BÀI TẬP
HÀM BIẾN PHỨC

Giáo Sư: Võ Văn Tấn

Khoa Toán-Tin Học
Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Tp Hồ Chí Minh

Ngày 6 tháng 9 năm 2018

Bài 1. Xét $\Omega \subset \mathbb{C}$ mở.Xét $f \in C^2(\Omega)$ và ta định nghĩa hai toán tử đạo hàm riêng cấp một (còn được gọi là các đạo hàm Wirtinger)

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x} - i\tfrac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \tfrac{\partial f}{\partial z} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial f}{\partial x} + i\tfrac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

1. Chứng minh rằng
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}.$$

2. Có hay không
$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}?$$

3. Chứng minh
$$\Delta |f|^2 = 4\left|f'(z)\right|^2.$$

   Lưu ý rằng $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

Bài 2.

Cho u và v là hai hàm thuộc lớp $C^1(\Omega)$, với Ω là tập con mở trong $\mathbb{C}$. Giả sử hàm phức $f(z)$ được viết dưới dạng $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ là hàm khả vi phức tại điểm z, với $z = x + iy$. Giả sử ta biểu diễn lại $x = \rho \cos\theta$; $y = \rho \sin\theta$.

1. Chứng minh rằng

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta;\\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\theta;\\
\frac{\partial v}{\partial \rho} &= \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta;\\
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\rho\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\rho\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra Phương trình Cauchy - Riemann viết dưới dạng tọa độ cực

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta};\\
\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{cases}
$$

2. Giả sử hàm $f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta)$ khả vi phức tại điểm z được tham số tọa độ cực theo (ρ,θ). Chứng minh rằng

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}) = \exp(-i\theta)(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}).$$

Bài 3.

Cho u và v là hai hàm thuộc lớp $C^1(\Omega)$, với Ω là tập con mở trong $\mathbb{C}$. Giả sử hàm phức $f(z)$ được viết dưới dạng $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, với $z = x + iy$. Ma trận Jacobi của hàm $f(z)$ được biểu diễn như sau

$$J_f(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u)}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}.$$

1. Đặt

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng $J_f \cdot \mathbb{I}$ có tính giao hoán.

2. Chứng minh rằng $\det J_f(z) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2$.

3. Nếu f là hàm khả vi phức tại mọi điểm z thì ma trận Jacobi được biểu diễn lại $\det J_f(z) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 > 0$.

Thời gian nộp: trong giờ thầy Tấn ngày 11 tháng 09 năm 2018

HẾT