Chuyên đề 6 TỔ HỢP – XÁC SUẤT – NHỊ THỨC NEWTON

Bài 1. NHỊ THỨC NEWTON

☆☆☆

I. Kiến thức cơ bản cần nắm vững

— Nhị thức Newton là khai triển tổng (hiệu) lũy thừa có dạng:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.b^k} = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

— Nhận xét trong khai triển nhị thức:

+ Trong khai triển $(a \pm b)^n$ có $n+1$ số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
+ Số hạng tổng quát dạng: $T_{n+1} = C_n^k.a^{n-k}.b^k$ và số hạng thứ N thì $k = N-1$.
+ Trong khai triển $(a-b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là $+$, rồi $-$, rồi $+$, …….
+ Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ a và b bằng n.
+ Nếu trong khai triển nhị thức Niutơn, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn như:
  - $(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdots\cdots + C_n^n \xrightarrow{x=1} C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n.$
  - $(1-x)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n \overset{x=-1}{\Rightarrow} C_n^0 - C_n^1 + \cdots\cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$

— Công thức hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp (thường cho kết hợp với khai triển):

+ Hoán vị: $\boxed{P_n = n!} = n.(n-1).(n-2)...3.2.1,\ (n \ge 1)..$
+ Chỉnh hợp: $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}},\ \left(1 \le k \le n\right)..$
+ Tổ hợp: $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}} = \dfrac{A_n^k}{k!},\ (1 \le k \le n)$ và $\boxed{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}$.

II. Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều cho trước

1) Khai triễn dạng: $(ax^p + bx^q)^n$ kết hợp với việc giải phương trình chứa A_n^k, C_n^k, P_n.

BT 1. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triễn của nhị thức:

a) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$, $\forall x \ne 0.$ ĐS: 924.

b) $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$. ĐS: -10.

c) $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$, $\forall x \ne 0.$ ĐS: -8064.

d) $\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}\right)^{12}$. ĐS: 924.

e) $\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, $\forall x > 0.$ ĐS: 495.

f) $\left(2x + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$, $\left(x > 0\right)$. ĐS: 6528.

g) $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$, $\forall x > 0.$ ĐS: 35.

h) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$, $\forall x \ne 0.$ ĐS: 24310.

BT 2. Tìm hệ số của số hạng M và cho biết đó là số hạng thứ mấy trong khai triễn nhị thức:

a) $(2x-3y)^{17}$. $M = x^8y^9$. ĐS: $-3^9.2^8.C_{17}^9$.

b) $(x+y)^{25}$. $M = x^{12}y^{13}$. ĐS: C_{25}^{13}.

c) $(x-3)^9$. $M = x^4$. ĐS: $-3^5.C_9^5$.

d) $(1-3x)^{11}$. $M = x^6$. ĐS: $3^6.C_{11}^6$.

e) $(3x-x^2)^{12}$. $M = x^{15}$. ĐS: $-3^9.C_{12}^3$.

f) $(x^2-2x)^{10}$. $M = x^{16}$. ĐS: 3360.

g) $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$, $\forall x \neq 0$. $M = x^{31}$. ĐS: C_{40}^3.

h) $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{10}$, $\forall x \neq 0$. $M = x^{11}$. ĐS: $-2^3.C_{10}^3$.

i) $(\sqrt[3]{x^{-2}}+x)^7$. $M = x^2$. ĐS: 35.

j) $\left(\sqrt{xy}+\dfrac{x}{y}\right)^{10}$, $\forall xy \geq 0,\ y \neq 0$. $M = x^6y^2$. ĐS: 45.

k) $(1+x+x^2+x^3)^5$. $M = x^{10}$. ĐS: 101.

l) $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$. $M = x^5$. ĐS: 3320.

m) $(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7$. $M = x^5$. ĐS: 896.

BT 3. Tìm hệ số của số hạng thứ n trong khai triển nhị thức, ứng với các trường hợp sau:

a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$, $\forall x \neq 0$. $n=4$. ĐS: 120.

b) $(3-x)^{15}$. $n=13$. ĐS: 12285.

c) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^{15}$, $\forall x > 0$. $n=6$. ĐS: C_{15}^5.

d) $(2-3x)^{25}$. $n=21$. ĐS: $2^5.3^{20}.C_{25}^{20}$.

BT 4. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng (dạng có điều kiện)

a) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^3 = 5C_n^1$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\dfrac{2}{n-5}\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $x>0$? ĐS: $C_7^4 = 35$.

b) Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^n$, $\forall x \neq 0$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức: $C_{n-4}^{n-6}+n.A_n^2 = 454$? ĐS: $n=8;\quad -1792$.

c) Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển: $\left(x.\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}\right)^n$, $\forall x \neq 0$, biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện: $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2} = 79$? ĐS: 792.

d) Cho $a = 5^{\log_5 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}}$ và $b = 5^{-\frac{1}{5}\log_5(3^{x-1}+1)}$. Tìm các số thực x, biết rằng số hạng chứa a^3 trong khai triển Newton: $(a+b)^8$ bằng 224. ĐS: $x=1 \vee x=2$.

e) Tìm các giá trị của x, biết trong khai triển $\left[\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right]^n$ có số hạng thứ 6 bằng 21 và $C_n^1+C_n^3 = 2C_n^2$. ĐS: $x=0 \vee x=2$.

f) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn: $3C_n^2+2A_n^2 = 3n^2+15$. Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton: $\left(2x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^n$, $\forall x \neq 0$. ĐS: $C_{10}^4.2^6.3^4.x^{10}$.

g) Cho khai triển: $(1+2x)^n = a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $a_3 = 2014a_2$. Tìm n ? ĐS: $n = 6044$.

h) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$, $x>0$. Biết rằng n thỏa mãn điều kiện: $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$. ĐS: $C_{15}^6.2^6=320320$.

i) Cho $n\in\mathbb{Z}^+$ và $a,\ b,\ (b>0)$. Biết trong khai triển nhị thức Newton $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+b\right)^n$ có hạng tử chứa a^4b^9, tìm số hạng chứa tích a và b với số mũ bằng nhau ? ĐS: $5005a^6b^6$.

j) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^{n-3}-C_{n-1}^2=C_{n-1}^1C_{n+3}^{n+2}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển: $P=x^3\left(x^{n-8}-\dfrac{n}{3x}\right)^n$, $x\neq 0$. ĐS: $C_{12}^8.4^8$.

k) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $6C_{n+1}^{n-1}=A_n^2+160$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển: $(1-2x^3)(2+x)^n$? ĐS: -2224.

l) Cho $P=(1-x+x^2-x^3)^4=a_o+a_1x+a_2x^2+..+a_{12}x^{12}$. Tìm a_7 ? ĐS: -40.

m) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển: $P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$, biết rằng $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=5$. ĐS: 3320.

n) Cho $P(x)=(x+1)^{10}(x+2)=x^{11}+a_1x^{10}+a_2x^9+..+a_{10}x+a_{11}$. Tìm a_5 ? ĐS: 672.

o) Cho: $P(x)=\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{20}+\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$, $\forall x\neq 0$. Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức sẽ gồm bao nhiêu số hạng ? ĐS: 29 số hạng.

2) Khai triển dạng: $(a+bx^p+cx^q)^n$ kết hợp với việc giải phương trình chứa A_n^k, C_n^k, P_n.

Viết $P(x)=(a+bx^p+cx^q)^n=\left[a+(bx^p+cx^q)\right]^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}(bx^p+cx^q)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}\sum_{i=0}^{k}C_k^i(bx^p)^{k-i}.(cx^q)^i$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}C_n^ka^{n-k}.C_k^i.(bx^p)^{k-i}.(cx^q)^i,\ \text{với } k,\ i\in\mathbb{N}.$$

BT 5. Tìm hệ số của số hạng M và cho biết đó là số hạng thứ mấy trong khai triển nhị thức:

a) $(1+x+3x^2)^{10}$. $M=x^4$. ĐS: 1695.

b) $(1+2x+3x^2)^{10}$. $M=x^4$. ĐS: 8085.

c) $(1+x+2x^2)^{10}$. $M=x^{17}$. ĐS: 38400.

d) $(2+\sqrt{x}-3x^2)^5$, $\forall x\geq 0$. $M=x^2$. ĐS: -230.

e) $(x^2+x-1)^5$. $M=x^3$. ĐS: -10.

f) $(1+x^2-x^3)^8$. $M=x^8$. ĐS: 238.

g) $(1+x+x^2+x^3)^5$. $M=x^{10}$. ĐS: 101.

h) $\left(1-x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{12}$, $\forall x\neq 0$. $M=x^8$. ĐS: -27159.

BT 6. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng (dạng có điều kiện)

a) Cho $(1+x-x^2)^{10}=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{20}x^{20}$. Tìm a_8 ? ĐS: $a_8=45$.

b) Cho $P(x)=\left[\dfrac{1}{x}-(x+x^2)\right]^n$, $\forall x\neq 0$. Xác định số hạng không phụ thuộc vào x khi khai triển $P(x)$ biết n thỏa: $C_n^3+2n=A_{n+1}^2$. ĐS: -98.

c) Tìm hệ số x^4 trong khai triển biểu thức $\left[\sqrt{x}+3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]^n$, $(x>0)$? Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^1+8C_{n+2}^2=3C_{n+1}^3$. ĐS: 4422.

d) Cho khai triển nhị thức: $(1-2x+x^3)^n = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_{3n}x^{3n}$. Xác định hệ số a_6, biết rằng: $a_o + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + \cdots\cdots + \dfrac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}$. ĐS: $a_6 = -150$.

e) Cho: $(1+2x)^{10}(3+4x+4x^2)^2 = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{14}x^{14}$. Tìm a_6 ? ĐS: $a_6 = 482496$.

f) Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển Newton: $\left(\dfrac{x^2}{4} + x + 1\right)^2.(x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện: $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$. ĐS: $a_{10} = 2956096$.

3) Khai triển $(ax^p + bx^q)^n$; $(a + bx^p + cx^q)^n$ kết hợp tính tổng đơn giản

Khai triển Newton: $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \cdots\cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$, với:

— Số mũ của a giảm dần và số mũ của b tăng dần. Nếu trong biểu thức không có số mũ tăng hoặc giảm thì nó (a hoặc b) có thể bằng 1.

— Nếu dấu của biểu thức đan nhau thì khai triển sẽ có dạng $(a-b)^n$.

— Trong biểu thức có $C_n^{\boxed{0}} + C_n^{\boxed{2k}} + C_n^{\boxed{4k}}...$ (toàn chẵn hoặc toàn lẻ) thì đó là dấu hiệu nhận dạng khai triển hai biểu thức dạng $(a-b)^n$ và $(a+b)^n$ khi chọn a, b rồi cộng lại (khi toàn chẵn) hoặc trừ đi (khi toàn lẻ) theo từng vế.

<u>BT 7.</u> Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12} ? ĐS: $n=10;\ 210$.

<u>BT 8.</u> Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x} + x^3\right)^n$, với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024 ? ĐS: $n=10;\ 210$.

<u>BT 9.</u> Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x) = \left(\dfrac{2}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ với $x>0$. Biết n thỏa mãn điều kiện: $C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$. ĐS: $C_{12}^8.2^4 = 7920$.

<u>BT 10.</u> Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + \cdots\cdots + (-1)^nC_n^n = 2048$. ĐS: $a_{10} = C_{11}^{10}.2 = 22$.

<u>BT 11.</u> Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(\sqrt{x} - 3x^2)^n$, $(x>0)$, biết rằng n là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng -2048 ? ĐS: -4455.

<u>BT 12.</u> Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048$. ĐS: 22.

<u>BT 13.</u> Tìm hệ số của x^{19} trong khai triển biểu thức $P = (2x-1)^9.(x+2)^n$, biết rằng n là số nguyên dương: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2048$? ĐS: 8960.

<u>BT 14.</u> Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \cdots\cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$? ĐS : $a_7 = -2099520$.

<u>BT 15.</u> Tìm hệ số x^4 trong khai triển $(1+x+2x^2)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = 512$. ĐS: 105.

<u>BT 16.</u> Hãy tìm hệ số của x^5 trong khai triển: $P(x) = (1-2x+4x^2)^{3n}$.
Biết rằng: $C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + C_{2014}^8 + \cdots\cdots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1$ với n là số nguyên dương.
ĐS: $a_5 = -2C_{12}^3C_3^14^2 - 8C_{12}^4C_4^34^1 + (-2)^5C_{12}^5C_5^5$.

<u>BT 17.</u> Tìm hệ số chứa x^{18} trong khai triển $P(x) = (x+2)^{13}(x^2-2x+4)^n$. Biết n nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \cdots\cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$. ĐS: $a_{18} = 15138816$.

4) Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(a+bx)^n$.

Xét khai triển nhị thức Newton $(a+bx)^n$ có số hạng tổng quát: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k x^k$.

Đặt $a_k=C_n^k a^{n-k}b^k$, $0\le k\le n$ thì dãy hệ số là $\{a_k\}$. Khi đó hệ số lớn nhất trong khai triển này thỏa hệ phương trình: $\begin{cases} a_k\ge a_{k+1}\\ a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Rightarrow k_o\Rightarrow a_{k_o\max}=C_n^{k_o}a^{n-k_o}b^{k_o}$.

BT 18. Trong khai triển $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{3}\right)^{11}$ thành $a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{11}x^{11}$. Hãy tìm k để hệ số a_k lớn nhất và tính nó ? $(0\le k\le 11,\ k:\text{nguyên})$ ĐS: $a_{k\max}=\dfrac{2^8}{3^{11}}.C_{11}^8$.

BT 19. Cho khai triển : $(1+2x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, trong đó $n\in\mathbb{Z}$ và các hệ số $a_0,a_1,...,a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0,a_1,...,a_n$? ĐS: $a_{\max}=126720$.

BT 20. Cho khai triển $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0,a_1,a_2,...,a_n$? Biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^2C_n^{n-2}+2C_n^{n-2}C_n^{n-1}+C_n^1C_n^{n-1}=11025$? ĐS: $a_{\max}=\dfrac{1001}{62208}$.

BT 21. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho khai triển $(1+x)^n$ có tỉ số hai hệ số liên tiếp trong khai triển trên bằng $\dfrac{7}{15}$? ĐS: $n=21$.

5) Tìm số hạng hữu tỉ (hoặc số hạng là số nguyên) trong khai triển $(a+b)^n$.

Xét khai triển $(a+b)^n$ có số hạng tổng quát: $C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^k.\alpha^{\frac{m}{p}}.\beta^{\frac{r}{q}}$ với α, β là các số hữu tỉ. Số hạng hữu tỉ cần tìm thỏa mãn hệ: $\begin{cases}\dfrac{m}{p}\in\mathbb{N}\\ \dfrac{r}{q}\in\mathbb{N}\end{cases}$ $\left(k\in\mathbb{N},\ 0\le k\le n\right)\Rightarrow k_o\Rightarrow C_n^{k_o}a^{n-k_o}b^{k_o}$ là số hạng cần tìm.

BT 22. Tìm số hạng là số nguyên trong khai triển nhị thức: $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $\left(P_n\right)^3.C_n^n.C_{2n}^n.C_{3n}^n=P_{27}$. ĐS: $C_9^3 3^3.2^1$ và $C_9^9 2^3$.

BT 23. Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5}\right)^{3n+1}$. Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_n^n+2C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=C_{n+2}^{2n-3}$. ĐS: $\dfrac{C_{10}^0}{32}$; $\dfrac{C_{10}^6 2^3.5^2}{32}$.

III. Chứng minh hoặc tính tổng

1) Sử dụng những nhận xét cơ bản hoặc tính chất, công thức $A_n^k,\ C_n^k,\ P_n$.

- Trong khai triển $(a-b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là +, rồi −, rồi +, …….
- Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ a và b bằng n.
- Vận dụng linh hoạt tính chất: $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, $C_n^k=C_n^{n-k}$ và $\dfrac{1}{k+1}.C_n^k=\dfrac{1}{n+1}.C_{n+1}^{k+1}$.
- Khi gặp tổng giữa các tích của hai công thức tổ hợp $(\cdots+C_n^i.C_n^j+\cdots)$, lúc đó thường so sánh hệ số của biến cùng bậc với nhau, chẳng hạn so sánh khai hệ số của số mũ cùng bậc của hai khai triển: $(1-x^2)^n$ với $(1-x)^n(x+1)^n$......

BT 24. Tính các tổng sau:

a) $S=C_5^0+C_5^1+\cdots\cdots+C_5^5$. ĐS: $S=2^5$.

b) $S=C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+\cdots\cdots+2^5C_5^5$. ĐS: $S=3^5$.

c) $S=4^0C_8^0+4^1C_8^1+\cdots\cdots+4^8C_8^8$. ĐS: $S=5^8$.

d) $S=C_{2010}^0+C_{2010}^1+C_{2010}^2+\cdots\cdots+C_{2010}^{2010}$. ĐS: $S=2^{2010}$.

e) $S=C_{2010}^0+2C_{2010}^1+2^2C_{2010}^2+\cdots\cdots+2^{2010}C_{2010}^{2010}$. ĐS: $S=3^{2010}$.

f) $S=C_{10}^6+C_{10}^7+C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}$. ĐS: $S=386$.

g) $S=C_{100}^0+C_{100}^2x^2+C_{100}^4+\cdots+C_{100}^{100}$. ĐS: $S=2^{99}$.

h) $S=2.C_{2010}^1+2^3.C_{2010}^3+2^5.C_{2010}^5+\cdots\cdots+2^{2009}.C_{2010}^{2009}$. ĐS: $S=\frac{1}{2}(3^{2010}-1)$.

BT 25. Tính $S=\frac{1}{2}C_{2n}^1-\frac{1}{3}C_{2n}^2+\cdots\cdots+(-1)^k.\frac{1}{k}C_{2n}^{k-1}+\cdots\cdots+(-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$. ĐS: $S=\frac{2n}{2n+1}$.

BT 26. Tính tổng: $S=\frac{1}{2!.2012!}+\frac{1}{4!.2010!}+\cdots\cdots+\frac{1}{2012!.2!}+\frac{1}{2014!}$. ĐS: $S=\frac{2^{2013}-1}{2014!}$.

BT 27. Hãy tính các tổng sau:

a) $S_1=1^2.C_{2013}^1+2^2.C_{2013}^2+3^2.C_{2013}^3+\cdots\cdots+2013^2.C_{2013}^{2013}$. ĐS: $2013.2014.2^{2011}$..

b) $S_2=\frac{C_{2013}^0}{1}+\frac{C_{2013}^1}{2}+\frac{C_{2013}^2}{3}+\cdots\cdots+\frac{C_{2013}^{2013}}{2014}$. ĐS: $S_2=\frac{2^{2014}-1}{2014}$.

BT 28. Chứng minh: $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$ với $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$.

BT 29. Cho số tự nhiên $n\geq 2$, chứng minh đẳng thức: $\left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2+\left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2=\frac{C_{2n+2}^{n+1}-1}{(n+1)^2}$.

BT 30. Tính $S=\frac{C_{12}^{12}}{11.12}+\frac{C_{13}^{12}}{11.12}+\frac{C_{14}^{12}}{11.12}+\cdots\cdots+\frac{C_{2013}^{12}}{2012.2013}+\frac{C_{2014}^{12}}{2013.2014}$? ĐS: $S=\frac{1}{132}C_{2013}^{11}$.

BT 31. Chứng minh $\forall n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$, ta luôn có: $C_n^0C_n^1...C_n^n\leq\left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1}$.

BT 32. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức sau đây:

$C_{2n}^0+C_{2n}^2.3^2+\cdots+C_{2n}^{2k}.3^{2k}+\cdots+C_{2n}^{2n-2}.3^{2n-2}+C_{2n}^{2n}.3^{2n}=2^{15}.(2^{16}+1)$. ĐS: $n=8$.

2) Khai triển kết hợp với đạo hàm để chứng minh hoăc tính tổng

a) Sử dụng đạo hàm cấp I

- Nhận dạng: các hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần ($1, 2, 3, ..., n$ hay $1^2, 2^2, ..., n^2$) hoặc giảm dần dạng ($n, ..., 3, 2, 1$ hay $n^2,..., 2^2, 1^2$) (không kể dấu). Hay tổng quát hơn nó có dạng là $k.C_n^k$ hoặc dạng $k.C_n^ka^{n-k}b^{k-1}$.
- Phương pháp giải:
  + Bước 1. Xét khai triển: $(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x+C_n^2a^{n-2}x^2+\cdots\cdots+C_n^{n-1}ax^{n-1}+C_n^nx^n$.
  + Bước 2. Lấy đạo hàm hai vế được:
  $$n(a+x)^{n-1}=C_n^1a^{n-1}+2C_n^2a^{n-2}x+\cdots\cdots+(n-1)C_n^{n-1}ax^{n-2}+C_n^nx^{n-1}.\quad (i)$$
  + Bước 3. Chọn giá trị x và a thích hợp dựa vào đề bài để thế vào (i).

BT 33. Chứng minh $\forall n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}^*$, thì: $C_n^1.3^{n-1}+2.C_n^2.3^{n-2}+3.C_n^3.3^{n-3}+\cdots+n.C_n^n=n.4^{n-1}$.

BT 34. Chứng minh $\forall n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}^*$, thì: $2^{n-1}C_n^1+2^{n-1}C_n^2+2^{n-3}C_n^3+2^{n-4}C_n^4+\cdots\cdots+nC_n^n=n.3^{n-1}$.

BT 35. Tìm $n\in\mathbb{Z}^+$, thỏa: $C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+\cdots+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2005$ ĐS: 1002.

BT 36. Tính tổng S trong các trường hợp sau:

a) $S=4C_{100}^{2}+8C_{100}^{4}+12C_{100}^{6}+\cdots+200C_{100}^{100}$. ĐS: $S=100.2^{99}$.

b) $S=C_{2000}^{0}+2C_{2000}^{1}+3C_{2000}^{2}+\cdots+2001C_{2000}^{2000}$. ĐS: $S=1001.2^{2000}$.

c) $S=2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+2006C_{2007}^{2}+\cdots+2C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}$. ĐS: $S=2009.2^{2006}$.

BT 37. Cho $P(x)=\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Hãy tìm số hạng chứa x^6, biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn đẳng thức: $1.2^{n-1}C_n^1+2.2^{n-2}C_n^2+3.2^{n-3}C_n^3+\cdots\cdots+nC_n^n=12.3^{n-1}$. ĐS: $2^6C_{12}^6x^6$.

BT 38. Cho khai triển $(x-1)^{100}=a_ox^{100}+a_1x^{99}+\cdots\cdots\cdots+a_{98}x^2+a_{99}x+a_{100}$.

Tính tổng: $S=100a_o.2^{100}+99a_1.2^{99}+\cdots\cdots+2a_{98}.2^2+1a_{99}.2^1+1$. ĐS: $S=201$.

BT 39. Cho khai triển $(1-3x)^{2014}=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots+a_{2014}x^{2014}$.

Tính tổng $S=a_o+2a_1+3a_1+\cdots\cdots+2015a_{2014}$? ĐS: $S=3022.2^{2014}$.

BT 40. Tính tổng: $S=C_{2014}^0+3C_{2014}^2+5C_{2014}^4+\cdots\cdots\cdots+2015.C_{2014}^{2014}$. ĐS: $S=1008.2^{2013}$.

BT 41. Tính giá trị biểu thức: $A=C_{2014}^2+2C_{2014}^4+3C_{2014}^6+\cdots\cdots\cdots+1007C_{2014}^{2014}$. ĐS: $A=\dfrac{1007}{2}.2^{2013}$.

b) Sử dụng đạo hàm cấp II

- Nhận dạng: các hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần $\left[1.2,\ 2.3,\ ...,(n-1)n\right]$ hoặc giảm dần $\left[(n-1)n,...,\ 2.3,\ 1.2\right]$ (không kể dấu), có dạng tổng quát: $k.C_n^ka^{n-k}$ hoặc $k(k-1)C_n^k$.
- Phương pháp giải: Các bước giải tương tự như đạo hàm cấp 1.

BT 42. Tính tổng: $S=1^2C_{2007}^1+2^2C_{2007}^2+3^2C_{2007}^3+\cdots\cdots+2006^2C_{2007}^{2006}+2007^2C_{2007}^{2007}$. ĐS: $2007.2008.2^{2005}$.

BT 43. Chứng minh: $1^2C_{2013}^1+2^2C_{203}^2+\cdots\cdots+2012^2C_{2013}^{2012}+2013^2C_{2013}^{2013}=2013.2014.2^{2011}$.

BT 44. Cho $n\in\mathbb{Z}$, thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{A_n^3+C_n^3}{(n-1)(n-2)}=35,\ (n\geq 3)$.

Hãy tính tổng: $S=2^2.C_n^2-3^2C_n^3+4^2C_n^4-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n.n^2.C_n^n$? ĐS: $S=30$.

3) Khai triển kết hợp với đạo hàm để chứng minh hoặc tính tổng

- Nhận dạng: Số hạng tổng quát có dạng $\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}\cdot C_n^k$ **(có dạng phân số)**
- Phương pháp giải:
  + Bước 1. Xét khai triễn: $(cx+d)^n=C_n^0(cx)^n+C_n^1(cx)^{n-1}d+\cdots\cdots+C_n^{n-1}cxd^{n-1}+C_n^nd^n$.
  + Bước 2. Lấy tích phân hai vế với cận a và b

$$\int_a^b(cx+d)^n\,dx=\int_a^b\left[C_n^0(cx)^n+C_n^1(cx)^{n-1}d+\cdots\cdots\cdots+C_n^{n-1}cxd^{n-1}+C_n^nd^n\right]dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c}\frac{(cx+d)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b=\left(c^n\frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^0+c^n\frac{x^n}{n}C_n^1+\cdots\cdots+cd^{n-1}\frac{x^2}{2}C_n^{n-1}+d^nC_n^nx\right)\Bigg|_a^b.$$

  + Bước 3. Chọn $a,\ b,\ c,\ d$ phù hợp dựa vào đề bài.

BT 45. Các bài toán mở đầu về sử dụng tích phân

a) Tính tổng: $S=C_n^0+\dfrac{1}{2}C_n^1+\dfrac{1}{3}C_n^2+\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+1}\cdot C_n^n$. ĐS: $S=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

b) Tính tổng: $S=C_n^0+\dfrac{2^2-1}{2}C_n^1+\dfrac{2^3-1}{3}C_n^2+\cdots\cdots+\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$. ĐS: $S=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

c) Tính tổng: $S=\dfrac{2^n.C_n^0}{n+1}+\dfrac{2^{n-1}C_n^1}{n}+\cdots\cdots\cdots+\dfrac{2^0C_n^n}{1}$. ĐS: $S=\dfrac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}$.

d) $S=\dfrac{2^2-1}{2}C_{2010}^1+\dfrac{2^4-1}{4}C_{2010}^3+\dfrac{2^6-1}{6}C_{2010}^5+\cdots\cdots+\dfrac{2^{2010}-1}{2010}C_{2010}^{2009}\cdot$ ĐS: $\dfrac{3^{2011}-1-2^{2011}}{4022}\cdot$

e) $S=C_n^0+\dfrac{1}{2}C_n^1.2+\dfrac{1}{3}C_n^2.2^2+\dfrac{1}{4}C_n^3.2^3+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+1}C_n^n.2^n.$ ĐS: $S=\dfrac{3^{n+1}-1}{2(n+1)}\cdot$

f) $S=\dfrac{1}{2}C_{2n}^1+\dfrac{1}{4}C_{2n}^3+\dfrac{1}{6}C_{2n}^5+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}\cdot$ ĐS: $S=\dfrac{2^{2n}-1}{2n-1}\cdot$

g) $S=\dfrac{1}{2}C_n^1+\dfrac{2}{3}C_n^2+\dfrac{3}{4}C_n^3+\cdots\cdots+\dfrac{n}{n+1}C_n^n\cdot$ ĐS: $S=\dfrac{(n-1)2^n+1}{n+1}\cdot$

h) Tìm $n\in\mathbb{Z}^+$ thỏa: $\dfrac{1}{2}C_{2n}^1-\dfrac{2}{3}C_{2n}^2+\dfrac{3}{4}C_{2n}^3-\dfrac{4}{5}C_{2n}^4+\cdots\cdots-\dfrac{2n}{2n+1}C_{2n}^{2n}=\dfrac{1}{123}\cdot$ ĐS: $n=61$.

BT 46. Tìm hệ số của x^{20} trong khai triển Newton của biểu thức $\left(\dfrac{2}{x^3}+x^5\right)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^0-\dfrac{1}{2}C_n^1+\dfrac{1}{3}C_n^2\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}C_n^n=\dfrac{1}{13}\cdot$ ĐS: $C_{12}^7.2^5=25344$.

BT 47. Tìm hệ số chứa x^2 trong khai triển $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$, biết n là nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $2C_n^0+\dfrac{2^2}{2}C_n^1+\dfrac{2^3}{3}C_n^2+\cdots\cdots+\dfrac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\dfrac{6560}{n+1}$? ĐS: $a_2=2^{-2}.C_7^2=\dfrac{21}{4}$.

BT 48. Tìm $n\in\mathbb{Z}^+$ thỏa: $C_n^0+\dfrac{2}{2}C_n^1+\dfrac{2^2}{3}C_n^2+\cdots\cdots+\dfrac{2^n}{n+1}C_n^n=\dfrac{121}{n+1}\cdot$ ĐS: $n=4$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 49. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Newton $\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^n$, $(x\neq 0)$. Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $4C_{n+1}^3+2C_n^2=A_n^3$.

BT 50. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton $\left(3x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ với $x\neq 0$, biết rằng $n\in\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn điều kiện: $2P_n-(4n+5)P_{n-2}=3A_n^{n-2}$.

BT 51. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(1-x\sqrt{3})^{2n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Biết số nguyên dương n thỏa mãn mãn điều kiện: $\dfrac{2}{C_n^2}+\dfrac{14}{3C_n^3}=\dfrac{1}{n}\cdot$

BT 52. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $x>0$. Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn phương trình: $2(C_n^2+C_n^3)=3n^2-5n$.

BT 53. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn phương trình: $5C_n^{n-1}=C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton $\left(\dfrac{nx^2}{14}-\dfrac{1}{x}\right)^n$, $x\neq 0$.

BT 54. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$, biết hệ số của số hạng thứ ba bằng 1080.

BT 55. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức: $(x^2+2)^n$, biết rằng số nguyên dương n thỏa mãn phương trình: $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$.

BT 56. Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức: $(\sqrt{x}-3x^2)^n$, $(x>0)$, biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng -2048.

BT 57. Tìm hệ số x^4 trong khai triển $\left(\frac{2}{x}-x^3\right)^n$, $x>0$. Biết n là số nguyên dương thỏa mãn phương trình: $C_{n-4}^{n-6}+nA_n^2=454$.

BT 58. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{-1} trong khai triển $\left(2x^2-\frac{3}{x^3}\right)^n$ thành đa thức. Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn đẳng thức: $C_n^3-C_{n-1}^{n-3}=C_{n-1}^{n-2}.C_{n+3}^1$.

BT 59. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $p(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$. Biết số nguyên dương n thỏa mãn phương trình: $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$.

BT 60. Tìm số hạng không phụ thuộc vào x trong khai triển Newton của nhị thức: $\left(2x-\frac{1}{2x^2}\right)^n$, biết $n\in\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn phương trình: $2C_n^1+C_n^2=90$.

BT 61. Cho số nguyên dương n thỏa mãn phương trình: $A_n^3+6C_n^2-4C_n^1=100$. Tìm hệ số chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(x^2+\frac{2n}{5}\right)^{3n}$.

BT 62. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-x^2\right)^n$, $x\neq 0$. Biết rằng n là số nguyên dương thay đổi thỏa mãn phương trình: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+\cdots\cdots+C_{2n+1}^n=2^{28}-1$.

BT 63. Tìm số hạng chứa x^{10} của $P(x)=\left(3x^3-\frac{1}{x}\right)^n, x\neq 0$. Biết rằng $n\in\mathbb{Z}^+$, thỏa: $A_n^2-C_{n+1}^{n-1}=5n+7$.

BT 64. Khai triển nhị thức: $(2+x)^n$ theo lũy thừa tăng dần của x ta được số hạng thứ tám là 144. Tìm x biết n thỏa mãn phương trình: $C_{n+3}^{n+1}+2C_{n+2}^n=16(n+2),\ n\in\mathbb{N}^*$.

BT 65. Tìm hệ số của x^6 trong $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$, biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024 ?

BT 66. Tìm hệ số của x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(x+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$, biết n thỏa mãn n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^1+4C_n^2+3C_n^3 2^2+4C_n^4 2^3+\cdots\cdots+nC_n^n 2^{n-1}=6561n$.

BT 67. Tìm hệ số của x^{19} trong khai triển biểu thức $P=(2x-1)^9.(x+2)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thay đổi thỏa mãn phương trình: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2048$.

BT 68. Cho khai triển: $(1+x+x^2)^{12}=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots+a_{24}x^{24}$. Tính a_4.

BT 69. Tìm hệ số x^4 trong khai triễn $P(x)=(1-x-3x^3)^n$, biết $n\in\mathbb{Z}^+$, thỏa: $C_n^{n-2}+6n+5=A_{n+1}^2$.

BT 70. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn phương trình: $C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=255$. Hãy tìm số hạng chứa x^{14} trong khai triển: $P(x)=(1+x+3x^2)^n$.

BT 71. Tìm hệ số của x^{13} trong khai triển $\left(\frac{1}{4}+x+x^2\right)^3.(2x+1)^{3n}$ với n là số tự nhiên thay đổi thỏa mãn phương trình: $A_n^3+C_n^{n-2}=14n$.

BT 72. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=255$. Hãy tìm số hạng chứa x^{14} trong khai triển: $P(x)=(1+x+3x^2)^n$.

BT 73. Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $P(x)=(1-x+x^3-x^4)^n$. Biết rằng n là số nguyên dương thay đổi thỏa mãn phương trình: $C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}+C_{2n+1}^{n+3}+\cdots\cdots+C_{2n+1}^{2n-1}+C_{2n+1}^{2n}=2^8-1$.

BT 74. Tìm $n \in \mathbb{Z}^+$, thỏa: $(x^2+x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ và $a_1 + 2a_2 + \cdots + 2na_{2n} = 81$?

BT 75. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển: $P(x) = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n}$. Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$.

BT 76. Khai triển nhị thức $P(x) = (1-6x)^n = a_0 + a_1x + \cdots\cdots + a_kx^k + \cdots\cdots + a_nx^n$. Hãy tính giá trị của biểu thức $T = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots\cdots + \dfrac{a_n}{2^n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $2C_n^2 - 8C_n^1 = n$.

BT 77. Tìm số hạng hữu tỉ trong các khai triển nhị thức Newton sau:

a/ $\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt{3}\right)^7$. b/ $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$. c/ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt[5]{5}\right)^{10}$. d/ $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\sqrt[5]{2}\right)^{10}$.

BT 78. Hãy tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Newton:
$P(x) = (2x+1)^{13} = a_0x^{13} + a_1x^{12} + a_2x^{11} + \cdots\cdots + a_{12}x + a_{13}$.

BT 79. Cho khai triển nhị thức $P(x) = (1+3x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_nx^n$. Hãy tìm hệ số lớn nhất trong khai triển biết n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{27}$.

BT 80. Tính tổng: $T = C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + C_{2014}^8 + \cdots\cdots\cdots + C_{2014}^{1006}$.

BT 81. Tính tổng: $S = \dfrac{A_{2013}^0}{0!} + \dfrac{A_{2013}^1}{1!} + \dfrac{A_{2013}^2}{2!} + \cdots\cdots + \dfrac{A_{2013}^{2013}}{2013!}$.

BT 82. Tính tổng $S = 1.2.C_{2013}^2 + 2.3.C_{2013}^3 + \cdots\cdots + 2012.2013.C_{2013}^{2013}$.

BT 83. Tính tổng: $S = 1^2C_n^0 + 2^2C_n^1 + 3^2C_n^2 + \cdots\cdots + (n+1)^2C_n^n$.

BT 84. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện sau:

a/ $C_{2n}^0 + 2C_{2n}^2 + 3C_{2n}^4 + \cdots\cdots\cdots + (n+1)C_{2n}^{2n} = 2^{2n+1}$..

b/ $C_{2011}^0C_{2011}^{2010} + C_{2011}^1C_{2010}^{2009} + \cdots\cdots + C_{2011}^kC_{2011-k}^{2010-k} + \cdots\cdots + C_{2011}^{2010}C_1^0 = 2011.2^n$.

c/ $C_{2n+1}^1.2^{2n} - 2.C_{2n+1}^2.2^{2n-1}.3 - \cdots\cdots\cdots - 2nC_{2n+1}^{2n}.2.3^{2n-1} + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}.3^{2n} = 2011$.

d/ $\dfrac{C_n^1}{2} - \dfrac{2C_n^2}{2^2} + \dfrac{3C_n^3}{2^3} - \cdots\cdots\cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{nC_n^n}{2^n} = \dfrac{1}{32}$.

e/ $\begin{cases} (1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_kx^k + \cdots\cdots + a_nx^n \\ \dfrac{a_{k-1}}{2} = \dfrac{a_k}{9} = \dfrac{a_{k+1}}{24},\ (1 \le k \le n-1) \end{cases}$.

BT 85. Tính tổng trong các trường hợp sau đây:

a/ $S = C_{2000}^0 + 2C_{2000}^1 + 3C_{2000}^2 + \cdots\cdots\cdots + 2001C_{2000}^{2000}$.

b/ $S = 1.2C_{16}^2 - 2.3C_{16}^3 + 3.4C_{16}^4 - \cdots\cdots\cdots - 14.15C_{16}^{15} + 15.16C_{16}^{16}$.

c/ $S = C_n^0 + \dfrac{2^2-1}{2}C_n^1 + \dfrac{2^3-1}{3}C_n^2 + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

d/ $S = \dfrac{2^6}{1}C_6^0 + \dfrac{2^5}{2}C_6^1 + \dfrac{2^4}{3}C_6^2 + \dfrac{2^3}{4}C_6^3 + \dfrac{2^2}{5}C_6^4 + \dfrac{2}{6}C_6^5 + \dfrac{1}{7}C_6^6$.

e/ $S = \dfrac{1}{2}C_n^0 - \dfrac{1}{4}C_n^1 + \dfrac{1}{6}C_n^2 - \dfrac{1}{8}C_n^3 + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n$.

f/ $S = C_9^0 + \dfrac{3^2-2^2}{2}C_9^1 + \dfrac{3^3-2^3}{3}C_9^2 + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{3^9-2^9}{9}C_9^8 + \dfrac{3^{10}-2^{10}}{10}C_9^9$.

g/ $S = 3C_{100}^0 + \dfrac{2^2-1}{2}C_{100}^1 + \dfrac{2^3+1}{3}C_{100}^2 + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{2^{100}-1}{100}C_{100}^{99} + \dfrac{2^{101}+1}{101}C_{100}^{100}$.

h/ $S = \dfrac{1}{100}\left(C_{100}^1\right)^2 + \dfrac{2}{99}\left(C_{100}^2\right)^2 + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{99}{2}\left(C_{100}^{99}\right)^2 + 100\left(C_{100}^{100}\right)^2$.

i/ $S = \dfrac{1}{2}C_{19}^0 - \dfrac{1}{3}C_{19}^1 + \dfrac{1}{4}C_{19}^2 - \cdots\cdots\cdots + \dfrac{1}{20}C_{19}^{18} - \dfrac{1}{21}C_{19}^{19}$.

Bài 2. TỔ HỢP & XÁC SUẤT

☆☆☆

I – Các qui tắc đếm cơ bản

① Qui tắc nhân

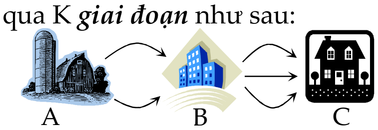
Giả sử một nhiệm vụ X nào đó thực hiện lần lượt qua K ***giai đoạn*** như sau:

Giai đoạn thứ nhất K_1 có n_1 cách làm.

Giai đoạn thứ hai K_2 có n_2 cách làm.

…………………………………………

Giai đoạn thứ K có n_k cách làm.



Có $2.3=6$ cách đi từ A đến C

Mỗi cách làm của việc này ***không trùng*** với bất cứ cách làm nào của việc còn lại. Khi đó, để hoàn thành công việc X thì ta phải thực hiện đồng thời K giai đoạn trên, nên có: $n(\text{X})=\boxed{n_1.n_2.n_3...n_k}$ cách thực hiện công việc.

② Qui tắc cộng

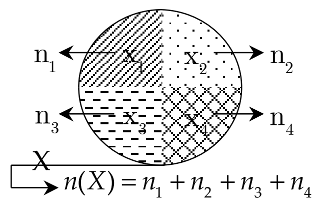
Một công việc X bao gồm k công việc (***trường hợp***) $X_1,\ X_2,\ X_3,\ ...,\ X_k$, với mỗi công việc ***độc lập nhau,*** trong đó:

Giai đoạn thứ nhất K_1 có n_1 cách thực hiện.

Giai đoạn thứ hai K_2 có n_2 cách thực hiện.

………………………………………………

Giai đoạn thứ K có n_k cách thực hiện.



Để hoàn thành X ta có thể thực hiện một trong k công việc $X_i,\ (i=\overline{1,\ k})$, suy ra số cách thực hiện công việc X là $n(X)=\boxed{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k}$ cách.

③ Qui tắc bù trừ

Đối tượng x cần đếm được chứa trong một đối tượng X gồm x và $\overline{x}$ đối lập nhau. Nếu X có m cách chọn, $\overline{x}$ có n cách chọn. Vậy x có $(m-n)$ cách chọn.

Về mặt thực hành, đề cho đếm những đối tượng thỏa a và b. Ta cần làm:

Bài toán 1: Đếm những đối tượng thỏa a.

Bài toàn 2: Đếm những đối tượng thỏa a, không thỏa b.

Do đó, kết quả bài toán = kết quả bài toán 1 − kết quả bài toán 2.

Lưu ý

- Nếu bài toán chia ra từng ***trường hợp*** không trùng lập để hoàn thành công việc thì dùng ***qui tắc cộng***, nếu bài toán chia ra từng ***giai đoạn*** thực hiện thì ta dùng ***qui tắc nhân***. Trong nhiều bài toán, ta kết hợp giữa hai qui tắc này lại với nhau để giải mà cần phải phân biệt khi nào cộng, khi nào nhân, khi nào trừ.
- "Nếu cho tập hợp hữu hạn bất kỳ A và B giao nhau khác rỗng. Khi đó thì số phần tử của $A\cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A\cap B$, tức là: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$". Đó là quy tắc cộng mở rộng $\Rightarrow$ Khi giải các bài toán đếm liên quan đến tìm số sao cho các số đó là ***số chẵn, số lẻ, số chia hết*** ta nên ưu tiên việc thực hiện ***(chọn) chúng trước*** để tránh sự trùng lặp.

II – Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

① Hoán vị

Ví dụ: Cho tập hợp gồm ba phần tử $A=\{a;b;c\}$ sắp xếp ba phần tử của A theo thứ tự khác nhau ta có tất cả 6 cách sắp xếp là $(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)$. Số cách là số hoán vị của 3 phần tử, tức: $P_3=3!=3.2.1=6$ cách xếp.

Định nghĩa: Cho tập hợp A có n phần tử $(n\geq 1)$. Khi ***sắp xếp n phần tử*** này theo một ***thứ tự*** ta được một hoán vị các phần tử của tập hợp A.

Số hoán vị của n phần tử là: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1.$

② **Chỉnh hợp**

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của $A,\ (1 \le k \le n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!},\ (1 \le k \le n).$

③ **Tổ hợp**

Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm $k,\ (1 \le k \le n)$ phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Lập một tổ hợp chập k của A là lấy ra k phần tử của A (không quan tâm đến thứ tự các phần tử). Số các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}\cdot$

Phân biệt giữa tổ hợp và chỉnh hợp:

Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử $(k \le n)$ mà không thứ tự, không hoàn lại là $C_n^k,$ có thứ tự, không hoàn lại là $A_n^k.$

III – Xác suất và các nguyên tắc tính xác suất

① **Loại 1. Sử dụng định nghĩa xác suất**

— Bước 1. Tính số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega)$ là tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử (giải quyết bài toán đếm trước chữ "Tính xác suất").

— Bước 2. Tính số phần tử của biến cố A đang xét là kết quả của phép thử làm xảy ra A (giải quyết bài toán sau chữ "Tính xác suất") là $n(A).$

— Bước 3. Áp dụng công thức: $P\left(A\right) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}\cdot$

② **Loại 2. Áp dụng các nguyên tắc tính xác suất**

— Bước 1. Gọi A là biến cố cần tính xác suất và $A_i,\ (i = \overline{1,n})$ là các biến cố liên quan đến A sao cho:
Biến cố A biểu diễn được theo các biến cố $A_i,\ (A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n).$
Hoặc xác suất của các biến cố A_i tính toán dễ dàng hơn so với $A.$

— Bước 2. Biểu diễn biến cố A theo các biến cố A_i.

— Bước 3. Xác định mối liên hệ giữa các biến cố và áp dụng các nguyên tắc:
Nếu $A_1,\ A_2$ xung khắc $(A_1 \cap A_2 = \varnothing) \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$
Nếu $A_1,\ A_2$ bất kỳ $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1.A_2).$
Nếu $A_1,\ A_2$ độc lập $\Rightarrow P(A_1.A_2) = P(A_1).P(A_2).$
Nếu $A_1,\ A_2$ đối nhau $\Rightarrow P(A_1) = 1 - P(A_2).$

Lưu ý. Dấu hiệu chia hết

Gọi $N = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ là số tự nhiên có $n+1$ chữ số $\left(a_n \ne 0\right)$. Khi đó:

- Dấu hiệu chia hết cho $2,\ 5,\ 4,\ 25,\ 8$ và 125 của số tự nhiên N:
  + $N \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 = \left\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\right\}.$
  + $N \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 = \left\{0;\ 5\right\}.$
  + $N \vdots 4\ \left(hay\ 25\right) \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4\ \left(hay\ 25\right).$
  + $N \vdots 8\ \left(hay\ 125\right) \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8\ \left(hay\ 125\right).$
- Dấu hiện chia hết cho 3 và 9: $N \vdots 3\ \left(hay\ 9\right) \Leftrightarrow \left(a_1 + .. + a_n\right) \vdots 3\ \left(hay\ 9\right).$

Bài toán đếm và xác suất cổ điển

BT 86. **(A, A1 – 2014)** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn ? ĐS: $P\left(A\right) = \dfrac{1}{26}\cdot$

BT 87. **(A, A1 – 2013)** Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để chọn được là số chẵn ? ĐS: $P(A)=\dfrac{3}{7}$.

BT 88. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Lấy ngẫu nhiên 2 phần tử của X. Tính xác suất để hai số lấy được đều là số chẵn ? ĐS: $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

BT 89. Cho E là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau lấy từ: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của E. Tính xác suất để phần tử được chọn là số có ba chữ số đều chẵn. ĐS: $P(A)=\dfrac{1}{25}$.

BT 90. Gọi S là tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S. Tích xác suất để tích hai số được chọn là số chẵn ? ĐS: $P(A)=\dfrac{5}{6}$.

BT 91. E là tập các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$. Lấy ngẫu nhiên một số trong E tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5. ĐS: $P(A)=\dfrac{13}{49}$.

BT 92. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7$. Tập E có bao nhiêu phần tử ? Chọn ngẫu nhiên một phần tử của E, tính xác suất được chọn chia hết cho 3 ? ĐS: $P(A)=\dfrac{2}{5}$.

BT 93. Gọi X là tập hợp các số có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X. Tính xác suất để chọn được một số thuộc X và số đó chia hết cho 9 ? ĐS: $P(A)=\dfrac{1}{9}$.

BT 94. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Hãy tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 ? ĐS: $P(A)=\dfrac{99}{667}$.

BT 95. Cho tập hợp $X=\{0;1;2;4;5;7;8\}$. Ký hiệu G là tập hợp tất cả các số có bốn chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập X, chia hết cho 5. Tính số phần tử của G. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập G, tính xác suất để lấy được một số không lớn hơn 4000 ? ĐS: $P(A)=\dfrac{6}{11}$.

BT 96. Từ tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số khác nhau mà luôn có mặt các chữ số $1,2,3$ và chúng đứng cạnh nhau ? ĐS: 66.

BT 97. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn lớn hơn số 2014 ? ĐS: $P(A)=\dfrac{6}{7}$.

BT 98. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2 ? ĐS: 1218.

BT 99. Cho tập hợp $X=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một từ X, sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1. ĐS: 2280.

BT 100. Cho tập $E=\{1;2;3;4;5\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số khác nhau thuộc E. Tính xác suất để trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5. ĐS: $P=\dfrac{12}{25}\cdot$

BT 101. Cho tập $A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt mà phải có chữ số 0 và số 3 ? ĐS: 384.

BT 102. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và trong mỗi số đó có đúng 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ ? ĐS: 2592.

BT 103. Từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 số trong các số được lập, tính xác suất để số được lấy có hai chữ số chẵn, hai chữ số lẻ ? ĐS: $P(A)=\dfrac{3}{5}$.

BT 104. Gọi E là tập hợp số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được lập từ các số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc tập E. Tính xác suất để hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5 ? ĐS: $P(A)=\dfrac{144}{295}$.

BT 105. Cho $A=\{1;23;4;5;6\}$, $B=\{0;1;2;3;4;5\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số phân biệt sao cho:

a/ Hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau được lập từ tập A ? ĐS: 480.

b/ Chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3 được lập từ tập B ? ĐS: 192.

BT 106. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số sao cho:

a/ Chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần. ĐS: 11340.

b/ Khác nhau và tổng các chữ số của mỗi số là một số chẵn. ĐS: 45.10^5.

BT 107. Người ta viết lên các tấm bìa, mỗi tấm một dãy kí tự gồm hai chữ cái đứng đầu và ba chữ cái đứng sau, trong đó chữ cái đầu tiên được lấy từ tập hợp {B, H, T, X}, chữ cái thứ hai được lấy từ tập hợp {D, L, Q} và các chữ số đôi một khác nhau được lấy từ tập hợp {1, 2, 7, 8, 9} (mỗi dãy kí tự được viết trên một tấm bìa}. Gọi A là tập các tấm bìa được viết dãy dãy kí tự đã nêu trên. Lấy ngẫu nhiên một tấm bìa từ A và đốt cháy tấm bìa này. Tính xác suất để tấm bìa bị đốt cháy là tấm có dãy kí tự HD 981 hoặc tấm có phần tử là TQ hay XL".

BT 108. **(B – 2014)** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 sữa dâu và 3 sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn có cả 3 loại ? ĐS: $P(A)=\dfrac{3}{11}\cdot$

BT 109. Trong chiếc hộp có 6 bi đỏ, 5 bi vàng và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả ba màu ? ĐS: $P=\dfrac{43}{91}\cdot$

BT 110. Trong một hộp có 10 viên bi đỏ có bán kính khác nhau, 5 viên bi xanh có bán kính khác nhau và 3 viên bi vàng có bán kính khác nhau. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra 9 viên bi. Tính xác suất để 9 viên lấy ra có đủ cả ba màu ? ĐS: $P=\dfrac{42910}{48620}\cdot$

BT 111. Một ngân hàng đề thi gồm có 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm có 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học thuộc ? ĐS: $P(X)=\dfrac{229}{323}$.

BT 112. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ ? ĐS: $P=\dfrac{4615}{5236}$.

BT 113. Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Tính xác suất sao cho 5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam ? ĐS: $P(A)=\dfrac{325}{506}$.

BT 114. Trong kì thi thử TN THPT QG lần I năm 2015 tại TT LTĐH – Đại học Ngoại Thương có 13 học sinh đạt điểm $9,0$ môn Toán, trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để trong 3 học sinh chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12. ĐS: $P=\dfrac{57}{286}\simeq 0,199.$

BT 115. Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 em trên thành 1 hàng dọc sao cho 7 học sinh nam đứng liền nhau ? ĐS: 120960 cách.

BT 116. Trong giờ Thể dục, tổ I lớp $12A$ có 12 học sinh gồm 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên theo một hàng dọc. Tính xác suất để người đứng ở đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam ? ĐS: $P(A)=\dfrac{7}{22}$.

BT 117. Một tổ học sinh có 4 em nữ và 5 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để chỉ có hai em nữ A, B đứng cạnh nhau, còn các em nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh A, B. ĐS: $P=\dfrac{5}{63}\cdot$

BT 118. Một tổ học sinh có 5 em nữ và 8 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để không có hai em nữ nào đứng cạnh nhau ? ĐS: $P=\dfrac{14}{143}\cdot$

BT 119. Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi, trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng ? ĐS: 275.

BT 120. Trong một lô hàng có 12 sản phẩm khác nhau, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm ? ĐS: $P=\dfrac{17}{22}$.

BT 121. **(D – 2014)** Cho một đa giác đều n đỉnh, $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$. Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 27 đường chéo ? ĐS: $n=9$.

BT 122. Cho đa giác lồi n cạnh với $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 4$. Hỏi có bao nhiêu đường chéo trong đa giác lồi ? Tìm n biết số giao điểm của các đường chéo trong đa giác là 70. ĐS: $C_n^2-n,\ n=8$.

BT 123. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau . Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho ? ĐS: 325.

BT 124. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Trên mỗi đường thẳng lấy 5 điểm cách đều nhau một khoảng bằng x. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu hình bình hành tạo thành từ 10 điểm trên ? ĐS: 30.

BT 125. Cho $d_1 // d_2$, trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt $(n\geq 2)$. Biết có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n ? ĐS: $n=20$.

BT 126. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3...A_{2n}$ (n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1A_2A_3...A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1A_2A_3...A_{2n}$. Tìm n ? ĐS: $n=8$.

BT 127. Cho đa giác đều 2n đỉnh $(n\geq 2,\ n\in\mathbb{Z}^+)$. Gọi a là số đường chéo của đa giác và b là số hình chữ nhật có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác. Tìm n biết $6a=23b$? ĐS: $n=13$.

Công thức xác suất

BT 128. Có ba xạ thủ cùng bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích lần lượt là: $0,6;\ 0,7$ và $0,8$. Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng bia. ĐS: $P(A)=0{,}976$.

BT 129. Nam và Hải thi đấu với nhau 1 trận bóng bàn, ai thắng trước 3 séc thì thắng trận. Xác suất Hải thắng mỗi séc là 0,4 (không có séc hòa). Tính xác suất Hải thắng trận ? ĐS: $P=0{,}31744$.

BT 130. Một nhóm xạ thủ gồm có 10 người trong đó có 3 xạ thủ loại I và 7 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích trong mỗi lần bắn của một xạ thủ loại I và loại II lần lượt là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ trong 10 người và cho bắn một viên đạn. Hãy tính xác suất để viên đạn trúng đích ? ĐS: $P=0{,}83$.

BT 131. Có ba lô hàng. Người ta lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Biết rằng xác suất để được một sản phẩm có chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là $0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7$. Tính xác suất để trong ba sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt ? ĐS: $P=0{,}94$.

BT 132. Một hộp chứa 11 bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là số lẻ ? ĐS: $P=\dfrac{118}{231}\cdot$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 133. Trên giá sách có ba loại sách Toán học, Vật lý, Hóa học, trong đó có 8 quyển sách Toán học, 7 quyển sách Vật lý và 5 quyển sách Hóa học (các quyển sách khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách chọn 6 quyển sách trong các quyển sách trên sao cho mỗi loại có ít nhất 1quyển sách ?

BT 134. Cho tập A tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0. Hỏi có thể lấy được bao nhiêu số tự nhiên từ tập A mà số đó chỉ có mặt ba chữ số khác nhau ?

BT 135. Trong một hộp có 8 viên bi xanh và 6 viên bi trắng, chọn ngẫu nhiên 5 viên bi. Tính xác suất để 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng ?

BT 136. Một người cần gọi điện thoại quên 3 chữ số cuối cùng của số điện thoại cần gọi. Người này chỉ nhớ rằng 3 chữ số đó đều khác nhau và trong 3 chữ số đó chắc chắn một chữ số là 8. Tính xác suất để người gọi điện bấm số một lần đúng được số điện thoại cần gọi ?

BT 137. Một hộp chứa 5 bi xanh, 7 bi đỏ, 8 bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 8 viên bi từ hộp. Tính xác suất để 8 viên bi được lấy ra có đủ 3 màu ?

BT 138. Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ lập các số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một số vừa lập. Tính xác suất để lấy được một số lớn hơn 2013 ?

BT 139. Tập A gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập từ $\{1;2;3;4;5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A. Tìm xác suất số được chọn là số chẵn ?

BT 140. Một hộp có 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi . Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ ?

BT 141. Có 10 học sinh lớp A, 9 học sinh lớp B và 8 học sinh lớp C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp A ?

BT 142. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ các chữ số: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai phần tử của X. Tính xác suất để hai số lấy được đều là số chẵn ?

BT 143. Một thầy giáo có 12 quyển sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Vật lý và 3 quyển sách Hóa học. Ông muốn lấy ra 6 quyển đem tặng cho 6 học sinh: $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ mỗi em một quyển. Tính xác suất để sau khi tặng sách xong mỗi loại trong ba loại Toán, Vật lý, Hóa học đều còn lại ít nhất một quyển ?

BT 144. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và khác 0. Tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 3 ?

BT 145. Một hộp chứa 30 bi trắng, 7 bi đỏ và 15 bi xanh. Một hộp khác chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ và 9 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp bi một viên bi. Tìm xác suất để hai bi lấy ra cùng màu ?

BT 146. Cho hai đường thẳng song song $d_1,\ d_2$. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2.

BT 147. Cho mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh. Xét các tam giác có ba đỉnh được lấy từ các đỉnh của H.

a/ Có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy ? Có bao nhiêu tam giác có 2 cạnh là cạnh của H.

b/ Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H ? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của H ?

BT 148. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần.

BT 149. Cho tập $A=\{0;1;2;3;\ldots;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 60000 và chia hết cho 5.

BT 150. Cho các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Gọi X là tập các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt lập từ năm chữ số đó, lấy ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất của biến cố lấy được một số chia hết cho 3.