1. Методы решения транспортных задач

1.1. Постановка задачи

В общей постановке транспортная задача состоит в отыскании оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в количествах $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$ n потребителям $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в количествах $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n$. Известны стоимости c_{ij} перевозок единицы груза из A_i пункта отправления в B_j пункт назначения. Обозначим общее количество имеющегося в наличие груза $a = a_1 +\ a_2 + \ldots +\ a_m$, а потребности в грузе – $b = b_1 +\ b_2 +\ \ldots +\ b_n$. В зависимости от значений a и b различают два типа транспортных задач [1]:

1) если $a = b$, имеем закрытую модель или модель удовлетворяющую условию баланса. В этой модели суммарный объем груза у поставщиков равен суммарному спросу потребителей;

2) если $a \neq b$ – открытую модель или модель с нарушенным балансом. Здесь различают два случая:

a) Транспортная задача с избытком: $a > b$ – суммарные запасы груза у поставщиков превышают суммарный спрос потребителей;

b) Транспортная задача с недостатком: $a < b$ – суммарные запасы груза у поставщиков меньше суммарного спроса потребителей;

Для решения открытых транспортных задач приходится прибегать к искусственным приемам, позволяющим свести их к закрытым задачам. Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Тогда условие задачи возможно записать в виде таблицы 1.

Таблица 1.

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	$a = b$

Математически задачу можно сформулировать следующим образом.

Определить переменные x_{ij}, которые минимизируют суммарную стоимость перевозок

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

и удовлетворяют системе ограничений [1]

a) $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i,\ i = 1,2,\dots,m$ – с каждого пункта отправления груз должен быть вывезен полностью;

b) $x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = b_j,\ j = 1,2,\dots,n$ – потребитель должен получить ровно столько, сколько ему требуется;

c) $x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n.$

Остановимся на решении закрытой транспортной задачи. Решение состоит в переходе от одного распределения поставок к другому. Каждое новое распределение поставок должно снижать или по крайней мере не увеличивать общую величину затрат на перевозки. Перераспределение поставок должно осуществляться до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

1.2. Методы нахождения начального опорного решения

Чтобы осуществить переход от одного распределения поставок к другому, нужно иметь исходное распределение поставок или первоначальных планов.

а) Метод северо-западного угла

В этом методе, прежде всего, заполняются клетки первой горизонтальной строки, начиная с левой верхней клетки («северо-западного угла таблицы»), пока не будут исчерпаны запасы a_1 (рис.1).

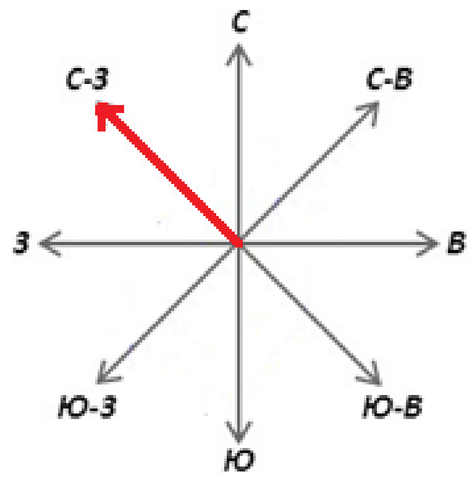

Рис.1. Северо-западное направление

Затем заполняют клетки второй строки, начиная с той, которая имеет номер, аналогичный номеру последней заполненной клетки первой горизонтальной строки до полного исчерпывания запасов a_2 и т.д. [2]

Пример 1. Найти опорный план перевозок транспортной задачи (табл.2) методом северо-западного угла.

Таблица 2

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	6	5	1	100
A_2	1 100	4 200	3	2	300
A_3	4	3 200	1 100	2 200	500
Потребности	200	400	100	200	900

Заполним таблицу перевозками постепенно, начиная с левой верхней клетки (1,1).Рассуждаем следующим образом. Пункт B_1 подал заявку на 200 единиц груза. Удовлетворим эту заявку за счет запаса 100 имеющегося в пункте A_1 и запишем перевозку 100 в клетке (1,1) (табл.2). При этом запас пункта A_1 будет полностью исчерпан. В составе заявки пункта B_1 остались неудовлетворенными 100 единиц. Эти 100 единиц покроем за счет пункта A_2 – клетка (2,1). Оставшиеся 200 единиц пункта A_2 выделим пункту B_2 – клетка (2,2). Недостаток заявки пункта B_2 в 200 единиц покроем за счет пункта A_3. Из оставшихся 300 единиц пункта A_3 100 выделим пункту B_3, оставшиеся 200 пункту B_4. На этом распределение запасов закончено [2].

Полученное решение является опорным решением транспортной задачи. Общая стоимость перевозок составляет

$$f_0 = 3 \times 100 + 1 \times 100 + 4 \times 200 + 3 \times 200 + 1 \times 100 + 2 \times 200 = 2300 \text{ (ед.)}$$

Составленный план перевозок, не является оптимальным по стоимости, так как при его построении не учитывались стоимости перевозок c_{ij}.

Замечание. Если в опорном плане число заполненных клеток равно $m + n - 1$, то план называется невырожденным, а если меньше – то вырожденным.

Обычно применение метода северо-западного угла дает сразу невырожденный опорный план. Так в нашем примере число заполненных клеток в табл.2 равно в точности $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

b) Метод минимальной стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимости c_{ij} выбирают наименьшую, и в клетку которая ей соответствует, помещают меньшие числа из a_i и b_j. Затем из рассмотрения мысленно исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшийся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены [3].

Пример 2. Найти опорный план перевозок примера 1 методом минимальной стоимости.

Наименьшую стоимость перевозки имеют клетки (A_1, B_4), (A_2, B_1) и (A_3, B_3). Впишем в эти клетки, сравнивая запасы в пунктах A_1, A_2, A_3 и потребности пунктов B_1, B_3, B_4 соответствующие поставки $x_{14} = 100$, $x_{21} = 200$, $x_{33} = 100$. Мысленно исключим из таблицы строку A_1, так как запас A_1 полностью исчерпан и столбцы B_1 и B_3, так как потребности этих пунктов полностью удовлетворены (табл.3 – синий цвет).

Таблица 3

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	6	5	1 100	100
A_2	1 200	4	3	2 100	300
A_3	4	3 400	1 100	2	500
Потребности	200	400	100	200	900

В оставшейся таблице наименьшей является стоимость равная двум, расположенная в клетках (A_2, B_4) и (A_3, B_4). Заполняем любую из них, например (A_2, B_4). Сравнивая остаток запаса A_2, равный 100, и неудовлетворительную потребность B_4, равную 100, запишем в клетку (A_2, B_4) поставку $x_{24} = 100$. Исключим из дальнейшего рассмотрения строку A_2 и столбец B_4, так как запас A_2 исчерпан и потребность B_4 удовлетворена. В последнюю оставшуюся клетку (A_3, B_2) запишем поставку $x_{32} = 400$. В результате получим табл.2.

Общая стоимость перевозок груза составляет

$$f_0 = 1 \times 200 + 3 \times 400 + 1 \times 100 + 1 \times 100 + 2 \times 100 = 1800 \text{ (ед.)}$$

Опорный план, составленный способом минимальной стоимости, более близок к оптимальному решению. Так, в нашем примере общие затраты на транспортировку по плану, составленного методом северо-западного угла $f_0 = 2300$ (ед.), а методом минимальной стоимости $f_0 = 1800$ (ед.).

Необходимо отметить, что метод минимальной стоимости имеет свои недостатки. Например, в нашей задаче полученный опорный план (табл.3) является вырожденным, так как число заполненных клеток равно $5 < m + n - 1 = 6$.

1.3. Метод потенциалов

Метод потенциалов является модификацией симплекс-метода решения задачи линейного программирования применительно к транспортной задаче. Он позволяет, отправляясь от некоторого опорного решения, получить оптимальное решение за конечное число итераций [4].

Алгоритм метода потенциалов состоит в следующем. После построения опорного плана все переменные транспортной задачи разбиваются на две группы:

x_{kl} – базисные переменные (заполненные клетки);

x_{ij} – свободные переменные (незаполненные клетки).

Функция стоимости перевозок выражается через свободные переменные следующим образом:

$$f_{t+1} = f_t + \sum \Delta_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

здесь t – номер итерации ($t = 0, 1, \ldots$)

Для нахождения коэффициентов Δ_{ij} каждому пункту отправления A_i ставиться величина u_i, $(i = \overline{1, m})$, которая называется потенциалом пункта A_i и каждому пункту B_j ставиться величина v_j, $(j = \overline{1, n})$ – потенциал пункта B_j.

Для каждой заполненной клетки составляется уравнение $u_k + v_l =$

c_{kl}, c_{kl} – стоимость перевозки единицы груза из пункта A_k в пункт B_l.

Так как всех потенциалов u_k и v_l – $m+n$, а заполненных клеток $m+n-1$, то необходимо решить неопределенную систему из $m+n-1$ уравнений $u_k+v_l=c_{kl}$ с $m+n$ неизвестными. Одному из этих неизвестных можно дать произвольное значение, и тогда $m+n-1$ неизвестных определяются однозначно.

Далее для каждой заполненной клетки находим относительные оценки [4]

$$\Delta_{ij}= c_{ij}-(u_i+v_j)$$

Если все величины Δ_{ij} будут неотрицательны, то исходное решение является оптимальным.

Если среди величин Δ_{ij} есть отрицательные, то значение целевой функции (1) может быть уменьшено путем перехода к новому базису. Для этого рассматривают свободные клетки, для которых $\Delta_{ij}< 0$ и среди данных чисел выбирают минимальное. Клетку, которой это число соответствует, следует заполнить. Заполняя выбранную клетку, необходимо перераспределить объемы поставок, записанных в ряде других занятых клеток и связанных так называемым циклом.

Циклом в таблице транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое – в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами.

Условимся отмечать знаком « $+$ » те вершины цикла, в которых перевозки необходимо увеличить, а знаком « $-$ » – те вершины, в которых перевозки необходимо уменьшить. Цикл с отмеченными вершинами будем называть означенным. Перенести какое-то количество единиц груза по означенному циклу – это значит увеличить перевозки, стоящие в положительных вершинах цикла, на это количество единиц, а перевозки, стоящие в отрицательных вершинах уменьшить на тоже количество. Очевидно, при переносе любого числа единиц по циклу равновесие между запасами и заявками не меняется: по-прежнему сумма перевозок в каждой строке равна запасам этой строки, а сумма перевозок в каждом столбце – заявке этого столбца [2].

Полученный новый опорный план транспортной задачи снова проверяют на оптимальность.

Алгоритм метода потенциалов рассмотрим на следующем примере транспортной задачи.

Пример 3. Составить план перевозок грузов с наименьшей стоимостью до трех поставщиков A_i $(i = 1,2,3)$ соответственно в количествах 100, 400 и 600 ед. к четырем потребителям $B_j (j = 1,2,3,4)$ соответственно в количествах 300, 500, 100 и 200 ед. Стоимости перевозок единицы груза приведены в табл. 4.

Таблица 4

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	6	5	1	100
A_2	1	4	3	2	400
A_3	4	3	1	2	600
Потребности	300	500	100	200	1100

1. *Определение исходного плана перевозок*

Для составления исходного плана перевозок используем метод северо-западного угла (табл. 5). Общее число базисных клеток равно $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Таблица 5

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3 100	6	5	1	100
A_2	1 200	4 200	3	2	400
A_3	4	3 300	1 100	2 200	600
Потребности	300	500	100	200	1100

Стоимость перевозок по этому плану

$$f_0 = 3 \times 100 + 1 \times 200 + 4 \times 200 + 3 \times 300 + 1 \times 100 + 2 \times 200 = 2700 \text{ (ед.)}$$

2. *Исследование базисного решения на оптимальность.*

2.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных. Для их нахождения используем условие $u_i + v_j = c_{ij}$.

$$u_1 + v_1 = 3,\ u_2 + v_1 = 1, u_2 + v_2 = 4, u_3 + v_2 = 3, u_3 + v_3 = 1, u_3 + v_4 = 2.$$

Полагая, например, $u_1 = 0$, найдем

$u_1 = 0, u_2 = -2, u_3 = -3, v_1 = 3, v_2 = 6, v_3 = 4, v_4 = 5.$

2.2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 6 - 6 = 0,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - 4 = 1,$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 1 - 5 = -4,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - 2 = 1,$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 2 - 3 = -1,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - 0 = 4.$$

Таблица 6

		$v_1 = 3$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	$v_4 = 5$	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	-3 100	6	5	λ 1 +	100
$u_2 = -2$	A_2	+ 1 200	4 200 −	3	2	400
$u_3 = -3$	A_3	4	3 300 +	1 100	-2 200	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

Условие оптимальности плана перевозок $\Delta_{ij} \geq 0$ не выполняется, поэтому построим замкнутый цикл пересчета и определим величины перераспределения груза [2].

3. Определение нового базисного решения

Минимальной размерностью является $\Delta_{14} = -4$ для клетки (1,4). Отрицательная оценка Δ_{14} показывает, что при включении в данную свободную клетку (она выделена цветом) каждой единицы груза общая стоимость уменьшится на 4 единицы. Для определения количества груза λ подлежащего распределению, построим замкнутый цикл (указан стрелками). Одна из вершин цикла находится в незанятой клетке (1,4), которую отмечаем знаком « + ». Все остальные вершины цикла находятся в базисных клетках, с чередующимися знаками « $-$ » и « $+$ ». Найдем $\lambda = \min(100, 200,200) = 100$, равное наименьшему из чисел, стоящих в отрицательных вершинах цикла. Значение λ записываем в незанятую клетку. Двигаясь далее по означенному циклу, вычитаем λ из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые обозначены знаком « $-$ », и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком « $+$ ». Элементы таблицы, не входящие в цикл, остаются без изменений. В результате получаем новую табл. 7.

Таблица 7

		$v_1 = 3$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	$v_4 = 5$	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	3	6	5	1 100	100
$u_2 = -2$	A_2	1 300	4 100	3	2	400
$u_3 = -3$	A_3	4	3 400	1 100	2 100	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

Стоимость перевозок по этому плану $f_1 = f_0 + \Delta_{14}\lambda = 2700 - 4 \times 100 = 2300$ (ед.)

4. *Исследование базисного решения на оптимальность*

4.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных. Для их нахождения используем условие $u_i + v_j = c_{ij}$.

$$u_1 + v_4 = 1,\ u_2 + v_1 = 1, u_2 + v_2 = 4, u_3 + v_2 = 3, u_3 + v_3 = 1, u_3 + v_4 = 2.$$

Полагая, например, $u_1 = 0$, найдем

$u_1 = 0, u_2 = 2, u_3 = 1, v_1 = -1, v_2 = 2, v_3 = 0, v_4 = 1.$

4.2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 3 + 1 = 4,$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 6 - 2 = 4,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - 5 = 0,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - 2 = 1,$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 2 - 3 = -1,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - 0 = 4.$$

Условие оптимальности плана перевозок $\Delta_{ij} \geq 0$ не выполняется, так как одна из оценок $\Delta_{24} = -1$ отрицательна.

Составим новую таблицу 8.

Таблица 8

		$v_1 = -1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 1$	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	3	6	5	1 100	100
$u_2 = 2$	A_2	1 300	− 4 100	3	+2 λ	400
$u_3 = 1$	A_3	4	+ 3 400	1 100	−2 100	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

5. *Определение нового базисного решения*

Построим цикл пересчета для свободной клетки $(2{,}4)$ (она выделена цветом), для которой не выполняется неравенство, и перераспределим поставки согласно этому означенному циклу, аналогично п.3 (предыдущий цикл).

В клетку $(2{,}4)$ поместим груз $\lambda = \min(100, 100) = 100$.

Замечание. Так как одновременно в двух вершинах цикла $(2, 2)$ и $(3, 4)$ поставки становятся равными нулю, то лишь одну из них можно объявить свободной, например, $(2, 2)$, а другая $(3, 4)$ остается базисной с нулевой поставкой. Этим сохраняется количество базисных клеток $m + n - 1 = 6$. После преобразований получаем новый план перевозок (табл. 9)

Таблица 9

		$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 1$	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	3	6	5	1 100	100
$u_2 = 1$	A_2	1 300	4	3	2 100	400
$u_3 = 1$	A_3	4	3 500	1 100	2 0	600
	Потребности	300	500	100	200	1100

Стоимость перевозок по новому плану $f_2 = f_2 + \Delta_{24}\lambda = 2300 - 1 \times$

$100 = 2200$ (ед.)

6. Исследование базисного решения на оптимальность

6.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных (табл.9).

$$u_1 + v_4 = 1,\ u_2 + v_1 = 1,$$
$$u_2 + v_4 = 2,$$
$$u_3 + v_2 = 3,$$
$$u_3 + v_3 = 1,$$
$$u_3 + v_4 = 2.$$

Полагая, например, $u_1 = 0$, найдем

$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 1, v_1 = 0, v_2 = 2, v_3 = 0, v_4 = 1.$

6.2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 3 - 0 = 3,$$
$$\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 6 - 2 = 4,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - 0 = 5,$$
$$\Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 4 - 3 = 1,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - 1 = 2,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 4 - 1 = 3.$$

Так как для всех свободных клеток табл. 9 неравенство $\Delta_{ij} \geq 0$ выполняется, то полученное решение

$$x_{14} = 100, x_{21} = 300,\ x_{24} = 100,\ x_{32} = 500,\ x_{33} = 100$$
$$x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{22} = x_{23} = x_{31} = x_{34} = 0$$

При таком плане перевозок затраты на перевозку будут наименьшими и составят

$$f_{min} = f_2 = 2200(\text{ед.})$$

1.4. Задачи с нарушенным балансом

Рассмотрим транспортные задачи, для которых выполняется одно из следующих условий.

а) Транспортная задача с избытком запасов

Транспортную задачу такого типа можно свести к закрытой модели, если ввести фиктивный пункт назначения B_{n+1}, которому требуется $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ единиц груза. Стоимость перевозок между фиктивным пунктом назначения и пунктом отправления принимаются равными нулю [2].

Пример 3. Решим транспортную задачу (табл. 10).

Таблица 10

Пункты	B_1	B_2	B_3	Запасы
A_1	6	4	5	500
A_2	8	3	2	300
A_3	7	5	6	500
A_4	5	2	2	200
Потребности	300	400	300	$1000 < 1500$

Модель задачи открытая. У поставщиков имеется $1500 - 1000 = 500$ единиц лишнего груза, который запланируем фиктивному потребителю B_4. Из табл. 10 видно, что получилась закрытая транспортная задача (табл.11). Решим ее методом потенциалов.

Таблица 11

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	6	4	5	0	500
A_2	8	3	2	0	300
A_3	7	5	6	0	500
A_4	5	2	2	0	200
Потребности	300	400	300	500	1500

1. *Определение исходного плана перевозок*

Для составления исходного плана перевозок используем метод северо-западного угла (табл. 12). Общее число базисных клеток равно $m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$.

Таблица 12

		$v_1 = 6$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = -3$	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	6 300	4 200	5	0	500
$u_2 = -1$	A_2	8	− 3 200	+ 2 100	0	300
$u_3 = 3$	A_3	7	5	− 6 200	+ 0 300	500
$u_4 = 3$	A_4	5	+ 2 λ	2	− 0 200	200
	Потребности	300	400	300	500	1500

Стоимость перевозок по этому плану

$$f_0 = 6 \times 300 + 4 \times 200 + 3 \times 200 + 2 \times 100 + 6 \times 200 + 0 \times 300 + 0 \times 200 = 4600 \text{ (ед.)}$$

2. Исследование базисного решения на оптимальность

2.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных. Для их нахождения используем условие $u_i + v_j = c_{ij}$.

$$u_1 + v_1 = 6,\ u_1 + v_2 = 4, u_2 + v_2 = 3, u_2 + v_3 = 2, u_3 + v_3 = 6, u_3 + v_4 = 0$$
$$u_4 + v_4 = 0$$

Полагая, например, $u_1 = 0$, найдем

$u_1 = 0, u_2 = -1, u_3 = 3, u_4 = 3, v_1 = 6, v_2 = 4, v_3 = 3, v_4 = -3.$

2.2. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - 3 = 2,$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 0 + 3 = 3,$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 8 - 5 = 3,$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 0 + 4 = 4,$$
$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 7 - 9 = -2,$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - 7 = -2,$$
$$\Delta_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 5 - 7 = -2,$$
$$\Delta_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 2 - 7 = -5.$$

Условие оптимальности плана перевозок $\Delta_{ij} \geq 0$ не выполняется, поэтому посмотрим замкнутый цикл пересчета и определим величины перераспределения груза.

3. Определение нового базисного решения

Минимальной разностью является $\Delta_{42} = -5$ для клетки (4,2) (выделена цветом). Отрицательная оценка Δ_{42} показывает, что при включении в данную свободную клетку каждой единицы груза стоимость уменьшится на 5 единиц. Для определения количества груза λ подлежащего распределению, построим замкнутый цикл (указан стрелками в табл. 12). Среди поставок имеющих «$-$», находим наименьшую стоимость. Она равна 200. В результате перерасчета в трех клетках (A_2, B_2), (A_3, B_3) и (A_4, B_4) поставки стали равными нулю. Однако лишь одну из клеток, например (A_4, B_4), мы объявим свободной, а две другие (A_2, B_2), (A_3, B_3) оставим базисными с нулевыми поставками (табл. 13 нулевые поставки выделены жирным шрифтом) [2].

Таблица 13

Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	6 300	4 200	5	0	500
A_2	8	3 **0**	2 300	0	300
A_3	7	5	6 **0**	0 500	500
A_4	5	2 200	2	0	200
Потребности	300	400	300	500	1500

Этим сохраняется равенство количества базисных клеток $m + n - 1 = 7$. В результате перераспределения груза получаем план перевозок (табл. 13).

Стоимость перевозок по этому плану $f_1 = f_0 + \Delta_{42}\lambda = 4600 - 5 \times 200 = 3600 \text{ (ед.)}$

Следующие две итерации происходят к перераспределению базисных нулевых поставок при неизменном значении целевой функции $f_1 = 3600 \text{ (ед.)}$. На первой итерации нулевая поставка перемещается в клетку (A_3, B_2), на второй – в клетку (A_4, B_3). В результате получим следующий план перевозок (табл. 14).

Таблица 14

		$v_1 = 6$	$v_2 = 4$	$v_3 = 4$	$v_4 = -1$	
	Пункты	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = 0$	A_1	6 300	4 200	5	0	500
$u_2 = -2$	A_2	8	3	2 300	0	300
$u_3 = 1$	A_3	7	5 0	6	0 500	500
$u_4 = -2$	A_4	5	2 200	2 0	0	200
	Потребности	300	400	300	500	1500

4 *Исследование базисного решения на оптимальность*

4.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных (табл.14).

$$u_1+v_1=6,\ u_1+v_2=4, u_2+v_3=2, u_3+v_2=5, u_3+v_4=0, u_4+v_2=2,$$

$$u_4+v_3=2$$

Полагая, например, $u_1=0$, найдем

$u_1=0, u_2=-2, u_3=1, u_4=-2, v_1=6, v_2=4, v_3=4, v_4=-1.$

1.1. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{13}= c_{13}-(u_1+v_3)=5-4=1,$$
$$\Delta_{14}= c_{14}-(u_1+v_4)=0+1=1,$$
$$\Delta_{21}= c_{21}-(u_2+v_1)=8-4=4,$$
$$\Delta_{22}= c_{22}-(u_2+v_2)=3-2=2,$$
$$\Delta_{24}= c_{24}-(u_2+v_4)=0+3=3,$$
$$\Delta_{31}= c_{31}-(u_3+v_1)=7-7=0,$$
$$\Delta_{41}= c_{41}-(u_4+v_1)=5-4=1,$$
$$\Delta_{44}= c_{44}-(u_4+v_4)=0+3=3.$$

Так как для всех свободных клеток табл. 14 неравенство $\Delta_{ij}\geq 0$ выполняется, то полученное решение

$$x_{11}=300, x_{12}=200,\ x_{23}=300,\ x_{34}=500$$

все остальные неизвестные равны нулю, будет оптимальным.

При таком плане перевозок затраты на перевозку будут наименьшими и составят

$$f_{min}=f_2=3600(\text{ед.})$$

b) *Транспортная задача с недостатком запасов*

Транспортную задачу такого типа можно свести к закрытой модели, если ввести фиктивный пункт отправления A_{m+1}, которому требуется $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i$ единиц груза. Стоимость перевозок между фиктивным пунктом отправления и пунктом назначения принимаются равными нулю [2].

Пример 4. Решим транспортную задачу (табл. 15)

Таблица 15

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	1	2	10
A_2	3	4	20
Потребности	25	15	40/30

Модель задачи открытая. У поставщиков не хватает $40-30=10$ единиц груза, которые запланируем фиктивному поставщику A_3. Из табл. 16 видно, что получилась закрытая задача. Решим ее методом потенциалов.

Таблица 16

Пункты	B_1	B_2	Запасы
A_1	1	2	10
A_2	3	4	20
A_3	0	0	10
Потребности	25	15	40

1. *Определение исходного плана перевозок*

Для составления исходного плана перевозок используем метод северо-западного угла (табл. 17). Общее число базисных клеток равно $m+n-1=4$.

Таблица 17

		$v_1=1$	$v_2=2$	
	Пункты	B_1	B_2	Запасы
$u_1=0$	A_1	1 10	2	10
$u_2=2$	A_2	3 15	4 5	20
$u_3=-1$	A_3	0	0 10	10
	Потребности	25	15	40

Стоимость перевозок по этому плану

$$f_0 = 1\times 10 + 3\times 15 + 4\times 5 + 0\times 10 = 75 \text{ (ед.)}$$

2 *Исследование базисного решения на оптимальность*

2.1. Вычислим потенциалы u_i и v_j исходя из базисных переменных. Для их нахождения используем условие $u_i+v_j=c_{ij}$.

$$u_1+v_1=1,\ u_2+v_1=3, u_2+v_2=4, u_3+v_2=0$$

Полагая, например, $u_1=0$, найдем

$u_1=0, u_2=2, u_3=-2, v_1=1, v_2=2.$

2.1. Для каждой свободной клетки вычислим относительные оценки:

$$\Delta_{12}= c_{12}-(u_1+v_2)=2-(0+2)=0,$$

$$\Delta_{31}= c_{31}-(u_3+v_1)=0-(-2+1)=1,$$

Так как для всех свободных клеток табл. 17 неравенство $\Delta_{ij} \geq 0$ выполняется, то полученное решение

$$x_{11} = 10, x_{12} = 0,\ x_{21} = 15,\ x_{22} = 5$$

будет оптимальным.

При таком плане перевозок затраты на перевозку будут наименьшими и составят

$$f_{min} = f_0 = 75(\text{ед.})$$

2. Программная реализация транспортной задачи

Рассмотрим листинг кода программы для решения транспортной задачи на языке программирования Python.

```
def fut(r, col):  # Функция проверяет есть ли две связи у проверяемой вершины
    r_B = False
    c_B = False
    for val in range(z):
        if ('' != price_matrix[val][col] and val != r) or col == column:
            r_B = True
    for val in range(q):
        if ('' != price_matrix[r][val] and val != col) or r == row:
            c_B = True

    if c_B and r_B:
        return True
    else:
        return False

# Ввод данных
q = int(input("Введите количество потребителей: "))
Q = list(map(int, input("Введите сколько нужно товара для каждого потребителя через пробел: ").strip().split()))[:q]

z = int(input("Введите количество поставщиков: "))
Z = list(map(int, input("Введите сколько есть товара у каждого поставщика через пробел: ").strip().split()))[:z]
```