Exercice 9.6 **Satellite et gyrostat**

1. Liaison pivot parfaite : $\underline{F}$ quelconque
   $\underline{C}$ perpendiculaire à l'axe de la liaison : $(\underline{C},\underline{e}) = 0$
   Il y a donc 5 inconnues de liaisons.

2. Il y a 6 degrés de libertés pour décrire le placement de Ω :
   - 3 pour le positionnement d'un point de référence du solide, $\underline{x}_c$ par exemple ;
   - 3 paramètres de rotation pour décrire la position du solide autour de ce point.

   Il y a 1 degré de liberté supplémentaire pour positionner Ω^* par rapport à Ω, donné par φ.
   Il y a donc 7 degrés de liberté.
   Nota : Cette analyse peut être confirmée avec l'écriture de la cinématique :

$$
\begin{aligned}
\forall \underline{x} \in \Omega,\quad \underline{x} &= \underline{x}_c + \underline{\underline{R}}_\Omega(\underline{p} - \underline{p}_c)\\
\underline{x}' &= \underline{x}_c' + \underline{\omega}\wedge(\underline{x} - \underline{x}_c)\\
\forall \underline{x} \in \Omega^*,\quad \underline{x} &= \underline{x}_0 + \underline{\underline{R}}^\#(\underline{e},\varphi).\underline{\underline{R}}_\Omega(\underline{p} - \underline{p}_0) \qquad \text{où } \underline{e} = \underline{\underline{R}}_\Omega.\underline{e}_0\\
&= \underline{x}_c + \underline{\underline{R}}_\Omega(\underline{p}_0 - \underline{p}_c) + \underline{\underline{R}}^\#(\underline{e},\varphi).\underline{\underline{R}}_\Omega(\underline{p} - \underline{p}_0)\\
\underline{x}' &= \underline{x}_c' + \underline{\omega}\wedge(\underline{x}_0 - \underline{x}_c) + (\underline{\omega} + \varphi'\,\underline{e})\wedge(\underline{x} - \underline{x}_0)\\
&= \underline{x}_c' + \underline{\omega}\wedge(\underline{x} - \underline{x}_c) + \varphi'\,\underline{e}\wedge(\underline{x} - \underline{x}_0)
\end{aligned}
$$

   L'axe de la liaison pivot, porté par $\underline{e}$, est entraîné par la rotation de Ω, donc $\underline{\omega}^* = \underline{\omega} + \varphi'\,\underline{e}$

3. Équation de Newton : $m\,\underline{x}_c'' = \underline{F}$ (1)
   Équation d'Euler : $\underline{\underline{J}}_c(\underline{\omega}') + \underline{\omega}\wedge\underline{\underline{J}}_c(\underline{\omega}) = \underline{C} - c^*\,\underline{e} + (\underline{x}_0 - \underline{x}_c)\wedge\underline{F}$ (2)

4. Équation de Newton : $m^*\,\underline{x}_c^{*}{}'' = -\underline{F}$ (3)
   Équation d'Euler : $\underline{\underline{J}}_c^*(\underline{\omega}^*{}') + \underline{\omega}^*\wedge\underline{\underline{J}}_c^*(\underline{\omega}^*) = -\underline{C} + c^*\,\underline{e} - (\underline{x}_0 - \underline{x}_c^*)\wedge\underline{F}$ (4)
   où $\underline{\omega}^*{}' = \underline{\omega}' + \varphi''\,\underline{e} + \varphi'\,\underline{\omega}\wedge\underline{e}$
   On a donc $4 \times 3 = 12$ équations scalaires pour $5 + 7 = 12$ inconnues.

5. (1) + (3) : $m\,\underline{x}_c'' + m^*\,\underline{x}_c^{*}{}'' = \underline{0}$

$$
\begin{aligned}
\text{Or } \underline{x}_c^{*}{}' &= \underline{x}_c' + \underline{\omega}\wedge(\underline{x}_0 - \underline{x}_c) + (\underline{\omega} + \varphi'\,\underline{e})\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_0)\\
\underline{x}_c^{*}{}'' &= \underline{x}_c'' + \underline{\omega}'\wedge(\underline{x}_0 - \underline{x}_c) + \underline{\omega}\wedge[\underline{\omega}\wedge(\underline{x}_0 - \underline{x}_c)] + (\underline{\omega}' + \cancel{\varphi''\,\underline{e}} + \varphi'\,\underline{\omega}\wedge\underline{e})\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_0)\\
&\quad + (\underline{\omega} + \varphi'\,\underline{e})\wedge[(\underline{\omega} + \cancel{\varphi'\,\underline{e}})\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_0)] \qquad \text{car } (\underline{x}_c^* - \underline{x}_0) \propto \underline{e}\\
&= \underline{x}_c'' + \underline{\omega}'\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c) + \underline{\omega}\wedge[\underline{\omega}\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c)] + \varphi'\,(\underline{\omega}\wedge\underline{e})\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_0)\\
&\quad + \varphi'\,\underline{e}\wedge[\underline{\omega}\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_0)] \qquad \text{car } (\underline{x}_c^* - \underline{x}_0) \propto \underline{e}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Or, } \varphi'\,(\underline{\omega}\wedge\underline{e})\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_0) &= \varphi'\,\|\underline{x}_c^* - \underline{x}_0\|\,(\underline{\omega}\wedge\underline{e})\wedge\underline{e}\\
&= -\varphi'\,\|\underline{x}_c^* - \underline{x}_0\|\,\underline{e}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{e})\\
&= -\varphi'\,\underline{e}\wedge[\underline{\omega}\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_0)] \qquad \text{et les deux termes se compensent.}
\end{aligned}
$$

$$\underline{x}_c^{*}{}'' = \underline{x}_c'' + \underline{\omega}'\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c) + \underline{\omega}\wedge[\underline{\omega}\wedge(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c)] \qquad \text{qui ne dépend pas de } \varphi.$$

   Finalement,

$$\ddot{\underline{x}}_c = -\frac{m^*}{m+m^*}\left\{\dot{\underline{\omega}}\wedge\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right) + \underline{\omega}\wedge\left[\underline{\omega}\wedge\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right)\right]\right\}$$

$$\underline{\underline{J}}_c\left(\dot{\underline{\omega}}\right) + \underline{\omega}\wedge\underline{\underline{J}}_c\left(\underline{\omega}\right) + \underline{\underline{J}}_c^*\left(\dot{\underline{\omega}}^*\right) + \underline{\omega}^*\wedge\underline{\underline{J}}_c^*\left(\underline{\omega}^*\right) = \left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right)\wedge m\,\ddot{\underline{x}}_c$$

   (2) + (4) :

$$= -\frac{m\,m^*}{m+m^*}\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right)\wedge\left[\dot{\underline{\omega}}\wedge\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right)\right] - \frac{m\,m^*}{m+m^*}\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right)\wedge\left\{\underline{\omega}\wedge\left[\underline{\omega}\wedge\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{= -\frac{m\,m^*}{m+m^*}\left\{\left\|\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right\|^2\dot{\underline{\omega}} - \left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c,\dot{\underline{\omega}}\right)\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right) + \left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c,\underline{\omega}\right)\left(\underline{x}_c^* - \underline{x}_c\right)\wedge\underline{\omega}\right\}} \quad \text{(I)}$$

Cette équation est une équation (intégro-)différentielle en $\underline{\omega}$, $(\underline{x}_c{}^* - \underline{x}_c)$ ne dépendant également que de la rotation de Ω : $\underline{x}_c{}^* - \underline{x}_c = \underline{\underline{R}}_\Omega(\underline{p}_c{}^* - \underline{p}_c)$

((4),$\underline{e}$) $(\underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega}^{*\prime}) + \underline{\omega}^* \wedge \underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega}^*),\underline{e}) = c^* - ((\underline{x}_0 - \underline{x}_c{}^*)\wedge \underline{F},\underline{e})$ où $(\underline{x}_0 - \underline{x}_c{}^*) \propto \underline{e}$

Or $(\underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega}^{*\prime}) + \underline{\omega}^* \wedge \underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega}^*),\underline{e})$

$$= (\underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega}' + \varphi'' \, \underline{e} + \varphi' \, \underline{\omega}\wedge\underline{e}) + (\underline{\omega} + \varphi' \, \underline{e})\wedge\underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega} + \varphi' \, \underline{e}),\underline{e})$$

$$(\underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega}' + \varphi'' \, \underline{e} + \varphi' \, \underline{\omega}\wedge\underline{e}) + \underline{\omega}\wedge\underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega} + \varphi' \, \underline{e}),\underline{e}) = c^* \qquad \text{(II)}$$

Cette équation permet de déterminer φ en fonction de $\underline{\omega}$, déjà déterminé grâce à (I).

6. $\underline{\underline{J}}_c{}^* = (j_e{}^* - j^*)\, \underline{e}\otimes\underline{e} + j^* \, \underline{\underline{I}}$

(II) devient :

$$c^* = ((j_e{}^* - j^*)\, (\underline{\omega}',\underline{e})\, \underline{e} + j^* \, \underline{\omega}' + \cancel{\varphi''}\, j_e{}^* \, \underline{e} + \varphi' \, j^* \, \underline{\omega}\wedge\underline{e}$$
$$+ (j_e{}^* - j^*)\, (\underline{\omega},\underline{e})\, \underline{\omega}\wedge\underline{e} + j^* \, \underline{\omega}\wedge\underline{\omega} + \varphi' \, j_e{}^* \, \underline{\omega}\wedge\underline{e},\underline{e})$$

$$\boxed{c^* = j_e{}^* \, (\underline{\omega}',\underline{e})} \qquad \text{(II bis)}$$

Reprenons l'éqn. (I). Le 1er membre devient :

$$\underline{\underline{J}}_c(\dot{\underline{\omega}}) + \underline{\omega}\wedge\underline{\underline{J}}_c(\underline{\omega}) + \underline{\underline{J}}_c{}^*(\dot{\underline{\omega}} + \ddot{\varphi}\,\underline{e} + \dot{\varphi}\,\underline{\omega}\wedge\underline{e}) + (\underline{\omega} + \dot{\varphi}\,\underline{e})\wedge\underline{\underline{J}}_c{}^*(\underline{\omega} + \dot{\varphi}\,\underline{e})$$

$$= \underline{\underline{J}}_c\left[\dot{\underline{\omega}}^\perp + (\dot{\underline{\omega}},\underline{e})\underline{e}\right] + \left[\underline{\omega}^\perp + (\underline{\omega},\underline{e})\underline{e}\right]\wedge\underline{\underline{J}}_c\left[\underline{\omega}^\perp + (\underline{\omega},\underline{e})\underline{e}\right] + \underline{\underline{J}}_c{}^*\left[\dot{\underline{\omega}}^\perp + \dot{\varphi}\,\underline{\omega}\wedge\underline{e} + (\dot{\underline{\omega}},\underline{e})\underline{e}\right]$$
$$+ \left(\underline{\omega}^\perp + (\underline{\omega},\underline{e})\underline{e} + \dot{\varphi}\,\underline{e}\right)\wedge\underline{\underline{J}}_c{}^*\left[\underline{\omega}^\perp + (\underline{\omega},\underline{e})\underline{e} + \dot{\varphi}\,\underline{e}\right]$$

$$= j\,\dot{\underline{\omega}}^\perp + \frac{j_e}{j_e^*}c^*\,\underline{e} + \left[\underline{\omega}^\perp + (\underline{\omega},\underline{e})\underline{e}\right]\wedge\left[j\,\underline{\omega}^\perp + j_e(\underline{\omega},\underline{e})\underline{e}\right] + j^*\,\dot{\underline{\omega}}^\perp + j^*\,\dot{\varphi}\,\underline{\omega}\wedge\underline{e} + c^*\,\underline{e}$$
$$+ \left(\underline{\omega}^\perp + (\underline{\omega},\underline{e})\underline{e} + \dot{\varphi}\,\underline{e}\right)\wedge\left[j^*\,\underline{\omega}^\perp + j_e^*(\underline{\omega},\underline{e})\underline{e} + j_e^*\,\dot{\varphi}\,\underline{e}\right]$$

$$= (j + j^*)\,\dot{\underline{\omega}}^\perp + \left(\frac{j_e}{j_e^*} + 1\right)c^*\,\underline{e} + \left[(j_e + j_e^* - j - j^*)(\underline{\omega},\underline{e}) + j_e^*\,\dot{\varphi}\right]\underline{\omega}\wedge\underline{e}$$

(I) devient alors :

$$(j + j^*)\,\dot{\underline{\omega}}^\perp + \left(\frac{j_e}{j_e^*} + 1\right)c^*\,\underline{e} + \left[(j_e + j_e^* - j - j^*)(\underline{\omega},\underline{e}) + j_e^*\,\dot{\varphi}\right]\underline{\omega}\wedge\underline{e}$$

$$= -\frac{m\,m^*}{m + m^*}\left\{\|\underline{x}_c{}^* - \underline{x}_c\|^2\,\dot{\underline{\omega}} - (\underline{x}_c{}^* - \underline{x}_c,\dot{\underline{\omega}})(\underline{x}_c{}^* - \underline{x}_c) + (\underline{x}_c{}^* - \underline{x}_c,\underline{\omega})(\underline{x}_c{}^* - \underline{x}_c)\wedge\underline{\omega}\right\}$$

Si $\varphi' \gg \|\underline{\omega}\|$, tous les termes en ω' ou en ω^2 et $\perp\underline{e}$ sont négligeables devant le terme :

$j_e{}^* \, \varphi' \, \underline{\omega}\wedge\underline{e} \approx \underline{\mathbf{0}}$ $\underline{\omega} \,//\, \underline{e}$

Et en l'absence de couple moteur ($c^* = 0$), d'après (II bis) : $\|\underline{\omega}\|$ reste constant