

# TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG CHUYÊN MÔN LỚP 11

## CHƯƠNG IV GIỚI HẠN

**GV: Dương Văn Đông – Trường THPT Tân Yên 2**  
Giới thiệu đến các em bởi Trần Quốc Hoài. <http://bsquochoai.ga>

### I. Giới hạn của dãy số

| Giới hạn hữu hạn   | Giới hạn vô cực   |
|--|---|
| <p><b>1. Giới hạn đặc biệt:</b></p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad ( q  < 1); \lim_{n \rightarrow +\infty} C = C$ <p><b>2. Định lý:</b></p> <p>a) Nếu <math>\lim u_n = a, \lim v_n = b</math> thì</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim (u_n + v_n) = a + b</math></li> <li><math>\lim (u_n - v_n) = a - b</math></li> <li><math>\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b</math></li> <li><math>\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{nếu } b \neq 0)</math></li> </ul> <p>b) Nếu <math>u_n \geq 0, \forall n</math> và <math>\lim u_n = a</math> thì <math>a \geq 0</math> và <math>\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}</math></p> <p>c) Nếu <math> u_n  \leq v_n, \forall n</math> và <math>\lim v_n = 0</math> thì <math>\lim u_n = 0</math></p> <p>d) Nếu <math>\lim u_n = a</math> thì <math>\lim  u_n  =  a </math></p> <p><b>3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn</b></p> $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q} \quad ( q  < 1)$ | <p><b>1. Giới hạn đặc biệt:</b></p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{N}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad (q > 1)$ <p><b>2. Định lý:</b></p> <p>a) Nếu <math>\lim  u_n  = +\infty</math> thì <math>\lim \frac{1}{u_n} = 0</math></p> <p>b) Nếu <math>\lim u_n = a, \lim v_n = \pm\infty</math> thì <math>\lim \frac{u_n}{v_n} = 0</math></p> <p>c) Nếu <math>\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0</math> thì <math>\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty &amp; \text{nếu } a \cdot v_n &gt; 0 \\ -\infty &amp; \text{nếu } a \cdot v_n &lt; 0 \end{cases}</math></p> <p>d) Nếu <math>\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a</math> thì <math>\lim (u_n \cdot v_n) = \begin{cases} +\infty &amp; \text{nếu } a &gt; 0 \\ -\infty &amp; \text{nếu } a &lt; 0 \end{cases}</math></p> <p>* Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: <math>\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty</math> thì phải tìm cách khử dạng vô định.</p> |

**Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:**

• Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của  $n$ .

VD: a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+n-3n}}{1-2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-3}}{\frac{1}{n}-2} = 1$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left( 1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$

• Nhân lượng liên hợp: Dùng các hằng đẳng thức

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b; (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$$

VD:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+3n} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3}{2}$

• **Dùng định lý kẹp:** Nếu  $|u_n| \leq v_n, \forall n$  và  $\lim v_n = 0$  thì  $\lim u_n = 0$

VD: a) Tính  $\lim \frac{\sin n}{n}$ .

Vì  $0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$  và  $\lim \frac{1}{n} = 0$  nên  $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

b) Tính  $\lim \frac{3 \sin n - 4 \cos n}{2n^2 + 1}$ .

Vì  $|3 \sin n - 4 \cos n| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\sin^2 n + \cos^2 n)} = 5$

nên  $0 \leq \left| \frac{3 \sin n - 4 \cos n}{2n^2 + 1} \right| \leq \frac{5}{2n^2 + 1}$ .

Mà  $\lim \frac{5}{2n^2 + 1} = 0$  nên  $\lim \frac{3 \sin n - 4 \cos n}{2n^2 + 1} = 0$

**Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:**

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.
- Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của lũy thừa cao nhất của tử và của mẫu.
- Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là  $+\infty$  nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là  $-\infty$  nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu (ta thường đặt nhân tử chung của tử, mẫu riêng).

**Bài 1:** Tính các giới hạn sau: (Chia cả tử và mẫu cho  $n^a$  với số mũ  $a$  cao nhất Hoặc đặt nhân tử chung)

- $\lim(n^2 - n + 1)$ . ĐS:  $+\infty$
- $\lim(-n^2 + n + 1)$ . ĐS:  $-\infty$
- $\lim \sqrt{2n^2 - 3n - 8}$  ĐS:  $+\infty$
- $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$  ĐS:  $-\infty$
- $\lim(2n + \cos n)$ . ĐS:  $+\infty$
- $\lim(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5)$ . ĐS:  $+\infty$
- $u_n = \frac{3^n + 1}{2^n - 1}$ . ĐS:  $+\infty$
- $u_n = 2^n - 3^n$ . ĐS:  $-\infty$
- $\lim \frac{2n + 1}{n^3 + 4n^2 + 3}$  ĐS: 0
- $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$  ĐS: 0
- $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$  ĐS: 0
- $\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$  ĐS: 2/3

- $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{n^3 + 4}$  ĐS: 3
- $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$  ĐS: 1
- $\lim \frac{-n^2 + n - 1}{2n^2 - 1}$  ĐS: -1/2
- $\lim \frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{n+1}}$  ĐS: 2
- $\lim \frac{2n-3}{\sqrt[3]{n^3-2n+1}}$  ĐS: 2
- $\lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$  ĐS:  $+\infty$
- $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{4 - n^2}$  ĐS:  $-\infty$
- $\lim \frac{-4n^2 + 2n + 5}{3n + 1}$  ĐS:  $-\infty$

**Bài 2:** Tính các giới hạn sau: (Chia cho lũy thừa có cơ số lớn nhất)

- $\lim \frac{1 + 3^n}{4 + 3^n}$  ĐS: 1
- $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$  ĐS: 7
- $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}$  ĐS: 0
- $\lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1 + 5^n}$  ĐS: 5

$$5) \lim \frac{1+2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 7^n} \quad \text{ĐS: } -1/2$$

$$6) \lim \frac{1-2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)} \quad \text{ĐS: } 1/3$$

**Bài 3:** Tính các giới hạn sau: (Tử ở dạng vô cùng  $\pm$  vô cùng; Mẫu ở dạng vô cùng + vô cùng; bậc của tử và mẫu bằng nhau thì ta chia cho số mũ cao nhất;)

**Chú ý:**  $\sqrt[n]{n^k}$  có mũ  $\frac{k}{n}$ ;  $\sqrt[n]{n^k}$  có mũ  $\frac{k}{n}$

$$1) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$2) \lim \frac{\sqrt{n^2+3}-n-4}{\sqrt{n^2+2}+n} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$3) \lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$4) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$5) \lim \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$6) \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n} \quad \text{ĐS: } -1/(\sqrt{3}+1)$$

**Bài 4:** Tính các giới hạn sau:

Nếu bài toán có dạng: + Vô cùng – vô cùng không có mẫu (hệ số của n bậc cao nhất giống nhau).  
+ Cả tử và mẫu ở dạng: Vô cùng- vô cùng. (hệ số của bậc cao nhất giống nhau)

Thì ta nhân liên hợp có căn bậc 2,3 rồi chia cho lũy thừa có số mũ cao nhất

Nếu bài toán ở dạng vô cùng + vô cùng thì kq là vô cùng ta đặt nhân tử chung có mũ cao nhất rồi tính giới hạn. Hoặc hệ số của n bậc cao nhất khác nhau ta chia hoặc đặt nhân tử chung.

$$1) \lim(\sqrt{n^2+3n}+n) \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$2) \lim(\sqrt{n^2-2n}-n+2013) \quad \text{ĐS: } 2012$$

$$3) \lim(\sqrt{n^2-n}-n) \quad \text{ĐS: } -1/2$$

$$4) \lim(\sqrt{n^2+1}-n+5) \quad \text{ĐS: } 5$$

$$5) \lim(\sqrt{n^2+2013}-n+5) \quad \text{ĐS: } 5$$

$$6) \lim(\sqrt{n^2+2n}-n-1) \quad \text{ĐS: } 0$$

$$7) \lim(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}) \quad \text{ĐS: } 1/2$$

$$8) \lim(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1) \quad \text{ĐS: } -1$$

$$9) \lim(1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}) \quad \text{ĐS: } 1$$

$$10) \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n} \quad \text{ĐS: } -1/(\sqrt{3}-1)$$

$$11) \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}} \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$12) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n} \quad \text{ĐS: } -1/2$$

$$13) \lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2} \quad \text{ĐS: } 0$$

**Bài 5:** Tính các giới hạn sau: (Giới hạn kẹp giữa hai biểu thức có cùng kết quả)

$$1) \lim \frac{2\cos n^2}{n^2+1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$2) \lim \frac{(-1)^n \sin(3n+n^2)}{3n-1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$3) \lim \frac{3\sin^6 n + 5\cos^2(n+1)}{n^2+1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$4) \lim \frac{3\sin^2(n^3+2)+n^2}{2-3n^2} \quad \text{ĐS: } -1/3$$

**Bài 6:** Tính các giới hạn sau: (Rút gọn rồi tính giới hạn)

$$1) \lim \left( \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) \quad \text{ĐS: } 1/2$$

$$2) \lim \left( \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} \right) \quad \text{ĐS: } 3/2$$

$$3) \lim \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{ĐS: } 1/2$$

$$4) \lim \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad \text{ĐS: } 1$$

$$5) \lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2+3n} \quad \text{ĐS: } 1/2$$

$$6) \lim \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n} \quad \text{ĐS: } 0$$

**Bài 7:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ , với  $\forall n \geq 2$

- a) Rút gọn  $u_n$ . ĐS:  $(n+1)/2n$       b) Tìm lim  $u_n$ . ĐS:  $1/2$

**Bài 8:** a) Chứng minh:  $\frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ).

- b) Rút gọn:  $u_n = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$ .

- c) Tìm lim  $u_n$ . ĐS:  $1$

**Bài 9:** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

- a) Đặt  $v_n = u_{n+1} - u_n$ . Tính  $v_1 + v_2 + \dots + v_n$  theo  $n$ .

- b) Tính  $u_n$  theo  $n$ .

- c) Tìm lim  $u_n$ . ĐS:  $2$

**Bài 10:** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 1 \\ 2u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

- a) Chứng minh rằng:  $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1, \forall n \geq 1$ .

- b) Đặt  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ . Tính  $v_n$  theo  $n$ . Từ đó tìm lim  $u_n$ . ĐS:  $2/3$

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = 2012u_n^2 + u_n \end{cases}; n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$  (HSG Lạng Sơn 2011)

ĐS: - CM được dãy tăng:  $u_{n+1} - u_n = 2012u_n^2 > 0 \quad \forall n$

- giả sử có giới hạn là  $a$  thì:  $a = 2012a^2 + a \Rightarrow a = 0 > 2012$  Vô Lý  
nên  $\lim u_n = +\infty$

- ta có:  $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{(u_{n+1} - u_n)}{2012u_{n+1}u_n} = \frac{1}{2012} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$

Vậy:  $S = \frac{1}{2012} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = \frac{1}{2012^2}$ .

**Bài 11:** Cho dãy  $(x_n)$  xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Đặt  $S_n = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} + \dots + \frac{1}{x_n + 2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Tìm  $\lim S_n$ . (HSG Lạng Sơn 2012)

**Bài 12:** Tổng Dãy là cấp số nhân lùi vô hạn:

- a.  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$       b.  $S = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$       ĐS: a. 2      b. 12/11

**Bài 13:** Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

- a. 0,444...      b. 0,2121....      c. 0,32111.... ĐS: a. 4/9      b. 21/99      c. 289/900

**Bài 14:**  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$ , với  $|a|, |b| < 1$ . ĐS:  $(1-b)/(1-a)$

## II. Giới hạn của hàm số

| Giới hạn hữu hạn      | Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực |
|-----------------------|------------------------------------|
| 1. Giới hạn đặc biệt: | 1. Giới hạn đặc biệt:              |

|  |   |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ ( $c$ : hằng số)<br><b>2. Định lý:</b><br>a) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \end{cases}$<br>thì: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$ )<br>b) Nếu $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \end{cases}$ thì<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$<br>c) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì<br>$\lim_{x \rightarrow x_0}  f(x)  =  L $<br><b>3. Giới hạn một bên:</b><br>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$<br>$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$<br>$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$<br>$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$<br>$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{ x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ x } = +\infty$<br><b>2. Định lý:</b><br>a) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \end{cases}$ thì:<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0 \end{cases}$<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$<br>b) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases}$ thì:<br>$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) < 0 \end{cases}$<br>Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định. |
|--|---|

### Một số phương pháp khử dạng vô định:

#### 1. Dạng $\frac{0}{0}$

a)  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x), Q(x)$  là các đa thức và  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$$

b)  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$  và  $P(x), Q(x)$  là các biểu thức chứa căn cùng bậc

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

c)  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$  và  $P(x)$  là biểu thức chứa căn không đồng bậc

Giả sử:  $P(x) = \sqrt[m]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$  với  $\sqrt[m]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)} = a$ .

Ta phân tích  $P(x) = (\sqrt[m]{u(x)} - a) + (a - \sqrt[n]{v(x)})$ .

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

**2. Dạng  $\frac{\infty}{\infty}$ :**  $L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x), Q(x)$  là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

– Nếu  $P(x), Q(x)$  là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của  $x$ .

– Nếu  $P(x), Q(x)$  có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của  $x$  hoặc nhân lượng liên hợp.

$$\text{VD: a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1} = -1$$

**3. Dạng  $\infty - \infty$ :** Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = 0$$

**4. Dạng  $0 \cdot \infty$ :**

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$$

**Bài 1:** Tìm các giới hạn sau:

+ Khi thay  $x=a$  vào  $f(x)$  thấy mẫu khác 0 thì giới hạn bằng  $f(a)$ .

+ Khi thay  $x=a$  vào  $f(x)$  thấy mẫu bằng 0 tử khác 0 thì giới hạn bằng  $\infty$ .

1)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x)$ . ĐS: 12

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$  ĐS:  $\pm\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$  ĐS: 1

4)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1} - x}{x-1}$  ĐS:  $-3/2$

5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x}$  ĐS:  $\sqrt{2}/\pi$

6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4 + x - 3}$  ĐS:  $-2/3$

7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$  ĐS:  $\sqrt{3}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$  ĐS:  $\sqrt{2}/2$

9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-2}$  ĐS: 0

10)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4} - \sqrt{3x-2}}{x+1}$  ĐS: 0

11)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$  ĐS: 0

**Bài 2:** Tìm các giới hạn sau: (Khi thay  $x=a$  vào  $f(x)$  thấy tử = 0; mẫu = 0 ta rút gọn mất nhân tử rồi thay tiếp tới khi mẫu khác 0 là xong) còn nếu mẫu = 0 tử khác 0 thì kết quả là  $\infty$

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$  ĐS: 2

4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-4x+1}{x-1}$  ĐS: 2

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left( 2 - \frac{1}{x} \right)$  ĐS: -1

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$  ĐS: 5

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$  ĐS: 3

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2} \text{ĐS: } -8$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} \text{ĐS: } 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} \text{ĐS: } 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x} \text{ĐS: } 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} \text{ĐS: } 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} \text{ĐS: } 5/3$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^5 + 4x^6}{(1 - x)^2} \text{ĐS: } 10$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^6 - 5x^5 + x}{x^2 - 1} \text{ĐS: } 0$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \text{ĐS: } -1/2$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) \text{ĐS: } -1$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x - 4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right) \text{ĐS: } 0$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1992} + x - 2}{x^{1990} + x - 2} \text{ĐS: } 1993/1992$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \text{ chú ý tổng của CSN ĐS: } m/n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 5x)(1 + 9x) - 1}{x} \text{ĐS: } 14$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x} \text{ĐS: } 6$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} \text{ĐS: } n(n+1)/2$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2} \text{ĐS: } n(n-1)/2$$

### Bài 3: Tìm các giới hạn sau: (Một căn bậc 2)

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4} \text{ĐS: } 1/6$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \text{ĐS: } 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{4 - x} \text{ĐS: } -1/6$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} \text{ĐS: } -1/54$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \text{ĐS: } -1/56$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3} \text{ĐS: } -4/15$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 1} \text{ĐS: } 9/4$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}{x - 1} \text{ĐS: } 1/2$$

### Bài 4: Tìm các giới hạn sau: (Hai căn Bậc 2)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \text{ĐS: } 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \text{ĐS: } 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - x}{\sqrt{4x+1} - 3} \text{ĐS: } -3/4$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} \text{ĐS: } 3/2$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} - 3}{2 - \sqrt{x+3}} \text{ĐS: } -4/3$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \text{ĐS: } 3$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \text{ĐS: } -1/3$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{3x+1}}{x-1} \text{ĐS: } -1/4$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}{3x+3} \text{ĐS: } 1/6$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \text{ĐS: } \sqrt{2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{3 - \sqrt{2x+9}} \text{ĐS: } -3/4$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}} \text{ĐS: } -1/4$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4} \text{ĐS: } 4$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + \sqrt{3-2x}}{x^2 + 3x} \text{ĐS: } -2/9$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} \text{ĐS: } 7/24$$

$$16) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ với } a > 0. \text{ ĐS: } 1/\sqrt{2a} \quad 17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x} \text{ ĐS: } 2$$

**Bài 5:** Tìm các giới hạn sau: (**Một căn bậc 3**)

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2} \text{ ĐS: } 1/3 & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} \text{ ĐS: } 1/3 \\ 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1} \text{ ĐS: } 2/3 & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2} \text{ ĐS: } 1 \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1} \text{ ĐS: } 3 & \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x} \text{ ĐS: } 1 \\ 4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + x^3 + 2}{\sqrt[3]{x} + 1} \text{ ĐS: } 24 \end{aligned}$$

**Bài 6:** Tìm các giới hạn sau: (**Hai căn khác bậc**)

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} \text{ ĐS: } 1/6 & \quad 12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} \text{ ĐS: } -11/24 \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \text{ ĐS: } 4/3 & \quad 13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x^2-4} \text{ ĐS: } -1/24 \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \text{ ĐS: } 3/2 & \quad 14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x}-1}{x} \text{ ĐS: } 5 \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} \text{ ĐS: } 13/12 & \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x}-1}{x} \text{ ĐS: } 7/3 \\ 5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} - \sqrt{x}}{x^2-5x+4} \text{ ĐS: } -1/18 & \quad 16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)} \text{ ĐS: } 1/n \\ 6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x+10} + \sqrt[3]{x-5}}{x^2-9} \text{ ĐS: } -7/72 & \quad 17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})(1-\sqrt[5]{x})}{(1-x)^4} \text{ ĐS: } 1/120 \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x} \text{ ĐS: } 0 & \quad 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} \text{ ĐS: } 5/6 \\ 8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - \sqrt{x+2}}{x-2} \text{ ĐS: } -1/3 & \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}} \text{ ĐS: } -6 \\ 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-3x+2} \text{ ĐS: } 7/54 & \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1} \text{ ĐS: } 0 \\ 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+8x^2} - \sqrt[3]{1+6x^2}}{x^2} \text{ ĐS: } 2 & \\ 11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2} \text{ ĐS: } 7/162 \end{aligned}$$

**Bài 7:** Tìm các giới hạn sau: ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ )

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \text{ ĐS: } 2/\pi & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} \text{ ĐS: } 5/3 \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \text{ ĐS: } 1 & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3} \text{ ĐS: } 1/3 \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \sin 2x}{\cos x} \text{ ĐS: } 0 & \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} \text{ ĐS: } 2 \\ 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\lg x}{\pi - x} \text{ ĐS: } 4/3\pi & \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2} \text{ ĐS: } 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1} & \text{ĐS: } 4 \\
10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} & \text{ĐS: } 2 \\
11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{x^2} & \text{ĐS: } 12 \\
12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 x} & \text{ĐS: } 2 \\
13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x} & \text{ĐS: } 1/2 \\
14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{1 - \cos x} & \text{ĐS: } 14 \\
15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2} & \text{ĐS: } 1/9 \\
16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin x}{\sin \frac{x}{2}} & \text{ĐS: } 0 \\
17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - |1 + \sin 3x||}{\sqrt{1 - \cos x}} & \text{ĐS: } 3\sqrt{2} \\
18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} & \text{ĐS: } 0 \\
19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x} & \text{ĐS: } 9/25 \\
20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} & \text{ĐS: } 4 \\
21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin x}{3 \sin x} & \text{ĐS: } 1 \\
22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{x} & \text{ĐS: } 5 \\
23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x - \cos 2x}{\sin x} & \text{ĐS: } -1 \\
24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} & \text{ĐS: } 1/2 \\
25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2} & \text{ĐS: } 18 \\
26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)}{\sin^2 \frac{x}{2}} & \text{ĐS: } \pi \text{ BD góc phụ chéo} \\
27) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x} & \text{ĐS: } 4\sqrt{3} \text{ Đặt ẩn phụ} \\
28) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 - x^2}{\cos \frac{px}{4}} & \text{ĐS: } 16/\pi \\
29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x + 1}{1 - x} & \text{ĐS: } 0 \\
30) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & \text{ĐS: } 1/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
31) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} & \text{ĐS: } -2 \\
32) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \sin \frac{3}{x} & \text{ĐS: } 3 \\
33) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)} & \text{ĐS: } -7/4 \\
34) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \operatorname{tg} x & \text{ĐS: } 0 \\
35) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - 2 \sin x} & \text{ĐS: } 1/\sqrt{3} \\
36) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2 \cos^2 x - 1} & \text{ĐS: } -1/2 \\
37) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - \tan x} & \text{ĐS: } 0 \\
38) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3} & \text{ĐS: } -1/2 \\
39) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sqrt{2} \sin x} & \text{ĐS: } 1 \\
40) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \cos^2 x - 3} & \text{ĐS: } -1/2 \\
41) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} & \text{ĐS: } -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
42) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \cot gx} & \text{ĐS: } -1 \\
43) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{\pi}{x}\right) & \text{ĐS: } \pi \\
44) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\tan(x+2)} & \text{ĐS: } 12 \\
45) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{3}{\sin 3x}\right) x & \text{ĐS: } 0 \\
22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} & \text{ĐS: } -1 \\
46) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x) \cdot \tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2} & \text{ĐS: } \tan^4 a - 1 \\
47) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x) \sin(a+x) - a \sin a}{x} & \text{ĐS: } (a+1) \sin a \\
48) (\text{ĐHGTVT-98}): \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} & \text{ĐS: } 0 \\
49) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} & \text{ĐS: } 1 \\
50) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\tan^2 x} & \text{ĐS: } \sqrt{2}/8 \\
51) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x} & \text{ĐS: } 1
\end{aligned}$$

$$52) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{p \cdot x}{2} \quad \text{ĐS: } 2/\pi$$

$$53) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2-1} + \sqrt{2x^2+1}}{1-\cos x} \quad \text{ĐS: } 4$$

$$54) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \quad \text{ĐS: } 4/3$$

$$55) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}}{x} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$56) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad \text{ĐS: } -1/12$$

$$57) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} \quad \text{ĐS: } -1$$

$$58) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} \quad \text{ĐS: } 7$$

$$59) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \dots \cos nx}{x^2} \quad \text{ĐS: } n(n+1)(2n+1)/12$$

$$60) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi \cos x}{2}\right)}{\sin(\tan x)} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$61) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\tan x} \quad \text{ĐS: } 1$$

$$62) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x} \quad \text{ĐS: } -3/4$$

$$63) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{1 - \cos 2x} \quad \text{ĐS: } 3/2$$

**Bài 8:** Tìm các giới hạn sau: (giống giới hạn dãy số chia cho mũ cao nhất, nhân liên hợp, Đặt nhân tử, dấu giá trị tuyệt đối)

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7) \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x) \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 - 3x) \quad \text{ĐS: } \pm\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12} \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4} \quad \text{ĐS: } \pm\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1} \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{x^2 + 2} \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + x + 4} \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{1 - 3x - 5x^2} \quad \text{ĐS: } -1/5$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(2x^2 - 1)}{(5x - 1)(x^2 + 2x)} \quad \text{ĐS: } 6/5$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{3x - 1} \quad \text{ĐS: } -2/3; 2/3$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2 + x}}{x + 10} \quad \text{ĐS: } -2$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2x}}{3x - 1} \quad \text{ĐS: } 1/3$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + 3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1 - x} \quad \text{ĐS: } 4; -2/3$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5) \sqrt{\frac{x}{x^3 - 1}} \quad \text{ĐS: } 1$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} \quad \text{ĐS: } \sqrt{2}/3$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 4}}{x + 4} \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x} \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad \text{ĐS: } -1; 1$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + x}{2x - 2} \quad \text{ĐS: } 1$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4} \quad \text{ĐS: } \pm\infty$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right] \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} \quad \text{ĐS: } +\infty$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right) \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1} \quad \text{ĐS: } 1/2$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 2} \quad \text{ĐS: } -\infty; +\infty$$

$$31) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$32) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x} \text{ĐS: } -1; 5$$

$$33) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2x}} \text{ĐS: } 3; 1/5$$

$$34) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2} \text{ĐS: } 2/5$$

$$35) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2} \text{ĐS: } 4$$

$$36) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{2|x| + 1} \text{ĐS: } +\infty$$

$$37) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3} \text{ĐS: } 0$$

$$38) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 11}{2x - 7} \text{ĐS: } +\infty$$

$$39) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2} \text{ĐS: } 1$$

$$40) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2} \text{ĐS: } 1$$

**Bài 9:** Tìm các giới hạn sau: (giống giới hạn dãy số chia cho mũ cao nhất, nhân liên hợp)

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - x \right) \text{ĐS: } 1/2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \text{ĐS: } +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x) \text{ĐS: } -3/2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x) \text{ĐS: } +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \text{ĐS: } 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x) \text{ĐS: } +\infty; -1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) \text{ĐS: } 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}) \text{ĐS: } 1/2; -1/2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \text{ĐS: } 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x) \text{ĐS: } +\infty$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} + x) \text{ĐS: } -1/2; +\infty$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1) \text{ĐS: } -1$$

$$13) \text{ Cho } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$$

Tính các giới hạn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . ĐS:  $-2; 2$

$$14) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x + 2 - \sqrt{9x^2 + 12x - 3}) \text{ĐS: } -\infty; 0$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3} \right) \text{ĐS: } 0$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 2) \text{ĐS: } +\infty$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 2) \text{ĐS: } -1/2$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 1) \text{ĐS: } 1/2; +\infty$$

$$19) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) \text{ĐS: } 0$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} \right) \text{ĐS: } 0$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) \text{ĐS: } 1/2$$

$$22) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}) \text{ĐS: } 0$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}) \text{ĐS: } -\infty$$

$$24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \text{ĐS: } 2$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 6x^2} - x) \text{ĐS: } 2$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}) \text{ĐS: } 2/3$$

**Bài 10:** Tìm các giới hạn sau:

$$a. \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}. \quad b. \lim_{x \rightarrow 5^-} (\sqrt{5-x} + 2x) \quad c. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1}. \quad d. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}. \quad e. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$$

ĐS: a. 0 b. 10 c.  $+\infty$  d.  $-\infty$  e. 0

**Bài 11:** Tìm các giới hạn sau nếu có

$$a. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2}. \quad b. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2}. \quad c. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x-2}.$$

ĐS: a. 3 b. -3 c. Không xác định

**Bài 12:** Tìm các giới hạn sau: (Đề ý đến dấu các biểu thức tử và mẫu khi tính giới hạn này)

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2} \text{ĐS: } -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-15}{x-2} \text{ĐS: } +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1+3x-2x^2}{x-3} \text{ĐS: } -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \text{ĐS: } +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} \text{ĐS: } 1/3$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} \text{ĐS: } -1/3$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x}{3x+1} \text{ĐS: } 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-1}{2} \text{ĐS: } 5/2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} \text{ĐS: } 1$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} \text{ĐS: } -1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{2x} \text{ĐS: } 1/2$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}} \text{ĐS: } -1; 1$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3x+3}{x-2} \text{ĐS: } -\infty$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+3}{x-2} \text{ĐS: } +\infty$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{x-3}{x-4} \text{ĐS: } -\infty; +\infty$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-3x+3}{x^2+x-2} \text{ĐS: } +\infty$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2-3x+3}{x^2+x-2} \text{ĐS: } -\infty$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4} \text{ĐS: } \sqrt{3}/3$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left( x \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \text{ĐS: } 0; 0$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1} \text{ĐS: } +\infty$$

**Bài 13:** Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra: (Giới hạn một bên tiến tới 1 số)

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{9-x^2}{x-3} & \text{khi } x < 3 \\ 1-x & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{tại } x=3 \text{ ĐS: } -6; -2; \text{ ko xd}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{8-x^3} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{x^4-16}{x-2} & \text{khi } x < 2 \end{cases} \quad \text{tại } x=2 \text{ ĐS: } -1/6; 32; \text{ K xd}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x=1 \text{ ĐS: } -1/2; -1/2; -1/2$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x > 0 \\ \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x=0 \text{ ĐS: } 3/2; 3/2; 3/2$$

**Bài 14:** Tìm giá trị của  $m$  để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ mx+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x=1 \text{ ĐS: } m=1$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+m & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2+100x+3}{x+3} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x=0 \text{ ĐS: } m=1$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x+3m & \text{khi } x < -1 \\ x^2 + x + m + 3 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases} \text{ tại } x = -1 \quad \text{ĐS: } m=2$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{khi } x > 1 \\ m^2 x^2 - 3mx + 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x = 1 \quad \text{ĐS: } m=1; m=2$$

### III. Hàm số liên tục

#### 1. Hàm số liên tục tại một điểm:

$$y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

• Để xét tính liên tục của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  ta thực hiện các bước:

B1: Tính  $f(x_0)$ .

B2: Tính  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (trong nhiều trường hợp ta cần tính  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ )

B3: So sánh  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  với  $f(x_0)$  và rút ra kết luận.

2. **Hàm số liên tục trên một khoảng:**  $y = f(x)$  liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

3. **Hàm số liên tục trên một đoạn  $[a; b]$ :**  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $(a; b)$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

4. • Hàm số đa thức liên tục trên  $R$ .

• Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

5. Giả sử  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  liên tục tại điểm  $x_0$ . Khi đó:

• Các hàm số  $y = f(x) + g(x)$ ,  $y = f(x) - g(x)$ ,  $y = f(x) \cdot g(x)$  liên tục tại  $x_0$ .

• Hàm số  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  liên tục tại  $x_0$  nếu  $g(x_0) \neq 0$ .

6. Nếu  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì tồn tại ít nhất một số  $c \in (a; b)$ :  $f(c) = 0$ .

**Nói cách khác:** Nếu  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm  $c \in (a; b)$ .

**Mở rộng:**

Nếu  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ . Đặt  $m = \min_{[a; b]} f(x)$ ,  $M = \max_{[a; b]} f(x)$  Khi đó với mọi  $T \in (m; M)$  luôn tồn tại ít nhất một số  $c \in (a; b)$  sao cho  $f(c) = T$ .

**Bài 1:** Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x = -1 \quad \text{ĐS: LT}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x = 1 \quad \text{ĐS: Lt}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{11}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \quad \text{ĐS: Lt}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \quad \text{ĐS: Lt}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x = 2 \quad \text{ĐS: Lt}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{khi } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1 \quad \text{ĐS: K Lt}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ 1-2x & \text{khi } x > 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \quad \text{ĐS: K Lt}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0 \quad \text{ĐS: Lt}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \quad \text{tại } x=5 \text{ ĐS: Lt}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \quad \text{tại } x=0 \text{ ĐS: K Lt}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x=1 \text{ ĐS: Lt}$$

**Bài 2:** Tìm  $m, n, a$  để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x=1 \text{ ĐS: } m=0$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1 \text{ ĐS: } a=5/2$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x=1 \text{ ĐS: } m=2$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \\ 2x + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1 \text{ ĐS: } a=2$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 0 \text{ ĐS: } a=-3$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 2 \text{ ĐS: } a=0$$

**Bài 3:** Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 7 & \text{khi } x < -2 \\ 1 - x & \text{khi } x \geq -2 \end{cases} \quad \text{Lt / R}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{khi } x < 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: K Lt tại } x=2$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases} \quad \text{ĐS: Lt / R}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \quad \text{ĐS: Lt / R}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ĐS: Lt / R}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} & \text{khi } x < 2 \\ \frac{2x + 3}{x + 2} & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \\ 3x - 4 & \text{khi } x > 5 \end{cases} \quad \text{ĐS: K Lt tại } x=5$$

**Bài 4:** Tìm các giá trị của  $m$  để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{ĐS: } m=3$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } m=1$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } m=0$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ĐS: } m=2$$

**Bài 5:** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a)  $x^3 - 2x - 7 = 0$  ĐS:  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(0).f(3) < 0$

b)  $x^5 + x^3 - 1 = 0$  ĐS:  $f(0).f(1) < 0$

c)  $x^3 + x^2 + x + 2/3 = 0$  ĐS:  $f(-1).f(0) < 0$

d)  $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$  ĐS:  $f(0).f(5) < 0$

e)  $x^5 + 9x^2 + x + 2 = 0$  ĐS:  $f(-3).f(0) < 0$

f)  $\cos x - x + 1 = 0$  ĐS:  $f(0).f(3) < 0$

g)  $x^5 - 3x + 3 = 0$  ĐS:  $f(-2).f(0) < 0$

h)  $x^5 + x - 1 = 0$  ĐS:  $f(0).f(1) < 0$

i)  $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$  ĐS:  $f(-2).f(0) < 0$

**Bài 6:** Chứng minh rằng phương trình

a)  $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-1; 3)$  ĐS:  $f(-1) < 0$ ;  $f(0) > 0$ ;  $f(2) < 0$ ;  $f(3) > 0$

b)  $2x^3 - 6x + 1 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-2; 2)$  ĐS:  $f(-2) < 0$ ;  $f(0) > 0$ ;  $f(1) < 0$ ;  $f(2) > 0$

c)  $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-3; 1)$  ĐS:  $f(-3) < 0$ ;  $f(-2) > 0$ ;  $f(0) < 0$ ;  $f(1) > 0$

d)  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-1; 3)$  ĐS:  $f(-1) < 0$ ;  $f(0) > 0$ ;  $f(1) < 0$ ;  $f(3) > 0$

e)  $2x^2 + 3x - 4 = 0$  có 2 nghiệm trong khoảng  $(-3; 1)$  ĐS:  $f(-3) > 0$ ;  $f(0) < 0$ ;  $f(1) > 0$

f)  $x^5 - 5x^4 + 4x - 1 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(0; 5)$  ĐS:  $f(0) < 0$ ;  $f(1/2) > 0$ ;  $f(1) < 0$ ;  $f(5) > 0$

g)  $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$  có 5 nghiệm trên  $(-2; 3)$ . ĐS:  $f(-2) < 0$ ;  $f(-3/2) > 0$ ;  $f(0) < 0$ ;  $f(1/2) > 0$ ;  $f(1) < 0$ ;  $f(3) > 0$

**Bài 7:** Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

1)  $x^3 - 3x + 1 = 0$  ĐS:  $f(-2) < 0$ ;  $f(0) > 0$ ;  $f(1) < 0$ ;  $f(2) > 0$

2)  $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$  ĐS:  $f(-4) < 0$ ;  $f(-3) > 0$ ;  $f(-1) < 0$ ;  $f(0) > 0$

3)  $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$  ĐS:  $f(-7) < 0$ ;  $f(0) > 0$ ;  $f(1) < 0$ ;  $f(9) > 0$

**Bài 8:** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

1)  $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$  ĐS:  $f(1).f(2) < 0$

2)  $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$  ĐS:  $f(0).f(2) < 0$

3) \*  $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$  HD: xét 4 TH:  $a < b < c < 0$ ;  $a < b < 0 < c$ ; ...

4)  $x^5 - mx + m - 4 = 0$  HD: sử dụng giới hạn

5)  $mx^3 - 5x + 2 = 0$  HD: sử dụng giới hạn.

Khi  $m=0$  pt luôn có nghiệm. Khi  $m \neq 0$  Đặt  $f(x) = Vt$  Khi đó  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{m} = \pm\infty$  nên luôn có 2 số  $a, b$  để

$f(a)/m.f(b)/m < 0$  nên pt luôn có nghiệm.

6)  $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$  ĐS: sử dụng giới hạn

7)  $\cos x + m \cos 2x = 0$  ĐS:  $f(\pi/4).f(3\pi/4) < 0$

8)  $m(2 \cos x - \sqrt{2}) = 2 \sin 5x + 1$  ĐS:  $f(-\pi/4).f(\pi/4) < 0$

9)  $m(x-1)^3(x+2) + 2x + 3 = 0$  ĐS:  $f(1).f(-2) < 0$

10)  $(m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2 = 0$  ĐS:  $f(0).f(1) < 0$

**Bài 9:** Cho  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thỏa mãn:  $2a + 3b + 6c = 0$

a) Tính  $a, b, c$  theo  $f(0), f(1), f(1/2)$

b) Chứng minh rằng ba số  $f(0), f(1), f(1/2)$  không thể cùng dấu

c) Chứng minh rằng phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm trong  $(0; 1)$

**Bài 10:** Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

1)  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $2a + 3b + 6c = 0$

2)  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a + 2b + 5c = 0$  ĐS:  $f(0) + f(1/2) = 0$

3)  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  ĐS: dựa vào giới hạn

**Bài 11:** Cho 3 số  $a, b, c$  khác nhau.

Chứng minh rằng phương trình  $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$

Có 2 nghiệm phân biệt.

ĐS:  $f(a); f(b); f(c)$ . Giả sử  $a < b < c$ . Thì  $f(a) > 0$ ;  $f(b) < x^4 = 3 + x \geq 2\sqrt{3x} \Leftrightarrow x^8 \geq 12x \Leftrightarrow x^7 \geq 12$  0;  $f(c) > 0$  nên pt luôn có 2 nghiệm.

**Bài 12:** Chứng minh rằng phương trình:  $ax^2 + bx + c = 0$  luôn có nghiệm  $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

với  $a \neq 0$  và  $2a + 6b + 19c = 0$ . ĐS:  $f(0) + 2f(1/3) = 0$

**Bài 13:** Cho phương trình  $x^4 - x - 3 = 0$ . Chứng minh rằng: phương trình có nghiệm  $x_0 \in (1; 2)$  và  $x_0 > \sqrt[7]{12}$