# ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

С каждой ЗЛП тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной. Тогда первоначальная задача называется исходной или прямой [7].

## Сущность прямой и двойственной задачи

Математические модели двойственных задач могут быть симметричными или несимметричными. В таблицах 4.1, 4.2 приведены их матричные формы записи.

*Таблица 4.1.* Симметричные задачи

| | Прямая | Двойственная |
|---|---|---|
| 1 | $f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to max$<br>$A\bar{x} \leq \bar{b}$<br>$\bar{x} \geq 0$ | $g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to min$<br>$A^T\bar{y} \ \geq \bar{c}$<br>$\bar{y} \geq 0$ |
| 2 | $f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to min$<br>$A\bar{x} \leq \bar{b}$<br>$\bar{x} \gg 0$ | $g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to max$<br>$A^T\bar{y} \ \leq \bar{c}$<br>$\bar{y} \geq 0$ |

В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие не отрицательности [3].

*Таблица 4.2.* Несимметричные задачи

| | Прямая | Двойственная |
|---|---|---|
| 1 | $f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to max$<br>$A\bar{x} = \bar{b}$<br>$\bar{x} \geq 0$ | $g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to min$<br>$A^T\bar{y} \ \geq \bar{c}$ |
| 2 | $f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to min$<br>$A\bar{x} = \bar{b}$<br>$\bar{x} \geq 0$ | $g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to max$<br>$A^T\bar{y} \ \leq \bar{c}$ |

В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а в двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными [3].

В таблицах 4.1, 4.2 введены следующие обозначения:

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор столбец неизвестных прямой задачи;

$\bar{\mathrm{c}} = (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \dots, \mathrm{c}_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции;

$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ – вектор столбец двойственных переменных;

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – вектор столбец правых частей системы ограничений;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы ограничений;

Т – операция транспонирования.

## Общие правила составления двойственных задач

При составлении двойственных задач используют следующие правила [4]:

1) Матрица из коэффициентов при переменных в прямой задаче и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга транспортированием.

2) Ограничения – неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

3) Если знаки неравенств в ограничениях прямой задачи «≤», то целевая функция должна $f(\bar{x})$ максимизироваться, если «≥» минимизироваться.

4) Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию не отрицательности, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

5) Целевая функция двойственной задачи $g(\bar{x})$ должна оптимизироваться противоположно целевой функции $f(\bar{x})$, т.е. $f(\bar{x}) \to max$, то $g(\bar{y}) \to min$, если $f(\bar{x}) \to min$, то $g(\bar{y}) \to max$.

Рассмотрим примеры построения двойных задач.

Дана прямая задача на максимум. Построить к ней двойственную задачу.

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Рассматриваемая задача относится к симметричным двойственным задачам на отыскание максимального значения целевой функции.

Используем общие правила составления двойственных задач. Так как в задаче на максимум ограничения неравенства должны иметь вид «≤», то умножим второе ограничение-неравенство на – 1 (см. правило 2). Исходная задача запишется в виде.

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \le -19, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Найдем соответствующую двойственную задачу (строка 1, таблица 4.1). Введем вектор двойственных переменных размерности 3 (по числу уравнений системы ограничений) $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$. Соответствующие векторы и матрица ограничений имеет вид:

$$\bar{c} = (1, -2, 5),\ \bar{b} = (18, -19, 20),\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Запишем двойственную задачу. Найти минимум функции

$$g(\bar{y}) = \left(\bar{b}, \bar{y}\right) = 18y_1 - 19y_2 + 20y_3 \to min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -2, \\ 4y_1 - 6y_2 - 3y_3 \geq 5, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Укажем еще один метод, позволяющий значительно облегчить процесс построения двойственных задач. Каждому ограничению прямой задачи поставим в соответствии двойственные переменные.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18 \\ -5x_1 + 3x_2 - 6x_3 \leq -19 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20 \end{cases} \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

В соответствии с общими правилами двойственная задача запишется в виде:

$$g(\bar{y}) = \left(\bar{b}, \bar{y}\right) = 18y_1 - 19y_2 + 20y_3 \to min,$$

Чтобы получить, например, первое ограничение двойственной задачи, надо найти сумму произведений элементов, стоящих в столбце $x_1$, на соответствующие двойственные переменные. Результат $2y_1 - 5y_2 + 2y_3$.

Считаем, что эта сумма не меньше $c_1 = 1$;

$$2y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 1.$$

Аналогично составляются и остальные ограничения двойственной задачи. Рассмотрим прямую задачу на минимум.

$$f(\bar{x}) = -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \geq 7, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Каждому ограничению прямой задачи поставим в соответствие двойственные переменные

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq \ \ 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \geq \ \ 7 \end{cases} \quad \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right.$$

Составим двойственную задачу:

$$g(\bar{y}) = 8y_1 - 10y_2 + 7y_3 \to max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 + 5y_3 \leq -3, \\ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3 \leq 4, \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -6, \\ y_1, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Переменная $y_2$, соответствующая ограничению равенству $-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$, может быть любого знака (см. правило 4).

## Первая теорема двойственности

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена не зависимо от другой. Связь задач заключается в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой. Взаимная симметрия прямой и двойственной задач определяет существование определенного соответствия между их оптимальными решениями. Эти соответствия устанавливают теоремы двойственности.

***Первая теорема двойственности***. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, причем экстремальные значения целевых функций равны [9]:

$$\max f(\bar{x}) = \min g(\bar{y}) \qquad (4.1)$$

Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых планов, то система ограничений другой задачи противоречива.

Если совокупность ограничений одной из двойственных задач противоречива, то либо функция цели другой задачи не ограничена на множестве допустимых решений, либо система ограничений другой задачи также противоречива.

Таким образом, экономическое содержание первой теоремы двойственности заключается в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем стоимость выпущенной продукции, полученной при реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадение значений целевых функций для соответствующих планов пары двойственных задач достаточно, чтобы эти планы были оптимальными. Оценки в этом случае выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают тем свойством, что они гарантируют рентабельность оптимального плана, т.е. равенство общей оценки продукции и ресурсов, и обусловливают убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального.

Проиллюстрируем первую теорему двойственности на примере задачи о максимальном доходе. Напомним ее условие:

Целевая функция.

$$\mathrm{f(x)} = 3\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \to \max \ [\text{тыс. руб./сутки}]$$

Ограничения.

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \le 6 \ [\text{т. ингр. А/сутки}] \\ 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \le 8 \ [\text{т. ингр. В/сутки}] \\ -\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \le 1 \ [\text{т. краски/сутки}] \\ \mathrm{x}_2 \le 2 \qquad [\text{т. краски/сутки}] \\ \mathrm{x}_1 \ge 0 \qquad [\text{т. краски/сутки}] \\ \mathrm{x}_2 \ge 0 \qquad [\text{т. краски/сутки}] \end{cases}$$

Составим математическую модель двойственной задачи. В качестве переменных двойственной задачи возьмем $y_1, y_2, y_3, y_4,$ представляющие собой условные оценки запасов сырья. Данная задача является симметричной, тогда двойственная задача в матричном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) \to min \\ A^T\bar{y} \ \ge \bar{c}, \\ \bar{y} \ge 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ – вектор двойственных переменных;

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица коэффициентов системы ограничений.

Раскрывая соотношения (4.2), можно сформулировать двойственную задачу так:

найти минимум целевой функции

$$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4$$

при следующих ограничениях

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 2 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

Ограничения означают, что суммарная оценка стоимость сырья, используемого на производство продукции, соответственно, А и В видов, была бы не меньше стоимости единицы продукции данного вида.

В ходе решения прямой задачи (подраздел 3.4) было определено: максимальный доход от продажи $f_{max} = (\overline{C_в}, \overline{A_0}) = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки], оптимальный план $\overline{x^*} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (10/3, 4/3, 0, 0, 3, 2/3)$.

Оптимальное решение двойственной задачи может быть получено из оптимального решения прямой задачи.

Так как прямая задача имеет решение, то на основании первой теоремы о двойственности задача также разрешима. Ее решение может быть найдено из формулы [9]

$$\overline{g^*} = \overline{C_B} \cdot D^{-1} \qquad (4.3)$$

где D – матрица, составленная из компонентов векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи.

В нашем примере в последней симплекс-таблице базисными переменными являются $x_2, x_1, x_5, x_{6.}$. Соответствующие этим переменным векторы $\overline{A_2}, \overline{A_1}, \overline{A_5}, \overline{A_6}$ в разложении (3.6) используются для формирования столбцов матрицы D

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$D = (\overline{A_2}, \overline{A_1}, \overline{A_5}, \overline{A_6}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Напомним, как вычислять обратную матрицу $D^{-1}$.

Для вычисления обратной матрицы $D^{-1}$ запишем матрицу $D$ дописав к ней справа единичную матрицу.

$$\left(\begin{array}{cccc||cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Для нахождения обратной матрицы $D^{-1}$ используем элементарные преобразования над строками матрицы. Таким образом, преобразуются левая часть полученной матрицы в единичную.

1-ую строку делим на 2;

$$\left(\begin{array}{cccc||cccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

от 2-ой, 3-ей и 4-ой строки отнимаем 1-ую строку;

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2-ую строку делим на $3/2$;

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

от 1-ой строки отнимаем 2-ую строку, умноженную на 0,5; к 3-ей строке добавляем 2-ую строку, умноженную на 3/2; к 4-ой строке добавляем 2-ую строку, умноженную на 1/2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Запишем обратную матрицу.

$$D^{-1} = (у_2^*, у_1^*, у_5^*, у_6^*) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Примечательно, что обратная матрица может быть найдена либо по правилам нахождения обратной матрицы, либо составлена из упорядоченной матрицы коэффициентов при базисных переменных $x_2$, $x_1$, $x_5, x_6$ последней симплекс-таблицы

В нашем примере в последней симплекс-таблице базисными переменными являются

Так как $\overline{С_B} = (2, 3, 0, 0)$, то

$$\overline{y^*} = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = \overline{С_B} \cdot D^{-1} = \left(\left(2 \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3}\right); \left(-2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3}\right); 0; 0\right) =$$
$$= (\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 0; 0)$$

При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$g_{min} = g\overline{(y^*)} = \left(\bar{b}, \overline{y^*}\right) = 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{4}{3} + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 12\frac{2}{3} \left[\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{сутки}}\right]$$

совпадает с максимальным значением $f_{max} = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки] прямой задачи, что является результатом взаимодвойственности.

Таким образом, условие 4.1 выполнено.

$$max\ f(\bar{x}) = min\ g(\bar{y}) = 12\frac{2}{3}[\text{тыс. руб./сутки}]$$

При этом запасы ингредиента А составляют $y_1 = 1/3$ [т. ингр. А/сутки], а ингредиента В составляют $y_2 = 4/3$ [т. ингр. В/сутки].

## Вторая теорема двойственности

Вторую теорему двойственности иногда называют теоремой о дополняющей нежесткости. Используя ее также можно прийти к решению двойственной задачи.

***Вторая теорема двойственности.*** Для того, чтобы планы $\overline{x^*} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и $\overline{y^*} = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ ЗЛП двойственной пары (таблицы 4.1 и 4.2) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы эти планы удовлетворяли условиям дополняющей нежесткости (4.4) и (4.5).

$$\{x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n} \tag{4.4}$$

$$\{y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0,\ i = \overline{1,m} \tag{4.5}$$

Эти условия можно сформулировать следующим образом [9]:

- Если какое-либо ограничение одной из задач с оптимальным решением обращается в строгое неравенство, то соответствующая этому ограничению переменная оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю.

$$если\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* > c_j,\ то\ x_j^* = 0 \tag{4.6}$$

- Если значение какой-либо переменной в оптимальном решении одной из задач положительно, то соответствующее ей ограничение в двойственной задаче оптимальным решением этой задачи должно обращаться в точное равенство.

$$если\ x_j^* > 0,\ то\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* = c_j \tag{4.7}$$

Условия (4.6) и (4.7) характеризуют производимый продукт с точки зрения рентабельности [9]:

- Если $j$-ый вид продукции включен в оптимальный план выпуска ($x_j^* > 0$), то стоимость затраченных на единицу этого продукта производственных факторов будет равна единице этого продукта. Следовательно, производство этого продукта рентабельно.
- Если производство $j$-ого вида продукции не рентабельно (затраты ресурсов на производство единицы продукта превышают его стоимость), то этот продукт не включен в оптимальный план ($x_j^* = 0$).

Также условия (4.8) и (4.9) характеризуют используемые факторы производства с точки зрения их дефицитности:

- Если оценка $i$-ого фактора положительна ($y_i^* > 0$), то весь его запас полностью используется в оптимальном плане производства, т.е. этот фактор является «дефицитным».

$$\textit{если } y_i^* > 0, \textit{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \qquad (4.8)$$

- Если $i$-ый фактор в процессе производства используется не полностью, т.е. этот фактор является «недефицитным», то он имеет нулевую оценку ($y_i^* = 0$).

$$\textit{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i, \textit{ то } y_i^* = 0 \qquad (4.9)$$

Проиллюстрируем вторую теорему двойственности на примере задачи о максимальном доходе. Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке 1 и 2 в систему ограничений

Итак, имеем оптимальное решение прямой задачи: суточный объем производства краски 1-го вида – $x_1 = 10/3$ [т. краски/сутки]; суточный объем производства краски 2-го вида – $x_2 = 4/3$ [т. краски/сутки]; максимальный доход от продажи $f_{max} = 12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки]

Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке $x_1$ и $x_2$ в систему ограничений (таблица 4.3.)

*Таблица 4.3*. Выполнение неравенств прямой задачи

| Ограничение | Расчет | Вывод |
|---|---|---|
| $x_1 + 2x_2 \leq 6$ | $\frac{10}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = 6$ | Первое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает что А ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_1 \neq 0$). |
| $2x_1 + x_2 \leq 8$ | $2 \times \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = 8$ | Второе ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что В ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теоремы двойственности отлична от нуля ($y_2 \neq 0$) |
| $-x_1 + x_2 \leq 1$ | $-\frac{10}{3} + \frac{4}{3} = -2 < 1$ | Третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, остается спрос на продукцию 1-го. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю ($y_3 = 0$). |
| $x_2 \leq 2$ | $\frac{4}{3} < 2$ | Четвёртое ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство, т.е. остается спрос на продукцию 2-го. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане равна нулю ($y_4 =$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | 0). |
| $x_1 \geq 0$ | $\frac{10}{3} > 0$ | Первое ограничение в двойственной задаче будет равенством $y_1 + 2y_2 = 3$, |
| $x_2 \geq 0$ | $\frac{4}{3} > 0$ | Второе ограничение в двойственной задаче будет равенством $2y_1 + y_2 = 2$ |

*Примечание:* Аналогичные выводы о оценках дефицитности ресурса были сделаны в подразделе 2.4.

Согласно таблице 4.3 имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений

$$y_1 = 3 - 2y_2 \Rightarrow 2(3 - 2y_2) + y_2 = 6 - 3y_2 = 2$$

$$y_2 = 4/3 \text{ [т. ингр. В/сутки]}$$

Тогда $y_1 = 1/3$ [т. ингр. А/сутки].

Решение, найденное из первой теоремы двойственности равнозначно решению из второй теоремы.

$$g(\bar{y}) = (\bar{b}, \bar{y}) = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 = 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{4}{3} + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 12\frac{2}{3}$$

$$min\ g(\bar{y}) = 12\frac{2}{3} \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Таким образом, вторая теорема дает нахождение оптимального решения двойственной задачи, пользуясь условием обращения в равенство сопряженных неравенств в системах ограничения.

Между переменными прямой задачи и переменными двойственной существует определенная связь, которая очевидна, если рассматривать последнюю симплекс-таблицу прямой задачи (см. таблицу3.7). Переменные $y_1$ и $y_2$ принимают значения $f$-строки и им соответствуют значения $x_3$ и $x_4$. Следовательно, можно из последней таблицы прямой задачи найти решение двойственной, не проводя никаких вычислений пользуясь только соответствием переменных.

## Третья теорема двойственности

Третью теорему двойственности иногда называют теоремой об оценках. Рассматривая ограничения ЗЛП, можно констатировать: изменение правых частей ограничений исходной задачи приводит к изменению максимального значения целевой функции $Z_{max}$.

***Третья теорема двойственности.*** В оптимальном плане двойственной задачи значение переменной $y_i^*$ численно равно частной производной функции $G_{max} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ по соответствующему аргументу $b_i$ т.е.

$$\frac{\partial G_{max}}{\partial b_i} = y_i^*, (i = \overline{1,m}) \qquad (4.10)$$

Из теоремы об оценках вытекает, что при малом изменении правой части i-го ограничения в системе ограничений ЗЛП максимальное значение целевой функции изменяется на величину [9]

$$\Delta G_{max}^i \approx y_i^* \times \Delta b_i \qquad (4.11)$$

В частности, при $\Delta b_i = 1$ имеем $\Delta G_{max}^i \approx y_i^*$.

Применительно к задаче оптимального использования ресурсов можно сказать, что двойственная оценка $y_i^*$ $i$-го ресурса приближенно равна приращению оптимальной прибыли, возникающему за счет увеличения объема $i$-го ресурса на единицу.

Оценим чувствительность решения задачи о максимальном доходе к изменению запасов сырья и спроса на продукцию. Напомним, что оптимальное решение двойственной задачи равно:

$$\overline{y^*} = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = (\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; 0; 0)$$

Предположим, что спрос увеличился на единицу.

$$\Delta G_{max_3} = y_3 \times \Delta b_3 = 0 \times 1 = 0$$

$$\Delta G_{max_4} = y_4 \times \Delta b_4 = 0 \times 1 = 0$$

Спрос на продукцию 1-го и 2-го вида используется не полностью, поэтому они имеют нулевые двойственные оценки. Это свидетельствует о его недефицитности.

Для двойственных оценок $y_1$ и $y_2$ имеем:

$$\Delta G_{max_1} = y_1 \times \Delta b_1 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\Delta G_{max_2} = y_2 \times \Delta b_2 = \frac{4}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$$

Это означает, что если увеличить запасы ингредиента $A$ на 1 $[\text{т./сутки}]$, то данное решение приведет к увеличению значения целевой функции на $G_{max} + \Delta G_{max} = 12\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 13$ $[\text{тыс. руб./сутки}]$. Если, аналогично, увеличить запасы ингредиента $B$ на 1 $[\text{т./сутки}]$, то доход возрастет $G_{max} + \Delta G_{max} = 12\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 14$ $[\text{тыс. руб./сутки}]$. Таким образом, снова подтверждается, что запасы ингредиентов $A$ и $B$ полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными и сдерживают рост целевой функции.

Из теоремы также вытекает, что если изменится объем каждого ресурса на величину $\Delta b_i$ $(i = \overline{1,m})$, то эти изменения приведут к суммарному изменению прибыли $\Delta G_{max}$, которое может быть вычислено по формуле [9]:

$$\Delta G_{max} \approx \sum_{i=1}^{m} y_i^* \times \Delta b_i \qquad (4.12)$$

Эта формула имеет место лишь тогда, когда при изменении величин $b_i$ значения переменных $y_i^*$в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными, поэтому представляет интерес определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов $b_i$, в которых оптимальный план двойственной задачи не меняется. Такие интервалы называют интервалами устойчивости двойственных оценок.

Нижнюю и верхнюю границы интервала $(b_i - \Delta b_i^{н}, b_i + \Delta b_i^{в})$ устойчивости двойственных оценок определяют по формулам [9]:

$$\Delta b_i^{н} = \begin{cases} -\infty, \text{ если } \forall d_{ji} \le 0, \\ min_j \left\{\frac{x_j^*}{d_{ji}}\right\}, \text{для } d_{ji} > 0 \end{cases} \qquad (4.13)$$

$$\Delta b_i^{в} = \begin{cases} \left| max_j \left\{\frac{x_j^*}{d_{ji}}\right\} \right|, \text{для } d_{ji} < 0, \\ +\infty, \text{ если } \forall d_{ji} \ge 0 \end{cases} \qquad (4.14)$$

В формулах (4.13) и (4.14) $d_{ji}$– элементы обратной матрицы $D^{-1}$ базиса оптимального плана, а $j$ принимает значения индексов базисных переменных $x_j^*$ оптимального плана.

Для удобства проведения расчета выпишем необходимые элементы из прямой задачи о максимальном доходе:

- обратная матрица базиса оптимального плана;

$$D^{-1} = (y_2^*, y_1^*, y_5^*, y_6^*) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- индексы базисных переменных оптимального плана;

$$\overline{A_0^*} = (x_2^*, x_1^*, x_5^*, x_6^*) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$$

- свободные члены неравенств (ограничений) прямой задачи;

$$\overline{A_0} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можем воспользоваться формулами для нахождения нижней и верхней границ интервалов устойчивости оценок по видам ресурсов.

*Ресурс 1 (Ингредиент А)*. Найдем нижнюю границу. Во втором столбце обратной матрицы три положительных элемента $(2/3, 1, 1/3)$, им соответствуют индексы базисных переменных оптимального плана $(10/3, 3, 2/3)$.

$$\Delta b_1^{н} = \begin{cases} min\{10/3 \times 3/2\} = 5 \\ min\{3/1\} = 3 \\ min\{2/3 \times 3/1\} = 2 \end{cases}$$

Выбираем наибольшее значение, равное 5.

Найдем верхнюю границу. Во втором столбце единственное отрицательное значение $(-1/3)$, которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана $(4/3)$.

$$\Delta b_1^{в} = |max\{4/3 \times (-3/1)\}| = |-4| = 4$$

Таким образом, получаем $\Delta b_1 \in (-5; 4)$.

Тогда первый ресурс может изменяться в интервале:

$$(b_1 - \Delta b_1^{н}, b_1 + \Delta b_1^{в}) = (6 - 5; 6 + 4) = (1; 10) \text{ т. ингр. А/сутки.}$$

При таком значении оптимальный план двойственной задачи остается неизменным.

Аналогичные рассуждения позволяют найти интервалы устойчивости оценок для остальных ресурсов.

*Ресурс 2 (Ингредиент В)*. Рассматриваем первый столбец $D^{-1}$, в котором один положительный элемент $(2/3)$ и три отрицательных $(-1/3, -1, -1/2)$. Данным элементам соответствуют следующие индексы базисных переменных оптимального плана: положительного элемента – $4/3$; для отрицательных – $10/3, 3, 2/3$.

Тогда находим нижнюю границу.

$$\Delta b_2^{н} = min\{4/3 \times 3/2\} = 2$$

Найдем верхнюю границу.

$$\Delta b_2^{в} = \begin{cases} |max\{10/3 \times (-3/1)\}| = |-10| = 10 \\ |max\{3/(-1)\}| = |-3| = 3 \\ |max\{2/3 \times (-2/1)\}| = |-4/3| = 4/3 \end{cases}$$

Выбираем наибольшее значение, равное 10.

Получаем $\Delta b_2 \in (-2; 10)$.

Тогда второй ресурс может изменяться в интервале:

$$(b_2 - \Delta b_2^{н}, b_2 + \Delta b_2^{в}) = (8 - 2; 8 + 10) = (6; 18) \text{ т. ингр. В/сутки.}$$

*Ресурс 3 (Ограничение по суточному объему производства краски 1-го вида по сравнению с объемом производства краски 2-го вида).* Рассматриваем третий столбец $D^{-1}$.

Нижняя граница: $\Delta b_3^{н} = min\{3/1\} = 3$, так как среди элементов третьего столбца одно положительное значение.

Верхняя граница: $\Delta b_3^{в} = +\infty$, так как среди элементов третьего столбца нет отрицательных значений.

Тогда, получаем $\Delta b_3 \in (-3; +\infty)$.

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению:

$$(b_3 - \Delta b_3^{н}, b_3 + \Delta b_3^{в}) = (1-3; +\infty) = (-2; +\infty) \text{ т. краски/сутки}$$

*Ресурс 4 (Ограничение по суточному объему производства краски 2-го вида).* Рассматриваем четвертый столбец $D^{-1}$. В данном столбце все элементы равны 0, т.е. нет положительных и отрицательных элементов.

Тогда нижняя граница $\Delta b_4^{н} = -\infty$, а верхняя граница $\Delta b_4^{в} = +\infty$.

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов на величину максимальной стоимости продукции. Как известно, это дефицитные ресурсы $y_1^* = 1/3$ и $y_2^* = 4/3$. Введем верхние границы $\Delta b_1^{в}$ и $\Delta b_2^{в}$ в формулу 4.11.

$$\Delta G_{max_1} = y_1 \times \Delta b_1^{в} = \frac{1}{3} \times 4 = 1\frac{1}{3}$$

$$\Delta G_{max_2} = y_2 \times \Delta b_2^{в} = \frac{4}{3} \times 10 = 13\frac{1}{3}$$

Совместное влияние изменений этих ресурсов приводит к изменению максимальной стоимости продукции $G_{max}$ на величину (согласно формуле 4.12):

$$\Delta G_{max} = \Delta G_{max_1} + \Delta G_{max_2} = 1\frac{1}{3} + 13\frac{1}{3} = 14\frac{2}{3}$$

Следовательно, оптимальное значение целевой функции при максимальном изменении ресурсов

$$G_{max} \approx 12\frac{2}{3} + 14\frac{2}{3} = 27\frac{1}{3} \text{ [тыс. руб./сутки]}$$

Таким образом, двойственные оценки позволяют судить о чувствительности решения к изменениям.