 5$ $\Rightarrow x^2=5t+4\left(t\in N\right)$

Thay $x^2-4=5t$ vào (2) ta có: $30t=5\left(10-y^2\right) \Leftrightarrow y^2=10-6t$

Ta có: $x^2>0, y^2>0 \Leftrightarrow \begin{cases}5t+4>0\\10t-6>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t>-\dfrac{4}{5}\\t<\dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5}<t<\dfrac{5}{3}, t\in N$ .Suy ra: $t\in\{0;1\}$

Với $t=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $t=1$ ta có: $\begin{cases}x^2=9\\y^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 3\\y=\pm 2\end{cases}$. Mặt khác x, y nguyên dương nên x = 3, y = 2.

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (3, 2).

🗁 Dạng 2: Phương pháp đưa về phương trình ước số

*** Cơ sở phương pháp:**

Ta tìm cách đưa phương trình đã cho thành phương trình có một vế là tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là hằng số nguyên.

Thực chất là biến đổi phương trình về dạng: $A(x;y).B(x;y)=c$ *trong đó* $A(x;y), B(x;y)$ *là các biểu thức nguyên, c là một số nguyên.*

Xét các trường hợp $A(x;y), B(x;y)$ *theo ước của c.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy-x+y=3$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}&2xy-x+y=3\\ \Leftrightarrow\ &4xy-2x+2y=6\\ \Leftrightarrow\ &2x(2y-1)+(2y-1)=6-1\\ \Leftrightarrow\ &(2y-1)(2x+1)=5.\end{aligned}$$

Ta gọi phương trình trên là ***phương trình ước số***: vế trái là một tích các thừa số nguyên, vế trái là hằng số. Ta có x và y là các số nguyên nên 2x + 1 và 2y – 1 là các số nguyên và là ước của 5.

(2x + 1) và (2y - 1) là các ước số của 5 nên ta có:

2x + 1	1	-1	5	-5
2y - 1	5	-5	1	-1

Vập phương trình có các nguyện nguyên là (x, y) = (3, 0); (-1, -2); (2, 1); (-3, 0).

Kinh nghiệm giải: *Để đưa vế trái* $2xy-x+y$ *về phương trình dạng tích, ta biến đổi thành* $x\left(2y-1\right)+\frac{1}{2}\left(2y-1\right)$ *bằng cách nhân 2 vế của phương trình với 2 rồi bớt 1 ca 1 để đưa về phương trình ước số. Luyện tập kinh nghiệm này bằng ví dụ 2 sau đây.*

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x-3y=2xy-11$.

Hướng dẫn giải

$$5x-3y=2xy-11\Rightarrow x(5-2y)+\frac{3}{2}(5-2y)-\frac{15}{2}+11=0$$

$$\Leftrightarrow \left(5-2y\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{-7}{2}\Leftrightarrow \left(2y-5\right).\frac{2x+3}{2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow \left(2y-5\right)\left(2x+3\right)=7 \qquad (*)$$

(2x + 3) và (2y - 5) là các ước số của 7 nên ta có:

2x + 3	1	-1	7	-7
2y - 5	7	-7	1	-1

Vập phương trình có các nguyện nguyên là (x, y) = (-1, 6); (-2, -1); (2, 3); (-5, 2).

Nhận xét: *Đối với nhiều phương trình nghiệm nguyên việc đưa phương trình đã cho thành phương trình có một vế là tích các biểu thức có giá trị nguyên, vế phải là hằng số nguyên là rất khó khăn ta có thể áp dụng một số thủ thuật được thể hiện trong ví dụ 3 sau đây.*

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-2xy+3y-5x+7=0$.

Hướng dẫn giải

$$x^2-2xy+3y-5x+7=0\Leftrightarrow x^2-x(2y+5)+\frac{(2y+5)^2}{4}+\frac{-(2y+5)^2}{4}+3y+7=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2+\frac{-4y^2-20y-25+12y+28}{4}=0\Leftrightarrow \left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-\frac{4y^2+8y-3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-\frac{4(y+1)^2-7}{4}=0\Leftrightarrow \left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2-(y+1)^2=\frac{-7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2x-2y-5\right)^2}{4}-(y+1)^2=\frac{-7}{4}\Leftrightarrow \left(2x-2y-5\right)^2-4\left(y+1\right)^2=-7$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-2y-5-2y-2\right)\left(2x-2y-5+2y+2\right)=-7\Leftrightarrow \left(2x-4y-7\right)\left(2x-3\right)=-7 \qquad (*)$$

Vì x, y nguyên nên từ PT(*) ta có các trường hợp sau:

1) $\begin{cases} 2x-4y-7=1 \\ 2x-3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-4y-7=-7 \\ 2x-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-4y-7=-1 \\ 2x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-4y-7=7 \\ 2x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình là: (-2; -3); (2; 1); (5; 1);(1; -3).

Nhận xét: *Trong cách giải trên ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tam thức bậc hai* $\left(ax^2+bxy+cy^2, ax^2+bx+c\right)$*: trước hết ta chọn một biến để đưa về hằng đẳng thức (Bình phương của một tổng, hoặc một hiệu) chứa biến đó: ở đây ta chọn biến x là :* $x^2-x(2y+5)+\frac{(2y+5)^2}{4}$*, phần còn lại của đa thức ta lại làm như vậy với biến y:* $\frac{-(2y+5)^2}{4}+3y+7=-\frac{4y^2+8y-3}{4}=-\frac{4(y+1)^2-7}{4}$.

Các bạn có thể tư duy tìm hướng giải như sau:

$x^2-2xy+3y-5x+7=0 \Leftrightarrow x^2-(2y+5)x+3y+7+a=a \quad (*)$

Xét phương trình: $x^2-(2y+5)x+3y+7+a=0 \; (**)$

Với a là số chưa biết cần thêm vào, xác định a như sau:

$$\begin{aligned}\Delta_{(**)} &= (2y+5)^2-4(3y+7+a) \\ &= 4y^2+20y+25-12y-28-4a \\ &= 4y^2+8y-3-4a\end{aligned}$$

Chọn a để $\Delta_{(**)}$ là số chính phương nên $-3-4a=4 \Rightarrow a=\frac{-7}{4}$ .khi đó :

$\Delta_{(**)}=4(x+1)^2 \Rightarrow x_1=\frac{2y+5-2(x+1)}{2}=\frac{3}{2}, x_2=\frac{2y+5+2(x+1)}{2}=\frac{4y+7}{2}$

Vậy: $(*) \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{4y+7}{2}\right)=-\frac{7}{4} \Leftrightarrow (2x-3)(2x-4y-7)=-7$

Vì x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

1) $\begin{cases} 2x-4y-7=1 \\ 2x-3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-4y-7=-7 \\ 2x-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-4y-7=-1 \\ 2x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-4y-7=7 \\ 2x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình là: (-2; -3); (2; 1); (5; 1);(1; -3).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2+12x=y^2$ $\quad(1)$

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với :

$x^2+12x=y^2 \Leftrightarrow (x+6)^2-y^2=36 \Leftrightarrow (x+y+6)(x-y+6)=36$

Suy ra (x + y + 6) và (x – y + 6) là ước của 36.

Mà 36 có 18 ước nên: $(x+y+6)\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm9;\pm18;\pm36\}$

Kết quả ta tìm được các nghiệm nguyên là: $(0,0);(-12,0);(-16,8);(-16,-8);(4,8);(4,-8)$

Nhận xét: *Phương pháp đưa về phương trình ước số có 2 bước: Phân tích thành ước và xét các trường hợp. Hai bước này có thể không khó nhưng trong trường hợp hằng số phải xét có nhiều ước số chúng ta cần dựa vào tính chất của biến (ví dụ: tính chẵn lẻ, số dư từng vế) để giảm số trường hợp cần xét.*

*Trong trường hợp **ví dụ 4** ta có thể nhận xét như sau:*

Do y có số mũ chẵn nên nếu y là nghiệm thì – y cũng là nghiệm nên ta giả sử $y\ge 0$ *. Khi đó* $x+6-y\le x+6+y$ *ta giảm được 8 trường hợp*

$\begin{cases}x+6+y=9\\x+6-y=4\end{cases}$, $\begin{cases}x+6+y=-9\\x+6-y=-4\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=-1\\x+y-6=-36\end{cases}$

$\begin{cases}x+y+6=36\\x-y+6=1\end{cases}$, $\begin{cases}x+6+y=-2\\x+6-y=-18\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=18\\x+y-6=2\end{cases}$

$\begin{cases}x+6+y=-3\\x+6-y=-12\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=12\\x+y-6=3\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=-6\\x+y-6=-6\end{cases}$

$\begin{cases}x+y+6=6\\x+y-6=6\end{cases}$

Bây giờ có 10 trường hợp, ta lại thấy $(x+6+y)+(x+6-y)=2y$ *nên* $(x+6+y),(x+6-y)$ *có cùng tính chẵn lẻ.Do đó ta còn 4 trường hợp:*

$\begin{cases}x+6+y=-2\\x+6-y=-18\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=18\\x+y-6=2\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=-6\\x+y-6=-6\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=6\\x+y-6=6\end{cases}$

Tiếp tục xét hai phương trình $\begin{cases}x+y+6=-6\\x+y-6=-6\end{cases}$, $\begin{cases}x+y+6=6\\x+y-6=6\end{cases}$ *hai phương trình này đều có nghiệm y = 0 ta có xét y = 0 ngay từ đầu. Ta có phương trình ban đầu:* $x(x+12)=y^2$ *, xét hai khả năng:*

Nếu y = 0 thì x = 0 hoặc x = - 12

Nếu $y\ne 0$ *thì* $x+6-y<x+6+y$ *áp dụng hai nhận xét trên ta chỉ phải xét 2 trường hợp*

$\begin{cases} x+6+y=-2 \\ x+6-y=-18 \end{cases}, \begin{cases} x+y+6=18 \\ x+y-6=2 \end{cases}$

Giải và kết luận phương trình có 4 nghiệm $(0,0);(-12,0);(-16,8);(-16,-8);(4,8);(4,-8)$

🗁 Dạng 3: Phương pháp tách ra các giá trị nguyên.

*** Cơ sở phương pháp:**

Trong nhiều bài toán phương trình nghiệm nguyên ta tách phương trình ban đầu thành các phần có giá trị nguyên để dễ dàng đánh giá tìm ra nghiệm, đa số các bài toán sử dụng phương pháp này thường rút một ẩn (có bậc nhất) theo ẩn còn lại.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $xy-2y-3y+1=0$

Hướng dẫn giải

Ta có $xy-2y-3y+1=0 \Rightarrow y(x-3)=2x-1.$

Ta thấy $x=3$ không là nghiệm nên $x \neq 3$ do đó: $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$

Tách ra ở phân thức $\dfrac{2x-1}{x-3}$ các giá trị nguyên:

$$y=\frac{2x-1}{x-3}=\frac{2(x-3)+5}{x-3}=2+\frac{5}{x-3}$$

Do y là số nguyên nên $\dfrac{5}{x-3}$ cũng là số nguyên, do đó (x – 3) là ước của 5.

+) x – 3 = 1 thì x = 4, y = 2 + 5 = 7

+) x -3 = -1 thì x = 2, y = 2 – 5 = -3 (loại)

+) x – 3 = 5 thì x = 8, y = 2 +1 = 3

+) x – 3 = -5 thì x = -2 (loại)

Vậy nghiệm (x, y) là (4, 7) , (8, 3).

Bài toán 2. Tìm các số nguyên *x* và *y* thoả mãn phương trình: $x^2+xy-2y-x-5=0$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: trong phương trình này ẩn y có bậc nhất nên rút y theo x.

Ta có: $x^2+xy-2y-x-5=0 \Leftrightarrow y(x-2)=-x^2+x+5 \quad (*)$

Với x = 2 thì: $(*) \Leftrightarrow 0=3$ (vô lý)

Với $x \ne 2$ ta có: $\left(*\right) \Leftrightarrow y = \dfrac{-x^2+x+2}{x-2} + \dfrac{3}{x-2} = -x-1+\dfrac{3}{x-2}$

Để y nguyên thì $3 \vdots \left(x-2\right)$. Vậy (x – 2) là ước của 3 do đó:

$\left(x-2\right) \in \left\{-3, -1, 1, 3\right\} \Rightarrow x \in \left\{-1, 1, 3, 5\right\}$

Vậy phương trình có nghiệm: (x, y) = (3; - 1) ; (5; -5); (1; -5); (-1; - 1)

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $6x+5y+18=2xy$ (1)

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x = \frac{-5y-18}{6-2y} \Leftrightarrow 2x = \frac{-10y-36}{6-2y}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{-66+5\left(6-2y\right)}{6-2y} = \frac{-66}{6-2y} + 5 \Leftrightarrow 2x = \frac{-33}{3-y} + 5$$

Như vậy x muốn nguyên dương thì (3 – y) phải là ước của – 33. Hay $\left(3-y\right) \in \left\{\pm1; \pm3; \pm11; \pm33\right\}$. Lại do $y \ge 1 \Rightarrow 3-y \le 2 \Rightarrow y \in \left\{\pm1; -3; -11; -33\right\}$. Ta có bảng sau:

3 - y	-1	1	-3	-11	-33
y	4	2	6	14	36
x	19	- 14	8	4	3

Thử lại ta được các cặp thỏa mãn là (19, 4); (8, 6); (4, 14); (3, 36).

Nhận xét: *- Dễ xác định được phương pháp để giải bài toán này, khi biểu diễn x theo y được* $x = \dfrac{-5y-18}{6-2y}$ *. Ta thấy biểu thức này khó phân tích như 2 ví dụ trên, tuy nhiên để ý ta thấy tử số là – 5y mẫu số là -2y, do đó mạnh dạn nhân 2 vào tử số để xuất hiện 2y giống mẫu.*

- Bài toán có thể giải bằng phương pháp đưa về phương trình ước số. Do ở bài toán trên đã nhân 2 ở x để biến đổi, do đó phải có bước thử lại xem x, y có thỏa mãn phương trình đã cho hay không.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy$

Hướng dẫn giải

Ta có: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy \Leftrightarrow 2y^2\left(x-1\right)-x\left(x-1\right)-y\left(x-1\right)+1=0 \quad (1)$

Nhận thấy x = 1 không là nghiệm của phương trình (1).

Chia cả 2 vế của (1) cho (x – 1) ta được: $2y^2-x-y+\dfrac{1}{x-1}=0 \quad \left(2\right)$

PT có nghiệm x, y nguyên, suy ra $\frac{1}{x-1}$ nguyên nên $x-1\in\{1;-1\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$

Thay x = 2 và x = 0 vào phương trình và để ý đến y nguyên ta được y = 1.

Vập phương trình đã cho có 2 nghiệm là (2; 1) và (0; 1).

II. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH CHẴN LẺ CỦA ẨN HOẶC XÉT SỐ DƯ TỪNG VẾ

*** Cơ sở phương pháp:**

Chúng ta dựa vào tính chẵn lẻ của ẩn hoặc xét số dư hai vế của phương trình nghiệm nguyên với một số nguyên nào đó rồi dùng luận luận để giải bài toán.

*** Ví dụ minh họa:**

🗁 **Dạng 1: Sử dụng tính chẵn lẻ**

Bài toán 1. Tìm x, y nguyên tố thoả mãn $y^2-2x^2=1$

Hướng dẫn giải

Ta có $y^2-2x^2=1\Rightarrow y^2=2x^2+1\Rightarrow y$ là số lẻ

Đặt y = 2k + 1 (với k nguyên).Ta có $(2k+1)^2=2x^2+1$

$\Leftrightarrow x^2=2k^2+2k\Rightarrow$ x chẵn , mà x nguyên tố $\Rightarrow$ x = 2, y = 3

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (2, 3).

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$(2x+5y+1)\left(2^{|x|}+y+x^2+x\right)=105$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(2x+5y+1)\left(2^{|x|}+y+x^2+x\right)=105$

Ta thấy 105 lẻ $\Rightarrow$ 2x + 5y + 1 lẻ $\Rightarrow$ 5y chẵn $\Rightarrow$ y chẵn, $2^{|x|}+y+x^2+x=2^{|x|}+y+x(x+1)$ lẻ có x(x+ 1) chẵn, y chẵn $\Rightarrow 2^{|x|}$ lẻ $\Rightarrow 2^{|x|}=1\Rightarrow x=0$

Thay x = 0 vào phương trình ta được

$(5y+1)(y+1)=105\Leftrightarrow 5y^2+6y-104=0\Rightarrow y=4$ hoặc $y=-\frac{26}{5}$ (loại)

Thử lại ta có x = 0; y = 4 là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (0, 4).

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ và xét số dư từng vế

Bài toán 1. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$ b) $x^2 + y^2 = 1999$

Hướng dẫn giải

a) Do x là số nguyên nên $x = 2k$ hoặc $x = 2k+1$ $(k \in Z)$ do đó $x^2 = 4k^2 \vee x^2 = 4k^2 + 4k + 1$

vì thế x^2 chia 4 luôn dư 1 hoặc 0. Tương tự ta cũng có y^2 chia 4 luôn dư 1 hoặc 0

Suy ra: $x^2 - y^2$ chia cho 4 luôn dư 1 hoặc 0 hoặc 3. Mà 1998 chia cho 4 dư 2 do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Như chứng minh câu a ta có: x^2, y^2 chia cho 4 luôn dư 0 hoặc 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 luôn dư 0 hoặc 1 hoặc 3. Mà 1999 chia cho 4 dư 3 do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Chú ý: *Chúng ta cần lưu ý kết quả ở bài toán này:*

*) $x^2 - y^2$ *chia cho 4 không dư 2*

*) $x^2 + y^2$ *chia cho 4 không dư 3*

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 2 = y^2 + y$

Hướng dẫn giải

Ta có: $9x + 2 = y^2 + y \Leftrightarrow 9x + 2 = y(y+1)$

Ta thấy vế trái phương trình là số chia cho 3 dư 2 nên $y(y+1)$ chia cho 3 dư 2

Do đó chỉ có thể $y = 3k+1$ và $y = 3k+2$ $(k \in Z)$

Khi đó: $9x + 2 = (3k+1)(3k+2) \Leftrightarrow 9x = 9k^2 + 9k \Leftrightarrow x = k(k+1)$

Thử lại: $x = k(k+1), y = 3k+1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $(x, y) = (k(k+1), 3k+1)$ với $k \in Z$

Bài toán 3. Tìm x, y là số tự nhiên thoả mãn $x^2 + 3^y = 3026$

Hướng dẫn giải

Xét $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 3026 \Rightarrow x^2 = 3025$. Mà $x \in N \Rightarrow x = 55$

Xét $y > 0 \Rightarrow 3^y$ chia hết cho 3, x^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1 $\Rightarrow x^2 + 3^y$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà 3026 chia cho 3 dư 2 (loại)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y) = (55,0)$

Bài toán 4. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 7y = 51$ không có nghiệm nguyên

Hướng dẫn giải

Xét $x = 7k\left(k \in Z\right)$ thì $x^3 \vdots 7$.

Xét $x = 7k \pm 1\left(k \in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x = 7k \pm 2\left(k \in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Xét $x = 7k \pm 3\left(k \in Z\right)$ thì x^3 chia cho 7 dư 1 hoặc 6.

Do đó vế trái phương trình chia cho 7 dư 0 hoặc 1 hoặc 6 còn vế phải của phương trình chia 7 dư 2. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 5y^2 = 27$

Hướng dẫn giải

Do x là số nguyên nên ta có thể biểu diễn x dưới dạng: $x = 5k$ hoặc $x = 5k \pm 1$ hoặc $x = 5k \pm 2$ với $k \in Z$

- Xét $x = 5k$ thì $x^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow \left(5k\right)^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5\left(5k^2 - y^2\right) = 27$

Điều này là vô lý vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

- Xét $x = 5k \pm 1$ thì $x^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow \left(5k \pm 1\right)^2 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 25k^2 \pm 10k + 1 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5\left(5k^2 \pm 2k - y^2\right) = 23$

Điều này là vô lý cũng vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

- Xét $x = 5k \pm 2$ thì $x^2 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow \left(5k \pm 2\right)^2 - 5y^2 = 27$

$\Leftrightarrow 25k^2 \pm 10k + 1 - 5y^2 = 27 \Leftrightarrow 5\left(5k^2 \pm 4k - y^2\right) = 23$

Điều này là vô lý cũng vì vế trái chia hết cho 5 với mọi k và y nguyên còn vế phải không chia hết cho 5.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

III. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

🗁 **Dạng 1: Sử dụng bất đẳng thức cổ điển**

*** Cơ sở phương pháp:**

Trong nhiều bài toán ta thường sử dụng bất đẳng thức để chứng minh một vế không nhỏ hơn (hoặc không lớn hơn) vế còn lại. Muốn cho phương trình có nghiệm thì dấu bằng của bất đẳng thức phải xảy ra đó là nghiệm của phương trình.

Một số bất đẳng thức Cổ điển thường được sử dụng như:

1. Bất đẳng thức Cauchy (tên quốc tế là AM – GM)

Nếu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *là các số thực không âm thì:* $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt{a_1.a_2.a_3\ldots a_n}$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki với hai bộ số thực bất kì $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ *và* $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ *ta có* $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) \ge (a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)^2$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại số thực k $(k \ne 0)$ *sao cho* $a_i = kb_i$ *với i = 1, 2, 3,…, n.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình: $(x^2+1)(x^2+y^2) = 4x^2y$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$x^2 + 1 \ge 2x$ Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

$x^2 + y^2 \ge 2xy$ Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Do x, y dương nên nhân 2 vế của bất đẳng thức trên ta được $(x^2+1)(x^2+y^2) \ge 4x^2y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

$$x^6 + z^3 - 15x^2z = 3x^2y^2z - (y^2+5)^3 \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^6 + z^3 + (y^2+5)^3 = 15x^2z + 3x^2y^2z \Leftrightarrow x^6 + z^3 + (y^2+5)^3 = 3x^2z(y^2+5)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $x^6 + z^3 + (y^2+5)^3 \ge 3x^2z(y^2+5)$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = y^2 + 5 = z$

Từ $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 5$ giải ra được nghiệm (x, y, z) = (3, 2, 9).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $(x+y+1)^2 = 3(x^2+y^2+1)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức ***Bunhiacopxki*** ta có: $(1+1+1)(x^2+y^2+1) \ge (x+y+1)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{1} \Leftrightarrow x=y=1$

Vậy nguyệm nguyên của phương trình là (x, y) = (1, 1).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

Hướng dẫn giải

Với $|x| \ge 2$ và $|y| \ge 2$ ta có:

$$\begin{cases} x^2y^2 \ge 4x^2 \\ x^2y^2 \ge 4y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2y^2 \ge 2(x^2+y^2) = x^2+y^2+x^2+y^2 \overset{AM-GM}{\ge} x^2+y^2+2|xy| > x^2+y^2+xy.$$

Vậy $|x| \le 2$ hoặc $|y| \le 2$

Nếu x = -2 hoặc x = 2 thì phương trình không có nghiệm nguyên.

Thử x = -1, 1, 0 ta thấy phương trình có 3 nghiệm (0;0), (1; - 1), (-1; 1).

Dạng 2: Sắp xếp thứ tự các ẩn

*** Cơ sở phương pháp:**

Khi phương trình đối xứng với các ẩn $x, y, z, \ldots$, ta thường giả sử $x \le y \le z \le \ldots$ để giới hạn miền nghiệm của phương trình và bắt đầu đi tìm từ nghiệm bé nhất trở đi

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $2xyz = x+y+z$

Hướng dẫn giải

Giả sử $x \le y \le z$. Ta có: $2xyz = x+y+z \le 3z$

Chia 2 vế cho z dương ta được $2xy \le 3 \Rightarrow xy \le 1 \Rightarrow xy = 1$

Do đó x = y = 1. Thay vào phương trình ban đầu ta được: 2z = z + 2 hay z = 2.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là (x, y, z) = (1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Hướng dẫn giải

Do x, y, z có vai trò như nhau nên ta giả sử: $x \le y \le z$

Khi đó: $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le 3 \Rightarrow x \in \{1;2;3\}$ $\left(\text{do } x \in Z^+\right)$

Với x = 1 phương trình đã cho vô nghiệm.

Với x = 2 ta có: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{2}+\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 4$. Mặt khác $y\ge x=2\Rightarrow y\in\{2,3,4\}$

+) y = 2 thì phương trình vô nghiệm.

+) y = 3 thì z = 6

+) y = 4 thì z = 4

Với x = 3 ta có: $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{3}+\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 3$. Mặt khác $y\ge x=3\Rightarrow y=3\Rightarrow z=3$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y, z) = (2, 3, 6); (2, 4, 4); (3, 3, 3).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=z$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi thành: $xyz=x+y$.

Do đối xứng của x và y nên có thể giả thiết rằng $x\le y$. Ta có

$xyz=x+y\le y+y=2y\Rightarrow xz\le 2$.

Ta lựa chọn nghiệm trong các trường hợp sau: x = 1, z = 1; x = 2, z = 1; x =1, z = 2

Ta suy ra nghiệm (x, y, z) là (1, 1, 2) và (2, 2, 1).

Nhận xét: *Ở bài toán này do vai trò của x, y, z là không bình đẳng nên ta không có thể giải sử* $x\le y\le z$ *ta chỉ có thể giả sử* $x\le y$

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$5(x+y+z+t)+10=2xyzt$$

Hướng dẫn giải

Ta giả sử $x\ge y\ge z\ge t\ge 1$

Ta có: $5(x+y+z+t)+10=2xyzt$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{5}{yzt}+\frac{5}{xzt}+\frac{5}{xyt}+\frac{5}{xyz}+\frac{10}{xyzt}\le\frac{30}{t^3}\Rightarrow t^3\le 15\Rightarrow t=1\vee t=2$$

Với t = 1 ta có:

$$5(x+y+z+1)+10=2xyz$$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{5}{yz}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{xy}+\frac{15}{xyz}\le\frac{30}{z^2}\Rightarrow z^2\le 15\Rightarrow z=\{1;2;3\}$$

Nếu z =1 ta có $5\left(x+y\right)+20=2xy \Leftrightarrow \left(2x-5\right)\left(2y-5\right)=65 \Rightarrow \begin{cases} x=35 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}$

Ta được nghiệm (35, 3, 1, 1) ; (9, 5, 1, 1) và các hoán vị của chúng.

Với z = 2, z = 3 phương trình không có nghiệm nguyên.

Với t = 2 ta có:

$$5\left(x+y+z+1\right)+20=4xyz$$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{5}{yz}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{xy}+\frac{20}{xyz}\le\frac{35}{z^2}\Rightarrow z^2\le\frac{35}{4}\le 9\left(z\ge t\ge 2\right)\Rightarrow\left(8x-5\right)\left(8y-5\right)=265$$

Do $x \ge y \ge z \ge 2$ nên $8x - 5 \ge 8y - 5 \ge 11$

$\Rightarrow (8x - 5)(8y - 5) = 265$ vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình là bộ (x, y, z)= (35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị.

Dạng 3: Chỉ ra nghiệm nguyên

*** Cơ sở phương pháp:** Chúng ta xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng: chỉ ra một hoặc vài số là nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $3^x+4^x=5^x$

Hướng dẫn giải

Chia hai vế của phương trình cho 5^x ta được: $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$

Thử thấy x = 1 không là nghiệm của phương trình trên.

Với x = 2 thì VT = VP = 1 thỏa mãn bài toán.

Với $x\ge 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x\le\left(\frac{3}{5}\right)^2$ và $\left(\frac{4}{5}\right)^x\le\left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau: $2^x+3^x=35$

Hướng dẫn giải

Thử thấy x = 0; x = 1; x = 2 không thỏa mãn $2^x+3^x=35$

Với x = 3 thì $2^3+3^3=35$ (đúng)

Với $x \ge 3$ thì $2^3+3^3>35$

Vậy x = 3 là nghiệm của phương trình.

🗁 Dạng 4: Sử dụng điều kiện $\Delta \ge 0$ để phương trình bậc hai có nghiệm

*** Cơ sở phương pháp:**

Ta viết phương trình *f(x, y) = 0* dưới dạng phương trình bậc hai đối với một ẩn, chẳng hạn đối với x khi đó y là tham số. Điều kiện để phương trình có nghiệm nguyên là $\Delta \ge 0$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 - 2x + y = 9$.

Hướng dẫn giải

Ta xem phương trình đã cho là phương trình ẩn x tham số y, ta viết lại như sau:

$$x^2 - 2x + \left(y^2 + y - 9\right) = 0$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì :

$$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 1 - \left(y^2 + y - 9\right) \ge 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 10 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 40 \le 0 \Leftrightarrow \left(2y+1\right)^2 \le 41$$

Do đó: $\left(2y+1\right)^2 \in \left\{1; 9; 25\right\}$. Ta có:

2y+1	1	-1	3	-3	5	-5
2y	0	-2	2	-4	4	-6
y	0	-1	1	-2	2	-3
x	Loại	Loại	Loại	Loại	3 và -1	3 và -1

Vậy nghiệm của phương trình là (x, y) = (3, 2); (-1, 2); (3, -3); (-1, -3).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 = 2xy + 2x + 3y \quad (*)$

Hướng dẫn giải

Ta xem phương trình đã cho là phương trình ẩn x tham số y, ta viết lại như sau:

$$x^2 - 2\left(y+1\right)x + 2y^2 - 3y = 0$$

Ta có: $\Delta' = \left(y+1\right)^2 - \left(2y^2 - 3y\right) = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 3y = -y^2 + 5y + 1$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì:

$$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow -y^2 + 5y + 1 \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{29}}{2} \le y - \frac{5}{2} \le \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{29}}{2} \le y \le \frac{5+\sqrt{29}}{2} \Leftrightarrow \frac{5-6}{2} < y < \frac{5+6}{2}$$

Vì y nguyên nên $y \in \{0,1,2,3,4,5\}$ thay vào phương trình ta tính được giá trị của x.

Giải ra ta được nghiệm của phương trình là (x, y) = (0, 0); (0, 2).

Nhận xét: *Ở ví dụ này mình đã cố tình tính* Δ' *cho các bạn thấy rằng khi tính* Δ *hoặc* Δ' *có dạng tam thức bậc 2 :* $f(x) = ay^2 + by + c$ *với a < 0 ta mới áp dụng phương pháp này, nếu a > 0 thì chúng ta áp dụng phương pháp đưa về phương trình ước số.*

IV. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

🗁 Dạng 1: Dùng tính chất về chia hết của số chính phương

*** Cơ sở phương pháp:**

- Số chính phương không thể có chữ tận cùng bằng 2, 3, 7, 8;

- Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì cũng chia hết cho p^2

- Số chính phương chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1;

- Số chính phương chia 4 có số dư là 0 hoặc 1;

- Số chính phương chia cho 8 có số dư là 0, 1 hoặc 4.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $9x + 5 = y(y+1)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 9x + 5 = y(y+1) \\ \Leftrightarrow\ & 36x + 20 = 4y^2 + 4y \\ \Leftrightarrow\ & 36x + 21 = 4y^2 + 4y + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 3(12x+7) = (2y+1)^2. \end{aligned}$$

Số chính phương chia hết cho 3 nên cũng chia hết cho 9, ta lại có 12x + 7 không chia hết cho 3 nên 3(12x + 7) không chia hết cho 9. Do đó phương trình vô nghiệm.

Cách khác:

$$\begin{aligned} & 9x + 5 = y(y+1) \\ \Leftrightarrow\ & y^2 + y - 9x - 5 = 0 \\ & \Delta = 1 + 4(9x+5) = 36x + 21 = 3(12x+7) \end{aligned}$$

Ta có Δ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không là số chính phương do đó không tồn tại y nguyên. Vậy phương trình vô nghiệm.

🗁 Dạng 2: Biến đổi phương trình về dạng $a_1A_1^2 + a_2A_2^2 + \ldots + a_nA_n^2 = k$**, trong đó** $A_i(i = 1,\ldots,n)$ **là các đa thức hệ số nguyên,** a_i **là số nguyên dương,** k **là số tự nhiên**

*** Cơ sở phương pháp:**

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ $(a+b)^2$, đưa phương trình về dạng trên. Sau đó dựa vào tính chất các a_i, A_i để phân tích thành $k = a_1k_1^2 + a_2k_2^2 + ... + a_nk_n^2$ (với $k_i \in \mathbb{Z}$), dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1^2 = k_1^2 \\ A_2^2 = k_2^2 \\ \quad ... \\ A_n^2 = k_n^2 \end{cases}$$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 - x - y = 8$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$x^2 + y^2 - x - y = 8 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y = 32$

$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 4x - 1\right) + \left(4y^2 - 4y + 1\right) = 34 \Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2 + \left(2y-1\right)^2 = 34$

$\Leftrightarrow \left|2x-1\right|^2 + \left|2y-1\right|^2 = 3^2 + 5^2$

Ta thấy 34 chỉ có duy nhất một dạng phân tích thành hai số chính phương là 3^2 và 5^2.

Do đó: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(2x-1\right)^2 = 3^2 \\ \left(2y-1\right)^2 = 5^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(2x-1\right)^2 = 5^2 \\ \left(2y-1\right)^2 = 3^2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left|2x-1\right| = 3 \\ \left|2y-1\right| = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} \left|2x-1\right| = 5 \\ \left|2y-1\right| = 3 \end{cases} \end{array}\right.$

Giải ra ta được 4 nghiệm (x, y) = (2, 3); (-1, -2); (-2; -1); (3, 2).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x-y)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x-y) \Leftrightarrow x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x(2y+1) + (2y+1)^2 - (2y+1)^2 + 5y^2 + 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2y-1)^2 + (y-1)^2 = 2(*)$

Xét phương trình (*) ta có: $\left(x-2y-1\right)^2 \geq 0 \;\; \forall x, y \Rightarrow \left(y-1\right)^2 \leq 2$

Mà x nguyên nên $\left(y-1\right)^2 \in \left\{0, 1\right\}$

* Với $\left(y-1\right)^2 = 0$ thì $\left(x-2y-1\right)^2 = 2$ (loại)

* Với $\left(y-1\right)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y-1=1\\y-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\y=0\end{array}\right.$

- $y=2\Rightarrow\left(x-4-1\right)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=1\\x-5=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=4\end{array}\right.$

- $y=0\Rightarrow\left(x-0-1\right)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=1\\x-1=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(x,y\right)=\left(6,2\right);\left(4,2\right);\left(2,0\right);\left(0,0\right)$.

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên $5x^2-2xy+y^2=17$ **.**

Hướng dẫn giải

Ta có $5x^2-2xy+y^2=17\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2+4x^2=17\Leftrightarrow(x-y)^2=17-4x^2$ (*)

Xét phương trình (*) ta có $\left(x-y\right)^2\ge0,\forall x,y\Rightarrow17-4x^2\ge0\Rightarrow x^2\le\dfrac{17}{4}$

Mà x là số nguyên nên $x^2\in\left\{0;1;4\right\}$

- Với $x^2=0\Rightarrow(x-y)^2=17$ (loại).

- Với $x^2=1\Rightarrow(x-y)^2=13$ (loại)

- Với $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$,

Với $x=2\Rightarrow(2-y)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-y=1\\2-y=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.$

Với $x=-2\Rightarrow(2+y)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2+y=1\\2+y=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=-3\end{array}\right.$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: (2; 1), (2; 3), (-2; -1); (-2; -3).

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x+y+xy=x^2+y^2$

Hướng dẫn giải

Biến đổi: $x+y+xy=x^2+y^2\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(x-y\right)^2=2.$

Tổng của ba số chính phương bằng 2 nên tồn tại một số bằng 0.

Trường hợp: x – 1 = 0 ta được (1; 0), (1; 2)

Trường hợp: y – 1 = 0 ta được: (0; 1), (2; 1)

Trường hợp x – y = 0 ta được: (0; 0), (2; 2)

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (1; 0), (1; 2), (0; 1), (2; 1), (0;0), (2; 2).

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+4x=19-3y^2$.

Hướng dẫn giải

$$2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7-y)^2 \quad (*)$$

Ta thấy $3(7-y^2)\vdots 2 \Rightarrow 7-y^2 \vdots 2 \Rightarrow y$ lẻ

Ta lại có $7-y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$

Khi đó (*) có dạng $2(x+1)^2 = 18$.

Ta được: $x+1 = \pm 3$ do đó $x_1 = 2; x_2 = -4$.

Các cặp số (2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1) thỏa mãn (2) nên là nghiệm của phương trình đã cho

🗁 **Dạng 3: Xét các số chính phương liên tiếp**

*** Cơ sở phương pháp:**

Phương pháp này dựa trên nhận xét sau:

1. Không tồn tại $n \in Z$ *thỏa mãn:* $a^2 < n^2 < (a+1)^2$ *với* $a \in Z$

2. Nếu $a^2 < n^2 < (a+2)^2$ *với* $a, n \in Z$ *thì n = a + 1. Tương tự với lũy thừa bậc 3*

3. Nếu $x(x+1)...(x+n) < y(y+1)...(y+n) < (x+a)(x+a+1)...(x+a+n)$

Thì $y(y+1)...(y+n) = (x+i)(x+i+1)...(x+i+n)$ *với* $i \in \{1, 2, ..., a-1\}$

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3 \qquad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0;\ 5x^2 + 11x + 7 = 5\left(x + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{19}{20} > 0$$

Nên

$$(1 + x + x^2 + x^3) - (x^2 + x + 1) < 1 + x + x^2 + x^3 < (1 + x + x^2 + x^3) + (5x^2 + 11x + 7).$$

Do đó: $x^3 < y^3 < (x+2)^3 \Rightarrow y^3 = (x+1)^3$.

Kết hợp với (1) ta có: $(x+1)^3 = 1 + x + x^2 + x^3 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Nghiệm của phương trình là: (0;1) và (-1;0).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3-y^3-2y^2-3y-1=0\quad(2)$

Hướng dẫn giải

$(2)\Leftrightarrow x^3=y^3+2y^2+3y+1\ (3)$

Ta có: $y^2\ge 0;5y^2+2>0$ nên

$(y^3+2y^2+3y+1)-(5y^2+2)<y^3+2y^2+3y+1\le(y^3+2y^2+3y+1)+y^2.$

Do đó: $(y-1)^3<x^3\le(y+1)^3\Rightarrow x^3=y^3$ hoặc $x^3=(y+1)^3$.

Nếu $x^3=y^3$ kết hợp với (3) ta có: $2y^2+3y+1=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow x=-1.$

Nếu $x^3=(y+1)^3$. Phối hợp với (3) ta có $y^2=0\Rightarrow y=0$, lúc đó x = 1.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là (-1; -1) và (1; 0).

Bài toán 3. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+(x+1)^2=y^4+(y+1)^4$

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình về dạng

$x^2+x+1=y^2(y+1)^2+2y(y+1)+1=(y^2+y+1)^2=k^2, k\in Z\quad(1)$

- Nếu $x>0\Rightarrow x^2<x^2+x+1<(x+1)^2\Rightarrow x^2<k^2<(x+1)^2$ không có số nguyên k thỏa mãn.

- Nếu $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow y^2+y+1=\pm1$

Ta có các nghiệm nguyên của phương trình là (0; 0), (0; -1), (-1; 0); (-1; -1).

- Nếu $x<-1\Rightarrow(x+1)^2<x^2+x+1<x^2\Rightarrow(x+1)^2<k^2<x^2$ không có số nguyên k thỏa mãn.

Bài toán 4. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4+x^2-y^2+y+10=0\quad(6)$$

Hướng dẫn giải

$(6)\Leftrightarrow y(y-1)=x^4+x^2+10\quad(7)$

Ta có: $x^4+x^2<x^4+x^2+10<(x^4+x^2+10)+(6x^2+2)$.

Do đó: $x^2\left(x^2+1\right)<y\left(y-1\right)<\left(x^2+3\right)\left(x^2+4\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y\left(x-1\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\\y\left(y-1\right)=\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)\end{array}\right.$

Kết hợp với (7) ta suy ra: $\left[\begin{array}{l}x^2=4\\x^2=1\end{array}\right.$

Từ đó: $x=\pm2,\ x=\pm1$

Do đó ta có thể tìm được nghiệm của phương trình (6)

🗁 **Dạng 4: Sử dụng điều kiện Δ là số chính phương**

*** Cơ sở phương pháp:**

Với phương trình nghiệm nguyên có dạng $f\left(x,y\right)=0$ *có thể viết dưới dạng phương trình bậc 2 đối với một trong 2 ẩn chẳng hạn ẩn x, ngoài điều kiện* $\Delta\ge0$ *để phương trình có nghiệm nguyên thì* Δ *phải là số chính phương. Vận dụng điều này ta có thể giải được bài toán.*

Chú ý: Δ *là số chính phương chỉ là điều kiện cần nhưng chưa đủ để phương trình có nghiệm nguyên, do đó sau khi tìm được giá trị cần thử lại vào phương trình ban đầu.*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2+y^2+4xy+4x+2y+5=0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $3x^2+y^2+4xy+4x+2y+5=0$

$\Leftrightarrow y^2+2\left(2x+1\right)y+3x^2+4x+5=0\qquad\left(1\right)$

Coi phương trình (1) là phương trình ẩn y tham số x ta có:

$\Delta'=\left(2x+1\right)^2-\left(3x^2+4x+5\right)=4x^2+4x+1-3x^2-4x-5=x^2-4$

Để phương trình có nguyện nguyên thì Δ' phải là số chính phương hay $\Delta'=x^2-4=n^2$ với $n\in N$

$\left(x-n\right)\left(x+n\right)=4$ giải ra ta được $x=2$ hoặc x = -2.

Với x = 2 thì y = 3

Với x = -2 thì y = -5

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (2, 3) ; (-2, -5).

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2y^2-xy=x^2+2y^2.\left(1\right)$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho viết lại: $\left(x^2-2\right)y^2-xy-x^2=0\ \ (2)$

Do x nguyên nên $\left(x^2-2\right)\neq 0$ coi phương trình (2) là phương trình ẩn y tham số x ta có:

$$\Delta=x^2+4x^2\left(x^2-2\right)=x^2\left(4x^2-7\right).$$

Để phương trình có nguyện nguyên thì Δ phải là số chính phương.

-Xét x = 0 thì từ (1) suy ra y = 0.

-Xét $x\neq 0$ thì $\left(4x^2-7\right)$ phải là số chính phương do đó $4x^2-7=m^2$ với m là số nguyên, ta có $\left(2x-m\right)\left(2x+m\right)=7$ ta tìm được x = 2 hoặc x = -2

Với x = 2 thay vào (2) ta được: $y^2+y-2=0\Rightarrow y\in\left\{1;-2\right\}$.

Với x = -2 thay vào (2) ta được: $y^2-y-2=0\Rightarrow y\in\left\{-1;2\right\}$.

Nghiệm nguyên của phương trình là (x, y) = (2, 1); (2, -2); (-2, -1); (-2, 2).

🗁 **Dạng 5: Sử dụng tính chất: Nếu hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương thì một trong hai số nguyên liên tiếp đó bằng 0**

*** Cơ sở phương pháp:**

Giả sử a(a + 1) = k² (1) với $a\in Z,k\in N.$

Giải sử a ≠ 0, a + 1 ≠ 0 thì k² ≠ 0. Do k là số tự nhiên nên k > 0.

Từ (1) suy ra: a² + a = k²

$\Rightarrow 4a^2+4a=4k^2\Rightarrow 4a^2+4a+1=4k^2+1\Rightarrow\left(2a+1\right)^2=4k^2+1\qquad(2)$

Do k > 0 nên $4k^2<4k^2+1<4k^2+4k+1\qquad(3)$

Từ (2) và (3) suy ra $\left(2k\right)^2<\left(2a+1\right)^2<\left(2k+1\right)^2$, vô lý

Vậy nếu a(a + 1) = k² thì tồn tại một trong hai số a, a + 1 bằng 0.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

Hướng dẫn giải

Thêm xy vào hai vế: $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2=xy\left(xy+1\right)\qquad(*)$

Ta thấy xy và xy + 1 là hai số nguyên liên tiếp, có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0.

Xét xy = 0. Từ (1) có x² + y² = 0 nên x = y = 0

Xét xy + 1 = 0. Ta có xy = -1 nên (x, y) = (1; -1), (-1; 1)

Thử lại ba cặp số (0; 0), (1; -1), (-1; 1) đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+2xy=5y+6 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=y^2+5y+6 \Leftrightarrow (x+1)^2=(y+3)(y+2)$

Do (y + 3) và (y + 2) là 2 số nguyên liên tiếp mà có tích là một số chính phương nên một trong 2 số phải bằng 0.

Nếu y + 3 = 0 thì y = -3, x = -1.

Nếu y + 2 = 0 thì y = -2, x = -1

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là (x, y) = (-3, -1); (-2, -1).

🗁 **Dạng 6: Sử dụng tính chất: Nếu hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương thì mỗi số đều là số chính phương**

*** Cơ sở phương pháp:**

Giả sử ab = c² (1) với $a,b,c \in N^*, (a,b)=1$.

Giả sử trong a và b có một số, chẳng hạn a, chứa thừa số nguyên tố p với số mũ lẻ thì số b không chứa thừa số p nên c² chứa thừa số p với số mũ lẻ, trái với giả thiết c² là số chính phương.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy=z^2 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta có thể giả sử (x, y, z) = 1. Thật vậy nếu bộ ba số (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn (1) và có ƯCLN bằng d, giả sử $x_0=dx_1, y_0=dy_1, z_0=dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình (1).

Với (x, y, z) = 1 thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau, vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d.

Ta có z² = xy mà (x, y) = 1 nên x = a², y = b² với $a,b \in N^*$

Suy ra z² = xy = (ab)², do đó z = ab.

Như vậy: $\begin{cases} x=ta^2 \\ y=tb^2 \\ z=tab \end{cases}$ với t là số nguyên dương tùy ý.

Đảo lại, hiển nhiên các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1).

Công thức trên cho ta công thức nghiệm nguyên dương của (1).

Bài toán 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn

$$x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$$

$<=> x^4-2x^3+6x^2-32x+40=4y^2-4y+1$

$<=> (x-2)^2(x^2+2x+10)=(2y-1)^2$

Vì y là số nguyên nên $2y-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

Vì $(2y-1)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2+2x+10$ là số chính phương.

Đặt $x^2+2x+10=m^2$ $(m\in N^*)$ suy ra $(x+1)^2+9=m^2 \Leftrightarrow (x+1-m)(x+1+m)=-9\ (*)$

Do $(x+1+m)>(m+1-m)$ nên

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1+m=9\\x+1-m=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x+1+m=1\\x+1-m=-9\end{cases}\\ \begin{cases}x+1+m=3\\x+1-m=-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\m=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5\\m=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\m=3\end{cases}\end{array}\right.$$

• $x=3 \Rightarrow (2y-1)^2=25 \Rightarrow y=3$ hoặc $y=-2$

• $x=-5 \Rightarrow (2y-1)^2=1225 \Rightarrow y=18$ hoặc $y=-17$

• $x=-1 \Rightarrow (2y-1)^2=81 \Rightarrow y=5$ hoặc $y=-4$

Vậy các bộ (x;y) nguyên thỏa yêu cầu bài toán là (3;3),(3;–2),(–5;18),(–5;–17),(–1;5),(–1;–4)

V. PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN, NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

🗁 Dạng 1: Phương pháp lùi vô hạn

*** Cơ sở phương pháp:**

Dùng để chứng minh phương trình f(x, y, z, ...) ngoài nghiệm tầm thường $x=y=z=0$ thì không còn nghiệm nào khác. Phương pháp này diễn giải như sau:

Giải sử $(x_0,y_0,z_0,...)$ là nghiệm của phương trình f(x, y, z, ...), nhờ phép biến đổi suy luận ta tìm được bộ nghiệm khác $(x_1,y_1,z_1,...)$ sao cho các nghiệm này có quan hệ với nghiệm ban đầu tỷ số k nào đó. Ví dụ $x_0=kx_1,y_0=ky_1,z_0=kz_1$;...

Rồi từ bộ $(x_2,y_2,z_2,...)$ có quan hệ với $(x_1,y_1,z_1,...)$ bởi tỷ số k nào đó.

Ví dụ $x_1 = kx_2, y_1 = ky_2, z_1 = kz_2$. *Quá trình này dẫn đến* $x_0, y_0, z_0, ..$ *chia hết cho* k^s *vớ s là số tự nhiên tùy ý, điều này xảy ra khi x = y = z = 0. Chúng ta đi đến ví dụ cụ thể như sau:*

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $x^2 + y^2 = 3z^2$

Hướng dẫn giải

Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình trên. Xét (mod 3) ta chứng minh x_0, y_0 chia hết cho 3. Thật vậy rõ ràng vế phải chia hết cho 3 suy ra $(x_0 + y_0) \vdots 3$. Ta có $x_0^2 \equiv 0;1 \pmod 3; y_0^2 \equiv 0;1 \pmod 3$ do đó $(x_0^2 + y_0^2) \vdots 3 \Rightarrow x_0^2 \vdots 3, y_0^2 \vdots 3$

Đặt $x_0 = 3x_1; y_0 = 3y_1; z_0 = 3z_1$ thế vào rút gọn ta được $3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2 \Rightarrow z_0 \vdots 3$ $\Rightarrow z_0 = 3z_1$.

Thế $z_0 = 3z_1$ vào $3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2$ và rút gọn ta được: $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$. Do đó nếu (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình thì (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình trên. Tiếp tục suy luận như trên dẫn đến $x_0, y_0, z_0 \vdots 3^k$ điều này xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) = (0, 0, 0)

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

Hướng dẫn giải

Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình trên, ta có $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2x_0y_0z_0$ suy ra $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$ chẵn (do $2x_0y_0z_0$) nên có 2 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Có 2 số lẻ một số chẵn không mất tính tổng quát giả sử x_0, y_0 lẻ, z_0 chẵn. Xét mod 4 ta có: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \equiv 2 \pmod 4$ còn $2x_0y_0z_0 \vdots 4$ (do z_0 chẵn) $\Rightarrow$ Vô lý/

Trường hợp 2: Cả 3 số đề chẵn. Đặt $x_0 = 2x_1, y_0 = 2y_1, z_0 = 2z_1$ thế vào rút gọn ta có: $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$ lập luận như trên ta được x_1, y_1, z_1 chẵn.

Quá trình tiếp tục đến $x_0, y_0, z_0 \vdots 2^k \left(k \in N^*\right)$ điều đó xảy ra khi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) = (0, 0, 0)

🗁 Dạng 1: Nguyên tắc cực hạn

*** Cơ sở phương pháp:**

Về hình thức phương pháp này khác với phương pháp lùi vô hạn nhưng về ý tưởng sử dụng thì như nhau, đều chứng minh phương trình ngoài nghiệm tầm thường không còn nghiệm nào khác.

Phương pháp bắt đầu bằng việc giả sử $(x_0, y_0, z_0, ...)$ là nghiệm của phương trình f(x, y, z, ...) với điều kiện rằng buộc với bộ $(x_0, y_0, z_0, ...)$. Ví dụ như x_0 nhỏ nhất hoặc $x_0 + y_0 + z_0 + ...$ nhỏ nhất . Bằng phép biến đổi số học ta tìm được bộ nghiệm khác $(x_1, y_1, z_1, ...)$ trái với điều kiện rằng buộc trên. Ví dụ khi tìm được bộ $(x_0, y_0, z_0, ...)$ với x_0 nhỏ nhất ta lại tìm được bộ $(x_1, y_1, z_1, ...)$ thỏa mãn $x_1 < x_0$ từ đó dẫn tới phương trình đã cho có nghiệm $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Giải phương trình nghiệm nguyên sau $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4 \quad (1)$

Hướng dẫn giải

Giải sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình trên với điều kiện x_0 nhỏ nhất.

Từ phương trình (1) suy ra t là số chẵn. Đặt $t = 2t_1$ thế vào phương trình (1) và rút gọn ta được: $4x_0^4 + 2y_0^4 + z_0^4 = 8t_1^4$ rõ ràng z_0 chẵn. Đặt $z_0 = 2z_1 \Rightarrow 2x_0^4 + y_0^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4 \Rightarrow y_0$ chẵn . Đặt $y_0 = 2y_1 \Rightarrow x_0^4 + 8y_1^4 + 4z_1^4 = 2t_1^4 \Rightarrow x_0$ chẵn.

Đặt $x_0 = 2x_1 \Rightarrow 8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4 \Rightarrow (x_1; y_1; z_1; t_1)$ cũng là nghiệm của phương trình trên và dễ thấy $x_1 < x_0$ (vô lý) do ta chọn x_0 nhỏ nhất. Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$.

Tổng kết: *Một bài toán nghiệm nguyên thường có thể giải bằng nhiều phương pháp, bạn đọc nên tìm nhiều cách giải cho một bài toán để rèn luyện kĩ năng của mình. Sau đây mình sẽ giải một bài toán bằng nhiều phương pháp để tổng kết.*

Bài toán. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2 \quad (1)$

Lời giải

Cách 1. *Đưa về phương trình ước số*

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + y^2 = 4x^2y^2 + 4xy$$
$$\Leftrightarrow (2x + 2y)^2 = (2xy + 1)^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow (2xy + 1)^2 - (2x + 2y)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (2xy + 2x + 2y + 1)(2xy + 1 - 2x - 2y) = 1$$

Sau đó giải phương trình ước số

Cách 2. *Dùng tính chất số chính phương và phương trình ước số*

$4x^2+4xy+4y^2=4x^2y^2$

$\Leftrightarrow (2x+y)^2+3y^2=4x^2y^2$

$\Leftrightarrow (2x+y)^2=y^2(4x^2-3)$

Nếu y = 0 thì x = 0 ta có (0, 0) là nghiệm của phương trình.

Nếu $y\neq 0$ thì $4x^2-3$ phải là số chính phương .

Ta có: $4x^2-3=k^2\,(k\in N)$ đưa về $(2x+k)(2x-k)=3$

Ta tìm được x = 1 và x = -1 từ đó tìm được y

Cách 3. *Đưa về phương trình bậc 2 đối với x*

$(y^2-1)x^2-yx-y^2=0 \qquad (2)$

Xét y = 1 thì (2) có dạng: -x – 1 = 0 được x = -1.

Xét y = -1 thì (2) có dạng x – 1 = 0 được x = 1.

Xét $y\neq \pm 1$ thì (2) là phương trình bậc hai đối với x có:

$\Delta = y^2+4y^2(y^2-1)=y^2(4y^2-3)$.

Ta phải có Δ là số chính phương .

Nếu y = 0 thì từ (2) suy ra x = 0

Nếu $y\neq 0$ thì $4y^2-3$ phải là số chính phương.

Ta có $4y^2-3=k^2\,(k\in N)\Rightarrow (2y+k)(2y-k)=3$,ta được $y=\pm 1$ do đang xét $y=\pm 1$

Cách 4. *Sử dụng bất đẳngthức*

Không mất tính tổng quát giả sử $|x|\le |y|$, thế thì $x^2\le y^2, xy\le |xy|\le y^2$

Do đó: $x^2y^2=x^2+xy+y^2\le y^2+y^2+y^2\le 3y^2$

Nếu y = 0 thì x = 0.

Nếu $y\neq 0$ chia hai vế cho y^2 ta được $x^2\le 3$. Do đó $x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

Vậy phương trình có ba nghiệm (1, -1) , (-1, 1), (0, 0)

Cách 5. Sử dụng tính chất số chính phương

Thêm xy vào hai vế $x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy \Leftrightarrow (x+y)^2=xy(xy+1)$

Ta thấy xy và (xy + 1) là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0

Xét xy = 0 từ (1) có $x^2+y^2=0\Rightarrow x=y=0$

Xét xy = -1 nên x = 1 , y = -1 hoặc x = -1, y = 1

Thử lại thấy phương trình có ba nghiệm (0, 0); (1, -1); (-1, 1).

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2xy - x - y = 1$.

Bài 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + x + 2009 = y^2$.

Bài 3: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz = 10$.

Bài 4: Giải phương trình nghiệm nguyên $3x^2 - 2xy + y - 5x + 2 = 0$.

Bài 5: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$.

Bài 6: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 - y^3 = 2xy + 8$.

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5(x + y + z) + 3 = 2xyz$.

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên của mỗi phương trình

a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^4$;

b) $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$.

Bài 9: Giải phương trình nghiệm nguyên $4x + 9y = 48$.

Bài 10: Tìm những số tự nhiên lẻ n để $26n + 17$ là số chính phương.

Bài 11: Tìm các số nguyên x, y, z sao cho $x^4 + y^4 + z^4 = 2012$.

Bài 12: Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 13y^2 = z^2 \\ 13x^2 + y^2 = t^2. \end{cases}$

Bài 13: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

Bài 14: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 4z = -4.$$

Bài 15: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\left(x^2 + 1\right)\left(y^2 + 4\right)\left(z^2 + 9\right) = 48xyz.$$

Bài 16: Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y^2 + t^2 = 16 \\ xt + yz = 12. \end{cases}$$

Bài 17: Tìm nghiệm của phương trình: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$

Bài 18: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = y^2$ (1)

Bài 19: Tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình: $\left(x^2 - y\right)\left(y^2 - x\right) = \left(x - y\right)^3$

Bài 20: Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$

Bài 21: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ trong đó p là số nguyên tố.

Bài 22: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{6xy}=\frac{1}{6}$

Bài 23: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x+15+10z=3$

Bài 24: Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên:

$$x^2+y^2+z^2=1999 \quad (1)$$

Bài 25: Tìm nghiệm dương của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$.

Bài 26: Giải phương trình nghiệm nguyên: $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

Bài 27: Giải phương trình trên tập số nguyên $x^{2015}=\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)}+1$

(Chuyên Quảng Trung – Bình Phước 2015)

Bài 28: Tìm số tự nhiên x và số nguyên y sao cho $2^x+3=y^2$

Bài 29: Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y=11879$.

Bài 30: Tìm tất cả các cặp (x, y, z) là các số nguyên thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Bài 31: Tìm số nguyên x, y, z thỏa mãn các đẳng thức: $\begin{cases} x-y+z=2 & (1) \\ 2x^2-xy+x-2z=1 & (2) \end{cases}$

Bài 32: Tìm số thực a để các nghiệm của phương trình sau đều là số nguyên:

$$x^2-ax+(a+2)=0 \qquad (1)$$

Bài 33: Tìm các số nguyên dương *x* và *y* thoả mãn phương trình:

$$(x^2+4y^2+28)^2-17(x^4+y^4)=238y^2+833.$$

(Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương 2016 – 2017)

Bài 34: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn: $2^x.x^2=9y^2+6y+16$

(Chuyên Hà Nội 2016 – 2017)

Bài 35: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$

(Trích đề vào lớp 10 chuyên ĐHKHTN, ĐHQGHN năm 2014)

Bài 36: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\ y)$ thỏa mãn $(x+y)^3=(x-y-6)^2$.

(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Hồng Phong- Nam Định 2014-2015)

Bài 37: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-y^2=xy+8$

(Trích đề vào Chuyên Bình Dương 2017)

Bài 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3+1=4y^2$.

(Trích đề vào Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

Bài 39: Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

(Trích đề vào Chuyên bạc Liêu 2017)

Bài 40: Giải phương trình nghiệm nguyên $y^3-2x-2=x(x+1)^2$. (1)

(Trích đề vào Chuyên Hưng Yên 2017)

Bài 41: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2+2y^2-2xy-4x+8y+7=0$ (1)

(Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai 2017)

Bài 42: Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}$

(Chuyên Bình Định 2015)

Bài 43: Tìm các số nguyên *x* và *y* thoả mãn phương trình $9x+2=y^2+y$

(Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)

Bài 44: Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$

(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2014)

Bài 45: Tìm nghiệm của phương trình: $x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$

(Chuyên Lam Sơn 2014)

Bài 46: 1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn

$$\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$

(Chuyên Hà Nội Amsterdam 2014)

Bài 47: Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases}$

(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2015)

Bài 48: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-2y(x-y)=2(x+1)$

(Chuyên Hùng Vương Phú Thọ 2015)

Bài 49: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4+x^2-y^2-y+20=0.$

(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2015)

Bài 50: a) Chứng minh không tồn tại các bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $x^4+y^4=7z^4+5$

b) Tìm tất cả các nguyện nguyên thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$

(Chuyên KHTN Hà Nội 2011)

Bài 51: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2x^2+5y^2=41+2xy$.

(Chuyên Nam Định 2018-2019)

Bài 52: Tính tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn: $x^{2019}=y^{2019}-y^{1346}-y^{673}+2$

(Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2018-2019)

Bài 53: Cho phương trình $x^3+2y^3+4z^3=9!(1)$ với $x;y;z$ là ẩn và 9! Là tích các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 9

a) Chứng minh rằng nếu có các số nguyên $x;y;z$ thỏa mãn (1) thì x,y,z đều chia hết cho 4

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn (1).

(Chuyên Vĩnh Phúc 2018-2019)

Bài 54: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^3-xy+2=x+y$

(Chuyên Bến Tre 2018-2019)

Bài 55: Tìm các số nguyên x,y,z thỏa mãn đồng thời: $x^2+4y^2+z^2+2xz+4(x+z)=396$ và $x^2+y^2=3z$.

(Chuyên Đăk Lăk 2018-2019)

Bài 56: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$

(Chuyên Đồng Nai 2018-2019)

Bài 57:Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2-2xy+y-5x+2=0$

(Chuyên Tuyên Quang 2018-2019)

Bài 58: Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn: $16\left(x^3-y^3\right)=15xy+371$

(Chuyên Thái Nguyên 2018-2019)

Bài 59: Tìm cặp số nguyên x,y thỏa mãn $x^2-2y^2=1$

(Chuyên Bắc Ninh 2018-2019)

Bài 60: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2=2x-3y-2$

(Chuyên Vĩnh Long 2018-2019)

Bài 61: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x\ ;\ y)$ thỏa mãn đẳng thức $x^2y^2-x^2-6y^2=2xy$.

(Chuyên Quảng Nam 2018-2019)

Bài 62: Tìm tất cả cặp số nguyên x,y thỏa mãn $y^2+2xy-3x-2=0$

(Chuyên Lào Cai 2018-2019)

Bài 63: Tìm tất cả bộ số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $3\left(a^2+b^2\right)-7\left(a+b\right)=-4$

(Chuyên Bình Phước 2018-2019)

Bài 64: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$.

(Chuyên Toán Lam Sơn – Thanh Hóa 2019-2020)

Bài 65: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-xy-5x+5y+2=0$

(Chuyên Tin Lam Sơn – Thanh Hóa 2019-2020)

Bài 66: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy^2 - (y-45)^2 + 2xy + x - 220y + 2024 = 0.$$

(Chuyên Hưng Yên 2019-2020)

Bài 67: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phương trình $x^2 - n^2x + n + 1 = 0$ (ẩn số x) có các nghiệm là số nguyên.

(Chuyên Bình Thuận 2019-2020)

Bài 68: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \dfrac{85}{13}$

(Chuyên Phú Yên 2019-2020)

Bài 69: Tìm các số nguyên không âm a, b, n thỏa mãn: $\begin{cases} n^2 = a+b \\ n^3 + 2 = a^2 + b^2 \end{cases}$.

(Chuyên Quảng Nam 2019-2020)

Bài 70: Tìm tất cả cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $2020(x^2+y^2) - 2019(2xy+1) = 5$

(Chuyên Cần Thơ 2019-2020)

Bài 71: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $2x^2y - 1 = x^2 + 3y$.

(Chuyên Đăk Nông 2019-2020)

Bài 72: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(Chuyên Quảng Ngãi 2019-2020)

Bài 73: Giải phương trình nghiệm nguyên $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$

(Chuyên Bình Phước 2019-2020)

Bài 74: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $(xy + x + y)(x^2 + y^2 + 1) = 30$.

(Chuyên Bắc Ninh 2019-2020)

Bài 75: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$(2x + 5y + 1)\left(2^{|x|-1} + y + x^2 + x\right) = 65$$

(Chuyên Tiền Giang 2019-2020)

Bài 76: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m;n) thỏa mãn phương trình

$$2^m.m^2 = 9n^2 - 12n + 19.$$

(Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu 2019-2020)

Bài 77: Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn $(x^2 - x + 1)(y^2 + xy) = 3x - 1$

(Chuyên Hà Nội 2019-2020)

Bài 78: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y^2 - 4x^2y + y^3 + 4x^2 - 3y^2 + 1 = 0$.

(Chuyên Sư phạm Hà Nội 2019-2020)

Bài 79: Tìm x, y thỏa mãn: $\sqrt{2\left(\sqrt{x} + y - 2\right)} = \sqrt{\sqrt{x}.y}$

(HSG Lớp 9 An Giang năm 2015-2016)

Bài 80: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2+xy+y^2=x^2y^2$

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2015-2016)

Bài 81: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thoả mãn $x^5+y^2=xy^2+1$

(HSG Lớp 9 TP. Bắc Giang năm 2016-2017)

Bài 82: Tìm các số nguyên dương *x, y, z* thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27$.

(HSG Lớp 9 Hải Dương năm 2014-2015)

Bài 83: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2(x+y)+x=2+y(x-1)$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa 2018-2019)

Bài 84: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$xy^2+2xy-243y+x=0$$

Bài 84: Tìm số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2=y^2+\sqrt{y+1}$

Bài 85: Giải phương trình nghiệm nguyên $y^2=1+\sqrt{9-x^2-4x}$

Bài 86: Tìm số nguyên a để phương trình sau có nghiệm nguyên dương $|4-3a|=5-a$

Bài 87: Tìm tất cả các cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn $x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$.

(HSG Lớp 9 Lạng Sơn năm 2018-2019)

Bài 88: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $4y^4+6y^2-1=x$.

(HSG Lớp 9 Bình Phước năm 2018-2019)

Bài 89: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1).$$

(HSG Lớp 9 Nam Định năm 2018-2019)

Bài 89: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $(x-2018)^2=y^4-6y^3+11y^2-6y$

(HSG Lớp 9 Hưng Yên năm 2017-2018)

Bài 90:Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2017-2018)

Bài 91: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

(HSG Lớp 9 Hải Dương năm 2016-2017)

Bài 92: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$.

(HSG Lớp 9 Hưng Yên năm 2016-2017)

Bài 93: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn phương trình $(x+y)(x+2y)=x+5$

(HSG Lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm 2016-2017)

Bài 94: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(x^2+x+1)=4^y-1$.

(HSG Lớp 9 Vĩnh Phúc năm 2015-2016)

Bài 95: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x+171=y^2$.

(HSG Lớp 9 Nghệ An năm 2015-2016)

Bài 96: Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình: $54x^3+1=y^3$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2015-2016)

Bài 97: Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2014-2015)

Bài 98: Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $x(1+x+x^2)=4y(y-1)$.

(HSG Lớp 9 Vĩnh Phúc năm 2014-2015)

Bài 99: Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2=2x+\overline{yzz4}$.

(HSG Lớp 9 Khánh Hòa năm 2014-2015)

Bài 100: Tìm $x,y,z\in N$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

(HSG Lớp 9 Thanh Hóa năm 2012-2013)

Bài 101: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2+x+y+1=x^2+2y^2+xy$

(HSG Lớp 9 Bình Định năm 2018-2019)

Bài 102: Tìm các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $4^x=1+3^y$.

(HSG Lớp 9 Quảng Trị năm 2018-2019)

Một số bài toán từ đề thi học sinh giỏi toán lớp 10!

Bài 103. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4=3361-\sqrt{11296320}$$

(Đề đề nghị THPT TP. Cao Lãnh – Đồng Tháp)

Bài 104. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\dfrac{|4x-6y|+|9x-6y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{313}$ (1)

(Đề đề nghị THPT Bạc Lưu)

Bài 105. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+x+1=2xy+y$

(Đề đề nghị Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi)

Bài 106. Chứng tỏ rằng số: $444444+303030\sqrt{3}$ không viết dưới dạng $\left(x+y\sqrt{3}\right)^2$ với $x,y\in Z$

(Đề đề nghị Chuyên Quang Trung – Bình Phước)

Bài 107. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình:

$$9\left(x^2+y^2+2\right)+2\left(3xy-1\right)=2008$$

(Đề đề nghị THPT Hùng Vương – Lê Lai)

Bài 108. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$

(Đề đề nghị Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên)

Bài 109. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+17y^2+34xy+51\left(x+y\right)=1740$$

Bài 110. Tìm tất cả các cặp (x, y, z) là các số nguyên thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Bài 111. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình:

$$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0.$$

Bài 112. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

Bài 113. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2=17\left(x^4+y^4+14y^2+49\right)$$

Một số bài toán phương trình nghiệm nguyên trong tạp trí toán học tuổi trẻ

Bài 114. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình $x^2\left(y-5\right)-xy=x-y+1.$

Bài 115. Tìm các bộ số nguyên $\left(a.b,c,d\right)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} ac-3bd=4 \\ ad+bc=3 \end{cases}$

Bài 116. Một tam giác có số đo 3 cạnh là các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0.$$

Chứng minh tam giác đó là tam giác đều

Bài 117. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương

$$x^2+y^3=\left(x+y\right)^2+\left(xy\right)^2$$

Bài 118. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^2y^3 - 4xy^3 + y^2 + x^2 - 2y - 3 = 0.$$

Bài 119. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases}$

Bài 120. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\dfrac{x - y}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{3}{7}$

Chương V

CÁC BÀI TOÁN VỀ TỔ HỢP SUY LUẬN

PHẦN 1: CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giới thiệu nguyên lý Dirichlet

Dirichlet (Đi-rích-lê) (1805 – 1859) là nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại về hàm số. Trên cơ sở quan sát thực tế, ông đã phát biểu thành một nguyên lí mang tên ông – nguyên lí Dirichlet: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi cái lồng có không quá 2 con thỏ*. Nói cách khác, *nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con trở lên*. Một cách tổng quát hơn, **nếu có k lồng để nhốt m con thỏ (với $k = kn + r$ $(0 < r \le k - 1)$) thì tồn tại ít nhất một lồng có chứa từ n + 1 con thỏ trở lên.**

Ta cũng có thể dễ dàng chứ minh nguyên lí Dirichet bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử không có một lồng nào chứ n + 1 con thỏ trở lên, tức là mỗi lồng chứa nhiều nhất n con thỏ, thì số con thỏ chứa trong k lồng nhiều nhất chỉ có thể là kn con. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có m con thỏ với $m = kn + r$ $(0 < r \le k - 1)$.

Nguyên lí Dirichlet thật đơn giản, dễ hiểu nhưng được vận dụng vào giải rất nhiều bài toán trong số học, đại số, hình học về ciệc chỉ ra sự tồn tại của một hay nhiều đối tượng thỏa mãn một điều kiện đặt ra.

Khi sử dụng nguyên lí Dirichlet vào bài toán cụ thể, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) *Lồng* hoặc *Thỏ* hoặc cả *Lồng* và *Thỏ*.

2. Một số dạng áp dụng của nguyên lý Dirichlet

- ***Nguyên lý Dirichlet cơ bản:.***

Nếu nhốt n + 1con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứaít nhất hai con thỏ.

- ***Nguyên lý Dirichlet tổng quát:***

Mệnh đề: Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật.

(Ở đây, [x] là giá trị của hàm trần tại số thực x, đó là số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x. Khái niệm này đối ngẫu với [x] – giá trị của hàm sàn hay hàm phần nguyên tại x – là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x.)

Chứng minh:

Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số đồ vật là;

$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = N.$

Điều này mâu thuẩn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp.

• ***Nguyên lí Dirichlet đối ngẫu.***

Cho tập hữu hạn $S \neq \emptyset$ và S1, S2, …, Sn là các tập con

của S sao cho | S1 | + | S2 | + … + | Sn | > k. | S |. Khi đó, tồn tại một phần tử $x \in S$ sao cho x là phần tử chung của k+ 1 tập Si (i = 1, 2, … n).

• ***Nguyên lí Dirichlet mở rộng.***

Nếu nhốt n con thỏ vào $m \geq 2$ cái chuồng thì tồn tại một chuồng có ít nhất $\left[\frac{n+m-1}{m} \right]$ con thỏ, ở đây kí hiệu $[\alpha]$ để chỉ phần nguyên của số α.

Ta chứng minh nguyên lí Dirichlet mở rộng như sau : Giả sử trái lại mọi chuồngthỏ không có đến

$$\left[\frac{n+m-1}{m} \right] = \left[\frac{n-1}{m} + 1 \right] = \left[\frac{n-1}{m} \right] + 1$$

con, thì số thỏ trong mỗi chuồng đều nhỏ hơn hoặc bằng $\left[\frac{n-1}{m} \right]$ con.

Từ đó suy ra tổng số con thỏ không vượt quá $m.\left[\frac{n-1}{m} \right] \geq n-1$ con

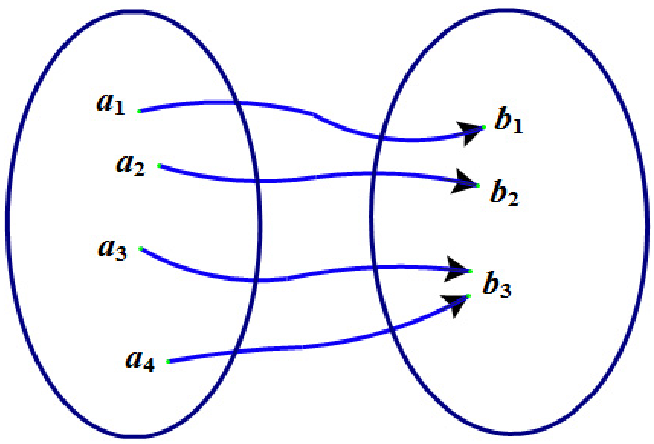
Điều này vô lí vì có n con thỏ. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

Nguyên lí Dirichlet mở rộng được chứng minh.Nguyên lí Dirichlet tưởng chừng đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ rất hiệu quả dùng để chứng minh nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Nó đặc biệt có nhiều áp dụng trong lĩnh vực khác nhau của toán học. Nguyên lí này trong nhiềutrường hợp người ta dễ dàng chứng minh được sự tồn tại mà không đưa ra đượcphương pháp tìm được vật cụ thể, nhưng trong thực tế nhiều bài toán ta chỉ cầnchỉ ra sự tồn tại là đủ rồi.Nguyên lí Dirichlet thực chất là một định lí về tập hữu hạn. Người ta có thểphát biểu chính xác nguyên lí này dưới dạng sau đây.

- **Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp.**

Cho A và B là hai tập hợp khác rỗng có số phần tử hữu hạn, mà số lượng phầntử của A lớn hơn số lượng phần tử của B. Nếu với một quy tắc nào đó, mỗi phầntử của A cho tương ứng với một phần tử của B, thì tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau của A mà chúng tương ứng với một phần tử của B.

Với cùng một cách như vậy, nguyên lí Dirichlet mở rộng có dạng sau đây.



Hình 1

- **Nguyên lí Dirichlet dạng tập hợp mở rộng**

Giả sử A,B là hai tập hợp hữu hạn và S (A),S (B) tương ứng kí hiệu là các sốlượng phần tử của A và B. Giả sử có một số tự nhiên k nào đó mà S(A)>k.S(B) và ta có quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử của B. Khi đó tồn tại ít nhất k+1 phần tử của A mà chúng tương ứng với cùngmột phần tử của B.

Chú ý: Khi k = 1, ta có ngay lại nguyên lí Dirichlet.

Vì chương này dành để trình bày phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet để giải các bài toán hình học sơ cấp.Vì lẽ đó, tôi xin trình bày luôn một số mệnh đề sau (thực chất là một số phát biểu khác của nguyên lí Dirichlet áp dụng cho độ dài các đoạn thẳng, diện tích các hình phẳng, thể tích các vật thể) rất hay được sử dụng đến trong nhiều bài toán hình học được đề cập tới trong chương này.

- **Nguyên lí Dirichlet cho diện tích:**

Nếu K là một hình phẳng, còn $K_1, K_2, ..., K_n$ là các hình phẳng sao cho $K_i \subseteq K$ với $i = \overline{1,n}$, và $|K| < |K_1| + |K_2| + ... + |K_n|$, ở đây |K| là diện tích của hình phẳng K, còn $|K_i|$ là diện tích hình phẳng K_i, $i = \overline{1,n}$, thì tồn tại ít nhất hai hình phẳng H_i, H_j ($1 \le i < j \le n$) sao cho H_i, H_j có điểm trong chung.

(Ở đây ta nói rằng P là điểm trong của tập hợp A trên mặt phẳng nếu như tồn tại hình tròn tâm P bán kính đủ bé sao cho hình tròn này nằm trọn trong A)

Tương tự như nguyên lí Dirichlet cho diện tích, ta có các nguyên lí Dirichlet cho độ dài các đoạn thẳng, thể tích các vật thể …

- **Nguyên lí Dirichlet vô hạn:**

Nếu chia một tập hợp vô hạn các quả táo vào hữu hạn ngăn kéo, thì phải có ít nhất một ngăn kéo chưa vô hạn các quả táo.

Nguyên lí Dirichlet mở rộng cho trường hợp vô hạn này đóng vai trò cũng hết sức quan trọng trong lí thuyết tập điểm trù mật trên đường thẳng. Nó có vai trò quan trọng trong lí thuyết số nói riêng và toán học rời rạc nói chung (trong đó có hình học tổ hợp)

- **Nguyên lý Dirichlet đối ngẫu vô hạn phần tử.**

*Tập phần tử là một khoảng trên đường thẳng.

Trong mục này ta kí hiệu d(I) là độ dài của khoảng I $\in$ R.

+ Cho A là một khoảng giới nội, A 1, A2, … , An là các khoảng sao cho Ai $\subset$ A (i = 1, 2, …, n) và d(A) < d(A1) + d(A2) + … + d(An). Khi đó ít nh ất có hai khoảng trong số các khoảng trên có một điểm trong chung.

Chứng minh.

Thật vậy, giả sử không có cặp nào trong những khoảng đã cho có

điểm trong chung.

Khi đó, d(A1 $\cup$ A 2 $\cup$ … An) = d(A1) + d(A2) + … + d(An) > d(A).

Mặt khác, từ Ai $\subset$ A (i = 1, 2, …, n) suy ra d(A1 $\cup$ A 2 $\cup$ … An)$\le$ d(A). Các bất đẳng thức trên mâu thuẫn với nhau. Vậy ít nhất có hai khoảng trong số các khoảng trên có điểm trong chung.

- Tập phần tử là miền phẳng giới hạn bởi một đường cong phẳng khép kín

Trong mục này ta kí hiệu S(A) là diện tích miền A trong một mặt phẳng.

+ Nếu A là một miền giới hạn bởi một đường cong phẳng khép kín, còn

A1, A2, … , An là các miền sao cho Ai $\subset$ A (i = 1, 2, …, n) và S(A) < S(A1) + S(A2) + … + S(An), thì ít nhất có hai miền trong số các miền nói trên có điểm trong chung.

Chứng minh. Tương tự như chứng minh Định lí 1.

1.2.2 Phương pháp ứng dụng.

Nguyên lí dirichlet tưởng chừng như đơn giản như vậy, nhưng nó là một công cụ hết sức có hiệu quả dùng để chứng mình nhiều kết quả hết sức sâu sắc của toán học. Nguyên lí Dirichlet cũng được áp dụng cho các bài toán của hình học, điều đó được thể hiện qua hệ thống bài tập sau:

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt "thỏ" vào "chuồng" và thoả mãn các điều kiện :

+ Số 'thỏ" phải hiều hơn số chuồng

+ "Thỏ" phải được nhốt hết vào các "chuồng", nhưng không bắt buộc chuồng nào cũng phải có thỏ.

Thường phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng. Ngoài ra nó còn có thể áp dụng với các phép biến hình.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

🗁 Dạng 1: Chứng minh sự tồn tại chia hết

*** Cơ sở phương pháp:**

Thông thường ta coi m số tự nhiên đã cho là m "con thỏ", các số dư trong phép chia các số tự nhiên đó cho n là những "lồng"; như vậy sẽ có n cái lồng: lồng i $(0 \le i \le b)$ gồm những số tự nhiên đã cho chia cho n dư i.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

a) Trong 2012 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho 2011 có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho 2011).

b) Trong 2012 sô tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho 2012 hoặc luôn tìm được hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Hướng dẫn giải

a) Ta coi 2012 số tự nhiên đã cho là 2012 "con thỏ"; "lồng i" gồm các số chia cho 2011 dư i $(0 \le i \le 2011)$ nên có 2011 lồng: lồng 0, lồng 1, …, lồng 2010. Như vậy có 2011 lồng chứa 2012 con thỏ nên theo nguyên lí Dirchlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn hai con thỏ, tức là có ít nhất hai số chia cho 2011 có cùng số dư.

b) Nếu trong 2012 số đã cho có ít nhất một số chia hết cho 2012 thì ta chọn luôn số này. Nếu không có số nào chia hết cho 2012 thì khi chia cho 2012 nhận nhiều nhất 2012 số dư khác nhau là 1, 2, …, 2011. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai số chia cho 2012 có cùng số dư.

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

1) Trong n + 1 số tự nhiên bất kì luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư (hay hiệu của chúng chia hết cho n).

2) Trong n số tự nhiên bất kì luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc luôn tìm được hai số chia cho n có cùng số dư.

Bài toán 2. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 20122012…2012 (gồm các số 2012 viết liên tiếp nhau) chia hết cho 2013.

Hướng dẫn giải

Xét 2014 số sau: 2012, 20122012, ..., 2012...2012 (gồm 2014 bộ số 2102).
Đem 2014 số này lần lượt chia cho 2013, có 2014 số mà chỉ có 2013 số dư trong phép chia cho 2013 (là 0, 1, 2, ..., 2012) nên luôn tồn tại hai số chia cho 2013 có cùng số dư, chẳng hạn đó là a = 2012...2012 (gồm i bộ 2012) và b = 2012...2012 (gồm j bộ 2012) với $1 \le i \le j \le 2014$.
Khi đó
$b - a = 2012...2012.10^{4i}$ (gồm j – i bộ 2012) sẽ chia hết cho 2013.
Lại có ƯCLN$(10^{4i}, 2013) = 1$ nên số 2012...2012 (gồm j – i bộ 2012 sẽ chia hết cho 2013. Bài toán được chứng minh.
(Ở đây "thỏ" là số có dạng 2012...2012, "lồng" là số dư trong phép chia cho 2013).
Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chọn ra 2014 (= 2013 + 1) số tự nhiên có dạng đã cho. Từ đó ta có thể phát biểu nhiều bài toán tương tự, chẳng hạn như: Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng 111...1 chia hết cho 29.

Bài toán 3. Cho sáu số tự nhiên a, b, c, d, e, g. Chứng minh rằng trong sáu số ấy, tồn tại một số chia hết cho 6 hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải

Trường hợp có một số bằng 0 thì ta chọn số 0 thỏa mãn yêu cầu đề ra.
Trường hợp sáu số đều lớn hơn 0. Xét 6 số sau

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a + b$$
$$S_3 = a + b + c$$
$$S_4 = a + b + c + d$$
$$S_5 = a + b + c + d + e$$
$$S_6 = a + b + c + d + e + g.$$

Đem mỗi số này chia cho 6 ta nhận được số dư thuộc tập $\{0,1,2,3,4,5\}$.
Nếu tồn tại $S_i (i = 1, 2, ..., 6)$ chia hết cho 6 thì bài toán đã được chứng minh.
Nếu không có S_i nào chia hết cho 6 thì ta có 6 số chia hết cho 6 chỉ nhận 5 loại số dư khác nhau $(1, 2, 3, 4, 5)$; theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho 6 có cùng số dư, chẳng hạn S_2 và S_5 do đó hiệu của hai số này sẽ chia hết cho 6, tức là $c + d + e$ chia hết cho 6. Bài toán đã được chứng minh.
(Ở đây "thỏ" là các số S_i, "lồng" là số dư trong phép chia cho 6).

Nhận xét. Ta có thể phát biểu bài toán tổng quát sau:
Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tồn tại một vài số có tổng chia hết cho n.

Bài toán 4. Chứng minh rằng:

a) Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho n.

b) Trong 39 số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 11.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử không tìm được số nào trong n số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho n. Khi đó n số này chia cho n chỉ nhận được nhiều nhất là n – 1 số dư khác nhau $(1, 2, 3, \ldots, n-1)$, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số chia hết cho n có cùng số dư, chẳng hạn là a và b với $a > b$, khi đó a – b chia hết cho n, điều này mâu thuẫn với $0 < a - b < n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Lấy 20 số tự nhiên liên tiếp đầu của dãy, ta luôn tìm được một số có chữ số hàng đơn vị là 0 và có chữ số hàng chục khác 9.Giả sử đó là N và tổng các chữ số của N là s. Khi đó 11 số $N, N+1, N+2, N+3, \ldots N+9, N+19$ sẽ nằm trong 39 số đã cho. Vì N tận cùng bằng 0 nên tổng các chữ số của $N, N+1, N+2, \ldots, N+9$ lần lượt bằng $s, s+1, s+2, \ldots, s+9$. Vì N tận cùng bằng 0 và có chữ số hàng chục khác 9 nên tổng các chữ số của N + 10 bằng s + 1, tổng các chữ số của N + 19 bằng s + 10.

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $s, s+1, s+2, s+3, \ldots, s+9, s+10$ luôn tìm được một số chia hết cho 11. Chẳng hạn số đó là $s+i (0 \le i \le 10)$: Nếu $0 \le i \le 9$ thì ta chọn được số $N+i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán; nếu i = 10 thì ta chọn được số N + 19 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Mấu chốt để giải bài toán câu b) là phải tìm ra 11 số trong 39 số đã cho có tổng các chữ số thứ tự là 11 số tự nhiên liên tiếp, đồng thời sử dụng kết quả câu a).

Bài toán 5. Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kì trong chúng không chia hết cho hiệu của nó?

Hướng dẫn giải

Nhận thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3, còn tổng của chúng chia cho 3 dư 1; nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012, sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k+2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 670)$. Khi đó hai số bất kì trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3, nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng. Ta sẽ chứng minh rằng chọn được nhiều nhất $672 (= 671 + 1)$ số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được $a, b (a > b)$ sao cho $a - b \le 2$ (Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã chọn sẽ không nhỏ hơn $3.671 = 2013$. Điều này mâu thuẫn giả thiết với hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012 - 1 = 2011$), nghĩa là a – b bằng 1 hoặc 2.

- Nếu a – b = 1 thì hiển nhiên a + b chia hết cho a – b (= 1)

- Nếu a – b = 2 thì a + b là số chẵn nên a + b chia hết cho a – b (= 2).
Như vậy từ 2012 số đã cho không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán. Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

🗁 Dạng 2: Bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

*** Cở sở phương pháp:** Thông thường ta phải lập ra những tập hợp có tính chất cần thiết rồi sử dụng nguyên lí Dirichlet để chứng tỏ có hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho sáu số nguyên dương đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn 10. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 số trong đó có một số bằng tổng hai số còn lại.

Hướng dẫn giải

Gọi sáu số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ với $0 < a_1 < a_2 < ... < a_6 < 10$.

Đặt $A = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ gồm 5 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2,3,4,5,6\}$.

Đặt $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1\}$ gồm 5 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2,3,4,5,6\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 9 phần tử $\{1,2,3,...,9\}$ trong khi tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $5+5=10$.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A bằng một số thuộc tập hợp B, tức là $a_m = a_n - a_1$, do đó $a_n = a_m + a_1$.

Ba số a_m, a_n, a_1 đôi một khác nhau. Thật vậy, $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$ trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số a_m, a_n, a_1 trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$ (đpcm).

(Ở đây, có 10 "thỏ" là 10 số $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$ và có 9 "lồng" là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Nhận xét. Để giải bài toán này, ta cần tạo ra hai tập hợp gồm các phần tử nhỏ hơn 10 và tổng số phần tử của hai tập hợp phải không nhỏ hơn 10. Từ đó suy ra tồn tại hai phần tử của hai tập hợp bằng nhau.

Bài toán 2. Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3;6;9\}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử 700 số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, ..., a_{700}$. Ta xét các tập hợp sau:

$A = \{a_1, a_2, ... a_{700}\};$

$B = \{a_1 + 6, a_2 + 6, ... a_{700} + 6\};$

$C = \{a_1 + 9, a_2 + 9, ... a_{700} + 9\};$

Tổng số phần tử của ba tập hợp A, B, C là 700.3 = 2100, trong đó mỗi phần tử đều không vượt quá 2006 + 9 = 2015, mà 2100 > 2015 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai phần tử bằng nhau. Vì mỗi tập hợp A, B, C có các phần tử đôi một khác nhau nên hai phần tử bằng nhau đó phải thuộc hai tập hợp: A và B, hoặc A và C, hoặc B và C.

- Nếu hai phần tử thuộc A và B, chẳng hạn $a_i = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 6$.

- Nếu hai phần tử thuộc A và C, chẳng hạn $a_i = a_j + 9$ suy ra $a_i - a_j = 9$.

- Nếu hai phần tử thuộc B và C, chẳng hạn $a_i + 3 = a_j + 6$ suy ra $a_i - a_j = 3$.

Như vậy luôn tồn lại hai số thuộc tập hợp A có hiệu là 3, 6, 9. Ta được điều phải chứng minh.

(Ở đây 2100 "thỏ" là 2010 phần tử của ba tập hợp A, B, C; 2015 "lồng" là các số từ 1 đến 2015)

Nhận xét. Ta còn có kết quả mạnh hơn như sau:

Cho X là tập hợp gồm 505 số nguyên dương khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho x – y thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Chứng minh.

Gọi A là tập hợp các số thuộc X mà chia hết cho 3, gọi B là tập hợp các số thuộc X mà chia cho 3 dư 1, gọi C là tập hợp các số thuộc X mà chia cho3 dư 2.

Có 505 số xếp vào ba tập hợp, mà 505 = 3.168 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một tập hợp có chứa từ 169 số trở lên.

Trong tập hợp này, hai số bất kì có hiệu là một bội của 3. Tồn tại hai số x, y có hiệu nhỏ hơn 12. Thật vậy, nếu mọi số trong tập hợp này đều có hiệu không nhỏ hơn 12 thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn 12.168 = 2016 > 2006, trái với đề bài.

Vậy trong tập hợp X tồn tại hai phần tử x, y mà $x - y \in E$.

Bài toán 3. Cho hai tập hợp số nguyên dương phân biệt mà mỗi số đều nhỏ hơn n. Chứng minh rằng nếu tổng số phần tử của hai tập hợp không nhỏ hơn n thì có thể chọn được trong mỗi tập hợp một phần tử sao cho tổng của chúng bằng n.

Hướng dẫn giải

Giả sử hai tập hợp số nguyên dương đã cho là

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \text{ và } B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$$

với $a < n$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $b_j < n$ $(j = 1, 2, ..., k)$ và $m + l \geq n$.

Xét tập hợp $C = \{n - b_1, n - b_2, ..., n - b_k\}$.

Nhận thấy, có tất cả n – 1 số nguyên dương phân biệt nhỏ hơn n, các phần tử của A và C đều nhỏ hơn n và tổng số các phần tử của A và C không nhỏ hơn n. Theo nguyên lí

Dirichlet, tồn tại ít nhất hai phần tử bằng nhau, chúng không cùng thuộc A và C, do đó một phần tử thuộc A và một phần tử thuộc C, tức là tồn tại hai số a_p và $n-b_q$ mà $a_p = n-b_q \Leftrightarrow a_p + b_q = n$ (điều phải chứng minh).

(Ở đây coi m + k "thỏ" là các số nguyên dương thuộc tập hợp A hoặc C, n – 1 "lồng" là các số nguyên dương từ 1 đến n – 1).

🗁 **Dạng 3: Bài toán liên quan đến bảng ô vuông**

* **Cở sở phương pháp:** Một bảng vuông kích thước n x n gồm n dòng, n cột và 2 đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có n ô vuông.

Một bảng các ô vuông kích thước m x n gồm m dòng và n cột.

* **Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Cho một mảng ô vuông kích thước 5 x 5. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số -1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Bảng ô vuông kích thước 5 x 5 có 5 dòng, 5 cột, 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, cột và đường chéo đều có ghi 5 số thuộc tập {–1; 0; 1}. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5} có 11 phần tử. Có 12 tổng nhận trong tập 11 các giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây "thỏ" là tổng nên có 12 "thỏ", "lồng" là giá trị của tổng nên có 11 "lồng").

Nhận xét. Với cách giải tương tự, ta có bài toán tổng quát sau:

Cho một bảng ô vuông kích thước n x n. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số –1, 0, 1; sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài toán 2. Trên bảng ô vuông kích thước 8 x 8, ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Hướng dẫn giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có 64 = 14.4 + 7 nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn 4 + 1 = 5. Bài toán được chứng minh.

(Ở đây, "thỏ" là hiệu của hai số trong 64 số (từ 1 đến 64) nên có 63 thỏ; "lồng" là số cặp ô vuông kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nên có nhiều nhất là 14 lồng).

Nhận xét.

- Mấu chốt của bài toán là quan tâm đến hai ô vuông ghi số nhỏ nhất (số 1) và số lớn nhất (số 64) sẽ có hiện lớn nhất là 63; đồng thời xét từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 chỉ cần tối đa là (8 – 1) + (8 – 1) = 14 ô. Ở đây ta đã vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát: Có m thỏ, nhốt vào k lồng mà m = kn + r $(1 \le r \le k-1)$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn n + 1 con thỏ.
- Nếu thay bởi bảng chữ nhật gồm 8 x 10 ô vuông, trên đó ghi các số từ 1 đến 80 không lặp một cách tùy ý thì kết quả cầu bài toán còn đúng hay không? Hãy chứng minh.

🗁 **Dạng 4: Bài toán liên quan đến thực tế**

Cở sở phương pháp: Khi chứng minh sự tồn tại một số đối tượng thỏa mãn điều kiện nào đó, ta thường sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Điều quan trọng nhất là phải xác định được "thỏ" và "lồng".

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Một tổ học tập có 10 học sinh. Khi viết chính tả, cả tổ đều mắc lỗi, trong đó bạn Bình mắc nhiều lỗi nhất (mắc 5 lỗi). Chứng minh rằng trong tổ ấy có ít nhất 3 bạn đã mắc một số lỗi bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi "thỏ" là học sinh (trừ bạn Bình) nên có 9 thỏ; "lồng" là số lỗi chính tả học sinh mắc phải nên có 4 lồng: lồng i gồm những học sinh mắc i lỗi (i = 1, 2, 3, 4). Có 9 thỏ nhốt vào 4 lồng, mà 9 = 4.2 + 1, nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn 2 + 1 = 3 thỏ, tức là có ít nhất 3 bạn mắc một số lỗi bằng nhau.

Bài toán 2. Ở một vòng chung kết cờ vua có 8 đấu thủ tham gia. Mỗi đấu thủ đều phải gặp đủ 7 đấu thủ còn lại, mỗi người một trận. Chứng minh rằng, trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu, bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

Hướng dẫn giải

Ta coi "thỏ" là đấu thủ nên có 8 thỏ; "lồng" là số trận đấu của đấu thủ nên có 8 lồng: "lồng i" gồm các đấu thủ đã thi đấu i trận (với i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Ta thấy lồng 0 và lồng 7 không đồng thời tồn tại, vì nếu có một đấu thủ chưa đấu trận nào thì sẽ không có đấu thủ nào đã đấu đủ 7 trận, cũng như nếu có đấu thủ đã đấu đủ 7 trận thì không có ai chưa đấu trận nào.

Như vậy, có 7 lồng chứa 8 con thỏ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một lồng chứa không ít hơn 2 con thỏ, tức là trong mọi thời điểm giữa các cược đấu luôn tìm được 2 đấu thủ đã đấu dùng một số trận.

Bài toán 3. Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Hướng dẫn giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2.2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề bài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

(Ở đây coi nhà khoa học (trừ A) là "thỏ" nên có 5 thỏ, coi đề tài là "lồng" nên có 2 lồng và vận dụng nguyên lí Dirichlet tổng quát).

🗁 Dạng 5: Bài toán liên quan đến sự sắp xếp

*** Cơ sở phương pháp:** Các bài toán về sắp xếp chỗ, phân công việc không đòi hỏi nhiều về kiến thức và kĩ năng tính toán, chúng chủ yếu kết hợp suy luận lôgic để xét các khả năng có thể xảy ra với nguyên lí Dirichlet.

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Có 20 người quyết định đi bơi thuyền bằng 10 chiếc thuyền đôi. Biết rằng nếu hai người A và B mà không quen nhau thì tổng số những người quen của A và những người quen của B không nhỏ hơn 19. Chứng minh rằng có thể phân công vào các thuyền đôi sao cho mỗi thuyền đều là hai người quen nhau.

Hướng dẫn giải

Nếu trong 20 người không có hai người nào quen nhau thì tổng số người quen của hai người bất kì là 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là tổng số người quen của hai người không nhỏ hơn 19. Vậy tồn tại một số cặp quen nhau.

Ta xếp mỗi cặp quen nhau đó vào một thuyền đôi. Gọi k là số lượng thuyền lớn nhất mà trong đó ta có thể xếp được những cặp quen nhau vào một thuyền và kí hiệu thuyền thứ i xếp hai người A_i và B_i quen nhau $(1 \le i \le k)$.

Giả sử $k \le 9$, kí hiệu tập hợp M gồm những người chưa được xếp vào thuyền nào, tức là gồm những người đôi một không quen nhau. Chọn hai người A và B trong tập hợp M. Theo bài ra thì tổng số người quen của A và số người quen của B không nhỏ hơn 19 và những người quen A hoặc quen B đã được xếp vào thuyền rồi. Như vậy có 19 người quen hệ quen A hoặc B được xếp vào nhiều nhất là 9 thuyền đôi (trừ 1 thuyền vì A, B chưa được xếp), mà 19 = 9.2 + 1 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất một thuyền chở 2 người quen cả A và B. Nhưng khi đó ta có thể xếp lại như sau: trong k – 1 thuyền đầu tiên vẫn giữ nguyên, còn thuyền thứ k xếp A_k và B, còn thuyền thứ k + 1 xếp A và B_k. Điều này mâu thuẫn với giả sử.

Theo cách xếp này ta tiếp tục xếp đến hết 10 thuyền sao cho mỗi thuyền hai người đều quen nhau.

🗁 **Dạng 6: Chứng minh bất đẳng thức**

*** Cơ sở phương pháp:**

*** Ví dụ minh họa:**

Bài toán 1. Chứng minh: trong ba số thực bất kì luôn tìm được hai số có tích không âm.

Hướng dẫn giải

Ta coi "thỏ" là số thực nên có 3 con thỏ; coi "lồng là loại số (số không âm hoặc số âm) nên có 2 lồng. Có 3 con thỏ nhốt vào 2 lồng nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 2 thỏ chứa trong một lồng, tức là tồn tại hai số không âm (hoặc 2 số âm), khi đó tích của chúng sẽ thành số không âm.

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong bốn số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp $A = \{1, 2, 3, ..., 3^4\}$ có ít nhất hai số x, y thỏa mãn $0 < \left|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right| < 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\forall x \in A$ thì $1 \le \sqrt[4]{x} \le 3$

Xét ba tập hợp: $B = \{b \mid 1 \le b \le 2\}$; $C = \{c \mid 2 \le c \le 3\}$ và $D = \{3\}$. Với 4 số có dạng $\sqrt[4]{x}$ (với $x \in A$) sẽ thuộc vào một trong ba tập hợp B, C, D ở trên nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một tập hợp, tập hợp đó là B hoặc C. Gọi hai số đó là $\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{y}$, ta có $0 < \left|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right| < 1$.

PHẦN 2: CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN

A. Kiến thức cần nhớ

Nguyên lí cực hạn có dạng đơn giản như sau:

Nguyên lí 1: Trong một tập hợp hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Nguyên lí 2: Trong một tập hợp khác rỗng các số tự nhiên luôn luôn có thể chọn được số bé nhất.

Nguyên lí này dùng để giải các bài toán mà trong tập hợp có các đối tượng phải xét của nó tồn tại các đối tượng có GTLN, GTNN theo một nghĩa nào đó. Nguyên lí cực hạn thường được sử dụng kết hợp với các phương pháp khác đặc biệt là phương pháp phản chứng. Nguyên lí này được vận dụng trong trường hợp tập các giá trị cần khảo sát là tập hữu hạn (Nguyên lí 1) hoặc vô hạn nhưng tồn tại GTLN hoặc GTNN (Nguyên lí 2). Để vận dụng được nguyên lí cực hạn giải các bài tập hình học tổ hợp, người ta thường dùng một lược đồ chung để giải bài tập như sau:

- Đưa bài toán đang xét về dạng sử dụng nguyên lí 1 hoặc nguyên lí 2 để chứng tỏ rằng tất cả các giá trị cần khảo sát của bài toán có GTLN hoặc GTNN.

- Xét bài toán tương ứng khi nó nhận GTNN hoặc GTLN này.

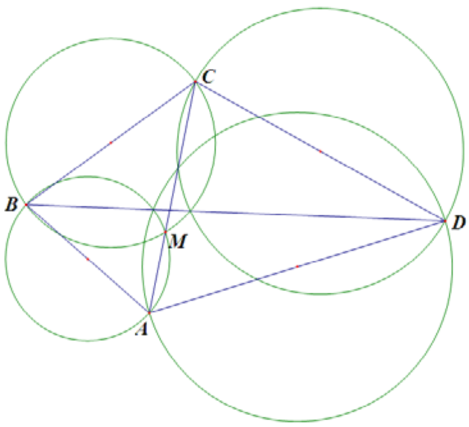
- Chỉ ra một mâu thuẫn hoặc đưa ra giá trị lớn hơn hoặc nhỏ hơn GTLN hoặc GTNN mà ta đang khảo sát. Theo nguyên lí của PP phản chứng ta suy ra điều phải chứng minh.

B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Bài toán 1. Chứng minh rằng bốn đường tròn có đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín tứ giác đã cho

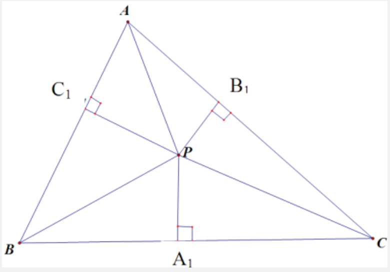
Hướng dẫn giải

Lấy M là một điểm tùy ý trên tứ giác lồi. Có hai khả năng xảy ra
1) Nếu M nằm trên đường biên của tứ giác lồi, tức là M nằm trên một cạnh của tứ giác ABCD. Khi đó M nằm trong đường tròn có đường kính là cạnh ấy. Trong trường hợp này kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.



3) Nếu M nằm bên trong tứ giác lồi ABCD. Khi đó ta có $\angle$AMB + $\angle$BMC + $\angle$CMD + $\angle$DMA = 360^0. Theo nguyên lý cực hạn tồn tại max $\{\angle AMB, \angle BNC, \angle CMD, \angle DMA\} = \angle BMC$. Khi đó $\angle$BMC $\geq 90^0$ (1). Từ (1) suy ra M nằm trong hoặc cùng lắm là nằm trên đường tròn đường kính BC. Vậy dĩ nhiên M bị phủ bởi đường tròn này. Như thế do M là điểm tùy ý của tứ giác ABCD, ta suy ra bốn hình tròn phủ kín tứ giác lồi đã cho. Đó là điều phải chứng minh.

Bài toán 2. Cho ABC là tam giác nhọn. Lấy một điểm P bất kỳ trong tam giác. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P tới ba đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn hai lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ P tới ba cạnh của tam giác đó.



Hướng dẫn giải

Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là hình chiếu của P xuống BC, AC, AB. Ta có

$\angle APC_1 + \angle C_1PB + \angle BPA_1 + \angle A_1PC + \angle CPB_1 + \angle B_1PA = 360^0$ (1)

Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại $max\{\angle APC_1, \angle C_1PB, \angle BPA_1, \angle A_1PC, \angle CPB_1, \angle B_1PA\}$ Không giảm tổng quát, cho là : $max\{\angle APC_1, \angle C_1PB, \angle BPA_1, \angle A_1PC, \angle CPB_1, \angle B_1PA\} = \angle BPA_1$ (2)

Từ (1) và (2) dễ dàng suy ra $\angle BPA_1 \geq 60^0$ (3)

Từ (3) ta đi đến $\cos\angle BPA_1 = \dfrac{PA_1}{PB} \leq \dfrac{1}{2}$ hay $PB \geq 2PA_1$ (4) Từ (4) suy ra

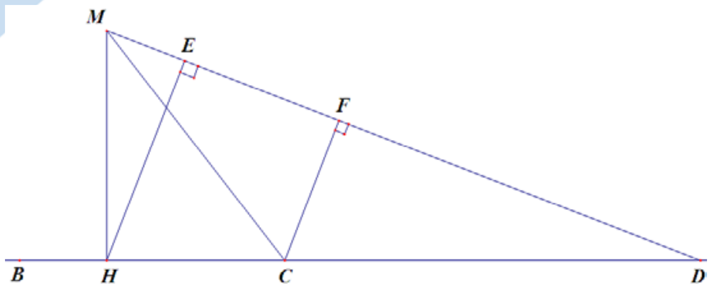
$max\{PA, PB, PC\} \geq PB \geq 2PA_1 \geq 2\min\{PA_1, PB_1, PC_1\}$. Đó là điều pcm.

Bài toán 3. Trên mặt phẳng có một số điểm có tinh chất là cứ với hai điểm bất kỳ của hệ điểm luôn tìm được điểm thứ ba trong số các điểm này thẳng hàng với chúng. Chứng minh rằng tất cả các điểm cảu hệ điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Giả sử kết luận của bài toán không đúng, tức là các điểm đã cho không thẳng hàng. Xét tập hợp sau đây $A = \{h / h > 0$ và h là khoảng cách từ một điểm đã cho đến một đường thẳng nối hai điểm của hệ $\}$

Do giả thiết phản chứng nên A ≠Ø. Mặt khác, A là tập hợp có hữu hạn phần tử (\do có một số hữu hạn điểm đã cho). Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại mọt giá trị nhỏ nhất h*. Giả sử h* là khoảng cách từ một điểm M xuống một đường thẳng đi qua B,C (Ở đây M,B, C thuộc vào số các điểm đã cho). Gọi Δ là đường thẳng nối B, C. Do $M \notin \Delta$ (vì h* > 0), nên theo giả thiết tồn tại điểm $D \in \Delta$. Kẻ $MH \perp \Delta$, thì MH = d*. Rõ ràng trong ba điểm B, C, D pahir có hai điểm cùng phía so với H

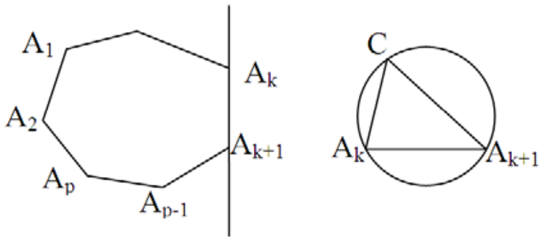


Không làm giảm tính tổng quát, ta có thể cho là C, D nằm cùng phía với H và C nằm trong đoạn HD, Kẻ HE ⊥ MD và CF ⊥ MD. Rõ ràng ta có : CF < HE < MH. Nói cách khác CF < d*. Chú ý rằng cho C,M,D cùng nằm trong các điểm đã cho, nên CF ∈ A. Do đó CF < d*. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của d*. Vậy giải thiết phản chứng là sai, tức là tất cả các điểm đã cho phải thẳng hàng. Đó là đpcm.

Bài toán 4. Trên mặt phẳng cho một số hữu hạn điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm sao cho đường tròn đi qua ba điểm đó không chứa điểm nào ở bên trong.

Hướng dẫn giải

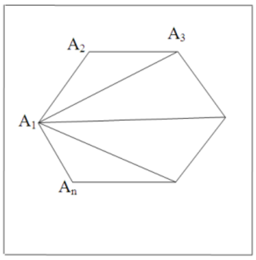
Vì số các điểm đã cho là hữu hạn và chúng không cùng nằm trên một đường thẳng, nên khi lấy bao lồi hệ điểm, ta sẽ được một đa giác. Giả sử đó là đa giác lồi $A_1A_2...A_p$. Như thế các điểm còn lại đã cho phải nằm trong bao lồi. Gọi A_k, A_{k+1} là hai đỉnh liên tiếp của của đa giác lồi(nghĩa là xét một cạnh tùy ý A_kA_{k+1}). Khi ấy mọi điểm đã cho đều nằm ở một nửa mặt phẳng xác định bởi A_kA_{k+1}. Từ giả thiết suy ra tập hợp các điểm đã cho không thuộc A_kA_{k+1} là khác rỗng. Vì thế theo nguyên lý cực hạn, tồn tại C sao cho $\angle A_kCA_{k+1} = \max\angle A_kA_1A_{k+1}$, ở đây giá trị lớn nhất lấy theo mọi $i = \overline{1,n}$ mà i ≠ k, i ≠ k + 1(giả sử $A_1, A_2,...A_n$ là hệ hữu hạn điểm cho trước). Khi đó đường tròn ngoại



tiếp ta giác CA_kA_{k+1} là đường tròn cần tìm

Bài toán 5. Bên trong một hình vuông cạnh 1 cho n điểm sao cho không có ba điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại môt tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho và diện tích S của nó thỏa mãn bất đẳng thức $S < \dfrac{1}{n-2}$

Hướng dẫn giải

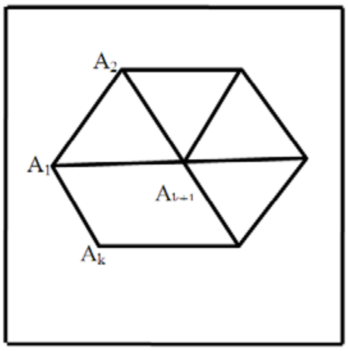


Xét bao lồi của n điểm nằm bên trong hình vuông. Vì không có ba điểm nào thẳng hàng, nên bao lồi là đa giác lồi có k đỉnh(k≤n), ngoài ra các điểm đã cho hoặc là đỉnh của đa giác lồi, hoặc nằm hẳn bên trong đa giác lồi. Chỉ có hai khả năng xảy ra

1. Nếu k = n. Khi đó số đường chéo xuất phát từ A_1 của đa giác bao lồi tạo thành cùng các cạnh của đa giác (n – 2) tam giác. Gọi S là diện tích tam giác nhỏ nhất trong (n-2) tam giác ấy

Vì tổng các diện tích của (n-2) tam giác nhỏ hơn 1(chú ý 1 là diện tích hình vuông chứa chọn (n-2) tam giác này), suy ra $S < \frac{1}{n-2}$

2. Nếu k < n. Khi đó bên trong đa giác bao lồi $A_1A_2...A_k$ có (n-k) điểm A_{k+1}, A_{k+2},...., A_n. Nối A_{k+1} với các đỉnh A_1; A_2;....A_k. Khi đó có k tam giác $A_{k+1}A_1A_2$, $A_{k+1}A_2A_3$; ....; $A_{k+1}A_kA_1$



Vì không có ba điểm nào thẳng hàng, Nên các điểm A_{k+2},...., A_n phải nằm hẳn trong k tam giác nói trên. Giả sử A_{k+2} nằm hẳn trong tam giác nào đó. Nối A_{k+2} với ba đỉnh của tam giác này, thì từ một tam giác sẽ có ba tam giác mới . Sau mỗi lần làm số tam giác tăng lên 2. Như vậy ta đi đến:

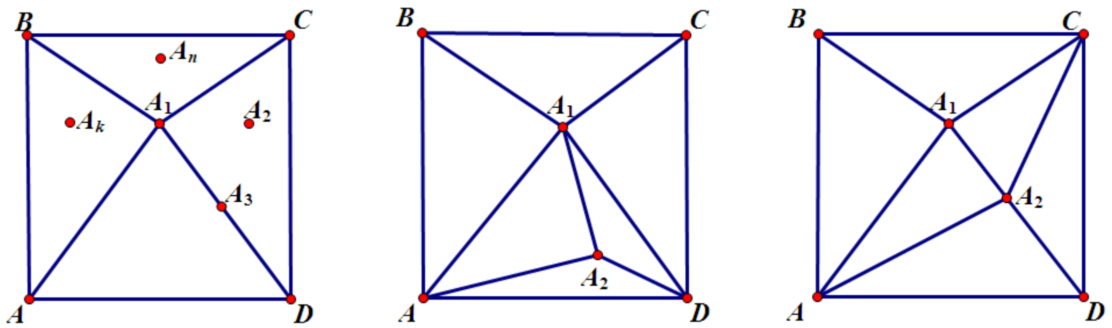
k+ 2(n- k – 1) = 2n – k – 2 = (n – 2) + (n – k) tam giác.mà bên trong mỗi tam giác này không có điểm nào thuộc n điểm đã cho. Gọi S là diện tích bé nhất trong các tam giác trên , thế thì:

$S < \frac{1}{(n-2)+(n-k)} < \frac{1}{n-2}$ (Do n – k >0)

Bất đẳng thức $S < \frac{1}{n-2}$ được chứng minh.

Bài toán 6. Bên trong hình vuông cạnh 1 cho n điểm. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh tại các điểm đã cho hoặc đỉnh của hình vuông sao cho diện tích S của nó thỏa mãn bất đẳng thức: $S \le \frac{1}{2(n+1)}$

Hướng dẫn giải



Gọi A, B, C, D là bốn đỉnh hình vuông và A_1; A_2;....A_n là n điểm nằm trong hình vuông.
Nối A_1 với 4 đỉnh A, B, C, D. Khi đó ta được 4 hình tam giác.
*) Nếu A_2 nằm trong một trong 4 tam giác đó (Giả sử A_2 nằm trong tam giác ADA_1) Ta nối A_2 với A, D, A_1. Sau khi nối xong, số tam giác tăng thêm 2.
*) Nếu A_2 nằm trên cạnh chung (Ví dụ $A_2 \in A_1D$) nối A_2 với A và C. Khi đó số tam giác cũng tăng thêm 2.
Như vậy trong mọi trường hợp, số tam giác sẽ tăng thêm 2
Với các điểm A_3;....A_n ta làm tương tự. Cuối cùng số tam giác được tạo thành là: 4 + 2(n-1) = 2n + 2 tam giác. Các tam giác trên đều có đỉnh là đỉnh của hình vuông hoặc n điểm đã cho. Khi đó, tổng diện tích của 2n +2 tam giác này bằng diện tích hình vuông (bằng 1).
Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại tam giác có diện tích nhỏ nhất trong 2n + 2 tam giác ấy.
Gọi diện tích này là S thì $S \le \dfrac{1}{2(n+1)}$ (Điều cần chứng minh)

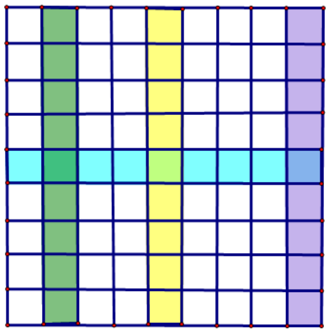
Bài tập tương tự:

Bài toán 1.1 . Cho n điểm nằm trong tam giác ABC có diện tích là $1\,cm^2$. CMR: Từ n điểm đó cùng với 3 điểm A, B, C luôn tồn tại một tam giác có diện tích không lớn hơn $\dfrac{1}{3+2(n-1)}cm^2$.

Bài toán 1.2 (tổng quát) . Cho n điểm nằm trong đa giác lồi m đỉnh có diện tích là $1\,cm^2$. CMR: Từ n điểm đó cùng với m đỉnh của đa giác, luôn tồn tại một tam giác có diện tích không lớn hơn $\dfrac{1}{m+2(n-1)}cm^2$.

Bài toán 7. Trong các ô của bảng vuông kích thước $n \times n$ ô vuông, người ta viết các số sao cho tổng của các số có mặt trong các ô của một “chữ thập” (tức là hình gồm một hàng và một cột) bất kỳ không nhỏ hơn a. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng các ô trong bảng.

Hướng dẫn giải



Lấy một hàng có tổng các số trong hàng đó là nhỏ nhất. Sau đó xét tổng tất cả có "chữ thập" được lập nên từ các ô của hàng đó .

Có ***n*** "chữ thập" như vậy, theo điều kiện của bài toán. Ta suy ra, tổng các số ghi ở ***n*** "chữ thập" ấy không nhỏ hơn ***n.a***

Dễ thấy tổng nói trên bằng tổng của tất cả các số trong bảng cộng thêm ***(n – 1)***lần tổng các số trong hàng lấy ra.

Gọi tổng các số trong bảng là ***N***, tổng các số trong hàng lấy ra là ***m***, từ suy luận trên ta suy ra:

$N + (n-1).m \geq n.a$ (1)

Theo định nghĩa số m, ta có: $m \leq \frac{N}{n}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $N + \frac{N}{n}.(n-1) \geq n.a \Leftrightarrow N \geq \frac{n^2}{2n-1}.a$

Mặt khác, chọn tất cả các ô trong bảng đều bằng $\frac{a}{2n-1}$. Khi đó tổng tất cả các số ghi trong mọi hình chữ thập là: $(2n-1).\frac{a}{2n-1} = a$

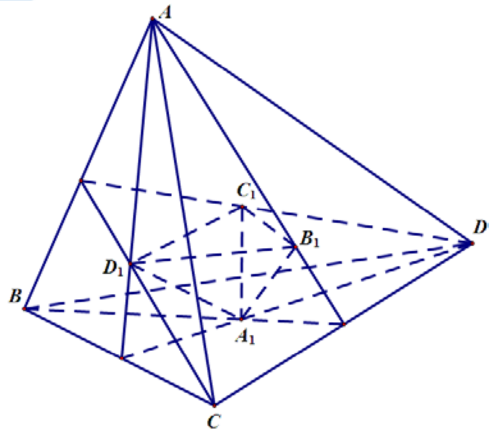
Phép ghi như vậy là hợp lệ. Với cách ghi này, tổng các số ghi vào các ô trong bảng là $\frac{n^2.a}{2n-1}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng cần tìm là $N_{\min} = \frac{n^2 a}{2n-1}$

Bài toán 8. Trong không gian cho một số hữu hạn điểm mà trong đó không có 4 điểm nào trong chúng cùng nằm trên một mặt phẳng sao cho thể tích của mỗi tứ diện tạo ra bởi đỉnh là những điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng tất cả các điểm có thể được phủ bởi một tứ diện có thể tích bằng 27.

Hướng dẫn giải

Do số lượng điểm đã cho là hữu hạn, nên số lượng các tứ diện tạo thành cũng hữu hạn. Theo nguyên lý cực hạn, tồn tại tứ diện mà ta sẽ gọi là $A_1B_1C_1D_1$) có thể tích lớn nhất. Qua các đỉnh A_1; B_1; C_1; D_1 dựng các mặt phẳng song song với các mặt của tứ diện, ta nhận được tứ diện ABCD.Dễ dàng chứng minh được



A_1; B_1; C_1; D_1 tương ứng là trọng tâm của các tam giác BCD,ACD,ABD, ABC. Từ đó ta có:

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{27} \quad (1)$$

Do giả thiết $V_{A_1B_1C_1D_1} \le 1$, nên từ (1) ta suy ra

$V_{ABCD} \le 27 \quad (2)$

Bây giờ ta chứng minh tất cả các điểm đều nằm trong tứ diện ABCD.

Giả sử: Tồn tại điểm M(trong số các điểm đã cho), sao cho M không thuộc tứ diện ABCD (3)

Khi đó ít nhất một đỉnh của tứ diện ABCD (có thể cho đó là đỉnh B) sao cho B và M nằmtrong hai nửa không gian xác định bởi (ACD).

Suy ra $V_{MA_1C_1D_1} > V_{B_1A_1C_1D_1} \quad (1)$

Bất đẳng thức (4) chứng tỏ rằng $MA_1C_1D_1$ là tứ diện tạo bởi 4 đỉnh trong các điểm đã chốc thể tích lớn hơn thể tích của tứ diện $B_1A_1C_1D_1$. Điều này mâu thuẫn vơi cách định nghĩa tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ (vô lý). Suy ra điều phải chứng minh.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP THƯỜNG GẶP

1.Dạng bài tập tô màu, bảng vuông.

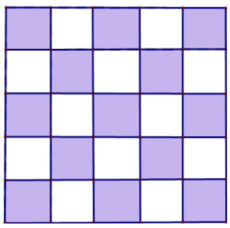
Bài toán 1. Trong mỗi ô bàn cờ kích thước 5x5 có một con bọ dừa. Vào một thời điểm nào đó tất cả các con bọ dừa bò sang ô bên cạnh (ngang hoặc dọc). Có thể khẳng định rằng sau khi các con bọ dừa di chuyển sẽ luôn có ít nhất một ô trong bàn cờ không có con bọ dừa nào trong đó không?

(Đề thi giao lưu HSG môn Toán lớp 8 TP Vĩnh Yên năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải

Ta tô đen - trắng các ô bàn cờ như hình vẽ. Khi đó số ô đen nhiều hơn số ô trắng. Như vậy số con bọ dừa ở ô đen sẽ nhiều hơn số con bọ dừa ở ô trắng. Do mỗi con bọ dừa chỉ di chuyển sang ô bên cạnh(ngang hoặc dọc), vì thế sau khi di chuyển các ô đen sẽ chứa các con bọ dừa ở ô trắng.

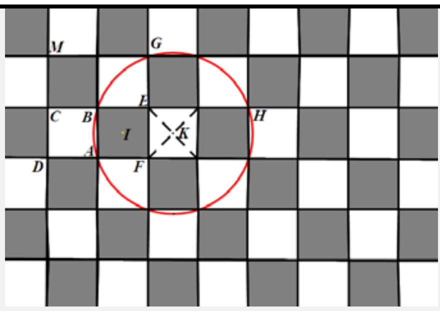
Mà số con bọ dừa ở ô đen nhiều hơn số con bọ dừa ở ô



trắng nên sau khi các con bọ dừa bò đi sẽ có ít nhất một ô đen bị bỏ trống .

Vậy : Có thể khẳng định rằng sau khi di chuyển sẽ luôn có ít nhất một ô trong bàn cờ không có con bọ dừa nào trong đó.

Bài toán 2. Trên lưới ô vuông cạnh 1. Người ta tô màu các ô bằng 2 màu đen trắng xen kẽ. Tính bán kính lớn nhất của đường tròn chỉ đi qua ba ô trắng.



Hướng dẫn giải

Trên lưới ô vuông cạnh 1. Người ta tô màu các ô bằng 2 màu đen trắng xen kẽ. Tính bán kính lớn nhất của đường tròn chỉ đi qua ba ô trắng.

- Xét đường tròn chỉ thuộc một ô trắng: Đường kính của nó bằng 1 (1)

- Xét đường tròn đi qua nhiều ô trắng => đường tròn đó phải đi qua các đỉnh của ô trắng. Không mất tính tổng quát, giả sử đường tròn đi qua đỉnh A của ô trắng ABCD.

+) Nếu đường tròn đi qua 2 đỉnh liên tiếp của ô trắng (A, B). Khi đó ta lại xét hai trường hợp: *) Đường tròn qua A, B, E. Khi đó nó là đường tròn $\left(I,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

*) Đường tròn qua A, B, G. Khi đó nó là đường tròn $\left(K;\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ (2)

+) Nếu đường tròn qua 2 đỉnh đối diện của ô trắng, Giả sử là (A, C)

Ta lại xét hai trường hợp:

*) Qua A, C, M (Tương tự qua A, B, G)

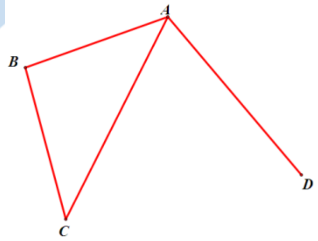
*) Qua A, C, N (Tương tự qua A, B, G)

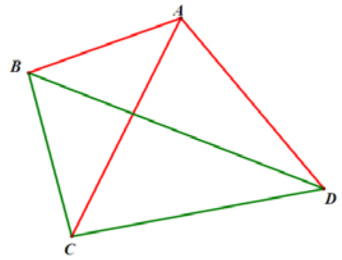
Cả hai trường hợp trên bán kính của đường tròn là $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra bán kính lớn nhất của đường tròn thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Bài toán 3. Cho 6 điểm trong đó 3 điểm nào cũng nối được với nhau tạo thành 1 tam giác có cạnh được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. CMR: Bao giờ cũng tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Hướng dẫn giải





Gọi A là một trong 6 điểm, 5 đoạn thẳng nối A với 5 điểm còn lại được tô bởi 2 hai màu xanh hoặc đỏ nên tồn tại 3 cạnh cùng màu. Giả sử là AB, AC, AD

Xét 2 trường hợp:

+Trường hợp 1: AB, AC, AD tô màu đỏ.

Xét ΔBCD. Nếu có một cạnh được tô màu đỏ (giả sử BC) thì ΔABC cùng màu đỏ (hình 1).

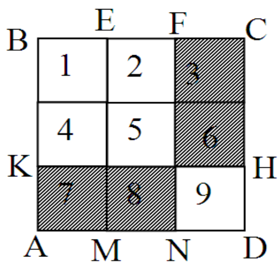
Nếu không có cạnh nào của ΔBCD tô màu đỏ thì ΔBCD có 3 cạnh cùng màu xanh (hình 2).

+Trường hợp 2: AB, AC, AD tô màu xanh. Chứng minh tương tự.

Vậy luôn tồn tại một tam giác có 3 cạnh cùng màu.

Bài toán 4. Trên tờ giấy có kẻ vô hạn các ô vuông và mỗi ô được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Cho bất cứ hình chữ nhật nào kích thước 2x3 thì có đúng hai ô màu đỏ. Xét hình chữ nhật có kích thước 2013x2014 bất kì. Tính số ô đỏ của nó.

Hướng dẫn giải



Ta có nhận xét sau :

Mọi hình chữ nhật 1x3 chứa đúng một ô màu đỏ.

Thật vậy, giả sử kết luận của nhận xét không đúng, tức là tồn tại hình chữ nhật 1x3 có số ô màu đỏ không khác một. Không giảm tổng quát giả sử đó là hình chữ nhật AKHD kích thước 1x3 có hai ô đỏ (nếu không thì không có ô đỏ nào, nhưng không thể là ba vì trong mọi hình chữ nhật 2x3 có đúng hai ô đỏ mà thôi)

Trường hợp AKHD không có ô đỏ nào thì lí luận tương tự

Cũng có thể cho là hai ô đỏ của AKHD là ô 7 , ô8

Xét hình chữ nhật BFNA. Đó là hình chữ nhật 2x3 , nên theo giả thiết nó có đúng hai ô đỏ mà 7 và 8 là hai ô đỏ, do đó các ô 1,2,4,5 là màu xanh.

Xét hình chữ nhật BCHK, từ giả thiết và do các ô 1,2,4,5 màu xanh nên các ô 3 ,6 là màu đỏ.

Xét hình chữ nhật ECDM kích thước 2x3, do ô 3,6,8 màu đỏ suy ra mâu thuẫn

Vậy giả thiết phản chứng là sai. Nhận xét được chứng minh.

Vì 2013 chia hết cho 3 và 2013: 3=671. do vậy hình chữ nhật kích thước 2013x2014 chia thành 2014x671 hình chữ nhật 1x3

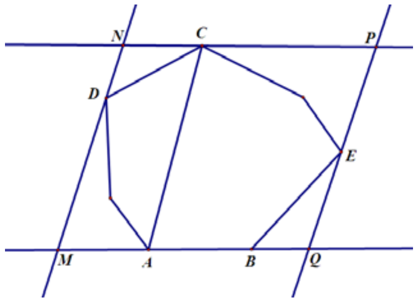
Vậy số ô đỏ trong một hình chữ nhật kích thước 2013x2014 là 2014x671 ô

Số ô đỏ cần tìm là 1351394 ô

3.Dạng bài tạo đa giác bao.

Bài toán 5. Cho một đa giác lồi có diện tích k cm^2. CMR: Tồn tại một hình bình hành có diện tích không vượt quá 2k cm^2 chứa toàn bộ đa giác.

Hướng dẫn giải



Gọi C là đỉnh cách xa AB nhất (hình vẽ).

+Trường hợp 1: Nếu AC là đường chéo của đa giác lồi.

Qua C kẻ $a // b$ ($A, B \in b$)

Gọi D,E là các đỉnh cách xa AC nhất, qua D kẻ đường thẳng d // AC, qua E kẻ đường thẳng c // AC. Gọi MNPQ là hình bình hành tạo bởi a,b,c,d suy ra các đỉnh của đa giác nằm trong hoặc trên biên của hình bình hành MNPQ.

Ta chứng minh $S_{MNPQ} \le 2k\ \ cm^2$, thật vậy: Gọi S_d là diện tích đa giác

Ta có: $S_{ACD} + S_{ACE} \le S_d \Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{MNPQ} \le S_d = \text{k} \Leftrightarrow S_{MNPQ} \le 2k\ \ (cm^2)$.

+Trường hợp 2: Nếu AC là cạnh của đa giác lồi. Gọi E là đỉnh cách xa AC nhất (Chứng minh tương tự).

Suy ra ta có điều phải chứng minh.

4.Phương pháp qui nạp toán học:

Để chứng minh mệnh đề A_n đúng với mọi n $\in$ N*:

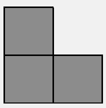
-B1: chỉ ra mệnh đề đúng với n=1 tức là A_1 đúng.

-B2: giả sử mệnh đề đúng với n = k (k $\in$ N*) thì A_k đúng.

-B3: chứng minh A_{k+1} đúng (mệnh đề đúng với n=k+1).

Kết luận A_n đúng với mọi n $\in$ N*.

Bài toán 1.

Người ta dùng loại gạch  để lát những căn phòng hình vuông ***n x n*** và luôn để trống 1 ô ở goc phòng.

a) Hãy nêu cách lát căn phòng 4x4, 8x8 ô vuông.
b) Chứng tỏ rằng người ta luôn lát được một căn phòng kích thước 2^kx 2^k sao cho ô trống là một ô bất kỳ.

Hướng dẫn giải

a) Xét hình vuông kích thước 4x4 ô vuông. Ta chia hình vuông thành 4 hình vuông kích thước 2 x 2. Hình thứ nhất ta đặt viên gạch sao chô ô ở góc bỏ trống, 3 hình còn lại ta lát sao cho ô trống quay vào phần tâm hình vuông. Cuối cùng ta lát viên gạch vào 3 ô còn thiếu (Hình 2)

-) Để lát hình vuông 8 x 8 ô vuông, ta lát tương tự (Chia hình vuông 8 x 8 thành 4 hình vuông 4 x 4) (H3)

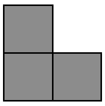
b) Ta chứng minh bằng PP quy nạp.

- Xét với k = 1: Bài toán luôn đúng.

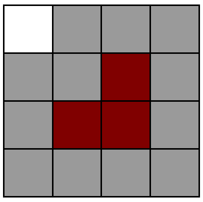
- Giả sử bài toán đúng với với k = n. Nghĩa là, có thể lát được hình vuông $2^n x 2^n$ sao cho còn trống một ô (i ; j) bất kỳ.

- Ta chứng minh bài toán đúng với k = n +1.

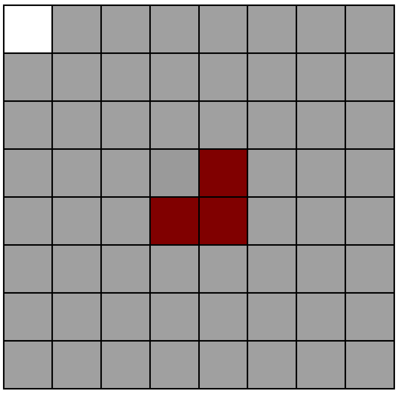
Thật vấy : Xét hình vuông $2^{n+1}x\ 2^{n+1} = 4x(2^n x 2^n)$. Ta chia hình vuông $2^{n+1}x\ 2^{n+1}$ thành 4 hình vuông $2^n x 2^n$. Theo giả thiết quy nạp, luôn lát được hình $2^n x 2^n$ sao cho có thể trống ô (i, j) bất kỳ. Ba hình vuông $2^n x 2^n$ còn lại ta để trống ô ở góc và lát vào ô trung tâm (tương tự H_3) cuối cùng lát viên gạch vào 3 ô trống. Bài toán được chứng minh.



(H_1)



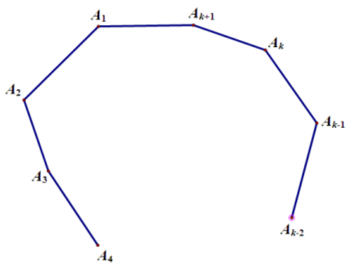
(H_2)



(H_3)

Bài toán 2. CMR: số đường chéo của đa giác lồi n cạnh ($n \geq 4$) bằng $S_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Hướng dẫn giải



Ta chứng minh Sn = $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (1) đúng với mọi $n \geq 4$.

+) Ta thấy (1) đúng với n=4 vì S_4=2, tứ giác có 2 đường chéo.

+) Giả sử khẳng định (1) đúng với n=k ($k \geq 4$) tức là đa giác lồi k cạnh có $\dfrac{k(k-3)}{2}$ đường chéo.+) Ta sẽ chứng minh đa giác lồi k+1cạnh có $\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$ đường chéo

Thật vậy khi thêm đỉnh thứ k+1 (hình vẽ) thì có thêm k-2 đường chéo nối từ A_{k+2} đến A_2, A_3,..., A_{k-1}, ngoài ra cạnh A_1A_k cũng trở thành đường chéo. Do đó, $S_{k+1} = S_k$+(k-2)+1= $\dfrac{k(k-3)}{2}$+k-1=$\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$

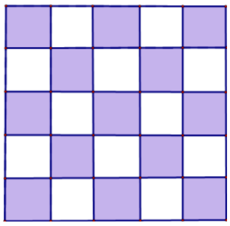
Vậy khẳng định (1) đúng với mọi n thuộc N*, n ≥ 4.

MỘT SỐ DẠNG BÀI TỔNG HỢP KHÁC

Ví dụ 1: Cho một cái bàn hình chữ nhật. Hai người chơi như sau: người thứ nhất dùng 1 đồng xu màu trắng đặt lên bàn, sau đó người thứ hai đặt 1 đồng xu đen lên bàn ở vị trí mà trước đó chưa có đồng xu nào đặt và cứ như vậy cho đến khi không còn chỗ để đặt đồng xu nào nữa. Biết rằng tất cả các đồng xu là bằng nhau. Người nào đến lượt đi mà không đặt được đồng xu nào lên bàn thì người đó thua cuộc. Chứng minh rằng có cách chơi để người thứ nhất luôn luôn thắng cuộc.

(Đề thi HSG lớp 7-TP Vĩnh Yên năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải



Ta tô đen - trắng các ô bàn cờ như hình vẽ. Khi đó số ô đen nhiều hơn số ô trắng. Như vậy số con bọ dừa ở ô đen sẽ nhiều hơn số con bọ dừa ở ô trắng. Do mỗi con bọ dừa chỉ di chuyển sang ô bên cạnh(ngang hoặc dọc), vì thế sau khi di chuyển các ô đen sẽ chứa các con bọ dừa ở ô trắng. Mà số con bọ dừa ở ô đen nhiều hơn số con bọ dừa ở ô trắng nên sau khi các con bọ dừa bò đi sẽ có ít nhất một ô đen bị bỏ trống .

Vậy : Có thể khẳng định rằng sau khi di chuyển sẽ luôn có ít nhất một ô trong bàn cờ không có con bọ dừa nào trong đó.

Ví dụ 2: Trong mỗi ô bàn cờ kích thước 5x5 có một con bọ dừa. Vào một thời điểm nào đó tất cả các con bọ dừa bò sang ô bên cạnh (ngang hoặc dọc). Có thể khẳng định rằng sau khi các con bọ dừa di chuyển sẽ luôn có ít nhất một ô trong bàn cờ không có con bọ dừa nào trong đó không?

(Đề thi HSG lớp 8-TP Vĩnh Yên năm học 2012-2013)

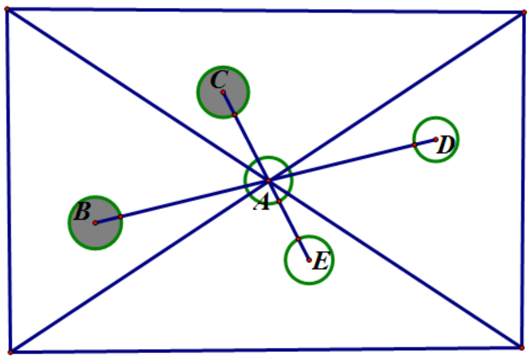
Hướng dẫn giải

Để đảm bảo thắng cuộc người thứ nhất phải có chiến lược chơi như sau:

+ Đầu tiên anh ấy chiếm vị trí trung tâm, tức là đặt đồng xu trắng
Sao cho tâm của đồng xu trùng với tâm hình chữ nhật (Vị trí A)

+ Giả sử người chơi thứ 2 đặt đồng xu đen lên bàn (Tâm đồng xu là B)

+ Khi đó điểm đối xứng với B qua tâm A là D chắc chắn còn trống.



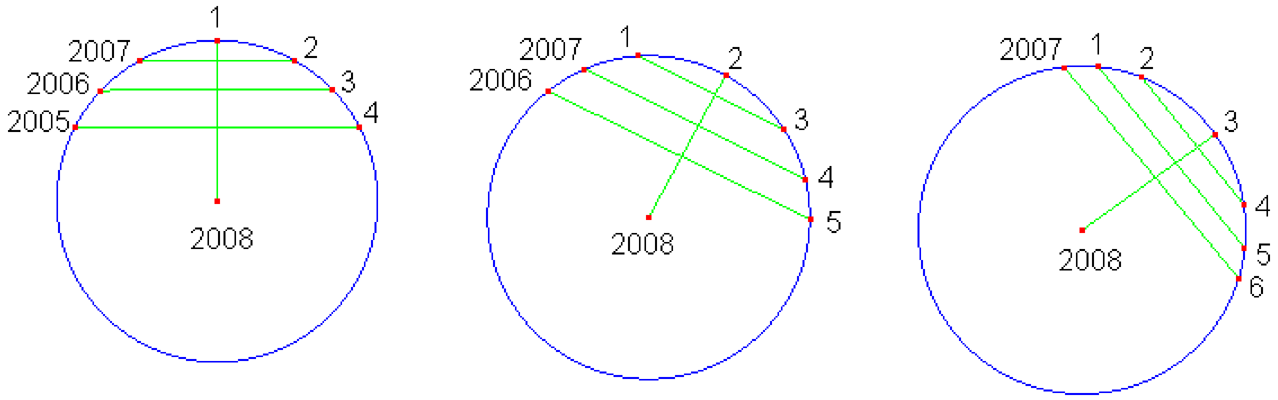
Người thứ nhất đặt đồng xu trắng sao cho tâm đồng xu trùng D.

+ Luật chơi cứ tiếp tục như vậy. Nghĩa là sau khi người thứ hai đặt đồng xu thì người thứ nhất chọn vị trí đối xứng qua tâm A để đặt đồng xu của mình (lưu ý các vị trí đối xứng này luôn chưa có đồng xu nào đặt trước đó)

Vì vậy, nếu người thứ hai còn đi được thì người thứ nhất vẫn đi được ở bước tiếp theo. Vì vậy người thứ nhất sẽ không bao giờ thua cuộc.
Do mặt bàn có diện tích hữu hạn, nên nếu thực hiện theo chiến thuật trên thì người đi trước chắc chắn đảm bảo chiến thắng thuộc về mình.
<u>Ví dụ 3:</u> Có 2008 con gà nhốt vào 1004 cái chuồng, mỗi chuồng có 2 con.Sau mỗi ngày người ta lại thay đổi vị trí của gà sao cho không có hai con gà nào đã nhốt chung chuồng trước đólại nằm cùng chuồng lần nữa.Hỏi tối đa có bao nhiêu ngày làm được như vậy?

(Đề khảo sát HSG Huyện Vĩnh Tường năm học 2008-2009)

Hướng dẫn giải



Vẽ đa giác đều 2007 cạnh nội tiếp trong đường tròn. Ký hiệu tâm là 2008, Còn các đỉnh là 1, 2, 3, ….2007. Ký hiệu đoạn thẳng nối i với j là i – j với $i, j = \overline{1,2008}$.
Xét bán kính 1 – 2008. Do tính chất đa giác đều nên ta thấy ngay 1003 dây cung sau đây vuông góc với bán kính ấy: 2 – 2007; 3 – 2006; 4 – 2005; ....; 1004 – 1005
Xét bán kính 2 – 2008 . Tương tự ta có 1003 dây cung sau đây vuông góc với bán kính ấy: 1- 3; 2007 – 4; 2006 – 5...
Xét bán kính 3 – 2008. Tương tự ta có 1003 dây cung sau đây vuông góc với bán kính ấy: 2 – 4; 1 – 5; 2007 – 6; ....
Cứ làm như vậy và cuối cùng xét bán kính 2007 – 2008, ta có 1003 dây cung sau đây vuông góc với bán kính ấy: 2006 – 1; 2005 – 2; 2004 – 3; ....
Dựa vào nhận xét trên và cách đánh số các con gà từ 1 – 2008, ta chỉ ra cách xếp gà theo yêu cầu bài toán như sau:
+ Ngày thứ nhất xếp vào chuồng các đôi gà như sau:1 – 2008; 2- 2007; ....; 1004 – 1005
+ Ngày thứ hai xếp vào chuồng các đôi gà như sau: 2- 2007;1-3;2007 – 4;...; 1006 – 1005
+ Ngày thứ ba xếp vào chuồng các đôi gà như sau: 3 – 2008; 2- 4;1-5;....; 1007 – 10056
Tương tự
+ Ngày thứ 2007 xếp vào chuồng các đôi gà như sau: 2007 – 2008; 2006- 1; ....; 1004 – 1003
Mặt khác không có qua 2007 ngày vì mỗi con gà chỉ có thể cùng chuồng với một trong 2007 con gà còn lại.
Vậy tối đa có 2007 ngày để xếp gà theo yêu cầu của đề bài.

Ví dụ 4: **X**ét 20 số nguyên dương đầu tiên $1,2,3,\ldots,20$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Với mỗi cách lấy ra k số phân biệt từ 20 số trên, đều lấy được hai số phân biệt a và b sao cho $a+b$ là một số nguyên tố.

(Đề tuyển sinh THPT chuyên Vĩnh Phúc 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Xét tập hợp $\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, ta thấy tổng của hai phần tử bất kì của tập hợp này đều không phải là số nguyên tố.

Do đó $k\ge 11$, ta sẽ chứng minh $k=11$ là số nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thật vậy, ta chia tập hợp $A=\{1,2,3,...,20\}$ thành 10 cặp số sau:

$(1,2),(3,16),(4,19),(5,6),(7,10),(8,9),(11,20),(12,17),(13,18),(14,15)$.

Tổng của hai số trong mỗi cặp số trên là số nguyên tố.

Khi đó mỗi tập con của A có 11 phần tử thì tồn tại ít nhất hai phần tử thuộc cùng vào một trong 10 cặp số trên. Suy ra trong A luôn có hai phần tử phân biệt có tổnglà một số nguyên tố.

Ví dụ 5: Hỏi có hay không 16 số tự nhiên, mỗi số có ba chữ số được tạo thành từ ba chữ số *a*, *b*, *c* thỏa mãn hai số bất kỳ trong chúng không có cùng số dư khi chia cho 16?

(Đề tuyển sinh THPT chuyên Vĩnh Phúc 2013-2014)

Hướng dẫn giải

Trả lời: *Không tồn tại 16 số như vậy.* Thật vậy, giả sử trái lại, tìm được 16 số thỏa mãn. Khi đó, ta có 16 số dư phân biệt khi chia cho 16: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15; trong đó có 8 số chẵn, 8 số lẻ.

Do đó, ba chữ số *a*, *b*, *c* khác tính chẵn lẻ, giả sử hai chữ số chẵn là *a*, *b* và chữ số lẻ là *c*.

Có 9 số lẻ được tạo thành từ những chữ số này: $\overline{aac},\overline{abc},\overline{acc},\overline{bac},\overline{bbc},\overline{bcc},\overline{cac},\overline{cbc},\overline{ccc}$.

Gọi $x_1,x_2,\ldots,x_9$ là các số có hai chữ số thu được từ các số ở trên bằng cách bỏ đi chữ số *c* (ở hàng đơn vị). Khi đó $\overline{x_i c}\not\equiv\overline{x_j c}\pmod{16}\Leftrightarrow 16$ không là ước của $\overline{x_i c}-\overline{x_j c}$ tức là x_i-x_j không chia hết cho 8

Nhưng trong 9 số $x_1,x_2,\ldots,x_9$ chỉ có ba số lẻ $\overline{ac},\overline{bc},\overline{cc}$ nên 8 số bất kỳ trong 9 số $x_1,x_2,\ldots,x_9$ luôn có hai số có cùng số dư khi chia cho 8, mâu thuẫn.

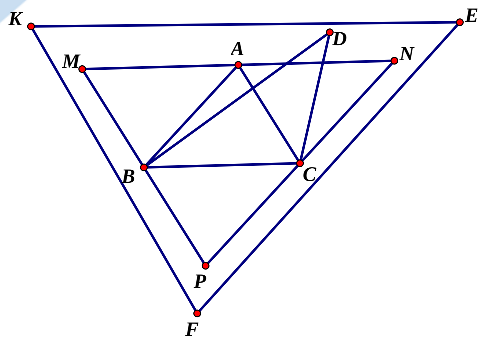
Tương tự, trường hợp trong ba số *a*, *b*, *c* có hai số lẻ, một số chẵn cũng không xảy ra

Ví dụ 6:

Cho 2011 điểm nằm trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và mọi tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 2011 điểm đã cho đều có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng có thể đặt 2011 điểm trên trong một tam giác có diện tích bằng 4.

(Đề khảo sát HSG Huyện Vĩnh Tường năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải



Giả sử tam giác ABC là tam giác có 3 đỉnh trong 2011 điểm đã cho và có diện tích lớn nhất => $S_{ABC} < 1$. Qua A, B, C kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác ABC ta được tam giác MNP có $S_{MNP} < 4$.

Ta chứng minh ko có điểm nào trong 2011 điểm đã cho nằm ngoài tam giác MNP. Thật vậy: Giả sử có điểm D nằm ngoài tam giác MNP

. Khi đó $S_{DBC} > S_{ABC}$ trái với cách chọn tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Suy ra 2011 điểm đã cho không nằm ngoài tam giác MNP có diện tích nhỏ hơn 4. Vì vậy 2011 điểm đó nằm trong tam giác KEF đồng dạng với tam giác MNP(h.vẽ) và có diện tích bằng 4.

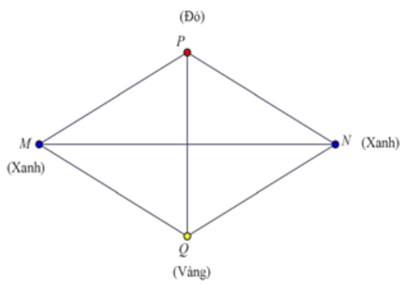
Ví dụ 7:

Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng.

Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà độ dài $AB = 1$.

(Đề thi HSG Tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải



- Giả sử trái lại, với mọi cách tô, không tồn tại hai điểm cùng màu mà có khoảng cách bằng 1.

Xét hai điểm $M, N : MN = \sqrt{3}$ thì tồn tại các điểm P, Q sao cho các tam giác MPQ, NPQ là các tam giác đều có độ dài cạnh bằng 1.

Khi đó, do hai điểm có khoảng cách bằng 1 thì được tô bởi hai màu khác nhau, nên M, N phải được tô bởi cùng một màu,

chẳng hạn tô *P*: Đỏ, *Q*: Vàng thì *M*, *N*: phải tô cùng màu Xanh, (Hình vẽ).

- Từ đó, nếu điểm *M* được tô màu Xanh, thì mọi điểm nằm trên đường tròn tâm *M*, bán kính $\sqrt{3}$ đều được tô màu Xanh. Nhưng trên đường tròn này luôn có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bằng 1. Mâu thuẫn với giả thiết phản chứng.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

Ví dụ 8:

Trong bảng hình vuông gồm 10×10 ô vuông (10 hàng, 10 cột), người ta viết vào các ô vuông các số tự nhiên từ 1 đến 100 theo cách như sau: ở hàng thứ nhất, từ trái sang phải, viết các số từ 1 đến 10; ở hàng thứ hai, từ trái sang phải, viết các số từ 11 đến 20; cứ như vậy cho đến hết hàng thứ 10. Sau đó cắt bảng hình vuông thành những hình chữ nhật nhỏ kích thức 1×2 hoặc 2×1. Tính tích số của hai số trong mỗi hình chữ nhật nhỏ rồi cộng 50 tích lại. Cần phải cắt hình vuông như thế nào để tổng tìm được nhỏ nhất ? Hãy tính giá trị nhỏ nhất đó.

(Đề KS HSG Huyện Vĩnh Tường năm học 2011-2012)

Hướng dẫn giải

Cắt hình vuông thành các hình chữ nhật cỡ 1×2 hoặc 2×1 thì được tất cả 50 hình. Giả sử trong hình thứ k có 2 số a_k, b_k thì hoặc $|a_k-b_k|=1$ hoặc $|a_k-b_k|=10$.

Ta có $a_k\cdot b_k=\dfrac{a_k^2+b_k^2}{2}-\dfrac{(a_k-b_k)^2}{2}$ suy ra $\sum\limits_{k=1}^{50}a_k\cdot b_k=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{50}\left(a_k^2+b_k^2\right)-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{50}(a_k-b_k)^2$

Trong đó $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{50}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(1^1+2^2+\cdots+100^2\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{100\cdot 101\cdot 201}{6}=169175$

và mỗi số $(a_k-b_k)^2$ hoặc bằng 1 hoặc bằng 100.

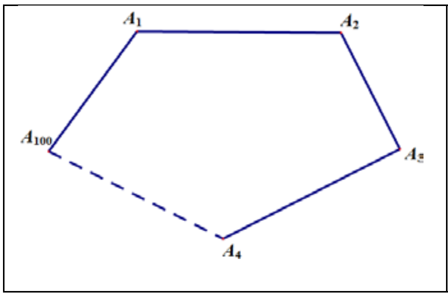
Do đó, để tổng thu được là nhỏ nhất, thì $(a_k-b_k)^2=100, \forall k=1,2,...,500.$

Vì vậy, cần cắt hình vuông thành các hình chữ nhật với kích thước 2×1. Và khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng bằng $169175-25\times 100=166675$.

<u>Ví dụ 9:</u> Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_{100}$. Tại mỗi đỉnh A_k ($k=1,2,...,100$), người ta ghi một số thực a_k sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau chỉ bằng 2 hoặc 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau.

(Đề tuyển sinh THPT chuyên Vĩnh Phúc 2011-2012)

Hướng dẫn giải



Xét đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_{100}$ như hình vẽ. Khi đó $|a_k-a_{k+1}|=2$ hoặc $|a_k-a_{k+1}|=3$ ($k=1,2,...,99$). Không mất tính tổng quát, coi a_1 là nhỏ nhất, a_n là lớn nhất (dễ thấy $n\geq 2$). Đặt $d=\max\limits_{i\neq j}|a_i-a_j|$ khi đó $d=a_n-a_1$. Ta sẽ chứng minh $d=149$.

Nằm giữa A_1, A_n, theo chiều kim đồng hồ có $n-2$ đỉnh và có $100-n$ đỉnh, theo chiều ngược kim đồng hồ. Hơn nữa giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số kề nhau không vượt quá 3. Do đó $d=|a_1-a_n|\leq|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+...+|a_{n-1}-a_n|\leq 3(n-1)$ và tương tự ta có $d\leq 3(100-n+1)$. Suy ra $d\leq\dfrac{(3(n-1))+(3(100-n+1))}{2}=\dfrac{300}{2}=150$

$d=150$ khi và chỉ khi hiệu giữa hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau đúng bằng 3 hay ta có

$$|a_i-a_{i+1}|=3,\ \ i=1,2,...,99\Rightarrow|a_i-a_{i+1}|=|a_{i+1}-a_{i+2}|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a_i-a_{i+1}=a_{i+1}-a_{i+2}\\ a_i=a_{i+2}\end{array}\right.(i=1,...,98)$$

$$\Rightarrow a_1-a_{100}=a_1-a_2+a_2-a_3+...+a_{99}-a_{100}=99(a_1-a_2)\Rightarrow|a_1-a_{100}|=|99(a_1-a_2)|\Rightarrow 3=99.3$$

Điều này không xảy ra suy ra $d=150$ không thỏa mãn.

Ta xây dựng một trường hợp cho $d=149$ như sau:

$$a_1=0, a_2=2, a_k=a_{k-1}+3$$

với $k=2,3,\ldots,52; a_{53}=a_{52}-2, a_k=a_{k-1}-3, k=54,55,\ldots,100$

Khi đó hiệu lớn nhất $a_{53}-a_1=149$.

Các số $a_2,a_3,\ldots,a_{53}$ có dạng $2+3t$, các số $a_{54},a_{55},\ldots,a_{100}$ có dạng $147-3k$.

Rõ ràng không tồn tại k,t sao cho $2+3t=147-3k \Leftrightarrow 3(k+l)=145$ $(k,t\in\mathbb{Z})$.
Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 10: Một số tự nhiên dương được gọi là số "Đẹp", nếu nó là hợp số và không chia hết cho 2, 3, 5, 7. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên "Đẹp" nhỏ hơn 2011

Hướng dẫn giải

Số "Đẹp" là hợp số, không chia hết cho 2,3,5,7, nên nó phải là tích của các số nguyên tố lớn hơn 10.

Do $13^3=2197>2010$, nên số cần tìm có dạng $a\cdot b$ hoặc $a\cdot b\cdot c$ với *a,b, c* là các số nguyên tố $11\le a\le b\le c$.

Xét số "Đẹp" dạng $a\cdot b$ với $11\le a\le b$, *a,b* là các số nguyên tố :

Với a=11 thì $11\le b\le 181$, có 38 số

Với a=13 thì $13\le b\le 151$, có 31 số

Với a=17 thì $17\le b\le 113$, có 24 số

Với a=139 thì $19\le b\le 103$, có 20 số

Với a=23 thì $23\le b\le 83$, có 15 số

Với a=29 thì $29\le b\le 71$, có 12 số

Với a=31 thì $31\le b\le 61$, có 8 số

Với a=37 thì $37\le b\le 53$, có 5 số

Với a=41 thì $41\le b\le 47$, có 3 số

Với a=43 thì b=43, có 1 số

Xét số "Đẹp" dạng $a\cdot b\cdot c$ với $11\le a\le b\le c\le 13$, *a,b,c* là các số nguyên tố

Có 3 số có dạng này đó là: 11.11.11=1331; 11.11.13=1573 ; 11.13.13=1859

Suy ra số các số "Đẹp" cần tìm là $S=38+31+24+20+15+12+8+5+3+1+3=160$ số

Ví dụ 11:

Trong một hộp có 2014 viên sỏi. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên sỏi và nhiều nhất là 20 viên sỏi. Người nào bốc viên sỏi cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm thuật chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.

Hướng dẫn giải

Để đảm bảo thắng cuộc, ở nước đi cuối cùng của mình người bốc sỏi đầu tiên phải để lại trong hộp 11 viên sỏi. Ở nước đi trước đó phải để lại trong hộp: $11+(20+11)=42$ viên sỏi.
Suy ra người bốc sỏi đầu tiên phải đảm bảo trong hộp lúc nào cũng còn $11+31k$ viên sỏi.
Ta có $(2014-11):31=64$ dư 19. Như vậy người bốc sỏi đầu tiên ở lần thứ nhất của mình phải bốc 19 viên.

Tiếp theo, khi đối phương bốc k viên sỏi ($k=1, 2, ..., 20$) thì người bốc sỏi đầu tiên phải bốc $31-k$ viên sỏi, cuối cùng sẽ để lại 11 viên sỏi cho đối phương.

Ví dụ 12: Có điền được hay không 100 số gồm 10 số -2, 10 số -1, 30 số 0, 40 số 1, 10 số 2 vào các ô của bảng 10×10 (mỗi ô điền một số và gọi số ở hàng i tính từ dưới lên trên và cột j tính từ trái sang phải là a_{ij}) sao cho thỏa mãn hai điều kiện:

i) Tổng các số trên các hàng, các cột đều bằng m;

ii) Tổng các số a_{ij} trong bảng thỏa mãn i . j ⋮ 2 bằng 5m.

Hướng dẫn giải

Không điền được.

Thật vậy, giả sử trái lại, điền được các số thỏa mãn.

Khi đó $m = \frac{1}{10} \cdot \left[10.(-2) + 10.(-1) + 30.0 + 40.1 + 10.2\right] = 3$ là một số lẻ.

Ta chia các ô của bảng thành 4 loại:

- Loại 1 gồm các ô ở hàng lẻ, cột lẻ.
- Loại 2 gồm các ô ở hàng lẻ, cột chẵn.
- Loại 3 gồm các ô ở hàng chẵn, cột lẻ.
- Loại 4 gồm các ô ở hàng chẵn, cột chẵn.

Kí hiệu S_k là tổng tương ứng trên tất cả các ô loại k. Khi đó

$S_1 + S_2$ là tổng các số trên tất cả các hàng lẻ, nên $S_1 + S_2 = 5m$.

$S_2 + S_4$ là tổng các số trên tất cả các cột chẵn, nên $S_2 + S_4 = 5m$.

Loại 1 và loại 4 đều gồm các ô mà i - j chẵn, do đó $S_1 + S_4 = 5m$.

Suy ra $2(S_1 + S_2 + S_4) = 15m$ (1)

Do m lẻ, nên VP(1) lẻ.

Mà VT(1) chẵn: vô lí.

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy không thể điền được các số thỏa mãn.

<u>Ví dụ 13:</u>

Có 40 học sinh trong một lớp đứng thành vòng tròn quay mặt vào tâm đường tròn để tham gia trò chơi đếm số như sau: Mỗi học sinh đếm một trong dãy số tuần hoàn 1,2,1,2,1,2….lần lượt theo chiều kim đồng hồ bắt đầu từ học sinh A(lớp trưởng). Nếu học sinh nào đếm số 2 thì phải rời ngay khỏi vòng tròn. Việc đếm cứ tiếp tục như vậy cho đến khi chỉ còn 1 học sinh - Học sinh đó được coi là thắng cuộc. B là một học sinh giỏi Toán, B đã tìm ngay được vị trí đứng để mình là người thắng cuộc. Hỏi B đứng ở vị trí nào theo chiều kim đồng hồ kể từ A?

Hướng dẫn giải

Xét trường hợp lớp chỉ có 32 học sinh thì lớp trưởng ở vị trí thứ nhất sẽ luôn thắng cuộc. Như vậy, để B là người thắng cuộc thì B phải đứng ở vị trí thứ nhất sau khi loại được (40 – 32) = 8 người.

Hay B phải đứng ở vị trí 8 x 2 + 1 = 17 theo chiều kim đồng hồ kể từ vị trí của lớp trưởng A.

(GV có thể yêu cầu HS tổng quát hóa bài toán với n HS trong lớp. Nếu lớp có 2^k HS thì B có cơ hội thắng cuộc ko?)

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. chứng minh rằng tồn tại một số có dạng 111...11 mà chia hết cho p.

Câu 2. Trong hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1) có 101 điểm. Chứng minh rằng có 5 điểm đã chọn được phủ bởi hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Câu 3. Trong hình chữ nhật 3x4 đặt sáu điểm. chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng không lớn hơn $\sqrt{5}$

Câu 4. Trong một tam giác đều, cạnh có độ dài bằng 1, đặt năm điểm . Chứng minh rằng tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$

Câu 5. Trong hình tròn đường kính 5 có 10 điểm . Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bé hơn hoặc bằng 2.

Câu 6. Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp năm hình tròn có bán kính 1, sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm trong chung.

Câu 7. Cho 2014 đường thẳng cùng có tính chất: chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 504 đường thẳng trong 2014 đường thẳng trên đồng quy.

Câu 8. Cho một bảng kích thước 2n x 2n ô vuông. Người ta đánh dấu_vào 3n ô bất kỳ của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trong n hàng n cột này.

Câu 9. Cho 1000 điểm M_1, M_2. …M_{1000} trên một mặt phẳng. Vẽ môt đường tròn bán kính 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho $SM_1 + SM_2 + \ldots + SM_{1000} \geq 1000$

Câu 10. Cho mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh, đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm cùng màu.

Câu 11. Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất sáu điểm trong số 11000 điểm đã cho.

Câu 12. Trong hình vuông cạnh 12 chứa 2014 điểm**.** Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác đều cạnh 11 phủ kín 504 điểm trong 2014 điểm đã cho.

Câu 13. Cho (x_i, x_i, x_i), i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 là một tập hợp gồm 9 điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trong không gian.

Chứng minh rằng trung điểm của đường nối ít nhất một trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

Câu 14. Trong một hình vuông có cạnh là 1 chứa một số đường tròn. Tổng tất cả chu vi của chúng là 10. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt ít nhất 4 đường tròn trong những đường tròn đó?

Câu 15. Cho một hình vuông và 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích 2 : 3.Chứng minh rằng trong số 13 đường thẳng đã cho, có ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

Câu 16. Trong một cái bát hình vuông cạnh 18 cm có 128 hạt vừng. Chứng minh rằng tồn tại hai hạt vừng có khoảng cách tới nhau nhỏ hơn 20 cm.

Câu 17. Trong hình chữ nhật 3x4 đặt 6 điểm. Chứng minh rằng trong số đó luôn tìm được hai điểm có khoảng cách giữa chúng không lớn hơn .

Câu 18. Bên trong tam giác đều ABC cạnh 1 đặt 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 0,5

Câu 19. Trong hình tròn đường kính bằng 5 có 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm mà khoảng cách giữa chúng bé hơn hoặc bằng 2.

Câu 20. Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Câu 21. Tìm hình vuông có kích thước bé nhất, để trong hình vuông đó có thể sắp xếp năm hình tròn bán kính 1, sao cho không có hai hình tròn nào trong chúng có điểm chung.

Câu 22. Chứng minh rằng trong một hình tròn bán kính 1, không thể chọn được quá 5 điểm mà khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Câu 23. Cho hình tròn có bán kính n, ở đây n là số nguyên dương. Trong hình tròn có 4n đoạn thẳng đều có độ dài bằng 1. Cho trước một đường thẳng d. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng d’ hoặc song song với d, hoặc là vuông góc với d sao cho d’ cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho.

Câu 24. Cho 1000 điểm $M_1, M_2, ..., M_{1000}$ trên mặt phẳng. Vẽ một đường tròn bán kính 1 tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại điểm S trên đường tròn sao cho

$$SM_1 + SM_2 + ... + SM_{1000} \geq 1000.$$

Câu 25. Cho chín đường tròn cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Câu 26. Cho một bảng có kích thước $2n \times 2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào 3n ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Câu 27. Trong mặt phẳng cho tập hợn A có n điểm (n$\geq$ 2). Một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Chứng minh rằng tập hợp A đã cho, có ít nhất hai điểm đươc nối với cùng số lượng các điểm khác thuộc A.

Chương VI

PHẦN NGUYÊN PHẦN LẺ VÀ ỨNG DỤNG

C. Kiến thức cần nhớ

PHẦN NGUYÊN

1. Định nghĩa

Phần nguyên có số thực a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a, kí hiệu là $[a]$. Ta có $[a] \leq a < [a]+1$.

Phần lẻ của số thực a là hiệu của a với phần nguyên của nó, kí hiệu là $\{a\}$.

Ta có $\{a\} = a - [a], 0 \leq \{a\} \leq 1$.

Ví dụ.

$$[5,3] = 5;$$
$$[-5,3] = -6;$$
$$[2012] = 2012;$$
$$\{5,3\} = 5,3 - 5 = 0,3;$$
$$\{-5,3\} = -5,3 - (-6) = 0,7;$$
$$\{2012\} = 2012 - 2012 = 0.$$

2. Tính chất

1) $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [a] = a$ hoặc $\{a\} = 0.$

2) $n \in \mathbb{Z}$ và $n \le a < n+1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [a] = n.$

3) $\left[\{a\}\right] = \{[a]\} = 0.$

4) Nếu $n \in \mathbb{Z}$ thì $[n+a] = n + [a]; [n+a] = \{a\}.$

5) Nếu $[n+a] = n$ thì $n \in \mathbb{Z}$ và $0 \le a \le 1.$

6) $a \ge b \Rightarrow [a] \ge [b].$

7) $[a] + [b] \le [a+b].$

Tổng quát $[a_1] + [a_2] + ... + [a_n] \le [a_1 + a_2 + ... + a_n],$

8) $[a] - [b] \ge [a-b].$

9) $\{a\} + \{b\} \ge \{a+b\}; \{a\} - \{b\} \le \{a-b\}.$

10) Nếu $[a] = [b]$ thì $|a-b| < 1.$

11) $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a].$

12) Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì $[na] \ge n[a]; \left[\frac{[a]}{n}\right] = \left[\frac{a}{n}\right].$

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -[a];$

Nếu a không là số nguyên thì $[-a] = -[a] - 1;$

Chứng minh

Các tính chất 1) đến 5) có thể chứng minh dễ dàng trên dựa vào định nghĩa phần nguyên.

6) Vì $a \ge b$ nên tồn tại số $c \ge 0$ sao cho $a = b + c.$ Do đó. $a = [b] + \{b\} + c,$ suy ra

$$[a] = [b] + \left[\{b\} + c\right]. \text{ Mà } \left[\{b\} + c\right] \ge 0 \text{ nên } [a] \ge [b].$$

7) Viết $a = [a] + \{a\}, b = [b] + \{b\}.$ Khi đó

$$[a+b] = \left[[a] + \{a\} + [b] + \{b\}\right] = [a] + [b] + \left[\{a\} + \{b\}\right].$$

Mà $\left[\{a\} + \{b\}\right] \ge 0$ nên

$$[a+b] \ge [a] + [b].$$

8) Áp dụng tính chất 7 ta có

$$[a+b] + [b] \le [a-b+b] = [a] \text{ nên } [a] - [b] \ge [a-b].$$

9) $\{a\} - \{b\} = a - [a] + b - [b] = (a+b) - ([a] + [b]) \ge a + b - [a+b] = \{a+b\}.$

Vậy $\{a\} - \{b\} \ge \{a-b\}.$

10) $[a] = [b]$ suy ra $a - \{a\} = b - \{b\}.$ Không giảm tính tổng quát, giả sử $a \ge b$

Nếu $a = b$ thì $|a-b| = 0;$

Nếu $a > b$ thì từ $a - b = \{a\} - \{b\} \le \{a-b\}$

Suy ra $|a-b| = a-b \le \{a-b\} < 1$

Vậy luôn có $0 \le |a-b| \le 1$.

11) Đặt $\{a\} = d$ thì $0 \le d \le 1$.

- Nếu $0 \le d < \frac{1}{2}$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right] = \left[[a]+d+\frac{1}{2}\right] = [a] + \left[d+\frac{1}{2}\right] = [a]$;

$[2a] = \left[2([a]+d)\right] = 2[a] + [2d] = 2[a]$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

- Nếu $\frac{1}{2} \le d < 1$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right] = \left[[a]+d+\frac{1}{2}\right] = [a] + \left[d+\frac{1}{2}\right] = [a]+1$;

$[2a] = \left[2([a]+d)\right] = 2[a] + [2d] = 2[a]+1$. Suy ra điều phải chứng minh.

12) Ta có $[na] = \left[n([a]+\{a\})\right] = n[a] + \left[n\{a\}\right]$, mà $\left[n\{a\}\right] \ge 0$ nên $[na] \ge n[a]$.

$$\left[\frac{a}{n}\right] = \left[\frac{[a]}{n} + \frac{\{a\}}{n}\right] = \left[\frac{[a]}{n}\right].$$

13) Nếu a là số nguyên thì $[-a] = -a = -[a]$.

Nếu a không nguyên thì $0 < \{a\} < 1$, nên $-1 < -\{a\} < 0$, suy ra $\left[-\{a\}\right] = -1$.

Ta có $[-a] = \left[-([a]+\{a\})\right] = \left[-[a]\right] + \left[-\{a\}\right] = -[a]+1$.

B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1: Chứng minh một số dạng toán số học

Bài toán 1. Cho $a > 0$ và số n nguyên dương. Chứng minh rằng số các số nguyên dương là bội số của n và không vượt quá a là $\left[\frac{a}{n}\right]$.

Hướng dẫn giải

Ta viết $a = nq + r$, trong đó q là số tự nhiên, $0 \le r < n$.

Rõ ràng các bội số của n không vượt quá a là $n, 2n, ..., qn$. tổng cộng có q số.

Mặt khác $\left[\frac{a}{n}\right] = q$. Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Bài toán 2. Số $2012!$ có tận cùng bao nhiêu số 0?

Hướng dẫn giải

Vì $10 = 2.5$ nên để biết $2012!$ có tận cùng bằng bao nhêu chữ số 0, ta cần phải tính số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố.

Theo **Ví dụ 1**, Số mũ của 5 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố bằng

$$\left[\frac{2012}{5}\right] + \left[\frac{2012}{5^2}\right] + \left[\frac{2012}{5^3}\right] + \left[\frac{2012}{5^4}\right] = 402 + 80 + 16 + 3 = 501. \text{ (Do } 2012 < 5^5\text{)}$$

Do mũ của 2 khi phân tích $2012!$ ra thừa số nguyên tố nhiều hơn 501.

Vậy $2012!$ Có tận cùng là 501 chữ số 0.

Nhận xét. Nếu $5^k \le n < 5^{k+1}$ thì số chữ số 0 tận cùng về bên phải của số $n!$ bằng

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{5^k}\right].$$

Bài toán 2. Tìm số tự nhiên k lớn nhất sao cho $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k.

Hướng dẫn giải

Ta có $2012 = 2^2.503.$

Số mũ cao nhất của 503 có trong 2011! Là

$$\left[\frac{2011}{503}\right]=3 \text{ (do } 2011<503^2\text{)}.$$

Vậy 2011! chia hết cho 503^3 và không chia hết cho 503^4, hiển nhiên 2011! chia hết cho 4^3. Do vậy 2011! chia hết cho 2012^3 và không chia hết cho 2012^4.

Muốn $(2011!)^{2012}$ chia hết cho 2012^k thì $k \le 3.2012 = 6036.$

Vậy $\max k = 6036.$

Bài toán 3. Tìm số tự nhiên n sao cho

$$\left[\frac{n}{2010}\right]=\left[\frac{n}{2011}\right]=\left[\frac{n}{2012}\right].\ (1)$$

Hướng dẫn giải

Viết $n = 2010k + r(0 \le r \le 2009, k, r$ là có số tự nhiên). Thay vào (1) ta có

$$\left[\frac{2010k+r}{2010}\right]=\left[\frac{2011k+r-k}{2011}\right]=\left[\frac{2012k+r-2k}{2012}\right]$$

$$\Leftrightarrow k = k+\left[\frac{r-k}{2011}\right]=k+\left[\frac{r-2k}{2012}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{r-k}{2011}\right]=\left[\frac{r-2k}{2012}\right]=0.$$

Suy ra $0 \le r-2k$ nên $2k \le r \le 2009, 0 \le k \le 1004.$

Vậy $n = 2010k + r(0 \le k \le 1004; 2k \le r \le 2009).$

Do có 105 giá trị của k (từ 0 đến 1004). Với một k thì r nhận các giá trị từ $2k$ đến 2009. Vậy sô nghiệm tự nhiên n của (1) là

$$\sum_{k=0}^{1004}(2010-2k)=1011030.$$

Bài toán 4. Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho

$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right]$ là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải

Nhận xét

$$\left[\sqrt{n^2}\right]=\left[\sqrt{n^2+1}\right]=...=\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=n, n\in\mathbb{N}.$$

Đặt $S_n=\left[\sqrt{n^2}\right]+\left[\sqrt{n^2+1}\right]+...+\left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]=(2n+1)n=2n^2+n.$

Do đó $y=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{x^2-1}\right]=S_1+S_2+...+S_{x-1}=\dfrac{x\left(4x^2-3x-1\right)}{6}.$

Nên $6y=x\left(4x^2-3x-1\right)$, suy ra $6y\,\vdots\, x$, mà x, y là các số nguyên tố suy ra $x\in\{2;3;y\}$.

Nếu $x=2$ thì $y=3$ (thỏa mãn); nếu $x=3$ thì $y=13$ (thỏa mãn); nếu $x=y$ thì $y=-1$ hoặc $y=\dfrac{7}{4}$ (loại).

Vậy bài toán có hai nghiệm $x=2$ và $x=3$.

Giải phương trình có chứa dấu phần nguyên

a) **Dạng 1.** $\left[f(x)\right]=a\,(a\in\mathbb{Z})$

Phương pháp: $\left[f(x)\right]=a\,(a\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow a\le f(x)<a+1.$

Ví dụ 1. Giải phương trình $[x]^2-3[x]+2=0.$

Ví dụ 2. Giải phương trình $\left[x^2+5\right]^2-9\left[x^2+7\right]=-26.$(gợi ý: $\left[x^2+7\right]=\left[x^2+5\right]+2$)

b) **Dạng 2.** $\left[f(x)\right]=g(x)$

Phương pháp: Đặt $g(x)=t$ (t nguyên), biểu diễn $f(x)=h(t)$ đưa về phương trình $\left[h(t)\right]=t\Leftrightarrow t\le h(t)<t+1$ hay $0\le h(t)-t<1.$

Tìm t, sau đó từ $g(x)=t$ tìm ra x.

Bài toán 1. Giải phương trình $\left[\dfrac{4-3x}{5}\right]=\dfrac{5x-5}{7}.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\dfrac{5x-5}{7}=t\,(t\in\mathbb{Z})$ thì $x=\dfrac{7t+5}{5};\dfrac{4-3x}{5}=\dfrac{5-21t}{25}.$

Ta có $\left[\dfrac{5-21t}{25}\right]=t\Leftrightarrow t\le\dfrac{5-21t}{25}<t+1$

$\Leftrightarrow 25t\le 5-21t\le 25t+25\Leftrightarrow\dfrac{-20}{46}<t\le\dfrac{5}{46}.$

Do t nguyên nên $t=0$. Suy ra $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 2. Giải phương trình $x^2-9[x]+8=0.$

Hướng dẫn giải

Biến đổi phương trình về dạng $[x]=\dfrac{x^2+8}{9}.$

Đặt $\dfrac{x^2+8}{9}=t(t\in\mathbb{N}^*)$ thì $x=\sqrt{9t-8}$ (do $x>0$). Ta có

$\left[\sqrt{9t-8}\right]=t\Leftrightarrow t\le\sqrt{9t-8}<t+1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-9t+8\le 0\\ t^2-7t+9\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le t\le 8t\\ \left[\begin{array}{l}t\le\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\\ t\ge\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Do t là số tự nhiên nên $t\in\{1;6;7;8\}$. Do đó $x\in\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Vật tập nghiệm của phương trình là $\left\{1;\sqrt{46};\sqrt{55};8\right\}$.

Bài toán 2. Giải phương trình $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]+\left[\dfrac{4x+1}{6}\right]=\dfrac{5x-4}{3}.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất 11) $[a]+\left[a+\dfrac{1}{2}\right]=[2a]$, ta có

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{4x-2}{3}\right]$$

Nên phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{4x-2}{3}\right]=\frac{5x-4}{3}.$$

Đặt $\dfrac{5x-4}{3}=t\left(t\in\mathbb{Z}\right)$ thì $x=\dfrac{3t+4}{5};\dfrac{4x-2}{3}=\dfrac{4t+2}{5}$. Suy ra

$$\left[\frac{4t+2}{5}\right]=t\Leftrightarrow 0\le\frac{4t+2}{5}-t<1\Leftrightarrow -3<t\le 2\Leftrightarrow t\in\{-2;-1;0;1;2\}$$

(do t nguyên), tương ứng tìm được $x\in\left\{\dfrac{-2}{5};\dfrac{1}{5};\dfrac{4}{5};\dfrac{7}{5};2\right\}$.

c) **Dạng 3.** $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]$

Phương pháp: Đặt $\left[f(x)\right]=\left[g(x)\right]=t$ suy ra $\left|f(x)-g(x)\right|<1$, dẫn đến $a<x<b$.

Với $a<x<b$ suy ra $\begin{cases} a_1 < f\left(x\right) < b_1 \\ a_2 < f\left(x\right) < b_2 \end{cases}$, từ đó tìm được t.

Ứng với mỗi giá trị của t nguyên, giải hệ $\begin{cases} \left[f\left(x\right)\right] = t \\ \left[g\left(x\right)\right] = t \end{cases}$ để tìm x.

Tập hợp các giá trị x tìm được từ hệ trên sẽ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 2. Giải phương trình $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \left[\dfrac{x+1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = t\left(t \in \mathbb{Z}\right)$. Theo tính chất 10) ta có

$\left|\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x+1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \dfrac{x-5}{6} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 11.$ Khi đó

$\begin{cases} 0 < \dfrac{x+1}{2} < 6 \\ -1 < \dfrac{2x-1}{3} < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \left[\dfrac{x+1}{2}\right] \le 5 \\ -1 \le \left[\dfrac{2x-1}{3}\right] \le 6 \end{cases}$. Suy ra $t \in \{0;1;2;3;4;5\}$.

Với $t=0$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{2x-1}{3} < 1 \\ 0 \le \dfrac{x+1}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x < 2 \\ -1 \le x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le x < 1.$

Với $t=1$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le \dfrac{2x-1}{3} < 2 \\ 1 \le \dfrac{x+1}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x < \dfrac{7}{2} \\ 1 \le x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 3.$

Với $t=2$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le \dfrac{2x-1}{3} < 3 \\ 2 \le \dfrac{x+1}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{2} \le x < 5 \\ 3 \le x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} \le x < 5.$

Với $t=3$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le \dfrac{2x-1}{3} < 4 \\ 3 \le \dfrac{x+1}{2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le x < \dfrac{11}{2} \\ 5 \le x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x < \dfrac{11}{2}.$

Với $t=4$ thì $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] = \left[\dfrac{x+1}{2}\right] = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le \dfrac{2x-1}{3} < 5 \\ 4 \le \dfrac{x+1}{2} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{2} \le x < 8 \\ 7 \le x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \le x < 8.$

Với $t=5$ thì $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le \frac{2x-1}{3}<6 \\ 5\le \frac{x+1}{2}<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\le x<\frac{19}{2} \\ 9\le x<11 \end{cases} \Leftrightarrow 9\le x<\frac{19}{2}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left[0,5;1\right)\cup\left[2;3\right)\cup\left[3,5;5,5\right]\cup\left[7;8\right)\cup\left[9;9,5\right).$

d) Dạng 4. Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên

Phương pháp: Sử dụng tính chất của phần nguyên, phân tích đa thức thành nhân tử, đặt ẩn phụ (nếu cần) để đưa về các dạng $1,2,3$.

Bài toán 3. Giải phương trình $[x]+[2x]+[3x]+...+[2009x]=4036082.$

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng

$[x]\le x<[x+1]$ suy ra $k[x]\le kx<k[x]+k$ nên $k[x]\le[kx]\le k[x]+k-1\left(k\in Z^+\right).$

Do đó thay $k=1,2,...,2009$ rồi cộng theo vế ta có

$$2019045[x]\le[x]+[2x]+...+[2009x]\le 2019045[x]+2017036.$$

$$2019045[x]\le 4036082\le 2019045[x]+2017036.$$

Lại có $4036082=2019045+2017037.$ Do đó phương trình vô nghiệm.

Bài toán 4. Giải phương trình $\left[\frac{2x-1}{3}\right]-\left[x^2\right]=\left[-x^2\right].$

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất 13) ta có

$$\left[-x^2\right]=\begin{cases} -\left[x^2\right], x^2\in\mathbb{Z} \\ -\left[x^2\right]-1, x^2\notin\mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Nếu x^2 là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=0\Leftrightarrow 0\le\frac{2x-1}{3}<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x<2.$$

Mà x^2 là số nguyên nên $x\in\left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}.$

- Nếu x^2 không là số nguyên thì phương trình đã cho trở thành

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=-1\Leftrightarrow 0\le\frac{2x-1}{3}+1<1\Leftrightarrow -1\le x<\frac{1}{2}.$$

Mà x^2 không nguyên nên phải loại $x=-1, x=0\Rightarrow x\in(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left\{1;\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}.$

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA DẤU PHẦN NGUYÊN

Khi giải bất phương trình có chứa dấu phần nguyên, ta thường đặt biểu thức $\left[f(x)\right]=t\,(t$ nguyên) để chuyển về giải bất phương trình không còn chứa dấu phần nguyên, rồi vận dụng định nghĩa và tính chất của phần nguyên để tìm ra nghiệm của bất phương trình.

Bài toán 1. Giải bất phương trình $\left[x+2\right]>5.$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Nhận xét rằng $\left[a\right]>b$ (b nguyên) khi và chỉ khi $a\ge b+1.$

Ta có $\left[x+2\right]>5$ khi và chỉ khi $x+2\ge 6.$ Do đó $x\ge 4.$

Cách 2. Đặt $\left[x+2\right]=t$ (t là số nguyên) thì có $t>5.$ Do vậy $t\in\{6;7;8;...\}.$

Từ $\left[x+2\right]=t$ suy ra $t\le x+2<t+1.$ suy ra $t-2\le x<t-1, t\in\{6;7;8;...\}.$

Vậy $x\ge 4.$ Bất phương trình có vô số nghiệm $x\ge 4.$

Bài toán 2. Giải bất phương trình $2\left[x\right]^2-9\left[x+1\right]+16<0.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất 4) ta có $\left[x+1\right]=\left[x\right]+1.$ Biến đổi bất phương trình thành

$$2\left[x\right]^2-9\left[x\right]+7<0.$$

Đặt $\left[x\right]=t$ (t là số nguyên) thì có $2t^2-9t+7<0$ suy ra $1<t<3,5$ mà t nguyên nên $t\in\{2;3\}.$

Với $t=2$ thì $\left[x\right]=2$ suy ra $2\le x<3.$

Với $t=3$ thì $\left[x\right]=3$ suy ra $3\le x<4.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[2;4\right).$

Bài toán 2. Giải bất phương trình $\left[2x\right]>\left[x\right].$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Đặt $\left[x\right]=t$ (t là số nguyên) thì $t\le x<t+1$ suy ra $2t\le 2x<2t+2.$ Do đó $\left[2x\right]=2t$ hoặc $2t+1.$

- Với $\left[2x\right]=2t$ thì $0\le\{x\}<0,5$ và $2t>t\Leftrightarrow t>0,$ mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x\ge 1.$
- Với $\left[2x\right]=2t+1$ thì $0,5\le\{x\}<1$ và $2t+1>t\Leftrightarrow t>-1,$ mà t nguyên nên t là số nguyên dương. Dẫn đến $x\ge 0.$

Kết hợp với $0,5\le\{x\}<1$ dẫn đến $x\ge 0,5.$

Cách 2. Nhận xét rằng $[a]>[b]$ khi và chỉ khi $a>b$ và $[a]\neq[b]$.

Ta có $[2x]>[x]\Leftrightarrow 2x>x$ và $[2x]\neq[x]\Leftrightarrow x>0$ và $[2x]\neq[x]$.

Trước hết ta tìm x sao cho $[2x]=[x]$.

Đặt $[2x]=[x]=t$ (t nguyên) ta có

$$|2x-x|<1\Leftrightarrow|x|<1 \text{ suy ra } 0<x<1 \text{ nên } [x]=0.$$

Với $t=0$ thì $[x]=[2x]=0$ suy ra $0\le 2x<1$ nên $0\le x<0,5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 0,5$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm $[x]$ biết: $x - \frac{1}{3} \langle -2 \langle x$

Bài 2: Tìm $[x]$ biết : $x \langle -5 \langle x + 0,5$

Bài 3: Tìm $[x]$ biết: $x = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}$

Bài 4: Tìm $[x]$ biết: $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$

Bài 5: Tìm $[x]$ biết:

$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, (với n dấu căn)

Bài 6: : Tìm $[x]$ biết:

$x = \sqrt{4+\sqrt{4+\ldots+\sqrt{4+\sqrt{4}}}}$

$x = \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$

$x = \sqrt{2008+\sqrt{2008+\ldots+\sqrt{2008+\sqrt{2008}}}}$

$x = \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots..+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots..+\sqrt[3]{6}}}$

$x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \ldots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}$

Bài 7: Tìm $[x]$ biết:

$x= \sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}$, (với n dấu căn)

Bài 8: Tính tổng sau: $S = \lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor$

Bài 9: Tính tổng sau:

$S = \lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{24}\rfloor$

Bài 10: Tìm các số nguyên tố: x,y thoả mãn:

$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{x^2-1}\rfloor = y$

Bài 11: Chứng minh rằng:

$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{2009^2-1}\rfloor$

Chia hết cho: 1004 . 2009

Bài 12: Tính tổng sau:

$$S = \left\lfloor\sqrt{1.2.3.4}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{2.3.4.5}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{3.4.5.6}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right\rfloor$$

Bài 13: Tính tổng sau:

$$S = \left[\frac{0,a+b}{m}\right] + \left[\frac{1,a+b}{m}\right] + \left[\frac{2,a+b}{m}\right] + \ldots + \left[\frac{(m-1),a+b}{m}\right]$$

Bài 14: Chứng minh rằng, với mọi số nguyên n ta có:

$$[n+x] = n + [x]$$

Bài 15: Chứng minh rằng, với mọi x,y ta có:

$$[x] + [y] \le [\ddot{u}+y] \le [x] + [y] + 1$$

Bài 16: Cho n là số nguyên dương, chứng minh:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n$$

Bài 17: Cho n là số tự nhiên, chứng minh:

$$\left\lfloor\sqrt{4n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Bài 18: Cho n là số tự nhiên, chứng minh:

$$\left\lfloor\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$$

Bài 19: Cho n là số tự nhiên, chứng minh

$$\left\lfloor\sqrt{63n} + \sqrt{63n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{252n+2}\right\rfloor$$

Bài 20: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, ta có:

a, $\left\lfloor\sqrt{9n} + \sqrt{9n+1}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{9n+2}\right\rfloor$ b, $\left\lfloor\sqrt{7n} + \sqrt{7n+6}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{36n+2}\right\rfloor$

Bài 21: Chứng minh rằng: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, (với x là số thực bất kỳ)

Bài 22: Chứng minh rằng:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

Bài 23: Tính tổng: $S = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \left[\frac{n+4}{2^3}\right] + \left[\frac{n+8}{2^4}\right] + \ldots$

Bài24: Tính tổng sau: $S = \left[\frac{n+6}{12}\right] + \left[\frac{n+12}{24}\right] + \left[\frac{n+24}{48}\right] + \ldots$

Bài 25: Chứng minh rằng: $m[x] \le [mx] \le m[x] + m - 1$ (với mọi giá trị m nguyên dương)

Bài 26: Chứng minh rằng : Không tồn tại x thoả mãn:

$$[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [100x] = 313096$$

Bài 27: Chứng minh rằng, không tồn tại x thoả mãn:

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

Bài 28: Chứng minh rằng , không tồn tại x thoả mãn:

$$[x] + [2x] + [4x] + \ldots + [nx] = \frac{n(n+1)}{2}k - 1, \text{ (với: } n \rangle 1;\ k \in Z\text{)}$$

Bài 29: Giải phương trình: $[x + 0,7] = -4$

Bài 30: Giải phương trình: $[x+1] + [x+2] + [x+3] = 4$

Bài 31: Giải phương trình $4[x] = 3x$

Bài 32: Giải phương trình:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

Bài 33: Giải phương trình:

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3}$$

Bài 34: Giải phương trình: $[x].\{x\}=x-1$

Bài 35: Giải phương trình: $x-3\left[\frac{x}{2}\right]=2$

Bài 36: Giải phương trình: $[x-1]=\left[\frac{x}{2}+1\right]$

Bài 37: Giải phương trình: $x^4=2x^2+[x]$

Bài 38: Giải phương trình: $x^3-[x]=3$

Bài 39: Giải phương trình: $\left[-x^2+3x\right]=\left[x^2+\frac{1}{2}\right]$

Bài 40: Chứng minh: $\left\lfloor(2+\sqrt{3})^n\right\rfloor$ là số lẻ, (với $n\in N$)

Bài 41: Tìm hai chữ số tận cùng của: $\left\lfloor(\sqrt{29}+\sqrt{21})^{2000}\right\rfloor$

Bài 42: Tìm các chữ số đứng ngay trước và sau dấu phẩy trong biểu diễn thập phân của $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1992}$

Bài 43: Chứnh minh rằng:

$\left\{(5+\sqrt{26})^n\right\}$ Có n chữ số giống nhau ngay sau dấu phẩy

Bài 44: Với p là số nguyên tố lớn hơn 2

Chứng minh: $\left\lfloor(2+\sqrt{5})^p\right\rfloor-2^{p+1}$ chia hết cho p

Bài 45: Tìm số mũ của 2 trong dạng PTTC của: $\left\lfloor(1+\sqrt{3})^n\right\rfloor$

Bài 46: Cho dãy các số: $x_0; x_1; x_2; x_3;...x_n;...$

Bài 47: Chứng minh rằng: Số $(5+\sqrt{26})^{101}$ viết trong hệ thập phân có ít nhất 100 chữ số 0 đứng ngay sau dấu phẩy.

Bài 48: Chứng minh rằng: luôn tồn tại số tự nhiên n :

$(2+\sqrt{2})^n-\left\lfloor(2+\sqrt{2})^n\right\rfloor$ Lớn hơn: 0,999999

Bài 49: Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá: $(4+\sqrt{15})^7$

Bài 50: Tìm tất cả các số nguyên tố biểu diễn được dưới dạng: $\left[\frac{n^2}{2}\right];\left[\frac{n^2}{3}\right];...$

Bài 51: Trong biểu diễn thập phân các số sau:

a. 100! có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 ?

b. ((3!)!)! có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 ?

Bài 52: Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{(2n)!.6}{n!.(n+2)!}$ Là số tự nhiên

b. $\dfrac{(2n)!(2m)!}{n!.m!.(n+m)!}$ Là số tự nhiên

c. Với n nguyên dương, Hỏi n! có chia hết cho 2^n không ?

d. Số: C_{1000}^{500} Có chia hết cho 7 không ?

Bài 53: Cho A = $\dfrac{1.3.5......(2n-1)}{2.4.6.....(2n)}$ Với n là số tự nguyên dương

Chứng minh rằng: Trong dãy các số: A; 2A; 2^2 A; 2^3 A; . .

Đén một vị trí nào đó trở đi thì các số hạng đều là số nguyên.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Chương I

QUAN HỆ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP SỐ

Câu 1. Ta có:

$$a^5-a=a\left(a^4-1\right)=a\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)=a\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left[\left(a-4\right)^2+5\right]$$
$$=a\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left(a-2\right)\left(a+2\right)+5a\left(a+1\right)\left(a-1\right)$$

Do tích của số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $\left(6,5\right)=1$

Suy ra $a\left(a+1\right)\left(a-1\right)\left(a-2\right)\left(a+2\right)\vdots 30$ và $5a\left(a+1\right)\left(a-1\right)\vdots 30$.

Vậy $a^5-a\vdots 30$

Câu 2. **a)** Ta có:

$$A=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=\left(n+1\right)^3+2\left(n+1\right)=....$$
$$=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)+3\left(n+1\right)$$

Khi đó: $3\left(n+1\right)\vdots 3$; $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên chia hết cho 3 $\Rightarrow A\vdots 3$

b) Ta có:

$a=13k+2, b=13n+3$

$$a^2+b^2=\left(13k+2\right)^2+\left(13n+3\right)^2=....=13\left(13k^2+4k+13n^2+4n+1\right)\vdots 13$$

Câu 3. Ta có: $A=\left[n^3\left(n^2-7\right)^2-36n\right]$

$= n\left[n\left(n^2-7\right)-6\right]\left[n\left(n^2-7\right)+6\right] = n\left(n^3-7n-6\right)\left(n^3-7n+6\right)$

$= n\left(n^3-n-6n-6\right)\left(n^3-n-6n+6\right) = n\left[\left(n^2-1\right)-6\left(n+1\right)\right]\left[n\left(n^2-1\right)-6\left(n-1\right)\right]$

$= n\left(n+1\right)\left(n^2-n-6\right)\left(n-1\right)\left(n^2+n-6\right) = n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n-3\right)\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n+3\right)$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A \vdots 7\ \forall n \in \mathbb{Z}$

Câu 4. Ta có: $n = 2k$, với k là số nguyên; $n^3 - 28n = \left(2k\right)^3 - 28\left(2k\right) = 8k^3 - 56k$

$= 8k\left(k^2-7\right) = 8k\left(k^2-1-6\right)$

$= 8k\left(k^2-1\right) - 48k = 8k\left(k-1\right)\left(k+1\right) - 48k$

$k\left(k-1\right)\left(k+1\right)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên

$8k\left(k-1\right)\left(k+1\right) - 48k$ chia hết cho 48

Câu 5. Ta có: $n^3 - n = n\left(n-1\right)\left(n+1\right)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó n lẻ nên n có dạng $n = 2k+1\ \left(k \in N\right)$

Ta có: $n^3 - n = n\left(n-1\right)\left(n+1\right) = \left(2k+1\right).2k.\left(2k+2\right) = 4.k.\left(k+1\right)\left(2k+1\right)$

Vì k và (k + 1) là 2 số tự nhiên liên tiếp suy ra: $k\left(k+1\right) \vdots 2 \Rightarrow 4k\left(k+1\right)\left(2k+1\right) \vdots 8 \Rightarrow \left(n^3-n\right) \vdots 8$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với $\left(1\right);\left(2\right)$ suy ra

$\left(n^3-n\right) \vdots 24 \quad \left(dpcm\right)$

Câu 6. Ta có:

$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n\left(n-1\right)\left(n+1\right) + 18n$

Vì $n\left(n-1\right)\left(n+1\right)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $\left(2,3\right) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n \vdots 6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 7. Ta có:

$Q = n^3 + \left(n+1\right)^3 + \left(n+2\right)^3$

$= n^3 + \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + \left(n^3 + 6n^2 + 12n + 8\right)$

$= 3\left(n^3 + 3n^2 + 5n + 3\right)$

Đặt $C = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3$

$= n^2\left(n+1\right) + 2n\left(n+1\right) + 3\left(n+1\right)$

$= n\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 3\left(n+1\right)$

Ta thấy $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$ chia hết cho 3(vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Và $3\left(n+1\right)\vdots 3 \Rightarrow C$ chia hết cho 3

Nên $Q=3C$ chia hết cho 9

Câu 8. Ta có: $2009^{2008}+2011^{2010}=\left(2009^{2008}+1\right)+\left(2011^{2010}-1\right)$

Vì $2009^{2008}+1=\left(2009+1\right)\left(2009^{2007}+......\right)\vdots 2010$ (1)

$2011^{2010}-1=\left(2011-1\right)\left(2011^{2009}+....\right)\vdots 2010$ (2)

Từ (1) và (2) ta có dpcm.

Câu 9.

a) Ta có: $8^5+2^{11}=\left(2^3\right)^5+2^{11}=2^{15}+2^{11}=2^{11}.\left(2^4+1\right)=2^{11}.17$ chia hết cho 17

b) Ta có: $19^{19}+69^{19}=\left(19+69\right)\left(19^{18}-19^{17},69+....+69^{18}\right)=88.\left(19^{18}-19^{17},69+....+69^{18}\right)$ chia hết cho 44

Câu 10.

Nếu $n=3k\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ thì $A=9k^2+3k+2$ không chia hết cho 3.

Nếu $n=3k+1\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ thì $A=9k^2+9k+4$ không chia hết cho 3.

Nếu $n=3k+2\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ thì $A=9k^2+15k+8$ không chia hết cho 3.

Do đó A không chia hết cho 3 với mọi số nguyên n.

Vậy A không chia hết cho 15 với mọi số nguyên n.

Câu 11. Ta có : $n^4+6n^3+11n^2+30n-24$

$=\left(n^4+6n^3+11n^2+6n\right)+\left(24n-24\right)=n\left(n^3+6n^2+11n+6\right)+24\left(n-1\right)$

$=n\left[\left(n^3+n^2\right)+\left(5n^2+5n\right)+\left(6n+6\right)\right]+24\left(n-1\right)=n\left(n+1\right)\left(n^2+5n+6\right)+24\left(n-1\right)$

$=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)+24\left(n-1\right)$

Vì n; n + 1; n + 2; n + 3; là bốn số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 2 số chẵn liên tiếp nên có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4 . Vậy $n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$ chia hết 2.3.4 = 24 và 24 (n - 1) chia hết cho 24 nên $n^4+6n^3+11n^2+30n-24$ chia hết cho 24.

Câu 12. Ta có: $2a^2+3ab+2b^2\vdots 7$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2-2ab)+7ab\vdots 7 \Rightarrow 2(a-b)^2+7ab\vdots 7$

Do $7ab\vdots 7$ $\left(a,b\in Z\right)\Rightarrow 2\left(a-b\right)^2\vdots 7$ $do\left(2,7\right)=1$

Từ đó ta có $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\vdots 7$

Vậy $(a^2-b^2)\vdots 7$

Câu 13. Vì n là số nguyên không chia hết cho 3 nên $n=3k+1$ hoặc $n=3k+2$ $(k\in Z)$.

- Xét $n=3k+1$ ta có: $3^{2n}=3^{2(3k+1)}=3^{6k}.3^2=\left(3^3\right)^{2k}.9=27^{2k}.9\equiv 9 \pmod{13}$

$$3^n=3^{3k+1}=3^{3k}.3=\left(3^3\right)^k.3=27^k.3\equiv 3.$$

Suy ra: $P=3^{2n}+3^n+1\equiv 9+3+1=13\equiv 0 \pmod{13}$.

- Xét $n=3k+2$ ta có: $3^{2n}=3^{2(3k+2)}=3^{6k}.3^4=\left(3^3\right)^{2k}.81=27^{2k}.81\equiv 81\equiv 3 \pmod{13}$

$$3^n=3^{3k+2}=3^{3k}.3^2=\left(3^3\right)^k.9=27^k.9\equiv 9.$$

Suy ra: $P=3^{2n}+3^n+1\equiv 3+9+1=13\equiv 0 \pmod{13}$

Vậy , với n là số nguyên không chia hết cho 3 thì $P=3^{2n}+3^n+1$ chia hết cho 13.

Câu 14. Xét x là số nguyên dương, ta thấy

$x^5-x=x(x-1)(x+1)(x^2+1)\,\vdots\,6$ (1) (vì chứa tích của ba số nguyên liên tiếp)

Với $x=5q$ $(q\in\mathbb{Z}_+)$ thì $x^5-x\,\vdots\,5$

Với $x=5q\pm 1$ $(q\in\mathbb{Z}_+)$ thì $x^5-x\,\vdots\,5$

Với $x=5q\pm 2$ $(q\in\mathbb{Z}_+)$ thì $x^5-x\,\vdots\,5$

Suy ra $x^5-x\,\vdots\,5$ (2) mà $(5,6)=1$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $x^5-x\,\vdots\,30$

Xét hiệu $Q-P=\left(a_1^5-a_1\right)+\left(a_2^5-a_2\right)+\left(a_3^5-a_3\right)+...+\left(a_{2019}^5-a_{2019}\right)$

Vì $x^5-x\,\vdots\,30$ nên $Q-P\,\vdots\,30$

Mà theo bài ra $P\,\vdots\,30$ nên $Q\,\vdots\,30$

Câu 15. Vì a là số tự nhiên chẵn nên a = 2k $(k\in N)$

Do đó $M=\dfrac{8k^3}{24}+\dfrac{4k^2}{8}+\dfrac{2k}{12}=\dfrac{k^3}{3}+\dfrac{k^2}{2}+\dfrac{k}{6}$

$$=\frac{2k^3+3k^2+k}{6}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Ta có : $k(k+1)\,\vdots\,2\Rightarrow k(k+1)(2k+1)\,\vdots\,2$

Ta cần chứng minh $k(k+1)(2k+1)\,\vdots\,3$

+ Nếu k = 3n (với $n\in N$) thì $k(k+1)(2k+1)\,\vdots\,3$

+ Nếu k = 3n + 1 (với $n\in N$) thì $2k+1\,\vdots\,3$

+ Nếu k = 3n + 2 (với n $\in$ N) thì $k+1 \vdots 3$

Như vậy $\forall$ k $\in$ N ta có $k(k+1)(2k+1)$luôn chia hết cho 2 và cho 3. Mà (2, 3) = 1 $\Rightarrow$ $k(k+1)(2k+1) \vdots 6$

Vậy A có giá trị nguyên.

Câu 16. Với n = 0 ta có A(0) = 19 $\vdots$ 19

Giả sử A chia hết cho 19 với n = k nghĩa là: $A(k) = 7.5^{2k} + 12.6^{k} \vdots 19$

Ta phải chứng minh A chia hết cho 19 với n = k + 1 nghĩa là phải chứng minh:

$A(k+1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1} \vdots 19$

Ta có: $A(k+1) = 7.5^{2(k+1)} + 12.6^{k+1} \vdots 19$

$$\begin{aligned}&7.5^{2k}.5^2 + 12.6^n.6\\&= 7.5^{2k}.6 + 7.5^{2k}.19 + 12.6^n.6\\&= 8.A(k) + 7.5^{2k}.19 \vdots 19\end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp thì A = $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n

Câu 17. Ta có:

$5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n}$

$= 5^n(59 - 8) + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$

$59.5^n \vdots 59$ và $8.(64^n - 5^n) \vdots (64 - 5) = 59$

Vậy $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

Câu 18. Dễ thấy $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$A - (a_1 + a_2 + ... + a_{2016}) = (a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + ... + a_{2016})$

$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + ... + (a_{2016}^3 - a_{2016})$

Các hiệu trên chia hết cho 3 , do vậy A chia hết cho 3

Câu 19. a) Gọi 2 số phải tìm là a và b, ta có $a + b$ chia hết cho 3

Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$

Vì $a + b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$ chia hết cho 9

b) $n^5 + 1 \vdots (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) \vdots (n^3 + 1)$

$\Leftrightarrow n^2\left(n^3+1\right)-\left(n^2-1\right)\vdots\left(n^3+1\right)$

$\Leftrightarrow (n-1)(n+1)\vdots(n+1)\left(n^2-n+1\right)$

$\Leftrightarrow n-1\vdots n^2-n+1$

$\Rightarrow n(n-1)\vdots n^2-n+1$

Hay $n^2-n\vdots n^2-n+1 \Rightarrow \left(n^2-n+1\right)-1\vdots\left(n^2-n+1\right)$

$\Rightarrow 1\vdots n^2-n+1$

Xét hai trường hợp:

+) $n^2-n+1=1 \Leftrightarrow n^2-n=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=1 \end{array}\right.$

+) $n^2-n+1=-1 \Leftrightarrow n^2-n+2=0$, không có giá trị của n thỏa mãn

Câu 20.

Dễ thấy $x \neq y$. Không mất tính tổng quát, giả sử x > y.

Từ (3y + 1) $\vdots$ x $\Rightarrow 3y+1=p.x \quad \left(p\in N^*\right)$.

Vì x > y nên 3x > 3y + 1 = p.x. $\Rightarrow$ p < 3. Vậy $p\in\{1;2\}$

- Với p = 1: $\Rightarrow$ x = 3y + 1 $\Rightarrow$ 3x + 1 = 9y + 4 $\vdots$ y $\Rightarrow$ $4\vdots y$

Mà y > 1 nên $y\in\{2;4\}$

+ Với y = 2 thì x = 7.

+ Với y = 4 thì x = 13.

- Với p = 2: $\Rightarrow$ 2x = 3y + 1 $\Rightarrow$ 6x = 9y + 3 $\Rightarrow$ 2(3x + 1) = 9y + 5

Vì $3x+1\vdots y$ nên $9y+5\vdots y$ suy ra $5\vdots y$, mà y > 1 nên y = 5,

suy ra x = 8.

Tương tự với y > x ta cũng được các giá trị tương ứng.

Vậy các cặp (x; y) cần tìm là: (7;2);(2;7);(8;5);(5;8);(4;13);(13;4);

Câu 21. Ta có: $F = n^3 + 4n^2 - 20n - 48 = (n - 4)(n + 2)(n + 6)$.

Thử với n = 1; 2; 3 thì F đều không chia hết cho 125.

Thử với n = 4 thì F = 0 chia hết cho 125.

Vậy số nguyên dương bé nhất cần tìm là: n = 4.

Câu 22. Theo đề bài có: $a+b^2=k\left(a^2b-1\right)\left(k\in N^*\right)$

$\Leftrightarrow a+k=b\left(ka^2-b\right) \Leftrightarrow a+k=mb \qquad (1)$

Với $ka^2-b=m\left(m\in N^*\right) \Rightarrow m+b=ka^2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) có (m – 1)(b - 1) = mb – b – m + 1

= a + k – ka² + 1 = (a + 1)(k + 1 – ka)   (3)

Vì m > 0 theo (1) nên $(m-1)(b-1) \geq 0$. Từ (3)

=> $k + 1 - ka \geq 0$ => $k + 1 \geq ka$ => $1 \geq k(a-1)$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=2, k=1 \end{array}\right.$$

* Nếu a = 1 từ (3) => (m – 1)(b – 1) = 2 => b = 2 hoặc b = 3

=> (a; b) = (1; 2) và (1; 3)

* Nếu a = 2, k = 1 => (m -1)(b – 1) = 0

Khi m = 1 từ (1) => (a; b) = (2; 3)

Khi b = 1 => (a; b) = (2; 1)

Thử lại ta có đáp số (a,b) = (1,2),(1,3), (2,3),(2,1)

Câu 23.

- Xét phép chia của xy cho 3

Nếu xy không chia hết cho 3 thì

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod 3 \\ y \equiv \pm 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ y^2 \equiv 1 \pmod 3 \end{cases} \qquad \text{(Vô lí)}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3$$

Vậy xy chia hết cho 3 (1)

- Xét phép chia của xy cho 4

Nếu xy không chia hết cho 4 thì

TH1: $\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod 4 \\ y \equiv \pm 1 \pmod 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod 4 \\ y^2 \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4 \ \text{(vô lí)}$$

TH2: Trong hai số x,y một số chia 4 dư 2, một số chia 4 dư 1 hoặc -1. Không mất tính tổng quát giả sử

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 \pmod 4 \\ y \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod 8 \\ y^2 \equiv 4 \pmod 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 5 \pmod 8 \ \text{(vô lí)}$$

- Vậy xy chia hết cho 4 (2)

- Từ (1) và (2): Vậy xy chia hết cho 12

Câu 24.

Ta có

$B=1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ $(*)$ là số tự nhiên. Thật vậy:

Với $n=1$ thì $B=1\in\mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Với $n=2$ thì $B=3\in\mathbb{N}$ suy ra $(*)$ đúng.

Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k$, nghĩa là $B=1.2.3.....k.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{N}$.

Cần chứng minh $(*)$ đúng khi $n=k+1$, nghĩa là

$B=1.2.3.....(k+1).\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{(k+1)}\right)\in\mathbb{N}$.

Ta có: $B=1.2.3.....(k+1).\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{(k+1)}\right)=1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)(k+1)+1.2.3.....k$

Có $\begin{cases}1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)\in\mathbb{N}\\ k+1\in\mathbb{N}\\ 1.2.3.....k\in\mathbb{N}\end{cases}\Rightarrow B\in\mathbb{N}$.

Vậy $1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ là số tự nhiên.

Suy ra, với $n=2k$ thì $1.2.3.....2k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k}\right)$ và $1.2.3.....k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right)$ là các số tự nhiên.

Suy ra $\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right)(k+1)(k+2).....2k$ cũng là các số tự nhiên.

Áp dụng các chứng minh ta có: $1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right)$ và

$\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018$ cũng là các số tự nhiên.

Ta có $\begin{cases}1011\,\vdots\,3\\ 1342\,\vdots\,673\end{cases}\Rightarrow 1010.1011.....1342.....2018\,\vdots\,2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right).1010.1011....1342.....2018\,\vdots\,2019$.

Và $\begin{cases} 3\vdots 3 \\ 673\vdots 673 \end{cases} \Rightarrow 1.2.3....673.....1009\vdots 2019$

$\Rightarrow 1.2.....1009.\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018 \vdots 2019$.

Vậy số tự nhiên $A = 1.2.3....2017.2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Câu 25. Ta có:

$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2010$

$= (x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+2010$

Đặt $t = x^2+10x+21$, biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$P(x) = (t-5)(t+3)+2010 = t^2-2t+1995$

Do đó khi chia $t^2-2t+1995$ cho t ta có số dư là 1995

Câu 26. Ta có: $g(x) = x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

Vì $f(x) = ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2+x-2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$

$\Rightarrow ax^3+bx^2+10x-4 = (x+2).(x-1).q(x)$

Với $x = 1 \Rightarrow a+b+6 = 0 \Rightarrow b = -a-6$ (1)

Với $x = -2 \Rightarrow 2a-b+6 = 0$ (2)

Thay (1) vào (2), ta có: $a = 2; b = 4$

Câu 27. Chia $f(x)$ cho x^2+2 được thương là $x-3$ dư $x+2$

Để $f(x)$ chia hết cho x^2+2 thì $x+2$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow (x+2)(x-2)$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow x^2-4$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow x^2+2-6$ chia hết cho x^2+2

$\Rightarrow 6$ chia hết cho x^2+2 mà $x^2+2 \ge 2 \Rightarrow x^2+2 \in \{3;6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Thử lại ta thấy $x = 1; x = -2$ thỏa mãn

Vậy với $x = 1; x = -2$ thì $f(x)$ chia hết cho x^2+2

Câu 28. Giả sử $f(x) = ax^4+bx^3+cx^3+dx+e$

Do $f(0) = e$ nên $e \vdots 7$

Mặt khác: $\begin{cases} f(1) = a+b+c+d+e \vdots 7 \\ f(-1) = a-b+c-d+e \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c \vdots 7 \\ b+d \vdots 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e \vdots 7 \\ f(-1) = 16a - 8b + 4c - 2d + e \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + c \vdots 7 \\ 4b + d \vdots 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c \vdots 7 \\ 4a + c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a \vdots 7 \\ c \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 7 \\ c \vdots 7 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} b + d \vdots 7 \\ 4b + d \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b \vdots 7 \\ d \vdots 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \vdots 7 \\ d \vdots 7 \end{cases}$$

Vậy các hệ số của f(x) đều chia hết cho 7.

Câu 29.

Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = ... = (x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30 = t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = (t-3)(t+5)+2033$

$= t^2+2t-15+2033 = t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = (x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

Câu 30. Giả sử $f(x)$ chia cho x^2-4 được thương là $-5x$ và còn dư là $ax+b$. Khi đó

$f(x) = (x^2-4).(-5x)+ax+b$

Theo đề Câu, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 26 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 26 \\ -2a+b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 18 \end{cases}$$

Do đó $f(x) = (x^2-4).(-5x)+4x+18$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm là $f(x) = (x^2-4).(-5x)+4x+18$

Câu 31. Ta có: P(0) = d $\vdots$ 5

P(1) = a + b + c + d $\vdots$ 5 => a + b + c $\vdots$ 5 (1)

P(-1) = -a + b – c + d $\vdots$ 5 => -a + b – c $\vdots$ 5 (2)

Từ (1) và (2) suy ra 2b $\vdots$ 5 => b $\vdots$ 5 vì (2,5) = 1, suy ra a + c $\vdots$ 5

P(2) = 8a + 4b + 2c + d $\vdots$ 5 => 8a + 2c $\vdots$ 5 => a $\vdots$ 5 => c $\vdots$ 5

Câu 32.

Ta có $p^{20}-1 = (p^4-1)(p^{16}+p^{12}+p^8+p^4+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2+1$ và p^2-1 là các số chẵn

$\Rightarrow p^4-1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20}-1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được p^4-1 chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20} - 1$ chia hết cho 25.

Mà $(4;25) = 1$ nên $p^{20} - 1$. (đpcm)

Câu 33. Từ giả thiết $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = 0$

Vì a, b, c $\neq 0$ nên $a + b + c = 0$

$\Rightarrow a + b = -c$

$\Rightarrow (a+b)^3 = (-c)^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 3$ với a, b, c $\in Z$

Câu 34. Ta có :

N= $k^4 + 2k^3 – 16k^2 – 2k +15 = (k^4- k^2)+(2k^3 – 2k)- (15k^2 – 15)$

$= (k^2-1)(k^2 + 2k – 15) = (k-1)(k+1)(k-3)(k+5)$

Ta thấy rằng với k là số nguyên lẻ thì N là tích của 4 thừa số

(nhân tử) chẵn. Do đó N chắc chắn chia hết cho 16

Vậy k phải là số nguyên lẻ

Câu 35.

Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a+1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b+2$ $(a, b \in \mathbb{Z})$

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$(5a+1)^2 + (5b+1)^2 = 25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 10b + 4 = 5(5a^2 + 5b^2 + 2a + 2b + 1) \vdots 5$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 36. Ta có: $A = 5^n(5^n+1) - 6^n(3^n+2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$

$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n)$.A chia hết cho 7

$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n)$.A chia hết cho 13

Do $(13,7) = 1$ nên A chia hết cho 91

Câu 37. Ta có:

$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...+ 3^{11}$

$= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + (3^4 + 3^5 +3^6 + 3^7)+ (3^8 + 3^9+ 3^{10} + 3^{11})$

$= (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^4. (1 + 3 + 3^2+ 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2+ 3^3)$

$= 40 + 3^4. 40 + 3^8. 40$

$= 40. (1 + 3^4 + 3^8) \vdots 40$

Vậy A $\vdots$ 40

Câu 38. Gọi dư trong phép chia $f(x)$ cho x^2-1 là $ax+b$

Ta có: $f(x)=(x-2)(x-3)(x^2-1)+ax+b$

Theo bài ra : $f(2)=5$ nên ta có: $2a+b=5$; $f(3)=7$ nên $3a+b=7$

$\Rightarrow a=2; b=1$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x)=(x-2)(x-3)(x^2-1)+2x+1$

Câu 39. Ta có: $2^n=10a+b\Rightarrow b\vdots 2\Rightarrow ab\vdots 2$ (1)

Ta chứng minh $ab\vdots 3$ (2)

Thật vậy , từ đẳng thức $2^n=10a+b\Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

Đặt $n=4k+r\left(k,r\in\mathbb{N},0\le r\le 3\right)$ ta có: $2^n=16^k.2^r$

Nếu $r=0$ thì $2^n-2^r=2^r.(16^k-1)\vdots 10\Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b=2^r\Rightarrow 10a=2^n-2^r=2^r.(16^k-1)\vdots 3\Rightarrow a\vdots 3\Rightarrow ab\vdots 3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab\vdots 6$

Câu 40.

Theo giả thiết $p-5$ chia hết cho 8 nên đặt $p=8k+5$ (k là số tự nhiên)

Ta có $\left[\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2}\right]\vdots\left(ax^2-by^2\right)\Rightarrow a^{4k+2}.x^{8k+4}-b^{4k+2}.y^{8k+4}\vdots p$

$\Rightarrow\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)\vdots p$

Mà $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1}\vdots a^2+b^2=p$ và $b<p\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\vdots p$ $(*)$

Nếu trong hai số x,y có một số chia hết cho p thì từ (*) ta suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai không chia hết cho p , theo định lý Fec-ma ta có

$x^{8k+4}\equiv y^{8k+4}\equiv 1\left(\bmod p\right)\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2\left(\bmod p\right)$ mâu thuẫn với (*)

Vậy cả hai số x, y cùng chia hết cho p.

Câu 41. Do $a^3+b^3+c^3$ chẵn nên trong các số a, b, c có ít nhất một số chẵn. Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 2. (1)

Giả sử trong ba số a, b, c không có số nào chia hết cho 7. Ta thấy rằng, với mọi x nguyên không chia hết cho 7 thì $x \equiv \pm1, \pm2, \pm3 \pmod 7$, suy ra $x^3 \equiv \pm1 \pmod 7$.

Do đó $a^3 \equiv \pm1 \pmod 7$, $b^3 \equiv \pm1 \pmod 7$, $c^3 \equiv \pm1 \pmod 7$.

Suy ra $a^3+b^3+c^3 \equiv -3, -1, 1, 3 \pmod 7$, tức $a^3+b^3+c^3$ không chia hết cho 7, mâu thuẫn. Vậy trong ba số a, b, c phải có ít nhất một số chia hết cho 7.

Từ đó suy ra tích abc chia hết cho 7. (2)

Từ (1) và (2) với chú ý $(2;7)=1$, ta có abc chia hết cho 14.

Câu 42.

a) $n=3k$ suy ra $2^n+1=8^k+1 \equiv (-1)^k+1 \pmod 9$. Suy ra k lẻ, $k=2t+1$.

Suy ra $n=3(2t+1)=6t+3$.

Nếu $n=3k+1$ ta có $2^n+1=3.8^k+1 \equiv (-1)^k.3+1 \pmod 9$ suy ra 2^n+1 không chia hết cho 9.

Vậy với $n=6t+2$, với t là số tự nhiên là các số cần tìm.

b) **Cách 1**: Ta có $2^{km}-1 \vdots 2^m-1$. Từ $2^{2n}=(2^n+1)(2^n-1)$.

Đặt $2n=km+q$ $(0 \le q < m)$.

Khi đó $2^{2n}-1=2^{km+q}-2^q+2^q-1=2^q(2^{km}-1)+2^q-1$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2^q-1 chia hết cho m mà $0 \le 2^q-1 < 2^m-1$, suy ra $q=0$.

Do đó $2^n=km$.

Trường hợp 1: Nếu m lẻ, suy ra k chẵn, $k=2k'$, suy ra $n=k'm$, $2^n+1=2^{k'm}+1=2^{k'm}-1+2$ chia hết cho 2^m-1, suy ra 2 chia hết cho 2^m-1 vô lý.

Trường hợp 2: Nếu m chẵn $m=2m'$ nên $n=km'$, suy ra $2^{km'}+1$ chia hết cho 2^m-1, mà 2^m-1 chia hết cho $2^{m'}-1$ nên $2^{km'}+1$ chia hết cho $2^{m'}-1$, suy ra 2 chia hết cho $2^{m'}-1$ vô lý vì $m'>1$.

Cách 2: Ta có $2^{n-m}(2^m-1) \vdots 2^m-1$, suy ra $2^n-2^{n-m} \vdots 2^m-1$, mà $2^n+1 \vdots 2^m-1$ suy ra $2^{n-m}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Lý luận tương tự ta có $2^{n-km}+1$ chia hết cho 2^m-1.

Giả sử $n=km+q$, $0 \le q < m$.

Chọn k như trên, ta có 2^q+1 chia hết cho 2^m-1. Mà $q<m$ nên $2^q+1=2^m-1$, giải ra $q=1, m=2$ (vô lý).

Câu 43.

$M=9.3^{4n}-8.2^{4n}+2019=9.81^n-8.16^n+2019$

Ta có:

$81\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow 81^n\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow 9.81^n\equiv 9\equiv 1(\bmod 4)$
$8.16^n\equiv 0(\bmod 4)$
$\Rightarrow M\equiv 1-0+2019\equiv 2020\equiv 0(\bmod 4)$

hay $M\,\vdots\,4$ (1)

Lại có:

$81\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 81^n\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 9.81^n\equiv 9\equiv 4(\bmod 5)$
$16\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 16^n\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 8.16^n\equiv 8\equiv 3(\bmod 5)$
$\Rightarrow M\equiv 4-3+2019\equiv 2020\equiv 0(\bmod 5)$

hay $M\,\vdots\,5$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M\,\vdots\,BCNN(4,5)$ hay $M\,\vdots\,20$ (đpcm)

Câu 44.

Đặt $n=6q+r,\ r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Khi đó n^3+2019 chia hết cho 6 khi r^3+3 chia hết cho 6.

Nếu r chẵn thì r^3+3 lẻ, do đó r^3+3 không chia hết cho 6. Suy ra $r\in\{1,3,5\}$.

Với $r=1\Rightarrow r^3+3=4$ không chia hết cho 6.

Với $r=3\Rightarrow r^3+3=30\,\vdots\,6$.

Với $r=5\Rightarrow r^3+3=128$ không chia hết cho 6.

Suy ra $n=6q+3$. Mà $0\le n\le 2019\Rightarrow 0\le q\le 336$.

Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.

Câu 45. Ta có:

$\left(x^2-2xy-y\right)+\left(xy-2y^2-x\right)=x^2-xy-2y^2-x$
$=x^2+xy-\left(2xy+y^2\right)-\left(x+y\right)=\left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)$

Lại có: $x^2-2xy-y, xy-2y^2-x$ chia hết cho 5
$\Rightarrow\left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)$ chia hết cho 5

TH1: Nếu $x+y$ chia hết cho5 thì $y\equiv -x\left(\bmod 5\right)$

$\Rightarrow 0\equiv x^2-2xy-y\equiv x^2+2x^2+x=x\left(3x+1\right)(\bmod 5)$, do vậy x chia hết cho 5 hoặc chia 5 dư 3.

+)Nếu x chia hết cho 5 thì y cũng vậy, bài toán được chứng minh

+)Nếu x chia cho 5 dư 3 thì y chia 5 dư 2, thì

$2x^2+y^2+2x+y\equiv 2.9+4+2.3=30\equiv 0(\bmod 5)$

Ta cũng có điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $x-2y-1$ chia hết cho 5 thì $x\equiv 2y+1\left(\bmod 5\right)$

$\Rightarrow 0\equiv x^2-2xy-y\equiv\left(2y+1\right)^2-2y(y+1)-y=y+1\left(\bmod 5\right)$

Do đó y chia 5 dư 4 và x cũng chia 5 dư 4 nên:

$2x^2+y^2+2x+y=2.16+16+2.4+4=60\equiv 0\left(\bmod 5\right)$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 46. Giả sử $a;b;c$ là các số nguyên không âm thỏa mãn đề bài, ta có:

$$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2=6abc\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=3abc\quad(1)$$

Phân tích $a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$ (2)

Từ (1) và (2) $a^3+b^3+c^3-3abc=3abc\left(a+b+c\right)$ hay $a^3+b^3+c^3=3abc\left(a+b+c+1\right)$.

Do $a^3+b^3+c^3+1$ chia hết cho $a+b+c+1$ nên ta được 1 chia hết cho $a+b+c+1$

Suy ra $a=b=c=0$.

Thử lại: $a=b=c=0$ thỏa mãn. Vậy có duy nhất bộ số $\left(a;b;c\right)=\left(0;0;0\right)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Ta có: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$\Rightarrow a^n-b^n=m(a-b)$ $(a,\ b,\ n,m\in\mathbb{N})$ (*)

Vì n là số tự nhiên chẵn nên n = 2k ($k\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow$ $A=20^n-3^n+16^n-1=400^k-9^k+256^k-1$

Áp dụng (*), có: $A=(400^k-1^k)+(256^k-9^k)=399x+247y=19\cdot 21x+19.13y$ $(x,\ y\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow A\vdots 19$ với mọi số tự nhiên n chẵn (1)

và có: $A=(400^k-9^k)+(256^k-1^k)=391p+255q=17\cdot 23p+17\cdot 15q$ $(p,q\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow A\vdots 17$ với mọi số tự nhiên n chẵn (2)

mà 17 và 19 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (1) và (2) suy ra: $A\vdots 17\cdot 19$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Vậy $20^n-3^n+16^n-1\vdots 323$ với mọi số tự nhiên n chẵn

Câu 48. Ta có ngay: $S_1=1+2+3+.....+n=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$

Ta sẽ chứng minh S_{2019} chia hết cho n và $\frac{n+1}{2}$

Giả sử n lẻ thì $\frac{n+1}{2}$ nguyên. Sử dụng khai triển Newton ta có:

$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)\left(a^{2k}-a^{2k-1}.b+.....+b^{2k}\right)\vdots(a+b)$

Do vậy:

$2\left(1^{2019}+2^{2019}+....+n^{2019}\right)=\left(1^{2019}+n^{2019}\right)+\left(2^{2019}+(n-1)^{2019}\right)+....+\left(n^{2019}+1^{2019}\right)\vdots(n+1)$

$2\left(1^{2019}+2^{2019}+....+n^{2019}\right)=\left(1^{2019}+(n-1)^{2019}\right)+\left(2^{2019}+(n-2)^{2019}\right)+.....+\left((n-1)^{2019}+1^{2019}\right)+2.n^{2019}\vdots n$

Do $(n;n+1)=1$ nên $2\left(1^{2009}+2^{209}+....+n^{2009}\right)$ chia hết cho $n(n+1)$

Do vậy $S_{2019}\vdots S_1$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 49. a) Chứng minh rằng…..

Ta có: $9!=1.2.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn $\Rightarrow x^3\vdots 2\Rightarrow x\vdots 2\Rightarrow x=2m \quad (m\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8m^3+2y^3+4z^3=9!\Leftrightarrow 4m^3+y^3+2z^3=1.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow y^3\vdots 2\Rightarrow y\vdots 2\Rightarrow y=2n \quad (n\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow 4m^3+8n^3+2z^3=1.3.4.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow 2m^3+4n^3+z^3=1.2.3.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow z^3\vdots 2\Rightarrow z\vdots 2\Rightarrow z=2p\,(p\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow 2m^3+4n^3+8p^3=1.2.3.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow m^3+2n^3+4p^3=1.3.5.6.7.8.9$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có $\begin{cases} m\vdots 2\\ n\vdots 2\\ p\vdots 2\end{cases}(m;n;p\in\mathbb{Z})\Rightarrow\begin{cases} x=2m\vdots 4\\ y=2n\vdots 4\\ z=2p\vdots 4\end{cases}$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng không tồn tại…..

Theo ý a) ta có thể đặt $x=4a; y=4b; z=4c \qquad (a;b;c\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow a^3+2b^3+4c^3=\frac{9!}{4^3}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{4^3}=1.3.5.6.7.9$ là số chẵn

$\Rightarrow a\vdots 2\Rightarrow a=2u \qquad (u\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8u^3+2b^3+4c^3=1.3.5.6.7.9\Leftrightarrow 4u^3+b^3+2c^3=1.3.3.5.7.9=1.5.7.3^4$

Lại có:

$\begin{cases}\left(1.5.7.3^4\right)\vdots 3^4\Rightarrow\left(1.5.7.3^4\right)\vdots 9\\ x^3\equiv 0;\pm1 \qquad (\mathrm{mod}\,9)\,(x\in Z)\end{cases}$

$\Rightarrow a;b;c\vdots 9\Rightarrow\left(4u^3+b^3+2c^3\right)\vdots 9^3$

Nhưng do $1.5.7.3^4$ không thể chia hết cho 9^3 nên ta có điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 50.

Ta có nhận xét sau: Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 \equiv 1(\bmod 24)$ (1)

Lại có: $-1 \equiv 23(\bmod 24)$ (2)

Cộng vế theo vế của $(1);(2)$ ta được : $p^2 - 1 \equiv 24(\bmod 24) \equiv 0(\bmod 24)$

Vậy $p^2 - 1$ chia hết cho 24 với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Câu 51.

$n^3 - 1 = (n-1).(n^2+n+1) \vdots p$

$(p-1) \vdots n \Rightarrow p - 1 \geq n \Rightarrow p \geq n+1$

Vì $p \geq n+1 \Rightarrow (n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1) \vdots p \Leftrightarrow (n^2+n+1) \vdots p$

Đặt : $p - 1 = kn, \quad k \geq 1 \Rightarrow p = kn+1$ (*)

$\Rightarrow (n^2+n+1) \vdots (kn+1) \Rightarrow kn+1 \leq n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn \leq n^2 + n \Leftrightarrow k \leq n+1$

$k(n^2+n+1) - n(kn+1) \vdots (kn+1)$

$\Rightarrow [(k-1)n+k] \vdots (kn+1)$

$k \geq 1 \Rightarrow (k-1)n + k > 0$

$\Rightarrow (k-1)n + k \geq kn+1$

$\Rightarrow k \geq n+1$

$\Rightarrow k = n+1 \Rightarrow p = kn+1 = n^2+n+1$

$\Rightarrow n + p = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

Câu 52. +) Chứng minh hằng đẳng thức

$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$

$= a^n - b^n$

+) Vì n là số chẵn, đặt $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ta có:

$20^n + 16^n - 3^n - 1 = 20^{2k} + 16^{2k} - 3^{2k} - 1 = 400^k + 256^k - 9^k - 1$

Để chứng minh $(20^n + 16^n - 3^n - 1) \vdots 323$, ta cần chứng minh $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ chia hết cho 19 và 17

Ta có:

$400^k-1^k=(400-1)\left(400^{k-1}+400^{k-2}.1+400^{k-3}.1^2+.....+400.1^{k-2}+1^{k-1}\right)$

$=399.\left(400^{k-1}+400^{k-2}.1+400^{k-3}.1^2+.....+400.1^{k-2}+1^{k-1}\right)$

$=19.21.\left(400^{k-1}+400^{k-2}.1+400^{k-3}.1^2+.....+400.1^{k-2}+1^{k-1}\right)\vdots 19$

$256^k-9^k=(256-9)\left(256^{k-1}+256^{k-2}.9+.......+9^{k-2}.256+9^{k-1}\right)$

$=247.\left(256^{k-1}+256^{k-2}.9+.......+9^{k-2}.256+9^{k-1}\right)$

$=13.19\left(256^{k-1}+256^{k-2}.9+.......+9^{k-2}.256+9^{k-1}\right)\vdots 19$

$\Rightarrow\left(400^k-1^k+256^k-9^k\vdots 19\right)$

Tương tự ta cũng có:

$400^k-9^k=(400-9)\left(400^{k-1}+400^{k-2}.9+.....+9^{k-2}.400+9^{k-1}\right)$

$=17.23\left(400^{k-1}+400^{k-2}.9+.....+9^{k-2}.400+9^{k-1}\right)\vdots 17$

$256^k-1=(256-1)\left(256^{k-1}+256^{k-2}.1+......+256.1^{k-2}+1^{k-1}\right)$

$=17.15\left(256^{k-1}+256^{k-2}.1+......+256.1^{k-2}+1^{k-1}\right)\vdots 17$

$\Rightarrow 400^k-9^k+256^k-1\vdots 17$

Như vậy ta có:

$$\begin{cases}20^n+16^n-3^n-1=\left(400^k+256^k-9^k-1\right)\vdots 19\\ 20^n+16^n-3^n-1=\left(400^k+256^k-9^k-1\right)\vdots 17\end{cases}\Rightarrow\left(20^n+16^n-3^n-1\right)\vdots(19.17)$$

$\Rightarrow\left(20^n+16^n-3^n-1\right)\vdots 323$

Như vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 53. Ta có : $N=a_1+a_2+.....+a_{2018};M=a_1^5+a_2^5+......+a_{2018}^5\left(a_1;a_2......a_{2018}\in\mathbb{Z}^+\right)$

Xét hiệu

$M-N=a_1^5+a_2^5+.....+a_{2018}^5-a_1-a_2-.....-a_{2018}$

$=\left(a_1^5-a_1\right)+\left(a_2^5-a_2\right)+......+\left(a_{2018}^5-a_{2018}\right)$

Ta có $a^5-a=a\left(a^4-1\right)=a\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right)=a\left(a^2+1\right)(a-1)(a+1)$

$30=2.3.5$ với $2,3,5$ đều là các số nguyên tố

Ta có: $a\left(a^2+1\right)(a-1)(a+1)$ có tích của 3 số tự nhiên liên tiếp $a-1;a;a+1$ nên

$a(a-1)(a+1)$ sẽ chia hết cho 2 và 3

Nếu a chia cho 5 dư 0,1 hoặc 4 thì lần lượt $a,a-1,a+1$ sẽ chia hết cho 5

Nếu a chi 5 dư 2 hoặc 3 thì $a+1$ sẽ chia hết cho 5

Vậy $a\left(a^2+1\right)(a-1)(a+1)$ sẽ chia hết cho cả 2;3;5 nên sẽ chia hết cho 30

Do vậy $M-N$ chia hết cho 30 do đó M cũng chia hết cho 30

Ta có diều phải chứng minh

Câu 54. Ta có:

$$a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}-\left(a^{2016}+b^{2017}+c^{2018}\right)$$
$$=a^{2016}\left(a^2-1\right)+b^{2017}\left(b^2-1\right)+c^{2018}\left(c^2-1\right)$$
$$=a^{2015}.a(a-1)(a+1)+b^{2016}.(b-1)(b+1)+c^{2017}.c(c-1)(c+1)$$

Ta có tích 3 số tự nhiên liên tiếp sẽ chia hết cho 6, do có 1 số chẵn và 1 số chia hêt cho 3. Do vậy:

$a(a-1)(a+1);b(b-1)(b+1);c(c-1)(c+1)$ đều chia hết cho 6 nên

$\left[a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}-\left(a^{2016}+b^{2017}+c^{2018}\right)\right]\vdots 6$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 55.

+) $n = 2k$ (k nguyên dương): $M = 2k.4^{2k} + 3^{2k} = 2k.16^k + 9^k$. Ta có: 16^k và 9^k cùng dư với 2^k chia 7.

$\Rightarrow$ M cùng dư với $(2k.2^k + 2^k) = 2^k.(2k + 1)$ chia 7 $\Rightarrow (2k + 1)$ chia hết cho 7 $\Rightarrow k$ chia 7 dư 3, hay $k = 7q + 3 \Rightarrow n = 14q + 6$ $(q \in \mathrm{N})$.

+) $n = 2k + 1$ (k nguyên dương): $M = (2k + 1).4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 4(2k+1).16^k + 3.9^k$

$\Rightarrow M$ cùng dư với $(k + 4).2^k + 3.2^k = (k + 7).2^k$ chia 7.

$\Rightarrow k$ chia hết cho 7 $\Rightarrow k = 7p$ $(p \in \mathrm{N})$.

Vậy $n = 14q + 6$ hoặc $n = 14p + 1$, với p và q là các số tự nhiên.

Câu 56.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

Giả sử tồn tại số tự nhiên n để $n^3 - 9n + 27 \vdots 81$,

suy ra $n^3 - 9n + 27 \vdots 3$ hay $n \vdots 3$

=> n=3k khi đó $n^3 - 9n + 27 = 27(k^3 - k + 1)$

mà $n^3 - 9n + 27 \vdots 81$ nên $k^3 - k + 1 \vdots 3$

Nhưng $k^3 - k + 1 = (k-1).k.(k+1) + 1$ không chia hết cho 3 với mọi k.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^3 - 9n + 27$ không chia hết cho 81.

Câu 57.

Đặt $A = 4\left(m+n\right)^2 - mn$

$\Rightarrow 4A=16(m+n)^2-4mn=16(m+n)^2-\left[(m+n)^2-(m-n)^2\right]$

$=15(m+n)^2+(m-n)^2$

$A\vdots 225=15^2 \Rightarrow \begin{cases}(m-n)\vdots 3\\(m-n)\vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(m-n)^2\vdots 9\\(m-n)^2\vdots 25\end{cases} \Rightarrow (m-n)^2\vdots 225$

$\Rightarrow (m+n)^2\vdots 15 \Rightarrow \begin{cases}(m+n)\vdots 3\\(m+n)\vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(m-n)\vdots 15\\(m+n)\vdots 15\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m\vdots 15\\n\vdots 15\end{cases} \Rightarrow mn\vdots 225$

Vậy $4(m+n)^2-mn$ chia hết cho 225 thì mn cũng chia hết cho 225

Câu 58.

Ta có $S_1=1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng tỏ $2S_{2019}\vdots n(n+1)$.

Ta có nhận xét sau: Với a,b nguyên dương bất kì thì $\left(a^{2019}+b^{2019}\right)\vdots(a+b)$.

Thật vậy :

$a^{2019}+b^{2019}=(a+b)(a^{2018}-a^{2017}b+...-ab^{2017}+b^{2018})\vdots(a+b)$.

Xét hai trường hợp:

+) Nếu n lẻ: Từ nhận xét trên ta có $2S_{2019}=2n^{2019}+2\left[1^{2019}+(n-1)^{2019}\right]+2\left[2^{2019}+(n-2)^{2019}\right]+$

$$...+2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right]\vdots n$$

$2S_{2019}=2(1^{2019}+n^{2019})+2\left[2^{2019}+(n-1)^{2019}\right]+$

$$...+2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+3}{2}\right)^{2019}\right]+\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2019}\right]\vdots(n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $2S_{2019}\vdots n(n+1)$.

+) Nếu n chẵn: Ta có

$2S_{2019}=2n^{2019}+2\left[1^{2019}+(n-1)^{2019}\right]+2\left[2^{2019}+(n-2)^{2019}\right]+$

$$...+2\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+2}{2}\right)^{2019}\right]+\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n}{2}\right)^{2019}\right]\vdots n$$

$2S_{2019}=2(1^{2019}+n^{2019})+2\left[2^{2019}+(n-1)^{2019}\right]+$

$$...+2\left[\left(\frac{n-2}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+4}{2}\right)^{2019}\right]+2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{n+2}{2}\right)^{2019}\right]\vdots(n+1)$$

Suy ra $2S_{2019}\vdots n(n+1)$.

Vậy $S_{2019}\vdots S_1$.

Câu 59.

Ta có: p+(p+2)=2(p+1)

Vì p lẻ nên $(p+1)\vdots 2 \Rightarrow 2(p+1)\vdots 4$ (1)

Vì p, (p+1), (p+2) là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 3, mà p và (p+2) nguyên tố nên $(p+1)\vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[p+(p+2)]\vdots 12$ (đpcm)

Câu 60.

Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 , 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2=5k+1 \Rightarrow n^2+4=5k+5\vdots 5; k\in N^*$.

Nên n^2+4 không là số nguyên tố

Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2=5k+4 \Rightarrow n^2+16=5k+20\vdots 5; k\in N^*$.

Nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2 \vdots 5$ hay $n \vdots 5$

Câu 61.

Ta có

$$S=n\left(n^4+5n^3+5n^2-5n-6\right)$$
$$=n\left[\left(n^2-1\right)\left(n^2+6\right)+5n\left(n^2-1\right)\right]$$
$$=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+5n+6\right)$$
$$=n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Ta có S là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho $5!$ nên chia hết cho 120.

Câu 62.

Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$$a^{2015}+b^{2015}=(a+b)(a^{2014}+a^{2013}b+...+ab^{2013}+b^{2014})\Rightarrow a^{2015}+b^{2015}\vdots(a+b)$$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng khẳng định trên ta có:

$$2\left[1^{2015}+(n-1)^{2015}\right]\vdots n$$
$$2\left[2^{2015}+(n-2)^{2015}\right]\vdots n$$
$$...$$
$$2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right]\vdots n$$

Suy ra

$$A=n^{2015}+2\left[1^{2015}+(n-1)^{2015}\right]+2\left[2^{2015}+(n-2)^{2015}\right]+...+2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right]\vdots n$$

Tương tự

$$A=2(1^{2015}+n^{2015})+2\left[2^{2015}+(n-1)^{2015}\right]+...+2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015}+\left(\frac{n+3}{2}\right)^{2015}\right]+\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right]\vdots(n+1)$$

Mặt khác n và n + 1 nguyên tố cùng nhau nên $A \vdots n(n+1)$
Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có $A \vdots n(n+1)$
Câu 63. Ta có:

$Q = a^4 + 2a^3 - 16a^2 - 2a + 15 = (a^4 + 2a^3 - 2a - 1) - (16a^2 - 16)$
$= (a-1)(a+1)^3 - 16(a^2 - 1).$
Với a lẻ, $a = 2k+1,\ k \in Z.$
Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = 2k(2k+2)^3 = 16k(k+1)^3 \vdots 16.$
Mà $16(a^2-1) \vdots 16$ nên Q chia hết cho 16.
Với a chẵn, $a = 2k,\ k \in Z.$
Khi đó: $(a-1)(a+1)^3 = (2k-1)(2k+1)^3$ là số lẻ nên không chia hết cho 16. Do đó Q không chia hết cho 16.
Vậy a là số nguyên lẻ.

Câu 64.
+) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Đirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.
+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2. Khi đó ta có
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn và $a-b$ cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \vdots 4$, (đpcm).
Chú ý:
Ta có thể giải bài toán này bằng cách vận dụng tính chất sau của số chính phương: "Một số chính phương chia cho 4 thì sẽ có số dư là 0 hặc 1". Khi đó lập luận như cách làm trên ta thu được điều phải chứng minh. Tuy nhiên trong khi làm bài thi nếu vận dụng tính chất này thì học sinh phải chứng minh lại.
Bình luận: Với cách làm trên ngắn gọn, đầy đủ song một số học sinh cảm thấy hơi trừu tượng (do nguyên lí **Đirichlet** học sinh ít ôn tập không nằm trong chương trình SGK mà ở sách tham khảo). bài toán trên có thể trình bày như sau:
Trong ba số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số hoặc chẵn hoặc lẻ
Gọi hai số chính phương chọn ra là a^2 và b^2 (a, b nguyên)
+ TH1: a, b cùng chẵn: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1)^2 - (2k_2)^2 = 4(k_1^2 - k_2^2)$ chia hết cho 4 ; $k_1, k_2 \in Z$
+ TH2: a, b cùng lẻ: suy ra $a^2 - b^2 = (2k_1+1)^2 - (2k_2+1)^2 = 4(k_1^2 + k_1 - k_2^2 - k_2)$ chia hết cho 4 ; $k_1, k_2 \in Z$
Vậy trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.
Câu 65.

Cách 1: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \Leftrightarrow bc = a(b+c)$ (1)
TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c) \vdots 2$, theo (1)Suy ra: $b.c \vdots 2$
Vậy abc chia hết cho 4
TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c \vdots 2 \Rightarrow a(b+c) \vdots 2$

Mà $a.b.c$ không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.
Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.
+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì b.c chẵn nên a(b+c) chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)
Suy ra abc chia hết cho 4
+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách 2: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow bc=a(b+c) \Leftrightarrow abc=a^2(b+c)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vậy thì abc là số lẻ, còn b+c là số chẵn.
Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.
Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.
Nếu b chẵn, do a lẻ nên b + c chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn.
Vậy abc chia hết cho 2.
Tương tự cho trường hợp c chẵn.

Câu 66.

Ta có $A=2^{2^n}+4^n+16=\left(2^{2^n}-1\right)+\left(4^n-1\right)+18$

Đặt $2^{2^n}=2^{2k}\ \left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ suy ra $2^{2^n}-1=2^{2k}-1=4^k-1\ \vdots\ 3$

Do đó với mọi n nguyên dương ta có: $2^{2^n}-1\ \vdots\ 3;\ 4^n-1\ \vdots\ 3;\ 18\ \vdots\ 3$

$\Rightarrow A=2^{2^n}+4^n+16\ \vdots\ 3$

Câu 67.

Ta có $A=4^n+17=\left(4^n-1\right)+18$

Với mọi n nguyên dương ta có: $4^n-1\ \vdots\ 3;\ 18\ \vdots\ 3$

$\Rightarrow A=4^n+17\ \vdots\ 3$

Câu 68.

Giả sử $2n+1=m^2$, $3n+1=k^2\quad\left(m,k\in N^*\right)\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$\Rightarrow 2n=m^2-1=(m-1)(m+1)\vdots 4$, Suy ra : n chẵn, k lẻ

Vì k là số lẻ nên $k-1,k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và (3, 8) = 1 nên

Từ $3n+1=k^2\Rightarrow 3n=k^2-1=(k-1)(k+1)\vdots 8\Rightarrow n\vdots 8$ (1)

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)
Nếu n chia cho 5 dư 2 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)
Nếu n chia cho 5 dư 3 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)
Nếu n chia cho 5 dư 4 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vậy $n\vdots 5$ (2)

Vì (5, 8) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Câu 69.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n chẵn thì: $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

Ta có n chẵn $\Rightarrow n=2k, k\in Z$. Suy ra

$n^3+20n+96=(2k)^3+40k+96=8(k^3+5k)+96=8\left[(k^3-k)+6k\right]+96=8(k^3-k)+48k+48.2$

Do $k-1;k;k+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(k-1).k.(k+1)$ chia hết cho 6

$\Rightarrow k^3-k=(k-1).k.(k+1)\vdots 6 \Rightarrow 8(k^3-k)\vdots 48, \forall k\in Z$.

Vậy với mọi số nguyên n chẵn thì $n^3+20n+96$ chia hết cho 48.

Câu 70.

Ta có $p=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Vì a, b là các số nguyên dương nên, ta có $a^2+ab+b^2>1$.

Do p nguyên tố nên $a-b=1\Rightarrow a=b+1\Rightarrow p=3b^2+3b+1$

$$\Rightarrow 4p=3(4b^2+4b+1)+1=3(2b+1)^2+1 \text{ (đpcm).}$$

Câu 71.

Cách 1: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)$ (1)

TH1: Nếu a là số nguyên chẵn, suy ra $a(b+c)\ \vdots 2$, theo (1)Suy ra: b.c $\vdots 2$

Vậy abc chia hết cho 4

TH2: Nếu a là số nguyên lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì: $b+c\vdots 2\Rightarrow a(b+c)\vdots 2$

Mà $a.b.c$ không chia hết cho 2 (vì a, b, c đều lẻ). Suy ra mâu thuẫn.

Vậy trong hai số, b, c tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

+ Với b chẵn, mà a lẻ nên c chẵn (vì b.c chẵn nên a(b+c) chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ)

Suy ra abc chia hết cho 4

+ Với c chẵn, tương tự abc chia hết cho 4

Cách 2:

$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Leftrightarrow bc=a(b+c)\ \Leftrightarrow abc=a^2(b+c)$ (2)

Ta thấy a, b, c không thể đều là số lẻ vì nếu vậy thì abc là số lẻ, còn b+c là số chẵn.

Vậy trong 3 số tồn tại ít nhất 1 số chẵn.

Nếu a chẵn thì a^2 chia hết cho 4, từ (2) suy ra abc chia hết cho 2.

Nếu b chẵn, do a lẻ nên b + c chẵn (vì abc chẵn) suy ra c chẵn. Vậy abc chia hết cho 2.

Tương tự cho trường hợp c chẵn.

Câu 72.

1.Ta có :

$p^{2016}-1=(p^4)^{504}-1^{504}=(p^4-1).A=(p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A\in N)$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1)\vdots 4 \qquad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1)\vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1)\vdots 3$ (3)

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k\pm 1;\quad 5k\pm 2$

- Nếu $p=5k\pm 1$ thì $p^2=25k^2\pm 10k+1=5n+1$

- Nếu $p=5k\pm 2$ thì $p^2=25k^2\pm 20k+4=5l-1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4-1=5q\vdots 5$ (4) ($(n,l,q\in N)$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016}-1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

2. Vì vai trò của x, y, z bình đẳng nhau, khác nhau đôi một nên ta có thể giả sử $x<y<z$.

Khi đó , gọi t là thương của phép chia $x^3+y^3+z^3:x^2y^2z^2$. Suy ra :

$$x^3+y^3+z^3=tx^2y^2z^2 \Leftrightarrow z=tx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{z^2}>tx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=tx^2y^2-x-y \quad (1)$$

- Nếu $tx^2y^2-x-y<0$ (*) thì $t<\frac{1}{xy^2}+\frac{1}{x^2y}<2\Rightarrow t=1$

Thay t = 1 vào (*), ta được $x^2y^2-x-y<0\Rightarrow xy-x-y<0\Rightarrow (x-1)(y-1)<1$

$\Rightarrow x=1$

$\Rightarrow y^2-y<0\Leftrightarrow y(y-1)<0$ (vô lý)

Vậy $tx^2y^2-x-y\geq 0$ (2)

- Từ (1), (2) suy ra : $z^2\geq (tx^2y^2-x-y)^2$ (3)

- Mặt khác vì $x^3+y^3+z^3=tx^2y^2z^2$ nên $x^3+y^3\vdots z^2\Rightarrow x^3+y^3\geq z^2$ (4)

- Từ (3) và (4) suy ra :

$$x^3+y^3 \ge (tx^2y^2-x-y)^2$$
$$\Leftrightarrow x^3+y^3 \ge t^2x^4y^4-2tx^2y^2(x+y)+x^2+2xy+y^2$$
$$\Rightarrow x^3+y^3+2tx^2y^2(x+y) > t^2x^4y^4$$
$$\Leftrightarrow txy < \frac{x^3+y^3+2tx^2y^2(x+y)}{tx^3y^3}$$
$$\Leftrightarrow txy < 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{tx^3}+\frac{1}{ty^3} \qquad (5)$$

- Nếu $x \ge 2$ thì $y \ge 3 \Rightarrow txy \ge 6 > 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{t.2^3}+\frac{1}{t.2^3} > 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{t.x^3}+\frac{1}{t.y^3}$

Điều này mâu thuẫn với (5).

Vậy x = 1. Khi đó (5) trở thành :

$$ty < 2+\frac{2}{y}+\frac{1}{t}+\frac{1}{ty^3} \qquad (6)$$

- Nếu $y \ge 4$ thì $ty \ge 4 > 2+\frac{2}{4}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t.4^3} \ge 2+\frac{2}{y}+\frac{1}{t}+\frac{1}{ty^3}$.

Điều này mâu thuẫn với (6).

Vậy $y \in \{2;3\}$ (Vì y > x = 1)

+ Nếu y = 2 thì $\begin{cases} x^3+y^3=9 \vdots z^2 \\ x \le y \le z \\ x=1; y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=2; z=3$.

+ Nếu y = 3 thì $\begin{cases} x^3+y^3=28 \vdots z^2 \\ x \le y \le z \\ x=1; y=3 \end{cases}$.(Loại)

- Thử lại ta thấy (x, y, z) = (1, 2, 3) và các hoán vị của nó thỏa mãn.

Vậy thương của phép chia $x^3+y^3+z^3 : x^2y^2z^2$ là t = 1.

Câu 73.

Cách 1:

$24a^2+1=b^2 \Leftrightarrow 25a^2+1=a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2 \equiv 1 \pmod 5$ **(1)**

Ta có: $\begin{cases} a \equiv 0, \pm1, \pm2 \pmod 5 \\ b \equiv 0, \pm1, \pm2 \pmod 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5 \\ b^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5 \end{cases}$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod 5 \\ b^2 \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod 5 \\ b^2 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$.

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 2:

$24a^2+1=b^2 \Leftrightarrow 25a^2+1=a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=5.k+1$ **(1)**

$\forall n\in Z \Rightarrow n=5l+r\ \left(l\in Z, r\in\{0;1;2;3;4\}\right)$

$\Rightarrow n^2=5l_1+r_1^2\ \left(l_1\in Z, r_1^2\in\{0;1;4\}\right)$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases}a^2=5k_1+1\\ b^2=5k_2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=5k_1\\ b^2=5k_2+1\end{cases}$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 3:

$24a^2+1=b^2 \Leftrightarrow 24a^2-b^2=-1$ không chia hết cho 5 nên a và b không đồng thời chia hết cho 5.

+ Giả sử a và b đều không chia hết cho 5.

Theo định lý Fermat ta có $\begin{cases}a^4\equiv 1(\bmod 5)\\ b^4\equiv 1(\bmod 5)\end{cases} \Rightarrow (a^2+b^2)(a^2-b^2)\equiv 0(\bmod 5)$

Nếu $a^2+b^2\equiv 0(\bmod 5)$ thì $25a^2+1=a^2+b^2\equiv 0(\bmod 5)$ (vô lí).

Suy ra $a^2-b^2\equiv 0(\bmod 5) \Rightarrow 23a^2+1=b^2-a^2\equiv 0(\bmod 5)$ (*)

Vì a không chia hết cho 5 nên $a\equiv \pm1,\pm2(\bmod 5)$.

Với $a\equiv\pm1(\bmod 5)\Rightarrow a^2\equiv 1(\bmod 5)\Rightarrow 23a^2+1\equiv -1(\bmod 5)$ (trái với (*))

Với $a\equiv\pm2(\bmod 5)\Rightarrow a^2\equiv 4(\bmod 5)\Rightarrow 23a^2+1\equiv 3(\bmod 5)$ (trái với (*))

Vậy điều giả sử là sai. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 74.

Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k\in N^*$.

+ Nếu $q=3k+1$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q=3k+2$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q=6\left(k+1\right)\vdots 12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Câu 75.

Từ giả thiết $a^3+b^3=2\left(c^3-8d^3\right)$ ta có

$$a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)+\left(c^3+d^3\right)+3cd\left(c+d\right)=3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$$

$$\Leftrightarrow \left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3=3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$$

Dễ thấy $3ab\left(a+b\right)+3cd\left(c+d\right)+3c^3-15d^3$ chia hết cho 3 nên ta được $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3$ chia hết cho 3.

Mặt khác ta lại có $\left(a+b\right)^3+\left(c+d\right)^3=\left(a+b+c+d\right)^3-3\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+b+c+d\right)$

Mà $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$ chia hết cho 3 nên suy ra $(a+b+c+d)^3$ chia hết cho 3.

Do vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Chú ý: Bản chất bài toán trên chính là bài toán cơ bản: Nếu x^3+y^3 chia hết cho 3 thì $x+y$ chia hết cho 3.

Câu 76.

Ta có: $A = 3n^3+15n = 3(n^3-n+6n) = 3[(n-1)n(n+1)+6n]$

Với mọi số nguyên n, $(n-1)n(n+1)+6n$ chia hết cho 6

Vậy $A = 3[(n-1)n(n+1)+6n]$ chia hết cho 18

Câu 77.

Ta có: $(a^2+ab+b^2)\vdots 9 \Rightarrow 4(a^2+ab+b^2)\vdots 9$

$$\Rightarrow\left[(2a-b)^2+3b^2\right]\vdots 9 \qquad (1)$$

Mà $3b^2\vdots 3$ nên $(2a-b)^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $(2a-b)\vdots 3$.

$$(2a-b)\vdots 3 \text{ nên } (2a-b)^2\vdots 9. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3b^2\vdots 9 \Rightarrow b^2\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $\Rightarrow b\vdots 3$.

$(2a-b)\vdots 3$ và $b\vdots 3 \Rightarrow 2a\vdots 3$ mà $(2;3)=1$ nên $a\vdots 3$.

Vậy cả a và b đều chia hết cho 3.

Câu 78.

Vì $2019^{2018}\vdots 3$ nên $(a_1+a_2+...+a_n)\vdots 3$. Xét hiệu:

$(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3)-(a_1+a_2+...+a_n)=(a_1-1)a_1(a_1+1)+(a_2-1)a_2(a_2+1)+...+(a_n-1)a_n(a_n+1)$

chia hết cho 3. Do đó $a_1^3+a_2^3+a_3^3+...+a_n^3$ chia hết cho 3 (đpcm).

Câu 79.

Ta có: $1947 = 3.11.59$

Đặt $A = 46^n+296.13^n$

$$*\begin{cases}46^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3\\ 13^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3\end{cases}$$

Suy ra: $A \equiv 1+296 \equiv 297 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow A\vdots 3$ (1)

* $\begin{cases} 46^n \equiv 2^n = 1(\bmod 11) \\ 13^n \equiv 2^n = 1(\bmod 11) \end{cases}$

Suy ra: $A \equiv 2^n + 296.2^n \equiv 297.2^n \equiv 11.27.2^n \equiv 0(\bmod 11) \Rightarrow A\vdots 11$ (2)

* $46^n \equiv (-13)^n \equiv -13^n (\bmod 13)$

Vì n là số tự nhiên lẻ

$\Rightarrow A \equiv -13^n + 296.13^n \equiv 295.13^n \equiv 5.59.13^n \equiv 0(\bmod 59)$
$\Rightarrow A\vdots 59$ (3)

Mà 3; 11; 59 đôi một nguyên tố cùng nhau nên từ (1), (2), (3)

$\Rightarrow A\vdots(3.11.59) \Rightarrow A\vdots 1947$

<u>Cách 2:</u>

Ta có: 1947 = 33. 59

Đặt $A = 46^n + 296.13^n = 46^n - 13^n + 297.13^n = \left(46^n - 13^n\right) + 297.13^n$

$A = \left(46-13\right).A_1 + 33.9.13^n = 33\left(A_1 + 9.13^n\right)\vdots 33$

Lại có:

$A = 46^n + 296.13^n = 46^n - (-13^n) + 295.13^n = \left[46^n - (-13^n)\right] + +295.13^n$

$A = \left[46 - (-13)\right].A_2 + +59.5.13^n$ (vì n lẻ)

$= 59.\left(A_2 + 5.13^n\right)\vdots 59$

Mà $\left(33;59\right) = 1$ nên $A\vdots(33.59) = 1947$

Câu 80.

Ta có: $2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$.

+ $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

+ Xét $2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$ tac có:

- Nếu n chia hết cho 3 thì $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 3
- Nếu n chia 3 dư 2 thì $n+1$ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3
- Nếu n chia 3 dư 1 thì $2n+1$ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3

Vậy trong mọi trường hợp thì $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

Ta có $(2;3)=1$ nên $2n^3+3n^2+n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Câu 81.

Ta có $a+b=c^3-2018c \Leftrightarrow a+b+c=(c-1).c.(c+1)-2016c$ chia hết cho 6. Mặt khác

$(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)=(a-1).a.(a+1)+(b-1).b.(b+1)+(c-1).c.(c+1)$ chia hết cho 6

Do đó $A=a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Câu 82.

Ta xét 2014 số khác nhau có dạng 20142014…2014 = a_n, có n bộ 2014. n $\in$ N*

Trong 2014 số này có ít nhất hai số khi chia cho 2013 có cùng số dư.

Giả sử 2 số đó là a_i, a_j (j > i). Khi đó $a_j - a_i \vdots 2013$

hay: $\underbrace{20142014...2014}_{\text{j số 2014}}-\underbrace{20142014...2014}_{\text{i số 2014}}=\underbrace{20142014....2014}_{\text{j–i số 2014}}\underbrace{0000...0000}_{\text{4i số 0}}\vdots 2013$

Số có dạng 20142014…2014 . $10^{4i} \vdots 2013$

Vì UCLN(10, 2013) = 1 nên UCLN(10^n, 2013) = 1 với mọi n $\in$ N*

Vậy: có số dạng 20142014…2014 chia hết cho 2013.

Câu 83.

Từ giả thiết suy ra $a\equiv 1 \pmod 3$, $a=3k+1 (k\in\mathbb{N})$; $b\equiv 2 \pmod 3$, $b=3q+2 (q\in\mathbb{N})$.

Suy ra $A=4^a+9^b+a+b\equiv 1+0+1+2 \pmod 3$ hay $A\equiv 4 \pmod 3$. (1)

Lại có: $4^a=4^{3k+1}=4.64^k\equiv 4 \pmod 7$

$9^b=9^{3q+2}\equiv 2^{3q+2} \pmod 7 \Rightarrow 9^b\equiv 4.8^q\equiv 4 \pmod 7$.

Từ giả thiết ta còn suy ra $a\equiv 1 \pmod 7$, $b\equiv 1 \pmod 7$.

Dẫn đến $A=4^a+9^b+a+b\equiv 4+4+1+1 \pmod 7$ hay $A\equiv 10 \pmod 7$.

Từ (1) suy ra $A\equiv 10 \pmod 3$; mà 3 và 7 nguyên tố cùng nhau nên $A\equiv 10 \pmod{21}$.

Vậy A chia cho 21 dư 10.

Câu 84.

Ta có : $x^5 - x = x(x^4-1) = x(x^2-1)(x^2+1) = x(x^2-1)\left[(x^2-4)+5\right]$

$=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5(x-1)(x+1)x$

Ta có : (x – 2)(x -1) x(x + 1)(x + 2) chia hết ch 5 và 6

mà (5,6) = 1 nên $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\vdots 30$

lại có (x-1)x(x+1) Chia hết cho 2 và 3 mà (2,3)=1 nên $5(x-1)x(x+1)\vdots 30$

Do đó $x^5-1 \vdots 30$

Suy ra $A=(a^{2020}+b^{2020}+c^{2020})-(a^{2016}+b^{2016}+c^{2016})$

$A=a^{2015}(a^5-a)+b^{2015}(b^5-b)+c^{2015}(c^5-c)\vdots 30$

Vậy $A\vdots 30$

Câu 85.

Trước tiên, ta chứng minh $x \vdots 3$.

Đặt $y^5 = a$, $a \in N^*$, ta có $2x^2 - 1 = y^{15} \Leftrightarrow 2x^2 = a^3 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$ (1)

Gọi ƯCLN$(a + 1; a^2 - a + 1) = d$ ($d \in N^*$), ta có: $a + 1$ d, $a^2 - a + 1 \vdots d$.

Suy ra $(a^2 - a + 1) - (a + 1)(a - 2) = 3 \vdots d \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 3$

* Nếu d = 1 thì từ (1), ta có:

$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+1=x^2 \\ a^2-a+1=2 \end{cases}$ (loại vì $a \notin N^*$)

$\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ x=1 \end{cases}$ (loại vì phải có $x > 1$)

* nếu d = 3 thì từ (1) ta có: $2x^2 \vdots 9$. Vì ƯCLN(2; 9) = 1nên $x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3$ (*)

Chứng minh $x \vdots 5$.

Đặt $y^3 = b$, $b \in N^*$, ta có: $2x^2 - 1 = b^5 \Leftrightarrow 2x^2 = b^5 + 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 = (b + 1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1)$ (2)

Gọi ƯCLN$(b + 1; b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) = k$ ($k \in N^*$)

Ta có: $b + 1 \vdots k$; $b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 \vdots k$

$\Rightarrow (b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b + 1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4) = 5 \vdots k$

Suy ra k = 1 hoặc k = 5.

* Nếu k = 1 thì từ (2) có

$\begin{cases} b+1=x^2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=2 \end{cases}$ (loại vì $b \notin N^*$) Hoặc: $\begin{cases} b+1=2 \\ b^4-b^3+b^2-b+1=x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ x=1 \end{cases}$ (loại vì phải có $x > 1$)

* Nếu k = 5 thì từ (2) suy ra $2x^2 \vdots 25$. Vì ƯCLN(2; 25) = 1 nên $x^2 \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $x \vdots$ BCNN(3; 5) hay $x \vdots 15$ (đpcm)

Câu 86.

Giả sử A là số tự nhiên được tạo thành bằng cách viết 100 số trên theo hàng ngang một các bất kì. Khi đó trong số tự nhiên A có 21 chữ số 1 và 20 chữ số từ 2 đến 9.

Do đó tổng các chữ số của A là $21.1+20(2+3+4+5+6+7+8+9)=901$ không chia hết cho 9

Mà 2016 chia hết cho 9 do đó A không thể chia hết cho 2016

Câu 87.

Giả sử tồn tại số $k\in\{0;1;2;3\}$ để tồn tại số tự nhiên n sao cho $(n^2-k)\vdots 4$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $n=4q$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2-k=16q^2-k$.

Do đó để $(n^2-k)\vdots 4$ thì $k\vdots 4$ nên suy ra $k=0$.

- Trường hợp 2: Nếu $n=4q\pm 1$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2-k=16q^2\pm 8q+1-k$

Do đó để $(n^2-k)\vdots 4$ thì $1-k\vdots 4$ nên suy ra $k=1$.

- Trường hợp 3: Nếu $n=4q+2$ với q là số tự nhiên. Khi đó $n^2-k=16q^2+16q+4-k$

Do đó để $(n^2-k)\vdots 4$ thì $k\vdots 4$ nên suy ra $k=0$.

Vậy với $k=0$ hoặc $k=1$ thì luôn tồn tại số tự nhiên n để $(n^2-k)\vdots 4$.

Câu 88.

Ta có: $(n+1)(n+2)...(2n)=\dfrac{(2n)!}{n!}=\dfrac{(1.3.5....(2n-1))(2.4.6...2n)}{n!}$

$$=1.3.5...(2n-1).2^n.\frac{n!}{n!}=1.3.5...(2n-1).2^n$$

Do đó: $(n+1)(n+2)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

Chương II

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Bài 1:

Ta có: $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2+1=(a+b)(b+c)$; $c^2+1=(b+c)(c+a)$

Do đó: $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 2:

Đặt n(2n – 1) = 26q² (1)

Do VP chẵn và (2n – 1) lẻ nên n chẵn hay n = 2k

Do đó: (1) suy ra k(4k – 1) = 13q² (2)

Nhận thấy (k, 4k – 1) = 1 nên:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} k = u^2 \\ 4k - 1 = 13v^2 \end{cases} v \begin{cases} k = 13u^2 \\ 4k - 1 = v^2 \end{cases}$$

Xét trường hợp 1 ta có:

$$\begin{cases} k = u^2 \\ 4k - 1 = 13v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k = 13v^2 + 1 = 12v^2 + v^2 + 1 \Rightarrow v^2 + 1 \vdots 4 \Rightarrow v^2 \equiv 3 \pmod 4 \left(\text{vo ly}\right)$$

Xét trường hợp 2 ta có:

$$\begin{cases} k = 13u^2 \\ 4k - 1 = v^2 \end{cases} \Rightarrow 4k = v^2 + 1 \left(\text{vo ly}\right)$$

Vậy không tồn tại n thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 3:

Ta có A = $n^4 + n^3 + n^2 = n^2\left(n^2 + n + 1\right)$

Với n = 0 thì A = 0 (thỏa mãn)

Với n ≠ 0 thì A là số chính phương khi và chỉ khi $n^2 + n + 1$ là số chính phương.

Khi đó $n^2 + n + 1 = k^2 \ \left(k \in \mathbb{N}\right) . \Rightarrow 4\left(n^2 + n + 1\right) = 4k^2 \Rightarrow \left(2n + 1\right)^2 - 4k^2 = -3$

$\Rightarrow \left(2n + 1 - 2k\right)\left(2n + 1 + 2k\right) = -3$

Vì $2n + 1 + 2k \geq 2n + 1 - 2k,\ \forall n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ nên

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2n + 1 - 2k = -3 \\ 2n + 1 + 2k = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2n + 1 - 2k = -1 \\ 2n + 1 + 2k = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2n + 1 - 2k = -3 \\ 2n + 1 + 2k = 1 \end{cases} \Rightarrow n = -1 \quad \text{(thỏa mãn)}$$

$$\begin{cases} 2n + 1 - 2k = -1 \\ 2n + 1 + 2k = 3 \end{cases} \Rightarrow n = 0 \quad \text{(loại)}$$

Vậy $n = 0; n = -1$

Bài 4:

Ta có A = $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y^4$

$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$$

Đặt $x^2 + 5xy + 5y^2 = t \qquad (t \in Z)$ thì

$$A=(t-y^2)(t+y^2)+y^4=t^2-y^4+y^4=t^2=(x^2+5xy+5y^2)^2$$

Vì x, y, z ∈ Z nên $x^2\in Z,\quad 5xy\in Z,\quad 5y^2\in Z\ \Rightarrow x^2+5xy+5y^2\in Z$

Vậy A là số chính phương.

Bài 5:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}A&=224\underbrace{99...9}_{n-2}1\underbrace{00...0}_{n}9\\&=224.10^{2n}+99...9.10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+\left(10^{n-2}-1\right).10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=224.10^{2n}+10^{2n}-10^{n+2}+10^{n+1}+9\\&=225.10^{2n}-90.10^{n}+9\\&=\left(15.10^{n}-3\right)^2\end{aligned}$$

Vậy A là số chính phương.

b) Ta có :

$$\begin{aligned}B&=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6\\&=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n}+1\\&=\underbrace{11...1}_{n}.10^{n}+5.\underbrace{11...1}_{n}+1\\&=\frac{10^{n}-1}{9}.10^{n}+5.\frac{10^{n}-1}{9}+1\\&=\frac{10^{2n}-10^{n}+5.10^{n}-5+9}{9}\\&=\frac{10^{2n}+4.10^{n}+4}{9}\\&=\left(\frac{10^{n}+2}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Do đó B là số chính phương.

Bài 6:

Giả sử: $n-2;n-1;n;n+1;n+2$ với $2\le n\in\mathbb{N}$ là 5 số tự nhiên liên tiếp

Ta có: $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5\left(n^2+2\right)$

Vì n^2 không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $\left(n^2+2\right)\not\vdots\,5\Rightarrow 5\left(n^2+2\right)$ không là số chính phương.

Vậy tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không phải số chính phương.

Bài 7:

Ta có $\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9=\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88..8}_{n}+1=\underbrace{44...4}_{n}.10^n+8.\underbrace{11...1}_{n}+1$

$$=4.\frac{10^n-1}{9}.10^n+8.\frac{10^n-1}{9}+1$$

$$=\frac{4.10^{2n}-4.10^n+8.10^n-8+9}{9}=\frac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9}$$

$$=\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)$$

Ta thấy $2.10^n+1=200...01$ (có $n-1$ chữ số 0) có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên nó chia hết cho 3

Suy ra $\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)\in\mathbb{Z}$ hay các số có dạng $44...488...89$ là số chính phương.

Bài 8:

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên

Nên $p\,\vdots\,2$ và p không chia hết cho 4 (1)

a) Giả sử $p+1$ là số chính phương. Đặt $p+1=m^2\,(m\in\mathbb{N})$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m=2k+1\,(k\in\mathbb{N})$.

Ta có: $m^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p+1=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p=4k^2+4k=4k(k+1)\,\vdots\,4$ mâu thuẫn với (1)

$\Rightarrow p+1$ là số chính phương.

b) $p=2\cdot3\cdot5\cdots$ là số chia hết cho 3 $\Rightarrow p-1$ có dạng $3k+2$.

Không có số chính phương nào có dạng $3k+2$

Nên $p-1$ không là số chính phương.

Vậy nếu p là tích n số nguyên tố đầu tiên thì $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Bài 9:

Giả sử 2010 + n^2 là số chính phương thì 2010 + n^2 = m^2 ($m\in N$)

Từ đó suy ra $m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow (m + n)(m - n) = 2010$

Như vậy trong 2 số m và n phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $m + n + m - n = 2m \Rightarrow$ 2 số $m + n$ và $m - n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $m + n$ và $m - n$ là 2 số chẵn.

$\Rightarrow (m + n)(m - n) \vdots 4$ nhưng 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Bài 10:

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2, n-1, n, n+1, n+2\left(n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right)$.

Ta có: $\left(n-2\right)^2+\left(n-1\right)^2+n^2+\left(n+1\right)^2+\left(n+2\right)^2=5.\left(n^2+2\right)$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8

Do đó n^2+2 không thể chia hết cho 5

Suy ra: $5.\left(n^2+2\right)$ không là số chính phương

Hãy nói cách khác: A không là số chính phương

Bài 11:

Vì $n + 1$ và $2n + 1$ là các số chính phương nên đặt $n + 1 = k^2$, $2n + 1 = m^2$ ($k, m \in N$)

Ta có m là số lẻ $\Rightarrow m = 2a + 1 \Rightarrow m^2 = 4a(a + 1) + 1$

Mà $n = \dfrac{m^2-1}{2} = \dfrac{4a(a+1)}{2} = 2a(a+1)$

$\Rightarrow$ n chẵn $\Rightarrow$ $n + 1$ lẻ $\Rightarrow$ k lẻ $\Rightarrow$ đặt $k = 2b + 1$ (với $b \in N$) $\Rightarrow k^2 = 4b(b+1) + 1$

$\Rightarrow n = 4b(b+1) \Rightarrow n \vdots 8$ (1)

Ta có: $k^2 + m^2 = 3n + 2 \equiv 2 \pmod 3$

Mặt khác k^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1, m^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1

Nên để $k^2 + m^2 \equiv 2 \pmod 3$ thì $k^2 \equiv 1 \pmod 3$

$m^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow m^2 - k^2 \vdots 3$ hay $(2n + 1) - (n + 1) \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$ (2)

Mà $(8; 3) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow n \vdots 24$

Bài 12:

Gọi số chính phương phải tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ với $a, b \in N$, $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 11.\overline{a0b} = 11.(100a + b) = 11.(99a + a + b)$ (1)

Nhận xét thấy $\overline{aabb} \vdots 11 \Rightarrow a + b \vdots 11$

Mà $1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9$ nên $1 \le a + b \le 18 \Rightarrow a + b = 11$

Thay a + b = 11 vào (1) được $n^2 = 11^2(9a + 1)$ do đó 9a + 1 là số chính phương

Bằng phép thử với a = 1; 2;…; 9 ta thấy chỉ có a = 7 thoả mãn $\Rightarrow b = 4$

Số cần tìm là: 7744

Bài 13:

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là 2n - 1 ; 2n + 1 ; 2n + 3 ($n \in N$)

Ta có : $A = (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111 . a$ với a lẻ và $1 \le a \le 9$

$\Rightarrow 12n(n + 1) = 11(101a - 1)$

$\Rightarrow 101a - 1 \vdots 3 \Rightarrow 2a - 1 \vdots 3$

Vì $1 \le a \le 9$ nên $1 \le 2a - 1 \le 17$ và 2a – 1 lẻ nên $2a - 1 \in \{3;9;15\}$

$\Rightarrow a \in \{2;5;8\}$

Vì a lẻ $\Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 21$

3 số cần tìm là: 41; 43; 45

Bài 14:

Ta có $A = \underbrace{444.....4}_{2n} = \underbrace{444......4}_{n}\underbrace{000...0}_{n} + \underbrace{444.....4}_{n} = \underbrace{444....4}_{n}.\left(10^n - 1\right) + \underbrace{888....8}_{n}$

$$= 4.\underbrace{111....1}_{n}.\underbrace{999....9}_{n} + B = 4.\underbrace{111....1}_{n}.9.\underbrace{111....1}_{n} + B = \left(6.\underbrace{111....1}_{n}\right)^2 + B$$

$$= \left(\frac{3}{4}.\underbrace{888....8}_{n}\right)^2 + B = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + B$$

Khi đó

$$A + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + B + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + 2.\frac{3}{4}B.2 + 4 = \left(\frac{3}{4}B + 2\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{4}.\underbrace{888....8}_{n} + 2\right)^2 = \left(3.\underbrace{222....2}_{n} + 2\right)^2 = \left(\underbrace{666....6}_{n-1}8\right)^2$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 15:

a. $2N - 1 = 2.1.3.5.7...2007 - 1$

Có $2N \vdots 3 \Rightarrow 2N - 1$ không chia hết cho 3 và $2N - 1 = 3k + 2\left(k \in \mathbb{N}\right)$

Suy ra $2N - 1$ không là số chính phương.

b. $2N = 2.1.3.5.7...2007$

Vì N lẻ nên N không chia hết cho 2 và $2N \vdots 2$.

Nhưng $2N$ không chia hết cho 4.

$2N$ chẵn nên $2N$ không là số chính phương.

c. $2N+1 = 2.1.3.5.7....2007+1$

$2N+1$ lẻ nên $2N+1$ không chia hết cho 4.

$2N$ không chia hết cho 4 nên $2N+1$ không chia cho 4 dư 1.

Do đó: $2N+1$ không là số chính phương.

Bài 16:

Kí hiệu p_n là số nguyên tố thứ n. Giả sử tồn tại số tự nhiên m mà

$S_{m-1} = a^2; S_m = b^2 \left(a,b \in N^*\right)$

Vì $S_1 = 2; S_2 = 10; S_4 = 17 \Rightarrow m > 4$

Ta có: $p_m = S - S_{m-1} = b^2 - a^2 = (a-b)(a+b)$. Vì p_m là số nguyên tố và b + a > 1.

Nên $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=p_m \end{cases}$. Suy ra: $p_m = 2b-1 = 2\sqrt{S_m} - 1 \Rightarrow S_m = \left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2 \qquad (1)$

Do $m > 4$ nên $S_m \le \left(1+3+5+...+p_{m-1}+p_m\right)+2-1-9 = \left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2 - 8 < \left(\dfrac{p_m+1}{2}\right)^2$

mâu thuẫn với (1)

Nên trong dãy số S_1, S_2,…… không tồn tại hai số hạng liên tiếp là số chính phương.

Bài 17:

Do p là số nguyên tố nên các ước số nguyên dương của p^4 là: 1; p; p^2; p^3; p^4

Đặt $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$

Giả sử $S = n^2 \Rightarrow 4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 \ (1) \ (n \in \mathbb{Z})$

Ta có: $4p^4 + 4p^3 + p^2 < (2n)^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$

$\Leftrightarrow \left(2p^2+p\right)^2 < (2n)^2 < \left(2p^2+p+2\right)^2$

$\Leftrightarrow 4n^2 = \left(2p^2+p+1\right)^2 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3$

Thử lại với p = 3 thỏa mãn. Vậy số nguyên tố cần tìm là: p = 3.

Bài 18:

Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2 \ (k \in N) \Leftrightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305$

$\Leftrightarrow (n-k-7)(n+k-7) = 305 = 1.305 = 61.5$

Xét các trường hợp: do $n+k-7 > n-k-7$

Trường hợp 1: n – k – 7 = 1 và n + k – 7 = 305 => n = 160 (nhận)

Trường hợp 2: n – k – 7 = - 305 và n + k – 7 = -1 => n = -146 (loại)

Trường hợp 3: n – k – 7 = 5 và n + k – 7 = 61 => n = 40 (nhận)

Trường hợp 4: n – k – 7 = -61 và n + k – 7 = -5 => n = -26 (loại)

Vậy n = 40, k = 28 hoặc n = 160 , k = 152

Bài 19:

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}\Rightarrow ab+bc+ca=1$

$\Rightarrow 1+a^2=ab+bc+ca+a^2=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)$

$\Rightarrow 1+b^2=ab+bc+ca+b^2=b(a+b)+c(a+b)=(a+b)(b+c)$

$\Rightarrow 1+c^2=ab+bc+ca+c^2=b(a+c)+c(a+c)=(a+c)(b+c)$

$\Rightarrow \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)=\left(a+b\right)^2\left(b+c\right)^2\left(a+c\right)^2=\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2$ Vì a, b, c là các số nguyên $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\in Z$

$\Rightarrow (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương.

Bài 20:

- Để A là số chính phương thì A = $n^2 + n + 6 = a^2$ ($a \in N$)

- Ta có: $n^2 + n + 6 = a^2$

$\Leftrightarrow 4n^2+4n+24=4a^2$

$\Leftrightarrow \left(2a\right)^2-\left(2n+1\right)^2=23$

$\Leftrightarrow \left(2a+2n+1\right).\left(2a-2n-1\right)=23$

- Vì a, n là các số tự nhiên nên (2a +2n +1) là số tự nhiên và

2a + 2n + 1 > 2a – 2n -1. Do đó

$$\begin{cases}2a+2n+1=23\\2a-2n-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=24\\4n=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\n=5\end{cases}$$

- Vậy n = 5

Bài 21:

Ta có

+ d là số nguyên tố và $\overline{abcd}$ là số chính phương nên $d=5$.

$+\overline{abcd}<10000=100^2\Rightarrow \overline{abcd}=\left(\overline{x5}\right)^2$; với $x\in\{1;2;3;4;...;9\}$

+ Vì $\overline{abcd}$ chia hết cho 9 $\left(\overline{x5}\right)^2 \vdots 9\Rightarrow \overline{x5}\vdots 3\Rightarrow x+5\in\{6;9;12\}\Rightarrow x\in\{1;4;7\}$

Kiểm tra lại ta được hai số: 2015 và 5625.

Bài 22:

Gọi M = $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98} \Rightarrow$ S = 2 + M

M = 2M – M = $(2^2 + 2^3 + ... + 2^{98} + 2^{99}) - (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{98})$

M = $2^{99} - 2$

$\Rightarrow$ S = $2^{99} = (2^4)^{24}.2^3 = 8.16^{24}$

Vì 16^{24} có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow$ S có chữ số tận cùng là 8

Nên S không là số chính phương.

Bài 23:

Vì $4x^3+14x^2+9x-6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3+14x^2+9x-6=k^2$ với $k\in N$

Ta có $4x^3+14x^2+9x-6=\ldots=(x+2)(4x^2+6x-3)$ nên ta có $(x+2)(4x^2+6x-3)=k^2$

Đặt $(x+2,4x^2+6x-3)=d$ với $d\in N^*$

Ta có $x+2\vdots d\Rightarrow(x+2)(4x-2)\vdots d\Rightarrow 4x+6x-4\vdots d$

Ta lại có $4x^2+6x-3\vdots d\Rightarrow(4x^2+6x-3)-(4x^2+6x-4)=1\vdots d\Rightarrow d=1$

Vậy $(x+2,4x^2+6x-3)=1$

mà $(x+2)(4x^2+6x-3)=k^2$ nên ta có

x+2 và $4x^2+6x-3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2=a^2$ và $4x^2+6x-3=b^2$ với $a,b\in N^*$

Vì x > 0 nên ta có $4x^2<b^2<4x^2+12x+9\Leftrightarrow(2x)^2<b^2<(2x+3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2=(2x+1)^2\Leftrightarrow 4x^2+6x-3=4x^2+4x+1\Leftrightarrow x=2$

Với x = 2 ta có $4x^3+14x^2+9x-6=100=10^2$ là số chính phương.

Bài 24:

Giả sử: $n^2+17=k^2$ ($k\in N$) và $k>n$ $\Rightarrow$ $(k-n)(k+n)=17\Leftrightarrow\begin{cases}k-n=1\\k+n=17\end{cases}\Rightarrow n=8$

Vậy với $n=8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 25:

Đặt $A=2^n+3^n+4^n$. Nếu $n=1$ thì $A=9$ (thỏa mãn)

Xét $n>1$ hay $n\ge 2$ thì 2^n+4^n chia hết cho 4.

Ta có 3^n chia 4 dư 1 với n chẵn hoặc -1 với n lẻ. Mà một số chính phương chia 4 dư 0 hoặc 1 nên A phải chia 4 dư 1 nên 3^n phải chia 4 dư 1. Suy ra n chẵn.

Với n chẵn: 2^n chia 3 dư 1, 4^n chia 3 dư 1, 3^n chia hết cho 3.

Do đó A chia 3 dư 2 (vô lí, vì một số chính phương chia 3 có số dư là 0 hoặc 1).

Vậy $n=1$.

Bài 26:

Giả sử $n^2+2014=k^2(k^2\in N)$

$$\Leftrightarrow 2014=k^2-n^2\Leftrightarrow 2014=(k+n)(k-n) \qquad (1)$$

Suy ra (k + n) và (k – n) = 2k là số chẵn nên (k + n) và (k – n) cùng tính chẵn lẻ

Do 2014 là số chẵn nên (k + n) và (k – n) đều là số chẵn

$\Rightarrow (k+n)(k-n) \vdots 4$

Khi đó từ (1) suy ra ta lại có $2014 \vdots 4$ (điều này vô lí)

Vậy không có số nguyên n nào để n^2+2014 là số chính phương

Bài 27:

Ta có: $x^3-3x^2+x+2=(x-2)(x^2-x-1)$

* Xét $x-2=0 \Rightarrow x=2$: thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Xét $x^2-x-1=0$: Loại.

* Xét $x-2=x^2-x-1$ ta có: $x=1$.

* TH $x \neq 2; x \neq 1$. Với x nguyên ta chứng minh được $(x-1; x^2-x-1)=1$.

Nên x^3-3x^2+x+2 là số chính phương khi $x-2$ và x^2-x-1 cùng là số chính phương.

Để x^2-x-1 là số chính phương thì $x^2-x-1=y^2$ với $y \in \mathbb{Z}$.

Tìm được $x=2$ (loại do $x \neq 2$) và $x=-1$. Thử lại $x=-1$ ta có x^3-3x^2+x+2 có giá trị bằng -1 không phải là số chính phương nên $\Rightarrow x=-1$ (loại).

Vậy $x=2$ hoặc $x=1$ thì x^3-3x^2+x+2 là số chính phương.

Bài 28:

Nếu mệnh đề b) đúng thì A + 51 có chữ số tận cùng là 2 và A – 38 có chữ số tận cùng là 3 nên cả hai số này đều không là số chính phương. Vậy mệnh đề b) sai và các mệnh đề a) và c) đúng.

Giả sử $A+51=m^2; A-38=n^2 (m,n \in N; m>n)$

$\Rightarrow m^2-n^2=89$ hay (m – n)(m + n) = 89

Vì 89 là số nguyên tố nên m + n = 89 và m – n = 1 => m = 45 và n = 44 nên A = 1974.

Bài 29:

Giả sử tồn tại số hữu tỉ n và số nguyên dương m để $n^2+n+503=m^2$.

Vì: n là số hữu tỉ nên tồn tại $a, b \in Z$, $b \neq 0$ sao cho $n=\frac{a}{b}$ và $(a;b)=1$

Ta có: $n^2+n+503=m^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+503=m^2 \Leftrightarrow a^2+ab+503b^2=m^2b^2$

$\Leftrightarrow a^2=-b(a+503b-m^2b^2) \Rightarrow a^2 \vdots b$

Mà $(a;b)=1$ nên $b=1$ hay $b=a \in Z$

Do đó: $n^2+n+503=m^2 \Leftrightarrow 4n^2+4n+2012=4m^2 \Leftrightarrow 4m^2-(2n+1)^2=2011$

$\Leftrightarrow (2m-2n-1)(2m+2n+1)=2011$

Vì: $(2m-2n-1)+(2m-2n-1)=4m>0$.

Ta có các trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* $\begin{cases}2m-2n-1=1\\2m+2n+1=2011\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=503\\n=502\end{cases}$

- *Trường hợp 2:* $\begin{cases}2m-2n-1=2011\\2m+2n+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=503\\n=-503\end{cases}$

Vậy, $n=502$; $n=-503$ thỏa mãn bài toán.

Bài 30:

Giả sử $\begin{cases}n-50=a^2\\n+50=b^2\end{cases}$ với a,b nguyên dương và $a<b$.

Suy ra $b^2-a^2=100 \Leftrightarrow (b-a)(a+b)=2^2.5^2$

Do $b-a<a+b$ và chúng có cùng tính chẵn, lẻ nên $b-a$ và $a+b$ phải là các số chẵn.

Do đó $\begin{cases}b-a=2\\a+b=50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=24\\b=26\end{cases}$

Vậy $n=626$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 31:

Ta có: $\begin{cases}n+24=k^2\\n-65=h^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow k^2-24=h^2+65$

$\Leftrightarrow (k-h)(k+h)=89=1.89$

$\Leftrightarrow \begin{cases}k+h=89\\k-h=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=45\\h=44\end{cases}$

Vậy: $n=45^2-24=2001$

Bài 32:

Ta có : $B = 4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$

$B = 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xy + xz + yz) + y^2z^2$

$B = 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4(x^2 + xy + xz).yz + y^2z^2$

$B = (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2$

Vì x, y, z là số nguyên nên $2x^2 + 2xy + 2xz + yz$ là số nguyên

$\Rightarrow$ B là số chính phương

Bài 33:

$\Rightarrow n^4+n^3+1=(n^2+k)^2=n^4+2kn^2+k^2\ (k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow n^3 - 2kn^2 = k^2 - 1 \Rightarrow n^2(n-2k) = k^2 - 1 \geq 0$

Mà $k^2 - 1 \vdots n^2 \Rightarrow k^2 = 1$ hoặc $n^2 \leq k^2 - 1$

Nếu $k^2 = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow n^2(n-2) = 0 \Rightarrow n = 2$

Thử lại $2^4 + 2^3 + 1 = 5^2$ (thỏa mãn)

Khi $k \neq 1 \Rightarrow k^2 > k^2 - 1 \geq n^2 \Rightarrow k > n$

$\Rightarrow n - 2k < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n-2k) = k^2 - 1 \geq 0$.

Vậy $n = 2$.

Bài 34:

+ Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu. Khi đó $a,b \in N^*$ mà

$\begin{cases} 2(x^2+y^2-3x+2y)-1 = a^2 \\ 5(x^2+y^2+4x+2y+3) = b^2 \end{cases}$, suy ra $a^2 + b^2 = 7\left[(x+1)^2 + (y+1)^2\right]$

Nói cách khác phương trình (1): $A^2 + B^2 = 7(X^2 + Y^2)$ có nghiệm $(X;Y;A;B)$ với $X,Y \in N^*$ và $A,B \in N$. Ta coi $(X;Y;A;B)$ là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện X + Y nhỏ nhất.

+ Từ (1) có $(A^2+B^2) \vdots 7$. Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0.1.2.4 nên $(A^2+B^2) \vdots 7$ khi và chỉ khi $A \vdots 7$ và $B \vdots 7$, dẫn tới biểu diễn $A = 7A_1$, $B = 7B_1$ với $A_1, B_1 \in N^*$. Khi đó (1) trở thành $X^2 + Y^2 = 7(A_1^2 + B_1^2)$.

Lập luận tương tự dẫn đến $X = 7X_1, Y = 7Y_1$ với $X_1, Y_1 \in N^*$.

Bài 35:

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= (n+1)^4 + n^4 + 1 \\ &= \left[(n^2+2n+1)^2 - n^2\right] + \left[(n^4+2n^2+1) - n^2\right] \\ &= (n^2+n+1)(n^2+3n+1) + (n^2+n+1)(n^2-n+1) \\ &= (n^2+n+1)(2n^2+2n+2) \\ &= 2(n^2+n+1)^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $n \in N^*$ nên $(n^2+n+1)^2$ là số chính phương khác 1.

Do đó, từ (*) suy ra $M = (n+1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho một số chính phương khác 1 với mọi số n nguyên dương (đpcm).

Bài 36:

Vì $12n^2+1$ là số lẻ nên để $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên thì $12n^2+1=(2m+1)^2, m\in\mathbb{N}$.

Suy ra, $m(m+1)=3n^2$.

Vì $(m;m+1)=1$ nên xảy ra hai trường hợp $\left[\begin{array}{l} m=3u^2;m+1=v^2 \\ m=v^2;m+1=3u^2 \end{array}\right., u,v\in\mathbb{Z}^*$.

Nếu $m=v^2;m+1=3u^2$ thì $v^2=3u^2-1$ hay v^2 là số chính phương chia 3 dư 2. Điều này không xảy ra vì mọi số chính phương chia 3 dư là 0 hoặc 1. Do đó chỉ xảy ra $m=3u^2;m+1=v^2$.

Ta có $2\sqrt{12n^2+1}+2=2(2m+1)+2=4m+4=4v^2$ là số chính phương (điều phải chứng minh)

Bài 37: Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ ta được $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c}\Leftrightarrow c(a+b)=ab\Leftrightarrow ab-ac-bc=0$.

Từ đó ta được $ab-ca-bc+c^2=c^2\Leftrightarrow (a-c)(b-c)=c^2$.

Gọi $d=(a-c;b-c)$, khi đó ta có $c^2\,\vdots\,d^2$ nên $c\,\vdots\,d$., từ đó dẫn đến $a\,\vdots\,d;b\,\vdots\,d$.

Mà do a, b, c nguyên tố cùng nhau nên ta được $d=1$.

Do đó ước chung lớn nhất của $a-c$ và $b-c$ là 1. Mà ta lại có $(a-c)(b-c)=c^2$ nên suy ra $a-c$ và $b-c$ là các số chính phương.

Đặt $a-c=m^2;b-c=n^2\ (m,n\in N^*)$. Khi đó ta có

$c^2=(a-c)(b-c)=m^2.n^2\Rightarrow c=mn$.

Từ đó ta có $a+b=a-c+b-c+2c=m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$.

Vậy $a+b$ là số chính phương.

Bài 38: Vì a, b là các số tự nhiên lẻ nên ta đặt $a=2m+1;b=2n+1\ (m,n\in\mathrm{N})$.

Khi đó ta có $a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+m+n)+2$

Ta có một số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4

Mà a^2+b^2 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, nên a^2+b^2 không phải là số chính phương

Bài 39:

Gọi m là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{n}^2+3^\mathrm{n}=\mathrm{m}^2$. Khi đó $(\mathrm{m}-\mathrm{n})(\mathrm{m}+\mathrm{n})=3^\mathrm{n}$

Suy ra tồn tại số tự nhiên k sao cho m và x_1, x_2

Vì $m - n < m + n$ nên $k < n - k$, do đó $n - 2k \geq 1$.

Nếu $n - 2k = 1$ thì $2n = (m+n) - (m-n) = 3^{n-k} - 3^k = 3^k\left(3^{n-2k} - 1\right) = 3^k\left(3^1 - 1\right) = 2.3^k$

Vì vậy $n = 3^k = 2k + 1$.

+ Nếu $k = 0$ thì $n = 1$.

+ Nếu $k = 1$ thì $n = 3$.

+ Nếu $k \geq 2$ thì $3^k - 1 = 2\left(3^{k-1} + 3^{k-2} + \cdots + 3 + 1\right) > 2k$ (*).

Nếu $n - 2k > 1$ thì $k \leq n - k - 2$. Do đó $3^k \leq 3^{n-k-2}$.

Suy ra $2n = 3^{n-k} - 3^k \geq 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}\left(3^2 - 1\right) = 8.3^{n-k-2}$.

Áp dụng (*), ta có $3^{n-k-2} \geq 1 + 2(n - k - 2) = 2n - 2k - 3$.

Suy ra $2n \geq 8(2n - 2k - 3) \Leftrightarrow 8k + 12 \geq 7n$.

Mặt khác $n \geq 2k + 2$ nên $7n \geq 14k + 14$, mâu thuẫn.

Vậy $n = 1$ hoặc $n = 3$.

Cách khác. Giả sử $n^2 + 3^n = m^2$ (1), với m là số nguyên dương, $m > n$.

Khi đó $(m-n)(m+n) = 3^n$. Suy ra $m + n = 3^p$, $m - n = 3^q$, với p, q là các số tự nhiên và $p > q$.

Ta có $\dfrac{m+n}{m-n} = 3^{p-q} \Rightarrow 1 + 2\cdot\dfrac{n}{m-n} = 3^{p-q} \Rightarrow \dfrac{n}{m-n} = \dfrac{3^{p-q} - 1}{2} \geq 1 \Rightarrow 2n \geq m$.

Suy ra $n^2 + 3^n \leq 4n^2 \Rightarrow 3^n \leq 3n^2$ (2).

Thử trực tiếp $n = 1, n = 2, n = 3$ thỏa mãn (2), nhưng chỉ có $n = 1, n = 3$ thỏa mãn (1).

Ta chứng minh (2) không đúng với $n \geq 4$. Thật vậy:

+ $n = 4$: $3^4 > 3.4^2$.

+ Giả sử $3^n > 3n^2$ với $n \geq 4$.

+ Suy ra $3^{n+1} = 3.3^n > 3.3n^2 = 3(n+1)^2 + 3(2n^2 - 2n - 1) > 3(n+1)^2$ với $n \geq 4$.

Vậy bài toán có hai nghiệm $n = 1$ hoặc $n = 3$.

Bài 40:

Chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương m^2 $(m \in N)$.

Xét $4a.\overline{abc} = 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac$

$$= (20a+b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a+b)^2 - m^2 = (20a+b+m)(20a+b-m)$$

Tồn tại một trong hai thừa số $20a+b+m, 20a+b-m$ chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$. Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$.

Thật vậy, do $m < b$ (vì $m^2 - b^2 = -4ac < 0$)

Nên: $20a+b-m \le 20a+b+m < 100a+10b+c = \overline{abc}$.

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 41:

Đặt $m^2 + 12 = n^2$ với n là số nguyên. Khi đó ta có $n^2 - m^2 = 12 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 12$.

Do m, n là các số nguyên và $n-m; n+m$ là các số chẵn nên ta có các trường hợp như sau

+ Với $n-m=-6$ và $n+m=-2$ ta được $n=-4; m=2$.

+ Với $n+m=-6$ và $n-m=-2$ ta được $n=-4; m=-2$.

+ Với $n+m=6$ và $n-m=2$ ta được $n=4; m=2$.

+ Với $n+m=2$ và $n-m=6$ ta được $n=4; m=-2$.

Thử lại ta được các giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{-2; 2\}$.

Bài 42:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$.

Khi đó ta có: $x^2 < x^2 + 8y \le x^2 + 8x < x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$

Theo yêu cầu của đề bài $x^2 + 8y$ là số chính phương nên nó sẽ nhận giá trị là một trong các số $(x+1)^2$; $(x+2)^2$; $(x+3)^2$. Ta xét các trường hợp cụ thể như sau:

TH1: $x^2 + 8y = (x+1)^2 \Rightarrow 2x+1 = 8y$. Điều này không thể xảy ra vì $2x+1$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

TH2: $x^2 + 8y = (x+3)^2 \Rightarrow 6x+9 = 8y$. Điều này không thể xảy ra vì $6x+9$ là số lẻ còn $8y$ là số chẵn.

TH3: $x^2 + 8y = (x+2)^2 \Rightarrow 4x+4 = 8y \Rightarrow x = 2y-1$.

Do: $y^2 + 8x$ là số chính phương nên $y^2 + 8(2y-1) = y^2 + 16y - 8$ là số chính phương.

Với y = 1 => x = 1 => Cặp số (x; y) = (1; 1) thỏa mãn yêu cầu.

Xét $y \ge 2$ ta có: $y^2 + 16y - 8 = (y+3)^2 + (10y - 17) > (y+3)^2$ và

$y^2 + 16y - 8 = (y+8)^2 - 72 < (y+8)^2$. Do đó để: $y^2 + 16y - 8$ là số chính phương thì ta phải có: $y^2 + 16y - 8 \in \{(y+7)^2; (y+6)^2; (y+5)^2; (y+4)^2\}$

Giải trực tiếp các trường hợp ta được: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 11 \\ x = 21 \end{cases} \end{array}\right. (TM)$

Vậy các cặp (x; y) = (1; 1) ; (5; 3) ; (3; 5) ; (21; 11) ; (11; 21).

Bài 43:

Do m, n là các số nguyên dương nên ta có $(m+n)^3 < (m+n)^2 + 3m + n < (m+n+2)^2$.

Do đó $(m+n)^3 < A < (m+n+2)^2$. Mà A là số chính phương nên ta được $A = (m+n+1)^2$.

Do đó $(m+n)^2 + 3m + n = (m+n+1)^2 \Rightarrow 3m + n = 2(m+n) + 1 \Rightarrow m = n + 1$.

Từ đó suy ra $n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) = m(n^2 - n + 1) \vdots m$.

Bài 44:

Ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu $p = 2$. khi đó ta có $A = n^4 + 4n$.

Xét $n \ge 0$, khi đó dễ thấy $n^4 \le n^4 + 4n < n^4 + 4n^2 + 4 \Leftrightarrow n^4 \le n^4 + 4n < (n^2 + 2)^2$

Do $A = n^4 + 4n$ là số chính phương nên ta được $A = n^4 + 4n = n^4$ hoặc $A = n^4 + 4n = (n^2 + 1)^2$

Với $n^4 + 4n = n^4 \Leftrightarrow n = 0$.

Với $n^4 + 4n = (n^2 + 1)^2 \Leftrightarrow n^4 + 4n = n^4 + 2n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 - 4n + 1 = 0$, phương trình không có nghiệm nguyên.

Xét $n = -1$ và $n = -2$, thay vào ta được A không phải là số chính phương.

Xét $n < -2$, khi đó dễ thấy $n^4 - 2n^2 + 1 \le n^4 + 4n < n^4 \Leftrightarrow (n^2 - 1)^2 < n^4 + 4n < (n^2)^2$

Do đó $A = n^4 + 4n$ không thể là số chính phương.

+ Trường hợp 1. Nếu $p > 2$, khi đó do p là số nguyên tố nên p là số lẻ.

Do A là số chính phương nên tồn tại số nguyên t để $A = n^4 + 4n^{p-1} = t^2$.

Dễ thấy với $n = 0$ thì A là số chính phương.

Xét $n \neq 0$, khi đó ta có $n^4 + 4n^{p+1} = t^2 \Leftrightarrow 1 + 4n^{p-3} = \left(\frac{t}{n^2}\right)^2$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên $1 + 4n^{p-3}$ là số nguyên dương, do đó $\left(\frac{t}{n^2}\right)^2$ và $4n^{p-3}$ là số chính phương.

Đặt $4n^{p-3} = a^2; \left(\frac{t}{n^2}\right)^2 = b^2 \left(a, b \in Z\right)$ ta có phương trình

$$1 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-a = b+a = 1 \\ b-a = b+a = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1; a = 0 \\ b = -1; a = 0 \end{array}\right.$$

Với $b = 1; a = 0$ ta có $4n^{p-3} = 0; \left(\frac{t}{n^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow n = 0$, điều này vô lý vì $n \neq 0$

Với $b = -1; a = 0$ ta có $4n^{p-3} = 0; \left(\frac{t}{n^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow n = 0$, điều này vô lý vì $n \neq 0$.

Như vậy khi $p > 2$ không tồn tại số nguyên n để A là số chính phương.

Vậy với $n = 0; p = 2$ thì A là một số chính phương.

Bài 45:

Giả sử $m \neq n$. Theo bài ra ta có:

$(m+n)^2 - 1 = (m+n+1)(m+n-1) \vdots (m+n+1)$

$\Rightarrow 2\left(m^2 + n^2\right) - 1 - \left[(m+n)^2 - 1\right] \vdots (m+n+1)$

$\Leftrightarrow \left(2m^2 + 2n^2 - m^2 - 2mn - n^2\right) \vdots (m+n+1)$

$\Leftrightarrow (m-n)^2 \vdots (m+n+1)$

Do $m+n+1$ là số nguyên tố $\Rightarrow m+n+1$ là ước của $m-n$

Mà $m-n < m-n+1$ do đó vô lý

Vậy giả sử sai $\Rightarrow m = n \Rightarrow m.n = m^2$ là số chính phương

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 46:

Ta có: $M = x^4 + (x+1)^3 - 2x^2 - 2x$

$M = x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 - 2x$

$M = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$\Rightarrow 4M = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

+) Ta có:

$$\left(2x^2+x\right)^2=4x^4+4x^3+x^2\le 4x^4+4x^3+x^2+2x^2+\left(x+2\right)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=4M$$

Ta thấy dấu "=" không thể xảy ra nên $\left(2x^2+x\right)^2<4M$ (1)

+) Với $x=0\Rightarrow 4M=4\Leftrightarrow M=1\Rightarrow$ M là số chính phương

Với $x=1\Rightarrow 4M=20\Leftrightarrow M=5\Rightarrow M$ không là số chính phương.

Với $x=2\Rightarrow 4M=124\Rightarrow M=31\Rightarrow$ M không là số chính phương

Với $x\ne\{0;1;2\}$ ta có: $\left[\begin{array}{l}x-1\ge 2\\ x-1\le -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le -1\end{array}\right.\Rightarrow\left(x-1\right)^2\ge 4\Leftrightarrow 4-\left(x-1\right)^2\le 0$

Ta có:

$4M=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4$

$=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1-x^2+2x+3$

$=\left(2x^2+x+1\right)^2-\left(x-1\right)^2+4$

$\Rightarrow 4M\le\left(2x^2+x+1\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\left(2x^2+1\right)^2<4M\le\left(2x^2+x+1\right)^2$. Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4M=\left(2x^2+x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=2\\ x-1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-1\end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x=0;\ x=-1;x=3$

Bài 47:

$n^3-1=\left(n-1\right).\left(n^2+n+1\right)\,\vdots\, p$

$\left(p-1\right)\vdots\, n\Rightarrow p-1\ge n\Rightarrow p\ge n+1$

Vì $p\ge n+1\Rightarrow\left(n-1\right)$ không chia hết cho p

Do đó: $\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right)\vdots\, p\Leftrightarrow\left(n^2+n+1\right)\vdots\, p$

Đặt : $p-1=kn,\quad k\ge 1\Rightarrow p=kn+1$ (*)

$\Rightarrow\left(n^2+n+1\right)\vdots\left(kn+1\right)\Rightarrow kn+1\le n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn\le n^2+n\Leftrightarrow k\le n+1$

$k\left(n^2+n+1\right)-n\left(kn+1\right)\vdots\left(kn+1\right)$

$\Rightarrow\left[\left(k-1\right)n+k\right]\vdots\left(kn+1\right)$

$k \geq 1 \Rightarrow (k-1)n + k > 0$

$\Rightarrow (k-1)n + k \geq kn + 1$

$\Rightarrow k \geq n + 1$

$\Rightarrow k = n + 1 \Rightarrow p = kn + 1 = n^2 + n + 1$

$\Rightarrow n + p = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Vậy $n + p$ là một số chính phương.

Bài 48:

Theo đề ta có $\begin{cases} p + q = a^2 \\ p + 4q = b^2 \\ a; b \in N^* \end{cases}$, suy ra $b^2 - a^2 = 3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 3q$

Từ q là số nguyên tố và $a + b \geq 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 3q \end{cases}$ suy ra $b = a + 1$ và $2a + 1 = 3q$, suy ra q lẻ.

Ta viết $q = 2k + 1$ ($k \in N^*$)

Khi đó $2a = 3q - 1 = 6k + 2$ hay $a = 3k + 1$ và $p = a^2 - q = 9k^2 + 4k = k(9k + 4)$

Do p nguyên tố nên $k = 1$ và $p = 13, q = 3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b - a = 3 \\ b + a = q \end{cases}$, suy ra $b = a + 3$ và $q = 2a + 3$

Lại có $p = a^2 - q = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$. Do p nguyên tố nên $a = 4$ và $p = 5, q = 11$.

+ TH 3: $\begin{cases} b - a = q \\ b + a = 3 \end{cases}$ và $b > a \geq 1$.

Suy ra $b = 2$ *và* $a = 1$ khi đó $q = 1$ không phải số nguyên tố.

Kết luận: ($p;q$) = (5;11), (13;3).

Trình bày cách khác:

Theo đề ta có $\begin{cases} p + q = a^2 \\ p + 4q = b^2 \\ a; b \in N^* \end{cases}$.

Suy ra $b^2 - a^2 = 3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 3q$.

Vì p, q là các số nguyên tố nên $a \geq 2, b \geq 4$. Do đó ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 3q \end{cases}$. Khi đó $b = a + 1$ và $2a + 1 = 3q$. Suy ra q lẻ.

Ta viết $q = 2k + 1$ ($k \in N^*$)

Khi đó $2a = 3q - 1 = 6k + 2$ hay $a = 3k + 1$ và $p = a^2 - q = 9k^2 + 4k = k(9k + 4)$

Do p nguyên tố nên $k = 1$. Suy ra $p = 13$, $q = 3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b - a = 3 \\ b + a = q \end{cases}$. Khi đó $b = a + 3$ và $q = 2a + 3$

Lại có $p = a^2 - q = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$.

Do p nguyên tố nên $a = 4$. Suy ra $p = 5,\ q = 11$.

Vậy $p = 13,\ q = 3$ hoặc $p = 5,\ q = 11$.

Bài 49:

Gọi 2 số tự nhiên liên tiếp đó là $a, a+1 (a \in \mathbb{Z})$, theo đề bài ta có:

$$(a+1)^3 - a^3 = n^2 \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 = n^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 3a + 1 = n^2 \qquad (*)$$

+)Xét TH: $-1 \le a \le 0$ ta có: $\left[\begin{array}{ll} a = 0 \Rightarrow n = 1 = 0^2 + 1^2 \Rightarrow a = 0 & (tm) \\ a = -1 \Rightarrow n = 1 = 0^2 + 1^2 \Rightarrow a = -1 & (tm) \end{array}\right.$

+)Xét TH: $\left[\begin{array}{l} a > 0 \\ a < -1 \end{array}\right. \Rightarrow (2a)^2 < 3a^2 + 3a + 1 < (2a+1)^2$

Vậy ta có n là tổng của hai số chính phương liên tiếp .

Bài 50:

Giả sử $2018 + n^2$ là số chính phương thì $2018 + n^2 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N}^*)$

Suy ra $2018 = m^2 - n^2 \Leftrightarrow 2018 = (m-n)(m+n)$

Như vậy trong hai số $m-n$ và $m+n$ phải có ít nhất một số chẵn (1)

Mà $(m-n)+(m+n) = 2m$ nên suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ là hai số chẵn

$\Rightarrow (m-n)(m+n)$ chia hết cho 4

Mà 2018 không chia hết cho 4 nên điều giả sử là sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2018 + n^2$ là số chính phương.

Bài 51:

Khi $n = 2$ ta có:

$$A = 4m^2 - 4m - 4 = (2m-1)^2 - 5 = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2m - 2k - 1)(2m + 2k - 1) = 5$$

$$TH1: \begin{cases} 2m - 2k - 1 = 1 \\ 2m + 2k - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = 1 \end{cases} (tm)$$

$$TH2: \begin{cases} 2m - 2k - 1 = -1 \\ 2m + 2k - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ k = -1 \end{cases} (ktm)$$

$$TH3: \begin{cases} 2m - 2k - 1 = 5 \\ 2m + 2k - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = -1 \end{cases} (tm)$$

$$TH4: \begin{cases} 2m - 2k - 1 = -5 \\ 2m + 2k - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ k = 1 \end{cases} (ktm)$$

Vậy $m = 2$

Với $n \ge 5, m = 1 \Rightarrow A = n^2 - 2n - 4 = (n-1)^2 - 5 < (n-1)^2$

$A = n^2 - 2n - 4 = (n-2)^2 + 2n - 8 > (n-2)^2$ $(Do\ n \ge 5)$

$\Rightarrow (n-2)^2 < A < (n-1)^2$.Do đó A không thể là số chính phương

Khi $m \ge 2$ ta có:

$A = m^2n^2 - 4m - 2n$

$A = (mn-1)^2 + 2mn - 4m - 2n - 1$

$A = (mn-1)^2 + 2(n-2)(m-1) - 5$

$\Rightarrow A \ge (mn-1)^2 + 2(n-2) - 5 (do\quad m \ge 2 \Rightarrow m - 1 \ge 1)$

$\Rightarrow A > (mn-1)^2 \qquad (Do \quad n \ge 5 \Rightarrow 2(n-2) - 5 \ge 1)$

Lại có: $A = m^2n^2 - 4m - 2n \le (mn)^2$

$\Rightarrow (mn-1)^2 < A < (mn)^2$. Do vậy A không thể là số chính phương

Bài 52:

Từ $2a^2 + a = 3b^2 + b$ ta có $a > b$ và

$\Leftrightarrow 2(a^2 - b^2) + a - b = b^2$

$\Leftrightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2$ (*)

Đặt (a -b; 2a+ 2b +1) = d

$\Rightarrow (a - b) \vdots d$; $(2a + 2b + 1) \vdots d$ và $b \vdots d$

$\Rightarrow \{2a + 2b + 1 - 2(a-b)\} \vdots d \Rightarrow (4b + 1) \vdots d$ mà $b \vdots d$

$\Rightarrow 1 \vdots d$ hay d = 1.

Vậy a-b và 2a +2b +1 nguyên tố cùng nhau, kết hợp với (*) ta có:

a -b và 4a + 4b + 1 đều là số chính phương.

Bài 53: Giả sử $x^2 + 2x + 20 = a^2\ (a \in N, a > 4)$. $\Leftrightarrow a^2 - (x+1)^2 = 19$

$\Leftrightarrow (a - x - 1)(a + x + 1) = 19$.

Vì $(a - x - 1) < (a + x + 1)$ và 19 = 1.19 nên $\begin{cases} a - x - 1 = 1 \\ a + x + 1 = 19 \end{cases}$. Do đó $x = 8$.

Thử lại với x = 8, ta có $x^2 + 2x + 20 = 8^2 + 2.8 + 20 = 10^2$ thỏa mãn.

Bài 54. Ta có: $A = (x^2 - 8x)(x^2 - 8x + 7)$.

Đặt $x^2 - 8x = y$ thì $A = y(y + 7) = y^2 + 7y$

Giả sử $y^2 + 7y = m^2$ (m thuộc N)

$\Rightarrow 4y^2 + 28y + 49 - 4m^2 = 49$

=> (2y + 7 + 2m)(2y + 7 - 2m) = 49 = 49.1 = (-1).(-49) = 7.7 = (-7).(-7).

Ta thấy 2y + 7 + 2m ≥ 2y + 7 - 2m nên ta có 4 trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2y+7+2m=49 \\ 2y+7-2m=1 \end{cases}$, do đó $y=9$.

Suy ra $x\in\{-1;9\}$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2y+7+2m=-1 \\ 2y+7-2m=-49 \end{cases}$, do đó $y=-16$.

Suy ra $x=4$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} 2y+7+2m=7 \\ 2y+7-2m=7 \end{cases}$, do đó $y=0$.

Suy ra $x\in\{0;8\}$.

Trường hợp 4: $\begin{cases} 2y+7+2m=-7 \\ 2y+7-2m=-7 \end{cases}$, do đó $y=-7$.

Suy ra $x\in\{1;7\}$.

Vậy $x\in\{-1;0;1;4;7;8;9\}$.

Bài 55.

$A=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{00...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n}-\underbrace{88...8}_{n}+1.$

Đặt $a=\underbrace{11...1}_{n}$ thì $9a=\underbrace{99...9}_{n}$. Do đó $\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n=9a+1$.

Ta có $A=a.10^n+a-8a+1=a(9a+1)+a-8a+1$

$\Rightarrow A=9a^2-6a+1=(3a-1)^2$.

$\Rightarrow A=\underbrace{33...3}_{n-1}2^2$.

Vậy A là một số chính phương.

Bài 56.

Giả sử $2^x+5^y=k^2$ (k thuộc N)

Nếu x = 0 thì 1 + 5^y = k^2 do đó k chẵn => k^2 chia hết cho 4 nhưng 1+5^y chia 4 dư 2.

Vậy x khác 0, từ $2^x+5^y=k^2$ => k lẻ và k không chia hết cho 5. Xét hai trường hợp.

+) Với $y=0$ thì $2^x+1=k^2=(2n+1)^2$ (vì k lẻ nên $k=2n+1, n\in N$).

$\Rightarrow 2^x=4n(n+1)\Rightarrow n=1$. Khi đó x = 3; y = 0 (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x+5^y=2^3+5^0=9$ là số chính phương.

+) Với $y\neq 0$ và k không chia hết cho 5 $\Rightarrow k^2\equiv \pm1(\bmod 5)$

Từ $2^x+5^y=k^2 \Rightarrow 2^x\equiv \pm1(\bmod 5)\Rightarrow x$ chẵn

Đặt $x=2x_1$ $(x_1\in N)$, ta có

$5^y=(k+2^{x_1})(k-2^{x_1})$

$\Rightarrow \begin{cases} k+2^{x_1}=5^{y_1} \\ k-2^{x_1}=5^{y_2}\end{cases}$ với $y_1+y_2=y$ với $y_1>y_2$, y1, y2 là các số tự nhiên.

$\Rightarrow 2^{x_1+1}=5^{y_2}(5^{y_1-y_2}-1)\Rightarrow 5^{y_2}=1\Rightarrow y_2=0$.

$\Rightarrow y_1=y.$ Khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1$.

Nếu y = 2t$(t\in N)$ thì $2^{x_1+1}=5^{2t}-1=25^t-1\,\vdots\,3$, vô lý

Vậy y lẻ, khi đó $2^{x_1+1}=5^y-1=4(5^{y-1}+5^{y-2}+...+5+1)$.

Nếu $y>1$ thì $5^{y-1}+5^{y-2}+..+1$,lẻ (vô lý).

Nếu $y=1\Rightarrow x_1=1$ khi đó $x=2; y=1$.

Thử lại $2^x+5^y=2^2+5^1=9$ là số chính phương

Vậy $x=2; y=1$ hoặc x = 3, y = 0.

Bài 57.

-Với $n\in\{0;1;2;....;8\}$, bằng cách thử không có giá trị n thỏa mãn đề bài.

- Với $n\geq 9$, đặt $2^8+2^{11}+2^n=t^2$, ta có $t^2=2^8\left(1+2^3+2^{n-8}\right)=2^8(9+2^{n-8})$

$\Rightarrow 9+2^{n-8}$ là số chính phương

- Đặt $9+2^{n-8}=k^2$ $\left(k\in N^*, k>3\right)$

Do đó: $2^{n-8}=(k-3)(k+3)\Leftrightarrow \begin{cases} k+3=2^a \\ k-3=2^b\end{cases}$ (với a > b).

Khi đó: $(k+3)-(k-3)=2^b.\left(2^{a-b}-1\right)$

$\Leftrightarrow 2.3=2^b.\left(2^{a-b}-1\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^b=2 \\ 2^{a-b}-1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1\end{cases}.$

Do đó $n-8=3+1\Leftrightarrow n=12$.

Thử lại $2^8+2^{11}+2^{12}=80^2$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là n = 12.

Bài 58.

Ta có $10 \le n \le 99$ nên $21 \le 2n+1 \le 199$.

Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 25; 49; 81; 121; 169.

Tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84.

Số $3n+1$ bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có 121 là số chính phương.

Vậy $n=40$.

Bài 59.

Ta có: $\begin{cases} A = \dfrac{10^{2m}-1}{9} \\ B = \dfrac{10^{m+1}-1}{9} \\ C = 6.\dfrac{10^m-1}{9} \end{cases}$

Nên: $A+B+C+8 = \dfrac{10^{2m}-1}{9} + \dfrac{10^{m+1}-1}{9} + 6.\dfrac{10^m-1}{9} + 8$

$$= \frac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6.10^m-6+72}{9}$$

$$= \frac{\left(10^m\right)^2+16.10^m+64}{9} = \left(\frac{10^m+8}{3}\right)^2.$$

Bài 60. Vì $n^4+2n^3+2n^2+n+7$ là số chính phương nên:

$n^4+2n^3+2n^2+n+7 = m^2,\ m \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$m^2 = \left(n^2+n\right)^2+n^2+n+7 > \left(n^2+n\right)^2 \Rightarrow m > \left|n^2+n\right| \Rightarrow m \ge \left|n^2+n\right|+1$

$\Rightarrow m \ge \left|n^2+n+1\right| \Rightarrow m^2 \ge \left(n^2+n+1\right)^2$.

Khi đó

$n^4+2n^3+2n^2+n+7 \ge \left(n^2+n+1\right)^2 \Leftrightarrow n^2+n-6 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le n \le 2.$

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $n \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Thử lần lượt từng giá trị ta thu được $n=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 61. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $2\left(a^2+b^2\right) \ge \left(a+b\right)^2$ ta có được $2n^3 \ge n^4$ hay $n \le 2$.

- Với $n=0,$ ta chọn $a=b=0.$
- Với $n=1,$ ta chọn $a=1,\ b=0.$
- Với $n=2,$ ta chọn $a=b=2.$

Vậy các giá trị của n cần tìm là $0;\ 1;\ 2.$

Bài 62. Đặt $\overline{a_1a_2a_3a_4}=a^2$ và $\overline{b_1b_2b_3b_4}=b^2$ với $a,\ b\in\mathbb{N}.$

Giả sử rằng $\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}$. Khi đó $32\le b<a<100$ và
$\overline{a_1a_2a_3a_4}>\overline{b_1b_2b_3b_4}=a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1111c=11.101c$ (do việc đặt
$c=a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=a_4-b_4$).

Do 11; 101 là các số nguyên tố và $a+b<200,\ a-b<100$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=101\\a-b=11c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=(101+11c)\vdots 2\\b=(101-11c)\vdots 2\end{cases}.$$

Vì $b\ge 32$ nên $c\le 3$. Kết hợp với $a+b=101$ (số lẻ) nên c lẻ, nghĩa là $c=1$ hoặc $c=3$.

Điều này dẫn đến $\begin{cases}a=56\\b=45\end{cases};\ \begin{cases}a=67\\b=34\end{cases}.$

Do đó các cặp số chính phương phải tìm là: 3136 và 2025; 4489 và 1156.

Trong trường hợp $a+b=11c$ thì $c=1$ (bị loại).

Bài 63.

Xuất phát từ đồng nhất thức $(2a+1)^2+(2a^2+2a)^2=(2a^2+2a+1)^2$;

Ta chọn $a=1$ và $a_1=3=2a+1,\ a_2=4=2a^2+2a,$ ta được:

$$a_1^2+a_2^2=(2a^2+2a+1)^2=5^2.$$

Chọn $a_3=2(a^2+a)^2+2(a^2+a)=12$ ta có:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=\left(2(a^2+a)+1\right)^2+\left(2(a^2+a)^2+2(a^2+a)\right)^2$$

$$=\left(2(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1\right)^2=13^2.$$

Cứ như vậy ta chọn được 2013 số thỏa mãn.

Bài 64.

Ta có: $A=\sqrt[6]{\overline{4****}}\Rightarrow A^6=\overline{4****}$

A^6 có chữ số tận cùng bên trái là 4

$\Rightarrow 10000 \le A^6 < 100000$

$\Rightarrow 100 \le A^3 < 317$

$\Rightarrow 4 < A < 7$

A là một số tự nhiên $\Rightarrow A = 5$ hoặc $A = 6$

Với $A = 5 \Rightarrow A^6 = 15625$, không thỏa

Với $A = 6 \Rightarrow A^6 = 46656$

Vậy số phải tìm là: $A = \sqrt[6]{46656}$.

Bài 65.

A_n được viết lại như sau: $A_n = 111...1\left(10^{n+1} + 5\right) + 1$ ($n+1$ chữ số 1). Đặt $t = 111...1$ (n chữ số 1). Suy ra $9t + 1 = 10^{n+1}$ $\Rightarrow$ $A = t\left(9t + 1 + 5\right) + 1 = 9t^2 + 6t + 1 = \left(3t + 1\right)^2$. Vậy A_n là một số chính phương.

Bài 66.

Giả sử $2n + 1 = a^2$ và $3n + 1 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}*$. Khi đó $5n + 3 = 4\left(2n + 1\right) - \left(3n + 1\right) = 4a^2 - b^2$ $= \left(2a - b\right)\left(2a + b\right)$.

Do $a^2 \equiv 1\left(mod 2\right)$ nên $a^2 \equiv 1\left(mod\ 4\right)$. Suy ra $n \equiv 0\left(\text{mod}\ 2\right)$ và $b \equiv 1\left(\text{mod}\ 2\right)$. Do đó $2a - b > 1$ và $2a + b > 1$. Vậy $5n + 3$ là hợp số.

Bài 67.

Giả sử tồn tại $y > x \ge 1$ sao cho $xy + x = m^2$, $xy + y = n^2$ với $m, n \in \mathbb{N}*$. Vì $y > x$ nên $xy + x > x^2 \Rightarrow$ $m^2 > x^2$ $\Rightarrow$ $m > x$ $\Rightarrow$ $m \ge x + 1$. Ta có: $y - x = n^2 - m^2$ $\ge$ $\left(m + 1\right)^2 - m^2$ $\Rightarrow$ $y - x > \left(x + 1\right)^2 - x^2$ $\Rightarrow$ $y > 3x + 1$. Lúc này $y \not\in \left(988;1994\right)$. Vậy không tồn tại các số x, y phân biệt thuộc khoảng $\left(988;1994\right)$ sao cho $xy + x$ và $xy + y$ đều là các số chính phương.

Bài 68.

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}*$sao cho ta có $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = k$ là một số hữu tỉ

$\Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \dfrac{2}{k}$ Do đó ta có $\begin{cases} \sqrt{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(k + \dfrac{2}{k}\right) \\ \sqrt{n-2} = \dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{2}{k}\right) \end{cases}$

Ta suy ra $\left(n + 1\right)$ và $\left(n - 1\right)$ là hai số chính phương.

$\begin{cases} n + 1 = p^2 \\ n - 1 = q^2 \end{cases}$ với $p, q \in \mathbb{N}*$

$\Rightarrow p^2 - q^2 = 2\left(*\right)$

$\left(p + q\right)$và $\left(p - q\right)$ cùng tính chất chẵn lẻ

$(*) \Rightarrow (p+q)$ và $(p-q)$ là hai số tự nhiên chẵn.

$\Rightarrow (p+q)(p-q) \vdots 4 \Rightarrow 2 \vdots 4$ vôlí.

Do đó không có số tự nhiên n thỏa yêu cầu của bài toán.

Bài 69.

Ta có:

* $a_1 = 14$ không phải là số chính phương.

* $a_2 = 144 = 12^2$

* $a_3 = 1444 = 38^2$

Ta hãy xét a_n là một số chính phương

$$a_n = k^2, k \in \mathbb{N}^*$$

a_n tận cùng là 4444.

Số dư của phép chia a_n cho 16 bằng số dư của phép chia 4444 cho 16.

$\Rightarrow a_n = 16q + 12$

$\Rightarrow k^2 = 16q + 12$ (*)

Suy ra: $k \vdots 2$ và $k \vdots 4$.

$\Rightarrow k = 2(2t+1) = 4t + 2$

$\Rightarrow k^2 = 16t^2 + 16t + 4 = 16h + 4$ mâu thuẫn $(*)$.

Ta suy ra: a_n với $n > 4$ không phải là số chính phương.

Bài 70.

Chọn 3 số tự nhiên a, b, c nguyên tố cùng nhau và thỏa tính chất.

$a = b + c$

Ta có $n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (b+c)^2(b^2+c^2) + b^2c^2$

$= b^4 + c^4 + 3b^2c^2 + 2b^3c + 2bc^3 = (b+c+bc)^3$.

Do đó n là một số chính phương.

Có vô số bộ ba số tự nhiên nguyên tố cùng nhau mà một trong 3 số bằng tổng hai số kia.

TD: $(2,3,5) = 1$ và $5 = 2 + 3$.

$\Rightarrow n = 6^2 + 15^2 + 10^2 = 19^2$.

Bài 71.

$p(x)$ là một đa thức bậc 4 và hệ số của x^4 là 1 nên $p(x)$ chỉ có thể là bình phương đúng của một tam thức bậc 2 có dạng: $\alpha(x) = x^2 + px + q$

Do đó, ta có : $x^4 + mx^3 + 29x^2 + nx + 4 = (x^2 + px + q)^2$

$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ 2pq = n \\ p^2 + 2q = 29 \\ 2p = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ p = \pm 5 \\ m = \pm 10 \\ n = \pm 20 \end{cases}$$

Vậy $(m, n) = (10, 20), (-10, -20)$.

Bài 72.

Ta có : $a \vdots 6,\ a \neq 0 \Leftrightarrow a = 6k, k \in \mathbb{N}^*$

Suy ra : $1000a = 6000k = 20^2.15k$

1000a là số chính phương khi và chỉ khi $k = 15p^2,\ p \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow a = 90p^2,\ p \in \mathbb{N}^*$

Do đó số tự nhiên a nhỏ nhất phải tìm là : a = 90

2. Ta có : $2002 = 2.7.11.13$

$2002.b$ là số chính phương nên ta có : $b = 2002k^2, k \in \mathbb{N}^*$

b chia hết cho bốn số nguyên tố liên tiếp mà b đã chứa ba thừa số nguyên tố liên tiếp là 7, 11 và 13 nên thừa số nguyên tố thứ tư là 5 hoặc 17, b nhỏ nhất nên ta chọn thừa số nguyên tố thứ 5.

$\Rightarrow b = 2002.25t^2, t \in \mathbb{N}^*$

* Nếu $t^2 = 1 \Rightarrow b = 50050 \Rightarrow b - 1 = 50049 \vdots 9$ không thỏa mãn yêu cầu.

* Nếu $t^2 = 4 \Rightarrow b = 200200 \Rightarrow b - 1 = 200199 \vdots 9$ thỏa mãn.

Vậy số b phải tìm là b =200200.

Bài 73.

Ta có: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Giả sử $a > 0$

Muốn cho $a^2 - b^2$ là một số chính phương, ta chỉ cần chọn

$$\begin{cases} a + b = du^2 \\ a - b = dv^2, u > v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{d(u^2+v^2)}{2} \\ b = \dfrac{d(u^2-v^2)}{2} \end{cases}$$

Trong đó hoặc d chẵn hoặc u và v cùng tính chất chẵn, lẻ $(u > v)$

Lúc đó ta có: $a^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Các nghiệm của phương trình là:

$$a = d(u^2+v^2), b = 2duv, c = d(u^2 - v^2)$$

Vậy $a^2 - b^2$ có thể là một số chính phương.

Bài 74.

Ta có $k = \overline{ab} = 10a + b$ nên $k + ab = (a+b)^2 \Leftrightarrow 10a + b + ab = a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow b^2 + ab - b = 10a - a^2$

$\Leftrightarrow b^2 + (a-1)b = a(10-a)$

Mà $a(10-a) \le 25$ do đó $b^2 + (a-1)b \le 25 \Leftrightarrow b^2 \le 25$ (vì $(a-1)b \ge 0$)

$\Rightarrow b = 0; 2; 3; 4; 5$. Ta xét từng trường hợp và kết luận.

Vậy số k cần tìm là: 91; 13; 63.

Bài 75.

Chuyển về dạng $A = 2017^2(n^4 + n^3 + n^2) = 2017^2 n^2 (n^2 + n + 1)$

Để A chính phương thì n^2+n+1 chính phương.

Giá trị n thỏa mãn là $n=-1$ hoặc $n=0$

Bài 76.

Giả sử $\frac{n-37}{n+43}=\left(\frac{q}{p}\right)^2$ với p,q là hai số nguyên dương và $(p,q)=1$. Ta có

$n-37=k.q^2, n+43=k.q^2$ với k là số nguyên dương

$\Rightarrow k(p-q)(p+q)=80=2^4.5.1$

Trường hợp 1: Trong hai số p,q có một chữ số chẵn, một số lẻ $\Rightarrow p+q$ và $p-q$ đều lẻ.

Từ $(1)\Rightarrow\begin{cases}p+q=5\\p-q=1\\k=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=3\\q=2\Rightarrow n=101\\k=16\end{cases}$

Trường hợp 2: Cả hai số p,q đều lẻ. Đặt $p=2a-1,\ q=2b-1$ với a,b là các số nguyên dương

Từ $(1)\Rightarrow k(a-b)(a+b-1)=20=2^2.5.1$

Ta có $a+b-1>a-b$ và $a+b-1, a-b$ khác tính chẵn lẻ.

Xét các cặp số $(a-b;a+b-1)$ lần lượt $(1;2),(1;4),(1;20),(2;5),(4;5),(5;20)$.

Tính $a,b\Rightarrow p,q,k$ ta được n bằng $38,47,55,82,199,398$

Vậy n bằng $38,47,55,82,199,398$

Bài 77.

Ta có: $\overline{abc}=100a+10b+c=n^2-1$;

$\overline{cba}=100c+10b+a=n^2-4n+4\Rightarrow 99(a-c)=4n-5\Rightarrow 4n-5\,\vdots\,99$ $\quad(*)$

Mặt khác: $100\le n^2-1\le 999\Rightarrow 101\le n^2\le 1000$

$\Rightarrow 11\le n\le 31$(do $n\in\mathbb{Z}$) $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow 4n-5=99\Rightarrow n=26$. Vậy $\overline{abc}=675$

Bài 78.

Giả sử: $n+12=a^2;\ n-11=b^2\ (a,\ b\in\mathbb{N};\ a>b)\Rightarrow a^2-b^2=(n+12)-(n-11)=23$

Hay $(a-b)(a+b)=1.23$. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}a-b=1\\a+b=23\end{cases}(Do: a-b<a+b)\Rightarrow\begin{cases}a=12\\b=11\end{cases}$

Với $\begin{cases} a=12 \\ b=11 \end{cases} \Rightarrow n=132$

Vậy n = 132.

Bài 79.

Đặt: $n^2-14n-256=k^2\left(k\in\mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(n-7\right)^2-k^2=305 \Rightarrow \left(n-7+k\right)\left(n-7-k\right)=305$

Mà: 305 = 1.305 = (- 305)(- 1) = 5.61 = (- 61)(- 5) và $\left(n-7-k\right)\le\left(n-7+k\right)$ nên xét các trường hợp: $\begin{cases} n-7-k=1 \\ n-7+k=305 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=-305 \\ n-7+k=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=5 \\ n-7+k=61 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n-7-k=-61 \\ n-7+k=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n=160 \\ k=152 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=-146 \\ k=152 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=40 \\ k=28 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} n=-26 \\ k=28 \end{cases}$

Vì: $n,\ k\in\mathbb{N} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=40 \\ n=160 \end{array}\right.$ Vậy $\left[\begin{array}{l} n=40 \\ n=160 \end{array}\right.$

Bài 80.

Vì: n là số có 2 chữ số nên $9<n<100 \Rightarrow 18<2n<200$

Mà: 2n là số chính phương chẵn nên $2n=\{36;64;100;\ 144;196\} \Rightarrow n=\{18;32;50;\ 72;98\}$

$\Rightarrow n+4=\{22;36;54;\ 76;102\}$ chỉ thấy $n+4=36$ là số chính phương $\Rightarrow n=32$

Vậy n = 32.

Bài 81.

Giả sử $A=1010n^2+2010\left(n+p\right)+10^{10^{195}}=a^2-b^2\ \left(a,b\in\mathbb{N}\right)$

Do: A chẵn nên $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$ cũng chẵn $\left(a-b\right);\left(a+b\right)$ cùng tính chẵn lẻ.

$\Rightarrow a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)\,\vdots\,4$ tiếp tục ta có: $B=1010n^2+2010\left(n+p\right)\,\vdots\,4$

Từ $B=1010n^2+2010\left(n+p\right)+2\left(n^2+n+p\right)\,\vdots\,2 \Rightarrow \left(n^2+n+p\right)=n\left(n+1\right)+p\,\vdots\,2$

Mà: $n\left(n+1\right)\,\vdots\,2 \Rightarrow p\,\vdots\,2 \Rightarrow p=2$

Với $p=2 \Rightarrow A=4k=\left(k+1\right)^2-\left(k+1\right)^2\ \left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$

Bài 82.

Đặt: $3^x+171=y^2$.

Cách 1: Viết phương trình đã cho về dạng $9.\left(3^{x-2}+19\right)=y^2$ $(x \geq 2)$. Để $y \in \mathbb{Z}$ thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2}+19=z^2$ $\left(z \in \mathbb{Z}^+\right)$ là số chính phương.

+) Nếu $x-2=2k+1$ là số lẻ thì $3^{2k+1}+19=\left(3^{2k+1}+1\right)+18=4.B+18 \,\vdots\, 2$ nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

+) Nếu $x-2=2k$ là số chẵn thì $3^{x-2}+19=z^2 \Leftrightarrow 3^{2k}+19=z^2 \Leftrightarrow \left(z+3^k\right)\left(z-3^k\right)=19$

Vì 19 là số nguyên tố nên $z-3^k<z+3^k$ nên $\begin{cases} z-3^k=1 \\ z+3^k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ 3^k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ k=2 \end{cases}$

Vậy x = 6.

Cách 2: +) Nếu $x=2k+1$ $\left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$ thì VT = 1.3 + 3 = $VT \equiv 1.3+3 \equiv 6(mod 3)$ (vô nghiệm) vì VP là số chính phương. Do đó: $x=2k$ $\left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$ thì để ý rằng $3^k>y-3^k>0$.

Mà: $y-3^k+y+3^k=2y \,\vdots\, 2$ nên 2 số trên cùng tính chẵn lẻ.

Mặt khác: 171 = $\left(y-3^k\right)\left(y+3^k\right)=1.171=3.57=9.19$. Xét từng trường hợp cụ thể ta có kết quả x = 6.

Cách 3: Ta có: $3^x \equiv 1,3(mod 8)$; $y^2 \equiv 0,1,4(mod 8)$. Mà: $3^x+171=y^2 \Rightarrow 3^x \equiv 1(mod 8)$. Do đó: x có dạng 2k $(k \in \mathbb{N})$.

Phương trình trở thành $A=\left(3^k\right)^2+171=y^2$ với k = 0, 1, 2 thì phương trình vô nghiệm nên nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó phải ≥ 3. Do đó theo nguyên lý kẹp được ta có: $\left[\left(3^k\right)^2+3\right]^2 \geq a>\left(3^k\right)^2$.

Khi đó: $A=\left[\left(3^k\right)^2+3\right]^2$ hoặc $A=\left[\left(3^k\right)^2+2\right]^2$

Giải từng trường hợp ra ta được k = 3 $\Rightarrow x=6 \Rightarrow y=30$. Vậy x = 6.

Cách 4: Vì: $3^x \,\vdots\, 3; 171 \,\vdots\, 3 \Rightarrow y \,\vdots\, 3$. Đặt y = 3k $\left(k \in \mathbb{Z}^+, k \neq 1\right)$.

Khi đó: $3^x+171=9k^2$. Vì: $171 \,\vdots\, 9; 9k^2 \,\vdots\, 9 \Rightarrow 3^x \,\vdots\, 9 \Rightarrow x=2h$ $\left(h \in \mathbb{N}^*\right)$

Khi đó: $9^{h-1}+19=k^2 \Leftrightarrow k^2-\left(3^{h-1}\right)^2=19 \Leftrightarrow \left(k+3^{h-1}\right)\left(k-3^{h-1}\right)=19$.

Để ý rằng: $0<k-3^{h-1}<k+3^{h-1}$ và $k-3^{h-1}+k+3^{h-1}=2k \,\vdots\, 2$ nên hai số này cùng tính chẵn lẻ.

Mặt khác: $\left(k+3^{h-1}\right)\left(k-3^{h-1}\right)=1.19 \Rightarrow \begin{cases} k-3^{h-1}=1 \\ k+3^{h-1}=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=10 \\ h=3 \end{cases} \Rightarrow x=6$. Vậy x = 6.

Bài 83.

Giả sử $5^x + 12^x = y^2$. Nhận xét x = 1 không thỏa mãn phương trình. Khi đó $x \ge 2$. Từ phương trình ta thấy y lẻ.

Vì: $12^x \vdots 8$, $y^2 : 8$ dư 1 với y lẻ nên $5^x \equiv 1(mod 8)$ suy ra x chẵn.

Đặt: $x = 2k\ (k \in \mathbb{N}^*)$ ta có phương trình: $5^{2k} = (y - 12^k)(y + 12^k)$.

Do 5 là số nguyên tố nên tồn tại $m \in \mathbb{N}$, $m < k$ sao cho $\begin{cases} y + 12^k = 5^{2k-m} \\ y - 12^k = 5^m \end{cases}$

Suy ra $2.12^k = 5^m(5^{2k-2m} - 1)$. Do 2, 12 đều nguyên tố cùng nhau với 5 mà: $2.12^k \vdots 5^m$ nên m = 0 và ta được y = $12^k + 1$.

Thay vào phương trình ta được: $2.12^k = 25^k - 1\ (*)$ hay $k \ge 2$ thì :

$25^k - 1 > 24^k = 2^k.12^k > 2.12^k$ (Loại)

Với k = 1 (TM) $\Rightarrow x = 2, y = 13$. Vậy phương trình có nghiệm tự nhiên x = 2.

Bài 84.

Ta có: $A = (n+2)^2(4n^2 + 6n - 3)$.

TH1: $A = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = \dfrac{-3 \pm \sqrt{21}}{4} \end{array}\right.$

TH2: $A \ne 0$ và A là số chính phương $\Rightarrow (4n^2 + 6n - 3)$ là số chính phương.

$\Leftrightarrow 4n^2 + 6n - 3 = k^2\ (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (4n+3)^2 - (2k)^2 = 21 \Leftrightarrow (4n+3+2k)(4n+3-2k) = 21.$

Ta thấy: $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $4n+3+2k$ và $4n+3-2k$ là các ước của 21.

+) $4n+3-2k \le 4n+3+2k$ với $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ Do đó ta có: $\begin{cases} 4n+3-2k = 1 \\ 4n+3+2k = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = 2 \end{cases}$

hoặc: $\begin{cases} 4n+3-2k = 3 \\ 4n+3+2k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 4n+3-2k = -21 \\ 4n+3+2k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ n = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$ hoặc

$\begin{cases} 4n+3-2k = -7 \\ 4n+3+2k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = -2 \end{cases}$

Vậy $n = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 85.

Đặt: $M = k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ ta có: $M = (k^4 - 2k^2 + 1) - 8k(k^2 - 2k + 1) + 9k^2 - 18k + 9$

$\Rightarrow M=(k-1)^2\left((k-3)^2+1\right)$. M là số chính phương khi và chỉ khi: $(k-1)^2=0$ hoặc $(k-3)^2+1$ là số chính phương.

TH1: $(k-1)^2=0 \Leftrightarrow k=1$

TH2: $(k-3)^2+1$ là số chính phương

Đặt: $(k-3)^2+1=m^2\,(m\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow m^2-(k-3)^2=1 \Leftrightarrow (m-k+3)(m+k-3)=1$

Vì: $m,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow m-k+3\in\mathbb{Z},\ m+k-3\in\mathbb{Z}$ nên: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-k+3=1\\ m+k-3=1\end{cases}\\ \begin{cases}m-k+3=-1\\ m+k-3=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1,k=3\\ m=-1,k=3\end{array}\right. \Rightarrow k=3.$

Vậy $\left[\begin{array}{l}k=1\\ k=3\end{array}\right.$ thì $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Bài 86.

Ta có: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$ Giả sử $(n+1)(2n+1)=6k^2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ (1)

Do $(2n+1)$ lẻ nên $(n+1)$ chẵn $\Rightarrow n$ lẻ. Đặt $n=2m+1$ $\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$

Thay vào (1) ta có: $(m+1)(4m+3)=3k^2$. Do: $(m+1,\ 4m+3)=1,$ $4m+3$ không là số chính phương nên ta có: $\begin{cases}m+1=a^2\\ 4m+3=3b^2\end{cases}$ $\left(a,b\in\mathbb{N}^*;ab=k\right)$ Từ đó ta có: $4a^2-3b^2=1$

$\Leftrightarrow(2a-1)(2a+1)=3b^2$. Ta lại có $(2a+1,\ 2a-1)=1$ nên có 2 khả năng:

(I) $\begin{cases}2a-1=a_1^2\\ 2a+1=b_1^2\end{cases}$ $\left(a_1,b_1\in\mathbb{N}^*\right)$ nên ta suy ra $b_1^2=3a_1^2+2$ (Vô lý vì số chính phương chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1).

(II) $\begin{cases}2a-1=a_2^2\\ 2a+1=3b_2^2\end{cases}$ $\left(a_2,b_2\in\mathbb{N}^*\right)$ nên ta suy ra $3b_2^2-a_2^2=2$ suy ra a_2 lẻ và không chia hết cho 3.

Dễ thấy $a_2=5\Rightarrow n=337$ là số nguyên dương bé nhất thỏa mãn bài toán.

Khi đó: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{(337+1)(2.337+1)}{6}=195^2$

Bài 87:

Ta có: n = 0 thỏa mãn bài toán.

Xét n > 0, nếu cả 2 số $9n+16$ và $16n+9$ đều là số chính phương thì số $A_n=(9n+16)(16n+9)=(12n)^2+(9^2+16^2)n+12^2$ cũng là số chính phương.

Mặt khác: $(12n+12)^2<(12n)^2+(9^2+16^2)n+12^2<(12n+15)^2$ nên ta có: $\left[\begin{array}{l} A_n=(12n+13)^2 \\ A_n=(12n+14)^2 \end{array}\right.$

Từ đó thay vào giải ra được: $\left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=52 \end{array}\right.$

Vậy có 3 giá trị của n thỏa mãn: $n=\{0,1,52\}$

Bài 88:

Gọi số phải tìm là: $\overline{ab}$ $(a,b\in\mathbb{N},1\le a,b\le 9)$ ta có hệ: $\begin{cases} \overline{ab}=4\overline{ba}+15 \quad (1) \\ \overline{ab}-9=a^2+b^2\,(2) \end{cases}$

Từ (1) ta thấy nếu $b\ge 2\Rightarrow 4\overline{ba}+15\ge 4.21+15\Rightarrow \overline{ab}\ge 99\Rightarrow \overline{ab}=99\Rightarrow a=b=9(KTM)$

Vậy b = 1 thay b = 1 vào (2) ta được: $\overline{a1}-9=a^2+1^2\Leftrightarrow 10a+1-9=a^2+1\Leftrightarrow a^2-10a+9=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=9 \end{array}\right.$

Với a = 1 $\Rightarrow a=b(KTM)$

Với a = 9 $\Rightarrow ab=91\,(TM:91=4.19+15)$

Vậy số phải tìm là 91.

Bài 89.

Gọi là tổng các chữ số của s thì s và t_s có cùng số dư khi chia cho 9, nghĩa là $s=t_s+9a$ với a là số tự nhiên. Do đó số A được viết bơie 1, 2, 3, …, 2007 nên

$t_A=t_1+...+t_{2007}=1+2+...+2007-9k=B-9k \quad (k\in N^*) \qquad (1)$

Ta có tổng 9 số tự nhiên liên tiếp là $a+(a+1)+(a+2)+...+(a+8)=9(a+4)\vdots 9$ nên tổng của $2007=9.223$ số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho 9, nghĩa là

$B=1+2+3+...+2007=9h \quad (h\in N^*) \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $t_A=9(h-k)\Rightarrow A=9m \quad (m\in N^*)$

Mà ta có $(9u+1)(9v+1)=9(9uv+u+v)+1$ với $u,v\in N^*$

Khi đó $C=2008^{2007}+2009=(9.223+1)^{2007}+9.223+2=9n+3 \quad (n\in N^*) \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra số $A+C=9(m+n)+3$ (5). Nếu $A+C$ là số chính phương mà chia hết cho số nguyên tố 3 thì nó phải chia hết cho 9, nhưng điều này mâu thuẫn với (5). Vậy $A+C$ không là số chính phương.

Bài 90.

Với $x=0$ hoặc $y=0$ ta có $1-xy=1^2$ (đpcm)

Với $x\neq 0, y\neq 0, x, y\in Q$, ta có các cách sau:

Cách 1: Bình phương hai vế đẳng thức (1) ta được:

$x^{10}+y^{10}+2x^5y^5=4x^4y^4 \Rightarrow x^{10}+y^{10}-2x^5y^5=4x^4y^4-4x^5y^5$

$\left(x^5-y^5\right)^2=4x^4y^4(1-xy)\Rightarrow 1-xy=\left(\dfrac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2$ (đpcm)

Cách 2: Bình phương hai lần (1) $x^{10}+y^{10}+2x^5y^5=4x^4y^4$

$x^{10}+y^{10}=2x^4y^4(2-xy)\Rightarrow x^{20}+y^{20}+2x^{10}y^{10}=4x^8y^8\left(4-4xy+x^2y^2\right)$

$\Rightarrow x^{20}+y^{20}+2x^{10}y^{10}=16x^8y^8-16x^9y^9+4x^{10}y^{10}$

$\Rightarrow x^{20}+y^{20}-2x^{10}y^{10}=16x^8y^8(1-xy)\Rightarrow\left(x^{10}-y^{10}\right)^2=\left(4x^4y^4\right)^2(1-xy)$

$1-xy=\left(\dfrac{x^{10}-y^{10}}{4x^4y^4}\right)^2$ (đpcm)

Cách 3: Chia cả hai vế của (1) cho x^4 ta được $\dfrac{x^5}{x^4}+\dfrac{y^5}{x^4}=2\dfrac{y^2}{x^2}$

$\Rightarrow x+\dfrac{y^5}{x^4}=2\dfrac{y^2}{x^2}\Rightarrow xy+\dfrac{y^6}{x^4}=2\dfrac{y^3}{x^2}$ (nhân cả hai vế với y)

$\Rightarrow \dfrac{y^6}{x^4}-2\dfrac{y^3}{x^2}+1=1-xy\Rightarrow\left(\dfrac{y^3}{x^2}-1\right)=1-xy$ (đpcm)

Cách 4: $(1)\Rightarrow\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{y^3}{x^2}=2\Rightarrow\dfrac{x^6}{y^4}+\dfrac{y^6}{x^4}+2xy=4\Rightarrow\dfrac{x^6}{y^4}+\dfrac{y^6}{x^4}-2xy=4-4xy$

$\Rightarrow\left(\dfrac{x^3}{y^2}-\dfrac{y^3}{x^2}\right)^2=4(1-xy)\Rightarrow 1-xy=\left(\dfrac{\dfrac{x^3}{y^2}-\dfrac{y^3}{x^2}}{2}\right)^2$

Cách 5: Đặt $x=ky$ thay vào (1) và biến đổi đồng nhất.

Ta có $(ky)^5+y^5=2(ky)^2y^2$

Hay $k^5y^5+y^5=2.k^2.y^2.y^2$. Hay $k^5y^5+y^5=2.k^2.y^4$. Hay $y^4[(k^5y+y)-2k^2]=0$.

Với $x \neq 0, y \neq 0, x, y \in Q$ ta có: $(k^5 y + y) - 2k^2 = 0$.

Hay $y = \dfrac{2k^2}{k^5+1}$ và $x = k.\dfrac{2k^2}{k^5+1} = \dfrac{2k^3}{k^5+1}$

Lúc này ta có: $1 - xy = 1 - \dfrac{2k^2}{k^5+1}.\dfrac{2k^3}{k^5+1} = \dfrac{(k^5+1)^2 - 4k^5}{(k+1)^5} = \dfrac{(k-1)^5}{(k+1)^5} = \left[\dfrac{k-1}{k+1}\right]^5$ bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 91. * Nếu $m = n$ thì ta có ngay đpcm.

* Nếu m khác n: Đặt $\begin{cases} m+n = 2x \\ m-n = 2y \end{cases} (x, y \in N^*; x > 0; y \neq 0)$

Khi đó $\begin{cases} m = x+y \\ n = x-y \end{cases}$ và từ $x + y > 0; x - y > 0$ suy ra $x > |y|$

Do $n^2 - 1 \vdots |m^2 + 1 - n^2| \Rightarrow m^2 \vdots |m^2 + 1 - n^2| \Rightarrow m^2 = k(m^2 + 1 - n^2)$ (1), $k \in N$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x+y)^2 = k(4xy+1) \Leftrightarrow x^2 - 2(2k-1)xy + (y^2 - k) = 0$ (*)

Phương trình (*) có một nghiệm là x nên có một nghiệm nữa là x_1.

Ta có: $\begin{cases} x + x_1 = 2(2k-1) \\ xx_1 = y^2 - k \end{cases} \Rightarrow x_1 \in N$

- Nếu $x_1 > 0$ thì $(x_1; y)$ là cặp nghiệm thoả mãn (*), suy ra $x_1 > |y|$

Khi đó $y^2 - k = xx_1 > |y^2| \Rightarrow k < 0 \Rightarrow 0 < x + x_1 = 2(2k-1) < 0$, mâu thuẫn.

- Nếu $x_1 < 0$ thì $xx_1 = y^2 - k < 0 \Rightarrow k > y^2 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow 4xy + 1 > 0 \Rightarrow y > 0$

Ta có: $k = x_1^2 - 2(2k-1)x_1 y + y^2 = x_1^2 + 2(2k-1)|x_1|y + y^2$.

Suy ra $k > 2(2k+1)|x_1|y \geq 2(2k-1) > k$, mâu thuẫn.

Vậy $x_1 = 0$. Khi đó $k = y^2$ và $\dfrac{m^2}{k} = m^2 + 1 - n^2$ là số chính phương.

Do đó $|m^2 + 1 - n^2|$ là số chính phương (đpcm).

Bài 92. +) Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Đirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.

+) Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ta được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2.

Khi đó ta có: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a - b$ là số chẵn cũng là số chẵn $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \vdots 4$ (đpcm).

Bài 93.

Ta có $n^5+1999n+2017=n^5-n+2000n+2015+2\ (n\in N)$

Ta thấy: $n^5+1999n+2017=n^5-n+2000n+2015+2$

$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+2)+2000n+2015+2\ (n\in N)$ chia 5 dư 2.

Ta nhận xét rằng không có số chính phương nào chia 5 dư 2.

Vậy $n^5+1999n+2017\ (n\in N)$ không phải là số chính phương.

Bài 94.

Vì n là số nguyên dương nên $n^2+n+3>3$.

Gọi r là số dư khi chia n cho $3, r\in\{0;1;2\}$.

Nếu $r=0$ hoặc $r=2$ thì $n^2+n+3\vdots 3$. Mâu thuẫn với giả thiết n^2+n+3 là số nguyên tố.

Do đó $r=1$ hay n chia 3 dư 1. Khi đó $7n^2+6n+2017$ chia 3 dư 2.

Mà một số chính phương có số dư khi chia cho 3 là 0 hoặc 1.

Nên $7n^2+6n+2017$ không phải số chính phương.

Bài 95.

Từ: $2x^2+x=3y^2+y$ (1)

$\Rightarrow 2x^2-2y^2+x-y=y^2 \Rightarrow (x-y)(2x+2y+1)=y^2$ (2)

Mặt khác từ (1) ta có: $3x^2-3y^2+x-y=x^2$ hay $(x-y)(3x+3y+1)=x^2$

$\Rightarrow (x-y)^2(2x+2y+1)(3x+3y+1)=x^2y^2 \Rightarrow (2x+2y+1)(3x+3y+1)$ là số chính phương (3).

Gọi $(2x+2y+1;3x+3y+1)=d \Rightarrow (2x+2y+1)\vdots d;(3x+3y+1)\vdots d$

$\Rightarrow (3x+3y+1)-(2x+2y+1)=(x+y)\vdots d$

$\Rightarrow 2(x+y)\vdots d \Rightarrow (2x+2y+1)-2(x+y)=1\vdots \mathrm{d}$ nên $d=1$

$\Rightarrow (2x+2y+1;3x+3y+1)=1$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow 2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là số chính phương.

Lại có từ (2) $\Rightarrow (x-y)(2x+2y+1)$ là số chính phương suy ra $x-y$ cũng là số chính phương. Vậy $2x^2+x=3y^2+y$ thì $x-y;2x+2y+1$ và $3x+3y+1$ đều là các số chính phương.

Bài 96. Đặt $B=(1^2+2^2+...+2017^2)=(2^2+4^2+...+2016^2)+(1^2+3^2+...+2017^2)$

Ta thấy số các số hạng của B là số lẻ là $(2017-1):2+1=1009$. Do đó B là số lẻ. Suy ra A chia hết cho 2 và không chia hết cho 4. Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 97.

Nếu $a<b$ thì vế trái của (1) nhỏ hơn vế phải nên chỉ xét $a\ge b$. Với $a=b$ thì từ (1) suy ra $a=b=c=0$, lúc đó $a-b=0$ là số chính phương (*).

Với $a>b$, biến đổi (1) về dạng:

$$b^2=2016(a^2-b^2)+(a-b)\Rightarrow b^2=(a-b)(2016a+2016b+1)\ (2)$$

Đặt $d=(a;b)$ thì có $a=md, b=nd; (m;n)=1, m-n=t>0$

Giả sử $(t;n)=u\Rightarrow n\,\vdots\, u, t\,\vdots\, u\Rightarrow m\,\vdots\, u\Rightarrow u=1$ nghĩa là $(t;u)=1$

Thay $b=nd, a-b-td$ vào (2) có:

$$n^2d=t(2016dt+4032dn+1)\Rightarrow n^2d=2016dt^2+4032dnt+t\ (3).$$

Từ (3) ta có: $n^2d\,\vdots\, t, (t,n)=1\Rightarrow d\,\vdots\, t$. Mặt khác $d=t$. Lúc đó $a-b=td=d^2$ là số chính phương (**). Từ (*) và (**) có điều phải chứng minh. Vậy $a-b$ là một số chính phương.

Bài 98.

Trước hết ta chứng minh rằng $(x-z);(y-z)$ nguyên tố cùng nhau. Giả sử $d=(x-z;y-z)$ ta có: $x-z\,\vdots\, d; y-z\,\vdots\, d\Rightarrow (x-z)(y-z)\,\vdots\, d^2$

Từ giả thiết suy ra $z^2\,\vdots\, d^2\Rightarrow z\,\vdots\, d$. Khi đó x và y chia hết cho d.

Vì $(x,y)=1\Rightarrow d=1$. Vậy $(x-z);(y-z)$ cùng là số chính phương.

Đặt $k^2=x-z; m^2=y-z\ (k\in N^*)$

Ta có: $(x-z)(y-z)=z^2=k^2m^2\Rightarrow z=km$

Khi đó $x+y=k^2+m^2+2km=(k+m)^2$. Mặt khác từ $(x-z)(y-z)=z^2$ suy ra $xy=z(x+y)\Rightarrow xyz=z^2(k+m)^2=\left[z(m+k)^2\right]$ là số chính phương.

Vậy $2017^2xyz=\left[2017z(k+m)^2\right]$ là số chính phương.

Bài 99:

Ta có $\overline{xxyy}=11.\overline{x0y}$. Mà ta thấy rằng 11 là số nguyên tố và $\overline{xxyy}$ là một số chính phương nên suy ra $\overline{x0y}\,\vdots\,11\Rightarrow 99x+x+y\,\vdots\,11\Rightarrow x+y\,\vdots\,11$.

Theo điều kiện đề bài ta có:

$0<x+y\le 18\Leftarrow x+y=11\Rightarrow \overline{x0y}=99x+11\Rightarrow \overline{xxyy}=121(9x+1)$.

Từ đó suy ra $9x+1$ là số chính phương suy ra $x=7$ (0<x<10) $\Rightarrow y=4$

Vậy số điện thoại đó là 827744.

Bài 100:

Với mọi số tự nhiên *a* thì a^2 khi chia cho 8 chỉ có các số dư là 0; 1; 4.
Số 2019 chia 8 dư 3; 2020 chia 8 dư 4.

Suy ra $2019^n \equiv 3^n \pmod 8$

- Nếu n chẵn thì $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k} \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow C \equiv 5 \pmod 8$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

- Nếu n lẻ thì $n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k+1} \equiv 3.3^{2k} \equiv 3 \pmod 8$

$\Rightarrow C \equiv 7 \pmod 8$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

KL: Không tồn tại n thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 101:

Đặt $p^3 - 4p + 9 = t^2 (t \in N)$

Biến đổi thành $p\left(p^2-4\right) = (t-3)(t+3) \quad (1) \Rightarrow p \mid (t-3) \vee p \mid (t+3)$

Trường hợp 1: Nếu $p \mid t-3$

Đặt $t - 3 = pk (k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p\left(p^2-4\right) = pk(pk+6) \Leftrightarrow p^2 - pk^2 - 6k - 4 = 0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta = k^4 + 4(6k+4) = k^4 + 24k + 16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k > 3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2\right)^2 < k^4 + 24k + 16 < \left(k^2+4\right)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4 + 24k + 16 = \left(k^2+1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 24k - 15 = 0$ (loại)

$k^4 + 24k + 16 = \left(k^2+2\right)^2 \Leftrightarrow k^2 - 6k - 3 = 0$ (loại)

$k^2 + 24k + 16 = \left(k^2+3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2 - 24k - 7 = 0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp được $k = 3$ thỏa mãn.

Từ đó ta có $t = 36; p = 11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p\left(p^2-4\right) = pk(t+3) \Leftrightarrow k(t+3) = p^2 - 4 \Rightarrow p^2 = kt + 3k + 4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2 = p^2k^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 9 = k^2(kt + 3k + 4)$

$\Leftrightarrow t^2 - t\left(6 + k^3\right) + 9 - 3k^3 - 4k^2 = 0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.

Sau đó cách làm giống như trên.

Trường hợp 2: Nếu $p\,|\,t+3$

Đặt $t+3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6)\Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2\Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2\Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2\Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k\le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.

Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Bài 102:

Ta có $4B=1.2.3.4+2.3.4.(5-1)+3.4.5.(6-2)+...+n.(n-1).(n-2).\left[(n+3)-(n-1)\right]$

$=n.(n+1).(n+2).(n+3)=n^4+6n^3+11n^2+6n<n^4+6n^3+11n^2+6n+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$

Mặt khác

$n^4+6n^3+11n^2+6n>n^4+6n^3+9n^2=\left(n^2+3n\right)^2\Rightarrow\left(n^2+3n\right)^2<4B<\left(n^2+3n+1\right)^2$

Do đó B không phải là số chính phương.

Bài 103:

Ta có: $p^2+a^2=b^2\Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b+a=b-a=p$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$.

Khi đó $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a=(p-1)(p+1)$.

Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)

Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).

Xét $2(p + a + 1) = 2\left(p+\frac{p^2-1}{2}+1\right) = 2p+p^2+1 = (p+1)^2$ là số chính phương.

Bài 104:

Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau :

Các nhóm $n_1, n_2, ..., n_{310}$ mỗi nhóm gồm 2 số hạng $(k, 625-k)$ tức là mỗi nhóm có hai số hạng có tổng bằng 625 sao cho $k \neq 49, k \neq 225$

Nhóm 311 gồm 5 số chính phương $\{49, 225, 400, 576; 625\}$

Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm n_{311}, như vậy 311 số này thuộc 310 nhóm còn lại thì theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất một trong hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625. Mẫu thuẫn với giả thiết. Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm n_{311}. Số này là số chính phương.

Bài 105:

Do $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương nên $\sqrt{n^2 + 2n + 18}$ là số tự nhiên.

Đặt $\sqrt{n^2 + 2n + 18} = k \quad (k \in \mathbb{N})$

$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 18 = k^2 \Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 17$

Do k, n đều là số tự nhiên nên $k + n + 1 > k - n - 1$

Xét $\begin{cases} k + n + 1 = 17 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 9 \\ n = 7 \end{cases} \Rightarrow n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9 = 81 = 9^2\,(tm)$

Vậy $n = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 106:

Ta có $\overline{ab} - \overline{ba} = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 9(a - b) = k^2$

Do đó $a - b$ là một số chính phương

Ta lại có $a - b \leq 9, a \neq b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 1 \\ a - b = 4 \\ a - b = 9 \end{array}\right.$

Với $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow$ có 9 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98

Với $a - b = 4 \Rightarrow a = b + 4 \Rightarrow$ có 6 số thỏa mãn: 40; 51; 62; 73; 84; 95.

Với $a - b = 9 \Rightarrow a = b + 9 \Rightarrow$ có 1 số thỏa mãn: 90

Vậy có tất cả 16 số thỏa mãn: 10; 21; 32; 43; 54; 65; 76; 87;98; 40; 51; 62; 73; 84; 95; 90.

Bài 107:

Chú ý đến biến đổi $\underbrace{111...1}_{n\,sc1} = \frac{10^n - 1}{9}$ ta đi phân tích các số a và b về các lũy thừa của 10. Ta có $a = \underbrace{111...1}_{2017\,sc1} = \frac{10^{2017} - 1}{9}$ và $b = 1\underbrace{000...0}_{2016\,cs0}5 = 1\underbrace{000...0}_{2017\,cs0} + 5 = 10^n + 5$.

Khi đó ta được

$$M=ab+1=\frac{10^{2017}-1}{9}.\left(10^{n}+5\right)+1=\frac{\left(10^{2017}\right)^{2}+4.10^{2017}-5}{9}+1=\left(\frac{10^{2017}+2}{3}\right)^{2}.$$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{10^{2017}+2}{3}\in N$ ta ta có điều phải chứng minh.

Tuy nhiên $\frac{10^{2017}+2}{3}\in N$ hiển nhiên đúng do $10^{2017}+2\,\vdots\,3$. Vậy $M=ab+1$ là số chính phương.

• **Chú ý.** Với dạng toán chứng minh số chính phương như trên ta chú ý đến phép biến đổi:

$$9=10^{1}-1;99=10^{2}-1;999=10^{3}-1;...;\underbrace{999...9}_{n\,cs\,9}=10^{n}-1$$

Chương III

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

Bài 1. a) b) Đáp số: p = 3. Xét p dưới các dạng: p = 3k, p = 3k + 1, p = 3k + 2 $(k\in N)$.

c) Đáp số: p = 5. Xét p dưới các dạng : p = 5k, p = 5k + 1, p = 5k + 2,

p = 5k + 3, p = 5k + 4 $(k\in N)$.

Bài 2. n = 3.

Bài 3. Số nguyên tố lớn hơn 3 có dạng 6n +1, 6n + 5. Do đó 3 số a, a + k, a + 2k phải có ít nhất 2 số có cùng một dạng, hiệu là k hoặc 2k chia hết cho 6, suy ra k chia hết cho 3.

Bài 4. Ta có $(p-1)p(p+1)\,\vdots\,3$ mà (p,3) = 1 nên

$(p-1)(p+1)\,\vdots\,3$ (1).

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, p - 1 và p + 1 là hai số chẵn liên tiếp. Trong hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên tích chúng chia hết cho 8 (2).

Từ (1) và (2) suy ra (p -1)(p + 1) chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau 3 và 8.

Vậy $(p-1)(p+1)\,\vdots\,24$.

Bài 5. Ta có p = 42k + r = 2. 3. 7k + r (k, r $\in$N, 0 < r < 42). Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2, 3, 7.

Các hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39.

Loại đi các số chia hết cho 3, cho 7, chỉ còn 25. Vậy r = 25.

Bài 6. Ta có p = 30k + r = 2. 3. 5k + r (k,r $\in$N,0 < r < 30). Vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 2, 3, 5.

Các hợp số nhỏ hơn 30 và không chia hết cho 2 là 9, 15, 21, 25, 27.

Loại đi các số chia hết cho 3, 5 thì không còn số nào nữa. Vậy r không phải là hợp số.

r không phải là hợp số cũng không phải là số nguyên tố, suy ra r =1.

Bài 7. $\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{n+1}\underbrace{0...0}_{n}+\underbrace{11...1}_{n+1}=\underbrace{11...1}_{n+1}(10^n+1)$.

suy ra đpcm.

Bài 8. $p=1010...101=\dfrac{(10^{n+1}-1)(10^{n+1}+1)}{9.11}$.

n =1: p = 101 là số nguyên tố.

n > 1: p là hợp số.

Bài 9.Tất cả đều là hợp số.

a) $A=\underbrace{11...1}_{2001}=\underbrace{1+1+...+1}_{2001}\vdots 3$.

b) $B=\underbrace{11...1}_{2000}\vdots 11$.

c) $C=1010101\vdots 101$.

d) $D=1112111=1111000+1111\vdots 1111$.

e) $E\vdots 3$ vì $1!+2!=3\vdots 3$, còn $3!+4!+...+100!$ cũng chia hết cho 3.

g) G = 3. 5. 7. 9 - 28 chia hết cho 7.

h) H = 311141111 = 311110000 + 31111 chia hết cho 31111.

Bài 10. Chứng minh $A\vdots 7; B\vdots 11; C\vdots 29$.

Bài 11. 240 = 2^4. 3. 5.

Bài 12. n = 6k + 4, k$\in$N.

Bài 13. p = 2 lấy n chẵn; p > 2 lấy n = (pk - 1)(p -1), k$\in$N*.

Bài 14. $n^3-n^2+n-1=(n-1)(n^2+1)$, n =2.

Bài 15.

$x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+y^2)$

$x=y=1$ thì $x^4+4y^4=5$ là số nguyên tố.

Bài 16. $p=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}+1=\dfrac{(n+3)(n^2+2)}{6}$.

Với $n\geq 4$ thì n +3 >6 và n^2 + 2 > 17.

n + 3 và n^2 +2 hoặc một số chẵn, một số chia hết cho 3; hoặc một trong hai số chia hết cho 6, khi đó p là hợp số với n = 1, 2, 3 thì p = 2, 5, 11 là các số nguyên tố.

Bài 17. n chẵn thì A chia hết cho 2.

n lẻ, đặt n = 2k +1 (k$\in$N*), ta có:

$$n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=(n^2+2^{2k+1})^2-2.n^2.2^{2k+1}$$
$$=(n^2+2^{2k+1}-n.2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}+n.2^{k+1})$$
$$=\left[(n-2^k)^2+2^{2k}\right]\left[(n+2^k)^2+2^{2k}\right]$$

Bài 18. Giả sử phương trình (1) có nghiệm x,y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương . Vì a > b nên từ (1) có $x \neq a, x \neq b$ và $4(a-x)(x-b) > 0$, suy ra b < x <a. Đặt $a-x=m, x-b=n$ thì m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn-m-n=y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi (2)$\Leftrightarrow (4m-1)(4n-1)=4y^2+1$ (3)

Vì tích các số dạng 4k + 1 lại có dạng đó nên số 4m - 1 phảI có ước nguyên tố dạng p = 4k + 3. Từ (3) có $(4y^2+1) \vdots p$ hay $4y^2 \equiv -1$ (mod p) (4). Suy ra (y, p) = 1. Theo định lí nhỏ Fermat $(2y)^{p-1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow \left[(2y)^2\right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\bmod p)$.

Từ đó và (4) có $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow (-1)^{2k+1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

Bài 20. a) Gọi $d \in$ ƯC$(7n+10, 5n+7)$ thì

$5(7n+10)-7(5n+7) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1.$

b) Gọi d là ƯCLN (2n + 3, 4n + 8).

(4n + 8) - 2(2n + 3)$\vdots$ d$\Rightarrow 2 \vdots d$.

Do d là ước của số lẻ 2n + 3 nên d = 1.

Bài 21.

a) Gọi d $\in$ƯC$(b, a-b)$ thì $a-b \vdots d, b \vdots d$, do đó $a \vdots d$. Ta có $(a,b)=1$

nên d = 1.

b) Giả sử a^2+b^2 và ab cùng chia hết cho cho số nguyên tố d thì vô lí.

Bài 22.

Giả sử ab và c cùng chia hết cho số nguyên tố d thì vô lí.

Bài 23.a)

$$\begin{aligned}
&4n-5 \vdots 13 \\
&\Rightarrow 4n-5+13 \vdots 13 \\
&\Rightarrow 4n+8 \vdots 13 \\
&\Rightarrow 4(n+2) \vdots 13
\end{aligned}$$

Do (4, 13) = 1 nên n + 2$\vdots$ 13.

Đáp số: n = 13k - 2 (k$\in N^*$).

b) Đáp số: n = 7k - 3 (k$\in$N).

c) $25n+3 \vdots 53 \Rightarrow 25n+3-53 \vdots 53$.

Đáp số: n = 53k + 2 (k $\in$ N).

Bài 24.

a) n không chia hết cho 3.

b) n là số chẵn.

c) n là số lẻ.

d) Giả sử 18n + 3 và 21n + 7 cùng chia hết cho số nguyên tố d thì

$6(21n+7)-7(18n+3)\vdots d \Rightarrow 21\vdots d$.

Vậy $d \in \{3;7\}$.

Hiển nhiên $d \neq 3$ vì 21n + 7 không chia hết cho 3. Như vậy (18n +3, 21n + 7)$\neq 1 \Leftrightarrow 18n+3\vdots 7$ (còn 21n + 7 luôn chia hết cho 7)$\Leftrightarrow 18n+3-21\vdots 7 \Leftrightarrow 18(n-1)\vdots 7 \Leftrightarrow n-1\vdots 7$.

Vậy nếu n $\neq 7k+1 (k \in N)$ thì $(18n+3, 21n+7)=1$.

Bài 25.

Bài toán không yêu cầu tính mọi giá trị của n mà chỉ cần chỉ ra vô số giá trị của n để $(n+15, n+72)=1$. Do đó ngoài cách giải trên có thể giải như sau:

Gọi d$\in$ƯC$(n+15, n+72)$ thì $57\vdots d$. Do $n+15\vdots d, 57\vdots d$ nên nếu tồn tại n sao cho n + 15 = 57k + 1 thì d = 1. Nếu ta chọn n = 57k - 14 (k = 1, 2, 3, ….) thì

(n + 15, n + 72) = 1, rõ ràng có vô số giá trị n.

Bài 26.

Dùng hàm Ơle:

Phân tích số m ra thừa số nguyên tố: $m = p_1^x.p_2^y.p_3^z...$

Số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m là

$$\varphi(m) = m.\left(1-\frac{1}{p_1}\right).\left(1-\frac{1}{p_2}\right).\left(1-\frac{1}{p_3}\right)....$$

Ta có: $999 = 3^3.37 \Rightarrow \varphi(999) = 999.\left(1-\frac{1}{3}\right).\left(1-\frac{1}{37}\right) = 648$

Có 648 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 999.

Vây có 649 số nguyên tố cùng nhau với 999 và không vượt quá 1000.

Cách khác:

Gọi A là số các số nguyên dương không vượt quá 1000. Suy ra A = 1000

B là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 mà không nguyên tố cùng nhau với 999.

C là số các số nguyên dương không vượt quá 1000 nguyên tố cùng nhau với 999

Ta có: $999 = 3^3.37$

B = (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3) – (Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3)

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 3 là: $\frac{999-3}{3}+1=333$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 là: $\frac{999-37}{37}+1=27$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho cả 37 và 3 (chia hết cho 111) là: $\frac{999-111}{111}+1=9$

+ Số các số nguyên dương không vượt quá 1000 và chia hết cho 37 mà không chia hết cho 3 là: $27-9=18$

Suy ra B = 333+ 18 = 351. Vậy C= A – B = 1000 – 351 = 649

Bài 27.

1. Không mất tổng quát giả sử $p \le q \le r$.

Với $p=2$: $2qr=q+r+162 \Leftrightarrow 4qr-2q-2r=324$

$\Leftrightarrow 2q(2r-1)-(2r-1)=325 \Leftrightarrow (2q-1)(2r-1)=325=5^2\cdot 13.$

$3\le 2q-1\le 2r-1 \Rightarrow 9\le (2q-1)^2\le (2r-1)(2q-1) \Leftrightarrow 9\le (2q-1)^2\le 325 \Leftrightarrow 3\le 2q-1\le 18.$

Do $2q-1$ là ước của $5^2\cdot 13$ nên $2q-1\in\{5;13\}$.

Nếu $2q-1=5 \Leftrightarrow q=3 \Rightarrow r=33$ (loại).

Nếu $2q-1=13 \Leftrightarrow q=7 \Rightarrow r=13$ (thỏa mãn).

$pqr=p+q+r+160 \Leftrightarrow p(qr-1)-q-r=160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+qr-1-q-r=160 \Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+q(r-1)-(r-1)-2=160$

$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)=162.$

Nếu p lẻ $\Rightarrow q;r$ lẻ $\Rightarrow (qr-1)(p-1)+(q-1)(r-1)\,\vdots\, 4$ mà 162 không chia hết cho $4 \Rightarrow$ Vô lý.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $(2;7;13)$ và các hoán vị.

Bài 28.

Đặt $p^3-4p+9=t^2 (t\in N)$

Biến đổi thành $p(p^2-4)=(t-3)(t+3)$ (1) $\Rightarrow p\,|\,(t-3) \vee p\,|\,(t+3)$

Trường hợp 1: Nếu $p\,|\,t-3$

Đặt $t-3=pk(k\in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có:

$p(p^2-4)=pk(pk+6) \Leftrightarrow p^2-pk^2-6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=k^4+4(6k+4)=k^4+24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $(k^2)^2<k^4+24k+16<(k^2+4)^2$

Suy ra các trường hợp:

$k^4+24k+16=\left(k^2+1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k-15=0$ (loại)

$k^4+24k+16=\left(k^2+2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k-3=0$ (loại)

$k^2+24k+16=\left(k^2+3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k-7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$. Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.
Từ đó ta có $t=36; p=11$.

Lưu ý: HS có thể làm như sau khi thay vào (1)

$p\left(p^2-4\right)=pk(t+3) \Leftrightarrow k(t+3)=p^2-4 \Rightarrow p^2=kt+3k+4$

Mặt khác ta có $(t-3)^2=p^2k^2 \Rightarrow t^2-6t+9=k^2(kt+3k+4)$

$\Leftrightarrow t^2-t\left(6+k^3\right)+9-3k^3-4k^2=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn n điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là:

$\Delta=\left(6+k^3\right)^2-4\left(9-3k^3-4k^2\right)=k^6+24k^3+16k^2=k^2\left(k^4+24k+16\right)$ là một số chính phương. Muốn vậy thì $k^4+24k+16$ phải là một số chính phương.
Sau đó cách làm giống như trên.
Trường hợp 2: Nếu $p \mid t+3$

Đặt $t+3=pk(k \in N)$

Khi đó thay vào (1) ta có: $p\left(p^2-4\right)=pk(pk-6) \Leftrightarrow p^2-pk^2+6k-4=0$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn p điều kiện cần để tồn tại nghiệm của phương trình là: $\Delta=k^4-4\left(6k-4\right)=k^4-24k+16$ là một số chính phương.

Mặt khác với $k>3$ ta dễ chứng minh được $\left(k^2-4\right)^2<k^4-24k+16<\left(k^2\right)^2$ Suy ra các trường hợp:

$k^4-24k+16=\left(k^2-1\right)^2 \Leftrightarrow 2k^2-24k+15=0$ (loại)

$k^4-24k+16=\left(k^2-2\right)^2 \Leftrightarrow k^2-6k+3=0$ (loại)

$k^2-24k+16=\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow 6k^2-24k+7=0$ (loại)

Do đó phải có $k \le 3$ Thử trực tiếp được $k=3$ thỏa mãn.
Từ đó suy ra $t=3;18$ tương ứng $p=2;7$.

Vậy tập tất cả giá trị p cần tìm là $\{2;7;11\}$

Bài 29.

Ta có p^2 chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Xét p^2 chia cho 3 dư 0, vì p là số nguyên tố nên $p=3$, suy ra $q=1$, vô lí.

Xét p^2 chia cho 3 dư 1, suy ra $8q$ chia hết cho 3 mà $(8;3)=1$ nên $q=3 \Rightarrow p=5$ thỏa mãn.

Vậy $p=5\,;q=3$ thỏa mãn bài.

Bài 30.

Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$

$\Rightarrow mx-my=(mz-ny)\sqrt{2019} \;\Rightarrow \begin{cases} nx-my=0 \\ mz-my=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z} \Rightarrow xz=y^2$

$x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2=(x+z)^2-y^2=(x+y+z)(x+z-y)$.

Vì $x+y+z$ là số nguyên lớn hơn 1 và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=x+y+z \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $x = y = z = 1$.

Thử lại $\dfrac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}=1$ và $x^2+y^2+z^2=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận $(x;y;z)=(1;1;1)$.

Bài 31.

Ta có: $p^2+a^2=b^2 \Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.

Các ước của p^2 là 1, p và p^2 ; không xảy ra trường hợp $b+a=b-a=p$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$.

Khi đó $b=\dfrac{p^2+1}{2}$ và $a=\dfrac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a=(p-1)(p+1)$.

Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)

Từ p nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$.

Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).

Xét $2(\mathrm{p}+\mathrm{a}+1)=2\left(\mathrm{p}+\dfrac{\mathrm{p}^2-1}{2}+1\right)=2\mathrm{p}+\mathrm{p}^2+1=(\mathrm{p}+1)^2$ là số chính phương.

Bài 32.

Do $p-5\,\vdots\,8$ nên $p=8k+5\ (k\in\mathbb{N})$

Vì $\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2}\vdots\left(ax^2-by^2\right)\vdots\, p$ nên $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}\,\vdots\, p$

Nhận thấy $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1}\vdots\left(a^2+b^2\right)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4}\,\vdots\, p$ (*)

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có :

$x^{8k+4} = x^{p-1} \equiv 1(\bmod p),\ \ y^{8k+4} = y^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$

$\Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2(\bmod p)$. Mâu thuẫn với (*).Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Bài 33.

Ta có :

$p^{2016} - 1 = (p^4)^{504} - 1^{504} = (p^4 - 1).A = (p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A \in N)$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 4 \qquad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1) \vdots 3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1) \vdots 3 \qquad (3)$

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k \pm 1; \quad 5k \pm 2$

- Nếu $p = 5k \pm 1$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5n + 1$

- Nếu $p = 5k \pm 2$ thì $p^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5l - 1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4 - 1 = 5q \vdots 5 \qquad (4)$ ($(n, l, q \in N)$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016} - 1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

Bài 34.

Không mất tính tổng quát giả sử $m < n < p < q$.

Nếu $m \ge 3$ thì $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{mnpq} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{3.5.7.11} < 1$.

Vậy $m = 2$ và (1) trở thành $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2npq} = \frac{1}{2}$ (2).

Nếu $n \ge 5$ ta có $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2npq} \le \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2.5.7.11} < \frac{1}{2}$.

Vậy $n = 3$ và (2) trở thành $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{6pq} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (p-6)(q-6) = 37$

suy ra $p = 7$ và $q = 43$.

Vậy $(m; n; p; q)$ là $(2; 3; 7; 43)$ và các hoán vị của nó.

Bài 35.

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 1$ thỏa mãn

Nếu $y = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ không thỏa mãn

Xét $x \neq 0; y \neq 0$ phương trình đã cho có dạng

$$4.54x^3\left(54x^3+1\right)=4.54x^3.y^3 \Leftrightarrow \left(4.27x^3+1\right)^2=\left(6xy\right)^3+1$$

Đặt $4.27x^3=a; 6xy=b$ ta được phương trình

$$\left(a+1\right)^2=\left(b+1\right)\left(b^2-b+1\right) \quad (*)$$

Từ $(*)$ ta thấy $b+1>0$. Gọi ƯCLN$(b+1;b^2-b+1)=d$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1 \vdots d \\ b^2-b+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow b^2-b+1=b\left(b+1\right)-2\left(b+1\right)+3 \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d$$

Mặt khác $\left(a+1\right)^2=\left(4.27x^3+1\right)$ không chia hết cho 3 nên 3 không chia hết $d \Rightarrow d=1 \Rightarrow \left(b+1;b^2-b+1\right)=1$

Từ $(*)$ nhận thấy tích hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên phải có $\begin{cases} b+1=m^2 \\ b^2-b+1=n^2 \end{cases} \quad \left(m;n \in \mathbb{N}^*; m \geq 2; m^2 \geq 4\right)$

Ta có $n^2=\left(m^2-1\right)^2-\left(m^2-1\right)+1$

$$\Leftrightarrow n^2=\left(m^2-1\right)^2-\left(m^2-2\right) \quad (1); n^2=\left(m^2-2\right)^2+\left(m^2-1\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(m^2-2\right)^2<n^2<\left(m^2-1\right)^2$ vô lý suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;1\right)$.

Bài 36.

Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in N^*$.

+ Nếu $q=3k+1$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+3$ chia hết cho 3, trường hợp này loại do p không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $q=3k+2$, khi đó do $p=q+2$ nên $p=3k+4$. Do p là số nguyên tố nên k phải là số tự nhiên lẻ. Khi đó ta được $p+q=6\left(k+1\right) \vdots 12$. Vậy số dư khi chia $p+q$ cho 12 là 0.

Bài 37.

Ta xét các trường hợp sau

+ Khi $x=2$ ta được $2^x+x^2=2^2+2^2=8$ không phải là số nguyên tố.

+ Khi $x=3$ ta được $2^x+x^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

+ Khi $x>3$ thì x là số nguyên tố lẻ. Khi đó x^2 chia 3 có số dư là 1.

Ngoài ra do x là số nguyên tố lẻ nên ta đặt $x=2k+1\left(k \in N^*\right)$.

Từ đó ta có $2^x=2^{2k+1}=2.4^k=2\left(3+1\right)^k$ chia 3 có số dư là 2.

Như vậy 2^x+x^2 luôn chia hết cho 3. Do đó 2^x+x^2 luôn là hợp số khi $x>3$.

Vậy $x=3$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Với bài toán số học dạng này ta thường thử với một số nguyên tố nhỏ $x = 2;3$. Với các số nguyên tố lớn hơn ta chứng minh không thỏa mãn.

Bài 38.

Giả sử $2015 = a_1 + a_2 + ... + a_n$, trong đó $a_1; a_2; ...; a_n$ là các hợp số

Theo bài ra ta có

+ Mỗi số hạng $a_1; a_2; ...; a_n$ không thể viết thành tổng hai hợp số (1)

+ Tổng hai hợp số bất kì không thể viết thành tổng 3 hợp số (2)

Do 2015 là số lẻ nên tồn tại ít nhất một hợp số lẻ, hợp số đó phải bằng 9 vì 1;3;5;7;11;13 không phải là hợp số.

Nếu có hợp số lẻ $a_1 \geq 15 \Rightarrow a_1 = 9 - (a_1 - 9)$ với $(a_1 - 9) \geq 6$ là số chẵn nên a_1 bằng tổng hai hợp số- trái với (1)

Mặt khác không có quá một hợp số bằng 9 vì nếu có hai hợp số bằng 9 thì 9+9=6+6+6 trái với (2)

Do đó: $2015 = 9 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ với $a_2; a_3; ..; a_n$ là các hợp số chẵn

$\Rightarrow a_2 + a_3 + ... + a_n = 2006 \quad (3)$

$\Rightarrow$ các hợp số phải nhận các giá trị 4 hoặc 6.

Vì nếu a_2 là hợp số chẵn và $a_2 \geq 8 \Rightarrow a_2 = 4 - (a_2 - 4)$ là tổng hai hợp số, trái với (1)

Số hợp số bằng 6 chỉ có thể là một vì nếu có hai hợp số bằng 6 thì 6+6=4+4+4

Giả sử $a_2 = 6 \Rightarrow a_3 = a_4 = ...a_n = 4 \Rightarrow (n-2).4 = 2000 \Rightarrow n = 502$

Vậy số tự nhiên cần tìm là $n = 502$

Bài 39.

Nếu $p = q$ thì $p = \dfrac{2(m^2+1)}{m+1} = 2m - 2 + \dfrac{4}{m+1}$.

Do $m \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4 \vdots (m+1) \Rightarrow m = 0; m = 1; m = 3 \Rightarrow p = 2;\ p = 5$.

Nếu $p \neq q$ thì pq và $p + q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p + q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q.

Gọi r là một ước chung của $m^2 + 1$ và $m + 1 \Rightarrow \left[(m+1)(m-1)\right] \vdots r \Rightarrow (m^2 - 1) \vdots r$

$\Rightarrow \left[(m^2+1) - (m^2-1)\right] \vdots r \Rightarrow 2 \vdots r \Rightarrow r = 1$ hoặc $r = 2$.

+) $r = 1$ suy ra $p + q = m + 1,\ pq = m^2 + 1 \Rightarrow p, q$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (m+1)x + m^2 + 1 = 0$ vô nghiệm do

$\Delta = -3m^2 + 2m - 3 = -(m-1)^2 - (2m^2 + 2) < 0$

+) $r = 2$ suy ra $2pq = m^2 + 1$ và $2(p + q) = m + 1 \Rightarrow p, q$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - (m+1)x + m^2 + 1 = 0$ vô nghiệm do

$\Delta = -7m^2 + 2m - 7 = -(m-1)^2 - (6m^2 + 6) < 0$.

Vậy bộ các số nguyên tố (p; q) cần tìm là $(p;q)=(2;2)$; $(p;q)=(5;5)$.

Bài 40.

+) Nếu p=7k+i; k,i nguyên, i thuộc tập $\{\pm1;\pm2;\pm3\}$. Khi đó p^2 chia cho 7 có thể dư: 1;4;2

Xét $p>2\Rightarrow 2p^2-1;\ 2p^2+3\ \&\ 3p^2+4>7$

Nếu p^2 chia cho 7 dư 1 thì $3p^2+4$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 4 thì $2p^2-1$ chia hết cho 7 nên trái GT

Nếu p^2 chia cho 7 dư 2 thì $2p^2+3$ chia hết cho 7 nên trái GT

+) Xét p=2 thì $3p^2+4$=16 (loại)

+) Xét p=7k, vì p nguyên tố nên p = 7 là nguyên tố, có:

$2p^2-1=97;\ 2p^2+3=101;\ 3p^2+4=151$ đều là các số nguyên tố

Vậy p = 7

Bài 41.

Xét n = 0 thì A = 1 không phải số nguyên tố

n = 1 thì A = 3 là số nguyên tố

Xét n > 1 ta có:

$$A=n^{2012}-n^2+n^{2002}-n+n^2+n+1=n^2\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]+n\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]+\left(n^2+n+1\right)$$

Mà $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^3-1\right)$ suy ra $\left[\left(n^3\right)^{670}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Tương tự: $\left[\left(n^3\right)^{667}-1\right]$ chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$

Do đó với n > 1 thì A chia hết cho $\left(n^2+n+1\right)$ nên A là hợp số.

Vậy n = 1 là giá trị cần tìm.

Bài 42.

Đặt $\dfrac{a-b\sqrt{2}}{b-c\sqrt{2}}=\dfrac{x}{y}$ (x, y $\in$ Z, xy $\neq$ 0) $\Rightarrow$ ay – bx = (by – cx)$\sqrt{2}$ (*)

Vì a, b, c, x, y $\in$ Z $\Rightarrow$ ay – bx $\in$ Z $\Rightarrow$ (by – cx)$\sqrt{2}$ $\in$ Z

Mà $\sqrt{2}$ $\in$ I nên từ (*)$\Rightarrow\begin{cases}ay-bx=0\\by-cx=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ay=bx\\cx=by\end{cases}$

$\Rightarrow$ acxy = b^2xy $\Rightarrow$ ac = b^2 (vì xy $\neq$ 0)

$a^2+b^2+c^2=(a+c)^2-2ac+b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c-b)(a+c+b)$

Vì $a^2+b^2+c^2$ là số nguyên tố và a + c – b < a + c + b

$\Rightarrow$ a + b – c = 1 $\Rightarrow$ a + b + c = $a^2+b^2+c^2$ (1)

Mà a, b, c nguyên dương nên $a \le a^2$, $b \le b^2$, $c \le c^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ a = b = c = 1, thử lại: Thỏa mãn, kết luận

Bài 43.

Vì k là số nguyên tố suy ra $k^2 + 4 > 5$; $k^2 + 16 > 5$

-Xét k = 5n $(n \in N)$ mà k là số nguyên tố nên k = 5.

Khi đó $k^2 + 4 = 29$; $k^2 + 16 = 41$ đều là các số nguyên tố.

-Xét k = 5n+1 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 10n + 1 \Rightarrow k^2 + 4 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n + 2 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 = 20n + 4 \Rightarrow k^2 + 16 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n +3 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 30n + 9 \Rightarrow k^2 + 16 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 16$ không là số nguyên tố.

- Xét k = 5n+4 $(n \in N) \Rightarrow k^2 = 25n^2 + 40n + 16 \Rightarrow k^2 + 4 \vdots 5$

$\Rightarrow k^2 + 4$ không là số nguyên tố.

Vậy để $k^2 + 4$ và $k^2 + 16$ là các số nguyên tố thì k = 5.

Bài 44.

Ta có $p^{20} - 1 = (p^4 - 1)(p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2 + 1$ và $p^2 - 1$ là các số chẵn

$\Rightarrow p^4 - 1$ chia hết cho 4

$\Rightarrow p^{20} - 1$ chia hết cho 4

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 $\Rightarrow p$ là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^4 - 1$ chia hết cho 5.

Lập luận ta được $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$ chia hết cho 5.

Suy ra $p^{20} - 1$ chia hết cho 25.

Mà $(4; 25) = 1$ nên $p^{20} - 1$. (đpcm)

Bài 45.

Ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó suy ra $(p-1)(p+1) \vdots 8$ (1) .

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p-1;\ p;\ p+1$. Ta có $(p-1)p(p+1) \vdots 3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên suy ra $(p-1)(p+1)\vdots 3$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3;8)=1$ và $3.8=24$ ta suy ra $p^2-1\vdots 24$ (đpcm).

Bài 46.

Không mất tính tổng quát, giả sử $p \le q$.

Trường hợp 1: $p=2$

$\Rightarrow p(p+3)=2(2+3)=2.5=10$

$\Rightarrow 10+q(q+3)=n(n+3)$

$\Leftrightarrow 10=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 10=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p ; q ; n là các số nguyên dương

$\Rightarrow n>q\ge 2$.

$\Rightarrow n+q+3>2+2+3=7$

Mà $10=1.10=2.5$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=10 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=7 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ q=3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(2;3;4)$.

Trường hợp 2: $p=3$

$\Rightarrow p(p+3)=3.(3+3)=3.6=18$

$\Rightarrow 18+q(q+3)=n(n+3)\Leftrightarrow 18=n^2+3n-q^2-3q=(n^2-q^2)+(3n-3q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q)+3(n-q)$

$\Leftrightarrow 18=(n-q)(n+q+3)$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà p ; q ; n là các số nguyên dương $\Rightarrow n>q\ge 3$.

$\Rightarrow n+q+3>3+3+3=9$

Mà $18=1.18=2.9=3.6$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ cần tìm là $(3;7;8)$.

Trường hợp 3: $p>3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

Nếu $a:3$ dư 1 $\Rightarrow a=3k+1 \Rightarrow a+3=3k+4$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3$ dư 1.

Nếu $a:3$ dư 2 $\Rightarrow a=3k+2 \Rightarrow a+3=3k+5$

$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3$ dư 1.

Trở lại bài toán chính:

Vì $q \geq p > 3 \Rightarrow p \nmid 3; q \nmid 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3$ dư 2.

Mà $n(n+3):3$ dư 1 (nếu $n \nmid 3$) hoặc $n(n+3)\vdots 3$ nếu $n \vdots 3$.

$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3) \neq n(n+3)$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p;q;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 47.

$p^2q+p \vdots p^2+q \Rightarrow q(p^2+q)-(p^2q+p)=q^2-p \vdots p^2+q.$

$pq^2+q \vdots q^2-p \Rightarrow (pq^2+q)-p(q^2-p)=p^2+q \vdots q^2-p.$

$q^2-p=-(p^2+q) \Leftrightarrow q^2+q+p^2-p=0 (VN).$

$q^2-p=p^2+q \Leftrightarrow (q+p)(q-p-1)=0 \Leftrightarrow q-p-1=0 \Leftrightarrow q=p+1.$

Mà p, q là hai số nguyên tố nên $p=2, q=3$ (thỏa mãn bài toán)

Bài 48.

Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm hữu tỉ, khi đó $\Delta=b^2-4ac=m^2, (m \in \mathbb{N})$.

Suy ra $b^2 > m^2$ hay $b > m.$ (1)

Ta có $4a.\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac$

$=(400a^2+40ab+b^2)-(b^2-4ac)=(20a+b)^2-m^2$

$=(20a+b+m)(20a+b-m)$

Do $\overline{abc}$ là số nguyên tố nên $(20a+b+m)\vdots\overline{abc}$ hoặc $(20a+b-m)\vdots\overline{abc}$, suy ra $20a+b+m \geq \overline{abc}$ (2)

Từ (1) ta có $20a+2b=20a+b+b>20a+b+m$

Từ (2) ta có $20a+b+m \geq 100a+10b+c>100a+10b$

Do đó

$$20a+2b>100a+10b \Leftrightarrow 2(10a+b)>10(10a+b) \Leftrightarrow 2>10 \text{ (vô lý)}$$

Vậy Δ không thể là số chính phương nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 49.

Ta có: $\frac{9}{41}=\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{2}{a+b}\Rightarrow a+b<10,(a+b)\vdots 9\Rightarrow\begin{cases}a+b=9\\a^2+b^2=41\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(4;5),(5;4)$

Bài 50.

Xét dãy số có dạng $2;\ 2.3;\ 2.3.5;\ \ldots$

Giả sử hai số cần chọn là $a=2.3.5\ldots p_n;\ b=2.3.5\ldots p_m$ với $p_n;\ p_m\ (n<m)$ là các số nguyên tố thứ n và thứ m.

Ta có $b-a=2.3.5\ldots p_m-2.3.5\ldots p_n=30000 \Leftrightarrow 2.3.5.p_n\left(p_{n+1}.p_{n+2}\ldots p_m-1\right)=2.3.5.1000$

Ta thấy $2.3.5.1000$ tồn tại ước của 3 nên a và b có chữa số nguyên tố 3 nên $p_n\ge 3$ và 1000 không có ước nguyên tố khác 2 và 5 nên a không có ước khác 2 và 5 nên $p_n\le 5$. Từ đó ta được

+ Nếu $p_n=3$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}\ldots p_m=10000$, không tồn tại p_m thỏa mãn

+ Nếu $p_n=5$, ta được $p_{n+1}.p_{n+2}\ldots p_m=1001=7.11.13\Rightarrow p_m=13$, từ đó ta được

$$a=2.3.5=30;\ b=2.3.5.7.11.13=30030$$

Bài 51.

$n^3-1=(n-1).(n^2+n+1)\vdots p$

$(p-1)\vdots n\Rightarrow p-1\ge n\Rightarrow p\ge n+1$

Vì $p\ge n+1\Rightarrow(n-1)$ không chia hết cho p

Do đó: $(n-1)(n^2+n+1)\vdots p\Leftrightarrow(n^2+n+1)\vdots p$

Đặt : $p-1=kn,\quad k\ge 1\Rightarrow p=kn+1\quad(*)$

$\Rightarrow \left(n^2+n+1\right) \vdots (kn+1) \Rightarrow kn+1 \le n^2+n+1$

$\Leftrightarrow kn \le n^2+n \Leftrightarrow k \le n+1$

$k\left(n^2+n+1\right)-n(kn+1) \vdots (kn+1)$

$\Rightarrow \left[(k-1)n+k\right] \vdots (kn+1)$

$k \ge 1 \Rightarrow (k-1)n+k>0$

$\Rightarrow (k-1)n+k \ge kn+1$

$\Rightarrow k \ge n+1$

$\Rightarrow k=n+1 \Rightarrow p=kn+1=n^2+n+1$

$\Rightarrow n+p=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Vậy $n+p$ là một số chính phương.

Bài 52.

Theo đề ta có $\begin{cases} p+q=a^2 \\ p+4q=b^2 \\ a;b \in N^* \end{cases}$, suy ra $b^2-a^2=3q \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=3q$

Từ q là số nguyên tố và $a+b \ge 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH 1: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3q \end{cases}$ suy ra $b=a+1$ và $2a+1=3q$, suy ra q lẻ.

Ta viết $q=2k+1$ ($k \in N^*$)

Khi đó $2a=3q-1=6k+2$ hay $a=3k+1$ và $p=a^2-q=9k^2+4k=k(9k+4)$

Do p nguyên tố nên $k=1$ và $p=13, q=3$.

+ TH 2: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=q \end{cases}$, suy ra $b=a+3$ và $q=2a+3$

Lại có $p=a^2-q=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$. Do p nguyên tố nên $a=4$ và $p=5, q=11$.

+ TH 3: $\begin{cases} b-a=q \\ b+a=3 \end{cases}$ và $b>a \ge 1$.

Suy ra $b=2$ *và* $a=1$ khi đó $q=1$ không phải số nguyên tố.

Bài 53.

Ta có:

$n^8+4^{2k-1}=n^8+\left(2^{2k-1}\right)^2=\left(n^2\right)^4+2.2^{k-1}n^2+\left(2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$

$=\left(n^2+2^{2k-1}\right)^2-\left(2^{k-1}.n\right)^2$

$=\left(n^2+2^{2k-1}-2^{k-1}.n\right)\left(n^2+2^{2k-1}+2^{k-1}.n\right)$

Do n,k là các số tự nhiên và n^8+4^{2k+1} là một số nguyên tố nên

$n^8+4^{2k+1}=\left(n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n\right)\left(n^2+2^{2k+1}+2^{k+1}.n\right)$

$\Rightarrow n^2+2^{2k+1}-2^{k+1}.n=1$

$\Leftrightarrow n^2-2.2^k.n+2.\left(2^k\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \left(n-2^k\right)^2+\left(2^k\right)^2=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n-2^k=0\\2^k=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\n=1\end{cases}\Rightarrow n^8+4^{2k+1}=1+2+2=5\\ \begin{cases}n-2^k=1\\2^k=0\end{cases}(VN)\\ \begin{cases}n-2^k=-1\\2^k=0\end{cases}(VN)\end{array}\right.$$

Vậy $n=1,k=0$ là các giá trị cần tìm.

Bài 54.

$P=\left(7+x+x^2\right)\left(7+x-x^2\right)$

Ta có $7+x+x^2>1$

Vì P là số nguyên tố nên $7+x-x^2=1\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\quad \text{(L)}\end{array}\right.$

Vậy $x=3\Rightarrow P=19$ (thỏa mãn).

Bài 55.

Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 , 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2=5k+1\Rightarrow n^2+4=5k+5\,\vdots\,5$ ($k\in\mathbb{N}^*$).

nên n^2+4 không là số nguyên tố.

+ Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2=5k+4\Rightarrow n^2+16=5k+20\,\vdots\,5$ ($k\in\mathbb{N}^*$).

nên n^2+16 không là số nguyên tố.

Vậy $n^2\,\vdots\,5$ hay n chia hết cho 5.

Nhận xét. Bài toán áp dụng tính chất chia hết, chia có dư của một số chính phương khi chia cho 5; tính chất số nguyên tố, hợp số,…

Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

- Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ tồn tại số dư 0 hoặc 1 hoặc 4. Chứng minh:
  + $m=5k\Rightarrow m^2=25k^2$ chia 5 dư 0 (đúng).
  + $m=5k+1\Rightarrow m^2=25k^2+10k+1$ chia 5 dư 1 (đúng).
  + $m=5k+2\Rightarrow m^2=25k^2+20k+4$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+3\Rightarrow m^2=25k^2+30k+9$ chia 5 dư 4 (đúng).
  + $m=5k+4\Rightarrow m^2=25k^2+40k+16$ chia 5 dư 1 (đúng).
- Áp dụng tính chất chia hết, chia có dư vào bài toán; "Số nguyên tố" là số chỉ có hai ước là 1 và chính nó.

+ n chia 5 dư 1 thì $\left(n^2+4\right)\vdots 5$ nên $\left(n^2+4\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).

+ n chia 5 dư 4 thì $\left(n^2+16\right)\vdots 5$ nên $\left(n^2+16\right)$ không phải là số nguyên tố (loại).

+ Do đó nếu $\left(n^2+4\right)$ và $\left(n^2+16\right)$ là số nguyên tố thì chỉ còn tồn tại trường hợp n^2 chia hết cho 5. Khi đó n chia hết cho 5.

Bài 56.

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\vdots 40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.
⇒ n chỉ có thể có dạng 10k ± 1 và 10k ± 3 với k ∈ ℕ.
Ta có: $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$
Do n lẻ nên n – 1 ⋮ 2; n + 1 ⋮ 2 và n^2 + 1 ⋮ 2 ⇒ n^4 – 1 ⋮ 8. (1)
• Nếu n = 10k ± 1 ⇒ $n^2 \equiv (\pm1)^2 \equiv 1$ (mod 10) ⇒ $n^2 - 1 \vdots 10 \Rightarrow n^4 - 1 \vdots 5$ (2)
Từ (1) và (2), chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4 - 1 \vdots 40$
• Nếu n = 10k ± 3 ⇒ $n^2 \equiv (\pm3)2 = 9$ (mod 10) ⇒ $n^2 + 1 \vdots 10 \Rightarrow n^4 - 1 \vdots 5$ (3)
Từ (1) và (3) chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4 - 1\vdots 40$
Vậy trong mọi trường hợp ta có $n^4 - 1 \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.
Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được
$p^2-p=2y^2-2x^2+4y-4x \Leftrightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)(*)$
⇒ 2(y – x)(y + x + 2) ⋮ p. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:
• y – x ⋮ p ⇒ y – x = kp (k ∈ ℕ*)
Khi đó từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(x + y + 2) ⇒ kp – k = $2k^2$(x + y + 2) ⇒ y – x – k = $2k^2$(x + y + 2)
(loại vì x + y + 2 > y – x – k > 0 ; $2k^2$> 1 ⇒ $2k^2$(x + y + 2) > y – x – k)
• y + x + 2 ⋮ p ⇒ x + y + 2 = kp (k ∈ ℕ*)
Từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(y – x) ⇒ kp – k = $2k^2$(y – x) ⇒ x + y + 2 – k = $2k^2$(y – x) (**)
Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu k ≥ 2 thì từ (**) ⇒ x + y = $2k^2$(y – x) + k – 2 ≥ 8(y – x) (vì y – x > 0)
⇒ 9x ≥ 7y ⇒ 7y < 14x ⇒ y < 2x
Do đó từ (2) ⇒ (p – 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p – 1)
(vì 2x(x + 2) = p – 1 theo (1))
⇒ p + 1 < 4 ⇒ p < 3, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.
Do đó k = 1, suy ra
$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$
Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$
⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)
Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

Bài 57. a) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} => \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c} => c(a+b)=ab(*)$

Giả sử a + b là số nguyên tố, khi đó từ (*) ⇒ ab ⋮ (a + b) ⇒ a ⋮ (a + b) hoặc b ⋮ (a + b)
Điều này mâu thuẫn do 0 < a < a + b, 0 < b < a + b.
Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử a + c và b + c đồng thời là số nguyên tố.

Từ c(a+b)=ab=>ca+cb=ab=>ca+ab=2ab-ab=>a(b+c)=b(2a-c)
⇒ a(b + c) ⋮ b (**)
Mà b + c là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn b + c nên (b + c, b) = 1
Do đó từ (**) suy ra a ⋮ b.
Chứng minh tương tự ta có b(a + c) = a(2b – c) ⇒ b ⋮ a
Vậy a = b. Từ (*) ⇒ a = b = 2c
Do đó a + c = b + c = 3c, không là số nguyên tố với c > 1 (mâu thuẫn với giả sử)
Vậy a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Bài 58. Ta có

$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2xd+d^2+ab-cd$

$\Leftrightarrow ab-cd=(a+b)^2-(c-d)^2=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(*)$

Nếu ab-cd = 0: Do a + b + c + d > 0 => a + b – c – d = 0 => a + b + c + d = 2(c + d) là hợp số do c + d ∈ ℕ* và c + d > 1
Nếu ab -cd $\neq 0$:Từ (*) ⇒ ab – cd ⋮ (a + b + c + d).

$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2 \Rightarrow 3(ab-cd)+(a^2-2ab+b^2)=c^2-2cd+d^2$

$\Rightarrow 3(ab-cd)=(c-d)^2-(a-b)^2=(c-d+a-b)(c-d-a+b)\neq 0$

⇒ (c – d + a – b)(c – d – a + b) ⋮ (a + b + c + d)
Giả sử a + b + c + d là số nguyên tố thì ta có
c – d + a – b ⋮ a + b + c + d hoặc c – d – a + b ⋮ a + b + c + d
Điều này mâu thuẫn do –(a + b + c + d) < c – d + a – b < a + b + c + d ;
–(a + b + c + d) < c – d – a + b < a + b + c + d và (c – d + a – b)(c – d – a + b) ≠ 0
Vậy a + b + c + d là hợp số.

Bài 59.

Biến đổi được $p=\left(n^2+1\right)\left(n-1\right)$

Nếu $n=0;1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n=2$ thỏa mãn đề bài vì $p=\left(2^2+1\right)\left(2-1\right)=5$

Nếu $n>3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n-1>1$ và $n^2+1>n-1>1$

Vậy $n=2$ thì $p=n^3-n^2+n-1$ là số nguyên tố.

Bài 60.

Ta có: $n^3+n+2=n^3+1+n+1=\left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)+\left(n+1\right)=\left(n+1\right)\left(n^2-n+2\right)$

Do $\forall n\in N^*$ nên $n+1>1$ và $n^2-n+2>1$. Vậy n^3+n+2 là hợp số

Bài 61.

Ta có: $\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a}{c}\Leftrightarrow (a-c)(b^2-ac)=0\Rightarrow b^2=ac$

Mà

$a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)(a+c-b)$

Ta thấy $a^2+b^2+c^2>3$ do đó nếu $a^2+b^2+c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$1) a+c-b=1; a+c+b=a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

$2) a+c+b=1, a+c-b=a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$

$\Rightarrow (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

$3) a+c+b=-1, a+c-b=-(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

$4) a+c-b=-1, a+c+b=-(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$

$\Rightarrow (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1\Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \qquad (ktm)$

Bài 62.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p=3k+1; p=3k-1$ với $k>1$

+ Nếu $p=3k+1$ thì $2p+1=6k+3=3(2k+1)$

Suy ra $2p+1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p=3k-1, k>1$ thì $4p+1=12k-3=3.(4k-1)$

Do $k>1$ nên $4k-1>3$. Do đó $4p+1$ là hợp số.

Bài 63.

Do p là số nguyên tố và p > 3 nên p không chia hết cho 3. (*)

p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau.

Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n. Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: 2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = $90\,\vdots\,3$ nên $p^n\,\vdots\,3$

Điều này mâu thuẫn (*).

Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 64.

Vì p chia cho 42 có số dư là r nên: p = 42k + r (0 < r < 42, k, r tự nhiên)

Hay p = 2.3.7k + r.

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

=> r là hợp số không chia hết cho 2; 3; 7 và r < 42

Học sinh chỉ ra được r = 25

Vậy hợp số r = 25

Bài 65.

Ta có: $p,\ q$ là số nguyên tố nên $pq+11$ là số nguyên tố lớn hơn 11
$\Rightarrow pq+11$ là số lẻ suy ra pq là số chẵn.
Do $7p+q$ là số nguyên tố lớn hơn 7 nên p và q không thể cùng tính chẵn lẻ.

*) TH1: $p=2$ thì $7p+q=14+q$. Ta thấy 14 chia 3 dư 2

+) Nếu q chia hết cho 3, do q là số nguyên tố nên $q=3$.

$7p+q=17$; $pq+11=17$ (T/m)

+) Nếu q chia cho 3 dư 1 thì $14+q$ chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+q$ là hợp số

+) Nếu q chia cho 3 dư 2 thì $2q$ chia cho 3 dư 1 nên $pq+11=2q+11$ chia hết cho 3

$\Rightarrow pq+11$ là hợp số.

*) TH2: $q=2$ thì $7p+q=7p+2$

+) Nếu $7p$ chia hết cho 3 thì p chia hết cho 3 nên $p = 3 \Rightarrow 7p+q=23; pq+11=17$

(Thỏa mãn)

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 1 chia hết cho 3 $\Rightarrow 7p+2$ là hợp số

+) Nếu $7p$ chia cho 3 dư 2 thì p chia cho 3 dư 2 nên 2p chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow pq+11=2p+11$ chia hết cho 3 nên $pq+11$ là hợp số.

Vậy: $p=2,\ q=3$ hoặc $p=3,\ q=2$.

Bài 66.

Vì $\overline{ab}; \overline{cd}$ là các số nguyên tố nên b, d lẻ và khác 5

Ta lại có $b^2=\overline{cd}+b-c \Leftrightarrow b^2-b=9c+d \Leftrightarrow b(b-1)=9c+d$

Nếu $b=1$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=3$ nên $9c+d=6 \Rightarrow c=0, d=6$ (không thỏa mãn)

Nếu $b=7 \Rightarrow 9c+d=42 \Rightarrow d=42-9c \Rightarrow c=4; d=6$ (loại)

Nếu $b=9 \Rightarrow 9c+d=72 \Leftrightarrow d=72-9c \Rightarrow c=7; d=9$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow a \in \{1;2;7\}$

Vậy $\overline{abcd} \in \{1979; 2979; 7979\}$

Bài 67.

Trong 3 số $a,\ b,\ c$ có ít nhất hai số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là a và b.

Suy ra $p = b^c + a$ là số nguyên tố chẵn nên $p = 2$.

Suy ra $a = b = 1$. Khi đó $q = c + 1$ và $r = c + 1$ nên $q = r$.

Vậy trong ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau.

Bài 68.

+) Với $p = 2$ thì $p^2 + 2 = 8$ không là số nguyên tố.

+) Với $p = 3$ thì $p^2 + 2 = 11$ và $p^3 + p^2 + 1 = 37$ đều là số nguyên tố.

+) Với $p > 3 \Rightarrow p = 3k \pm 1 \left(k \in \mathbb{N}, k \ge 2\right)$

$\Rightarrow p^2 + 2 = \left(3k \pm 1\right)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3\left(3k^2 \pm 2k + 1\right) \vdots 3$ nên $p^2 + 2$ là hợp số.

Vậy chỉ có $p = 3$ thì $p^2 + 2$ và $p^3 + p^2 + 1$ đều là số nguyên tố.

Bài 69.

Ta có: $x^2 = 45 + y^2$.

Ta thấy $x^2 > 45$ và x là số nguyên tố nên x phải là số nguyên tố lẻ. Suy ra x^2 là số lẻ.

Từ đó suy ra y^2 là số chẵn, mà y là số nguyên tố. Suy ra $y = 2$; $x = 7$

Vậy $x = 7$ và $y = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 70. 1) Đặt $d = UCLN\left(2n + 1, 10n + 7\right)$

Suy ra $2n + 1 \vdots d$. Vì vậy $5\left(2n + 1\right) \vdots d$.

Mà $10n + 7 \vdots d$ nên $10n + 7 - 5\left(2n + 1\right) \vdots d$

$\Rightarrow 2 \vdots d$

Do đó $d = 2$ hoặc $d = 1$.

Nếu $d = 2$ thì $2n + 1 \vdots 2$ (vô lý).

$\Rightarrow d = 1$.

$1 = UCLN\left(2n + 1, 10n + 7\right)$

Vậy $2n + 1$ và $10n + 7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

2)

- Nếu là số nguyên tố lẻ thì $y^3 = x^2 + 23$ là số chẵn. Vậy $y^3 = 2$ (loại).
- Nếu $x = 2$ thì $y^3 = 2^2 + 23 = 27$. Vậy $y = 3$.

Bài 71.

$\Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$

$\Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = 3^2(a - b)$

Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương khi $a - b$ là số chính phương

Do a, b là các chữ số và $0 < a, b \le 9 \Rightarrow 1 \le a - b \le 8$

=>$(a-b)$ là số chính phương khi $(a-b)\in\{1,4\}$

+Nếu $a-b=1\Rightarrow \overline{ab}\in\{21,32,43,54,65,76,87,98\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ => $\overline{ab}=43$

+Nếu $a-b=4\Rightarrow \overline{ab}\in\{51,62,73,84,95\}$ mà $\overline{ab}$ là số nguyên tố và là số lẻ => $\overline{ab}=73$

Vậy $\overline{ab}\in\{43;73\}$

Bài 72. Vì p là số nguyên tố do đó ta được $4p^2+1>5$ và $6p^2+1>5$

Đặt $x=4p^2+1=5p^2-(p-1)(p+1)$; $y=6p^2+1\Rightarrow 4y=25p^2-(p-2)(p+2)$

Khi đó

- Nếu p chia cho 5 dư 4 hoặc dư 1 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 5

Suy ra x chia hết cho 5 mà $x>5$ nên x không là số nguyên tố.

- Nếu p chia cho 5 dư 3 hoặc dư 2 thì $(p-2)(p+2)$ chia hết cho 5

Suy ra 4y chia hết cho 5 mà $(4,5)=1$ nên y chia hết cho 5 mà $y>5$

Do đó y không là số nguyên tố

Vậy p chia hết cho 5, mà p là số nguyên tố nên $p=5$.

Thử với $p=5$ thì $x=101$; $y=151$ là các số nguyên tố

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ cũng là số nguyên tố.

Bài 73. C

Xét ba số tự nhiên liên tiếp là $2^n-1; 2^n; 2^n+1$.

Trưng ba số tự nhiên liên tiếp trên có duy nhất một số chia hết cho 3.

Do $n>2$ nên $2^n-1>3$, mà theo giả thiết thì 2^n-1 là số nguyên tố, do đó 2^n-1 không chia hết cho 2. Lại có 2^n không chia hết cho 3. Do đó suy ra 2^n+1 chia hết cho 3.

Mà do $n>2$ nên $2^n+1>3$. Từ đó ta được 2^n+1 là hợp số.

Bài 74.

Trước hết ta chứng minh với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p^2-1 chia hết cho 24.

Thật vậy, ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$.

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Suy ra ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 8.

Mặt khác ta lại có $(p-1)p(p+1)$ chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 3.

Để ý là $(3;8)=1$ nên ta được $p^2-1=(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Chứng minh hoàn toàn tương tự thì ta được $q^2-1; r^2-1; s^2-1$ cũng chia hết cho 24.

Ta có $p^2-q^2+r^2-s^2=(p^2-1)-(q^2-1)+(r^2-1)-(s^2-1)$.

Do đó ta được $p^2-q^2+r^2-s^2$ chia hết cho 24.

Bài 75.

Từ $p^2-2q^2=1$ ta được $p^2=2q^2+1$. Do đó ta suy ra được p là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt $p=2k+1$ với $k\in N^*$.

Khi đó ta được $(2k+1)^2=2q^2+1 \Leftrightarrow 4k^2+4k+1=2q^2+1 \Leftrightarrow 2k(k+1)=q^2$

Do đó q^2 là số chẵn nên q là số chẵn. Mà q là số nguyên tố nên $q=2$.

Thay vào $p^2-2q^2=1$ ta suy ra được $p=3$.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q)=(3;2)$ thỏa mãm yêu cầu bài toán.

Bài 76.

- Trường hợp 1: Nếu $p=2$ suy ra $p^3+\frac{p-1}{2}$ không nguyên
- Trường hợp 2: Nếu $p=4k+1$, khi đó ta được $p^3+\frac{p-1}{2}=(4k+1)^3+2k$ là số lẻ nên

$p^3+\frac{p-1}{2}$ không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

- Trường hợp 3: Nếu $p=4k+3$. Giả sử $p^3+\frac{p-1}{2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

Khi đó ta có $p^3+\frac{p-1}{2}=x(x+1) \Leftrightarrow 2p(2p^2+1)=(2x+1)^2+1$ với x là số tự nhiên.

Từ đó suy ra $(2x+1)^2+1 \vdots p$ vô lí vì $p=4k+3$.

Từ các trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài 77.

Do p và q là các số nguyên tố nên $p;q \ge 2$, do đó suy ra $r \ge 3$, mà r là số nguyên tố nên r là số lẻ.

Từ đó suy ra p^q và q^p khác tính chẵn lẻ nên p và q khác tính chẵn lẻ.

Như vậy trong hai số p, q có một số chẵn, không mất tính tổng quát ta giả sử số đó là q.

Khi đó $q = 2$ nên ta được $p^2 + 2^p = r$. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p = 3$, khi đó ta có $3^2 + 2^3 = r$ hay $r = 17$ là một số nguyên tố.
- Nếu $p > 3$, do p là số nguyên tố nên có dạng $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ với k là số

nguyen dương.

Từ đó suy ra p^2 chia 3 dư 1 hay $p^2 = 3n + 1\left(n \in N^*\right)$.

Lại có p là số lẻ nên $2^p = \left(3 - 1\right)^p = 3m - 1\left(m \in N^*\right)$.

Từ đó ta được $p^2 + 2^p = 3n + 1 + 3m - 1 = 3\left(m + n\right) \vdots 3$ nên là hợp số. Do đó trường hợp này loại.

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là $\left(p;q;r\right) = \left(2;3;17\right), \left(3;2;17\right)$.

Bài 78.

Từ $49 \le 2p^2 - r^2; 2q^2 - r^2 \le 193$ ta có $2q^2 - 193 \le r^2 \le 2p^2 - 49$, do đó $q^2 - p^2 \le 72$.

Mặt khác từ điều kiện $5 \le p < q < r$ ta được $r \ge 11$, do đó $2p^2 \ge 49 + 121 = 170$ hay $p \ge 11$.

Vì $\left(q - p\right)\left(q + p\right) \le 72$ nên $q - p = 2$ hoặc $q - p \ge 4$. Xét hai trường hợp sau:

- Với $q - p = 2$ và $q + p \le 36$, khi đó ta được $p = 11; q = 13$ hoặc $p = 17; q = 19$.

+ Nếu $p = 11; q = 13$ thì $145 \le r^2 \le 193$, suy ra $r = 13 = q$ (loại)

+ Nếu $p = 17; q = 19$ thì $529 \le r^2 \le 529$, suy ra $r = 23$ (nhận).

- Với $q - p \ge 4$ và $q + p \le 18$, không tồn tại vì $p \ge 11$.

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là $p = 17; q = 19; r = 23$.

Bài 79.

Từ giả thiết suy ra $\frac{2}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{7}{10}$. Không giảm tính tổng quát giả sử $a>b>c>1$.

Suy ra $\frac{2}{3}<\frac{3}{c}\Rightarrow 2c<9$, do đó $c\in\{2;3\}$

- Với $c=2$ suy ra $\frac{2}{3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{7}{10}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{6}<\frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$

Do đó $b\in\{7;11\}$

+ Với $b=7$, khi đó từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{1}{42}<\frac{1}{a}<\frac{2}{35}\Rightarrow a\in\{19;23;29;31;37;41\}$

+ Với $b=11$ từ $\frac{1}{6}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{5}$ suy ra $\frac{5}{66}<\frac{1}{a}<\frac{6}{55}\Rightarrow a=13$, do $a>b$

- Với $c=3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{2}{b}\Rightarrow b<6\Rightarrow b=5$ (do $b>c$)

Thay $b=5$ vào $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{11}{30}$ ta được $6<a<\frac{15}{2}\Rightarrow a=7$.

Vậy có các bộ ba số nguyên tố khác nhau $(a;b;c)$ thoả mãn là:

$(19;7;2),(23;7;2),(29;7;2),(31;7;2),(37;7;2),(41;7;2),(13;11;2),(7;5;3)$ và các hoán vị của nó.

Bài 80.

Ta có $x^5+px+3q=0\Leftrightarrow x(x^4+p)=-3q$.

Vì q là số nguyên tố và x là số nguyên nên từ phương trình trên suy ra $x\in\{-1;-3;-q;-3q\}$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x=-1$, khi đó từ phương trình trên ta được $1+p=3q$. Do q là số nguyên tố nên

- Khi $q=2$ thì ta được $p=5$
- Khi $q>2$ thì $3q$ là số lẻ nên p là số nguyên tố chẵn, do đó $p=2$ nên $q=1$ không phải là số nguyên tố.

+ Nếu $x=-3$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81=q$, do đó p là số nguyên tố chẵn và q là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được $p=2;q=83$.

+ Nếu $x=-q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+p^4=3$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p+q^4>3$.

+ Nếu $x=-3q$, khi đó từ phương trình trên ta được $p+81p^4=1$. Trường hợp này không xẩy ra do p và q là số nguyên tố nên $p+81q^4>1$.

Vậy các bộ số $(x;p;q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(-1;5;2),(-3;2;83)$.

Nhận xét: Từ phương trình $x(x^4+p)=-3q$ ta suy ra được x chia hết cho 3 hoặc x^4+p chia hết cho 3. Đến đây ta xét các trường hợp như trên. Tuy nhiên với cách làm này việc lý luận sẽ phức tạp hơn.

Bài 81.

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\frac{p+1}{2}=x^2$ và $\frac{p^2+1}{2}=y^2$

Khi đó ta được $\begin{cases} p+1=2x^2 & (1) \\ p^2+1=2y^2 & (2) \end{cases}$.

Trừ theo vế của đẳng thức (2) cho đẳng thức (1) ta được $p(p-1)=2(y+x)(y-x)\ (3)$

Suy ra ta được $2(y+x)(y-x)\vdots p\ (4)$.

Mặt khác từ (1) ta thấy p là số lẻ và $x>1>$ Ta có $p+1=2x^2=x^2+x^2>x+1\Rightarrow p>x$.

Từ (2) ta lại có $y>1$ nên $p^2+1=2y^2=y^2+y^2>y^2+1\Rightarrow p>y$.

Từ (3) ta suy ra được $y>x$. Từ đó ta được $0<y-x<p$.

Chú ý p là là số nguyên tố lẻ nên từ (4) ta suy ra được $x=y\vdots p$.

Mà ta lại có $0<x+y<2p$ nên ta được $x+y=p$. Thay vào (30 ta được $p-1=2(y-x)$.

Từ đó suy ra $y-x=\frac{p+1}{2}$ nên ta được $x=\frac{p+1}{4};y=\frac{3p-1}{4}$.

Thay $x=\frac{p+1}{4}$ vào (1) ta được $p+1=2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2\Leftrightarrow p=7$.

Thay $p=7$ vào (2) ta được $7^2+1=2y^2\Rightarrow y=5$.

Vậy $p=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta còn có thể giải bằng cách xét các khả năng của p:

Với p chẵn không xẩy ra, với $p = 4k + 1$ khi đó ta được $\frac{p^2+1}{2} = \frac{(4k \pm 1)^2 + 1}{2} = 8k^2 \pm 4k + 1$.

Đến đây ta tìm các giá trị của k để $8k^2 \pm 4k + 1$ là các số chính phương.

Bài 82.

Giả sử tồn tại số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012}$ là một số chính phương.

Khi đó tồn tại số nguyên dương q để $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012} = q^2$ hay $(x+1)(2x+1) = 2012q^2$.

Vì 2012 chia hết cho 4 nên $(x+1)(2x+1) \vdots 4$. Mà $2x+1$ là số lẻ nên $x+1 \vdots 4$.

Từ đó ta được $x = 4k - 1$ với k là số nguyên dương.

Thay vào phương trình trên ta được $4k(8k-1) = 2012q^2 \Leftrightarrow k(8k-1) = 503q^2$.

Để ý là $(k, 8k-1) = 1$ và 503 là số nguyên tố. Nên tồn tại các số nguyên dương a và b sao

cho $q = ab$ và $(a, b) = 1$. Từ đó ta có các hệ $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$ và $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$.

+ Với $\begin{cases} k = 503a^2 \\ 8k - 1 = b^2 \end{cases}$, hệ này vô nghiệm vì b^2 chia 8 chỉ có các số dư là 0, 1, 4.

+ Với $\begin{cases} k = a^2 \\ 8k - 1 = 503b^2 \end{cases}$. Khi đó ta được $x = 4k - 1 = 4a^2 - 1 = (2a-1)(2a+1)$.

Nếu $a = 1$ thì $x = 3$, khi đó ta được $\frac{(x+1)(2x+1)}{2012} = \frac{7}{503}$ không phải là số nhính phương.

Nếu $a \ge 2$ khi đó $x = (2a-1)(2a+1)$ là một hợp số. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 83.

Đặt $\frac{p^2 - p - 2}{2} = n^3$ với n là một số tự nhiên.

Vì p là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $p = 2$, khi đó ta được $n = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp 2: Với $p > 2$, khi đó ta có $\frac{p^2 - p - 2}{2} = n^3 \Leftrightarrow p(p-1) = 2(n+1)(n^2 - n + 1)$.

Từ đó ta được $n+1 \vdots p$ hoặc $n^2-n+1 \vdots p$ (vì p là số nguyên tố lẻ).

+ Nếu $n+1 \vdots p$ thì ta được $n+1 \geq p$. Từ đó ta được $2\left(n^2-n+1\right) \geq n^2+\left(n-1\right)^2+1 > n > p-1$.

Từ đó ta được $p\left(p-1\right) < 2\left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$. Do đó trường hợp này lại

+ Nếu $n^2-n+1 \vdots p$, khi đó ta đặt $n^2-n+1 = kp$ với k là số tự nhiên khác 0.

Thay vào phương trình $p\left(p-1\right) = 2\left(n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ ta được $p = 2\left(n+1\right)k+1$.

Từ đó suy ra $n^2-n+1 = 2\left(n+1\right)k^2+k$ hay $n^2-\left(2k^2+1\right)n-\left(2k^2+k-1\right) = 0$.

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn n. Khi đó do $2k^2+1$ là số lẻ nên để phương trình trên có nghiệm nguyên thì $\Delta = \left(2k^2+1\right)^2+4\left(2k^2+k-1\right)$ phải là số chính phương lẻ.

Ta thấy $\left(2k^2+1\right)^2 < \Delta < \left(2k^2+4\right)^2$. Do đó $\Delta = \left(2k^2+1\right)^2+4\left(2k^2+k-1\right) = \left(2k^2+3\right)^2$.

Từ đó ta tính được $k=3$ suy ra $n=20$ nên $p=127$. Thử lại ta thấy $p=127$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các số cần tìm là $p=2$ và $p=127$.

Bài 84.

Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a<b<c$.

Khi đó số nguyên tố lớn nhất là $a+b+c$ và số nguyên tố nhỏ nhất là $a+b-c$.

Do đó ta được $d = \left(a+b+c\right)-\left(a+b-c\right) = 2c$, nên để có d lán nhất ta cần chọn được số nguyên tố c lớn nhất.

Chú ý rằng a, b, c là các số nguyên tố lẻ vì nếu $a=2$ thì khi đó $b+c-a$ là số chẵn lớn hơn 2 nên không thể là số nguyên tố. Do đó cả bảy số nguyên tố đã cho đều là số lẻ.

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $a+b=800$, khi đó số nguyên tố $a+b-c \geq 3$ nên ta được $c \leq 797$. Vì 797 là số nguyên tố và ta cần lấy c lớn nhất nên ta chọn $c=797$.

Khi đó ta được $a+b+c=1597$ và $a+b-c=3$. Vì 1597 và 3 đều là các số nguyên tố nên ta cần chọn các số nguyên tố a, b sao cho $797+a-b$ và $797+b-a$ là các số nguyên tố.

La chọn $a = 13$ thì ta được $b = 787$ và $797 + a - b = 23; 797 + b - a = 1571$ đều là các số nguyên tố.

Lúc đó ta được $d = 2c = 2.797 = 1594$.

- Trường hợp 2: Nếu $b + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $b = 3$.

Mà ta lại có $a < b$ nên $a = 2$ không thỏa mãn. Do đó $c < 797$ nên $d < 2.797 = 1594$.

- Trường hợp 3: Nếu $a + c = 800$, khi đó $c < 800$. Nếu ta chọn $c = 797$ thì ta được $a = 3$.

Từ đó ta được $a + b - c \geq 5$ nên suy ra $b \geq 799$, do đó $b > c$ không thỏa mãn.

Do đó $c < 797$ nên $d = 2c < 1594$.

Vậy giá trị lớn nhất của d là 1594 với các số nguyên tố được chọn trong trường hợp 1 và $a + b = 800$.

Bài 85.

Gọi $UCLN(x, y) = d\left(d \in N^*\right)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x = da; y = db$ và $(a, b) = 1$.

Ta có $\dfrac{x^2 + py^2}{xy} = \dfrac{d^2a^2 + pd^2a^2}{d^2ab} = \dfrac{a^2 + pb^2}{ab} \in N^*$.

Từ đó ta được $a^2 + pb^2 \,\vdots\, ab \Rightarrow a^2 + pb^2 \,\vdots\, b \Rightarrow a^2 \,\vdots\, b$.

Do $(a, b) = 1$ nên ta suy ra được $b = 1$. Suy ra $a^2 + p \,\vdots\, a \Rightarrow p \,\vdots\, a$.

Do p là số nguyên tố nên ta được $a = 1$ hoặc $a = p$. Khi đó ta xét các trường hợp

- Với $a = 1$, khi đó ta được $x = y = d$ nên suy ra $\dfrac{x^2 + py^2}{xy} = \dfrac{d^2 + pd^2}{d^2} = p + 1$.

- Với $a = p$, khi đó ta được $x = dp; y = d$ nên suy ra $\dfrac{x^2 + py^2}{xy} = \dfrac{d^2p^2 + d^2p}{d^2p} = p + 1$.

Vậy ta luôn có $\dfrac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$.

Bài 86.

Ta xét bài toán tổng quát: Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho số nguyên dương A $(A > 3)$ viết được thành tổng $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó các số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số.

Giả sử $A = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ trong đó $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ là các hợp số. Khi đó theo đề bài ta phải tìm số n lớn nhất có thể.

Chú ý rằng để có n lớn nhất thì các hợp số $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ phải nhỏ nhất. Dễ thấy 4 là hợp số chẵn nhỏ nhất và 9 là hợp số lẻ nhỏ nhất. Do đó với mọi số nguyên dương A ta luôn có $A = 4a + r$, trong đó a là số nguyên dương và $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Đến đây ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Nếu $r = 0$, khi đó $A = 4a$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên số k lớn nhất là $n = a$

- Trường hợp 2: Nếu $r = 1$, khi đó $A = 4a + 1$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a - 1) = 4a + 1 + 4 > 4a + 1 = A$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 1 = 4(a - 2) + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

- Trường hợp 3: Nếu $r = 2$, khi đó $A = 4a + 2$. Tương tự trường hợp 2 ta có $n \le a$.

Xét $n = a$ ta có $A = 4a + 2 = 4(a - 1) + 6$ nên số n lớn nhất là $n = a$

- Trường hợp 4: Nếu $r = 3$, khi đó $A = 4a + 3$. Mà 4 là hợp số nhỏ nhất nên $n \le a$.

Xét $n = a$. Vì A là số lẻ nên tồn tại ít nhất một số a_i với $i = 1; 2; ...; n$ là số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a_1 lẻ, suy ra $a_1 \ge 9$. Khi đó

$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 9 + 4(a - 1) = 4a + 3 + 2 > 4a + 3 = A$

Xét $n = a - 1$, khi đó ta có $A = 4a + 3 = 4(a - 3) + 15 = 4(a - 3) + 6 + 9$. Do đó n lớn nhất là $n = a - 1$

Kết luận: Với số nguyên dương $A > 3$ và A chẵn thì A phân tích được thành a hợp số. Với số nguyên dương $A > 3$ và A lẻ thì A phân tích được thành $a - 1$ hợp số, trong đó a là thương trong phép chia số A cho 4.

Áp dụng: Với $A = 2016 = 4.504$ thì ta được n lớn nhất là 504 và $A = 2016 = 504.4$.

Với $A = 2017 = 4.504 + 1$ thì ta được n lớn nhât là 503 và $A = 2017 = 502.4 + 9$.

Bài 87.

Giả sử p, q, r là các số nguyên tố thỏa mãn phương trình $(p+1)(q+2)(r+3)=4pqr$.

Ta có $p,q,r\ge 2$. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- Nếu $r=2$, khi đó phương trình trên trở thành $5(p+1)(q+2)=8pq$.

Do $(5,8)=1$ và 5 là ước nguyên tố của pq nên ta được $p=5$ hoặc $q=5$.

+ Với $p=5$, khi đó ta được $5(5+1)(q+2)=8.5q\Rightarrow q=6$ không phải là số nguyên tố.

+ Với $q=5$, khi đó ta được $5(p+1)(5+2)=8.5p\Rightarrow p=7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r=3$, khi đó phương trình trên trở thành $(p+1)(q+2)=2pq$

Từ đó ta được $(p-1)(q-2)=4=1.4=2.2$. Do p và q là các số nguyên tố nên

$q-2\ne 2;q-2\ne 4$.

Nên từ đó ta suy ra được $\begin{cases}p-1=4\\q-2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=5\\q=3\end{cases}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Nếu $r>3$, khi đó ta có $4pqr=(p+1)(q+2)(r+3)<2r(p+1)(p+2)$

Hay ta được $2pq<(p+1)(q+2)\Rightarrow(p-1)(q-2)<4$.

Do đó $p-1<4;q-2<4$ và p là số nguyên tố nên ta được $p=2$ hoặc $p=3$.

+ Với $p=2$ thì từ phương trình đã cho ta được $3(q+2)(r+3)=8qr$.

Do $(3,8)=1$ nên 3 phải là ước nguyên tố của qr, mà q và r là các số nguyên tố, lại có $r>3$ nên suy ra được $q=3$. Từ đó ta được $r=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3$ thì từ phương trình đã cho ta được $(q+2)(r+3)=3qr$

Hay ta được $2qr-3q-2r=6\Leftrightarrow(q-1)(2r-3)=9=1.9=3.3$.

Lại có $r>3$ nên $2r-3>3$, do đó từ phương trình trên ta được $\begin{cases}2r-3=9\\q-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=6\\q=2\end{cases}$, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy các bộ ba số nguyên tố $(p;q;r)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(7;5;2),(5;3;3),(2;3;5)$.

Bài 88.

Đặt $p_1|a_1-a_2|=p_2|a_2-a_3|=...=p_n|a_n-a_1|=k$ với k là một số không âm.

Khi đó ta được $\left|a_1-a_2\right|=\frac{k}{p_1}$; $\left|a_2-a_3\right|=\frac{k}{p_2}$;...; $\left|a_n-a_1\right|=\frac{k}{p_n}$

Hay $a_1-a_2=\frac{kt_1}{p_1}$; $a_2-a_3=\frac{kt_2}{p_2}$;...; $a_n-a_1=\frac{kt_n}{p_n}$ với $t_1;t_2;...;t_n$ nhận giá trị là 1 hoặc -1.

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được $k\left(\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}\right)=0$

Đặt $M=\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n} \Rightarrow M-\frac{t_1}{p_1}=\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}=\frac{Q}{p_2.p_3...p_n}$. Suy ra Q là một số nguyên. Từ đó ta được $p_2.p_3...p_n\left(Mp_1-t_1\right)=Qp_1$. Hay ta được

$p_1\left(p_2.p_3...p_n.M-Q\right)=t_1.p_2.p_3...p_n$

Nếu M là số nguyên thì từ đẳng thức trên suy ra vế trái chia hết cho p_1 còn vế phải không chia hết cho p_1, điều này vô lí. Do đó M không thể là số nguyên, suy ra $M\neq 0$.

Do đó từ $k\left(\frac{t_1}{p_1}+\frac{t_2}{p_2}+\frac{t_3}{p_3}+...+\frac{t_n}{p_n}\right)=0$ ta suy ra được $k=0$

Điều này dẫn đến $p_1\left|a_1-a_2\right|=p_2\left|a_2-a_3\right|=...=p_n\left|a_n-a_1\right|=0$

Hay suy ra được $\left|a_1-a_2\right|=\left|a_2-a_3\right|=...=\left|a_n-a_1\right|=0$ nên $a_1=a_2=...=a_n$.

Bài 89.

Giả sử tồn tại các số nguyên tố a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $c=2$, khi đó $a^b+2011=2$, điều này vô lí do a, b lớn hơn 1.
- Nếu $c>3$, khi đó do c là số nguyên tố nên c là số lẻ.

Từ $a^b+2011=c$ ta suy ra được a^b+2011 là số lẻ nên a^b là số chẵn hay a là số chẵn.

Do a là số nguyên tố nên ta được $a=2$. Như vậy 2^b+2011 là số nguyên tố. Ta xét các khả năng sau

+ Khi $b=2$ thì ta được $2^b+2011=2015$ là một hợp số.

+ Khi $b\geq 3$, do b là số nguyên tố nên b là số lẻ. Ta đặt $b=2k+1, k\in N^*$.

Khi đó ta có $2^b+2011=2^{2k+1}+2011=2.2^{2k}+2011=2.4^k+2011=2.(3+1)^k+2011$

Dễ thấy $2(3+1)^k$ chia 3 dư 2 và 2011 chia 3 dư 2 nên ta được $2.(3+1)^k+2011$ chia hết cho 3.

Do đó 2^b+2011 chia hết cho 3. Suy ra 2^b+2011 là một hợp số.

Vậy không tồn tại các số nguyên tố a, b, c để $a^b+2011=c$.

Bài 90. Ta xét các trường hợp sau

- Với $p=2$, khi đó tồn tại $n=1$ và $x=y=1$ để $2^1=1^3+1^3$.
- Với $p=3$, khi đó tồn tại $n=2$ và $x=1; y=2$ để $3^2=1^3+2^3$.
- Với $p>3$, khi đó giả sử tồn tại các số nguyên dương n, x, y với n bé nhất thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

Do $p>3$ nên suy ra $(x;y)\neq(1;1)$, do đó $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy>1$ và $x+y>1$.

Ta có $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ nên $(x^3+y^3)\vdots(x+y)$ và $(x^3+y^3)\vdots(x^2-xy+y^2)$.

Do đó suy ra $(x+y)$ và (x^2-xy+y^2) phải cùng chia hết cho p.

Suy ra $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3xy$ chia hết cho p. Do p là số nguyên tố và $p^n=x^3+y^3$ nên ta được x và y chia hết cho p.

Từ đó suy ra $n>3$, khi đó chia cả hai vế của $p^n=x^3+y^3$ cho p^3 ta được

$$p^{n-3}=\left(\frac{x}{p}\right)^3+\left(\frac{y}{p}\right)^3.$$

Từ đó suy ra tồn tại số tự các số nguyên dương $n-3;\frac{x}{p};\frac{y}{p}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Tuy nhiên điều này lại mâ thuẫn với việc nhọn n nhỏ nhất.

Vậy với $p>3$ thì không tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

Do đó các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p=2$ và $p=3$.

Bài 91. Đặt $A=\frac{n^3+8n^2+1}{3n}=\frac{n^2}{3}+\frac{8n}{3}+\frac{1}{3n}$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $n=3k$ với k là một số nguyên dương, khi đó ta được

$$A=3k^3+8k+\frac{1}{9k}$$

Dễ thấy $3k^2+8k<A<3k^2+8k+1$ nên suy ra $\left[A\right]=\left[3k^2+8k+\frac{1}{9k}\right]=3k^2+8k=k\left(3k+8\right)$.

Để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k=1$, khi đó $\left[A\right]=11$ là đó nguyên tố. Từ đó ta tìm được $n=3$

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+1$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+2k+\frac{1}{3}+8k+\frac{8}{3}+\frac{1}{9k+3}=3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}$$

Dễ thấy $3k^2+10k+3<A<3k^2+10k+3+1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+10k+3+\frac{1}{9k+3}\right]=3k^2+10k+3=\left(k+3\right)\left(3k+1\right).$$

Như vậy để $\left[A\right]$ là một số nguyên tố thì $k+3=1$ hoặc $3k+1=1$, từ đó ta tìm được $k=1$.

Khi đó $\left[A\right]=3$ là một số nguyên tố và $n=1$.

- Trường hợp 2: Nếu $n=3k+2$ với k là một số nguyên, khi đó ta được

$$A=3k^2+4k+\frac{4}{3}+8k+\frac{16}{3}+\frac{1}{9k+6}=3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}$$

Ta thấy $0<\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}<1$ nên suy ra

$$\left[A\right]=\left[3k^2+12k+6+\frac{1}{9k+3}+\frac{2}{3}\right]=3k^2+12k+6=3\left(k^2+4k+2\right)$$

Suy ra với mọi k thì $\left[A\right]$ luôn là số nguyên tố.

Vậy để $\left[A\right]$ là số nguyên tố thì $n=1$ hoặc $n=3$.

Bài 92. Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $p=2$, khi đó ta có $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{k^2-2k}=\sqrt{\left(k^2-2k+1\right)-1}=\sqrt{\left(k-1\right)^2-1}$

Để $\sqrt{\left(k^2-2k+1\right)-1}$ thì $\left(k-1\right)^2-1$ là một số chính phương.

Như vậy $\left(k-1\right)^2-1$ và $\left(k-1\right)^2$ là hai số tự nhiên liên tiếp. Từ đó ta được $\left(k-1\right)^2-1=0$ và $\left(k-1\right)^2=1$. Trường hợp này loại.

+ Nếu $p>2$, khi đó p là số nguyên tố lẻ. Nếu k chia hết cho p, khi đó tồn tại số nguyên dương n để $k=np$. Từ đó ta được $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{np^2\left(n-1\right)}$, như vậy để $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương thì $p^2n(n-1)$ phải là số chính phương, mà $(n,n-1)=1$ nên n và $n-1$ phải là hai số chính phương. Điều này không thể xảy ra. Do đó k không thể chia hết cho p.

Từ đó ta được k và p là hai số nguyên tố cùng nhau, điều này dẫn đến k và $k-p$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Từ đó để $\sqrt{k^2-kp}=\sqrt{k(k-p)}$ là một số nguyên dương thì k và $k-p$ phải là hai số chính phương. Đặt $k=m^2$ và $k-p=n^2$ với $m,n\in N^*$

Khi đó ta được $p=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$. Do p là số nguyên tố nên ta được $p=m+n$ và $m-n=1$. Do đó ta tính được $k=\dfrac{(p+1)^2}{4}$.

Vậy với $k=\dfrac{(p+1)^2}{4}$ và p là số nguyên tố lẻ thì $\sqrt{k^2-kp}$ là một số nguyên dương.

Bài 93. Giả sử p và q là các số nguyên tố thỏa mãn $p^3-q^5=(p+q)^2$. Khi đó ta được $p^3-q^5>0$.

Từ đó ta được $p^3>q^5\ge 2^5$ nên ta được $p>3$.

Suy ra p không chia hết cho 3. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $q=3$, khi đó $p^3-3^5=(p+3)^2 \Leftrightarrow p^3-p^2-6p-252=0 \Leftrightarrow (p-7)(p^2+6p+36)=0$.

Do $p^2+6p+36>0$ nên ta được $p-7=0 \Rightarrow p=7$.

- Nếu $q\ne 3$ khi đó $p=3m\pm 1; q=3n\pm 1$ với m, n là các số nguyên dương.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n+1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n-1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 2 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n+1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 1 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n-1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(3;7)$.

Bài 94.

Ta có $2a^2b = a(a+b)^2 - a(a^2+b^2)$.

Do p^4 là ước của a^2+b^2 và $a(a+b)^2$ nên p^4 cũng là ước của $2a^2b$.

Do p là số nguyên tố lẻ nên suy ra p^4 là ước của a^2b.

Nếu a không chia hết cho p^2 thì số mũ của p trong a^2 không vượt quá 2, khi đó a^2 không chia hết cho p^4. Do đó b phải chứa p^2, điều này có nghĩa là b chia hết cho p^2, từ đó ta được b^2 chia hết cho p^4. Từ đó suy ra a^2+b^2 không chia hết cho p^4, điều này mâu thuẫn vơi giả thiết.

Do vậy a phải chia hết cho p^2 nên a^2 không chia hết cho p^4. Từ a^2+b^2 không chia hết cho p^4 ta suy ra được b^2 chia hết p^4, do đó b chia hết cho p^2

Dẫn đến $a+b$ chia hết cho p^2 nên suy ra $a(a+b)$ chia hết cho p^4.

Vậy p^4 cũng là ước của $a(a+b)$.

Bài 95.

Đặt $A = a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4$, dễ thấy A là số chẵn. Do đó A là số nguyên tố khi và chỉ khi $A = 2,$ hay $A = a^2 - b^2 - 5a + 3b + 4 = 2$, suy ra $(a+b-4)(a-b-1) = 2$.

Ta xét các trường hợp sau :

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=1 \\ a-b-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=4; b=1$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=2 \\ a-b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=4;\ b=2$

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-1 \\ a-b-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=2$.

+ Trường hợp $\begin{cases} a+b-4=-2 \\ a-b-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1;\ b=1$

Bài 96.

Ta có $f(5) - f(4) = 2012 \Leftrightarrow 61a + 9b + c = 2012$

$$f(7)-f(2)=(343a+49b+7c+d)-(8a+4b+2c+d)=335a+45b+5c$$
$$=305a+45b+5c+30a=2012+30a=2(1006+15a)$$

Vì a là số nguyên nên ta được $f(7)-f(2)$ chia hết cho 2 và $1006+15a$ khác 1

Do đó $f(7)-f(2)$ là hợp số

Bài 97.

Theo bài ra f(x) có dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a nguyên dương.

Ta có $2010=f(5)-f(3)=(5^3-3^3)a+(5^2-3^2)b+(5-3)c=98a+16b+2c$

$$\Rightarrow 16b+2c=(2010-98a)$$

Lại có

$$f(7)-f(1)=(7^3-1^3)a+(7^2-1^2)b+(7-1)c=342a+48b+6c=342a+3(16b+2c)$$
$$=342a+3(2010-98a)=48a+6030=3(16a+2010)$$

Vì a nguyên dương nên $16a+2010>1$. Vậy $f(7)-f(1)$ là hợp số

Bài 98. Biến đổi $2^m.p^2+1=q^5$ thành $2^m.p^2=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$

Do $q^4+q^3+q^2+q+1$ lẻ nên $q-1=2^m.p^k$ với $k=0;1;2$

+ Nếu $k=0$ khi đó ta có $q-1=2^m$ Từ đó ta được

$$p^2=\frac{(2^m+1)^5-1}{2^m}=2^{4m}+5.2^{3m}+10.2^{2m}+10.2^m+5$$

Nếu $m>1$ thì $p^2\equiv 5 \pmod 8$ vô lí nên suy ra $m=1$, từ đó ta được $p=11;q=3$.

+ Nếu $k=1$ khi đó ta có $q-1=2^m.p$ do đó ta được $p=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$

Do đó để p là số nguyên tố thì $q-1=1\Rightarrow q=2$, từ đó suy ra $q=31$.

Thay vào phương trình ban đầu ta được $2^m.31^2+1=2^5$, phương trình không có m nguyên dương thỏa mãn.

+ Nếu $k=2$ khi đó ta có $q-1=2^m.p^2$ do đó ta được $1=q^4+q^3+q^2+q+1$ điều này vô lí do q là số nguyên tố

Vậy bộ $(m;p;q)=(1;11;3)$ là bộ duy nhất cần tìm.

Bài 99. Từ giả thiết suy ra $p_6 > 2 \Rightarrow p_6^2 \equiv 1(\bmod 8)$.

Mà $p_i^2 \equiv 1;4(\bmod 8)$ nên trong 5 số $p_i\left(i=\overline{1;5}\right)$ có bốn số bằng 2, một số lớn hơn 2.

Thật vậy, giả sử k là số số chẵn trong dãy p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Suy ra

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2 = 4k + A \text{ (A là tổng bình phương của 5-k số lẻ)}$$

$$\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right) \equiv 4k+(5-k).1(\bmod 8) \equiv 3k+5(\bmod 8)$$

Mà $\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right) \equiv 1(\bmod 8)$ nên $3k+4 \vdots 8 \Rightarrow k=4$.

Nhận xét được chứng minh xong.

Bây giờ ta giả sử $p_1=p_2=p_3=p_4=2;\, p_5>2$

Từ đó suy ra $p_6^2-p_5^2=16 \Leftrightarrow (p_6-p_5)(p_6+p_5)=16$

Từ đó giải được $p_6=5; p_5=3$.

Vậy bộ các số nguyên tố các số cần tìm là $(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5;p_6)$ trong đó $(p_1;p_2;p_3;p_4;p_5)$ được xác định là $(2;2;2;2;3)$ và các hoán vị, còn có định $p_6=5$.

Bài 100.

Giả sử có số nguyên a để $(a^2+1) \vdots p$ hay ta có $a^2 \equiv -1(\bmod p)$

Suy ra $a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$ hay $a^{p-1}-1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}-1(\bmod p)$

Nhưng theo định lí Fecmat thì $a^{p-1}-1 \equiv 0(\bmod p)$

Nên ta được $(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1 \equiv 0(\bmod p)$ mà p là số nguyên tố dạng $4k+3$ nên

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1 \equiv 0(\bmod p) \Leftrightarrow -2 \equiv 0(\bmod p), \text{ điều này vô lí.}$$

Nên không tồn tại số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 101. a) Ta có:

$$n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n).$$

Do $n^2+2+2n>2$ nên nếu n^4+4 là số nguyên tố thì $n^2-2n+2=1 \Leftrightarrow n=1$.

Thử lại: Với $n=1$ thì $n^4+4=5$ là số nguyên tố.

Vậy, với n=1 thì n^4+4 là số nguyên tố.

b) Ta có: $n^{2003}+n^{2002}+1=n^2(n^{2001}-1)+n(n^{2001}-1)+n^2+n+1$.

Với $n>1$ ta có:

$n^{2001}-1\vdots n^3-1\vdots n^2+n+1$ do đó: $\left(n^{2003}+n^{2002}+1\right)\vdots\left(n^2+n+1\right)$ và $n^2+n+1>1$ nên $n^{2003}+n^{2002}+1$ là hợp số.

Với n = 1 thì $n^{2003}+n^{2002}+1=3$ là số nguyên tố.

Bài 102.

a) Giả sử $2p+1=n^3$ (với $n\in N$); n là số lẻ nên $n=2m+1$ ($m\in N$), khi đó

$$2p+1=(2m+1)^3 \Rightarrow p=m(4m^2+6m+3).$$

Vì p là số nguyên tố nên $m=1$, suy ra $p=13$.

Thử lại: $2p+1=2.13+1=27=3^3$. Vậy $p=13$.

b) Giả sử $13p+1=n^3(n\in N); p\geq 2$ suy ra $n\geq 3$.

$$13p+1=n^3 \Rightarrow 13p=(n-1)(n^2+n+1).$$

13 và p là các số nguyên tố, mà $n-1>1$ và $n^2+n+1>1$ nên $n-1=13$ hoặc $n-1=p$.

i) Với $n-1=13$ thì $n=14$, khi đó $13p=n^3-1=2743\Rightarrow p=211$ là số nguyên tố.

ii) Với $n-1=p$ thì $n^2+n+1=13\Rightarrow n=3$, khi đó $p=2$ là số nguyên tố.

Vậy với p = 2, p = 211 thì 13p + 1 là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 103. Giả sử x, y là các số nguyên tố thỏa: $x^2-2y^2=1$. Khi đó $x^2=2y^2+1$, suy ra x là số lẻ, đặt $x=2n+1(n\in N^*)$. Ta có:

$(2n+1)^2=2y^2+1\Rightarrow 4n^2+4n+1=2y^2+1\Rightarrow y^2=2(n^2+n)\vdots 2\Rightarrow y\vdots 2$, mà y là số nguyên tố nên suy ra y = 2.

Với y = 2, ta có $x=3$.

Thử lại với $x=3, y=2$ thì $x^2-2y^2=1$.

Bài 104. Vì x, y là các số nguyên tố nên $x\geq 2, y\geq 2$ suy ra $z\geq 5$.

z là số nguyên tố lẻ nên x^y là số chẵn suy ra x = 2, khi đó $z=2^y+1$.

Nếu y lẻ thì $2^y+1\vdots 3$, suy ra $z\vdots 3$, vô lí. Vậy y chẵn, suy ra y=2, $z=2^2+1=5$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $x=y=2; z=5$.

Bài 105. Đặt $n=3^k.m$ với (m, 3)=1. Giả sử m > 1, xét hai trường hợp:

i) $m=3l+1(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+1)}+4^{3^k(3l+1)}=1+a^{(3l+1)}+a^{(6l+2)}$, (với $a=2^{3^k}$), suy ra

$1+2^n+4^n=a(a^{3l}-1)+a^2(a^{6l}-1)+a^2+a+1\vdots a^2+a+1\Rightarrow 1+2^n+4^n$ là hợp số.

ii) $m=3l+2,(l\in N^*)$. Ta có:

$1+2^n+4^n=1+2^{3^k(3l+2)}+4^{3^k(3l+2)}=1+a^{3l+2}+a^{6l+4}=a(a^{6l+3}-1)+a^2(a^{3l}-1)+a^2+a+1 \vdots a^2+a+1$

(với $a=2^{3^k}$).

Suy ra $1+2^n+4^n$ là hợp số.

Vậy m = 1 tức là n = 3^k.

Bài 106. Giả sử (a, b) = t, khi đó: $a=ta_1, c=tc_1$ với $(a_1,c_1)=1$.

Từ ab = cd suy ra $a_1b=c_1d \Rightarrow b \vdots c_1$.

Đặt: $b=kc_1 \Rightarrow c_1d=a_1.kc_1 \Rightarrow d=ka_1$.

Khi đó: $A=a^n+b^n+c^n+d^n=t^na_1^n+k^nc_1^n+t^nc_1^n+k^na_1^n=(k^n+t^n)(a_1^n+c_1^n)$.

Vì $k,t,a_1,c_1 \in N^*$ nên A là hợp số.

Bài 107. Ta có:

$$p=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Với n = 2 ta có p = 2.

Với n = 3 ta có p = 5.

Với n > 3 thì $\frac{n-1}{2}>1$ và n+2 >1 nên p là hợp số.

Vậy với n = 2, n = 3 thì p là số nguyên tố có dạng $\frac{n(n+1)}{2}-1$.

Bài 108. Vì a,b có vai trò như nhau nên có thể giả sử a > b.

Giả sử $\frac{ab}{|a-b|}=p$ với p là số nguyên tố.*

Suy ra $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc $b \vdots p \Rightarrow p \in \{2,3,5,7\}$.

Từ * ta có ab = ap - bp $(a+p)(p-b)=p^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+p=p^2 \\ p-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=p^2-p \\ b=p-1 \end{cases}$

Với p = 2 ta có $\overline{ab}=21$ hoặc $\overline{ab}=12$.

Với p = 3 ta có $\overline{ab}=62$ hoặc $\overline{ab}=26$.

Với p = 5 và p = 7 ta có a có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

Bài 109. a) Giả sử phản chứng rằng k > 0 và $k \neq 2^n$ với mọi n.

Khi đó k = 2^n . t, với t lẻ > 1. Vô lí với 2^k + 1 là số nguyên tố.

Vậy k = 0 hoặc k = 2^n.

b) Giả sử k = m . t với 1 < t <k, khi đó 2^k - 1 = $\left(2^t\right)^m-1 \vdots 2^t-1 \Rightarrow 2^k-1$ là hợp số vì 2^t-1 >1.

Vậy k là số nguyên tố.

Bài 110. Trong 10 số tự nhiên liên tiếp, có 5 số chẵn và 5 số lẻ (trong 5 số chẵn, có nhiều nhất là 1 số nguyên tố chẵn là 2).

Vậy: trong 10 số đó có không quá 6 số nguyên tố

+) Nếu k = 0, từ 1 đến 10 có 4 số nguyên tố: 2; 3; 5; 7

+) Nếu k = 1 từ 2 đến 11 có 5 số nguyên tố: 2; 3; 5; 7; 11

+) Nếu k > 1 từ 3 trở đi không có số chẵn nào là số nguyên tố. Trong 5 số lẻ liên tiếp, ít nhất có 1 số là bội số của 3 do đó, dãy sẽ có ít hơn 5 số nguyên tố.

Vậy với k = 1, dãy tương ứng: k + 1; k + 2, ... k + 10 có chứa nhiều số nguyên tố nhất (5 số nguyên tố).

Bài 111. +) Xét trường hợp p là hợp số:

Nếu p là hợp số thì p là tích của các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ các luỹ thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các luỹ thừa ấy chứa trong (p – 1)!.

Vậy: (p – 1) !: p   (điều phải chứng minh).

+) Xét trường hợp p là số nguyên tố:

Vì p ∈ P   => p nguyên tố cùng nhau với mọi thừa số của (p –1)!

(vì p > p - 1 => (p – 1)! : p   (điều phải chứng minh)

Bài 112. Gọi p là ước số nguyên tố của (1994! – 1)

Giả sử p ≤1994 => 1994. 1993 ..... 3. 2. 1 chia hết cho p

<=> 1994! Choa hết cho p

mà (1994! – 1) : p => 1 : p   (vô lý)

Vậy: p không thể nhỏ hơn hoặc bằng 1994 hay p > 1994 (điều phải chứng minh).

Bài 113. Vì n > 2 nên k = n! – 1 > 1, do đó k có ít nhất một ước số nguyên tố p.

Ta chứng minh p > n .Thật vậy: nếu p ≤ n thì n! chia hết cho p

Mà   k chia hết cho p => (n! – 1) chia hết cho p.Do đó: 1 chia hết cho p   (vô lý)

Vậy: p > n => n < p < n! – 1 < n! (Điều phải chứng minh)

Bài 114. Ta có: $m=\frac{3^p-1}{2}.\frac{3^p+1}{4}=a.b$, với $a=\frac{3^p-1}{2},b=\frac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m\equiv 1$ (mod 3).Theo định lí Fermat, ta có: $9^p-9\vdots p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9\vdots 8p\Rightarrow m-1\vdots\frac{9^p-9}{8}\vdots p$.

Vì $m-1\vdots 2$ nên $m-1\vdots 2p$, khi đó: $3^{m-1}-1\vdots 3^{2p}-1\vdots\frac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

Bài 115. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$2003+23k=p^n$ (1).

Trong đó k,n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên (p,23)=1.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23s.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,....$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thõa mãn (1). Chẳng hạn:

Với p=2 có $2003+23.91=2^{12}$

Với p=3 có $2003+23.8=3^7$

Với p=4 có $2003+23.6=2141$

Với p=2003 thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23k=2003^{23}$.

Bài 116. Gọi bảy số nguyên tố là $p_{1,}p_{2,}p_{13,}....., p_7$.

Ta có: $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7=p_1^6+p_2^6+p_3^6+p_4^6+p_5^6+p_6^6+p_7^6$ (*)

Ta cần dùng định lí Fecma nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6\equiv 1(\bmod 7)$.(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3=(7k+r)^3=7t\pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0\le r\le 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0\le k\le 7$.

Nếu k = 0, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

$7.7.7.7.7.7.7=7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6$ thỏa mãn (*).

Nếu k = 7, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Fec ma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.

Bài 117. Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2+1=y^3+2^3 \Leftrightarrow x^2+1=(y+2)(y^2-2y+4)$ (2)

Nếu y chẵn thì vế phải của (2) chia hết cho 4 $\Rightarrow x$ lẻ, $x=2t+1\Rightarrow x^2+1=4t^2+4t+2$ không chia hết cho 4, mâu thuẫn.

Vậy y là số lẻ, $y=2k+1\Rightarrow y^2-2y+4=4k^2+3$ nên nó phải có ước số nguyên tố lẻ dạng 4m + 3 (vì tích các số dạng 4m + 1 lại có dạng 4k + 1). Suy ra x^2+1 có ước số nguyên tố dạng p = 4m + 3, trái với mệnh đề 2.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 118. Giả sử $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}=k$ nguyên dương và k là ước số của 1995 = 5.3.7.19 = 5n với n= 3.7.19. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng 2(2m + 1) + 1 = 4m +3

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d = (x, y)$ thì $x = du, y = dv$ với $(u, v) = 1$.

Theo giả thiết $x^2 + y^2 = k(x - y) \Leftrightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v)$ (1).

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của n $\Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng 4m + 3.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d = k.t$. Từ (1) có $t(u^2 + v^2) = u - v$, do đó $u^2 < u^2 + v^2 \le u - v < u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) k = 5m với m là ước số của m. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2 + v^2) = 5m(u - v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra d= m.t. Từ đó ta có

$$t(u^2 + v^2) = 5(u - v) \quad (2)$$

Từ (2) có $u^2 + v^2 \le 5(u - v)$

$$A = u^2 + v^2 - 5(u - v) \le 0 \quad (3)$$

Mặt khác

$$4A = 4u^2 - 20u + 25 + 4v^2 + 20v + 25 - 50 = (2u - 5)^2 + (2v + 5)^2 - 50 \ge 1^2 + 7^2 - 50 \ge 0 \Rightarrow A \ge 0$$

Kết hợp với (3) phải có A= 0. Điều này xảy ra chỉ khi $2u - 5 = \pm 1$ và v = 1,

nghĩa là $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Từ A = 0 và (2) suy ra $t = 1 \Rightarrow d = m$. Các số x, y phải tìm là $\begin{cases} x = 3m \\ y = m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2m \\ y = m \end{cases}$ trong đó m là ước của n = 3.7.19, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 119. Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Ta có:

$100(a + n) + 10(b - n) + (c - n) = n(100a + 10b + c)$ hay

$100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$.

Từ đó ta được:

$$100a + 10b + c = \frac{89n}{n - 1}.$$

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc n - 1 phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho n-1.

Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được n =2 và $\overline{abc} = 178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

Bài 120. Gọi 3 số nguyên tố phải tìm là; a, b, c ta có:

a.b.c = 5(a+b+c) => abc $\vdots$ 5

Vì a, b, c có vai trò bình đẳng

Giả sử: a $\vdots$ 5, vì a $\in$ P => a = 5

Khi đó: 5bc = 5(5 + b + c)

<=> 5 + b + c = bc

<=> bc – b - c + 1 = 6

<=> b(c - 1) – (c - 1) = 6

<=> (c - 1)(b - 1) = 6

Do vậy: b-1 = 1=> b = 2

Và c-1 = 6 và c = 7

b-1 = 2=> b = 3 (loại vì c = 4 $\notin$ P)

và c-1 = 3 và c = 4

Vai trò a, b, c, bình đẳng

Vậy bộ số (a ;b ;c) cần tìm là (2 ;5 ;7)

Bài 121. Đặt $a = 2.3.4...n(n+1) = (n+1)!$

Xét n số $a+2, a+3, ..., a+n+1$. Ta thấy $a+i \vdots i$ với mọi $i = 2,3,...,n+1$. Suy ra n số này đều là hợp số.

Bài 122. Giả sử n là hợp số, ta có $n = ab$ với $2 \le a \le b < n$. Khi đó

$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + ... + 1)$ là hợp số. Điều này trái với giả thiết. Vậy n là số nguyên tố.

Bài 123. Ta xét các trường hợp sau

+) p = 2, khi đó $2^p + p^2 = 8$ là hợp số.

+) p = 3, khi đó $2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố.

+) p > 3, khi đó $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$.

Vì p lẻ và không chia hết cho 3 nên $2^p + 1 \vdots 3$ và $p^2 - 1 \vdots 3$.

Suy ra $2^p + p^2 \vdots 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số.

Vậy $p = 3$ là số cần tìm.

Bài 124. Gọi x_0 là nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - px + q = 0$, ta có $q \vdots x_0$ nên $x_0 = 1$ hoặc $x_0 = q$.

+) $x_0 = 1$ ta có $1 - p + q = 0 \Leftrightarrow p = q + 1$, suy ra $q = 2, p = 3$.

+) $x_0 = q$ ta có $q^2 - pq + q = 0 \Leftrightarrow p = q + 1$, suy ra $q = 2, p = 3$.

Vậy $(p, q) = (3, 2)$.

Bài 125. Giả sử $n \ge 2$.

Trong ba số p, q, r có một số chẵn.

* $r=2$, khi đó $p^n+q^n=4$ điều này không xảy ra

* $p>q=2$, ta có: $p^n+2^n=r^2$.

+) n lẻ. Suy ra: $(p+2)\left(p^{n-1}-2p^{n-2}+...+2^{n-1}\right)=r^2$.

Vì $p+2>1$ và $p^{n-1}-2p^{n-2}+...+2^{n-1}>2^{n-1}>1$

Nên ta có $r=p+2$, suy ra $p^n+2^n=(p+2)^2=p^2+4p+4$. Điều này không thể xảy ra với $n\geq 3$.

+) $n=2k$, ta có: $p^{2k}+2^{2k}=r^2$. Theo phương trình Pitago ta có:

$p^k=a^2-b^2$, $2^k=2ab$, $r=a^2+b^2$ với $a,b\in Z, a>b, (a,b)=1$.

Ta có: $b=1, a=2^{k-1}$, suy ra $p^k=4^{k-1}-1<4^k \Rightarrow p=3$.

Hay $3^k=4^{k-1}-1$ phương trình này vô nghiệm.

Do đó ta có $n=1$.

Bài 126. *) Nếu x hoặc y chia hết cho p thì hiển nhiên số còn lại cũng chia hết cho p.

*) Xét x, y cùng không chia hết cho p . Vì p là số nguyên tố nên $(x;p)=(y;p)=1$.

Do đó, theo định lí Fecma ta có:

$x^{p-1}\equiv y^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ hay $x^{4k+2}\equiv y^{4k+2} \pmod p$

$\Leftrightarrow \left(x^2\right)^{2k+1}\equiv\left(y^2\right)^{2k+1} \pmod p$.

Suy ra $x\equiv y \pmod p$, do đó $x^2+y^2\equiv 2x^2 \pmod p \Rightarrow 2 \vdots p$ vô lí.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 127. Ta có $3m^2+6n-61=3k+2$

Nếu $k\geq 1$ ta có $x=3^{3k+2}+4=9.27^k+4 \vdots 13$.

Suy ra $k=0$ hay $3m^2+6n-61=2 \Leftrightarrow m^2+2n-21=0$.

Vì m^2 lẻ và $m^2<21$ nên $m^2=1, m^2=9$.

* $m=1\Rightarrow n=10$

* $m=3\Rightarrow n=6$.

Bài 128. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a\geq b\geq c$.
Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$.

Do đó $a^3+b^3+c^3-3abc$ là số nguyên tố khi xảy ra một trong các trường hợp sau:
$a+b+c=1$ và $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ là số nguyên tố.

Từ $a+b+c=1 \Rightarrow a=1, b=c=0$, khi đó $a^3+b^3+c^3-3abc=1$ không là số nguyên tố.

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$ và $a+b+c$ là số nguyên tố.

Ta có $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2$.

Suy ra $\begin{cases} a=b \\ b-c=1 \\ c-a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=b-1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=3b-1$

Hoặc $\begin{cases} a-b=1 \\ b-c=0 \\ a-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow b=c=a-1$.

Vậy các số tự nhiên cần tìm là $(k;k;k-1)$ và các hoán vị với $3k-1$ là số nguyên tố.

Hoặc $(k;k-1;k-1)$ và các hoán vị với $3k-2$ là số nguyên tố.

Bài 129. Giả sử $a \le b \le c$.

Ta có $abc < ab+bc+ca < 3bc \Rightarrow a<3 \Rightarrow a=2$.

Khi đó $2bc < 2(b+c)+bc \Rightarrow bc < 2(b+c) \le 4c \Rightarrow b \le 3 \Rightarrow b \in \{2,3\}$.

+) $b=2 \Rightarrow 2c < 2(2+c)$ đúng với mọi $c \ge 2$, c nguyên tố.

+) $b=3 \Rightarrow 3c < 2(3+c) \Rightarrow c<6 \Rightarrow c \in \{3,5\}$.

Bài 130. Từ phương trình ta suy ra $a^2+b^2+c^2=1(mod\,3)$. Suy ra , trong ba số a,b,c có hai số chia hết cho 3.

$a=b=3,$ ta có $18+16c^2=9k^2+1 \Leftrightarrow (3k-4c)(3k+4c)=17$

Suy ra $\begin{cases} 3k+4c=17 \\ 3k-4c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ c=2 \end{cases}$

$c=3$, không mất tính tổng quát, ta giả sử $a=3$. Khi đó ta có $(3k-b)(3k+b)=152=19.8$

+) $\begin{cases} 3k+b=19 \\ 3k-b=1 \end{cases}$ vô nghiệm

+) $\begin{cases} 3k+b=38 \\ 3k-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=7 \\ b=17 \end{cases}$

+) $\begin{cases} 3k+b=76 \\ 3k-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=13 \\ b=37 \end{cases}$

+) $\begin{cases} 3k+b=152 \\ 3k-b=2 \end{cases}$ vô nghiệm.

Bài 131. Nếu $p=3$, ta có $q^2 \mid 3^6-1=2^3.7.11$ nên $q=2$.

Xét $p\neq 3$, ta có $p^2 \mid (q+1)(q^2-q+1)$.

Mà $(q+1,q^2-q+1)=(q+1,3)=1$ hoặc 3. Suy ra hoặc $p^2 \mid q+1$ hoặc $p^2 \mid q^2-q+1$. Từ đây, suy ra $p<q$.

Nếu $q=p+1$ ta có $p=2,q=3$.

Xét $q\geq p+2$. Vì $q^2 \mid (p-1)(p+1)(p^2-p+1)$.

Do $(q,p+1)=(q,p-1)=1$ và $(p^2-p+1,p^2+p+1)=(p^2+p+1,2p)=1$ nên ta có hoặc $q^2 \mid p^2+p+1$ hoặc $q^2 \mid p^2-p+1$.

Mà $q\geq p+2$ nên $q^2\geq (p+2)^2>p^2+p+1>p^2-p+1$. Suy ra $q^2 \mid p^6-1$.

Vậy $(p,q)=(2,3);(3,2)$.

Bài 132. Nếu các số nguyên tố p, q, r đều khác 3 thì p, q, r có dạng $3k\pm 1$ suy ra p^2, q^2, r^2 chia cho 3 đều dư là 1. Khi đó $p^2+q^2+r^2 \vdots 3$ và $p^2+q^2+r^2>3$ nên $p^2+q^2+r^2$ là hợp số.

Vậy $p=3$, $q=5$, $r=7$, khi đó $p^2+q^2+r^2=3^2+5^2+7^2=83$ là số nguyên tố.

Bài 133. Đặt $a=5^{25}$. Ta có $A=\dfrac{a^5-1}{a-1}=a^4+a^3+a^2+a+1$

$$=(a^2+3a+1)^2-5a(a+1)^2.$$

Thay $a=5^{25}$ ta được:

$$A=(a^2+3a+1)^2-5^{26}(a+1)^2$$
$$=(a^2+3a+1-5^{13}(a+1))(a^2+3a+1+5^{13}(a+1))$$

Từ đó có đpcm.

Bài 134. Vì p là số nguyên tố và $p>3$, nên số nguyên tố p có 1 trong 2 dạng: 3k + 1,3k + 2 với $k\in N*$.

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2\ =3k+3=(k+1)\Rightarrow p+2 \vdots 3$ và $p+2>3$

Do đó p +2 là hợp số (trái với đề bài $p+2$ là số nguyên tố)

Nếu $p=3k+2$ thì $p+1=3k+3=3(k+1)$ (1)

Do p là số nguyên tố và p > 3 $\Rightarrow p$ lẻ $\Rightarrow k$ lẻ $\Rightarrow k+1$ chẵn $\Rightarrow k+1 \vdots 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $p+1 \vdots 6$

Bài 135. Vì p là số nguyên tố và $(p>3)$, nên số nguyên tố p có một trong hai dạng: $3k+1; 3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $p=3k+2$ thì $p+4=3k+6=3(k+2) \Rightarrow p+4 \vdots 3$ và $p+4>3$

Do đó $p+4$ là hợp số (trái với đề bài $p+4$ là số nguyên tố).

Nếu $p=3k+1$ thì $p+8=3k+9=3(k+3) \Rightarrow p+8 \vdots 3$ và $p+8>3$

Do đó $p+8$ là hợp số.

Vậy số nguyên tố p có dạng $p=3k+1$ thì $p+8$ là hợp số.

Bài 136. Từ $p^2-5q^2=4 \Leftrightarrow (p-2)(p+2)=5q^2$

Do $0<p-2<p+2, q$ nguyên tố nên $p-2$ nhận các giá trị 1, 5, q, q^2

Ta có bảng sau:

$p-2$	$p+2$	p	q
1	$5q^2$	3	1
5	q^2	7	3
p	$5q$	3	1
p^2	5	3	1

Vậy $(p,q)=(7;3)$ thỏa mãn.

Bài 137. Vì ba số nguyên tố đầu tiên là $2,3,5$ nên trong 12 số nguyên tố phân biệt đã cho luôn có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Vì số nguyên tố lớn hơn 5 nên: 9 số trên khi chia cho 4 có số dư là 1 hoặc 2. Theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất 5 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Mà 5 số này lại không chia hết cho 5, vì thế trong 5 số ấy có ít nhất 2 số mà ta có thể giả sử là p_1, p_2 sao cho $(p_1-p_2) \vdots 5$. Ngoài ra hiển nhiên ta có $(p_1-p_2) \vdots 3$ dẫn đến $(p_1-p_2) \vdots 15$

Xét 7 số còn lại. theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 4 số có cùng số dư khi chia hết cho 3. Đem 4 số này chia cho 5 cho hai khả năng xảy ra:

Nếu có 2 số (chẳng hạn p_3, p_4)mà $(p_3-p_4) \vdots 5$. Rõ ràng $(p_3-p_4) \vdots 2$ và $(p_3-p_4) \vdots 3$. Vì $(5;3;2)=1$ nên ta có $(p_3-p_4) \vdots 30$. Lấy hai số p_5, p_6 bất kì (ngoài ra p_1, p_2, p_3, p_4) đã chọn thì p_5, p_6 lẻ (do số nguyên tố khác 2) nên $(p_5+p_6) \vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6) \vdots 30.30.2=1800$.

Nếu 4 số này khi chia cho 5 có các số dư khác nhau là $1;2;3;4$. Giả sử $(p_5-1) \vdots 5$, $(p_6-4) \vdots 5$ thì $(p_5+p_5-5) \vdots 5$ hay $(p_5+p_6) \vdots 5$

Với 2 số còn lại p_3, p_4 thì rõ ràng $(p_3-p_4) \vdots 3$ (theo cách chọn 4 số trên)

Do $p_3; p_4; p_5; p_6$ lẻ nên $(p_5+p_6)\vdots 2, (p_3-p_4)\vdots 2$.

Từ đó suy ra $(p_5+p_6)\vdots 10$ và $(p_3-p_4)\vdots 6$.

Do đó $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 30.10.6=1800$

Vậy tồn tại p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 là các số nguyên tố phân biên sao cho $(p_1-p_2)(p_4-p_3)(p_5+p_6)\vdots 1800$.

Bài 138.

Đặt $A=\dfrac{n^3+8n^2+1}{3n}=\dfrac{n^2}{3}+\dfrac{8n}{3}+\dfrac{1}{3n}$.

- Xét $n=3k$.

  Ta có: $A=3k^2+8k+\dfrac{1}{9k}$. Suy ra $[A]=3k^2+8k=k(3k+8)$.

  $[A]$ là số nguyên tố $\Leftrightarrow k=1$. Khi đó $n=3$.

- Xét $n=3k+1$

  Ta có: $A=3k^2+2k+\dfrac{1}{3}+8k+\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3n}=3k^2+10k+3+\dfrac{1}{3n}$.

  Suy ra $[A]=3k^2+10k+3=(k+3)(3k+1)$.

  $[A]$ là số nguyên tố $\Leftrightarrow k=0$. Khi đó $n=1$.

- Xét $n=3k+2$.

  Ta có: $A=3k^2+4k+\dfrac{4}{3}+8k+\dfrac{16}{3}+\dfrac{1}{3n}=3k^2+12k+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3n}$.

  Suy ra $[A]=3k^2+12k+6=3(k^2+4k+2)$ không phải số nguyên tố $\forall k$.

Bài 139. Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $q \not\vdots 3$, vậy q có dạng $3k\pm1$.

Nếu $q=3k+1$ thì $p=3k+3=3(k+1)\vdots 3$. Mặt khác, $p>q>3$ nên không phải là số nguyên tố. mâu thuẫn này chứng tỏ q không thể có dạng $3k+1$.

Do đó $q=3k-1 \Rightarrow p=3k+1$.

Từ đó $p+q=6k\vdots 3$.

Hơn nữa, vì p,q là hai số nguyên tố lơn hơn 3 và $(p+1)-(q+1)=2$ nên $p+1, q+1$ là hai số chẵn liên tiếp. do đó hai trong số $p+1, q+1$ có một số chia hết cho 4.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $(q+1)\vdots 4$, tức là $q+1=4m$ hay $q=4m-1$.

Suy ra: $p=4m+1$ và do đó $p+q=8m\vdots 4$.

Vì $(3,4)=1$ nên suy ra $(p+q)\vdots 12$.

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Bài 1:

Biến đổi phương trình thành $4xy-2x-2y=2$

$\Leftrightarrow 2x(2y-1)-(2y-1)=3 \Leftrightarrow (2x-1)(2y-1)=3$.

Vì x và y là các số nguyên nên $2x-1$ và $2y-1$ là các số nguyên.

Do vai trò của x,y như nhau, không giảm tổng quát giả sử $x\ge y$ nên $2x-1\ge 2y-1$.

Mà $3=3.1=(-3)(-1)$ nên xảy ra hai trường hợp

1) $\begin{cases}2x-1=3\\2y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$;

2) $\begin{cases}2x-1=-1\\2y-1=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=-1.\end{cases}$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $(x;y)$ là $(2;1),(1;2),(0;-1),(-1;0)$.

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng $ax+by+cxy=d$, trong đó a,b,c,d là các số nguyên.

Bài 2: Ta có $x^2+x+2009=y^2 (y\in\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2-(2y)^2=-8035$

$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1)=-8035.$

Do $y\in\mathbb{N}$ nên $2x+2y+1\ge 2x-2y+1$, và chúng đều là số nguyên.

Ta có sự phân tích $-8035=1607.(-5)=(-1607).5=1.(-8035)=(-8035).1$.

Vì vậy xảy ra bốn trường hợp

1) $\begin{cases}2x+2y+1=1607\\2x-2y+1=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2=1602\\4y=1612\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=400\\y=403.\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x+2y+1=-1607\\2x-2y+1=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2=-1602\\4y=1612\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-401\\y=403.\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x+2y+1=1\\2x-2y+1=-8035\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2=-8034\\4y=8036\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2009\\y=2009.\end{cases}$

4) $\begin{cases}2x+2y+1=-1\\2x-2y+1=8035\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2=8034\\4y=8036\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2008\\y=2009.\end{cases}$

Bài 3: Biến đổi như sau

$$[x^2+2x(2y-2z)+(y-2z)^2]-(y-2z)^2+5y^2+6z^2=10$$
$$\Leftrightarrow (x+y-2z)^2+4y^2+4yz+2z^2=10$$
$$\Leftrightarrow (x+y-2z)^2+(2y+z)^2+z^2=10.$$

Nhận thấy x,y,z là các số nguyên và $2y+z+z=2(y+z)$ là số chẵn, nên $(2y+z)^2$ và z^2 là hai số chính phương cùng tính chẵn lẻ, nên viết

$$10=0^2+3^2+1^2.$$

Xảy ra các khả năng sau

$$1)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\(2y+z)^2=3^2\\z^2=1\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(1;1;1),(4;-2;1),(-4;2;-1),(-1;-1;-1). \qquad (*)$$

$$2)\begin{cases}(x+y-2z)^2=0\\(2y+z)^2=1^2\\z^2=3\end{cases}$$

Tìm được các nghiệm $(x;y;z)$ là

$$(7;-1;3),(8;-2;3),(-8;2;-3),(-7;1;-3). \qquad (**)$$

Vậy có tất cả 8 bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn được mô tả ở $(*)$ và $(**)$.

Bài 4: *Cách 1.* Phương trình này chỉ chứa bậc nhất đối với y nên ta có thể rút y theo x.

Ta có $(1-2x)y=-3x^2+5x-2$.

Do x nguyên nên $1-2x\neq 0$. Suy ra

$$y=\frac{3x^2-5x+2}{2x-1}\Leftrightarrow 4y=\frac{12x^2-20x+8}{2x-1}=6x+7+\frac{1}{2x-1}.$$

Do x,y là các số nguyên suy ra $\dfrac{1}{2x-1}$ là số nguyên, nên $2x-1\in\{1;-1\}$. Từ đó tìm được $(x;y)$ là $(1;0),(0;2)$.

Cách 2. Coi phương trình bậc hai đối với x, ta có

$$3x^2-(2y-5)x+y+2=0.$$

$\Delta=(2y+5)^2-12(y+2)=4y^2+8y+1.$

Nên phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$4y^2+8y+1=k^2 (k\in\mathbb{N})$$
$$\Leftrightarrow (2y+2)^2-k^2=3$$
$$\Leftrightarrow (2y+k+2)(2y-k+2)=3.$$

Từ đó cũng tìm được các nghiệm như trên

Nhận xét. Bằng cách này ta có giải được phương trình dạng

$ax^2+bxy+cx+dy=e$, hoặc $(ay^2+bxy+cx+dy=e)$

Trong đó a,b,c,d,e là các số nguyên.

Bài 5: Biến đổi phương trình về dạng

$$y[2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2]=0.$$

Nếu $y=0$ thì x sẽ là số nguyên tùy ý.

Xét $y\neq 0$ thì $2y^2+(x^2-3x)y+x+3x^2=0.$ (1)

Ta coi (1) là phương trình bậc hai theo ẩn y, ta tính

$$\Delta=(x^2-3x)^2-8(x+3x^2)=x(x+1)^2(x-8).$$

Trường hợp $x=-1$ thì $\Delta=0$, nghiệm kép của (1) là $y=-1$.

Trường hợp $x\neq -1$, để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương, tức là

$$x(x-8)=k^2(k\in\mathbb{N})\Leftrightarrow(x-4-k)(x-4+k)=16.$$

Vì $k\in\mathbb{N}$ nên $x-4-k\leq x-4+k$ và $(x-4-k)+(x-4+k)=2(x-4)$ nên $x-4-k, x-4+k$ cùng chẵn.Lại có $16=2.8=4.4=(-4).(-4)=(-2).(-8)$. Xảy ra bốn trường hợp

$$\begin{cases}x-4-k=a\\ x-4+k=b\end{cases}\text{ với } (a;b)=(2;8),(4;4),(-4;-4),(-2;-8).$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(-1;-1),(8;-10),(0;k)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Lưu ý. Trong trường hợp $F(x,y)$ là đa thức có hệ số nguyên với bậc cao hơn 2 theo biến x và y, ta cũng có thể đưa về một trong hai trường hợp trên bằng cách đặt ẩn phụ.

Bài 6: Ta có thể đưa về dạng phương trình bậc hai ẩn y bằng phép đặt $x=y+a$ (với a nguyên). Khi đó ta có $(3a-2)y^2+(3a^2-2)y+a^3-8=0.$

Do a nguyên nên $3a-2\neq 0$, tính

$$\begin{aligned}\Delta&=(3a^2-2)^2-4(3a-2)(a^3-8)\\&=-3a^4+8a^3-12a^2+96a-60\\&=-(a^2-4a-2)^2-2a(a^3-56)-56.\end{aligned}$$

Để cho $\Delta\geq 0$ suy ra $2a(a^3-56)<0\Leftrightarrow 0<a\leq\sqrt[3]{56}$. Vì a nguyên nên a chỉ nhận giá trị $1,2,3$.Thử chọn chỉ có $a=2$ là thích hợp và tìm được $(x;y)$ là $(0;-2),(-2;0)$.

Bài 7: Do vai trò x,y,z như nhau, không giảm tổng quát giả sử $1\leq x\leq y\leq z$. Chia hai vế của phương trình cho xyz ta có

$$2=\frac{5}{xy}+\frac{5}{xz}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xyz}\leq\frac{18}{x^2}.$$

Do vậy $2x^2\leq 18\Rightarrow x\in\{1,2,3\}$.

1) Với $x=1$ thì ta có $5(y+z)+8=2yz\Leftrightarrow(2y-5)(2z-5)=41.$

Vì y,z nguyên dương và $y\leq z$ nên $-3\leq 2y-5\leq 2z-5$, và $41=1.41.$

Chỉ xảy ra trường hợp $\begin{cases} 2y-5=1 \\ 2z-5=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=23. \end{cases}$

2) Với $x=2$ thì ta có $5(y+z)+13=4yz \Leftrightarrow (4y-5)(4z-5)=77.$

Vì y,z nguyên dương và $2=x\le y\le z$ nên $-3\le 4y-5\le 4z-5,$ và $77=11.7.$

Xảy ra trường hợp $\begin{cases} 4y-5=7 \\ 4z-5=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=4. \end{cases}$

3) Với $x=3$ thì ta có $5(y+z)+18=6yz \Leftrightarrow (6y-5)(6y-5)=133.$ (*)

Mặt khác y,z nguyên dương và $3\le y\le z$ nên $15\le 6y-5\le 6z-5$

suy ra $(6y-5)(6y-5)\ge 15^2=225.$ (Mâu thuẫn với (*)).

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên dương $(x;y;z)$ là $(1;3;3),(2;3;4)$ và các hoán vị của nó.

Nhận xét. Với cách làm tương tự, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $a(x_1+x_2+...+x_n)+b=cx_1x_2...x_n,$ trong đó a,b,c,n là các số nguyên dương và $n\ge 2.$

Bài 8: a) Với $x=0$ thay vào phương trình tìm được $y=1$ hoặc $y=-1.$

Với $x=-1$ thì $y=1$ hoặc $y=-1.$

Với $x>0$ thì $x^4<y^4<(x+1)^4,$ điều này vô lí.

Với $x<-1$ thì $(x+1)^4<y^4<x^4,$ điều này vô lí.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm nguyên $(x;y)$ là

$(0;1),(0;-1),(-1;1),(-1;-1).$

b) Với $x=0$ thì $y=1.$

Với $x=-1$ thì $y=0.$

Với $x>0$ thì $x^3<y^3<(x+1)^3,$ điều này vô lí.

Với $x<-1$ thì $(x+1)^3<y^3<x^3,$ điều này vố lí.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(0;1),(-1;0).$

Nhận xét. Với cách làm tương tự như trên, ta có thể tìm nghiệm nguyên dương của phương trình dạng $1+x+x^2+...+x^n=y^n$ với n là số nguyên dương.

Bài 9: Giả xử x,y là các số nguyên thỏa mãn phương trình đã cho.

Ta thấy 48 và $4x$ chia hết cho 4 nên $9y$ chia hết cho 4, mà $(9;4)=1$ nên $y\,\vdots\,4$.

Đặt $y=4t\left(t\in\mathbb{Z}\right),$ thay vào phương trình đầu ta được $4x+36t=48$

$\Leftrightarrow x=12-9t$ và $y=4t$ (*). Thay các biểu thức của x,y ở (*) thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có vô số nghiệm $\left(x;y\right)=\left(12-9t;4t\right)$ với $t\in\mathbb{Z}.$

Bài 10: Giả sử $26n+17=k^2$ (với k tự nhiên lẻ). Khi đó

$26n+13=\left(k-2\right)\left(k+2\right)\Leftrightarrow 13\left(2n+1\right)=\left(k-2\right)\left(k+2\right).$

Do $13\left(12n+1\right)\vdots 13$ nên $\left(k-2\right)\vdots 13$ hoặc $\left(k+2\right)\vdots 13.$

Nếu $(k-2)\vdots 13$ thì $k=13t+2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2-4t-1}{2}$.

Nếu $(k+2)\vdots 13$ thì $k=13t-2$ (t lẻ), khi đó $n=\dfrac{13t^2+4t-1}{2}$.

Vậy số tự nhiên lẻ n cần tìm có dạng $\dfrac{13t^2\pm 4t-1}{2}$(t lẻ).

Bài 11: Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình.

Nhận thấy x^4, y^4, z^4 chia cho 16 dư 0 hoặc 1, nên $x^4+y^4+z^4$ chia cho 16 có số dư là một trong các số 0, 1, 2, 3.

Trong khi đó số 2012 chia cho 16 dư 12. Hai điều này mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn đề bài.

Bài 12: Giả sử tìm được bộ số nguyên dương $(x, y, z, t)=(a, b, c, d)$ thỏa mãn điều kiện bài ra, ta có $\begin{cases} a^2+13b^2=c^2 \\ 13a^2+b^2=d^2. \end{cases}$

Gọi ƯCLN$(a,b)=m\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$, suy ra $c\vdots m$ và $d\vdots m$.

Đặt $a=ma_1, b=mb_1, c=mc_1, d=md_1$, với a_1, b_1, c_1, d_1 là các số tự nhiên và $(a_1,b_1)=1$. Suy ra $14\left(a^2+b^2\right)=c^2+d^2 \Leftrightarrow 14\left(a_1^2+b_1^2\right)=c_1^2+d_1^2$. Suy ra $c_1^2+d_1^2\vdots 7$, do đó $c_1\vdots 7$ và $d_1\vdots 7$, dẫn đến $a_1^2+b_1^2\vdots 7$ nên $a_1\vdots 7$ và $b_1\vdots 7$. Điều này mâu thuẫn với $(a_1,b_1)=1$.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự ta có thể chứng minh được hệ phương trình $\begin{cases} x^2+ny^2=z^2 \\ nx^2+y^2=t^2 \end{cases}$ với $n+1$ có ước nguyên tố dạng $4k+3$ và $\left(n+1, p^2\right)=1$ không có nghiệm nguyên dương.

Bài 13: Giả sử (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình.

Khi đó $x_0\vdots 3$, đặt $x_0=3x_1$ (với $x_1\in\mathbb{Z}$) ta có $9x_1^3-y_0^3-3z_0^3=0$.

Khi đó $y_0\vdots 3$, đặt $y_0=3y_1$ (với $y_1\in\mathbb{Z}$) ta có $3x_1^3-9y_1^3-z_0^3=0$.

Khi đó $z_0\vdots 3$, đặt $z_0=3z_1$ (với $z_1\in\mathbb{Z}$) ta có $x_1^3-3y_1^3-9z_1^3=0$.

Như vậy $(x_1, y_1, z_1)=\left(\dfrac{x_0}{3};\dfrac{y_0}{3};\dfrac{z_0}{3}\right)$ cũng là nghiệm nguyên của phương trình. Quá trình tiếp tục như vậy ta suy ra các bộ số $\left(\dfrac{x_0}{3^n};\dfrac{y_0}{3^n};\dfrac{z_0}{3^n}\right)$ mọi $n\in\mathbb{N}$ cũng là nghiệm của phương trình. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x_0=y_0=z_0=0$,

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm nguyên $(x;y;z)=(0;0;0)$.

Nhận xét. Ta gọi phương pháp giải trong ví dụ trên là phương pháp lùi vô hạn của Fermat, thường dùng để chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất hoặc vô nghiệm.

Bài 14: Biến đổi phương trình về dạng

$\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)+\left(z^2-4z+4\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(2;2;2)$.

Bài 15: Nhận thấy nếu $(x_0;y_0;z_0)$ là một nghiệm nguyên của phương trình thì x_0,y_0,z_0 cùng dương hoặc có hai số âm và một số dương.

Ngoài ra $(-x_0;-y_0;z_0),(x_0;-y_0;-z_0),(-x_0;y_0;-z_0)$ cũng là nghiệm.

Do đó trước hết ta đi tìm nghiệm nguyên dương.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$x^2+1\geq 2x\geq 0;\, y^2+4\geq 4y\geq 0;\, z^2+9\geq 6z\geq 0.$$

Suy ra $\left(x^2+1\right)\left(y^2+4\right)\left(z^2+9\right)\geq 48xyz.$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=2,z=3.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z)$ của phương trình là

$$(1;2;3),(-1;-2;3),(1;-2;-3),(-1;2;-3).$$

Nhận xét. Bằng cách này ta có thể tìm nghiệm nguyên của phương trình dạng $\left(x_1^2+a_1^2\right)\left(x_2^2+a_2^2\right)...\left(x_n^2+a_n^2\right)=2^n x_1x_2...x_n.a_1a_2...a_n$ với a_i,n là các số nguyên dương.

Bài 16: Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-kôp-xki cho hai bộ số (x,z) và (t,y) ta có

$$9.16=\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)\geq (xt+yz)^2=12^2,$$

suy ra $\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)=(xt+yz)^2$ khi và chỉ khi $xy=zt.$

Từ $x^2+z^2=9 \Leftrightarrow x=0,z=\pm 3$ hoặc $x=\pm 3,z=0.$

Nếu $x=0$ thì $t=0,$ khi đó $y^2=16, yz=12.$ Vậy $y=4,z=3$ hoặc $y=-4,z=-3.$

Nếu $z=0$ thì $y=0,$ tương tự tìm được $x=3,t=4$ hoặc $x=-3,t=-4.$

Vậy nghiệm nguyên $(x;y;z;t)$ của hệ là

$$(0;4;3;0),(0;-4;-3;0),(3;0;0;4),(-3;0;0-4).$$

Bài 17:

Ta có:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2-xy+y^2\right)-xy(x+y)=5$$
$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-2xy+y^2\right)=5$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2=5$$

Do $(x - y)^2 \geq 0$ và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

Th1: $\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Th2: $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$ (loại)

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(3;2);(2;3)\}$

Bài 18: Nếu y thỏa mãn phương trình thì – y cũng thỏa mãn phương trình, do đó ta có ta giả sử $y\geq 0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)=y^2$

Đặt $t=x^2+3x+1$ được :

$(t-1)(t+1)=y^2 \Leftrightarrow t^2-1=y^2 \Leftrightarrow (t-y)(t+y)=1 \Rightarrow t+y=t-y \Rightarrow y=0$

Thay y = 0 vào (1) ta được: x = 0, - 1, -2, - 3.

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (0, 0); (-1, 0); (-2, 0); (-3, 0).

Bài 19: Ta có:

$$\begin{aligned} &(x^2-y)(y^2-x)=(x-y) \\ &\Leftrightarrow x^2y^2-y^3-x^3+xy=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 \\ &\Leftrightarrow 2x^3-x^2y^2-xy-3x^2y+3xy^2=0 \\ &\Leftrightarrow x\left(2x^2+(-y^2-3y)x-y+3y^2\right)=0 \end{aligned}$$

Nếu x = 0 thì y bất kì thuộc Z.

Nếu $x\neq 0$ suy ra: $2x^2+(-y^2-3y)x-y+3y^2=0$

Coi đây là phương trình ẩn x ta có: $\Delta=(y^2+3y)^2-8(3y^2-y)=(y-1)^2y(y+8)$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ phải là số chính phương tức là:

$y(y+8)=a^2 \Leftrightarrow (y+4)^2-a^2=16 \Leftrightarrow (y+4+a)(y+4-a)=16\ (a\in N)$

Vì (y + 4 + a) > (y + 4 – a) và (y + 4 + a) + (y + 4 – a) là số chẵn nên ta có các trường hợp:

$\begin{cases} y+4+a=8 \\ y+4-a=2 \end{cases}$; $\begin{cases} y+4+a=4 \\ y+4-a=4 \end{cases}$;

$\begin{cases} y+4+a=-8 \\ y+4-a=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y+4+a=-4 \\ y+4-a=-4 \end{cases}$

Giải ra ta được nghiệm của phương trình là:

$(1;1),(10,-8),(6,-9),(21,-9),(0;k)$ với $k\in Z$

Bài 20: Ta có

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{617} \Leftrightarrow xy-617(x+y)=0 \Leftrightarrow xy-617x-617y+617^2=617^2$

$\Leftrightarrow (x-617)(y-617)=617^2$

Vì x, y nguyên dương nên x – 617 và y – 617 là ước lớn hơn –617 của 617^2.

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-617=617\\ y-617=617\end{cases}\\ \begin{cases}x-617=1\\ y-617=617^2\end{cases}\\ \begin{cases}x-617=617^2\\ y-617=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1234\\ x=618; y=381306\\ x=381306; y=618\end{array}\right.$$

Vậy tất cả các cặp (x;y) nguyên dương cần tìm là

(1234;1234) , (618; 381306), (381306; 618)

Bài 21: Ta có: $xy=px+py \Rightarrow (x-y)(y-p)=p^2$.

Vì p là số nguyên tố nên ước số nguyên của p^2 chỉ có thể là: $\pm1, \pm p, \pm p^2$. Thử lần lượt với các ước trên ta được các nghiệm (x, y) là: $(p+1, p+p^2);(2p,2p);(p+p^2, p+1)$.

Bài 22: Ta có: $(1) \Leftrightarrow 6y+6x+1=xy \Leftrightarrow x(y-6)-6(y-6)=37 \Leftrightarrow (x-6)(y-6)=37$

Do vai trò của x, y bình đẳng giả sử: $x \ge y \ge 1 \Rightarrow x-6 \ge y-6 \ge -5$

Chỉ có một trường hợp là $\begin{cases}x-6=37\\ y-6=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=43\\ y=7\end{cases}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là (x, y) = (43, 7); (7, 43).

Bài 23: Ta có: $10z \,\vdots\, 3 \Rightarrow z \,\vdots\, 3$. Đặt $z=3k$ ta được $6x+15y+30k=3 \Leftrightarrow 2x+5y+10k=1$

Đưa về phương trình hai ẩn x, y với các hệ số tương ứng 2 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau $2x+5y=1-10k \Rightarrow x=\frac{1-10-5y}{2}=-5k-2y+\frac{1-y}{2}$

Đặt $\frac{1-y}{2}=t\,(t \in Z)$ ta được $\begin{cases}y=1-2t\\ x=-5k-2(1-2t)+t=5t-5k-2\\ z=3k\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là (x, y, z) = (5t - 5k - 2, 1 – 2t, 3k) với k, t là số nguyên tùy ý.

Bài 24: Ta biết rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, còn số chính phương lẻ thì chia cho 4 dư 1 và chia cho 8 dư 1.

Tổng $x^2+y^2+z^2$ là số lẻ nên trong ba số $x^2;y^2;z^2$ phải có: hoặc có một số lẻ, hai số chẵn; hoặc cả ba số lẻ.

Trường hợp trong ba số $x^2;y^2;z^2$ có một số lẻ, hai số chẵn thì vế trái của (1) chia cho 4 dư 1, còn vế phải là 1999chia cho 4 dư 3, loại.

Trong trường hợp ba số $x^2;y^2;z^2$ đều lẻ thì vế trái của (1) chia cho 8 dư 3, còn vế phải là 1999 chia cho 8 dư 7, loại.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 25: Ta thấy ngay $0\le x,y\le 50$. Từ $\sqrt{y}=\sqrt{50}-\sqrt{x}$ ta có

$y=50+x-2\sqrt{50x}=50+x-10\sqrt{2x}$

Vì x, y nguyên nên $10\sqrt{2x}$ nguyên. Ta biết rằng với x nguyên thì $10\sqrt{2x}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỷ. Do đó để $10\sqrt{2x}$ nguyên thì 2x phải là số chính phương tức là $2x=4k^2$ $\Rightarrow x=2k^2, k\in Z$ với $2k^2\le 50\Rightarrow k^2\le 25\Rightarrow$ k chỉ có nhận các giá trị: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lựa chọn k trong các số trên để thỏa mãn phương trình ta được các nghiệm (x, y) là (0, 50); (2, 32); (8, 18); (18, 8); (32, 2); (50,0).

Bài 26: Điều kiện: $x\ge 1$

$$\begin{aligned}
y&=\sqrt{(x-1)+1+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{(x-1)+1-2\sqrt{x-1}}\\
&=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}\\
&=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|
\end{aligned}$$

Với $x=1$ thì $y=2$

Với $x\ge 2$ thì $y=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}$. Do đó: $y^2=4(x-1)$

Do $x\ge 2$ nên có thể đặt: $x-1=t^2$ với t nguyên dương.

Do đó ta có: $\begin{cases} x=1+t^2\\ y=2t\end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là (1, 2); $(1+t^2, 2t)$ với t nguyên dương.

Bài 27: $x^{2015}=\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)}+1 \quad (1)$

Có $y(y+1)(y+2)(y+3)=\left[y(y+3)\right]\left[(y+1)(y+2)\right]=(y^2+3y)(y^2+3y+2)$

Đặt $t=y^2+3y+1\Rightarrow y(y+1)(y+2)(y+3)=t^2-1$ ($t\in\mathbb{Z}$, $t^2\ge 1$)

(1) $\Leftrightarrow x^{2015}-1=\sqrt{t^2-1}\Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015}-1\ge 0\\ (x^{2015}-1)^2=t^2-1(2)\end{cases}$

Với x, t là số nguyên ta có:

$(2) \Leftrightarrow \left(x^{2015}-1+t\right)\left(x^{2015}-1-t\right)=-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^{2015}-1+t=1\\x^{2015}-1-t=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x^{2015}-1+t=-1\\x^{2015}-1-t=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^{2015}=t=1\\ \begin{cases}x^{2015}=1\\t=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Với $x^{2015}=t=1 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y^2+3y+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\y=-3\end{array}\right.\end{cases}$

Với $\begin{cases}x^{2015}=1\\t=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y^2+3y+1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ \left[\begin{array}{l}y=-1\\y=-2\end{array}\right.\end{cases}$

Thử lại ta thấy các cặp (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0) thỏa mãn đề bài

Vậy có 4 cặp (x;y) cần tìm là (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0)

Bài 28: Lần lượt xét các giá trị tự nhiên của x:

Nếu $x=0$ thì $y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

Nếu $x=1$ thì $y^2=5$, không có nghiệm nguyên

Nếu $x \geq 2$ 2 thì $2^x \vdots 4$, do đó vế trái chia cho 4 dư 3, còn y lẻ nên vế phải chia cho 4 dư 1. Mâu thuẫn.

Kết luận: Nghiệm của phương trình là (0 ; 2), (0 ; -2).

Bài 29: $\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$

$\Leftrightarrow \left(2^{2x}+5.2^x+4\right)\left(2^{2x}+5.2^x+6\right)-5^y=11879$ (1)

Đặt $t=2^{2x}+5.2^x+5, t \in \mathbb{N}^*,$ ta có:

$(1) \Leftrightarrow (t-1)(t+1)-5^y=11879$

$\Leftrightarrow t^2-5^y=11880(2)$

Xét các TH sau:

• TH1: $y \geq 2 \Rightarrow 5^y \vdots 25$

Từ (2) suy ra $t^2 \vdots 5 \Rightarrow t^2 \vdots 25$. Do đó từ (2) $\Rightarrow 11880 \vdots 25$ (vô lí)

• TH2: $y = 1$

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11885$ (loại vì 11885 không phải là số chính phương)

• TH3: $y = 0$

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11881 \Rightarrow t = 109$

$\Rightarrow 2^{2x}+5.2^{x}+5=109 \Rightarrow 2^{2x}+5.2^{x}-104=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x}=8(tm) \\ 2^{x}=-13(L) \end{array}\right. \Rightarrow x=3.$

Vậy x = 3, y = 0 là các số tự nhiên cần tìm.

Bài 30: Ta có:

$(x+y+z)^{3}-(x^{3}+y^{3}+z^{3})=3(x+y)(y+z)(z+x)$

$\Leftrightarrow 27-3=3(x+y)(y+z)(z+x)$

$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=8 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} x+y=a \in Z \\ y+z=b \in Z \\ z+x=c \in Z \end{cases}$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow abc=8 \Rightarrow a,b,c \in \{\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8\}$

Vì x, y, z vai trò bình đẳng nên ta giải sử: $x \le y \le z \Rightarrow a \ge b \ge c$

Khi đó ta có: $a+b+c=2(x+y+z)=2.3=6 \Rightarrow a \ge 2$

Với a = 2 ta có: $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

Với a = 4 ta có: $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=1 \end{cases}$ (không có nguyện nguyên)

Với a = 8 ta có: $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x-5; y=4; z=4$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x,y,z)=(1,1,1);(4,4,-5);(4,-5,4);(-5,4,4)$.

Bài 31: Từ (1) ta được z = 2 + y – x thay vào (2) ta được:

$2x^{2}-xy+x-4-2y+2x=1 \Leftrightarrow 2x^{2}+3x-5=y(x+2)$

Do x = - 2 không thỏa mãn phương trình trên nên:

$y=\dfrac{2x^{2}+3x-5}{x+2}=2x-1-\dfrac{3}{x+2}$

y nguyên nên (x + 2) là ước của 3. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x+2=\pm 1 \\ x+2=\pm 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-1;-3;1;-5\}$

Từ đó suy nghiệm của hệ là: $(x,y,z)=(1;-6;-3),(-3;-4;1),(1;0;1),(-5;-10;-3)$

Bài 32:

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) . Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1.x_2=a+2 \end{cases}$

Do đó: $x_1x_2-(x_1+x_2)=2 \Leftrightarrow x_1(x_2-1)-(x_2-1)=3 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=3$

Suy ra (x_1-1) và (x_2-1) là ước của 3.

Giải sử: $x_1 \ge x_2 \Rightarrow x_1-1 \ge x_2-1$. Khi đó:

a) $\begin{cases} x_1-1=3 \\ x_2-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \end{cases}$. Khi đó a = 6.

b) $\begin{cases} x_1-1=-1 \\ x_2-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$. Khi đó a = -2

Thay giá trị của a vào phương trình (1) thử lại và kết luận.

Bài 33: Ta có:

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833\\
&\Leftrightarrow \left[x^2+4\left(y^2+7\right)^2\right]^2=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]\\
&\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow \left[4x^4-\left(y^2+7\right)\right]^2=0\\
&\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0\\
&\Leftrightarrow (2x+y)(2x-y)=7\ (1)
\end{aligned}$$

Vì $x,y \in N^* \Rightarrow 2x+y>2x-y$ và $2x+y>0$ Do đó: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Kết luận: (x, y) = (2, 3) thỏa mãi yêu cầu bài toán.

Bài 34: Ta có: $9y^2+6y+16 \equiv (\bmod 3) \Rightarrow 2^x.x^2 \equiv 1(\bmod 3)$. Mà

$x^2 \equiv 0;1(\bmod 3) \Rightarrow \begin{cases} 2^x \equiv 1(\bmod 3) \\ x^2 \equiv 1(\bmod 3) \end{cases}$

Nếu x lẻ đặt: $x=2k+1(k \in N) \Rightarrow 2^x=2.4^k \equiv 2(\bmod 3)(\text{sai})$, suy ra x lẻ loại.

Nếu x chẵn đặt: $x=2k(k \in N) \Rightarrow 2^x=4^k \equiv 1(\bmod 3)$ (đúng).

Do đó khi x chẵn thì

$2^x.x^2=9y^2+6y+16 \Leftrightarrow \left(2k.2^k\right)^2=(3k+1)^2+15 \Leftrightarrow \left(2k.2^k-3y-1\right)(2k+3y+1)=15.$

Vì $y,k \in N \Rightarrow 2k.2^k+3y+1>2k.2^k-3y-1>0.$

Vậy ta có các trường hợp:

$+\begin{cases} 2k.2^k-3y-1=1 \\ 2k.2^k+3y+1=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k.2^k=8 \\ 3y+1=7 \end{cases} \Rightarrow k \notin N$ (loại)

$+\begin{cases}2k.2^k-3y-1=3\\2k.2^k+3y+1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k.2^k=4\\3y+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=1\\y=0\end{cases}$. Vậy (x, y) = (2; 0).

Bài 35: Đặt x + y = a; xy = b. Phương trình trở thành: $ab^2+a=3+b$

Xét b = 3 suy ra: $a=\frac{3}{5}$ (Vô lý)

Xét $b\neq 3$ ta có: $b^2a+a=3+b\Leftrightarrow a\left(b^2+1\right)=3+b\Leftrightarrow a=\frac{3+b}{b^2+1}\Leftrightarrow a\left(b-3\right)=\frac{b^2-9}{b^2+1}=1+\frac{-10}{b^2+1}$

Ta phải có (b^2+1) phải là ước dương của 10 do đó: $b^2+1\in\left\{1;2;5;10\right\}\Rightarrow b\in\left\{0;\pm1;\pm2;-3\right\}$

Nếu b = 0 thì a = 3. Ta có: $x+y=3, xy=0\Rightarrow x=0, y=3$ và $x=3, y=0$

Nếu b = 1 thì a = 2. Ta có $x+y=2, xy=1\Rightarrow x=1, y=1$

Nếu $b=-1$ thì a = 1

Ta có: x + y = 1, xy = -1 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2};y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2};y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Nếu b = 2 thì a = 1. Ta có: x + y = 1 và xy = 2 không tồn tại x, y.

Nếu b = -2 thì $a=\frac{1}{5}$ (vô lý).

Nếu $b=-3$ thì a = 0. Ta có: x + y = 0 và $xy=-3$ không tồn tại x, y nguyên.

Vậy phương trình có 3 nghiệm là (x, y) = (0, 3); (3, 0); (1, 1).

Bài 36:

$x^3+y^3-3xy=1$

$<=>(x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=1$

Đặt x + y = a và xy = b (a, b nguyên) ta có:

$a^3-3ab-3b=1$

$<=>(a+1)(a^2-a+1)-3b(a+1)=2$

$<=>(a+1)(a^2-a+1-3b)=2$

1) $\begin{cases}a+1=1\\a^2-a+1-3b=2\end{cases}<=>\begin{cases}a=0\\b=\frac{-1}{3}(L)\end{cases}$

2) $\begin{cases}a+1=2\\a^2-a+1-3b=1\end{cases}<=>\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}(TM)<=>\begin{cases}x+y=1\\xy=0\end{cases}=>(x;y)\in\{(0;1);(1;0)\}$

3) $\begin{cases}a+1=-1\\a^2-a+1-3b=-2\end{cases}<=>\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}(TM)<=>\begin{cases}x+y=-2\\xy=3\end{cases}=>(x;y)\in\varnothing$

4) $\begin{cases}a+1=-2\\a^2-a+1-3b=-1\end{cases}<=>\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}(TM)<=>\begin{cases}x+y=-3\\xy=4\end{cases}=>(x;y)\in\varnothing$

Vậy $(x; y) \in \{(0;1);(1;0)\}$

Bài 37: Phương trình đã cho tương đương $x^2 - xy - \left(y^2 + 8\right) = 0$

Coi phương trình trên là phương trình ẩn x có y là tham số ta có: $\Delta = y^2 + 4\left(y^2 + 8\right) = 5y^2 + 32$

Ta có Δ chia cho 5 dư 2 nên có tận cùng là 2 hoặc 7. Do đó, Δ không là số chính phương vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 38: Ta có: $x^3 + 1 = 4y^2 \Leftrightarrow (2y-1)(2y+1) = x^3$

Do $(2y-1, 2y+1) = 1$ cho nên $2y + 1 = a^3, 2y - 1 = b^3 \ (a, b \in Z)$

Suy ra: $a^3 - b^3 = 2 \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - b = 2 \\ a^2 + ab + b^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{3+\sqrt{33}}{6} \\ b = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Do a, b là số nguyên nên chỉ nhận được giá trị a =1 và b = -1 suy ra y = 0 và x = -1

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (-1, 0)

Bài 39: Ta có: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = -5\left(x^2y^2 + 7xy - 12\right) \quad (1)$$

Do $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow -5\left(x^2y^2 + 7xy - 12\right) \geq 0$. Đặt $t = xy$ ($t \in Z$) ta có:

$-5\left(t^2 + 7t - 12\right) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 4$. Mà t là số nguyên nên t = 3 hoặc t = 4

Khi t = 3 ta có $\begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = 3$ (không tồn tại giá trị nguyên của x, y)

Khi t = 4 ta có $\begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$ hoặc $x = y = -2$

Vậy phương trình có hai nghiệm là (x, y) = (2, 2); (-2, -2).

Bài 40: Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

Do $2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} > 0 \Rightarrow y^3 > x^3$

Xét $|x| > 1$ thì: $y^3 = x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = (x+1)^3 + 1 - x^2 < (x+1)^3$

Do đó $x^3 < (y+1)^3 < (x+1)^3$

Vì x, y nguyên nên phương trình không có nghiệm.

Xét $|x| \le 1$ thì do x nguyên nên x = 1 hoặc x = -1 hoặc x = 0

Với x = -1 ta được y = 0

Với x = 1 thì y = 2

Với x = 0 thì y = $\sqrt[3]{2}$ (loại)

Vậy phương trình có 2nghiệm (x, y) = (-1, 0); (1, 2).

Bài 41: Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y-2)^2 + (y+2)^2 = 1$

Do đó ta có: $(y+2)^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y+2 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le y \le -1 \Rightarrow y \in \{-3, -2. -1\}$

Với $y = -3$ thay vào phương trình ta được: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Với $y = -2$ thay vào phương trình ta được: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với $y = -1$ thay vào phương trình ta được: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có 4 nghiệm (x, y) = (-1, -3); (1, -2); (-1, -2); (1, -1).

Bài 42: Ta có : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18} (x \ge 0; y \ge 0)$

Pt viết: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{2} (1) (0 \le \sqrt{x} \le 3\sqrt{2}; 0 \le \sqrt{y} \le 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$\sqrt{x} = 3\sqrt{2} - \sqrt{y} \ge 0 <=> (\sqrt{x})^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{y})^2 <=> 6\sqrt{2y} = y - x + 18$

$=> \sqrt{2y} = \dfrac{y - x + 18}{6} \in Q$

$<=> \sqrt{2y} = a \in Q <=> 2y = a^2 \in Q <=> \begin{cases} a^2 \in N (Vi\ 2y \in Z\ va\ a \ge 0) \\ a \vdots 2 \end{cases}$

$a = 2m (m \in N)$

$=> 2y = (2m)^2 <=> y = 2m^2 <=> \sqrt{y} = m\sqrt{2}.TT => \sqrt{x} = n\sqrt{2}$

Pt (1) viết: $n\sqrt{2} + m\sqrt{2} = 3\sqrt{2} <=> m + n = 3 (m; n \in N)$

$$<=>\left[\begin{array}{l}\begin{cases}n=0\\m=3\end{cases}=>\begin{cases}x=0\\y=18\end{cases}\\\begin{cases}n=1\\m=2\end{cases}=>\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}\\\begin{cases}n=2\\m=1\end{cases}=>\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}n=3\\m=0\end{cases}=>\begin{cases}x=18\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases}x=0\\y=18\end{cases};\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases};\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases};\begin{cases}x=18\\y=0\end{cases}$

Bài 43: Phương trình đã cho tương đương với $9x=(y-1)(y+2)(1)$

Nếu $y-1\,\vdots\,3$ thì $y+2=(y-1)+3\,\vdots\,3 => (y-1)(y+2)\,\vdots\,9$

Mà $9x\,\vdots\,9\ \forall x\in Z$ nên ta có mâu thuẫn.

Suy ray $-1\,\vdots\,3$, do đó: $y-1=3k(k\in Z)$=>y=3k+1$(k\in Z)$

Thay vào (1) ta có: $9x=3k(3k+3) => x=k(k+1)$

Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases}x=k(k+1)\\y=3k+1\end{cases}(k\in Z)$

Bài 44:

$2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$

$<=> 2014(x-y)^2+x^2+y^2=2039$

Đặt t=|x-y| , $t\in N$ do x, y nguyên

Xét các trường hợp:

TH1: $t=0$, tức $x=y\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

TH2: $t=1$, tức là $x-y=\pm1$

+ Với $x-y=1$ hay $x=y+1$, phương trình trở thành:

$(y+1)^2+y^2=25 <=> y^2+y-12=0$

$<=>\left[\begin{array}{l}y=3\\y=-4\end{array}\right.$

Với $y=3$ thì $x=4$; với $y=-4$ thì $x=-3$

+ Với $x-y=-1$ hay $x=y-1$, phương trình trở thành:

$(y-1)^2+y^2=25 <=> y^2-y-12=0$

$<=>\left[\begin{array}{l}y=-3\\y=4\end{array}\right.$

Với y = –3 thì x = –4; với y = 4 thì x = 3

TH3: $t \geq 2$, VT > VP ⇒ phương trình vô nghiệm

Vậy các cặp (x;y) thỏa là (4;3), (–3;–4), (–4;–3), (3;4)

Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bìnhphương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phươngtrình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

Bài 45:

$$\begin{aligned}
&x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5\\
&<=> (x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) = 5\\
&<=> (x+y)(x^2 - 2xy + y^2) = 5\\
&<=> (x+y)(x-y)^2 = 5
\end{aligned}$$

Do $(x-y)^2 \geq 0$ và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

Th1: $\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Th2: $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2 = 5 \end{cases} => \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$ (L)

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y) \in \{(3;2);(2;3)\}$

Bài 46:

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1 = 2x(x+2) \\ p^2 - 1 = 2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được

$p^2 - p = 2y^2 - 2x^2 + 4y - 4x \Leftrightarrow p(p-1) = 2(y-x)(y+x+2)(*)$

⇒ $2(y - x)(y + x + 2) \,\vdots\, p$. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:

• $y - x \,\vdots\, p \Rightarrow y - x = kp$ ($k \in N^*$)

Khi đó từ (*) ⇒ $p - 1 = 2k(x + y + 2) \Rightarrow kp - k = 2k^2(x + y + 2) \Rightarrow y - x - k = 2k^2(x + y + 2)$

(loại vì $x + y + 2 > y - x - k > 0$; $2k^2 > 1 \Rightarrow 2k^2(x + y + 2) > y - x - k$)

• $y + x + 2 \,\vdots\, p \Rightarrow x + y + 2 = kp$ ($k \in N^*$)

Từ (*) ⇒ $p - 1 = 2k(y - x) \Rightarrow kp - k = 2k^2(y - x) \Rightarrow x + y + 2 - k = 2k^2(y - x)$ (**)

Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu k ≥ 2 thì từ (**) ⇒ $x + y = 2k^2(y - x) + k - 2 \ge 8(y - x)$ (vì y – x > 0)

⇒ 9x ≥ 7y ⇒ 7y < 14x ⇒ y < 2x

Do đó từ (2) ⇒ (p – 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p – 1)

(vì 2x(x + 2) = p – 1 theo (1))

⇒ p + 1 < 4 ⇒ p < 3, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó k = 1, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)

Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$ (1)

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử x ≥ y ≥ z ≥ 1.

Từ (1) $\Rightarrow 0<y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \Rightarrow ny^2z^2-1>0 \Rightarrow ny^2z^2-1\ge 1$

$\Rightarrow y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1)\ge x^2 (*)$

Vì x ≥ y ≥ z nên $3x^3 \ge x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2 \Rightarrow ny^2z^2 \Rightarrow 9x^2 \ge n^2y^4z^4$

Kết hợp với (*) ta có $9\left(y^3+z^3\right)\ge 9x^2 \ge n^2y^4z^4 \Rightarrow 9\left(1+\frac{z^3}{y^3}\right)\ge n^2yz^4$

Mà $y\ge z \Rightarrow \frac{z^3}{y^3}\le 1 \Rightarrow n^2yz^4 \le 9\left(1+\frac{z^3}{y^3}\right)\le 18(**)$

Ta có: $(**) \Rightarrow z^4 \le 18 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \end{array}\right.$

- Nếu $z=2$: (**) $\Rightarrow 16n^2y\le 18 \Rightarrow n=y=1$ (loại vì y < z)
- Nếu $z=1$: (**) $\Rightarrow n^2y \le 18 \Rightarrow n^2 \le 18 \Rightarrow n\le 4$

Ta chứng minh n ∉ {2;4}. Thật vậy,

*Nếu n = 4 thì từ $n^2y \le 18 \Rightarrow 16y \le 18 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) ⇒ $x^3 + 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2(4 - x) = 2 \Rightarrow x^2$ là ước của 2 ⇒

x = 1 (không thỏa mãn)

*Nếu n = 2 thì từ $n^2y \le 18$ suy ra $4y \le 18 \Rightarrow 1 \le y \le 4$.

+ $y=1:(1)\Rightarrow x^3-2x^2+2=0\Rightarrow x^2(x-2)=-2<0\Rightarrow x<2\Rightarrow x=1(L)$

+ $y=2:(1)\Rightarrow x^3-8x^2+9=0\Rightarrow 9=x^2(8-x)$. Suy ra x^2 là ước của 9. Mà $x^2 \geq y^2 = 4$ nên x=3 (không thỏa
mãn)

+ $y=3:(1)\Rightarrow x^3-18x^2+28=0\Rightarrow x^2(18-x)=28$. Suy ra x^2 là ước của 28. Mà $x^2 \geq y^2 = 9$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

+ $y=4:(1)\Rightarrow x^3-32x^2+65=0\Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy n ∉ {2;4}. Do đó n ∈ {1;3}

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là n ∈ {1;3}

$y=4:(1)\Rightarrow x^3-32x^2+65=0\Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy n ∉ {2;4}. Do đó n ∈ {1;3}

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là n ∈ {1;3}

Bài 47: Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^2 <=> (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0$

Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2-xy+y^2-x-y=0$

$<=> 2(x^2-xy+y^2-x-y)=0$
$<=> (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y=0 \\ (x-1)^2=1 <=> x=y=2, z=4 \\ (y-1)^2=1 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x-1=0 \\ (x-y)^2=1 <=> x=1, y=2, z=3 \\ (y-1)^2=1 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-y)^2=1 <=> x=2, y=1, z=3 \\ (x-1)^2=1 \end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)

Bài 48: Ta có:

$x^2-2y(x-y)=2(x+1) <=> x^2-2(y+1)x+2(y^2-1)=0(1)$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên *x* thì Δ' theo *y* phải là số chính phương

Ta có $\Delta'=y^2+2y+1-2y^2+2=-y^2+2y+3=4-(y-1)^2\le 4$

Δ'chính phương nên $\Delta'\in\{0;1;4\}$

+ Nếu $\Delta'=4 => (y-1)^2=0 <=> y=1$ thay vào phương trình (1) ta có :

$x^2-4x=0 <=> x(2-4) <=> \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-4 \end{array}\right.$

+ Nếu $\Delta'=1 => (y-1)^2=3 <=> y\notin Z.$

+ Nếu $\Delta'=0 => (y-1)^2=4 <=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

+ Với *y* = 3 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2-8x+16=0 <=> (x-4)^2=0 <=> x=4$

+ Với *y* =-1 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2=0 <=> x=0$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x;y)\in\{(0;1);(4;1);(4;3);(0;-1)\}$

Bài 49:

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^4+x^2+20=y^2+y$

Ta thấy $x^4+x^2<x^4+x^2+20\le x^4+x^2+20+8x^2$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+1)<y(y+1)\le(x^2+4)(x^2+5)$

Vì x, y $\in\mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

+ TH1. $y(y+1)=(x^2+1)(x^2+2)\Leftrightarrow x^4+x^2+20=x^4+3x^2+2$

$\Leftrightarrow 2x^2=18\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm3$

Với $x^2=9$, ta có $y^2+y=9^2+9+20\Leftrightarrow y^2+y-110=0$

$\Leftrightarrow y=10; y=-11(t.m)$

+ TH2. $y(y+1)=(x^2+2)(x^2+3)\Leftrightarrow x^4+x^2+20=x^4+5x^2+6$

$\Leftrightarrow 4x^2=14\Leftrightarrow x^2=\frac{7}{2}$ (loại)

+ TH3. $y(y+1)=(x^2+3)(x^2+4)\Leftrightarrow 6x^2=8\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}$ (loại)

+ TH4. $y(y+1)=(x^2+4)(x^2+5)\Leftrightarrow 8x^2=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$

Với $x^2=0$, ta có $y^2+y=20\Leftrightarrow y^2+y-20=0\Leftrightarrow y=-5; y=4$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên (x;y) là :

(3;10), (3;-11), (-3; 10), (-3;-11), (0; -5), (0;4).

Bài 50:

a) Giải sử tồn tại (x, y, z) thỏa mãn $x^4+y^4=7z^4+5 \Leftrightarrow x^4+y^4+z^4=8z^4+5\ \ (*)$

Ta có $a^4 \equiv 0,1\ (\text{mod } 8)$ với mọi số nguyên a $\Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4+z^4 \equiv 0,1,2,3\ \ (\text{mod } 8) \\ 8z^4+5 \equiv 5\ (\text{mod } 8) \end{cases}$

Mâu thuẫn với (*) vậy không tồn tại (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức.

b) Phương trình tương đương với

$\left[(x+1)^2+(x-1)^2\right]\left[(x+1)^2-(x-1)^2\right]=y^3 \Leftrightarrow (2x^2+2).4x=y^3 \Leftrightarrow 8x^3+8x=y^3.$

Nếu $x \ge 1 \Rightarrow 8x^3 < 8x^3+8x < (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x)^3 < y^3 < (2x+1)^3$ (mâu thuẫn với y nguyên)

Nếu $x \le -1$ và (x, y) là nghiệm, ta suy ra (-x, -y) cũng là nghiệm mà $-x \ge 1 \Rightarrow$ mâu thuẫn

Nếu x = 0 thì y = 0 (mâu thuẫn)

Vậy (x, y) = (0, 0) là nghiệm duy nhất

Bài 51:

Phương trình đã cho tương đương $2x^2-2xy+5y^2-41=0.$ (1)

Ta có $\Delta'_x = 82-9y^2 \ge 0 \Rightarrow y^2 \le \frac{82}{9}$. Mặt khác từ (1) ta có y^2 là số lẻ, nên $y^2 \in \{1;9\}$

Với $y=1 \Rightarrow 2x^2-2x-36=0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}.$

Với $y=-1 \Rightarrow 2x^2+2x-36=0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}.$

Với $y=3 \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$

Với $y=-3 \Rightarrow 2x^2+6x+4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là: $\{(1;3),(2;3),(-1;-3),(-2;-3)\}$.

Bài 52:

Đặt : $x^{673}=a; y^{673}=b\,(a;b \in \mathbb{Z})$

Phương trình đã cho trở thành: $a^3=b^3-b^2-b+2(*)$

$\Rightarrow a^3=b^3-3b^2+3b-1+2b^2-4b+3=(b-1)^3+(2b^2-4b+3)>(b-1)^3$

Lại có: $a^3=b^3+6b^2+12b+8-7b^2-13b-6=(b+2)^3-(7b^2+13b-6)<(b+2)^3$

Từ (1) và (2) ta có: $(b-1)^3<a^3<(b+2)^3 \Rightarrow b-1<a<b+2$

Vì $a,b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=b+1 \end{array}\right.$

+) Với $a=b$ ta có: $(*) \Leftrightarrow b^3=b^3-b^2-b+2$

$\Leftrightarrow b^2+b-2=0 \Leftrightarrow (b-1)(b+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=-2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^{673}=y^{673}=1 \\ x^{673}=y^{673}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1(tm) \\ x=y=\sqrt[673]{-2}(ktm) \end{array}\right.$

+)Với $a=b+1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow (b+1)^3=b^3-b^2-b+2$

$\Leftrightarrow b^3+3b^2+3b+1=b^3-b^2-b+2$

$\Leftrightarrow 4b^2+4b-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}(ktm) \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $(x;y)=(1;1)$

Bài 53:

a) Chứng minh rằng…..

Ta có: $9!=1.2.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn $\Rightarrow x^3 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2 \Rightarrow x=2m \quad (m \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8m^3+2y^3+4z^3=9! \Leftrightarrow 4m^3+y^3+2z^3=1.3.4.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow y^3 \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2 \Rightarrow y=2n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 4m^3+8n^3+2z^3=1.3.4.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow 2m^3+4n^3+z^3=1.2.3.5.6.7.8.9$ là số chẵn

$\Rightarrow z^3 \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z=2p\,(p \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 2m^3+4n^3+8p^3=1.2.3.5.6.7.8.9$

$\Leftrightarrow m^3+2n^3+4p^3=1.3.5.6.7.8.9$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có $\left\{\begin{array}{l} m \vdots 2 \\ n \vdots 2 \\ p \vdots 2 \end{array}\right. (m;n;p \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2m \vdots 4 \\ y=2n \vdots 4 \\ z=2p \vdots 4 \end{array}\right.$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng không tồn tại…..

Theo ý a) ta có thể đặt $x=4a; y=4b; z=4c \qquad (a;b;c \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow a^3+2b^3+4c^3=\dfrac{9!}{4^3}=\dfrac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{4^3}=1.3.5.6.7.9$ là số chẵn

$\Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow a=2u \qquad (u \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow 8u^3+2b^3+4c^3=1.3.5.6.7.9 \Leftrightarrow 4u^3+b^3+2c^3=1.3.3.5.7.9=1.5.7.3^4$

Lại có:

$$\begin{cases}\left(1.5.7.3^4\right)\vdots 3^4 \Rightarrow \left(1.5.7.3^4\right)\vdots 9\\ x^3 \equiv 0;\pm 1 \qquad (\text{mod}\,9)\left(x\in Z\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow a;b;c\vdots 9 \Rightarrow \left(4u^3+b^3+2c^3\right)\vdots 9^3$$

Nhưng do $1.5.7.3^4$ không thể chia hết cho 9^3 nên ta có điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 54:

$$x^3-xy+2=x+y \Leftrightarrow x^3-xy-x-y=2$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)-y\left(x+1\right)=-2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x^2-x-y\right)=-2$$

Vì $x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=-2\\x^2-x-y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+1=2\\x^2-x-y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x+1=1\\x^2-x-y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+1=-1\\x^2-x-y=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-3\\y=11\end{cases}(tm)\\ \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}(tm)\\ \begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}(tm)\\ \begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}(tm)\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm nguyên $\left(x;y\right)=\left\{\left(-3;11\right);\left(1;1\right);\left(0;2\right);\left(-2;4\right)\right\}$

Bài 55:

Tìm các số nguyên x,y,z thỏa mãn đồng thời:

$x^2+4y^2+z^2+2xz+4(x+z)=396$ và $x^2+y^2=3z$.

Từ điều kiện $x^2+y^2=3z$ suy ra x^2+y^2 chia hết cho 3 hay x,y đều chia hết cho 3.

$x^2+4y^2+z^2+2xz+4(x+z)=396 \Leftrightarrow (x+z+2)^2=4(100-y^2)$.

Suy ra: $100-y^2$ là số chính phương và $y^2\le 100$. Mặt khác $y\vdots 3$ nên $y^2\in\left\{0;36\right\}$ $\Rightarrow y\in\left\{0;6;-6\right\}$.

Xét $y=0$: $\begin{cases}x^2=3z\\ \left(x+z+2\right)^2=400\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\dfrac{x^2}{3}\\ x+z+2=20\end{cases} \vee \begin{cases}z=\dfrac{x^2}{3}\\ x+z+2=-20\end{cases}$

Tìm được $x=6,z=12$ hoặc $x=-9,z=27$.

Xét $y=6$ hoặc $y=-6$: $\begin{cases}x^2+36=3z\\ \left(x+z+2\right)^2=256\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z=\dfrac{x^2}{3}+12\\ x+z+2=16\end{cases} \vee \begin{cases}z=\dfrac{x^2}{3}+12\\ x+z+2=-16\end{cases}.$$

Giải ra $x,z\notin\mathbb{Z}$. Vậy $\left(x;y;z\right)$ là $\left(6;0;12\right)$ hoặc $\left(-9;0;27\right)$.

Bài 56:

$$2x^2-4y^2-2xy-3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-4xy-2x\right)+\left(2xy-4y^2-2y\right)-\left(x-2y-1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x-2y-1\right)+2y\left(x-2y-1\right)-\left(x-2y-1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2y-1\right)\left(2x+2y-1\right)=4\qquad(*)$$

Do $x,y\in\mathbb{Z}, 2x+2y-1$ lẻ nên ta có các trường hợp sau đây:

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2y-1=-1\\x-2y-1=-4\end{cases}\\\begin{cases}2x+2y-1=1\\x-2y-1=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2y=0\\x-2y=-3\end{cases}\\\begin{cases}2x+2y=2\\x-2y=5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}(tm)\\\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=\dfrac{-4}{3}\end{cases}(ktm)\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $\left(1;-1\right)$

Bài 57:

Ta có:

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2-2xy+y-5x+2=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=2xy-y$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=y(2x-1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{3x^2-5x+2}{2x-1}(Do...x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2x-1\neq 0)$$

Do x,y nguyên nên:

$$\begin{cases}\left(3x^2-5x+2\right)\vdots\left(2x-1\right)\\3\left(2x-1\right)^2\vdots\left(2x-1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[4\left(3x^2-5x+2\right)-3\left(2x-1\right)^2\right]\vdots\left(2x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[-20x+8-3\left(-4x+1\right)\right]\vdots\left(2x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(-8x+5\right)\vdots\left(2x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[-8x+5+4\left(2x-1\right)\right]\vdots\left(2x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1\vdots\left(2x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=1\\2x-1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=0\\x=0\Rightarrow y=-2\end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm nguyên $\left(x;y\right)$ của phương trình đã cho là $\left(1;0\right);\left(0;-2\right)$

Bài 58:

Vì x,y nguyên dương nên $VP>0$ do đó $VT>0$ nên $x>y$

Ta có: $15xy=16\left(x^3-y^3\right)-371$ là số lẻ nên x, y đều lẻ, do vậy : $\begin{cases}x\geq 3\\ y\geq 1\end{cases}$

Xét $x=3$ thì $y=1$ thay vào phương trình thỏa mãn

Xét $x\geq 5$

Ta có:

$x-2\geq y\Rightarrow 16\left(x^3-y^3\right)\geq 16\left[x^3-\left(x-2\right)^3\right]=16\left(6x^2-12x+8\right)$

$15xy+371\leq 15x\left(x-2\right)+371=15x^2-30x+371$

$16\left(6x^2-12x+8\right)-\left(15x^2-30x+371\right)=81x^2-162x-243=81\left(x^2-2x-3\right)$

Ta có: $x^2-2x-3>0,\forall x\geq 5\Rightarrow 16\left(x^3-y^3\right)>15xy+371$

Vậy trường hợp này vô nghiệm

Vậy phương trình có cặp nghiệm nguyên dương duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$

Bài 59:

Ta có 1 số chính phương khi chia cho 3 sẽ nhận được số dư là 0 hoặc 1 nên ta có:

$$\begin{cases}(3k)^2=9k^2\\ (3k+1)^2=9k^2+6k+1\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)\\ \left(3k+2\right)^2=9k^2+12k+4\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)\end{cases}$$

Nếu $x,y>3$ thì x,y không chia hết cho 3 do đó số dư của Vế trái cho 3 là $1-2.1=-1$ chia 3 dư 2 vô lý do $x^2-2y^2=1$

$\Rightarrow$ trong hai số x, y phải có một số bằng 3

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow 9-2y^2=1\Rightarrow y^2=4\Leftrightarrow y=2(y>0)\\ y=3\Rightarrow x^2-2.9=1\Leftrightarrow x^2=19\Rightarrow x\in\varnothing\end{array}\right.$$

Vậy các cặp số nguyên $\left(x;y\right)=\left(3;2\right)$

Bài 60:

$x^2-xy+y^2=2x-3y-2\Leftrightarrow x^2-\left(y+2\right)x+y^2+3y+2=0\quad(1)$

$\Delta=\left(y+2\right)^2-4\left(y^2+3y+2\right)=-3y^2-8y-4$

Để phương tình (1) có nghiệm thì $\Delta\geq 0$

$\Rightarrow -3y^2-8y-4\geq 0\Leftrightarrow 3y^2+8y+4\leq 0\Leftrightarrow -2\leq y\leq -\dfrac{2}{3}$

Vì y nguyên nên $y=-2$ hoặc $y=-1$.

Với $y=-2$, (1) $\Rightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Với $y=-1$, (1) $\Rightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $(0;-2),(0;-1),(1;-1)$.

Bài 61:

- Với $y=0$, ta có $x=0$.

- Với $y\neq 0$, ta có:

$$x^2y^2-x^2-6y^2=2xy \Leftrightarrow x^2y^2-5y^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-5=\frac{(x+y)^2}{y^2}=a^2 \ \left(a\in\mathbb{Z}\right).$$

$$x^2-a^2=5 \Leftrightarrow \begin{cases}|x|+|a|=5\\ |x|-|a|=1\end{cases} \Rightarrow |x|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-3\end{array}\right.$$

Khi $x=3 \Rightarrow 3y^2-6y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=3\end{array}\right.$

Khi $x=-3 \Rightarrow 3y^2+6y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-3\end{array}\right.$

Vậy $(x;y)\in\left\{(0;0);(3;-1);(3;3);(-3;1);(-3;-3)\right\}$

Bài 62:

Coi phương trình đã cho là phương trình bậc 2 ẩn y có tham số x

Ta có: $\Delta=4x^2+12x+8$

Vì $x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow \Delta$ là số chính phương

$\Rightarrow 4x^2+12x+8=k^2 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9-k^2=1$

$\Leftrightarrow (2x+3)^2-k^2=1$

$\Leftrightarrow (2k+3-k)(2k+3+k)=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+3-k=1\\ 2x+3+k=1\end{cases}\\ \begin{cases}2x+3-k=-1\\ 2x+3+k=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\ k=0\end{cases}(tm)\\ \begin{cases}x=-2\\ k=0\end{cases}(tm)\end{array}\right.$$

Thay vào phương trình đề

Với $x=-1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Rightarrow y=1(tm)$

Với $x=-2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow y^2-4y+4=0 \Leftrightarrow (y-2)^2=0 \Leftrightarrow y=2(tm)$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $(x;y)=\left\{(-1;1);(-2;2)\right\}$

Bài 63:

Nhân cả hai vế của phương trình với 12 ta được:

$$36\left(a^2+b^2\right)-84(a+b)=-48 \Leftrightarrow (6a-7)^2+(6b-7)^2=50=5^2+5^2=1^2+7^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(6a-7)^2=25\\(6b-7)^2=25\end{cases}\\\begin{cases}(6a-7)^2=1\\(6b-7)^2=49\end{cases}\\\begin{cases}(6a-7)^2=49\\(6b-7)^2=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6a-7=5\\6b-7=5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=5\\6b-7=-5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-5\\6b-7=-5\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=1\\6b-7=7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=1\\6b-7=-7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-1\\6b-7=-7\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=7\\6b-7=1\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-7\\6b-7=1\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=7\\6b-7=-1\end{cases}\\\begin{cases}6a-7=-7\\6b-7=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=2(tm)\\a=\frac{1}{3},b=2(ktm)\\a=2,b=\frac{1}{3}(ktm)\\a=\frac{1}{3};b=\frac{1}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=\frac{7}{3}(ktm)\\a=1;b=\frac{7}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=0(ktm)\\a=1;b=0\\a=0;b=\frac{4}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=\frac{4}{3}(ktm)\\a=\frac{4}{3};b=1(ktm)\\a=0,b=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\\a=b=2\\\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $(a;b)=\{(0;1);(1;0);(2;2)\}$

Bài 64:

Ta có $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x \Leftrightarrow 4y^2+4y+1=4x^4+4x^3+4x^2+4x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2y+1)^2=\left(2x^2+x\right)^2+(3x+1)(x+1)\\(2y+1)^2=\left(2x^2+x+1\right)^2-x(x+1)\end{cases}$$

Ta thấy : nếu $x<-1$hoặc $x>2$thì $(3x+1)(x+1)>0$ và $x(x-2)>0$nên từ (1) và (2) ta suy ra

$\left(2x^2+x+1\right)^2>(2y+1)^2>\left(2x^2+x\right)^2$ $(*)$ Loại vì không có số nguyên y thỏa mãn.

Từ đó suy ra $-1\le x\le 2 \Rightarrow x\in\{-1,0,1,2\}$

Xét $x=2 \Rightarrow y^2+y=30 \Rightarrow y=5, y=-6$

Xét $x=1 \Rightarrow y^2+y=4$ loại

Xét $x=0 \Rightarrow y^2+y=0 \Rightarrow y=0, y=-1$

Xét $x=-1 \Rightarrow y^2+y=0 \Rightarrow y=0, y=-1$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm là $(0,5)(2\cdot -6)(0:0),(0;-1),(-1,0),(-1,-1)$

Bài 65:

Từ $x^2-xy-5x+5y=2$

$\Leftrightarrow x(x-y)-5(x-y)=2$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-5)=2$

Vì $2=1.2=2.1=(-1).(-2)=(-2).(-1)$ nên ta có 4 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y=1 \\ x-5=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=6 \\ x=7 \end{cases}(TM)$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-y=2 \\ x-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases}(TM)$

Trường hợp 3: $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases}(TM)$

Trường hợp 4: $\begin{cases} x-y=-2 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=4 \end{cases}(TM)$

Vậy có 4 cặp (x,y) thỏa mãn là: $(7;\ 6);\ (6;\ 4);\ (3;\ 4);\ (4;\ 6)$.

Bài 66:

Ta có $xy^2-(y-45)^2+2xy+x-220y+2024=0 \Leftrightarrow (y+1)(xy+x-y-129)=-128=-2^7$

$\Rightarrow y+1 \in \{2;4;8;16;32;64;128\} \Rightarrow y \in \{1;3;7;15;31;63;127\} \Rightarrow (x;y) \in \{(33;1),(25;3),(15;7)\}$.

Bài 67:

Xét phương trình: $x^2-n^2x+n+1=0$ (ẩn số x) (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Rightarrow n^4-4n-4 \ge 0 \Rightarrow n \notin \{0;1\}$ $\left(\text{do } n \in N\right)$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Áp dụng hệ thức Vi-et, ta được: $\begin{cases} x_1+x_2=n^2 \\ x_1x_2=n+1 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1+x_2-x_1x_2=n^2-n-1$

$\Leftrightarrow x_1(1-x_2)-(1-x_2)=n^2-n-2$

$\Leftrightarrow (x_1-1)(1-x_2)=(n-2)(n+1)$

$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=(2-n)(n+1)$

Với $n \in N, n \notin \{0;1\}$ thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = n^2 \geq 4 \\ x_1x_2 = n+1 \geq 3 \end{cases}$

Do đó $x_1 \geq 1; x_2 \geq 1 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \Rightarrow (2-n)(n+1) \geq 0$

$\Rightarrow 2 - n \geq 0 \ (\text{do } n+1 > 0, \forall n \in N) \Rightarrow n \leq 2$

Mà $n \in N, n \notin \{0;1\} \Rightarrow n = 2$. Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ (t/m\ x \in Z) \\ x = 3 \ (t/m\ x \in Z) \end{array}\right.$

Vậy với $n \in N$, để phương trình đã cho có các nghiệm là số nguyên thì $n = 2$.

Bài 68:

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y, x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \dfrac{85}{13} \Leftrightarrow 85(x+y) = 13(x^2+y^2) > 0$

=> $x + y > 0$.

Áp dụng BĐT: $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Ta có:

$$85(x+y) = 13(x^2+y^2) \geq \frac{13}{2}(x+y)^2 \Rightarrow x + y \leq \frac{170}{13} \Rightarrow x + y \leq 13$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} x + y > 0 \\ x + y \ \vdots\ 13 \end{cases} \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 = 85$$

Suy ra:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x \\ x^2 + (13-x)^2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 7 \end{cases} (TM) \\ \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases} (TM) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của PT là: (x; y) = (6; 7) ; (7; 6)

Bài 69:

Có: $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ suy ra $n^4 \leq 2(n^3+2)$, hay $n^3(n-2) - 4 \leq 0$.

Nếu $n \geq 3$ thì $n^3(n-2)-4 \geq n^3-4>0$ (Loại). Do đó $n=0;\ 1;\ 2$.

Với $n=0;\ 1$ chỉ ra không tồn tại $a;b$ thỏa mãn đề bài.

Với $n=2$ chỉ ra $a=1;b=3$ hoặc $a=3;b=1$ thỏa mãn đề bài rồi kết luận.

Bài 70:

$$2020(x^2+y^2)-2019(2xy+1)=5$$
$$\Leftrightarrow 2019(x-y)^2+x^2+y^2=2024 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow 2019(x-y)^2 \leq 2024 \Rightarrow (x-y)^2 \leq \frac{2024}{2019} \Rightarrow 0 \leq (x-y)^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x-y| \leq 1$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x-y|=0 \\ |x-y|=1 \end{array}\right.$$

Nếu $|x-y|=0 \Rightarrow x=y$, từ (1) $\Rightarrow 2x^2=2024 \Rightarrow x^2=1012$ (vô nghiệm nguyên)

Nếu $|x-y|=1$ thì $\left[\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$ và từ (1) $\Rightarrow x^2+y^2=5$ (2)

Thay $y=x-1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x-1)^2=5 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=1 \end{array}\right.$

Thay $y=x+1$ vào (2) ta được: $\Rightarrow x^2+(x+1)^2=5 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên: $(x;y)=(-1;2);(-2;1);(1;-2);(2;-1)$

Bài 71:

$2(2x^2y-x^2-3y-1)=0 \Leftrightarrow (2x^2-3)(2y-1)=5$ (*)

Suy ra $2y-1 \in Ư(5)=\{\pm 1;\pm 5\}$ mà $2y-1>-1, \forall y>0$ nên $\left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$.

Với $y=1$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(n) \\ x=-2(l) \end{array}\right.$

Với $y=3$ thay vào (*) ta được $2x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (loại).

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn là $x=2, y=1$.

Bài 72:

$$\sqrt{x+y+3}+1=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow x+y+3+2\sqrt{x+y+3}+1=x+2\sqrt{xy}+y$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+3}=\sqrt{xy}-2$$
$$\Leftrightarrow x+y+3=xy-4\sqrt{xy}+4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}=\frac{xy-x-y+1}{4}$$

Nếu xy là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy $xy = k^2 \Rightarrow \sqrt{xy} = k$

Ta có $x + y + 3 = xy - 4\sqrt{xy} + 4 \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = xy - 2\sqrt{xy} + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{xy} + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} - 1$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = k - 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow y = (k-1)^2 - 2(k-1)\sqrt{x} + x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{(k-1)^2 + x - y}{2(k-1)}$ **vì** $(k > 2)$

Nếu x là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy x là số chính phương, Lý luận tương tự thì y là số chính phương

Đặt $x = a^2; y = b^2$

Từ (*) $a + b = ab + 1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 2$

Ta tìm được $(a;b) = (2;3);(3;2) \Leftrightarrow (x;y) = (4;9);(9;4)$

Bài 73:

ĐK: $199 - x^2 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \le 200 \Rightarrow x \in \{-15;-14;-13;...;12;13\}$ (Vì $x \in Z$)

Ta có: $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x} = 2 + \sqrt{200 - (x+1)^2} \le 2 + 10\sqrt{2} \Rightarrow 0 < y^2 \le 4$, mà $y \in Z$

Suy ra: $y \in \{-2;-1;1;2\}$.

$y = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -15 \\ x = 13 \end{array}\right.$; $\quad y = -1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -15 \\ x = 13 \end{array}\right.$; $\quad y = -2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$;

$y = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn đề bài là:

$S = \{(13;-1),(13;1),(-15;-1),(-15;1),(-3;2),(-3;-2)(1;2),(1;-2)\}$

Bài 74:

Vì x, y nguyên dương và $(x;y) = (1;1)$ không thỏa mãn phương trình nên $x^2 + y^2 + 1 > 3; xy + x + y > 3$. Suy ra $xy + x + y$ là ước nguyên dương lớn hơn 3 của 30 gồm: $5;6$

Nếu $xy + x + y = 5 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 6$ ta được các trường hợp

+) $\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

+) $\begin{cases} x+1=3 \\ y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện đầu bài)

Nếu $xy+x+y=6 \Leftrightarrow (x+1)(y+1)=7$ không thỏa mãn

Vậy các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn là $(1;2),(2;1)$.

Bài 75:

Vì 65 lẻ nên $2x+5y+1$ lẻ và $2^{|x|-1}+y+x^2+x$ lẻ

Mà $2x+1$ lẻ nên $5y$ chẵn, suy ra y chẵn

Mặt khác $x^2+x=x(x+1)$ chẵn nên $2^{|x|-1}$ lẻ, suy ra $|x|-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Với x = 1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Rightarrow y=2$

Với x = -1 $\Rightarrow (5y+3)(y+3)=65 \Leftrightarrow 5y^2+4y-66=0$ Phương trình này không có nghiệm nguyên.

Vậy: $(x;y)=(1;2)$

Bài 76:

Ta có $2^m.m^2 = 9n^2 - 12n + 19 \Leftrightarrow 2^m.m^2 = (3n-2)^2 + 15$

Nếu m lẻ $\Rightarrow$ m= 2k +1, $k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow 2^m.m^2 = 2.4^k.m^2 = (3+1)^k\, 2m^2 \equiv 2m^2$ (mod3) mà $m^2 \equiv 0;1$ (mod3) nên $2.4^k.m^2 \equiv 0;2$ (mod3).
Mặt khác $(3n-2)^2 + 15 \equiv 1$ (mod3)

Vậy trường hợp này không xảy ra

Nếu m chẵn $\Rightarrow$ m= 2k , $k \in \mathbb{N}^*$ thì ta có phương trình

$2^{2k}.m^2 - (3n-2)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k.m + 3n - 2)(2^k.m - 3n + 2) = 15$ (*)

Vì $m,n \in \mathbb{N}^*$ nên $2^k.m + 3n - 2 > 2^k.m - 3n + 2$ và

$2^k.m + 3n - 2 > 0 \Rightarrow 2^k.m - 3n + 2 > 0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=15 \\ 2^k.m-3n+2=1 \end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=5 \\ 2^k.m-3n+2=3 \end{array}\right.$

TH1: $\left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=15 \\ 2^k.m-3n+2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.2k=8 \\ n=3 \end{cases}$ (vô nghiệm)

TH2: $\left[\begin{array}{l} 2^k.m+3n-2=5 \\ 2^k.m-3n+2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k.2k=4 \\ n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm m = 2, n = 1

Bài 77:

Từ biểu thức $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$ ta nhận thấy 3x-1 phải chia hết cho $(x^2 - x + 1)$

ta có (3x - 1)(3x - 2) = $9x^2$ - 9x + 2 = 9(x^2 – x + 1) - 7 cũng phải chia hết cho (x^2 – x + 1)

suy ra 7 chia hết cho (x^2 - x + 1)

(x^2 - x + 1) = 1 hoặc 7

Thay x = 0,1,3 và -2 lần lượt vào ta có y => (x,y) = (1,1),(1,-2) và (-2,1)

Bài 78:

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^2(y-2)^2+y^3-3y^2+4=3$

hay $(y-2)^2(x^2+y+1)=3$.

Suy ra $(y-2)^2=1$ và $x^2+y+1=3$. Giải ra, ta được $x=\pm1$ và $y=1$. Vậy có hai cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $(1;1)$ và $(-1;1)$.

Bài 79:

Điều kiện: $x\ge 0; y\ge ; \sqrt{x}+y-2\ge 0$

Với điều kiều kiện trên bình phương 2 vế ta có

$$2\left(\sqrt{x}+y-2\right)=\sqrt{x}.y \Leftrightarrow \sqrt{x}(2-y)-2(2-y)=0 \Leftrightarrow (2-y)\left(\sqrt{x}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=2 \vee x=4$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $x\ge 0, y=2$ và $x=4, y\ge 0$

Bài 80:

Ta có $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

$\Leftrightarrow$ $(x + y)^2 = xy(xy + 1)$

+ Nếu x + y = 0 $\Rightarrow$ xy(xy + 1) = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ xy=-1 \end{array}\right.$

Với xy = 0. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow$ x = y = 0

Với xy = -1. Kết hợp với x + y = 0 $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

+ Nếu x + y $\neq$ 0 $\Rightarrow$ $(x + y)^2$ là số chính phương

xy(xy + 1) là hai số nguyên liên tiếp khác 0 nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó không thể cùng là số chính phương

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là (x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)

Bài 81:

Ta có $x^5+y^2=xy^2+1 \Leftrightarrow \left(x^5-1\right)-\left(xy^2-y^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)-y^2(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1-y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^4+x^3+x^2+x+1=y^2 \end{array}\right.$$

*Nếu $x-1=0 \Rightarrow x=1$ ta có $1+y^2=y^2+1$ đúng với mọi y nguyên

Vậy ngiệm của PT là $(1;y\in Z)$

*Nêu $x^4+x^3+x^2+x+1=y^2 \Rightarrow 4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=(2y)^2$

Ta có

$$(2y)^2-(2x^2+x)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4-4x^4-4x^3-x^2$$

$$=3x^2+4x+4=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$$

Vậy ta có $(2x^2+x)^2<(2y)^2$ *

Ta có $(2x^2+x+2)^2-(2y)^2=5x^2\geq 0$, Vậy ta có $(2y)^2\geq(2x^2+x+2)^2$ **

Từ * và ** ta có

$(2x^2+x)^2<(2y)^2\leq(2x^2+x+2)^2 \Rightarrow (2y)^2=(2x^2+x+1)^2$;

$(2y)^2=(2x^2+x+2)^2$

Nếu $(2y)^2=(2x^2+x+1)^2 \Leftrightarrow -x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

+ nếu $x=-1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

+Nếu $x=3 \Rightarrow y^2=121 \Rightarrow y=\pm 11$

-Nếu $(2y)^2=(2x^2+x+2)^2 \Leftrightarrow -5x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$.

Kết luận (x, y) = (-1, 1); (-1, -1); (3, 11); (3, -11); (0, 1); (0, -1); là $(1,y\in Z)$.

Bài 82:

Giả thiết $\Leftrightarrow 3(x-3)^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2=54 \quad (1)$

+) Lập luận để $z^2 \,\vdots\, 3 \Rightarrow z \,\vdots\, 3 \Rightarrow z^2 \,\vdots\, 9 \Rightarrow z^2\geq 9$ (*)

$(1) \Leftrightarrow 3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6)=54 \quad (2)$

$(2) \Rightarrow 54=3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6)\geq 3(x-3)^2+2.9+3y^2.3$

$(x-3)^2+3y^2\leq 12$

$\Rightarrow y^2\leq 4 \Rightarrow y^2=1; y^2=4$ vì y nguyên dương

Nếu $y^2=1 \Leftrightarrow y=1$ thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2+5z^2=72 \Rightarrow 5z^2\leq 72 \Rightarrow z^2\leq\frac{72}{5} \Rightarrow z^2=9 \Rightarrow z=3$ (vì có(*))

Khi đó $3(x-3)^2 = 27 \Rightarrow (x-3)^2 = 9$, x nguyên dương nên tìm được x=6

Nếu $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng:

$3(x-3)^2 + 14z^2 = 126 \Rightarrow 14z^2 \le 126 \Rightarrow z^2 \le 9 \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3$ (vì z nguyên dương)

Suy ra $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ (vì x nguyên dương) . Đáp số $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}; \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$

Bài 83:

Đặt $a = x+y, b = xy \left(a, b \in Z\right)$ và $a^2 \ge 4b$

Phương trình (1) trở thành: $b^2.a + a = 2 + b \Leftrightarrow a = \dfrac{2+b}{b^2+1}$

Do đó: $(2+b) \vdots (b^2+1) \Rightarrow a^2 - 4 \vdots b^2 + 1 \Rightarrow (a^2+1) - 5 \vdots b^2 + 1 \Rightarrow 5 \vdots a^2 + 1$

$\Rightarrow a^2 + 1 \in \{1; 5\} \Rightarrow a \in \{0, 4\} \Rightarrow a \in \{0; -2; 2\}$

Với $a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x+y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(0;2), (2;0)\}$

Với $a = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ (loại vì không thỏa mãn x, y nguyên)

Với $a = 2 \Rightarrow b = \dfrac{4}{5}$ (loại vì b không nguyên)

Vậy nguyện (x, y) = (0, 2); (2, 0).

Bài 84:

Ta có: $xy^2 + 2xy - 243y + x = 0 \Leftrightarrow x(y+1)^2 = 243y$

Vì $y + 1 \ne 0$ nên ta có: $x = \dfrac{243y}{(y+1)^2}$

Do (y, y + 1) = 1 nên $(y+1)^2$ là ước của 243 . Mặt khác: $243 = 3^5$

Do đó: $(y+1)^2 = 3^2 \vee (y+1)^2 = 3^4$

Với: $(y+1)^2 = 3^2 \Rightarrow y = 2, x = 54$

Với: $(y+1)^2 = 3^4 \Rightarrow y = 8, x = 24$

Vậy nghiệm dương của phương trình là: (x, y) = (54, 2); (24, 8)

Bài 84: Xét phương trình $x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$ với $x, y \in Z^+$

Xét y = 0 thì $x^2 = 1$ do x nguyên dương nên x = 1

Xét $y \ge 1 \Rightarrow x \ge 3$. Ta có: $(x+y)^2(x-y)^2 = y+1 \Rightarrow (y+1) \vdots (x+y)$ (vô lý)

Do đó số nguyên không âm phải tìm là (x, y) = (1, 0).

Bài 85: Ta có $y^2 = 1 + \sqrt{13-(x^2+4x+4)} = 1 + \sqrt{13-(x+2)^2} \le 1 + \sqrt{13}$

Suy ra $1 \le y^2 \le 4$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow 13 = (x+2)^2$ không có nghiệm nguyên.

Với $y^2 = 4 \Rightarrow 3 = \sqrt{13-(x+2)^2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

Vậy phương trình có 4 nghiệm (-2, 0); (-2, -4); (2, 0); (2; - 4).

Bài 86:

Ta có: $|4-3x| = 5-a \quad (1)$

Xét $x \le \frac{4}{3}$, ta được $x = \frac{a-1}{3}$.

Để x nguyên dương và thuộc khoảng đang xét ta giải hệ $\begin{cases} 0 < \frac{a-1}{3} \le \frac{4}{3} \Rightarrow a = 4 \\ a-1 \vdots 3 \end{cases}$

Khi đó x = 1.

Xét $x > \frac{4}{3}$, ta được $x = \frac{9-a}{3}$.

Giải hệ: $\begin{cases} \frac{9-a}{3} > \frac{4}{3} \\ 9-a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5 \\ a \vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3k$ với $k \le 1$.

Khi đó x = 3 – k

Vậy ta cần a = 4 hoặc a = 3k với k nguyên, $k \le 1$.

Bài 87: Ta có:

$$x^2y^2 + (x-2)^2 + (2y-2)^2 - 2xy(x+2y-4) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 - 2x^2y - 4xy^2 + 8xy = 5$$

$$\Leftrightarrow (x^2y^2 - 4xy^2 + 4y^2) + (x^2 - 4x + 4) + (-2x^2y + 8xy - 8y) = 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4x + 4) - 2y(x^2 - 4x + 4) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4)(y^2 + 1 - 2y) = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2(y-1)^2 = 1$$

$TH1:(x-2)=(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=2$

$TH2:(x-2)=(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=0$

$TH3:(x-2)=-(y-1)=1 \Leftrightarrow x=3$ và $y=0$

$TH4:(x-2)=-(y-1)=-1 \Leftrightarrow x=1$ và $y=2$

Vậy phương trình có các cặp $(x;y)$ nguyên là: $(3;2);(1;0);\ (3;0);(1;2)$.

Bài 88:

Đặt $\sqrt{x}=a, a>0$, $y^2=b, b>0$.

$4y^4+6y^2-1=x$

$\Leftrightarrow 4b^2+6b-1=a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b-4=4a^2$

$\Leftrightarrow 16b^2+24b+9-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3)^2-4a^2=13$

$\Leftrightarrow (4b+3-2a)(4b+3+2a)=13$

Lập bảng

$4b+3-2a$	1	13
$4b+3+2a$	13	1
a	3	-3
b	1	1
	Nhận	Loại
x	9	
y	1	

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)$ là $(9;1)$.

Bài 89:

Ta có $(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-1+6xy-y^2(x+y-2)=2(x+y+xy+1) \Leftrightarrow (x+y)^2-y^2(x+y-2)=2(x+y)+3$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-2)-y^2(x+y-2)=3 \Leftrightarrow (x+y-2)(x+y-y^2)=3$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x+y-2;\ x+y-y^2$ là các ước của 3

+) $\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$.

+) $\begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y-y^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.   +) $\begin{cases} x+y-2=3 \\ x+y-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$.

+) $\begin{cases} x+y-2=-3 \\ x+y-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy các cặp số nguyên $(x;\,y)$ là $(3;0)$; $(3;-2)$; $(-1;2)$; $(7;-2)$; $(3;2)$; $(-1;0)$.

Bài 89:

Ta có

$$(x-2018)^2+1=y^4+9y^2+1-6y^3-6y+2y^2=(y^2-3y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (y^2-3y+1)^2-(x-2018)^2=1 \Leftrightarrow (y^2-3y+1+x-2018)(y^2-3y+1-x+2018)=1$$

$$\text{TH1}: \begin{cases}(y^2-3y+1+x-2018)=-1\\(y^2-3y+1-x+2018)=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2018\\y^2-3y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2018\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\y=2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\text{TH2}: \begin{cases}(y^2-3y+1+x-2018)=1\\(y^2-3y+1-x+2018)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2018\\y^2-3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2018\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\y=3\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;\,y)\in\{(2018;0);(2018;1);(2018;2);(2018;3)\}$.

Bài 90:

Ta có $(1)\Leftrightarrow (y-2)(y-3)+56=(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$$

Nhận thấy $(y-2)+(x-1)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy ta có

+) $56=1.7.8\Rightarrow (x;y)=(2;9).$

+) $56=7.1.8\Rightarrow (x;y)=(8;3).$

+) $56=(-8).1.(-7)\Rightarrow (x;y)=(-7;3).$

+) $56=1.(-8).(-7)\Rightarrow (x;y)=(2;-6).$

+) $56=(-8).7.(-1)\Rightarrow (x;y)=(-7;9).$

+) $56=7.(-8).(-1)\Rightarrow (x;y)=(8;-6).$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.

Bài 91:

Ta có $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y+3)=-7$

Xét các trường hợp ta có $(x;y)=(3;2);(-5;-6);(-7;-4);(1;4).$

Bài 92:

Để phương trình có nghiệm thì $9x^2+16x+32$ phải là một số chính phương.

Khi đó $9x^2+16x+32=t^2\ (t\in\mathbb{N})$. Phương trình trên tương đương với

$$81x^2+144x+288=9t^2 \Leftrightarrow 81x^2+2.9.8+64+224=9t^2$$

$$\Leftrightarrow (9x+8-3t)(9x+8+3t)=-224=-2^4.14=-2^3.28=-2^2.56=-2.112$$

$$=2^4.(-14)=2^3.(-28)=2^2.(-56)=2.(-112)$$

Ta có $x\in Z; t\in N$ nên $9x+8+3t>9x+8-3t$ $9x+8-3t; 9x+8+3t$ cùng tính chẵn lẻ.

Lại thấy $9x+8+3t$ và $9x+8-3t$ đều chia 3 dư 2 khi đó ta có các trường hợp sau.

$$\begin{cases}9x+8+3t=14\\9x+8-3t=-16\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=56\\9x+8-3t=-4\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=8\\9x+8-3t=-28\end{cases};\begin{cases}9x+8+3t=2\\9x+8-3t=-112\end{cases}$$

Giải các trường hợp trên ta được $x\in\{-7;-2;-1;2\}$

+ Với $x=-1\Rightarrow -27-16y=5\Rightarrow y=-2$ (thỏa mãn).

+ Với $x=-2\Rightarrow -30-16y=6\Rightarrow y=-\frac{9}{4}$ (loại).

+ Với $x=2\Rightarrow -18-16y=10\Rightarrow y=\frac{7}{4}$ (loại)

+ Với $x=-7\Rightarrow -45-16y=19\Rightarrow y=-4$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)=(-1;-2),(-7;-4)$.

Bài 93:

Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0$. nhận thấy đây là phương trình có bậc là hai nên ta sẽ sử dụng delta để giải phương trình nghiệm nguyên này.

Phương trình tương đương với $x^2+3xy+2y^2-x-5=0 \Leftrightarrow x^2+(3y-1)x+2y^2-5=0$

Xem phương trình là phương trình bậc 2 ẩn x ta được

$$\Delta=(3y-1)^2-4(2y^2-5)=y^2-6y+21=(y-3)^2+12$$

Để phương trình trên có nghiệm là nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Đặt $\Delta=(y-3)^2+12=a^2 \Leftrightarrow (a-y+3)(a+y-3)=12$ với a là số nguyên.

Vì $a-y+3$ và $a+y-3$ cùng tính chẵn lẻ nên ta có bảng sau

$a-y+3$	2	6	-2	-6
$a+y-3$	6	2	-6	-2
a	4	4	-4	-4
y	5 (TM)	1 (TM)	1 (TM)	5 (TM)

Thay $y=5$ vào phương trình đã cho ta được $x^2+14x+45=0 \Leftrightarrow x\in\{-9;-5\}$

Bài 94:

Ta có $x(x^2+x+1)=4^y-1 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=4^y$

Do $x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x,y\ge 0$

- Nếu $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- Nếu $x>0 \Rightarrow y>0 \Rightarrow x+1$ chẵn, đặt $x=2k+1\,(k\geq 0)$

Khi đó $(k+1)(2k^2+2k+1)=4^{y-1}$

Do $2k^2+2k+1$ là số lẻ nên suy ra $k=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (x;y)=(1;1)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0);(1;1)$

Bài 95:

Viết phương trình đã cho về dạng: $9.(3^{x-2}+19)=y^2$ ($x\geq 2$). Để y là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2}+19=z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương)

Nếu $x-2=2k+1$ là số lẻ thì $3^{2k+1}+19=(3^{2k+1}+1)+18=4.B+18$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không thể là số chính phương.

Do đó $x-2=2k$ là số chẵn

Ta có $3^{x-2}+19=z^2 \Leftrightarrow (z-3^k)(z+3^k)=19$. Vì 19 là số nguyên tố và $z-3^k<z+3^k$ nên

$$\begin{cases} z-3^k=1 \\ z+3^k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ 3^k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ k=2 \end{cases}$$

Vậy $x=6$ và $y=30$.

Bài 96:

Nếu $x=0 \Rightarrow y=1$ thỏa mãn

Nếu $y=0 \Rightarrow x\notin \mathbb{Z}$ không thỏa mãn

Xét $x\neq 0; y\neq 0$ phương trình đã cho có dạng

$$4.54x^3(54x^3+1)=4.54x^3.y^3 \Leftrightarrow (4.27x^3+1)^2=(6xy)^3+1$$

Đặt $4.27x^3=a; 6xy=b$ ta được phương trình

$$(a+1)^2=(b+1)(b^2-b+1) \quad (*)$$

Từ $(*)$ ta thấy $b+1>0$. Gọi ƯCLN$(b+1;b^2-b+1)=d$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1\,\vdots\, d \\ b^2-b+1\,\vdots\, d \end{cases} \Rightarrow b^2-b+1=b(b+1)-2(b+1)+3\,\vdots\, d \Rightarrow 3\,\vdots\, d$$

Mặt khác $(a+1)^2=(4.27x^3+1)$ không chia hết cho 3 nên 3 không chia hết $d \Rightarrow d=1 \Rightarrow (b+1;b^2-b+1)=1$

Từ $(*)$ nhận thấy tích hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên phải có $\begin{cases} b+1=m^2 \\ b^2-b+1=n^2 \end{cases}$ $(m;n\in\mathbb{N}^*; m\geq 2; m^2\geq 4)$

Ta có $n^2=(m^2-1)^2-(m^2-1)+1$

$$\Leftrightarrow n^2=(m^2-1)^2-(m^2-2) \quad (1); n^2=(m^2-2)^2+(m^2-1) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m^2-2)^2<n^2<(m^2-1)^2$ vô lý suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

Bài 97:

Ta có: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$ (1)

$\Rightarrow 7(x+2y)\vdots 5 \Rightarrow (x+2y)\vdots 5$. Đặt $x+2y=5t$ (2) $(t\in Z)$ thì

(1) trở thành $x^2+xy+y^2=7t$ (3).

Từ (2)$\Rightarrow x=5t-2y$ thay vào (3) ta được $3y^2-15ty+25t^2-7t=0$ (*), coi đây là PT bậc hai đối với y có: $\Delta=84t-75t^2$

Để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0 \Leftrightarrow 84t-75t^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow 0\leq t\leq \dfrac{28}{25}$

Vì $t\in Z \Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$. Thay vào (*) :

+ Với $t=0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow x_1=0$

+ Với $t=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2=3 \Rightarrow x_2=-1 \\ y_3=2 \Rightarrow x_3=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm nguyên (x, y) là (0; 0), (-1; 3) và (1; 2)

Bài 98:

Ta có $x(1+x+x^2)=4y(y-1) \Leftrightarrow (x^3+x^2)+x+1=4y^2-4y+1$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=(2y-1)^2$ (1)

Vì $x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2>0$ nên từ (1) suy ra $x\geq 0$ và x chẵn.

Giả dử $(x+1;x^2+1)=d \Rightarrow d$ lẻ và $\begin{cases} x^2-1\vdots d \\ x^2+1\vdots d \end{cases} \Rightarrow 2\vdots d \Rightarrow d=1$

Vì $(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương mà $(x+1;x^2+1)=1$ nên $(x+1)$ và (x^2+1) cũng là hai số chính phương.

Do $x\geq 0 \Rightarrow x^2<x^2+1\leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2+1=(x+1)^2 \Rightarrow x=0$

Khi $x=0 \Rightarrow 4y(y-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$

Vậy hai cặp số nguyên $(x;y)=(0;0);(0;1)$

Bài 99:

Ta có $x^2=2x+\overline{yzz4} \Leftrightarrow (x-1)^2=\overline{yzz5}$; x, y, z$\in\mathbb{Z}^+$ và $y,z\in\{1;2;...;9\}$

Suy ra $x-1$ có dạng $\overline{a5}$

Do đó $\overline{yzz5}=\overline{a5}^2=(10a+5)^2=100a(a+1)+25$

Suy ra $z=2 \Rightarrow y+z+z+5=y+9$

Vì $(x-1)^2 = \overline{yzz5}$ là số chính phương và có tổng các chữ số bằng $y+9$ nên $\overline{yzz5}$ chia cho 9 dư 0, 1, 4, 7. Do đó $y \in \{1;4;7\}$

Khi đó tìm được $(x,y,z) \in \{(36;1;2);(66;4;2);(86;7;2)\}$.

Bài 100:

Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y}+\sqrt{z} \Leftrightarrow x+2\sqrt{3} = y+z+2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow (x-y-z)+2\sqrt{3} = 2\sqrt{yz} \Rightarrow (x-y-z)^2+4\sqrt{3}(x-y-z)+12 = 4yz$ (1)

TH1. Nếu $x-y-z \neq 0$ Ta có $\sqrt{3} = \dfrac{4yz-(x-y-z)^2-12}{4(x-y-z)}$ (2) vô lý

(do $x,y,z \in N$ nên vế phải của (2) là số hữu tỷ).

TH2. $x-y-z=0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ yz=3 \end{cases}$ (3)

Giải (3) ra ta được $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$ thử lại thỏa mãn

Bài 101:

$2xy^2+x+y+1 = x^2+2y^2+xy \Leftrightarrow x^2 - x(2y^2-y+1)+2y^2-y-1=0$ (1)

Đặt $2y^2-y+1 =$ a, khi đó PT (1) trở thành $\Leftrightarrow x^2-ax+a-2=0$ (2)

Phương trình (2) có $\Delta = a^2-4a+8 = (a-2)^2+4$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow$ Δ là số chính phương

Đặt $(a-2)^2+4 = k^2$ $(k \in N) \Leftrightarrow k^2-(a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (k+a-2)(k-a+2) = 4$

Vì $(k+a-2)+(k-a+2) = 2k$ là số chẵn và có tích cũng là số chẵn nên $(k+a-2)$ và $(k-a+2)$ là số chẵn.

Do đó $\begin{cases} k+a-2=2 \\ k-a+2=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k+a-2=-2 \\ k-a+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} k=-2 \\ a=2 \end{cases}$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a+\sqrt{k^2}}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2 \\ x = \dfrac{a-\sqrt{k^2}}{2} = \dfrac{2-2}{2} = 0 \end{array}\right.$

Ta có $2y^2-y-1 = a = 2 \Leftrightarrow 2y^2-y-1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2-2y+y-1=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$. Ta chọn $y=1$ (vì y $\in$ Z)

Vậy nghiệm nguyên $(x\,;\,y)$ của phương trình là $(2\,;\,1)$ và $(0\,;\,1)$

Bài 102:

Xét $x=1 \Rightarrow y=1$.

Xét $x \geq 2$ thì $4^x \vdots 8$. Nếu y chẵn, đặt $y=2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1+3^y=1+9^k \equiv 2\left(\bmod 8\right)$, vô lí

Nếu y lẻ $y=2k+1\left(k \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow 1+3^y=1+9^k.3 \equiv 4\left(\bmod 8\right)$, vô lí.

Vậy $x=y=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 103.

Nhận thấy x, y là các số nguyên không âm và $\sqrt{11296320}=2^3.41.\sqrt{105}$ là số vô tỷ.

Phương trình đã cho có thể viết lại:

$$\left(x+y\right)^2+4xy-3361=4\left(x+y\right)\sqrt{xy}-328\sqrt{105} \qquad (1)$$

Vế trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là của vế trái và vế phải của (1) đều bằng 0. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x+y\right)^2+4xy-3361 \\ 4\left(x+y\right)\sqrt{xy}-328\sqrt{105}=0 \end{cases}$$

Đặt $S=x+y, P=xy$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} S^2+4P-3361 & (2) \\ S\sqrt{P}=82\sqrt{105} & (3) \end{cases}$

Từ (3) rút ra được: $P=\dfrac{82^2.105}{S^2}$. Thay vào (2) thu gọn ta được:

$$S^4-3361.S^2+4.82.105=0 \Leftrightarrow S^2=1681 \vee S^2=1680=41^2$$

Do đó: $S=41, P=420$.

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2-42t+420=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=20 \\ t=21 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm (20 ; 21) và (21 ; 20).

Bài 104.

Ta thấy (x, y) = (0 , 0) không là nghiệm của phương trình.

Với x, y khác 0: $(1) \Leftrightarrow |4x-6y|+|9x-6y|=\sqrt{313\left(x^2+y^2\right)}$

Ta dễ dàng chứng minh được: $|A|+|B|=\begin{cases} |A+B| & (A.B \geq 0) \\ |A-B| & (A.B<0) \end{cases}$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y)\ge 0$ thì

$(2)\Leftrightarrow |13x-12y|=\sqrt{313(x^2+y^2)}\Leftrightarrow 144x^2+2.13.12xy+169y^2=0\Leftrightarrow 12x+13y=0$

Vì (13,12) = 1 nên $(x,y)=(13k;-12k)$ với $k\in Z$ và $k\ne 0$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y)<0$ thì

$(2)\Leftrightarrow |5x|=\sqrt{313(x^2+y^2)}\Leftrightarrow 288x^2+313y^2=0$ (VN)

vậy phương trình có nghiệm $(x,y)=(13k;-12k)$ với $k\in Z$ và $k\ne 0$

Bài 105.

Phương trình đã cho được viết dưới dạng: $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2x+1)}\Leftrightarrow 4y=2x+1+\frac{3}{2x+1}$

Vì $x,y\in Z\Rightarrow 2x+1$ là ước của 3 $\Rightarrow 2x+1\in\{1;-1;3;-3\}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(0;1),(-1;-1),(1;1)(-2;-1)$

Bài 106.

Nếu $(A+B\sqrt{3})^2=C+D\sqrt{3}$ thì $C=A^2+3B^2, D=2AB\Rightarrow (A-B\sqrt{3})^2=C-D\sqrt{3}$

Do đó nếu $(x+y\sqrt{3})^2=444444+303030\sqrt{3}$

Thì ta cũng có: $(x-y\sqrt{3})^2=444444-303030\sqrt{3}$ (vô lý)

Do $444444-303030\sqrt{3}<0$.

Bài 107.

Đặt s = x + y, p = x. y khi đó $s,p\in N^*$. Lúc đó phương trình trở thành:

$3s^2=4p+664$ (1)

Nếu p =1 thì $s\notin N^*$ (mâu thuẫn)

Vì vậy $p\ge 2$ và $3s^2\ge 672\Rightarrow s^2\ge 224$ (2)

Mặt khác từ điều kiện: $s^2\ge 4p$, ta có $3s^2-664\le s^2$. Vì vậy: $s^2\le 332$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $s^2\in\{256;324\}$

a) $s^2=256\Rightarrow s=16, p=26\Rightarrow x\notin N^*$.

b) $s^2=324\Rightarrow s=18, p=77\Rightarrow (x,y)=(11,7);(7,11)$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (11, 7); (7,11).

Bài 108.

Ta có:

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2+y^2\right)+y\left(x^2+y^2\right)=8\left(x^2+y^2\right)+8xy+8$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(x+y-8\right)=8xy+8 \quad (1)$$

Suy ra: x, y chung tính chăn lẻ và (x + y – 8) là số chẵn.

Nếu $x+y-8\ge 6$ thì $x^2+y^2\ge \dfrac{\left(x+y\right)^2}{2}\ge \dfrac{14^2}{2}>4$

Suy ra: $\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-8\right)\ge 6\left(x^2+y^2\right)\ge 2\left(x^2+y^2\right)+8xy>8+8xy$, phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x+y-8\le -4$ thì $\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-8\right)\le -4\left(x^2+y^2\right)\le 8xy<8+8xy$, phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x+y-8=2$ thì $(1)\Leftrightarrow x^2+y^2=4xy+4$. Khi đó: $x+y=10, xy=16\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}\vee\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}$

Nếu $x+y-8=0$ thì $(1)\Leftrightarrow 8xy+8=0\Leftrightarrow xy+1=0$, phương trình không có nghiệm nguyên vì $x+y=8$

Nếu $x+y-8=-2$ thì $(1)\Leftrightarrow x^2+y^2+4xy+4=0$. Khi đó: $x+y=6, xy=-20$ không có nghiệm nguyên.

Kết luận: Nghiệm nguyên của phương trình là (x, y) = (2, 8) ; (8, 2).

Bài 109.

Phương trình đã cho có dạng: $x^2+17\left[y^2+2xy+3\left(x+y\right)\right]=1740$

Chú ý rằng với số x nguyên, x có thể có dạng như sau:

$x=17k\pm r$ với $r\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $k\in Z$

Từ đó suy ra: $x^2\in\{17k,17k+1,17k+4,17k+9,17k+8,17k+16,17k+2,17k+15,17k+13\}$.

Nhận thấy rằng vế phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Tron khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 110.

Ta có:

$$\left(x+y+z\right)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$$
$$\Leftrightarrow 27-3=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=8 \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} x+y=a\in Z \\ y+z=b\in Z \\ z+x=c\in Z \end{cases}$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow abc=8\Rightarrow a,b,c\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\}$

Vì x, y, z vai trò bình đẳng nên ta giải sử: $x\le y\le z\Rightarrow a\ge b\ge c$

Khi đó ta có: $a+b+c=2(x+y+z)=2.3=6\Rightarrow a\ge 2$

Với a = 2 ta có: $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$

Với a = 4 ta có: $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=1 \end{cases}$ (không có nguyện nguyên)

Với a = 8 ta có: $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases}\Leftrightarrow x-5;y=4;z=4$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x,y,z)=(1,1,1);(4,4,-5);(4,-5,4);(-5,4,4)$.

Bài 111.

Ta có:

$$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0$$
$$\Leftrightarrow 3(x^2-6x+9)+6x^2+2z^2+3y^2z^2=33$$
$$\Leftrightarrow 3(x-3)^2+(3y^2+2)(z^2+2)=37$$

Dễ dàng thấy: $3(x-3)^2\le 33\Leftrightarrow (x-3)^2\le 11$

Suy ra: $(x-3)^2\in\{0,1,4,9\}$

+ Với $(x-3)^2=0\Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=37$

Nhận xét: $3y^2+2\ge 2$ và $z^2+2\ge 2$ (*)

Vậy trương trường hợp này phương trình vô nghiệm

+ Với $(x-3)^2=1\Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=34$. Do (*) nên $\begin{cases} 3y^2+2=17 \\ z^2+2=2 \end{cases}\vee\begin{cases} 3y^2+2=2 \\ z^2+2=17 \end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=4\Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=25$. Do (*) nên $\begin{cases} 3y^2+2=5 \\ z^2+2=5 \end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=9$:

$$\Rightarrow \left(3y^2+2\right)\left(z^2+2\right)=10 \Leftrightarrow \begin{cases}3y^2+2=2\\ z^2+2=5\end{cases} \vee \begin{cases}3y^2+2=5\\ z^2+2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ z=0\end{cases} \vee \begin{cases}y=-1\\ z=0\end{cases}$$

Kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên:

$\left(x,y\right)=\left(6,1,0\right);\left(6,-1,0\right);\left(0,1,0\right);\left(0,-1,0\right)$

Bài 112.

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) *thỏa mãn đẳng thức:*

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a^3+3a^2+3a+1)-(b^3+3b^2+3b+1)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a+1)^3-(b+1)^3=(a+1)(b+1)+25$ (*)

Đặt $x=a+1, y=b+1 (x,y\in Z; x,y\ge 2)$.

Khi đó (*) trở thành: $x^3-y^3=xy+25 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=xy+25$ (**)

+ Từ (**) suy ra $x>y\Rightarrow x-y\ge 1$, mà $x^2+xy+y^2>0$ nên:

$x^2+xy+y^2\le xy+25\Rightarrow x^2+y^2\le 25\Rightarrow x\le 4$ (1).

+ Hơn nữa: $x>y$ và $x,y\ge 2$ nên $xy\ge 6$.

Suy ra $x^3-y^3=xy+25\ge 31\Rightarrow x^3>31\Rightarrow x>3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x=4$. Do $x>y$ và $y\ge 2$ nên $y\in\left\{2;3\right\}$.

+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ là cặp số cần tìm.

Bài 113.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \left[x^2+4\left(y^2+7\right)\right]=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[4x^2-\left(y^2+7\right)\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0 \Leftrightarrow \left(2x+y\right)\left(2x-y\right)=7$$

Do x,y nguyên dương nên $2x+y\ge 2x-y$ và $2x+y>0$

Vậy $\begin{cases}2x+y=7\\ 2x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \left(x;y\right)=\left(2;3\right)$

Vậy phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(2;3\right)$

Bài 114.

$x^2(y-1)-xy=x-y+1 \Rightarrow y(x^2-x+1)=5x^2+x+1 \Rightarrow y=\dfrac{5x^2+x+1}{x^2-x-1}=5+\dfrac{6x-4}{x^2-x+1}$ (1)

Do $x^2-x+1=(x-1)^2+\dfrac{3}{4}>0$ và $x^2-x+1=x(x-1)+1$ là số lẻ

Mặt khác y là số nguyên nên phải có $(3x-2)\vdots(x^2-x+1)$ hay $(3x^2-2x)\vdots(x^2-x+1)$

Lại có: $3(x^2-x+1)\vdots(x^2-x+1)$. Suy ra: $(x-3)\vdots(x^2-x+1) \Rightarrow (3x-9)\vdots(x^2-x+1)$

Ta có: $\begin{cases}(3x-9)\vdots(x^2-x+1)\\(3x-2)\vdots(x^2-x+1)\end{cases} \Rightarrow 7\vdots(x^2-x+1)$

Nếu $x^2-x+1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$. ta được nghiệm (0, 1); (1, 7)

Nếu $x^2-x+1=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$

Với x = -2 thì y không nguyên

Với x = 3 thì y = 7.

Vậy phương trình cso 3 nghiệm (x, y) = (0, 1); (1, 7); (3, 7).

Bài 115.

Ta có: $25=(ac-3bd)^2+(ad+bc)^2=8(bd)^2+(ac-bd)^2+(ad-bc)^2 \le 8(bd)^2$.

Suy ra $(bd)^2 \le \dfrac{25}{8}<4$ mà bd nguyên nên $|bd|<1$

Với bd = 0 thì ta tìm được các bộ số (a, b, c, d) như sau

$(1,0,4,3),(-1,0,-4,-3),(4,3,1,0),(-4,-3,-1,0)$

Bài 116.

Ta có: $2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0$.

$\Leftrightarrow (x-y+z)^2+(x-y)^2+(y+z)^2=20$.

Ta thấy 20 chỉ có một dạng phân tích thành tổng bình phương 3 số đó là: $20=0^2+2^2+4^2$ Do $x-y+z>0, y+z>0 \Rightarrow x-y=0$

Từ đây ta giải ra được nghiệm x = y = z = 2 tức là tâm giác đều

Bài 117.

Giả sử phương trình có nghiệm dương (x, y)

Với các số dương a, b kí hiệu (a, b) là ước chung lớn nhất của a và b.

Đặt $(x,y)=d$ ta có $x=dx_1, y=dy_1$ với $x_1,y_1 \in N^*$ và $(x_1,y_1)=1$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow d\left(x_1^3+y_1^3\right)=\left(x_1+y_1\right)^2+\left(x_1y_1\right)^2 \quad (2)$

Với lưu ý rằng $\left(x_1y_1\right)^2 \vdots\left(x_1+y_1\right) \quad (3)$

Từ $\left(x_1,y_1\right)=1$ suy ra $\left(x_1y_1,x_1+y_1\right)=1$. Kết hợp với (3) ta được $x_1y_1\vdots\left(x_1+y_1\right)$ và $x_1+y_1=1$, mâu thuẫn với $x_1,y_1 \in N^*$

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Bài 118.

Xét phương trình:

$$\begin{aligned}&x^2y^3-4xy^3+y^2+x^2-2y-3=0\\&\Leftrightarrow x^2\left(xy^3+1\right)-4\left(xy^3+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=0\\&\Leftrightarrow\left(xy^3+1\right)\left(x^2-4\right)+\left(y-1\right)^2=0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Ta thấy với x, y là số tự nhiên thì :

$$xy^2+1>0, \quad \left(y-1\right)^2\geq 0$$

Do đó $x^2-4\leq 0$. Nghĩa là x chỉ có thể lấy các giá trị 0, 1, 2

Với x = 0 thay vào (2) ta được: $y^2 - 2y - 3 = 0$ hay y = -1 (loại) hoặc y = 3.

Với x = 1 thì $3y^3 + 3 - (y -1)^2 = 0$ (vô nghiệm)

Với x = 2 thì y = 1

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là (2, 1) (0, 3).

Bài 119.

Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^2 <=> (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0$

Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2-xy+y^2-x-y=0$

$<=> 2(x^2-xy+y^2-x-y)=0$
$<=> (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases}x-y=0\\(x-1)^2=1 <=> x=y=2, z=4\\(y-1)^2=1\end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases}x-1=0\\(x-y)^2=1 <=> x=1, y=2, z=3\\(y-1)^2=1\end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-y)^2=1 \\ (x-1)^2=1 \end{cases} <=> x=2, y=1, z=3$

Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)

Bài 120.

Ta có: $x^2-xy+y^2=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2$

$$\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow 7(x-y)=3(x^2-xy+y^2)\Leftrightarrow 7(x-y)=\frac{9}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2$$

Đặt $p=x+y, q=x-y$

Khi đó ta có: $28p=3(p^2+3q^2)$ (2) , từ đó suy ra $28p\,\vdots\,3\Rightarrow p\,\vdots\,3$. Đặt $p=3k$ $(k\in Z)$

Thay giá trị của p vào (2) ta có: $28k=3(3k^2+q^2)$ $\quad(3)$

Suy ra $k\,\vdots\,3\Rightarrow k=3m(m\in Z)$.

Thay k = 3m vào (3) ta được:

$$28m=27m^2+q^2\Rightarrow m(27m-28)=-q^2\le 0\Rightarrow 0\le m\le\frac{28}{27}\Rightarrow m=0\vee m=1$$

Với m = 0 thì q = p = 0 suy ra x = 0, y = 0 (loại)

Với m = 1 thì p = 9 và q = 1 hoặc q = - 1.

Từ đó suy ra x = 5, y = 4 hoặc x = 4, y = 5

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (5, 4); (4, 5).

Chương V

CÁC BÀI TOÁN VỀ TỔ HỢP SUY LUẬN

PHẦN 1: CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Câu 1. Xét dãy số 1,11,111,..., $\underbrace{111....11}_{p\,\text{chữ số}\,1}$

Ta chứng minh trong dãy trên phải có số chia hết cho p. Giả sử kết luận ấy không đúng, tức là không có bất kỳ số nào của dãylại chia hết cho p.
Cho tương ứng mỗi số dư của phép chia cho p . Tập hợp số dư có thể thuộc tập hợp {1, 2, 3,..., p – 1} (Do 0 không thể thuộc tập hợp này). Ta lại có p số trong dãy số trên. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho p. Giả sử các số đó là

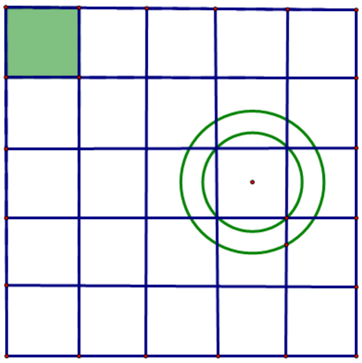
111...11 (m chữ số 1) và số 111....11 (n chữ số 1) với $\left(1 \le n < m \le p\right)$. Từ đó ta có

$(\underbrace{111...11}_{m\ c/s} - \underbrace{111...11}_{n\ c/s}) \vdots p,\ \ hay\ \ \underbrace{111...1}_{m-n\ c/s\ 1}\underbrace{000...0}_{n\ c/s\ 0} \vdots p\ \ Hay\ \underbrace{111...1}_{m-n\ c/s1}.10^n \vdots p$ (1)

Do p là sô nguyên tố lớn hơn 5 nên (p; 10) = 1, Vì thế từ (1) ta suy ra $\underbrace{111...1}_{m-n\ c/s1} \vdots p$ (2)

$\underbrace{111...1}_{m-n\ c/s1}$ là một số thuộc dãy trên nên từ (2) suy ra mâu thuẫn với giả thiết. Vậy giả sử phản chứng là sai. Ta suy ra điều phải chứng minh.

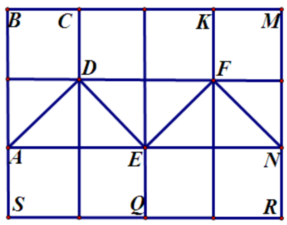
Câu 2.



Chia hình vuông thành 25 hình vuông nhỏ bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh 0,2. Vì có 101 điểm, mà chỉ có 25 hình vuông, nên theo định lý Dirichlet tồn tại một hình vuông nhỏ có chứa ít nhất năm điểm (trong 101 điểm đã cho). Vì hình vuông này nội tiếp trong đường tròn có bán kính R = $\dfrac{\frac{1}{5}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

Do $\dfrac{\sqrt{2}}{10} < \dfrac{1}{7}$ nên dĩ nhiên đường tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp trên và có bán kính $\dfrac{1}{7}$ chứa ít nhất năm điểm nói trên . Đó là đpcm

Câu 3.



Chia hình chữ nhật đã cho thành năm hình ABCD, DCKFE, KFNM, NFEQR, QEDAS

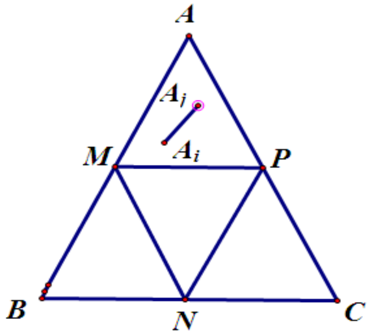
Vì có 6 điểm nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một trong năm hình trên chứa ít nhất 2 trong 6 điểm nói trên.

Theo định lý Pitago thì khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong một hình bằng $\sqrt{5}$.

Ví dụ AC = CE = KE = KM = DS = DQ = QF = FR = $\sqrt{5}$

Từ đó ta luôn tìm được 2 điểm trong 6 điểm đã cho có khoảng cách không lớn hơn $\sqrt{5}$ (Đpcm)

Câu 4.



Thật vậy, gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, BC, CA .Khi đó AMP, BMN, MNP, MNP, NPC là bốn tam giác đều bừng nhau cạnh bằng $\frac{1}{2}$.

Chú ý nếu P là tam giác đều cạnh bằng a, thì $d(P)=a$

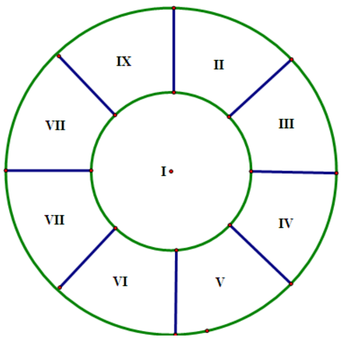
Vì thế $d(AMP)=d(BMN)=d(MNP)=d(NPC)=\frac{1}{2}$

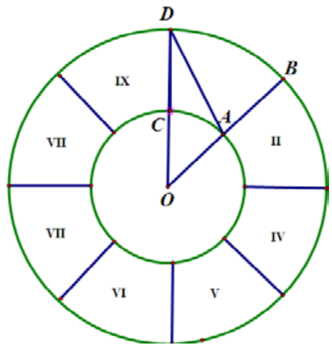
Vì năm điểm thuộc vào bốn tam giác, nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm, giả sử A_i , A_j thuộc về cùng một tam giác trong bốn tam giác đều nhỏ nói trên . Ta có $A_iA_j \leq d(AMP)=\frac{1}{2}$

Đó là đpcm.

Câu 5. Thật vậy: Trong đường tròn tâm O đường kính 5, vẽ đường tròn đồng tâm có đường kính bằng 2. Chia đường tròn đã cho thành 9 phần(như hình vẽ).

Xét một phần bất kỳ, giả sử là hình III – ABCD





Ta thấy ngay, khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm của (III) là DA = BC

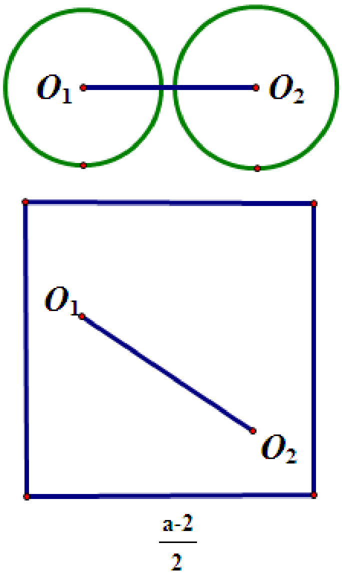
Do $\angle DOA = 45^0$ nên $d^2 = DA^2 = DO^2 + OA^2 - 2DO.OA.\cos 45^0$

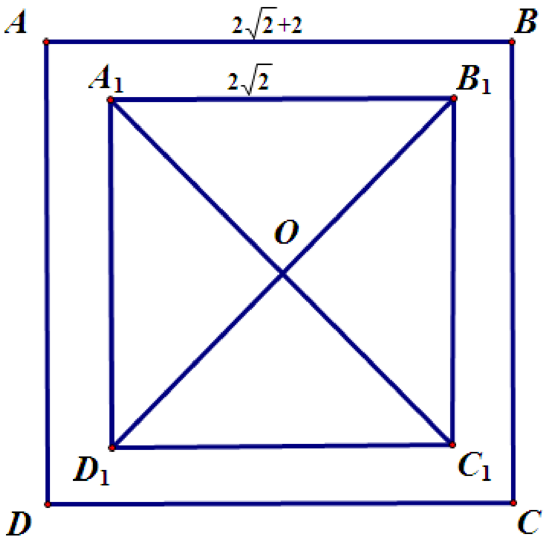
$$=\left(\frac{5}{2}\right)^2+1^2-2.\frac{5}{2}.1.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d<2$$

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tai ít nhất hai điểm nằm trong môt trong 9 phần (I), (II), ...(IX) có đường kính không vượt quá 2. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 6. Giả sử hình vuông ABCD có tâm O cạnh là a chứa 5 hình tròn không cắt nhau và đều có bán kính bằng 1. Vì cả 5 hình tròn này nằm trọn trong hình vuông, nên tâm của chúng nằm trong hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ tâm O cạnh là a-2. Ở đây AB // A_1B_1.

Các đường thẳng nối nối các trung điểm của các cạnh đối diện của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ chia $A_1B_1C_1D_1$ thành 4 hình vuông nhỏ. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một trong 4 hình vuông nhỏ, mà trong hình vuông này chứa ít nhất hai trong số 5 tâm hình tròn nói trên(Không mất tính tổng quát, giả sử đó là O_1O_2)





Do trong 5 đường tròn, không có 2 đường tròn nào cắt nhau nên $O_1O_2 \geq 2$ (1)

Mặt khác, do O_1O_2 cùng nằm trong một hình vuông nhỏ(cạnh hình vuông bằng $\frac{a-2}{2}$

nên). Mà $O_1O_2 \leq \frac{a-2}{2}\sqrt{2}$ (2)

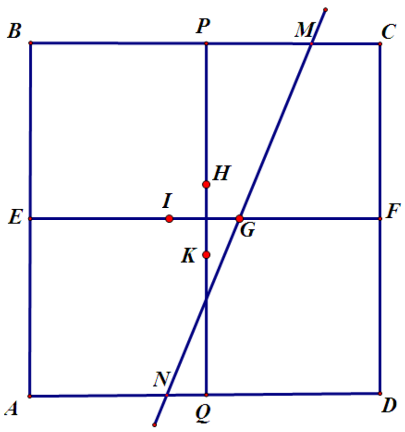
Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{a-2}{2}\sqrt{2} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{2}+2$ (3)

Vậy mọi hình vuông cạnh a thỏa mãn điều kiện đề bài sẽ thỏa mãn (3)

Ta xét hình vuông ABCD có a = $2\sqrt{2}+2$. Và xét 5 hình tròn có tâm O, A_1; B_1; C_1; D_1 (hình vẽ) thì mọi yêu cầu của bài toán được thỏa mãn .

Vậy kích thước bé nhất của cạnh hình vuông thỏa mãn điều kiện đề bài là $2\sqrt{2}+2$

Câu 7. Các đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác nên chúng không thể cắt hai cạnh kề của hình vuông và không đi qua đỉnh nào của hình vuông.



Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối AD và BC tại M và N. Ta có

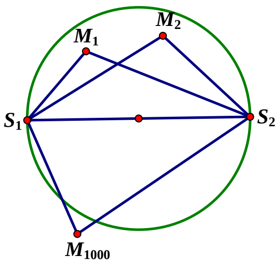
$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AB(BM+AN)}{\frac{1}{2}CD(MC+ND)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EI}{\text{IF}} = \frac{2}{3}$$

(E,F,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh hình vuông. I,K,G,H lần lượt là những điểm thỏa mãn $\frac{IE}{\text{IF}} = \frac{HP}{HQ} = \frac{GF}{GE} = \frac{KQ}{KP} = \frac{2}{3}$

Từ lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề bài đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K nói trên.

Do có 2014 đường thẳng, nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất $\left[\frac{2014}{4}\right]+1=504$ đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm G,H, I, K nói trên.
Vậy có ít nhất 504 đường thẳng trong số 2014 đường thẳng đã cho đồng quy.
Câu 8. Trong các hàng có ô được đánh dấu. Chọn ra n hàng có số ô được đánh dấu nhiều nhất. Ta chứng minh rằng số ô được đánh dấu còn lại nhỏ hơn hoặc bằng n.

Giả sử số ô được đánh dấu còn lại lớn hơn hoặc bằng n +1 . Số hàng còn lại chưa chọn là n hàng. Theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (Trong số n hàng còn lại chứa ít nhất 2 ô đã được đánh dấu).
Từ cách chọn ta suy ra trong n hàng được chọn thì mỗi hàng có ít nhất 2 ô được đánh dấu.
Tức là trên n hàng đã chọn có ít nhất 2n ô đã được đánh dấu.
Như vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng 2n + (n +1) > 3n (vô lý). Suy ra điều phải chứng minh.
Như vây, sau khi đã chọn ra n hàng với cách chọn như trên. Theo nhận xét sẽ còn lại không quá n ô được đánbh dấu. Hay cùng lắm sẽ có n cột chứa chúng.
Vậy: có thể chọn ra n hàng n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trong n hàng n cột này.
Câu 9.

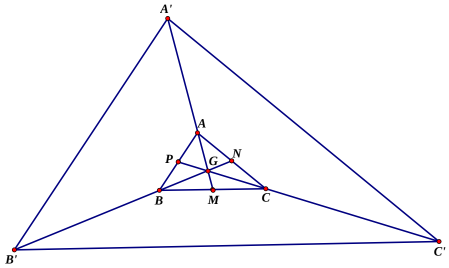


Xét một đường kính S_1S_2 tùy ý của đường tròn, ở đây S_1 vaf S_2 là hai đầu của
đường kính nên ta có

$$\begin{cases} S_1M_1+S_2M_1\ge S_1S_2=2 \\ S_1M_2+S_2M_2\ge 2 \\ \dots \\ S_1M_{1000}+S_2M_{1000}\ge 2 \end{cases}$$

Cộng từ vế 1000 bất đẳng trên ta có

$(S_1M_1+S_1M_2+\dots+S_1M_{1000})+(S_2M_1+S_2M_2+\dots+S_2M_{1000})\ge 2000$ (1)
 Từ (1) và theo nguyên ý Dirichlet suy ra trong hai tổng của vế trái cảu (1) có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000
Giả sử $(S_1M_1+S_1M_2+\dots+S_1M_{1000})\ge 1000$, khi đó $S = S_1$. Đó là đpcm.
Câu 10.



Lấy 5 điểm tùy ý sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng . Khi đó vì chỉ dùng có hai màu để tô các đỉnh nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ba điểm cùng màu. Giả sử ba điểm đó là ba điểm A, B, C cùng có màu đỏ. Như vậy ta có tam giác ABC với ba đỉnh màu đỏ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chỉ có hai khả năng xảy ra:
1) Nếu G là màu đỏ. Khi đó A,B, C, G có cùng màu đỏ và bài toán được chứng minh
2) Nếu G có màu xanh. Kéo dài GA, GB, GC các đoạn AA′ = 3GA, BB′ = 3GB, CC′ = 3GC.
Khi đó nếu gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của BC, CA, AB thì AA′ = 3GA = 6GM

=> AA′ = 2AM. Tương tự B′B = 2BN, C′C = 2CP.Do đó các tam giác A′BC, B′AC, C′AB tương ứng nhận A,B,C là trọng tâm. Mặt khác, ta cũng các có tam giác ABC, và A′B′C′ có cùng trọng tâm G. Có hai trường hợp xảy ra.

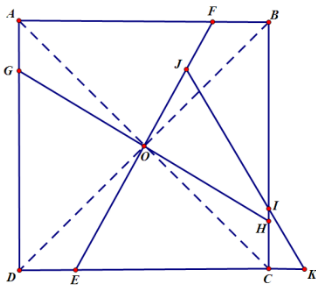
a) Nếu A′, B′ C′ cùng màu xanh. Khi đó tam giác A′B′C′ và trọng tâm G có cùng màu xanh.

b) Nếu ít nhất một trong các điểm A′ B′ C′ có màu điểm. Không mất tính tổng quát giả sử A′ màu đỏ. Khi đó tam giác A′BC và trọng tâm có màu đỏ. Vậy trong mọi khả năng luôn tồn tại một tam giác mà ba đỉnh và trọng tâm màu đỏ. Đó là đpcm.

Câu 11. Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau. Như thế hình lập phương đã cho được chia thành $13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Do 11000>5.2197 = 10985, nên tồn tại ít nhất một hình lập phương nhỏ, mà hình lập phương này chứa ít nhất sáu điểm. Như đã biết nếu gọi cạnh hình vuông băng a, thì hình càu ngoại tiếp nó có bán kinh R, với $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Vì thế hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ (cạnh của nó là $\frac{15}{13}$) là

$R = \frac{1}{2}\frac{15}{13}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{15}{13}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{675}{196}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{676}{169}} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$. Hình cầu bán kính 1 này dĩ nhiên chứa ít nhất sáu điểm trong số 11000 điểm đã cho . Đó là đpcm.

Câu 12.



Giả sử hình vuông ABCD có tâm là O và cạnh 12.

Lấy E, F, G, H lần lượt trên các cạnh CD,AB,AD,BC sao cho AG = DE = CH = BF = $6-2\sqrt{3}$ .Khi đó OE = OF = OG = OH = $4\sqrt{3}$

Ta đi chứng minh có thể dùng một tam giác đều cạnh 11 phủ kín một trong các tứ giác OHCE, OEDG, OGAF hoặc OFBH.

Thật vậy, do OH = OE = $4\sqrt{3}$ < 11.

Lấy J trên OF sao cho EJ = 11. Ta thấy $SinFEC = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle FEC = 60^0$

Trên tia EC lấy K sao cho EK = EJ = 11. Ta có tam giác JEK đều cạnh 11. Ta đi chứng minh tam giác JEK phủ kín tứ giác OHCE

Gọi giáo điểm của JK với BC là I.

Suy ra IC = CK.$\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$(5 -2$\sqrt{3}$) = 5$\sqrt{3}$ - 6 > 6 - 2$\sqrt{3}$ = CH

CH < CI nên H nằm giữa C và I. Suy ra tam giác JEK phủ kín hoàn toàn tứ giác OHCE.

Do vai trò của các tứ giác OHCE, OEDG, OGAF, OFBH là như nhau.

Áp dụng nguyên lý Dirichlet ta suy ra: luôn tồn tại $\left[\frac{2014}{4}\right]$ + 1 = 504 điểm trong 2014 điểm đã cho nằm trong một trong các tứ giác OHCE, OEDG, OGAF hoặc OFBH.

Vậy luôn tồn tại một tam giác đều cạnh 11 phủ kín 504 điểm trong 2014 điểm đã cho.

Câu 13. Gọi tọa độ hai điểm bất kì trong không gian là A (a, b, c) và B (d, e, f)

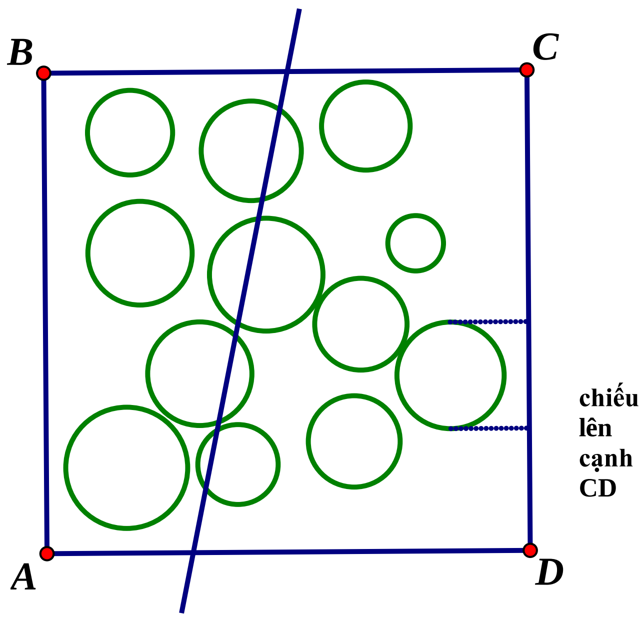
Vậy trung điểm của đoạn AB là $O(\frac{a+d}{2},\frac{b+e}{2},\frac{c+f}{2})$.

Các tọa độ của điểm O nguyên nếu và chỉ nếu a và d; b và e; c và f cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Vì có $2^3 = 8$ bộ ba chẵn lẻ khác nhau ((c, c, c); (l, l, l); (c, c, l); (c, l, l); (c, l, c); (l, c, c); (l, c, l); (l, l, c)) nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất 2 trong 9 điểm có cùng bộ ba chẵn lẻ như nhau.

Vậy có ít nhất một cặp điểm mà điểm chính giữa của chúng có tọa độ nguyên.

Câu 14.

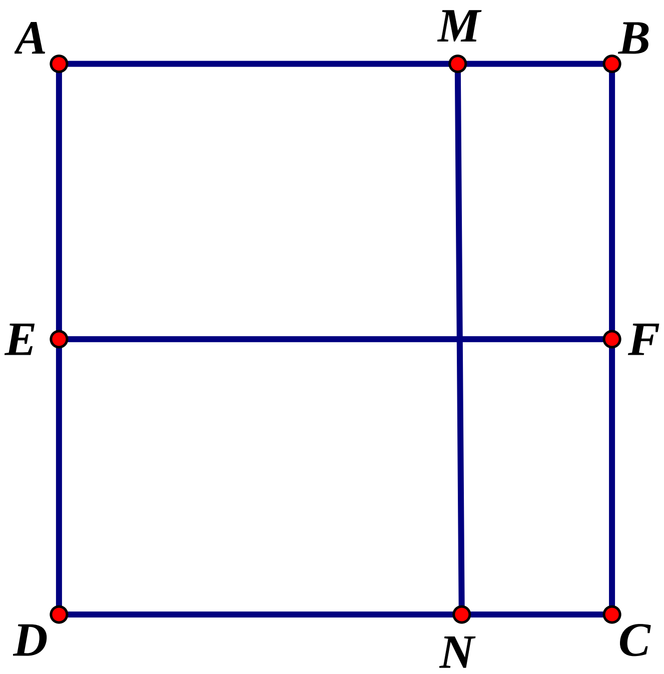


Hình 3

Ta chọn một cạnh hình vuông rồi chiếu vuông góc các đường tròn xuống cạnh đó (xem hình 1). Ta có, hình chiếu của một đường tròn bán kính R xuống AB là một đoạn thẳng có độ dài 2R. Vì vậy trên cạnh hình vuông đã chọn có những đoạn thẳng chiếu xuống với tổng độ dài là $\frac{10}{\pi}$. Mà $\frac{10}{\pi} > 3$.

Nên theo nguyên lý Dirichlet đối ngẫu suy ra có một điểm M nào đó thuộc AB là điểm trong chung của ít nhất 4 đoạn thẳng đã chiếu xuống. Khi đó, đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt ít nhất 4 trong những đường tròn đó.

Câu 15.



Hình 4

Gọi d là đường thẳng chia hình vuông ABCD thành hai tứ giác có tỉ số diện tích

là 2 : 3.

Đường thẳng d không thể cắt hai cạnh kề nhau của hình vuông

Giả sử d cắt hai cạnh AB và CD tại M và N, khi đó nó cắt đường trung bình EF

tại I Giả sử $S_{AMND} = \frac{2}{3} S_{BMNC}$ thì $EI = \frac{2}{3}$IF

Như vậy mỗi đường thẳng đã cho chia các đường trung bình của hình vuông

theo tỉ số 2 : 3

Có 4 điểm chia các đường trung bình của hình vuông ABCD theo tỉ số 2 : 3

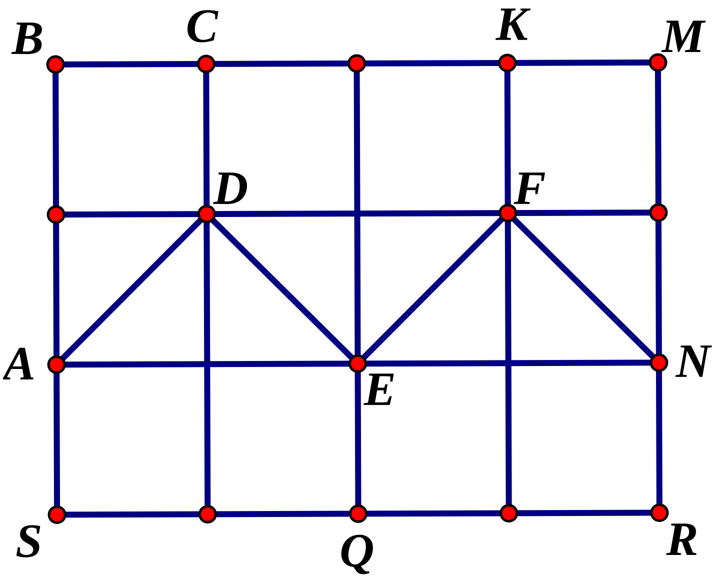
Có 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua một trong 4 điểm

Vậy theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm.

Câu 16. Lấy mỗi hạt vừng làm tâm dựng hình tròn bán kính 1 cm . Các hình tròn này nằm hoàn toàn trong hình vuông có cạnh 20cm thu được từ hình vuông đã cho bằng cách tịnh tiến bốn cạnh của nó một khoảng 1cm ra phía ngoài.

Tổng diện tích của các hình tròn bán kính 1cm này là $128\pi > 402,112 > 400$. Do đó tổng diện tích các hình tròn này lớn hơn diện tích hình vuông cạnh 20 cm.

Câu 17.



Hình 7

Chia hình chữ nhật đã cho thành năm hình ABCD, DCKEF, KFNM, NFEQR, QEDAS.

Vì có 6 điểm nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong năm hình trên, mà hình này chứa ít nhất hai trong 6 điểm đã cho.

Ta đưa vào khái niệm sau:

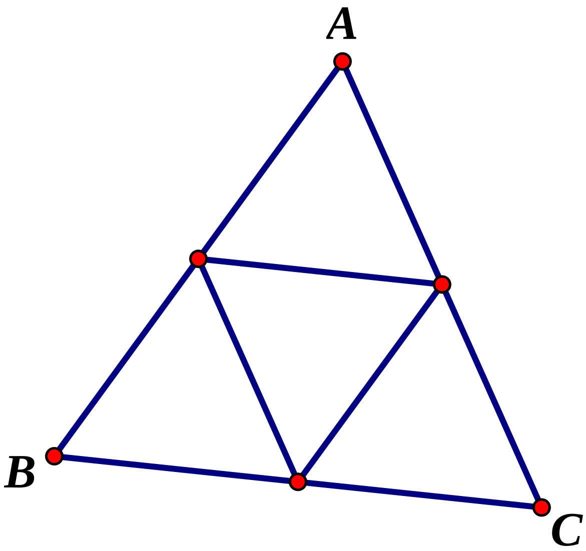
Giả sử P là một hình .

Đặt d(P)= $\max_{M,N\in P}\{MN\}$, và đại lượng d(P) gọi là đường kính của hình P. Dễ thấy cả năm hình trên đều có đường kính bằng $\sqrt{5}$.

(Thí dụ: d(ABCD) = AC = $\sqrt{5}$, d(DCKFE) = CE = KE = CF =DK = $\sqrt{5}$)

Từ đó suy ra luôn tìm được 2 điểm trong số 6 điểm đã cho có khoảng cách không lớn hơn $\sqrt{5}$. Đó là điều phải chứng minh.

Câu 18.



Hình 7.1

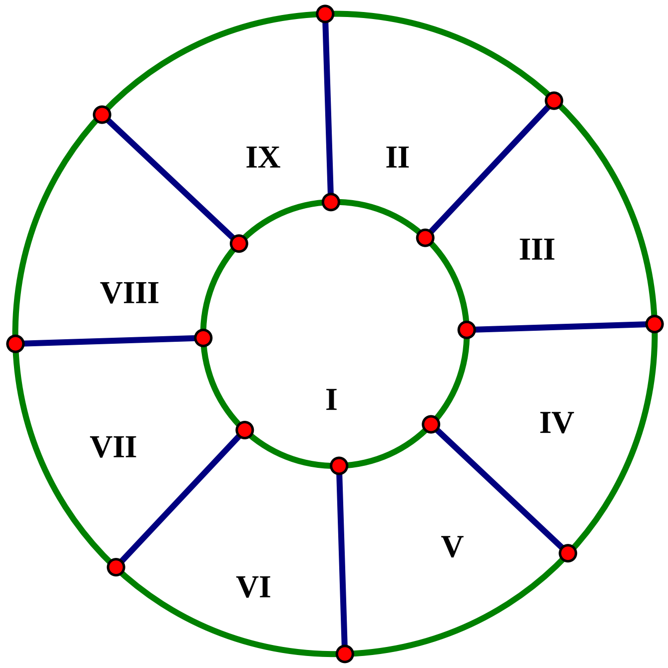
Các đường trung bình của tam giác đều cạnh 1 sẽ chia nó ra làm 4 tam giác đều cạnh 0,5.

Do đó trong một tam giác nhỏ đó có ít nhất 2 điểm đã cho, và các điểm đó không thể rơi vào các đỉnh của tam giác ABC.Vậy khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 0,5.

Câu 19.

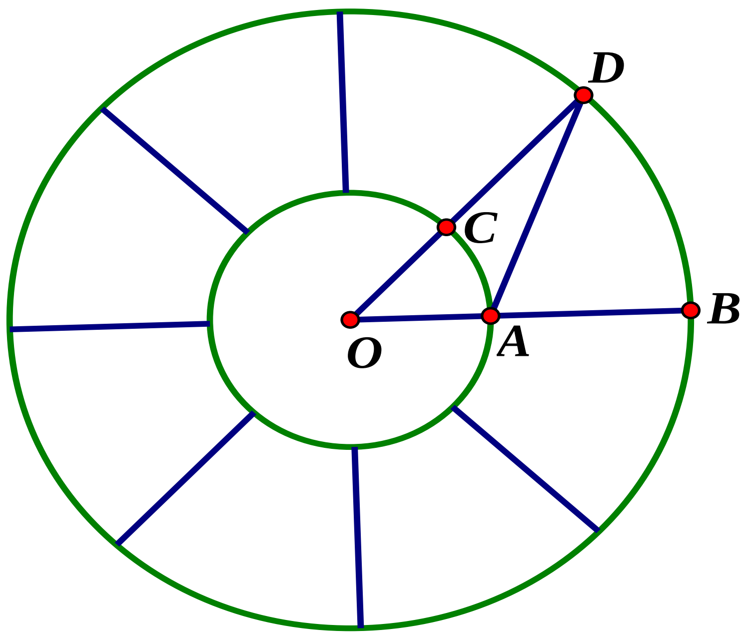
Thật vậy, trong đường tròn tâm O đường kính 5 , vẽ đường tròn đồng tâm và đường kính 2. Chia hình tròn đã cho thành 9 phần (xem hình 7.2) đường tròn đường kính 2 và 8 phần bằng nhau II, III, …, IX mà mỗi phần là $\frac{1}{8}$ hình vành khăn.

Rõ ràng I có đường kình bằng 2.



Hình 7.2

Xét chẳng hạn hình III ABCD (có là 1/8 hình vành khăn). Ta hãy tính đường kính của nó. Có thể thấy ngay đường kính của III là d = AD = BC.



Hình 7.3

Vì $\widehat{DOA} = 45^o$, nên

$d^2 = DA^2 = DO^2 + AO^2 - 2DO.OA.\cos 45^0$

$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1^2 - 2\frac{5}{2}.1.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{24}{4} + 1 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Tù đó suy ra $d^2 < \frac{29}{4} - \frac{5}{2}.1,4$ (do $\sqrt{2}$ =1,4142…) $\Rightarrow$ d < 2.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất hai điểm rơi vào một trong các miền I, II, III, … ,IX có đường kính bằng 2, còn các miền II, …, IX có đường kính bằng nhau và bằng d (d>2), từ đó suy ra tồn tại hai trong số 10 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 2. Đó là đpcm.

Câu 20. Lấy A là một trong số 25 điểm đã cho. Xét hình tròn $O_1(A,1)$ tâm A bán kính 1.

Chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra:

1) Nếu tất cả các điểm đã cho nằm trong $O_1(A,1)$ thì kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.
2) Tồn tại điểm B $\neq$ A (B thuộc trong số 25 điểm đã cho), sao cho B $\notin O_1(A,1)$, vì B $\notin$ $O_1(A,1)$, nên AB>1.

Xét hình tròn $O_2(B,1)$ tâm B, bán kính 1. Lấy C là điểm bất kì trong số 25 điểm đã cho sao cho $C \neq A, C \neq B$. Theo giả thiết(và dựa vào AB>1), ta có Min{CA, CB}<1.

Vì thế C $\in O_1(A,1)$, hoặc C $\in O_2(B,1)$.

Điều này chứng tỏ rằng các hình tròn $O_1(A,1)$, $O_2(B,1)$ chứa tất cả 25 điểm đã cho. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet, ít nhất 1 trong hai hình tròn trên chứa 13 điểm đã cho. Đó là đpcm.

Tổng quát bài tóan :

Cho 2n+1 điểm trên mặt phẳng (với n $\geq$ 3) . Biết rằng trong ba điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Khi đó tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn n+1 điểm đã cho.

Câu 21. Giả sử hình vuông ABCD có tâm O và cạnh a, chứa năm hình tròn không cắt nhau và đều có bán kính bằng 1. Vì cả năm hình tròn này đều nằm trọn trong hình vuông, nên các tâm của chúng nằm trong hình vuông A'B'C'D' có tâm O và cạnh a-2, ở đây A'B'//AB.

Các đường thẳng nối các trung điểm của các cạnh đối diện của hình vuông A'B'C'D' chưa A'B'C'D' thành 4 hình vuông nhỏ. Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong 4 hình vuông nhỏ mà trong hình vuông này chứa ít nhất hai trong số 5 tâm hình tròn nói trên (không mất tính tổng quát ta giả sử là O' và O").

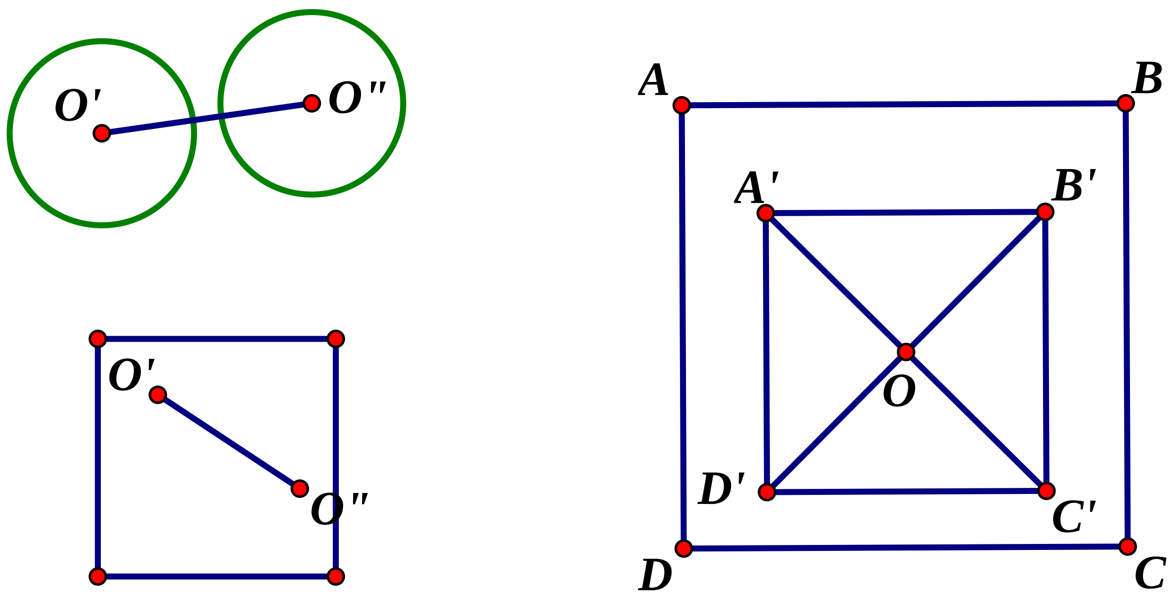
Để ý rằng vì không có hai hình tròn nào (trong số năm hình tròn) cắt nhau, nên $O'O'' \geq 2$.   (1)

Mặt khác do O', O" cùng nằm trong một hình vuông nhỏ (cạnh của hình vuông nhỏ đó bằng $\frac{a-2}{2}$) nên ta lại có $O'O'' \leq \frac{a-2}{2}.\sqrt{2}$.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a-2}{2}.\sqrt{2} \geq 2 \Rightarrow a \geq 2\sqrt{2}+2. \qquad (3)$$



(a-2)/2

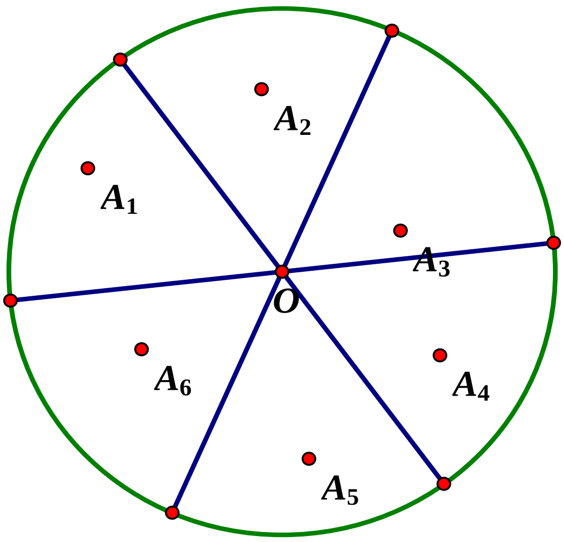
Hình 9

Vậy mọi hình vuông cạnh a thỏa mãn yêu cầu đề bài, ta đều có (3).

Bây giờ xét hình vuông ABCD có a= $2\sqrt{2}+2$. Xét năm hình tròn có tâm là O, A′, B′, C′, D′ (xem hình 9) , thì mọi yêu cầu của đề bài thỏa mãn. Tóm lại, hình vuong có kích thước bé nhất cần tìm là hình vuông với cạnh $2\sqrt{2}+2$.

Câu 22.

Chia hình tròn thành 6 hình quạt bằng nhau (tâm các hình quạt đều tại tâm O đã cho). Ta biết rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong một hình quạt nhỏ hơn hoặc bằng 1, vì thế từ giả thiết suy ra tại mỗi hình quạt có không quá 1 điểm rơi vào. Giả thiết phản chứng chọn được quá năm điểm thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vì lí do trên nên số điểm không thể quá 7(vì nếu số điểm chọn được mà lớn hơn hoặc bằng 7 thì theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai điểm được chọn nằm trong một cung hình quạt. mà điều này mâu thuẫn với nhận xét trên.).



Hình 10

Vậy từ giả thiết phản chứng suy ra tồn tại sáu điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ và mỗi điểm nằm trong một hình quạt sao cho khoảng cách giữa hai điểm tùy ý trong chúng đều lớn hơn 1.

Do $\widehat{A_1OA_2}+\widehat{A_2OA_3}+\widehat{A_3OA_4}+\widehat{A_4OA_5}+\widehat{A_5OA_6}+\widehat{A_1OA_6}=360^0$.

Khi đó suy ra: $\underset{i=1,6}{Min}\widehat{A_iOA_{i+1}} \le \frac{360^0}{6} = 60^0$ (ở đây đặt $A_7 \equiv A_1$).

Xét tam giác A_kOA_{k+1} (với $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $A_7 \equiv A_1$) và $\underset{i=1,6}{Min}\widehat{A_iOA_{i+1}} = \widehat{A_kOA_{k+1}}$ khi

đó : $\widehat{A_kOA_{k+1}} \le 60^0$.

Vì $OA_k \le 1, OA_{k+1} \le 1, \widehat{A_kOA_{k+1}} \le 60^0$ nên từ đó suy ra:

$$\widehat{A_kOA_{k+1}} \le Max\{\widehat{A_kA_{k+1}O}, \widehat{OA_kA_{k+1}}\}.$$

Từ đó thao mối liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác A_kOA_{k+1}, thì

$$A_kA_{k+1} \le \max\{OA_k, OA_{k+1}\} \le 1.$$

Điều này mâu thuẫn với A_kA_{k+1}>1 (vì hệ sấu điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài). Từ đó ta thấy giả thiết phản chứng là sai. Điều đó có nghĩa là không thể chọn quá 5 điểm thỏa mãn yêu cầu để bài. Đpcm.

Câu 23.

Giả sử AB là đoạn thẳng có độ dài bằng 1, a và a′ là hai đường thẳng bất kì vuông góc với nhau. Gọi A′B′ và A″B″ là các hình chiếu của AB lên a và a′. Khi đó ta có:

A′B′ +A″B″ ≥ AB hay A′B′ +A″B″ ≥ 1.

Áp dụng vào bài toán ta gọi d″ là đường thẳng bất kì vuông góc với d. Chiếu vuông góc tất cả 4n đoạn thẳng lên d và d″. từ (1) suy ra tổng độ dài hình chiếu của tất cả 4n đoạn thẳng không bé hơn 4n.

Vì vậy, theo nguyên lí Dirichlet trong hai đường thẳng d và d″ có ít nhất một đường thẳng mà tổng độ dài của hình chiếu các đoạn thẳng lên nó không bé hơn 2n. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là d.

Mặt khác, mỗi đoạn thẳng đầu nằm trọn trong hình tròn bán kính n (đường kính 2n), nên hợp các hình chiếu của chúng trên d có độ dài không vượt quá 2n.

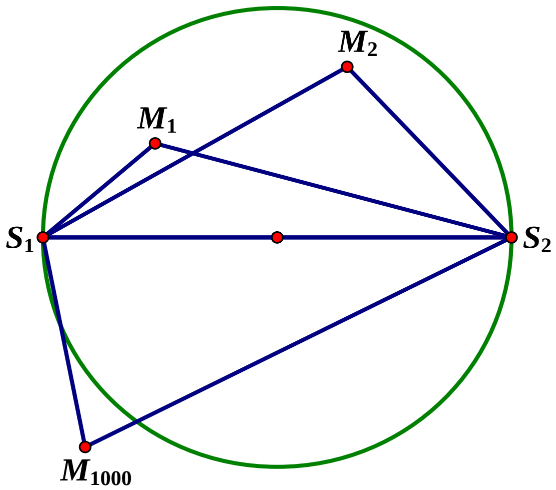
Vì vậy, theo nguyên lí dirichlet trên d tồn tại ít nhất một điểm M thuộc vào hình chiếu của ít nhất hai đoạn thẳng trong số 4n đoạn thẳng đã cho. Gọi d′ là đường thẳng vuông góc với d tại M. Đường thẳng d′ chính là đường thẳng cần tìm.

Chú ý: Nếu ở trên thay d bởi d″ thì đường thẳng phải tìm sẽ có dạng song song với d (vì nó vuông góc với d″).

Câu 24.

Xét một đường kính S_1S_2 tùy ý của đường tròn, ở đây S_1, S_2 là hai đầu của đường kính. Vì S_1S_2 =2, nên ta có;

$$\begin{cases} S_1M_1+S_2M_1\geq S_1S_2=2 \\ S_1M_2+S_2M_2\geq 2 \\ \ldots \\ S_1M_{1000}+S_2M_{1000}\geq 2 \end{cases}$$



Hình 12

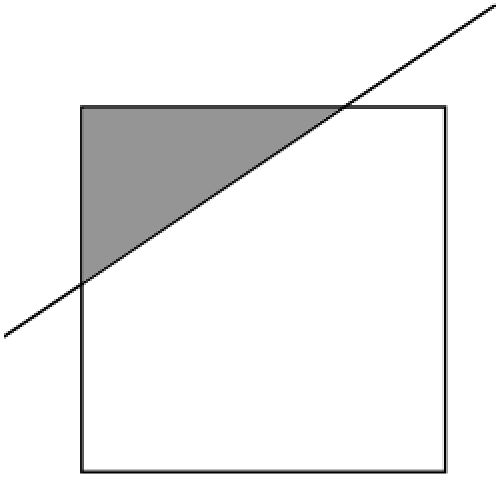
Cộng từng vế của 1000 bất đẳng thức trên ta có:

$$((S_1M_1+S_1M_2+\ldots+S_1M_{1000})+(S_2M_1+S_2M_2+\ldots+S_2M_{1000})\geq 2000 \quad (1)$$

Từ (1) và theo nguyên lí Dirichlet suy ra trong hai tổng của vế trái của (1), có ít nhất một tổng lớn hơn hoặc bằng 1000.

Giả sử $S_1M_1+S_1M_2+\ldots+S_1M_{1000}\geq 1000.$ khi đó lấy S= S_1. Đó là đpcm.

Câu 25.

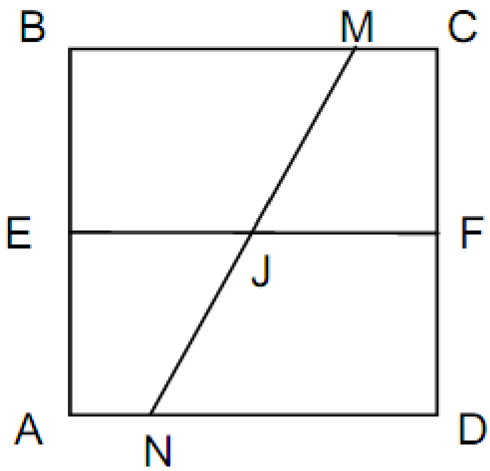


Hình 13.1

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải là chia hình vuông thành hai tứ giác).

Vì lẽ đó, mọi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và dĩ nhiên không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N.



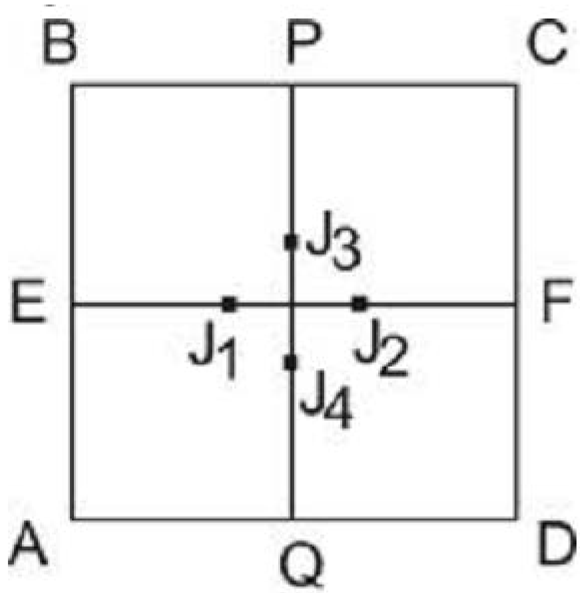
Hình 13.2

Ta có: $\frac{S_{ABMN}}{S_{MCDN}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}.AB.(BM+AN)}{\frac{1}{2}.CD.(MC+ND)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{EJ}{JF}=\frac{2}{3}$.

(ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng).

Gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD. Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 là các điểm sao cho J_1, J_2 nằm trên EF, J_3, J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn :

$\frac{EJ_1}{J_1F}=\frac{FJ_2}{J_2F}=\frac{PJ_3}{J_3Q}=\frac{QJ_4}{J_4P}=\frac{2}{3}$.



Hình 13.3

Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có chín đường thẳng, nên theo nguyên lí dirichlet phải tồn tại ít nhất một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong 9 đường thẳng đã cho đi qua.

Vậy có ít nhất 3 đường thẳng trong 9 đường thẳng đã cho đi qua một điểm.

Câu 26.

Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất.

Ta chứng minh rằng các ô được đánh dấu còn nhỏ hơn hoặc bằng n. Giả sử

	×		×	×	
		×		×	
	×				×
		×			
			×		

Hình 14

ngược lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu lớn hoan hoặc bằng n + 1. Số các hàng còn lại chưa chọn là n. Vậy theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (tỏng số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu.

Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn có không ít hơn 2n ô đã được đánh dấu. Như vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng 2n + (n +1) $\geq$ 3n. Vô lí vì chỉ có 3n ô được đánh dấu. Vậy nhận xét được chứng mình.

Như vậy, sau khi đã chọn ra n hàng (với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại có không quá n ô được đánh dấu. Vì thế cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.

Câu 27.

Giả sử $a \in$ A. Ta kí hiệu S(a) là số lượng các điểm của A nối với a mà S(a) = 2, S(b) = 3, S(c) = 1, S(d) = 2, S(e) = 2.

Bài toán đã cho trở thành: Chứng minh rằng tồn tại $a_1, a_2 \in A(a_1 \neq a_2)$, mà $S(a_1) = S(a_2)$.

Rõ ràng với mọi $a \in$ A, ta có: $0 \leq S(a) \leq n-1$. (1)

Mặt khác, dễ thấy không tồn tại hai điểm

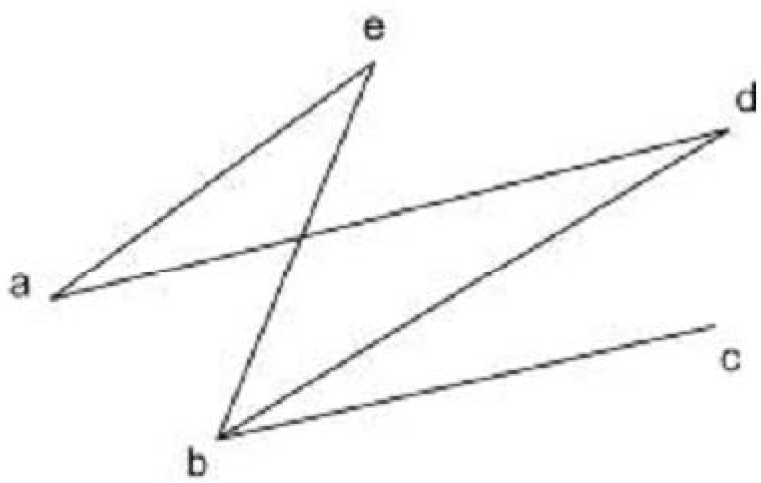
$\overline{a} \in A, \overline{b} \in A$ mà $S(\overline{a}) = n-1$ và $S(\overline{b}) = 0$ (2)

Thật vậy: nếu có (2), thì từ $S(\overline{a}) = n-1$, ta suy ra $\overline{a}$ nối với tất cả n – 1 điểm còn lại, tức là $\overline{a}$ cũng nối với $\overline{b}$. Điều đó có nghĩa là $S(\overline{b}) \geq 1$, vã dẫn đến mâu thuẫn với $S(\overline{b}) = 0$

Gọi S là tập hợp các giả trị mà các đại lượng $S(\overline{a})$ nhận, $a \in A$, tức là:

$$S = \{m / m = S(a), a \in A\}.$$

Như vậy từ (1) suy ra tập hợp S có tối đa n giả trị. Tuy nhiên từ (2) suy ra (n-1) và 0 không đồng thời thuộc S, vì thế tập S tối đa nhận (n – 1) giá trị. Theo nguyên lí Dirichlet suy ra tồn tại ít nhất $a_1 \in A, a_2 \in A (a_1 \neq a_2)$, mà $S(a_1) = S(a_2)$.



Hình 15

Chương VI

PHẦN NGUYÊN PHẦN LẺ VÀ ỨNG DỤNG

Bài 1: Từ điều kiện bài ra ta có: $x \langle -2 + \frac{1}{3} \Rightarrow x \langle -1 \Rightarrow -2 \langle x \langle -1 \Rightarrow [x] = -2$

Bài 2:

Từ điều kiện bài ra ta có: $-5{,}5 \langle x \langle -5 \Rightarrow [x] = -6$

Bài 3:

Ta có $x = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \langle x \langle 1 \Rightarrow [x] = 0$

Bài 4:

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$; $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$\Rightarrow\ 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

Cho n nhận các giá trị từ 2 đến 10^6 , Ta được:$1 + 2(\sqrt{10^6+1} - \sqrt{2}) < x < 1 + 2(\sqrt{10^6} - 1) = 1999$

mà: $1 + 2(\sqrt{10^6+1} - \sqrt{2}) > 1 + 2000 - 2\sqrt{2} > 2001 - 3 = 1998$

$\Rightarrow 1998 < x < 1999 \Rightarrow [x] = 1999$

Bài 5:

Ta có: $1 < x$ và: $\sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+\sqrt{4}} \Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{4}$

Quá trình này được thực hiện nhiều lần ta được: $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < 2 \Rightarrow$ $1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1$.

Bài 7:

Ta cần chỉ ra số nguyên y sao cho: $y \le x < y+1$ để: $[x] = y$

Thật vậy ta có: $(4n+1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n+2)^2$

$\Rightarrow 4n + 1 < \sqrt{16n^2+8n+3} < 4n + 2$

$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} < 4n^2 + 4n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$

$\Rightarrow 2n + 1 < \sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}} < 2n + 2 \Rightarrow [x] = 2n + 1$

Bài 8:

Ta có: $n^2 \le n^2 + k < (n+1)^2$, với mọi giá trị k từ: 0 đến 2n

$\Rightarrow \left\lfloor\sqrt{n^2}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{n^2+1}\right\rfloor + ... + \left\lfloor\sqrt{n^2+2n}\right\rfloor = n(2n+1) = 2n^2 + n$

$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\lfloor\sqrt{k^2}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{k^2+1}\right\rfloor + ... + \left\lfloor\sqrt{k^2+2k}\right\rfloor\right) = \sum_{k=1}^{n-1} 2k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \Rightarrow S = \frac{n(4n^2-3n-1)}{6}$

Bài 12:

Ta có:

$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)$

$\Rightarrow (n^2+3n)^2 < n(n+1)(n+2)(n+3) < (n^2+3n+1)^2$

$\Rightarrow n^2+3n < \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)} < n^2+3n+1$

$\Rightarrow \left\lfloor\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right\rfloor = n^2+3n$

$\Rightarrow S = (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + ... + n)$

$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$

Bài 14:

Ta biểu thị: $x = [x] + \{x\} \Rightarrow [n+x] = [[x]+n+\{x\}]$, mà: $o \le \{x\} < 1$

Còn: $n + [x]$ là số nguyên nên $[[x]+n+\{x\}] = n + [x]$ Hay: $[n+x] = n + [x]$

Bài 15:

Ta biểu thị: x = $[x]$ + $\{x\}$và: y = $[y]$ + $\{y\}$

$\Rightarrow$ x + y = $[x]$ + $[y]$ + $\{x\}$+ $\{y\}$

mà: o $\le$ $\{x\}+\{y\} < 2 \Rightarrow [x]+[y] \le [x+y] \le [x]+[y]+1$

Bài 16:

- Xét n là số chẵn (n = 2k) thì: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=[k]+\left[k+\frac{1}{2}\right]=2k=n$

- Xét n là số lẻ(n=2k+1) thì: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[k+\frac{1}{2}\right]+[k+1]$ =2k+1 = n

Vậy ta luôn có: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n$

Bài 17:

Nếu $\left[\sqrt{4n+1}\right] < \left[\sqrt{4n+2}\right]$ Khi đó sẽ tồn tại số tự nhiên m sao cho:

$\left[\sqrt{4n+1}\right] < m \le \left[\sqrt{4n+2}\right] \Rightarrow \sqrt{4n+1} < \left[\sqrt{4n+1}\right]+1 \le m \le \left[\sqrt{4n+2}\right]$

$\Rightarrow$ 4n + 1 < $m^2 \le$ 4n + 2 $\Rightarrow m^2$ = 4n + 2

(vô lý vì số chính phương chia cho 4 không thể dư 2)

Vậy ta luôn có: $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$

Bài 18:

Trước hết ta chứng minh: $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$

Từ đó $\Rightarrow \left[\sqrt{4n+1}\right] \le \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] \le \left[\sqrt{4n+2}\right]$

Mà từ kết quả bài số 17: $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ Ta có đpcm

Bài 19:

Trước hết bằng phép biến đổi tương đương ta chứng minh:

$\sqrt{63n}+\sqrt{63n+1} < \sqrt{252n+2} \Rightarrow \left[\sqrt{63n}+\sqrt{63n+1}\right] \le \left[\sqrt{252n+2}\right]$

Nhưng nếu tồn tại n sao cho: $\left[\sqrt{63n}+\sqrt{63n+1}\right] < \left[\sqrt{252n+2}\right]$

Khi đó sẽ tồn tại số tự nhiên m sao cho:

$\sqrt{63n}+\sqrt{63n+1} < m \le \sqrt{252n+2}$

$\Rightarrow (\sqrt{63n}+\sqrt{63n+1})^2 < m^2 \le (\sqrt{252n+2})^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{63n(63n+1)} < m^2 - (126n+1) \le 126n+1$

$\Rightarrow 4.63n.(63n+1) < [m^2-(126n+1)]^2 \le (126n+1)^2$

$\Rightarrow 126^2n^2+2.126n < [m^2-(126n+1)]^2 \le 126^2n^2+2.126n+1$

Vì giá trị các biểu thức này là số tự nhiên nên:

$[m^2-(126n+1)]^2=(126n+1)^2$

$\Rightarrow m^2-(126n+1)=126n+1 \Rightarrow m^2=252n+2$

(Vô lý vì một số chính phương chia cho 4 không thể dư 2).

Vậy không thể có số tự nhiên n thoả mãn:

$\left[\sqrt{63n}+\sqrt{63n+1}\right] < \left[\sqrt{252n+2}\right] \Rightarrow \left[\sqrt{63n}+\sqrt{63n+1}\right]=\left[\sqrt{252n+2}\right]$ với mọi n

Bài 21:

Xét: $\{x\} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[x+\tfrac{1}{2}\right]=\left[[x]+\{x\}+\frac{1}{2}\right]=[x]+\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]=[x]$

Còn: $[2x] = [2[x]+2\{x\}] = 2[x] + [2\{x\}] = 2[x]$ Từ đây ta có đpcm

Xét tương tự với: $\frac{1}{2} \leq \{x\} < 1$

Vây ta luôn có: $[x] + \left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]$, với x là số thực bất kỳ

Bài 22:

Ta chọn số tự nhiên k sao cho: $a + \frac{k-1}{n} \leq x < a + \frac{k}{n}$ với a nguyên $(0 < k < n)$

$\Rightarrow [x] = a$ và : $[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + ... + \left[x+\frac{n-k}{n}\right] = (n - k + 1)a$

Còn: $\left[x+\frac{n-k+1}{n}\right] + \left[x+\frac{n-k+2}{n}\right] + .. + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = (k - 1)(a + 1)$

$\Rightarrow VT = (n - k + 1)a + (k - 1)(a + 1) = na + k - 1$

$VP = [nx] = na + k - 1$ (vì từ cách chọn k ta có: $na + k - 1 < na < na + k$)

Vậy VT = VP hay: $[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + .. + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [nx]$

Bài 23:

Áp dụng kết quả bài tập 21 Ta có:

$\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x] - [x] \Rightarrow S = [n] - \left[\frac{n}{2^k}\right]$, mà với k đủ lớn thì: $\left[\frac{n}{2^k}\right] = 0$. Vậy tổng: $S = [n]$

Bài 25:

Với: $x = [x] + \{x\}$ mà: $m\{x\} \geq 0$

Khi đó: $[mx] = [m[x]+m\{x\}] = m[x] + [m\{x\}]$

Vì: $0 \leq m\{x\} < m \Rightarrow 0 \leq [m\{x\}] \leq m - 1$

$\Rightarrow m[x] \leq [mx] \leq m[x] + m - 1$, với mọi giá trị m nguyên dương

Bài 26:

Đặt: $S = [x] + [2x] + [3x] + ... + [100x]$, áp dụng kết quả bài 25

Cho m nhận các giá trị từ 1 đến 100 rồi cộng lạ ta được:

$5050[x] \leq S \leq 5050[x] + 4950$

$\Rightarrow \begin{cases}[x] \leq 61{,}99\\ [x] \geq 61{,}02\end{cases} \Rightarrow 61{,}02 \leq [x] \leq 61{,}99$

Điều này chứng tỏ không có x thoả mãn

Bài 29:

Từ phương trình $\Rightarrow -4 \leq x + 0{,}7 < -3 \Rightarrow -4{,}7 \leq x < -3{,}7$

Bài 30:

Sử dụng kết quả bài toán14: $[n+x] = n + [x]$, $(n \in Z)$

Với mọi giá trị n nguyên ta có:

$[x+1] + [x+2] + [x+3] = 6 + 3[x] \Rightarrow 3[x] + 6 = 4$

$\Rightarrow [x] = -\frac{2}{3}$ vô lý hay không có x thoả mãn

Bài 31:

Từ đặc điểm phương trình ta có: 3x $\in$ Z $\Rightarrow x = \frac{4k}{3}$, (k $\in$ Z)

$\Rightarrow \left[\frac{4k}{3}\right] = k \Rightarrow \left[k + \frac{k}{3}\right] = k \Rightarrow \left[\frac{k}{3}\right] = 0 \Rightarrow k = \{0; 1; 2\}$

$\Rightarrow x = \left\{0; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right\}$

Bài 32:

Đặt: $\frac{15x-7}{5} = t$, (t $\in$ Z) $\Rightarrow x = \frac{5t+7}{15} \Rightarrow \left[\frac{30t+117}{120}\right] = t$

$\Rightarrow 0 \le \frac{30t+117}{120} - t < 1 \Rightarrow -\frac{1}{30} \le t < \frac{117}{90}$

Do: t nguyên $\Rightarrow t = \{0; 1\} \Rightarrow x = \left\{\frac{7}{15}; \frac{4}{5}\right\}$

Bài 33:

Đặt: $\frac{2x-1}{3} = y \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2}$ Thay vào phương trình đã cho

ta được: $[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{5y-1}{2} \Rightarrow [2y] = \frac{5y-1}{2}$

Giải tương tự như bài 32 ta được: $y = \left\{-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5}; 1\right\}$

$\Rightarrow$ Nghiệm phương trình là: $S = \left\{-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}; \frac{7}{5}; 2\right\}$

Bài 34:

Phương trình được biến đổi thành: $[x].\{x\} = [x] + \{x\} - 1$

$\Rightarrow ([x] - 1)(\{x\} - 1) = 0$, do: $\{x\} - 1 < 0$

Nên: $[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \le x < 2$

Bài 35:

Đặt: $x = a + \{x\}$, ($a = [x]$)

Phương trình đã cho trở thành: $3\left[\frac{x}{2}\right] = a - 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = \frac{a-2}{3}$

$\Rightarrow a = 3k + 2$, (k $\in$ Z). $\Rightarrow \left[\frac{3k+2+\{x\}}{2}\right] = k \Rightarrow \left[k + \frac{k+2+\{x\}}{2}\right] = k$

$\Rightarrow 0 \le \frac{k+2+\{x\}}{2} < 1 \Rightarrow -2 \le k + \{x\} < 0 \Rightarrow k = -1; -2$

$\Rightarrow x = -1 + \{x\}; -4 + \{x\}$, (Hay: $-1 \le x < 0$; Hoặc: $-4 \le x < -3$)

Bài 36:

Đặt: $x = a + \{x\}$, ($a = [x]$)

$\Rightarrow [x-1] = [a - 1 + \{x\}] = a - 1$

và: $\left[\frac{x}{2} + 1\right] = \left[\frac{x+2}{2}\right] = \left[a - 1 + \frac{4-a+\{x\}}{2}\right] = a - 1 + \left[\frac{4-a+\{x\}}{2}\right]$

$\Rightarrow 0 \le \frac{4-a+\{x\}}{2} < 1 \Rightarrow 2 + \{x\} < a \le 4 + \{x\}$

$\Rightarrow 0 \le \{x\} < a - 2 \le 2 + \{x\} < 3$

$\Rightarrow$ a - 2 = $\{$ 1; 2 $\}$ $\Rightarrow$ a = $\{$ 3; 4 $\}$,Vậy: 3 $\leq$x $\langle$ 5

Bài 37:

Phương trình được biến đổi thành $[x] = x^2(x^2 - 2)$

+ Xét: $x^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow [x] \leq 0 \Rightarrow [x] = \{0; -1\}$

Nếu: $[x] = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

Nếu: $[x] = -1 \Rightarrow x = -1$

+ Xét: $x^2 \rangle\ 2 \Rightarrow [x] \rangle 0 \Rightarrow x \rangle \sqrt{2} \Rightarrow x.(x^2 - 2) = \dfrac{[x]}{x} \leq 1$

$\Rightarrow x^2 - 2 \leq \dfrac{1}{x} \langle\ 1 \Rightarrow x \langle \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} \langle x \langle \sqrt{3} \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

Bài 38:

Phương trình được biến đổi thành:

$x^3 - (x - \{x\}) = 3 \Rightarrow x^3 - x = 3 - \{x\} \Rightarrow 2 \langle x^3 - x \leq 3$

Nếu: $x \geq 2 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) \geq 6 \rangle 3$ (loại)

Nếu: $x \leq -1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x-1) \leq 0 \langle 2$ (loại)

Nếu: $-1 \langle x \leq 0 \Rightarrow x^3 - x \leq -x \langle 1 \langle 2$ (loại)

Nếu: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^3 - x \langle x^3 \leq 1 \langle 2$ (loại)

Vậy: $1 \langle x \langle 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$

Bài 39:

Ta có: $x^2 + \dfrac{1}{2} \rangle 0 \Rightarrow \left[x^2 + \dfrac{1}{2}\right] \rangle 0$

Còn: $-x^2 + 3x = -(x - \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{9}{4} \Rightarrow -x^2 + 3x \langle \dfrac{9}{4} \Rightarrow [-x^2 + 3x] \leq 2$

$\Rightarrow [-x^2 + 3x] = \left[x^2 + \dfrac{1}{2}\right] = n = \{0; 1; 2\}$

Nếu: $n = 0 \Rightarrow 0 \leq x \langle \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Nếu: $n = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x \langle 1$

Nếu: $n = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{2} \leq x \langle \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy: $S = [0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup [\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1) \cup [\dfrac{\sqrt{6}}{2}; \dfrac{\sqrt{10}}{2})$

Bài 41:

Đặt: $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x.y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ x,y là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 4X + 1 = 0$.

Đặt: $S_n = x^n + y^n$ ta có:

$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^{n+2} - 4x^{n+1} + x^n = 0$

$y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y^{n+2} - 4y^{n+1} + y^n = 0$

Cộng hai vế các kết quả ta có: $S_{n+2} - 4S_{n+1} + S_n = 0$

Do: $S_0 = 2$; $S_1 = 4 \Rightarrow S_n$ luôn là số nguyên chẵn

mà: $0 \langle 2 - \sqrt{3} \langle 1$

$\Rightarrow 0 \langle x^n \langle 1 \Rightarrow y^n + (x^n - 1) \langle y^n \langle x^n + y^n \Rightarrow S_n - 1 \langle y^n \langle S_n$

$\Rightarrow \left[y^n\right] = S_n$ - 1, hay: $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ là số lẻ, với mọi số tự nhiên n

Bài toán này có thể thay bằng bài sau: Chứng tỏ rằng chữ số hàng đơn vị trong biểu diễn thập phân của số $(2 + \sqrt{3}\ )^n$ là số lẻ

Bài 42:

Đặt: $x = (\sqrt{29} - \sqrt{21})^2 = 50 - 2\sqrt{609}$

$y = (\sqrt{29} + \sqrt{21})^2 = 50 + 2\sqrt{609}$

Thì x, y là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 100X + 64 = 0$

Với: $S_n = x^n + y^n$, tương tự như bài 41 ta có:

$S_{n+2} - 100S_{n+1} + 64S_n = 0$ và: $\left[y^{1000}\right] = S_{1000} - 1$ suy ra:

$S_{n+2} = 100S_{n+1} - 64S_n \equiv 36\,S_n \equiv 6^2\,S_n \equiv 6^4 S_{n-2} \equiv \ldots \equiv 6^{n+2} S_0$ (mol 100)

$\Rightarrow S_{1000} \equiv 6^{1000}.\,2$ (mol 100),

Nhưng: $6^{1000} = (6^5)^{200} \equiv 76^{200} \equiv 76$ (mol 100) $\Rightarrow S_{1000} \equiv 52$ (mol 100).

Vậy: $\left[(\sqrt{29}+\sqrt{21})^{2000}\right]$ có hai chữ số tận cùng là: 51

Bài 43:

Ta có: $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1992} = (5 + 2\sqrt{6})^{996} = a + b\sqrt{6}$

(với a, b là số nguyên)

$\Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{1992} = a - b\sqrt{6} \Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1992} + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{1992} = 2a$ $^{(*)}$

Mặt khác: $0 < (5 - 2\sqrt{6})^{996} < 1$

$$\Rightarrow \left[(5+2\sqrt{6})^{996}\right] = 2a - 1 = 2\left(\sum_{k=0}^{498} C_{996}^{2k} 5^{996-2k} 2^{2k} 6^k\right) - 1$$

$\Rightarrow \left[(5+2\sqrt{6})^{996}\right] \equiv 2\,C_{996}^{996} 2^{996} 6^{498} - 1$ (mol 10)

$\Rightarrow \left[(5+2\sqrt{6})^{996}\right] \equiv 1$ (mol 10) $\Rightarrow \left[(5+2\sqrt{6})^{996}\right]$ có chữ số tận cùng là: 1

Hay chữ số ngay trước dấu phẩy của: $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1992}$ là: 1

Mặt khác: Từ $^{(*)}$ ta có: $\left\{(5+2\sqrt{6})^{996}\right\} = 1 - \left\{(5-2\sqrt{6})^{996}\right\}$

$\Rightarrow 1 - (5 - 2\sqrt{6})^{996} > 1 - \dfrac{1}{10} = 0,9 \Rightarrow \left\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1992}\right\} > 0,9$

Vậy chữ số ngay sau dấu phẩy của : $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1992}$ là: 9

Bài 44:

Ta có: $(5 + \sqrt{26})^n = a + b\sqrt{26}$; $(5 - \sqrt{26})^n = a - b\sqrt{26}$

(với a, b nguyên)

$\Rightarrow (5 + \sqrt{26})^n + (5 - \sqrt{26})^n = 2a$

Do: $0 < (\sqrt{26} - 5)^n < \dfrac{1}{10^n}$ Mà: $\left\{(5+\sqrt{26})^n\right\} + \left\{(5-\sqrt{26})^n\right\} = 1$ nên

Với n chẵn thì: $\left\{(5+\sqrt{26})^n\right\} = 1 - \left\{(5-\sqrt{26})^n\right\} = 1 - (\sqrt{26} - 5)^n > 1 - \dfrac{1}{10^n}$

$\Rightarrow \left\{(5+\sqrt{26})^n\right\} > 0,999\ldots99$ (n chữ số 9 sau dấu phẩy)

Với n lẻ thì: $\left\{(5+\sqrt{26})^n\right\} = 1 - \left\{(5-\sqrt{26})^n\right\} = \left\{(\sqrt{26}-6)^n\right\} = (\sqrt{26} - 5)^n$

$\Rightarrow \left\{(5+\sqrt{26})^n\right\} < \dfrac{1}{10^n} = 0,000\ldots001$ (n chữ số 0 sau dấu phẩy)

Vậy ta có: $\left\{(5+\sqrt{26})^n\right\}$ Có n chữ số giống nhau ngay sau dấu phẩy

Bài này có thể thay bằng bài: Tìm n chữ số ngay sau dấu phẩy trong biểu diễn thập phân của số: (5 + $\sqrt{26}$)^n

Bài 45:

Ta có: $(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p = 2a = (2+\sqrt{5})^p - (\sqrt{5}-2)^p$

Trong đó a là số nguyên và: $0 \langle (\sqrt{5}-2)^p \langle 1$

nên: $\lfloor (2+\sqrt{5})^p \rfloor = 2a = 2(\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2k} 2^{p-2k} 5^k) = 2^{p+1} + 2(\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} C_p^{2k} 2^{p-2k} 5^k)$

Mà:C_p^{2k} luôn chia hết cho p với mọi giá trị k từ 1 đến $\frac{p-1}{2}$

$\Rightarrow \lfloor (2+\sqrt{5})^p \rfloor \equiv 2^{p+1}$ (mol p), hay: $\lfloor (2+\sqrt{5})^p \rfloor - 2^{p+1}$ chia hết cho p

Bài 46:

Ta có: $(1+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$ và: $(1-\sqrt{3})^n = a - b\sqrt{3}$

Với: a,b nguyên và: $a^2 - 3b^2 = (-2)^n$

+ Với n chẵn thì: $(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = 2a$, do: $(\sqrt{3}-1)^n \langle 1$

$\Rightarrow \lfloor (1+\sqrt{3})^n \rfloor = 2a - 1$ hay Số mũ của 2 trong dạng PTTC của $\lfloor (1+\sqrt{3})^n \rfloor$ là 0

+ Với n lẻ (n = 2k + 1) $\Rightarrow (1+\sqrt{3})^n = 2^k (1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k$

Do: $(2+\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})^k = x + y\sqrt{3}$, với x,y nguyên, $x^2 - 3y^2 = 1$

nên x,y khác tính chẵn lẻ . Do đó x + 3y là số lẻ, ta tính được:

$a = (x+3y)\,2^k \Rightarrow \lfloor (1+\sqrt{3})^n \rfloor = 2a = 2^{k+1}(x+3y)$

Nên Số mũ của 2 trong dạng PTTC của $\lfloor (1+\sqrt{3})^n \rfloor$ là: $k + 1 = \frac{n+1}{2}$

Bài 47:

Ta cố: $\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right] \langle \frac{n+1}{\sqrt{2}} - (\frac{n}{\sqrt{2}} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \langle 2 \Rightarrow 0 \le x_n \le 1$

Vì: $x_0; x_1; x_2; x_3; \ldots x_{199}$ Chỉ nhận giá trị: 0 hoặc 1

nên số các số khác 0 là:

$$\sum_{k=0}^{199} x_k = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{0}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \ldots + \left[\frac{200}{\sqrt{2}}\right] - \left[\frac{199}{\sqrt{2}}\right] = \lfloor 100\sqrt{2} \rfloor$$

Mà $141 \langle 100\sqrt{2} \langle 142 \Rightarrow \lfloor 100\sqrt{2} \rfloor = 141$

Vậy có tất cả 141 số khác 0.

Bài 50: *Áp dụng định lý: Lơgiăngđrơ: Trong khai triển số: n! (n là số tự nhiên lớn hơn 1) ra thừa số nguyên tó thì thừa sồ nguyên tố: p có số mũ là:* $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$