ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

1.1. Định nghĩa : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $x_0 \in (a\ ;\ b)$, đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 là : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1.2. Chú ý :

- Nếu kí hiệu $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

2.1. Ý nghĩa hình học: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C)

- $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại $M_0(x_0, y_0) \in (C)$.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ là :

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0} .$$

2.2. Ý nghĩa vật lí :

- Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình : $s = s(t)$ tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0) = Q'(t_0)$.

3. Qui tắc tính đạo hàm và công thức tính đạo hàm

3.1. Các quy tắc : Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C : là hằng số .

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u.v)' = u'.v + v'.u \qquad \Rightarrow (C.u)' = C.u'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \neq 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C.u'}{u^2}$
- Nếu $y = f(u), u = u(x) \quad \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

3.2. Các công thức :

- $(C)' = 0$; $(x)' = 1$
- $(x^n)' = n.x^{n-1} \qquad \Rightarrow (u^n)' = n.u^{n-1}.u'$, $(n \in$ □
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0) \Rightarrow (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u > 0)$
- $(\sin x)' = \cos x \qquad \Rightarrow (\sin u)' = u.'\cos u$
- $(\cos x)' = -\sin x \qquad \Rightarrow (\cos u)' = -u'.\sin u$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow (\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \qquad \Rightarrow (\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

4. Vi phân

4.1. Định nghĩa :

- Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x_0 vi phân của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm x_0 là :

$$df\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right).\Delta x\ .$$

- Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ thì tích $f'\left(x\right).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f\left(x\right)$. Kí hiệu : $df\left(x\right)=f'\left(x\right).\Delta x=f'\left(x\right).dx$ hay $dy=y'.dx$.

4.2. ***Công thức tính gần đúng :***

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right).\Delta x\ .$$

5. Đạo hàm cấp cao

5.1. ***Đạo hàm cấp 2 :***

- *Định nghĩa :* $f''\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]'$
- *Ý nghĩa cơ học:* Gia tốc tức thời của chuyển động $s=f\left(t\right)$ tại thời điểm t_0 là $a\left(t_0\right)=f''\left(t_0\right)$.

5.2. ***Đạo hàm cấp cao :*** $f^{(n)}\left(x\right)=\left[f^{(n-1)}\left(x\right)\right]'$, $\left(n\in\mathbb{N}\right.$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP :

1. Tìm đạo hàm theo định nghĩa

1.1. ***Phương pháp :*** Để tìm đạo hàm theo định nghĩa ta có 2 cách sau :

- ***Cách 1 :*** Theo quy tắc
  - *Bước 1 :* Cho x một số gia Δx và tìm số gia Δy tìm $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$. Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
  - *Bước 2 :* Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- ***Cách 2 :*** Áp dụng công thức: $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.

1.2. ***Các ví dụ minh họa :***

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f\left(x\right)=x^3-2x+1$ tại $x_0=2$; b) $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ tại $x_0=1$.

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{3x+4}$ tại $x_0=3$; b) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3-2x & \text{khi } x\ge 2\\ 10x-16 & \text{khi } x<2\end{cases}$ tại $x_0=2$.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa :

a) $y=x^3-2x^2+1$; b) $y=f\left(x\right)=\left|x^2-3x+2\right|$.

1.3. ***Bài tập áp dụng :***

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa tại các điểm đã chỉ ra :

a) $f\left(x\right)=x^2-3x+1$ tại $x_0=3$; b) $f\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}$ tại $x_0=1$;

c) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x+3}{x+2}$ tại $x_0=4$; d) $f\left(x\right)=\cos^2 x$ tại $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

Bài 2. Xét tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$.

a) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ 3x-5 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$; b) $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2+a & \text{khi } x\le 0\\ -x^3+bx & \text{khi } x>0\end{cases}$;

c) $f\left(x\right)=\left|x^2-3x+2\right|$; d) $f\left(x\right)=\sqrt{\left|x\right|^5}$.

Bài 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa :

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$;

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; d) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$;

Bài 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau theo định nghĩa :

a) $f(x)=\left|x^3-4x^2\right|$; b) $f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x & \text{khi } x>0\\ 2x+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$;

c) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+3x}$; d) $f(x)=\tan^3(2x+1)$.

Bài 5. Có bao nhiêu tiếp tuyến của $(C): y=x^3-3x^2+6x-5$ có hệ số góc âm ?

.

1.4. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=2x^4-\dfrac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$; b) $y=(x^3-2)(1-x^2)$.

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$; b) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$; c) $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

Ví dụ 3. Chứng minh các công thức tổng quát sau

a) $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a & c\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b & c\\ b_1 & c_1\end{vmatrix}}{\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)^2}$; (a , b , c, a_1 , b_1, c_1 là hằng số) .

b) $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\right)'=\dfrac{a.a_1x^2+2a.b_1x+\begin{vmatrix}b & c\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}{\left(a_1x+b_1\right)^2}$; (a , b , c, a_1 , b_1 là hằng số) .

Ví dụ 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=(x^2+x+1)^4$; b) $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$; c) $y=\dfrac{1}{(x^2-2x+5)^2}$.

Ví dụ 5. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$; b) $y=(x-2)\sqrt{x^2+3}$; c) $y=\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^3$.

Ví dụ 6. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=2\sin 3x\cos 5x$; b) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; c) $y=\dfrac{1+\tan^2 3x}{1-\tan^2 3x}$.

- ***Chú ý :*** *Khi gặp các hàm số phức tạp nếu có thể ta hãy rút gọn hàm số rồi hãy đi tính đạo hàm , đặc biệt là đối với các hàm số có chứa các hàm số lượng giác.*

Ví dụ 7. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=(\sin x+\cos x)^2$; b) $y=\sqrt{\tan x+\cot x}$;

c) $y=\tan 2x+\dfrac{2}{3}\tan^3 2x+\dfrac{1}{5}\tan^5 2x$; d) $y=\tan^2\left[\sin\left(\cos^3 2x\right)\right]$.

Ví dụ 8. Cho hàm số : $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+mx+5$. Tìm m để :

a) $f'(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$; b) $f'(x)>0$, $\forall x\in(0;+\infty)$;

c) $f'(x)<0$, $\forall x\in(0;2)$; d) $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in(-\infty;2)$.

Ví dụ 9. Cho hàm số : $f\left(x\right)=\frac{m}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\left(4-m\right)x+5m+1$. Tìm m để :

a) $f'\left(x\right)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; b) $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Bài 6. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=\frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+4x-5$; b) $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0,5x^4$;

c) $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$; d) $y=x^5-4x^3+2x-3\sqrt{x}$;

e) $y=\frac{x}{a}+\frac{b}{x^2}+c\sqrt{x}+\frac{a^2}{2}-\sqrt[3]{b}$ (a,b,c là hằng số) .

Bài 7. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=(2x-3)(x^5-2x)$; b) $y=x(2x-1)(3x+2)$; c) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;

d) $y=\frac{2x-1}{x-1}$; e) $y=\frac{3}{2x-5}$; f) $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$;

g) $y=\frac{2x^2-4x+5}{2x+1}$; h) $y=x+1-\frac{2}{x+1}$; i) $y=\frac{5x-3}{x^2+x+1}$; k) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Bài 8. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=(2x^3-3x^2-6x+1)^2$; b) $y=\frac{1}{(x^2-x+1)^5}$

c) $y=(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^2$; d) $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;

e) $y=\sqrt{1+2x-x^2}$; f) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$;

g) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; h) $y=\sqrt[3]{x^3-3x+1}$;

i) $y=\sqrt[3]{\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^2}$; k) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$.

Bài 9. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$; b) $y=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$;

c) $y=\frac{\sin 2x+\cos 2x}{2\sin 2x-\cos 2x}$; d) $y=4\sin x\cos 5x.\sin 6x$;

e) $y=\frac{\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x}$; f) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x-x\sin x}$;

g) $y=\tan\frac{x+1}{2}$; h) $y=\tan 3x-\cot 3x$;

i) $y=\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$; k) $y=\cot\sqrt{x^2+1}$;

l) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$; m) $y=(\sin x+\cos x)^3$;

n) $y=\sin^3 2x\cos^3 2x$; o) $y=\sin(\cos 3x)$;

p) $y=\sin^2\left[\cos^2(\cos 3x)\right]$; q) $y=\cot^5\left[\cos^2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]$.

Bài 10. a) Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$. Tính $f'(0); f'(\pi); f'\left(\frac{\pi}{2}\right); f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Cho hàm số $y=f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. Chứng minh: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$

Bài 11. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$;

b) $y=\cos^4 x\left(2\cos^2 x-3\right)+\sin^4 x\left(2\sin^2 x-3\right)$;

c) $y=3\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)+4\left(\cos^6 x-2\sin^6 x\right)+6\sin^4 x$;

d) $y=\frac{\sin^4 x+3\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x+3\cos^4 x-1}$;

e) $y=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$; f) $y=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).(1+\sin x)}{\sin x}$;

g) $y=\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$; h) $y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}}$, $\left(x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Bài 12. Cho hàm số $y=x\sin x$ chứng minh :

a) $xy-2(y'-\sin x)+x(2\cos x-y)=0$;

b) $\frac{y'}{\cos x}-x=\tan x$.

Bài 13. Cho các hàm số : $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, $g(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$. Chứng minh :
$3f'(x)-2g'(x)=0$.

Bài 14. a) Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh : $2\sqrt{1+x^2}.y'=y$.

b) Cho hàm số $y=\cot 2x$. Chứng minh : $y'+2y^2+2=0$.

Bài 15. Giải phương trình $y'=0$ biết :

a) $y=\sin 2x-2\cos x$; b) $y=\cos^2 x+\sin x$;

c) $y=3\sin 2x+4\cos 2x+10x$; d) $y=(m-1)\sin 2x+2\cos x-2mx$.

Bài 16. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2+mx-4$. Tìm m để :

a) $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt ;

b) y' có thể viết được thành bình phương của nhị thức ;

c) $y'\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

d) $y'<0$, $\forall x\in(1;2)$;

e) $y'>0$, $\forall x>0$.

Bài 17. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2-mx+3$. Xác định m để :

a) $y'\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng âm ;

c) $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện : $x_1^2+x_2^2=3$.

Bài 18. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$. Xác định m để hàm số có $y'\le 0,\ \ \forall x\in\left(1\,;+\infty\right)$.

Bài 19. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y=x^3+3x^2+mx+m$
có $y'\le 0$ trên một đoạn có độ dài bằng 1 .

Bài 20. Cho hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10\ (1)$ (m là tham số). Xác định m để hàm số có $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt .

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong

2.1. *Phương pháp :*

- ***Khi biết tiếp điểm :*** Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ tại $M\left(x_0\ ;\ y_0\right)$, có phương trình là :
  $\boxed{y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0}$ (1) .
- ***Khi biết hệ số góc của tiếp tuyến:*** Nếu tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ có hệ số góc là k thì ta gọi $M_0\left(x_0\ ;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow f'(x_0)=k$ (1)
  - ➢ Giải phương trình (1) tìm x_0 suy ra $y_0=f\left(x_0\right)$
  - ➢ Phương trình tiếp tuyến phải tìm có dạng : $y=k\left(x-x_0\right)+y_0$

❖ ***Chú ý :***
  - ➢ *Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M\left(x_0,y_0\right)\in(C)$ là $k=f'\left(x_0\right)=\tan\alpha$ Trong đó α là góc giữa chiều dương của trục hoành và tiếp tuyến .*
  - ➢ *Hai đường thẳng song song với nhau thì hệ số góc của chúng bằng nhau .*
  - ➢ *Hai đường thẳng vuông góc nếu tích hệ số góc của chúng bằng -1 .*

- ***Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(x_1\,;y_1\right)$:***
  - ➢ Viết phương trình tiếp tuyến của $y=f(x)$ tại $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$: $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$ (1)
  - ➢ Vì tiếp tuyến đi qua $A\left(x_1\,;y_1\right)\Rightarrow y_1=f'(x_0).(x_1-x_0)+f\left(x_0\right)$ (*)
  - ➢ Giải phương trình(*) tìm x_0 thế vào (1) suy ra phương trình tiếp tuyến .

2.2. *Các ví dụ minh họa :*

Ví dụ 1. Cho đường cong $(C): y=f(x)=x^3-3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong các trường hợp sau :
a) Tại điểm $M_0(1\,;-2)$;
b) Tại điểm thuộc (C) và có hoành độ $x_0=-1$;
c) Tại giao điểm của (C) với trục hoành .
d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1\,;-4)$.

Ví dụ 2. Cho đường cong $(C): y=\dfrac{3x+1}{1-x}$
a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x-4y-21=0$;
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 2x+2y-9=0$;
c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng :
$x-2y+5=0$ một góc 30^0.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5\ \ (C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt *A, B* và tam giác *OAB* cân tại gốc tọa độ *O*. *(Khối A – 2009)* .

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2\ (C)$. Tìm các điểm thuộc đồ thị (C) mà qua đó kẻ được một và chỉ một tiếp tuyến với đồ thị (C).

(Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, 1999)

Ví dụ 6. Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{6x-x^2}$. Chứng minh tiếp tuyến tại một điểm bất kì của (C) cắt trục tung tại một điểm cách đều gốc tọa độ và tiếp điểm .

2.3. *Bài tập áp dụng:*

Bài 21. Cho hàm số $(C): y=x^2-2x+3$. Viết phương trình tiếp với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0=2$;

b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng : $4x-y-9=0$;

c) Vuông góc với đường thẳng : $2x+4y-2011=0$;

d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1\,;0)$.

Bài 22. Cho hàm số : $y=\dfrac{3x+1}{1-x}\ (C)$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1\,;-1)$;

b) Vết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành;

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung ;

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) bết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): 4x-y+1=0$;

e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 4x+y-8=0$.

Bài 23. Cho hàm số : $y=x^3-3x^2\ (C)$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $I(1\,;-2)$.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I .

Bài 24. Cho hàm số $y=\sqrt{1-x-x^2}\ (C)$.Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$;

b) Song song với đường thẳng : $(d): x+2y=0$.

Bài 25. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1\ (1)$, m là tham số thực .

Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm có hoành độ $x=-1$ đi qua điểm $A(1\,;2)$.

(Dự bị A_1 - 2008)

Bài 26. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x+1}\ (1)$. Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2\,;5)$.

(Dự bị D_1 - 2008)

Bài 27. Cho hàm số $y=\sqrt{3}x^3+4\ (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d): \sqrt{3}y-x+6=0$ góc 30^0 .

Bài 28. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+9x-5\ (C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

Bài 29. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}\ (C)$. Gọi $I(1\,;2)$. Tìm điểm $M\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM .

(Dự bị B_2 - 2003)

Bài 30. (*) Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ (C). Tìm điểm $M\in(C)$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục tọa độ tại A,B và tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

(Khối D - 2007)

Bài 31. (*) Cho hàm số : $y=\dfrac{x}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) sao cho (Δ) và hai đường $(d_1): x=1$; $(d_2): y=1$ cắt nhau tạo thành một tam giác cân.

(Dự bị D_2 - 2007)

Bài 32. Cho hàm số $y=x+\dfrac{1}{x+1}$ (C). Chứng minh rằng qua điểm $A(1;-1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Bài 33. (*) Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ (C). Qua điểm $A\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{4}{3}\right)$ có thể kẻ được mấy tiếp tuyến đến đồ thị (C). Viết phương trình các tiếp tuyến ấy .

Bài 34. (*) Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ (C). Gọi $I(-1\,;\,0)$. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua điểm I .

(Dự bị B_2 - 2005).

Bài 35. (*) Cho hàm số $y=-x^4+2x^2-1$ (C). Tìm tất cả các điểm thuộc trục tung sao cho từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C).

3. Tìm vi phân của hàm số và tính gần đúng nhờ vi phân

3.1. *Phương pháp :*

Dựa theo định nghĩa và công thức sau :

- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thì tích $f'(x).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$.

  Kí hiệu : $df(x)=f'(x).\Delta x=f'(x).dx$ hay $dy=y'.dx$

- $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$

3.2. *Các ví dụ minh họa :*

Ví dụ 1. Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$; b) $y=\sqrt{(x^2+1)(2x^3-3x)}$.

Ví dụ 2. Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$; b) $y=\tan^3 x-\dfrac{1}{2}\cot^2 3x$.

Ví dụ 3. Tính gần đúng các giá trị sau (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả) :

a) $\sqrt{8,99}$; b) $\cos 46^0$; c) $\tan 59^0 45'$.

3.3. *Bài tập áp dụng:*

Bài 36. Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$; b) $y=(x-x^2)^{32}$;

c) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$; d) $y=\left(\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right)^2$;

e) $y=\cot^3(2x+\frac{\pi}{4})$; f) $y=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$.

Bài 37. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{1+\sin x.\cos x}$.

Chứng minh đẳng thức : $y.dy-\cos 2x.dx=0$.

Bài 38. Tính gần đúng các giá trị sau (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả) :

a) $\sqrt{4,02}$; b) $\tan 44^0 30'$; c) $\sqrt[3]{7,97}$.

4. Đạo hàm cấp cao

4.1. Phương pháp :

- Dựa theo các định nghĩa sau :
  - *Đạo hàm cấp 2 :* $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$
  - *Đạo hàm cấp cao :* $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$, $(n \in \mathbb{N}$.
- ***Chú ý :***

Để tìm công thức tính đạo hàm cấp n của một hàm số ta tìm đạo hàm cấp 1 , 2 , 3 … sau đó dự đoán công thức tính đạo hàm cấp n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp .

4.2. Các ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm các cấp đã chỉ ra của các hàm số sau :

a) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+5x^2-4x+7$. Tìm y'' , y''' ;

b) $y=\dfrac{x-3}{x+4}$. Tìm y'' , y''', $y^{(4)}$; c) $y=\sqrt{3x-x^3}$. Tìm y'' .

Ví dụ 2. Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra:

a) $y^3y''+1=0$ khi $y=\sqrt{2x-x^2}$;

b) $x^2y''-2\left(x^2+y^2\right)\left(1+y\right)=0$ khi $y=x.\tan x$.

Ví dụ 3. Chứng minh bằng quy nạp các công thức sau đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\left(\sin ax\right)^{(n)}=a^n\sin\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right)$; b) $\left(\cos ax\right)^{(n)}=\cos\left(ax+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

c) $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{\left(-1\right)^n a^n n!}{\left(ax+b\right)^{n+1}}$.

Ví dụ 4. Tìm các đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{4x+1}{2x-1}$; b) $y=\dfrac{x^2-3x+5}{x+1}$.

Ví dụ 5. Tìm các đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; b) $y=8\sin x.\cos 3x.\cos 4x$.

- ***Chú ý :*** *Khi tìm đạo hàm cấp n của một hàm số , nếu được ta hãy biến đổi hàm số đã cho thành tổng của các hàm số có một trong các dạng :* $\dfrac{1}{ax+b}$; $\sin ax$; $\cos ax$ *rồi áp dụng các công thức ở ví dụ trên , dự đoán ra công thức đạo hàm cấp n của hàm số đã cho và chứng minh lại bằng quy nạp (nếu cần) .*

4.3. Bài tập áp dụng:

Bài 39. Tìm đạo hàm các cấp đã chỉ ra của các hàm số sau :

a) $y=x.\cos 3x$ tìm y'' ; b) $y=\sin^2 2x$ tìm y''' ;

c) $y=(2x+1)^5$ tìm $y^{(5)}$; d) $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x-2}$ tìm $y^{(4)}$.

Bài 40. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $xy-2(y'-\sin x)+xy''=0$ nếu $y=x\sin x$;

b) $18(2y-1)+y''=0$ nếu $y=\cos^2 3x$;

c) $y''+y=0$ nếu $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$;

d) $y^{[4]}+2xy'''-4y''=40$ nếu $y=(x^2-1)^2$;

e) $2y'^2=(y-1)y''$ nếu $y=\dfrac{x-3}{x+4}$;

f) $4(x^2+1).y''+4x.y'-y=0$ nếu $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$;

g) $(1+x^2)y''+xy'-k^2y=0$ nếu $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$, $(k\in$) .

Bài 41. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$; b) $y=\dfrac{3}{x^2-x-2}$;

c) $y=\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}$;

d) $y=\dfrac{4x^2-5x+3}{2x^2-3x+1}$; d) $y=8\sin x.\sin 2x.\sin 3x$;

e) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$;

f) Cho $y=\cos 3x$. Chứng minh $y^{(2n)}=(-1)^n 3^{2n} y$.

5. Dùng định nghĩa đạo hàm tìm giới hạn

5.1. *Phương pháp :*

Ta có thể sử dụng định nghĩa của đạo hàm : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-x_0}$

để tính các giới hạn có dạng vô định . Bằng cách viết giới hạn cần tìm thành dạng : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-x_0}$,

sau đó tính đạo hàm của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 rồi áp dụng định nghĩa đạo hàm suy ra kết quả của giới hạn .

5.2. *Các ví dụ minh họa :*

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots\quad x^n\quad n}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x.\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{1-\sqrt{2}\sin x}$.

5.3. *Bài tập áp dụng:*

Bài 42. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$; d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+2x}-1}{\sqrt[m]{1+3x}-1}$;

Bài 43. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to a}(a-x)\tan\dfrac{\pi x}{2a}$, $(a\neq0)$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{x.\sin2x}$; d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{x\sin x}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos3x+\sqrt{1+\sin3x}}{1+\sin3x}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt[3]{4x^2+1}}{1-\cos x}$; h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+4x+19}-\sqrt{3x^2+46}}{x^2-1}$.

6. Tính các tổng có chứa tổ hợp

6.1. *Phương pháp :*

Trong phần đại số tổ hợp khi áp dụng nhị thức Newton để tính các tổng có chứa các công thức tổ hợp đôi khi ta phải biết áp dụng khéo léo việc lấy đạo hàm các cấp của các vế ta sẽ tính được tổng cần tính .

6.2. *Các ví dụ minh họa :*

Ví dụ 1. Tính các tổng sau :

a) $S_1=C_n^1+2C_n^2 5+3C_n^3 5^2+\cdots$ $^{n-1}$;

b) $S_2=2.1.C_n^2 2^{n-2}-3.2.C_n^3 2^{n-3}+\cdots$ $.n(n-1).C_n^n$.

c) $S_3=1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+\cdots$; d) $S_4=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+.....+(3n+2)C_n^n$

.

6.3. *Bài tập áp dụng:*

Bài 44. Rút gọn các tổng sau :

a) $S_1=C_n^1+2C_n^2+\cdots$ $)C_n^{n-1}+nC_n^n$;

b) $S_2=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+nC_n^{n-1}+(n+1)C_n^n$;

c) $S_3=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+.....+(3n+2)C_n^n$.

Bài 45. (*) Rút gọn các tổng sau :

a) $S_1=100C_{100}^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{99}-101C_{100}^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}+\cdots\cdots$ $C_{100}^{99}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{198}+200C_{100}^{100}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{199}$.

b) $S_2=2.1.C_{20}^2 2^{18}-3.2.C_{20}^3 2^{17}+\cdots$ C_{20}^{20} .

c) $S_3=1^2.C_{2009}^1-2^2.C_{2009}^2+3^2.C_{2009}^3-\cdots$ $^2.C_{2009}^{2009}$.

d) $S_4=3C_n^0-5C_n^1+7C_n^2-.....+4023C_{2010}^{2010}$.

Bài 46. Cho số nguyên n thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 35, (n \ge 3)$. Tính tổng :

$$S = 2^2.C_n^2 - 3^2.C_n^3 + \cdots \quad n^2.C_n^n \ .$$

(Dự bị B$_1$ – 2008) .

Bài 47. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương , ta luôn có :

$$n.2^n.C_n^n + (n-1).2^{n-1}.C_n^1 + (n-2).2^{n-2}.C_n^2 + \cdots \quad {}^1 = 2n.3^{n-1}$$

(Dự bị D$_1$ – 2008) .

Bài 48. Tìm số nguyên dương n sao cho :

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \ldots + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2011$$

(C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử) .