Nhập môn phương pháp tối ưu

Assignment No: 1

Vận dụng đối ngẫu

Author :
Nhóm 4

Instructor:
Dr.Phạm Thị Hoài

Ngày 28 tháng 5 năm 2020

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

Mục lục

1 Phần mở đầu

Lý do chọn đề tài: Quy hoạch tuyến tính là một bộ phận quan trọng của quy hoạch toán học. Việc phát triển lý thuyết quy hoạch tuyến tính là một trong những thành tựu vĩ đại của thế kỉ XX. Bài toán quy hoạch tuyến tính đã là mô hình của nhiều bài toán trong thực tế. Cặp bài toán đối ngẫu và những tính chất, ứng dụng của nó đã được áp dụng vào giải trong nhiều bài toán quy hoạch tuyến tính.
Đối tượng nghiên cứu: Tìm hiểu ứng dụng của đối ngẫu trong việc giải các bài toán

Phương pháp nghiên cứu: Tìm hiểu ứng dụng của đối ngẫu thông qua các bài tập trong giáo trình và bài tập làm thêm

Mục tiêu nghiên cứu: Thông qua việc tìm hiểu các bài toán sử dụng đối ngẫu để hiểu kĩ hơn về cách vận dụng và sử dụng các tính chất của đối ngẫu cũng như việc kết hợp đối ngẫu với các phương pháp khác

Phạm vi nghiên cứu: Bài tập trong giáo trình Các phương pháp tối ưu và bài tập làm thêm

2 Bài tập giáo trình

2.1 Bài tập 1 (b.8 trang 131)

Bài toán :

$$\begin{aligned} \min\ z &= 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ \text{v.đ.k.}\ \ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

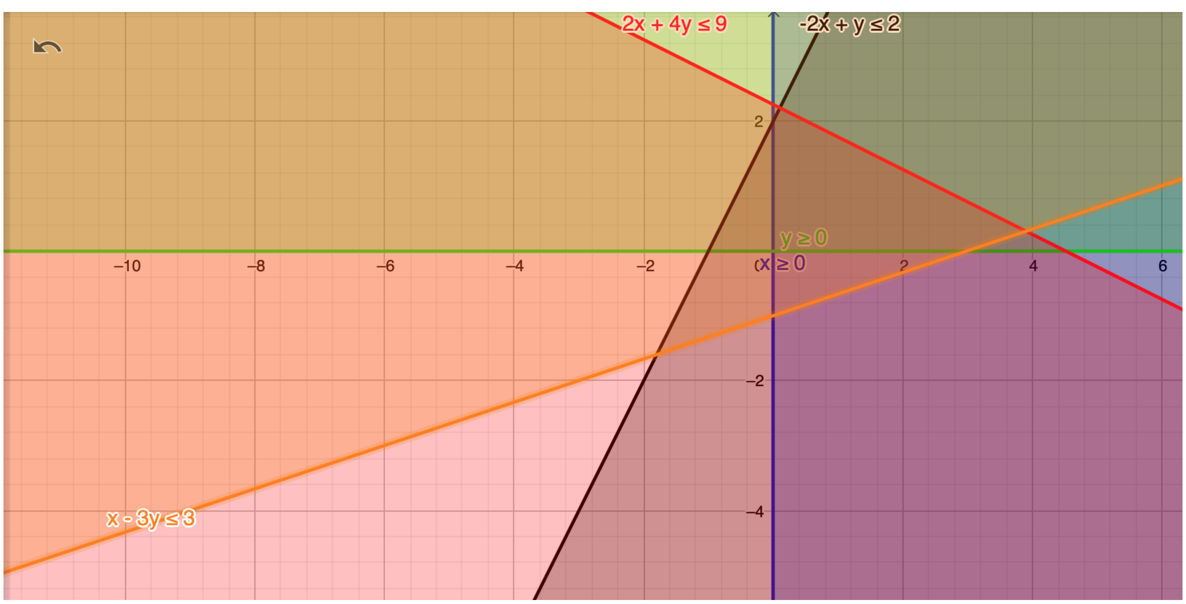
i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán này và giải nó bằng phương pháp hình học

ii) Sử dụng điều kiện độ lệch bù để tìm nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu.

Lời giải:

i) Bài toán đối ngẫu:

$$\begin{aligned} \max\ t &= y_1 + y_2 \\ \text{v.đ.k.}\ \ -2y_1 + y_2 &\leq 2 \\ 2y_1 + 4y_2 &\leq 9 \\ y_1 - 3y_2 &\leq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Miền chấp nhận được D của bài toán trên gồm các đỉnh $y^1 = (0,0), y^2 = (3,0), y^3 = (0,2), y^4 = (\frac{1}{10}, \frac{11}{5}), y^5 = (\frac{39}{10}, \frac{3}{10})$(Như trong hình)
Thử các trường hợp ta có $t(y^5) = \frac{42}{10}$ là phương án tối ưu
Vậy phương án tối ưu $y^* = (\frac{39}{10}, \frac{3}{10})$
ii) Do bài toán đối ngẫu có nghiệm tối ưu y^* nên bài toán gốc cũng có nghiệm tối ưu x^* và :
$t(y^*) = z(x^*) = \frac{42}{10}$
Do $y_1^*, y_2^* > 0 \Rightarrow \langle a_i, x\rangle = b_i, i = 1, 2$
Từ những điều trên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x_1^* + 9x_2^* + 3x_3^* = \frac{42}{10} \\ -2x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 1 \\ x_1^* + 4x_2^* - 3x_3^* = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta có $x^* = (0, \frac{4}{10}, \frac{2}{10})$
Vậy nghiệm tối ưu của bài toán gốc là $x^* = (0, \frac{4}{10}, \frac{2}{10})$

2.2 Bài tập 2 (b.9 trang 131)

Bài toán : Xét bài toán min $\{z = \langle c, x\rangle | Ax \leq b, x \geq 0\}$. Giả sử bài toán này và bài toán đối ngẫu của nó đều chấp nhận được. Cho x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán gốc với giá trị tối ưu tương ứng là z_* và y^* là một nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu. Chứng minh rằng

$$z_* = y^{*T} Ax^*$$

Lời giải:
Theo định lý về độ lệch bù ta có :
$\begin{cases} \langle Ax^* - b, y^*\rangle = 0 \\ \left\langle c - A^T y^*, x^*\right\rangle = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \langle c, x^*\rangle = \left\langle A^T y^*, x^*\right\rangle = \langle y^*, Ax^*\rangle \\ \text{Mà } z^* = \langle c, x^*\rangle \end{cases}$
$\Rightarrow z^* = \langle y^*, Ax^*\rangle = y^{*T} Ax^*$
Vậy $z^* = y^{*T} Ax^*$

2.3 Bài tập 3 (b.14 trang 131)

Bài toán : Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$
\begin{aligned}
\max z = -4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 & \\
\text{v.đ.k.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 1 \\
4x_2 - 2x_3 \quad &\leq 4 \\
-3x_2 \quad + x_4 &= 5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên;
ii) Dùng đối ngẫu kiểm tra xem $x^* = (0, 0, 1, 5)^T$ có phải là phương án tối ưu của bài toán trên không?
Lời giải:
i) Bài toán đối ngẫu

$$
\begin{aligned}
\text{mint } t = y_1 + 4y_2 + 5y_3 & \\
\text{v.đ.k.} \quad y_1 \quad &\geq -4 \\
2y_1 + 4y_2 - 3y_3 &\geq 3 \\
y_1 - 2y_2 \quad &\geq -1 \\
y_3 &\geq -2 \\
y_1, y_3 \text{ tự do }, y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ii) Giả sử x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc
$\Rightarrow$ Tồn tại y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu
Vì $x_3^*, x_4^* > 0$ nên theo định lý về độ lệch bù

$$y_1^* - 2y_2^* = -1$$

$$y_3^* = -2$$

Mặt khác $t(y^*) = z(x^*) = -11$
$\Rightarrow y_1^* + 4y_2^* + 5y_3^* = -11$
Suy ra $y^* = (-1, 0, -2)$. y^* thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán đối ngẫu nên y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc
Vậy x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc

2.4 Bài tập 4 (b.15 trang 132

2.4.1 Câu a

Đề bài
Tìm min $Z = -4X_1 - 2X_2$
v.đ.k

- $3X_1 - 2X_2 \geq 4$
- $-2X_1 + X_2 = 2$
- $X_1, X_2 \geq 0$

Lời giải
Đưa về dạng chính tắc
Tìm min $Z = -4X_1 - 2X_2$
v.đ.k

- $3X_1 - 2X_2 - X_3 = 4$
- $-2X_1 + X_2 = 2$
- $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Pha 1: Giải bài toán phụ

Tìm min $P = X_4^g + X_5^g$
v.đ.k

- $3X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4^g \quad = 4$
- $-2X_1 + X_2 \quad + X_5^g = 2$
- $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Hệ Số C_B	Cơ Sở B	Phương Án	0 X_1	0 X_2	0 X_3	1 X_4^g	1 X_5^g	θ
1	X_4^g	4	**3**	-2	-1	1	0	4/3
1	X_5^g	2	-2	1	0	0	1	∞
	Bảng 1	6	1	-1	-1	0	0	
0	X_1	4/3	1	-2/3	-1/3		0	
1	X_5^g	14/3	0	-1/3	-2/3		1	
	Bảng 2	14/3	0	-1/3	-2/3		0	

các $\delta_i \leq 0$ với mọi i nên bài toán P có phương án tối ưu cực biên và Pmin = 14/3 $>$ 0 =$>$ Bài toán gốc không có phương án tối ưu (không giải được)

2.4.2 Câu b

Đề bài
Tìm min $Z = -X_1 - 3X_2$
v.đ.k

- $X_1 + X_2 \geq 3$
- $-X_1 + X_2 \leq -1$ $<=>$$X_1 - X_2 \geq 1$
- $X_1 + 2X_2 \leq 4$
- $X_1, X_2 \geq 0$

Lời giải
Đưa về dạng chính tắc
Tìm min $Z = -X_1 - 3X_2$
v.đ.k

- $X_1 + X_2 - X_3 = 3$

- $X_1 - X_2 \quad - X_4 \quad = 1$
- $X_1 + 2X_2 \quad + X_5 = 4$
- $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Pha 1: Giải bài toán phụ

Tìm min $P = X_6^g + X_7^g$
v.đ.k

- $X_1 + X_2 - X_3 + X_6^g \quad = 4$
- $X_1 - X_2 - X_4 \quad + X_7^g = 2$
- $X_1 + 2X_2 + X_5 \quad = 2$
- $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6^g, X_7^g \geq 0$

Hệ Số C_B	Cơ Sở B	Phương Án	0 X_1	0 X_2	0 X_3	0 X_4	0 X_5	1 X_6^g	1 X_7^g	θ
1	X_6^g	3	1	1	-1	0	0	1	0	3
1	X_7^g	1	**1**	-1	0	-1	0	0	1	1
0	X_5	4	1	2	0	0	1	0	0	4
	Bảng 1	4	2	0	-1	-1	0	0	0	
1	X_6^g	2	0	**2**	-1	1	0	1		1
0	X_1	1	1	-1	0	-1	0	0		∞
0	X_5	3	0	3	0	1	1	0		1
	Bảng 2	2	0	2	-1	1	0	0		
0	X_2	1	0	1	-1/2	1/2	0			
0	X_1	2	1	0	-1/2	-1/2	0			
0	X_5	0	0	0	3/2	-1/2	1			
	Bảng 3	0	0	0	0	0	0			

Bài toán phụ có Pmin = 0 Với phương án cực biên tối ưu không có biến

giả $x^0 = (2, 1, 0, 0, 0)^T$
Pha 2
Xuất phát từ phương án cực biên không suy biến tương ứng với cơ sở đơn vị X_2, X_1, X_5

Hệ Số C_B	Cơ Sở B	Phương Án	0 X_1	0 X_2	0 X_3	1 X_4	1 X_5	θ
-3	X_2	1	0	1	-1/2	1/2	0	∞
-1	X_1	2	1	0	-1/2	-1/2	0	∞
0	X_5	0	0	0	**3/2**	-1/2	1	0
	Bảng 1	-5	0	0	2	-1	0	
-3	X_2	1	0	1	0	1/3	1/3	
-1	X_1	2	1	0	0	-2/3	1/3	
0	X_3	0	0	0	1	-1/3	2/3	
	Bảng 2	-5	0	0	0	-1/3	-4/3	

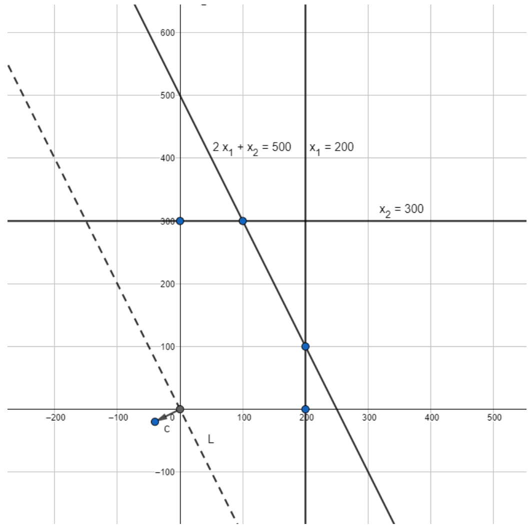
Phương Án cực biên tối ưu $x^* = (2, 1)^T$
và giá trị tối ưu Zmin = -5

2.5 Bài tập 5 (b.16 trang 132)

Gọi số mũ 1 được sản xuất là X_1, số mũ 2 là X_2.
Dễ thấy, X_1, X_2 là các số nguyên không âm.
Ta có:

- Mỗi ngày bán không quá 200 mũ 1: $X_1 \leq 200$
- Mỗi ngày bán không quá 300 mũ 2: $X_2 \leq 300$
- Nếu mỗi ngày chỉ làm mỗi mũ 2 thì sản xuất được 500 cái, thời gian sản xuất một mũ 1 gấp hai lần mũ 2, do đó: $2X_1 + X_2 \leq 500$

Cần tối đa hàm $z = 10X_1 + 5X_2$
Xét bài toán tìm cực tiểu của $f = -10X_1 - 5X_2$
Với điều kiện:
$X_1 \leq 200$
$X_2 \leq 300$
$2X_1 + X_2 \leq 500$



Tập chấp nhận được của bài toán là đa diện $D = conv\{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5\}$ với $v^1 = (0,0)^T$, $v^2 = (0,300)^T$, $v^3 = (100,300)^T$, $v^4 = (200,100)^T$, $v^5 = (200,0)^T$. Hướng của vector $c = (-10,-5)^T$. Dịch chuyển song song đường mức L của c theo hướng ngược vector c, ta thấy đường mức cuối cùng của hàm f còn cắt tập D là đường mức đi qua hai điểm (100,300) và (200,100).

Thay vào, ta tính được giá trị nhỏ nhất của f là -2500. Vậy giá trị lớn nhất của z hay kết quả cần tìm cuối cùng là 2500.

2.6 Bài tập 5 (b.17 trang 133)

Gọi số máy bay A, B, C mà hãng quyết định mua là X_1, X_2, X_3.

Ta có: X_1, X_2, X_3 là các số nguyên không âm.

Từ đề bài, ta có các điều kiện:

$3X_1 + 6X_2 + 3X_3 \leq 150$

$X_1 + X_2 + X_3 \leq 30$

$8X_1 + 13X_2 + 15X_3 \leq 400$

Số tấn-km mà các máy bay có thể bay mỗi ngày lần lượt là 63000, 108000, 151200.

Do lãi suất của máy bay C lớn hơn máy bay B lớn hơn máy bay A, nên khi các máy bay có khả năng chuyên chở lớn hơn yêu cầu là 3500000 tấn-km thì hãng sẽ luôn sử dụng C trước B, B trước A để tối ưu lợi nhuận.Khi đó, bài toán được chia thành 4 trường hợp như sau:

- Nếu $151200X_3 \geq 3500000$

  Tối đa hàm $z_1 = 120 * 3500000$

- Nếu $151200X_3 \leq 3500000$ và $151200X_3 + 108000X_2 \geq 3500000$

  Tối đa hàm $z_2 = 120 * 151200X_3 + 8 * (3500000 - 151200X_3)X_2$

- Nếu $151200X_3 + 108000X_2 \leq 3500000$ và $151200X_3 + 108000X_2 + 63000X_1 \leq 3500000$

  Tối đa hàm $z_3 = 120 * 151200X_3 + 8 * 108000X_2 + 5 * (3500000 - 151200X_3 - 10800X_2)X_1$

- Nếu $151200X_3 + 108000X_2 + 63000X_1 \leq 3500000$

  Tối đa hàm $z_3 = 120 * 151200X_3 + 8 * 108000X_2 + 5 * 63000X_1 + 0.2 * (3500000 - 151200X_3 - 10800X_2 - 63000X_1)X_1$

Tính giá trị lần lượt 4 trường hợp trên, kêt quả của bài toán gốc chính là giá trị lớn nhất của 4 trường hợp

2.7 Bài tập 6 (b.18 trang 132)

Đặt $x = (x_1, x_2, x_3)$ là nghiệm cần tính, trong đó:

- x_1: Số lượng gỗ xẻ sẵn loại 1 cần mua.
- x_2: Số lượng gỗ xẻ sẵn loại 2 cần mua.
- x_3: Số lượng gỗ hợp.

Mô hình tuyến tính:

$$
\begin{array}{llllll}
\min\ f(x) = & 34x_1 & +74x_2 & +55x_3 & & \\
\text{vđk:} & 0.7x_1 & +0.9x_2 & +0.8 & & = 900000 \\
 & x_1 & & & & \leq 40000 \\
 & & x_2 & & & \leq 60000 \\
 & & & x_3 & & \leq 350000 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

3 Bài tập làm thêm

3.1 Bài tập 1

Bài toán: Chứng minh rằng nếu hai bài toán quy hoạch tuyến tính chỉ khác nhau ở vecto b(vế phải của hệ ràng buộc) và đều có tập phương án chấp nhận được khác rỗng thì cùng giải được hoặc cùng không giải được
Lời giải:
Không mất tính tổng quát, giả sử ta có hai bài toán quy hoạch tuyến tính có dạng:

minimize<c,x>	**mininize** <c,x>
vdk: $Ax \geq b_1$	vdk: $Ax \geq b_2$
$x \geq 0$	$x \geq 0$

Khi đó bài toán đối ngẫu của hai bài toán trên là:

maximize<b,x>	**min** <c,x>
vdk: $A^T x \leq c$	vdk: $A^T x \leq b_2$
$y \geq 0$	$y \geq 0$

1. *TH1:* Một bài toán giải được
   Giả sử bài toán 1 giải được -> Bài toán đối ngẫu của nó cũng giải được -> Tập các phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu là $\neq \emptyset$
   Theo giả thiết, hai bài toán gốc đều có phương án chấp nhận được => Tập phương án chấp nhận được của các cặp bài toán trên là $\neq \emptyset$ => Hai bài toán gốc đều có nghiệm tối ưu.(Theo định lí tồn tại)

2. TH2: Một bài toán không giải được
   Giả sử bài toán 1 không giải được. Dựa vào giả thiết và theo định lí tồn tại -> Tập các phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu là Ø
   Từ đó theo định lí tồn tại => Bài toán 2 cũng không giải được

3.2 Bài tập 2

Bài toán: Dùng đối ngẫu chứng minh rằng bài toán:

$$\text{maximize } c^T x$$

$$\text{vđk: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

không giải được nếu $b_i < 0 \forall i$ và tồn tại i sao cho $a_{i,j} > 0 \forall j$

Lời giải:
Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

$$\text{maximize } b^T y$$

$$\text{vđk: } A^T y \leq -c$$

$$y \leq 0$$

Do $b_i < 0$ $\forall i$ và tồn tại i sao cho $a_{i,j} > 0$ ∀j và dựa trên các ràng buộc của bài toán ta nhận thấy bài toán đối ngẫu không bị chặn trên(Tồn tại i sao cho y_i có thể giảm vô hạn->Giá trị hàm mục tiêu có thể tăng vô hạn) => Theo định lí tồn tại, bài toán gốc không giải được(đpcm)

3.3 Bài tập 3

Bài toán: Cho bài toán:

$$\textbf{maximize} \quad x_1 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\text{vđk: } x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -5$$

$$3x_2 + 4x_3 - x_4 = -9$$

$$5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 14$$

$$x_1, x_3, x_4 \leq 0$$

Viết bài toán đối ngẫu, chứng minh bài toán giải được và tìm phương án cực biên tối ưu của hai bài toán.
Lời giải:
Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là:

$$\begin{array}{llcl} \max & -5y_1- & 9y_2+14y_3 & \\ \text{vđk:} & y_1 & & \geq -1 \\ & & 3y_2 & = 0 \\ & -2y_1+ & 4y_2 & \geq -5 \\ & 2y_1- & y_2+3y_3 & \geq -3 \\ & & 2y_3 & = 0 \end{array} \tag{1}$$

Hay thu gọn là:

$$\begin{array}{llcl} \max & -5y_1 & -9y_2 + 14y_3 & \\ \text{vđk:} & y_1 & & \geq -1 \\ & y_1 & & \leq 5 \\ & & 3y_2 & = 0 \\ & & 2y_3 & = 0 \end{array} \tag{2}$$

Dễ dàng nhận thấy hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu bị chặn
(max($-5y_1 - 9y_2 + 14y_3) \leq -5 * -1 = 5$ do $y_2 = y_3 = 0, y_1 \geq -1$)
=> Bài toán đối ngẫu có nghiệm tối ưu
=> Bài toán gốc cũng có nghiệm tối ưu
Dễ nhận thấy $y^* = (1, 0, 0)^T$ là phương án cực biên tối ưu duy nhất(không

suy biến vì thỏa mãn đúng ba ràng buộc chặt) của bài toán đối ngẫu. Gọi x^* là phương án cực biên của bài toán gốc. Khi đó, theo định lí về độ lệch bù ta có hệ:

$$\begin{cases} x_3 = x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = -5 \\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -9 \\ 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 14 \end{cases} \quad => \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

$=> x^* = (-5, -3, 0, 0, 7)^T$ là phương án cực biên tối ưu của bài toán gốc(không suy biến)

3.4 Bài tập 4

Bài toán: Sử dụng đối ngẫu giải bài toán sau:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & +3x_2 - 4x_3 & + \ x_4 + 2x_5 & & \\ \text{vdk} & & -2x_2 + 5x_3 & - \ x_4 - 3x_5 & \geq & -7 \\ & & x_2 + 2x_3 & - \ x_5 & \leq & 11 \\ & - \ x_1 & +4x_2 - \ x_3 & +6x_4 + \ x_5 & \leq & 0 \\ & & 3x_3 & +2x_4 & = & 24 \\ & x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 & & & & \end{array} \tag{3}$$

Lời giải:
Hàm mục tiêu của bài toán gốc được viết lại là: min $-2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5$
Bài toán đối ngẫu của bài toàn trên là:

$$\begin{array}{llllll} \max & -7y_1 & +11y_2 & & +24y_4 & \\ \text{vdk} & & & - \ y_3 & & = -2 \\ & -2y_1 & + \ y_2 + 4y_3 & & & = -3 \\ & 5y_1 & +2y_2 - \ y_3 & & +3y_4 & = \ 4 \\ & - \ y_1 & & + 6y_3 & +2y_4 & \leq -1 \\ & -3y_1 & - \ y_2 + \ y_3 & & & \leq -2 \\ & y_1 \geq 0 & , y_2 \leq 0, y_3 \leq 0 & & & \end{array} \tag{4}$$

Nhận thấy hai điều kiện $-y_3 = -2$ và $y_3 \leq 0$ là trái ngược nhau
-> Tập chấp nhận được của bài toán đối ngẫu là tập rỗng
Nhận thấy phương án $(0, 0, 8, 0, 5)^T$ là một phương án thỏa mãn các ràng buộc của bài toán gốc-> Tập chấp nhận được của bài toán gốc là khác rỗng
=> Theo định lí tồn tại, giá trị hàm mục tiêu của bài toán gốc không bị chặn dưới trong tập chấp nhận được

3.5 Bài tập 5

P	D
min $x_1 + 2x_2 + ... + nx_n$	max $y_1 + 2y_2 + ... + ny_n$
vđk:	vđk:
$x_1 \geq 1$	$y_1 \leq 1$
$x_1 + 2x_2 \geq 2$	$y_1 + 2y_2 \leq 2$
.....	....
$x_1 + 2x_2 + ... + nx_n \geq n$	$y_1 + 2y_2 + ... + ny_n \leq n$
$x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$	$y_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$

Có:

$$y_1 + 2y_2 + ... + ny_n \leq 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}(1)$$

$y' = \{0, 0, ..., 0\}$ là 1 nghiệm chấp nhận được (2) Từ (1) và (2) => bài toán D luôn có nghiệm. Xét $y^* = \{0, 0, ..., 1\}^T$ là một phương án cảu bài toán (D) (Do y^* thỏa mãn các ràng buộc và J(y^*) = {n})

Tương tự $x^* = \{n, 0, 0, ..., 0\}^T$ là 1 phương án của (P)
mà $(1, 2, 3, ..., n)x^* = (1, 2, 3, ..., n)y^*$
=> x^* là pacb tối của (P)
và y^* là pacb tối của (D)

3.6 Bài tập 6

Bài toán: min $< c, x >$ vđk: $Ax = b$ (D)

Xét bài toán đối ngẫu: max $< b, y >$ vđk: $A^T y = c$

Do bài toán gốc giải được => bài toán đối ngẫu giải được => $\exists y_0 : A^T y_0 = c$

=> $c^T = y_0^T A$ (1)

Nhận xét: Từ (1) ta có $c^T x = y_0^T Ax = y_0^T b. \exists x \in D$

=> Mọi nghiệm x chấp nhận được của bài toán gốc và mọi nghiệm y của chấp nhận được của bài toán đối ngẫu là nghiệm tối ưu.

3.7 Bài tập 7

(P_1) min $f(x) =$	$2x_1$	$+x_2$			$+ 3x_5$	
vđk:	x_1	$- 2x_2$			$+ 3x_5$	$= -5$
		$- 3x_2$	$- 2x_3$		$+ 2x_5$	$= 16$
		$- x_2$		$- x_4$		$= -3$
	$x_1, x_2, x_3 \leq 0$					

Xét bài toán đối ngẫu:

(D_1) max $h(y) =$	$-5y_1$	$+16y_2$	$-3y_3$	
vđk:	y_1			≥ 2
	$-2y_1$	$- 3y_2$	$- y_3$	≥ 1
		$-2y_2$		$= 0$
			$-y_3$	$= 0$
	$3y_1$	$+2y_2$	$+2y_3$	≥ 3
	y_1, y_2, y_3	tự do		

từ $(D_1) => y_2 = y_3 = 0, y_1 \geq 2$ và $y_3 \leq \frac{-1}{2}$

=> (D_1) không có phương án nhận được.

mà (P_1) có phương án chấp nhận được $x_0 =$ (-2, 0, -9, 1, -1)

=> min f(x) không giải được.

$x_3 = \frac{-3x_2+2x_5-16}{2}, x_4 = \frac{-x_2+2x_5+3}{1}$

$$\begin{aligned} => f(x) &= 2x_1 + x_2 + 3x_5 \\ &= x_1 + 3x_2 + (x_1 - 2x_2 + 3x_5) \\ &= x_1 + 3x_2 - 5 \end{aligned}$$

với $x_1 = 0, x_2 = t(t- > -\infty)$

$x_5 = \frac{-5+2x_2}{3} = \frac{-5+2t}{3} => x_5 \leq 0$

=> f(x) = 3t - 5

=> $\lim_{t\to-\infty} f(x) = -\infty$

=> $x = (0, t, \frac{2x_5-16}{2}, 2x_5+3, 3t-5)$ không bị chặn dưới

(P_1) min $p(x)$ =	$2x_1$	$+x_2$			$+ 3x_5$	
vđk:	x_1	$- 2x_2$			$+ 3x_5$	$= -5$
		$- 3x_2$	$- 2x_3$		$+ 2x_5$	$= 16$
		$- x_2$		$- x_4$		$= -3$
	$x_1, x_2, x_3 \leq 5$					

Xét bài toán đối ngẫu:

(D_1) max $h(y)$ =	$-5y_1$	$+16y_2$	$-3y_3$	
vđk:	y_1			≥ -2
	$-2y_1$	$- 3y_2$	$- y_3$	≥ -1
		$-2y_2$		$= 0$
			$-y_3$	$= 0$
	$3y_1$	$+2y_2$	$+2y_3$	≥ -3
	y_1, y_2, y_3	tự do		

=> $-1 \leq y_1 \leq 1$ và $y_2 = y_3 = 0$

=> (D_2) có phương án chấp nhận được (1)

và (P_2) có phương án chấp nhận được (2)

(1) + (2) => (P_2) có phương án tối ưu.

từ trên ta có $p(x) = -f(x) = -x_1 - x_2 + 5$

có $x_1, x2 \leq 0$ => $p(x) \geq 5$

Dấu "=" xảy ra <=> $x_1 = x_2 = 0$ => $x_5 = \frac{-5}{3}$(tmđk)

=> $x^* = (0, 0, -\frac{29}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$

4 Kết luân

Thông qua việc áp dụng đối ngẫu vào giải quyết các bài toán đã giúp chúng em hiểu rõ hơn về các tính chất, định lí về đối ngẫu, cách vận dụng và kết hợp đối ngẫu với các phương pháp khác đồng thời cũng giúp chúng ta có cách nhìn mới, hướng tư duy mới về cách giải một bài toán quy hoạch tuyến tính. Từ đó chúng em nhận thức được tầm quan trọng của bài toán quy hoạch tuyến tính đặc biệt là phương pháp đối ngẫu.
Trong quá trình làm bài tập, chúng em cũng không tránh khỏi sai sót, mong cô góp ý để giúp chúng em hoàn thiện hơn...

Tài liệu

[1] Giáo trình Các phương pháp tối ưu(Lý thuyết và bài tập), Nhà xuất bản Bách Khoa-Hà Nội(2008)

[2] overleaf.com