

Nguyễn Tuấn Anh

**Tuyển tập các đề thi đại học
2002-2012
theo chủ đề**

Trường THPT Sơn Tây

Mục lục

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Phương trình-Bất PT-Hệ PT-Hệ BPT | 3 |
| 1.1 | Phương trình và bất phương trình | 3 |
| 1.1.1 | Phương trình, bất phương trình hữu tỉ và vô tỉ | 3 |
| 1.1.2 | Phương trình lượng giác | 4 |
| 1.1.3 | Phương trình, bất phương trình mũ và logarit | 8 |
| 1.2 | Hệ Phương trình | 9 |
| 1.3 | Phương pháp hàm số, bài toán chứa tham số | 12 |
| | Đáp số | 13 |
| 2 | Bất đẳng thức | 17 |
| 2.1 | Bất đẳng thức | 17 |
| 2.2 | Giá trị nhỏ nhất- Giá trị lớn nhất | 18 |
| 2.3 | Nhận dạng tam giác | 20 |
| | Đáp số | 20 |
| 3 | Hình học giải tích trong mặt phẳng | 22 |
| 3.1 | Đường thẳng | 22 |
| 3.2 | Đường tròn | 25 |
| 3.3 | Côníc | 26 |
| | Đáp số | 27 |
| 4 | Tổ hợp và số phức | 30 |
| 4.1 | Bài toán đếm | 30 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.2 | Công thức tổ hợp | 31 |
| 4.3 | Đẳng thức tổ hợp khi khai triển | 31 |
| 4.4 | Hệ số trong khai triển nhị thức | 32 |
| 4.5 | Số phức | 33 |
| | Đáp số | 34 |
| 5 | Khảo sát hàm số | 36 |
| 5.1 | Tiếp tuyến | 36 |
| 5.2 | Cực trị | 38 |
| 5.3 | Tương giao đồ thị | 40 |
| 5.4 | Bài toán khác | 41 |
| | Đáp số | 42 |
| 6 | Hình học giải tích trong không gian | 44 |
| 6.1 | Đường thẳng và mặt phẳng | 44 |
| 6.2 | Mặt cầu | 50 |
| 6.3 | Phương pháp tọa độ trong không gian | 51 |
| | Đáp số | 54 |
| 7 | Tích phân và ứng dụng | 57 |
| 7.1 | Tính các tích phân sau: | 57 |
| 7.2 | Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường sau: | 59 |
| 7.3 | Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi hình phẳng (H) khi quay quanh Ox. Biết (H) được giới hạn bởi các đường sau: | 59 |
| | Đáp Số | 60 |

Chương 1

Phương trình-Bất PT-Hệ PT-Hệ BPT

| | | |
|------------|--|-----------|
| 1.1 | Phương trình và bất phương trình | 3 |
| 1.1.1 | Phương trình, bất phương trình hữu tỉ và vô tỉ | 3 |
| 1.1.2 | Phương trình lượng giác | 4 |
| 1.1.3 | Phương trình, bất phương trình mũ và logarit | 8 |
| 1.2 | Hệ Phương trình | 9 |
| 1.3 | Phương pháp hàm số, bài toán chứa tham số | 12 |
| | Đáp số | 13 |

1.1 Phương trình và bất phương trình

1.1.1 Phương trình, bất phương trình hữu tỉ và vô tỉ

Bài 1.1 (B-12). Giải bất phương trình

$$x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}.$$

Bài 1.2 (B-11). Giải phương trình sau:

$$3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Bài 1.3 (D-02). Giải bất phương trình sau:

$$(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0.$$

Bài 1.4 (D-05). Giải phương trình sau:

$$2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4.$$

Bài 1.5 (D-06). Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0. \quad (x \in \mathbb{R})$$

Bài 1.6 (B-10). Giải phương trình sau:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0.$$

Bài 1.7 (A-04). Giải bất phương trình sau:

$$\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}.$$

Bài 1.8 (A-05). Giải bất phương trình sau:

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}.$$

Bài 1.9 (A-09). Giải phương trình sau:

$$2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0.$$

Bài 1.10 (A-10). Giải bất phương trình sau:

$$\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1.$$

1.1.2 Phương trình lượng giác

Bài 1.11 (D-12). Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$

Bài 1.12 (B-12). Giải phương trình

$$2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1.$$

Bài 1.13 (A-12). Giải phương trình sau:

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$$

Bài 1.14 (D-11). Giải phương trình sau:

$$\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0.$$

Bài 1.15 (B-11). Giải phương trình sau:

$$\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

Bài 1.16 (A-11). Giải phương trình

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x.$$

Bài 1.17 (D-02). Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng của phương trình:

$$\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0.$$

Bài 1.18 (D-03). Giải phương trình sau:

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Bài 1.19 (D-04). Giải phương trình sau:

$$(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x.$$

Bài 1.20 (D-05). Giải phương trình sau:

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} = 0.$$

Bài 1.21 (D-06). Giải phương trình sau:

$$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0.$$

Bài 1.22 (D-07). Giải phương trình sau:

$$\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2.$$

Bài 1.23 (D-08). Giải phương trình sau:

$$2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x.$$

Bài 1.24 (D-09). Giải phương trình sau:

$$\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0.$$

Bài 1.25 (D-10). Giải phương trình sau:

$$\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0.$$

Bài 1.26 (B-02). Giải phương trình sau:

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x.$$

Bài 1.27 (B-03). Giải phương trình sau:

$$\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Bài 1.28 (B-04). Giải phương trình sau:

$$5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x.$$

Bài 1.29 (B-05). Giải phương trình sau:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Bài 1.30 (B-06). Giải phương trình sau:

$$\cot x + \sin x(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}) = 4.$$

Bài 1.31 (B-07). Giải phương trình sau:

$$2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x.$$

Bài 1.32 (B-08). Giải phương trình sau:

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x.$$

Bài 1.33 (B-09). Giải phương trình sau:

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x).$$

Bài 1.34 (B-10). Giải phương trình sau:

$$(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0.$$

Bài 1.35 (A-02). Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình:

$$5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3.$$

Bài 1.36 (A-03). Giải phương trình sau:

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Bài 1.37 (A-05). Giải phương trình sau:

$$\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0.$$

Bài 1.38 (A-06). Giải phương trình sau:

$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0.$$

Bài 1.39 (A-07). Giải phương trình sau:

$$(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x.$$

Bài 1.40 (A-08). Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x - \frac{3\pi}{2})} = 4 \sin(\frac{7\pi}{4} - x).$$

Bài 1.41 (A-09). Giải phương trình sau:

$$\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}.$$

Bài 1.42 (A-10). Giải phương trình sau:

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin(x + \frac{\pi}{4})}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

1.1.3 Phương trình, bất phương trình mũ và logarit

Bài 1.43 (D-11). Giải phương trình sau:

$$\log_2(8 - x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Bài 1.44 (D-03). Giải phương trình sau:

$$2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3.$$

Bài 1.45 (D-06). Giải phương trình sau:

$$2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0.$$

Bài 1.46 (D-07). Giải phương trình sau:

$$\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2\left(\frac{1}{4 \cdot 2^x - 3}\right) = 0.$$

Bài 1.47 (D-08). Giải bất phương trình sau:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0.$$

Bài 1.48 (D-10). Giải phương trình sau:

$$4^{2x+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3} = 4^{2+\sqrt{x+2}} + 2^{x^3+4x-4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Bài 1.49 (B-02). Giải bất phương trình sau:

$$\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1.$$

Bài 1.50 (B-05). Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài 1.51 (B-06). Giải bất phương trình sau:

$$\log_5(4^x + 144) - 4 \log_2 5 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1).$$

Bài 1.52 (B-07). Giải phương trình sau:

$$(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0.$$

Bài 1.53 (B-08). Giải bất phương trình sau:

$$\log_{0,7} (\log_6 (\frac{x^2 + x}{x + 4})) < 0.$$

Bài 1.54 (A-06). Giải phương trình sau:

$$3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0.$$

Bài 1.55 (A-07). Giải bất phương trình sau:

$$2 \log_3 (4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}} (2x + 3) \leq 2.$$

Bài 1.56 (A-08). Giải phương trình sau:

$$\log_{2x-1} (2x^2 + x - 1) + \log_{x+1} (2x - 1)^2 = 4.$$

1.2 Hệ Phương trình

Bài 1.57 (D-12). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases} ; \quad (x; y \in \mathbb{R})$$

Bài 1.58 (A-12). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 1.59 (A-11). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x + y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 1.60 (D-02). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y. \end{cases}$$

Bài 1.61 (D-08). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 1.62 (D-09). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 1.63 (D-10). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y + 2 = 0 \\ 2\log_2(x-2) - \log_{\sqrt{2}}y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 1.64 (B-02). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2}. \end{cases}$$

Bài 1.65 (B-03). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2}. \end{cases}$$

Bài 1.66 (B-05). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3. \end{cases}$$

Bài 1.67 (B-08). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 1.68 (B-09). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 1.69 (B-10). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_2(3y - 1) = x \\ 4^x + 2^x = 3y^2. \end{cases}$$

Bài 1.70 (A-03). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1. \end{cases}$$

Bài 1.71 (A-04). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Bài 1.72 (A-06). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4. \end{cases}$$

Bài 1.73 (A-08). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Bài 1.74 (A-09). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81. \end{cases}$$

Bài 1.75 (A-10). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7. \end{cases}$$

1.3 Phương pháp hàm số, bài toán chứa tham số

Bài 1.76 (D-11). Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 1.77 (D-04). Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m. \end{cases}$$

Bài 1.78 (D-04). Chứng minh rằng phương trình sau có đúng một nghiệm:

$$x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Bài 1.79 (D-06). Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a. \end{cases}$$

Bài 1.80 (D-07). Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10. \end{cases}$$

Bài 1.81 (B-04). Xác định m để phương trình sau có nghiệm

$$m \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

Bài 1.82 (B-06). Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1.$$

Bài 1.83 (B-07). Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m , phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}.$$

Bài 1.84 (A-02). Cho phương trình:

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \quad (m \text{ là tham số}).$$

1. Giải phương trình khi $m = 2$.
2. Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

Bài 1.85 (A-07). Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}.$$

Bài 1.86 (A-08). Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m \quad (m \in \mathbb{R}).$$

Đáp số

$$1.1 \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$1.2 \quad x = \frac{6}{5}$$

$$1.3 \quad \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x = 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$1.4 \quad x = 3$$

$$1.5 \quad x = 1 \vee x = 2 - \sqrt{2}$$

$$1.6 \quad x = 5$$

$$1.7 \quad x > 10 - \sqrt{34}$$

$$1.8 \quad 2 \leq x < 10$$

$$1.9 \quad x = -2$$

$$1.10 \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$1.11 \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases}$$

$$1.12 \quad \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$$

$$1.13 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$1.14 \quad x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$1.15 \quad \cos x = -1; \cos x = \frac{1}{2}$$

$$1.16 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$1.17 \quad x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{2}$$

$$1.18 \quad \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.19 \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.20 \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.21 \quad \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.22 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.23 \quad \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.24 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.25 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.26 \quad \begin{cases} x = \frac{k\pi}{9} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.27 \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.28 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.29 \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.30 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.31 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$1.32 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.33 \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.34 \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.35 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$1.36 \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.37 \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.38 \quad x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.39 \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$$

$$1.40 \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

$$1.41 \quad x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.42 \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$1.43 \quad x = 0$$

$$1.44 \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$1.45 x = 0 \vee x = 1$$

$$1.46 x = \log_2 3$$

$$1.47 S = [2 - \sqrt{2}; 1) \cup (2; 2 + \sqrt{2}]$$

$$1.48 x = 1 \vee x = 2$$

$$1.49 \log_9 73 < x \leq 2$$

$$1.50 x = 0$$

$$1.51 2 < x < 4$$

$$1.52 x = 1 \vee x = -1$$

$$1.53 S = (-4; -3) \cup (8; +\infty)$$

$$1.54 x = 1$$

$$1.55 \frac{3}{4} < x \leq 3$$

$$1.56 x = 2 \vee x = \frac{5}{4}$$

$$1.57 \begin{cases} (x; y) = (1; 1) \\ (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}) \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}) \end{cases}$$

$$1.58 (x; y) = (\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}; \frac{-3}{2})$$

$$1.59 (1; 1); (-1; -1); (\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}); (-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$$

$$1.60 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$1.61 (x; y) = (5; 2)$$

$$1.62 (x; y) = (1; 1); (2; -\frac{3}{2})$$

$$1.63 (x; y) = (3; 1)$$

$$1.64 (x; y) = (1; 1); (\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$$

$$1.65 x = y = 1$$

$$1.66 (x; y) = (1; 1); (2; 2)$$

$$1.67 (x; y) = (-4; \frac{17}{4})$$

$$1.68 (x; y) = (1; \frac{1}{3}); (3; 1)$$

$$1.69 (x; y) = (-1; \frac{1}{2})$$

$$1.70 (x; y) = (1; 1); (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \\ (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$$

$$1.71 (x; y) = (3; 4)$$

$$1.72 (x; y) = (3; 3)$$

$$1.73 (x; y) = (\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}) = (1; -\frac{3}{2})$$

$$1.74 x = y = 2 \\ x = y = -2$$

$$1.75 (x; y) = (\frac{1}{2}; 2)$$

$$1.76 m \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$1.77 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$$

1.78 $f(x) = \text{vt đb trên } [1; +\infty)$

1.83

1.80
$$\begin{cases} \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \\ m \geq 22 \end{cases}$$

1.84 $1.x = 3^{\pm\sqrt{3}}$
 $2.0 \leq m \leq 2$

1.81 $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$

1.85 $-1 < m \leq \frac{1}{3}$

1.82 $m \geq \frac{9}{2}$

1.86 $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 3\sqrt{2} + 6$

Chương 2

Bất đẳng thức

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Bất đẳng thức | 17 |
| 2.2 | Giá trị nhỏ nhất- Giá trị lớn nhất | 18 |
| 2.3 | Nhận dạng tam giác | 20 |
| | Đáp số | 20 |

2.1 Bất đẳng thức

Bài 2.1 (A-09). Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x + y + z) = 3yz$, ta có:

$$(x + y)^3 + (x + z)^3 + 3(x + y)(x + z)(y + z) \leq 5(y + z)^3.$$

Bài 2.2 (A-05). Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1.$$

Bài 2.3 (A-03). Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

Bài 2.4 (D-07). Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng : $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Bài 2.5 (D-05). Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

2.2 Giá trị nhỏ nhất- Giá trị lớn nhất

Bài 2.6 (D-12). Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$.

Bài 2.7 (B-12). Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 0$ và

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^5 + y^5 + z^5.$$

Bài 2.8 (A-12). Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$$

Bài 2.9 (B-11). Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn

$$2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2). \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Bài 2.10 (A-11). Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

.

Bài 2.11 (D-11). Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$.

Bài 2.12 (A-07). Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}.$$

Bài 2.13 (A-06). Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện:

$$(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

Bài 2.14 (B-10). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bài 2.15 (B-09). Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

Bài 2.16 (B-08). Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

Bài 2.17 (B-07). Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

Bài 2.18 (B-06). Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|.$$

Bài 2.19 (B-03). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$.

Bài 2.20 (D-10). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}.$$

Bài 2.21 (D-09). Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

Bài 2.22 (D-08). Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Bài 2.23 (D-03). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

2.3 Nhận dạng tam giác

Bài 2.24 (A-04). Cho tam giác ABC không tù thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3.$$

Tính ba góc của tam giác ABC .

Đáp số

$$2.6 \quad A_{\min} = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$$

$$2.13 \quad A_{\max} = 16$$

$$2.20 \quad y_{\min} = \sqrt{2}$$

$$2.7 \quad P = \frac{5\sqrt{6}}{36}$$

$$2.14 \quad M_{\min} = 2$$

$$2.21 \quad S_{\max} = \frac{25}{2}; S_{\min} = \frac{191}{16}$$

$$2.8 \quad P_{\min} = 3$$

$$2.15 \quad A_{\min} = \frac{9}{16}$$

$$2.16 \quad P_{\max} = 3; P_{\min} = -6 \quad 2.22 \quad P_{\min} = -\frac{1}{4}; P_{\max} = \frac{1}{4}$$

$$2.9 \quad \min P = -\frac{23}{4}$$

$$2.10 \quad P_{\min} = \frac{34}{33}$$

$$2.17 \quad P_{\min} = \frac{9}{2}$$

$$2.23 \quad y_{\max} = \sqrt{2}; y_{\min} = 0$$

$$2.11 \quad \text{GTLN là } \frac{17}{3}; \text{GTNN là } 3$$

$$2.18 \quad A_{\min} = 2 + \sqrt{3}$$

$$2.19 \quad \begin{matrix} \max y = 2\sqrt{2} \\ [-2;2] \\ \min y = -2 \\ [-2;2] \end{matrix}$$

$$2.24 \quad A = 90^\circ; B = C = 45^\circ$$

$$2.12 \quad P_{\min} = 2$$

Chương 3

Hình học giải tích trong mặt phẳng

| | |
|---------------------------|----|
| 3.1 Đường thẳng | 22 |
| 3.2 Đường tròn | 25 |
| 3.3 Cônic | 26 |
| Đáp số | 27 |

3.1 Đường thẳng

Bài 3.1 (D-12). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x^y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm M $(-\frac{1}{3}; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Bài 3.2 (A-12). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M(\frac{11}{2}; \frac{1}{2})$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Bài 3.3 (D-11). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4; 1)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

Bài 3.4 (B-11). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta : x - y - 4 = 0$ và $d : 2x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM.ON = 8$.

Bài 3.5 (A-10). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(6;6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm E(1;-3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Bài 3.6 (A-09). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6;2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1;5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta : x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 3.7 (A-06). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho các đường thẳng :

$$d_1 : x + y + 3 = 0, \quad d_2 : x - y - 4 = 0, \quad d_3 : x - 2y = 0.$$

Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 .

Bài 3.8 (A-05). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng :

$$d_1 : x - y = 0 \quad \text{và} \quad d_2 : 2x + y - 1 = 0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

Bài 3.9 (A-04). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho hai điểm A(0;2) và B($-\sqrt{3}$; -1). Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

Bài 3.10 (A-02). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 3.11 (B-10). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh C(-4;1), phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 3.12 (B-09). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(-1;4) và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta : x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các điểm B và C, biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 18.

Bài 3.13 (B-08). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(-1;-1), đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

Bài 3.14 (B-07). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho điểm A(2;2) và các đường thẳng :

$$d_1 : x + y - 2 = 0, \quad d_2 : x + y - 8 = 0.$$

Tìm tọa độ điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 3.15 (B-04). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho hai điểm A(1;1), B(4;-3). Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Bài 3.16 (B-03). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $AB=AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết M(1;-1) là trung điểm cạnh BC và $G(\frac{2}{3}; 0)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Bài 3.17 (B-02). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm I($\frac{1}{2}; 0$), phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Bài 3.18 (D-10). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho điểm A(0;2) và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ . Viết phương trình đường thẳng Δ , biết rằng khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

Bài 3.19 (D-09). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có M(2;0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao đi qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Bài 3.20 (D-04). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh A(-1;0); B(4;0); C(0;m) với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

3.2 Đường tròn

Bài 3.21 (D-12). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d : 2x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d , cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB = CD = 2$.

Bài 3.22 (B-12). Trong mặt phẳng có hệ tọa độ Oxy, cho các đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 = 1$, $(C_2) : x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d : x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2) , tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d .

Bài 3.23 (D-11). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1; 0)$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.

Bài 3.24 (B-11). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(\frac{1}{2}; 1)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho $D(3; 1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

Bài 3.25 (A-11). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc Δ . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

Bài 3.26 (A-10). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho hai đường thẳng $d_1 : \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Bài 3.27 (A-09). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta : x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C) . Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Bài 3.28 (A-07). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $A(0; 2)$, $B(-2; -2)$, và $C(4; -2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

Bài 3.29 (B-09). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y = 0$, $\Delta_2 : x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K và bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1 , Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

Bài 3.30 (B-06). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M(-3;1). Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .

Bài 3.31 (B-05). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho hai điểm A(2;0) và B(6;4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Bài 3.32 (D-10). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3;-7), trục tâm là H(3;-1), tâm đường tròn ngoại tiếp là I(-2;0). Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

Bài 3.33 (D-09). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^\circ$.

Bài 3.34 (D-07). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ và đường thẳng d: $3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Bài 3.35 (D-06). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng d: $x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Bài 3.36 (D-03). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng d: $x - y - 1 = 0$.

1. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d.
2. Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').

3.3 Côníc

Bài 3.37 (B-12). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình

$x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc Ox.

Bài 3.38 (A-12). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Bài 3.39 (A-11). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Bài 3.40 (A-08). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Bài 3.41 (B-10). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho điểm $A(2; \sqrt{3})$ và elip (E): $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm), M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E), N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 .

Bài 3.42 (D-08). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 16x$ và điểm $A(1;4)$. Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3.43 (D-02). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 3.44 (D-05). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elíp (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Đáp số

$$3.1 \quad A(-3; 1); D(-1; 3). B(1; -3). C(3; -3). 3.17 \quad A(-2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(-1; -2)$$

$$3.2 \quad A(1; -1); A(4; 5).$$

$$3.18 \quad (\sqrt{5} - 1)x \pm 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}y = 0$$

$$3.3 \quad A(4; 3); C(3; -1)$$

$$3.19 \quad 3x - 4y + 5 = 0$$

$$3.4 \quad N(0; -4), M(0; -2) \\ N(6; 2); M(\frac{6}{5}; \frac{2}{5})$$

$$3.20 \quad m = \pm 3\sqrt{6}$$

$$3.21 \quad (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 10$$

$$3.5 \quad B(0; -4), C(-4; 0) \\ \text{hoặc } B(-6; 2), C(2; -6)$$

$$3.22 \quad (C) : x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$$

$$3.6 \quad y - 5 = 0; x - 4y + 19 = 0$$

$$3.23 \quad \Delta : y = 1; y = -3$$

$$3.7 \quad M(-22; -11), M(2; 1)$$

$$3.24 \quad A(3; \frac{13}{3})$$

$$3.8 \quad A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0) \\ A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$$

$$3.25 \quad M(2; -4) \text{ và } M(-3; 1)$$

$$3.26 \quad (x + \frac{1}{2\sqrt{3}})^2 + (y + \frac{2}{3})^2 = 1$$

$$3.9 \quad H(\sqrt{3}; -1), I(-\sqrt{3}; 1)$$

$$3.27 \quad m = 0 \vee m = \frac{8}{15}$$

$$3.10 \quad G_1(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}) \\ G_2(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3})$$

$$3.28 \quad x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

$$3.29 \quad K(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}); R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$3.11 \quad 3x - 4y + 16 = 0$$

$$3.30 \quad 2x + y - 3 = 0$$

$$3.12 \quad B(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}); C(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}) \\ B(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}); C(\frac{11}{2}; \frac{3}{2})$$

$$3.31 \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ (x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 49$$

$$3.13 \quad C(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4})$$

$$3.32 \quad C(-2 + \sqrt{65}; 3)$$

$$3.14 \quad B(-1; 3), C(3; 5) \\ B(3; -1), C(5; 3)$$

$$3.33 \quad M(\frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$3.15 \quad C = (7; 3); (-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11})$$

$$3.34 \quad m = 19 \vee m = -41$$

$$3.16 \quad B, C = (4; 0); (-2; -2)$$

$$3.35 \quad M = (1; 4); (-2; 1)$$

3.36 $(x - 3)^2 + y^2 = 4$
 $A(1; 0), B(3; 2)$

3.37 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

3.38 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$

3.39 $A, B = (\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}); (\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$

3.40 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

3.41 $(x - 1)^2 + (y - \frac{2\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{4}{3}$

3.42 $I(17; -4)$

3.43 $M(2\sqrt{7}; 0); N(0; \sqrt{21})$
 $gt_{nn}(MN) = 7$

3.44 $A, B = (\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}); (\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7})$

Chương 4

Tổ hợp và số phức

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Bài toán đếm | 30 |
| 4.2 | Công thức tổ hợp | 31 |
| 4.3 | Đẳng thức tổ hợp khi khai triển | 31 |
| 4.4 | Hệ số trong khai triển nhị thức | 32 |
| 4.5 | Số phức | 33 |
| | Đáp số | 34 |

4.1 Bài toán đếm

Bài 4.1 (B-12). Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Bài 4.2 (B-05). Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Bài 4.3 (B-04). Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được

bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Bài 4.4 (B-02). Cho đa giác đều $A_1 A_2 \cdots A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm A_1, A_2, \cdots, A_{2n} nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm A_1, A_2, \cdots, A_{2n} , tìm n .

Bài 4.5 (D-06). Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

4.2 Công thức tổ hợp

Bài 4.6 (B-08). Cho n, k nguyên dương, $k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}.$$

Bài 4.7 (B-06). Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sao cho tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Bài 4.8 (D-05). Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$

Biết rằng $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ (n là số nguyên dương).

4.3 Đẳng thức tổ hợp khi khai triển

Bài 4.9 (A-07). Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \cdots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n + 1}$$

(n là số nguyên dương).

Bài 4.10 (A-05). Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2n+1}^4 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Bài 4.11 (B-03). Cho n nguyên dương. Tính tổng

$$C_n^0 + \frac{2^2 - 1}{2} C_n^1 + \frac{2^3 - 1}{3} C_n^2 + \cdots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} C_n^n.$$

Bài 4.12 (D-08). Tìm số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2048.$$

4.4 Hệ số trong khai triển nhị thức

Bài 4.13 (A-12). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$.

Bài 4.14 (A-08). Cho khai triển $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số a_0, a_1, \cdots, a_n thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm hệ số lớn nhất trong các số a_0, a_1, \cdots, a_n .

Bài 4.15 (A-06). Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

(n là số nguyên dương).

Bài 4.16 (A-04). Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1 + x^2(1 - x)]^8$.

Bài 4.17 (A-03). Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$$

(n là số nguyên dương, $x > 0$).

Bài 4.18 (A-02). Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} \left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \cdots + C_n^{n-1} \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right) \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n.$$

(n nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$, tìm n và x .

Bài 4.19 (B-07). Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Niuton của $(2+x)^n$, biết:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 2048$$

(n là số nguyên dương).

Bài 4.20 (D-07). Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của:

$$x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}.$$

Bài 4.21 (D-04). Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$.

Bài 4.22 (D-03). Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

4.5 Số phức

Bài 4.23 (D-12). Giải phương trình $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ trên tập hợp các số phức.

Bài 4.24 (D-12). Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Tìm môđun của số phức $w = z + 1 + i$.

Bài 4.25 (B-12). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2

Bài 4.26 (A-12). Cho số phức z thỏa $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

Bài 4.27 (D-11). Tìm số phức z , biết: $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$.

Bài 4.28 (B-11).

1. Tìm số phức z , biết: $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$.

2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^3$.

Bài 4.29 (A-11).

1. Tìm tất cả các số phức z , biết $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$.

2. Tính môđun của số phức z , biết:

$$(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i.$$

Bài 4.30 (A-10).

1. Tìm phần ảo của số phức z , biết $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i)$.

2. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1 - \sqrt{3}i)^3}{1 - i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z} + iz$.

Bài 4.31 (A-09). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Bài 4.32 (B-10). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn:

$$|z - i| = |(1 + i)z|.$$

Bài 4.33 (B-09). Tìm số phức z thỏa mãn: $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$.

Bài 4.34 (D-09). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - (3 - 4i)| = 2$.

Bài 4.35 (D-10). Tìm số phức z thỏa mãn: $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Đáp số

$$4.1 \quad P = \frac{443}{506}$$

$$4.2 \quad C_3^1 \cdot C_{12}^4 \cdot C_1^2 \cdot C_8^4 \cdot C_1^1 \cdot C_4^4 = 207900$$

$$4.3 \quad C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 + C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 56875$$

$$4.4 \quad n = 8$$

$$4.5 \quad C_{12}^4 - (C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2) = 225$$

$$4.7 \quad k = 9$$

$$4.8 \quad M = \frac{3}{4}$$

$$4.10 \quad n = 1002$$

$$4.11 \quad \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$$

$$4.12 \quad n = 6$$

$$4.13 \quad \frac{-35}{16} \cdot x^5$$

$$4.14 \quad a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$$

$$4.15 \quad C_{10}^6 = 210$$

$$4.16 \quad C_8^3 \cdot C_3^2 + C_8^4 \cdot C_4^0 = 238$$

$$4.17 \quad C_{12}^4 = 495$$

$$4.18 \quad n = 7, x = 4$$

$$4.19 \quad C_{11}^{10} \cdot 2^1 = 22$$

$$4.20 \quad (-2)^4 C_5^4 + 3^3 \cdot C_{10}^3 = 3320$$

$$4.21 \quad C_7^4 = 35$$

$$4.22 \quad n = 5$$

$$4.23 \quad z = -1 - 2i; z = -2 - i$$

$$4.24 \quad |w| = 5$$

$$4.25 \quad z_1 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \\ z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$4.26 \Rightarrow |w| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$4.27 \quad z = 2 - i$$

$$4.28$$

$$1. \quad z = -1 - \sqrt{3}i; z = 2 - \sqrt{3}i$$

$$2. \quad z = 2 + 2i$$

$$4.29 \quad z = 0, z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \\ |z| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$4.30 \quad \text{Phần ảo } z \text{ là: } -\sqrt{2} \\ |\bar{z} + iz| = 8\sqrt{2}$$

$$4.31 \quad A = 20$$

$$4.32 \quad x^2 + (y+1)^2 = 2$$

$$4.33 \quad z = 3 + 4i \text{ hoặc } z = 5$$

$$4.34 \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$$

$$4.35 \quad 1+i; 1-i; -1+i; -1-i$$

Chương 5

Khảo sát hàm số

| | | |
|-----|-----------------------------|----|
| 5.1 | Tiếp tuyến | 36 |
| 5.2 | Cực trị | 38 |
| 5.3 | Tương giao đồ thị | 40 |
| 5.4 | Bài toán khác | 41 |
| | Đáp số | 42 |

5.1 Tiếp tuyến

Bài 5.1 (A-11). Cho hàm số $y = \frac{-x + 1}{2x - 1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5.2 (D-02). Cho hàm số : $y = \frac{(2m - 1)x - m^2}{x - 1}$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với $m = -1$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.
3. Tìm m để đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

Bài 5.3 (D-05). Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) ứng với $m = 2$.
2. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Bài 5.4 (D-07). Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Bài 5.5 (D-10). Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

Bài 5.6 (B-04). Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm uốn và chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 5.7 (B-06). Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

Bài 5.8 (B-08). Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

Bài 5.9 (A-09). Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

5.2 Cực trị

Bài 5.10 (D-12). Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 + 2(3m-1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Bài 5.11 (B-12). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$, (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Bài 5.12 (A-12). Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$, (1), với m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Bài 5.13 (B-11). Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$, (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Bài 5.14 (B-02). Cho hàm số : $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) ứng với $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

Bài 5.15 (B-05). Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (*) khi $m = 1$.
2. Chứng minh rằng với m bất kỳ, đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

Bài 5.16 (B-07). Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ O.

Bài 5.17 (A-02). Cho hàm số: $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.
2. Tìm k để phương trình: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Bài 5.18 (A-05). Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$.
2. Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 5.19 (A-07). Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x + 2}$ (1), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O.

5.3 Tương giao đồ thị

Bài 5.20 (D-11). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho
2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Bài 5.21 (D-03).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ (1).
2. Tìm m để đường thẳng $d_m: y = mx + 2 - 2m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt.

Bài 5.22 (D-06). Cho hàm số : $y = x^3 - 3x + 2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3; 20)$ và có hệ số góc là m. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 5.23 (D-08). Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1; 2)$ với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 5.24 (D-09).

I. Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m) , m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 0$.
2. Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

II. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

Bài 5.25 (B-09).

I. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2. Với giá trị nào của m , phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

II. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4$.

Bài 5.26 (B-10). Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ).

Bài 5.27 (A-03). Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.

Bài 5.28 (A-04). Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$ (1).

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 1$.

Bài 5.29 (A-06).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
2. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x^3| - 9x^2 + 12|x| = m$.

Bài 5.30 (A-10). Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

5.4 Bài toán khác

Bài 5.31 (D-04). Cho hàm số : $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát hàm số (1) ứng với $m = 2$.
2. Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số (1) thuộc đường thẳng $y = x + 1$.

Bài 5.32 (B-03). Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1) (m là tham số).

1. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) ứng với $m = 2$.

Bài 5.33 (A-08). Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm các giá trị của tham số m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45° .

Đáp số

5.1 $m = -1$

5.12 $m = 0$

5.2 $-1 + 4 \ln \frac{4}{3}; m \neq 1$

5.13 $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

5.3 $m = 4$

5.14 $m < -3 \text{ or } 0 < m < 3$

5.4 $M(-\frac{1}{2}; -2); M(1; 1)$

5.15 $M(-2; m - 3); N(0; m + 1)$

5.5 $y = -6x + 10$

5.16 $m = \pm \frac{1}{2}$

5.6 $y = -x + \frac{8}{3}$

5.17 $-1 < k < 3, k \neq 0, k \neq 2$
 $y = 2x - m^2 + m$

5.7 $y = -x + 2\sqrt{2} - 5; y = -x - 2\sqrt{2} - 5$

5.18 $m = 1$

5.19 $m = -4 \pm 2\sqrt{6}$

5.8 $y = 24x + 15; y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$

5.20 $k = -3$

5.9 $y = -x - 2$

5.21 $m > 1$

5.10 $m = \frac{2}{3}$

5.22 $m > \frac{15}{4}, m \neq 24$

5.11 $m = \pm 2$

5.23

$$\mathbf{5.24} \quad I(-\tfrac{1}{3} < m < 1, m \neq 0); II(m = 1) \quad \mathbf{5.29} \quad 4 < m < 5$$

$$\mathbf{5.25} \quad I(0 < m < 1); II(m = \pm 2\sqrt{6}) \quad \mathbf{5.30} \quad -\tfrac{1}{4} < m < 1, m \neq 0$$

$$\mathbf{5.26} \quad m = \pm 2 \quad \mathbf{5.31} \quad m = 0 \text{ or } m = \pm 2$$

$$\mathbf{5.27} \quad -\tfrac{1}{2} < m < 0 \quad \mathbf{5.32} \quad m > 0$$

$$\mathbf{5.28} \quad m = \tfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \mathbf{5.33} \quad m = \pm 1$$

Chương 6

Hình học giải tích trong không gian

| | |
|---|----|
| 6.1 Đường thẳng và mặt phẳng | 44 |
| 6.2 Mặt cầu | 50 |
| 6.3 Phương pháp tọa độ trong không gian | 51 |
| Đáp số | 54 |

6.1 Đường thẳng và mặt phẳng

Bài 6.1 (D-12). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm A (1; -1; 2), B (2; -1; 0). Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M.

Bài 6.2 (B-12). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(0;0;3), M(1;2;0). Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM.

Bài 6.3 (A-12). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P) : $x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm A (1; -1; 2). Viết phương trình đường thẳng δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 6.4 (D-11). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

Bài 6.5 (B-11).

1. Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1); B(-3; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Bài 6.6 (A-11). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2; 0; 1), B(0; -2; 3)$ và mặt phẳng (P) : $2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$.

Bài 6.7 (D-02). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng

(P) : $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng

$$d_m : \begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

(m là tham số).

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Bài 6.8 (D-03). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng

(P) : $x - y - 2z + 5 = 0$ và đường thẳng $d_k : \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ (k là tham số).

Xác định k để đường thẳng d_k vuông góc với mặt phẳng (P).

Bài 6.9 (D-04). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Biết $A(a; 0; 0), B(-a; 0; 0), C(0; 1; 0), B_1(-a; 0; b), a > 0, b > 0$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

b) Cho a, b thay đổi, nhưng luôn thỏa mãn $a+b = 4$. Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

Bài 6.10 (D-05). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{và} \quad d_2 : \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0. \end{cases}$$

- Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .
- Mặt phẳng tọa độ Oxy cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Bài 6.11 (D-06). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;2;3) và hai đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}, \quad d_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

- Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1 .
- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 .

Bài 6.12 (D-07). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;4;2), B(-1;2;4) và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc mặt phẳng (OAB).
- Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Bài 6.13 (D-09).

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(2;1;0), B(1;2;2), C(1;1;0) và mặt phẳng (P): $x+y+z-20=0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x+2y-3z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

Bài 6.14 (D-10).

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$ và (Q): $x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Bài 6.15 (B-03). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2;0;0), B(0;0;8) và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0;6;0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

Bài 6.16 (B-04). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(-4;-2;4) và đường thẳng d: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

Bài 6.17 (B-06). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(0;1;2) và hai đường thẳng:

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với d_1 và d_2 .
- Tìm tọa độ các điểm M thuộc d_1 , N thuộc d_2 sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Bài 6.18 (B-08). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1).

- Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.
- Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho MA=MB=MC.

Bài 6.19 (B-09).

- Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1) và D(0;3;1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).
- Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm A(-3;0;1), B(1;-1;3). Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó nhỏ nhất.

Bài 6.20 (B-10).

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Xác định b và c , biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM .

Bài 6.21 (A-02). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .

2. Cho điểm $M(2;1;4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc Δ_2 sao cho đoạn MH có độ dài nhỏ nhất.

Bài 6.22 (A-03). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ ($a > 0, b > 0$). Gọi M là trung điểm cạnh CC' .

1. Tính thể tích khối tứ diện $BDA'M$ theo a và b .

2. Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Bài 6.23 (A-04). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O . Biết $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$, $S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC .

1. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA , BM .

2. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N . Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

Bài 6.24 (A-05). Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho

đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$.

1. Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.

2. Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , biết Δ đi qua A và vuông góc với d .

Bài 6.25 (A-06). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Bài 6.26 (A-07). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad \text{và} \quad d_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3. \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

Bài 6.27 (A-08). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2;5;3) và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$.

1. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d.
2. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Bài 6.28 (A-09). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho

mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, $\Delta_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Bài 6.29 (A-10). Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ . Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC = \sqrt{6}$.

6.2 Mặt cầu

Bài 6.30 (D-12). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + y^2 + 2z + 10 = 0$ và điểm I (2; 1; 3). Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Bài 6.31 (B-12). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm A(2;1;0), B(-2;3;2). Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d.

Bài 6.32 (A-12). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm I (0; 0; 3). Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

Bài 6.33 (D-11). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Bài 6.34 (A-11). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm A(4; 4; 0). Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Bài 6.35 (D-04). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1) và mặt phẳng (P) : $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C, và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Bài 6.36 (D-08). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A(3;3;0), B(3;0;3), C(0;3;3), D(3;3;3).

1. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.
2. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 6.37 (B-05). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng ABC.A₁B₁C₁ với A(0;-3;0), B(4;0;0), C(0;3;0), B₁(4;0;4).

1. Tìm tọa độ các đỉnh A₁, C₁. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC₁B₁).
2. Gọi M là trung điểm của A₁B₁. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC₁. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A₁C₁ tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN.

Bài 6.38 (B-07). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

2. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Bài 6.39 (A-09). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng

(P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Bài 6.40 (A-10). Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(0;0;-2) và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ . Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho BC=8.

6.3 Phương pháp tọa độ trong không gian

Bài 6.41 (D-12). Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Bài 6.42 (B-12). Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a, AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích của khối chóp S.ABH theo a.

Bài 6.43 (A-12). Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Bài 6.44 (D-11). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết SB = $2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Bài 6.45 (B-11). Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

Bài 6.46 (A-11). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB=BC=2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

Bài 6.47 (D-03). Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB=a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C , trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC=BD=AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a .

Bài 6.48 (D-06). Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA=2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC . Tính thể tích khối chóp $A.BCMN$.

Bài 6.49 (D-07). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

Bài 6.50 (D-08). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

Bài 6.51 (D-09). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=a$, $AA'=2a$, $A'C=3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .

Bài 6.52 (D-10). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA=a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC , $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a .

Bài 6.53 (B-02). Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a .

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D .

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BB_1, CD, A_1D_1 . Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N .

Bài 6.54 (B-03). Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC' . Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông.

Bài 6.55 (B-04). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ theo φ . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và φ .

Bài 6.56 (B-06). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=a\sqrt{2}, SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) . Tính thể tích khối tứ diện $ANIB$.

Bài 6.57 (B-07). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm của AE , N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Bài 6.58 (B-08). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=a, SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM, DN .

Bài 6.59 (B-09). Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a .

Bài 6.60 (B-10). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a .

Bài 6.61 (A-02). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC . Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

Bài 6.62 (A-03). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$.

Bài 6.63 (A-06). Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB=2a$. Tính thể tích khối tứ diện $OO'AB$.

Bài 6.64 (A-07). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh rằng AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

Bài 6.65 (A-08). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Bài 6.66 (A-09). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB=AD=2a$, $CD=a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD . Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Bài 6.67 (A-10). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN với DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .

Đáp số

6.1 $M(1; -1; 0) : M(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3})$.

6.4 $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

6.2 $6x + 3y - 4z + 12 = 0$

6.5 1. $M = (4; -7; 6); (5; 9; -11)$

6.3 $\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{2}$

2. $M(-2; 1; -5); M(-14; -35; 19)$

$$6.6 \quad M(0; 1; 3) \text{ hay } M(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7})$$

$$6.7 \quad m = -\frac{1}{2}$$

$$6.8 \quad k = 1$$

$$6.9 \quad \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}; a = b = 2$$

$$6.10 \quad 15x + 11y - 17z - 10 = 0; S_{OAB} = 5$$

$$6.11 \quad A'(-1; -4; 1); \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$$

$$6.12 \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}; M(-1; 0; 4)$$

$$6.13 \quad D(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1); \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$$

$$6.14 \quad x - z \pm 2\sqrt{2} = 0; M(4; 1; 1), M(7; 4; 25).$$

$$6.15 \quad 5$$

$$6.16 \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

$$6.17 \quad x + 3y + 5z - 13 = 0 \\ M(0; 1; -1), N(0; 1; 1)$$

$$6.18 \quad x + 2y - 4z + 6 = 0; M(2; 3; -7)$$

$$6.19 \quad 4x + 2y + 7z - 15 = 0; 2x + 3z - 5 = 0 \\ \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$$

$$6.20 \quad b = c = \frac{1}{2}; M(-1; 0; 0), M(2; 0; 0) \quad H(2; 2; 2)$$

$$6.21 \quad 2x - z = 0; H(2; 3; 4)$$

$$6.22 \quad \frac{a^2b}{4}; \frac{a}{b} = 1$$

$$6.23 \quad 30^\circ, \frac{2\sqrt{6}}{3}; \sqrt{2}$$

$$6.24 \quad I(-3; 5; 7) \text{ or } I(3; -7; 1) \\ x = t, y = -1, z = 4 + t$$

$$6.25 \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 2x - y + z - 1 = 0; x - 2y - z + 1 = 0$$

$$6.26 \quad \frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

$$6.27 \quad H(3; 1; 4); x - 4y + z - 3 = 0$$

$$6.28 \quad M(0; 1; -3) \text{ or } M(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35})$$

$$6.29 \quad \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$6.30 \quad (S) : (x \vee 2)^2 + (y \vee 1)^2 + (z \vee 3)^2 =$$

$$6.31 \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$$

$$6.32 \quad x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$$

$$6.33 \quad (x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$$

$$6.34 \quad x - y + z = 0; x - y - z = 0$$

$$6.35 \quad (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

$$6.36 \quad x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$$

$$6.37 \quad x^2 + (y+2)^2 + z^2 = \frac{576}{25}; \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$6.38 \quad y - 2z = 0; M(-1; -1; -3)$$

$$6.39 \quad H(3; 0; 2); r = 4$$

$$6.40 \quad x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 25$$

$$6.41 \quad V = \frac{a^3}{24\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$6.42 \quad V_{(SABH)} = \frac{7a^3\sqrt{11}}{96}$$

$$6.43 \quad V(S, ABC) = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{7}}{4} a = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

$$d[BC, SA] = \frac{3}{2} HI = \frac{3}{2} \frac{a\sqrt{42}}{12} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

$$6.44 \quad V = 2a^3\sqrt{3}; h = \frac{6a}{\sqrt{7}}$$

$$6.45 \quad V = \frac{3a^3}{2}; h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$6.46 \quad V_{(SMNCB)} = \sqrt{3}a^3; h = \frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$$

$$6.47 \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$6.48 \quad \frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$$

$$6.49 \quad \frac{a}{3}$$

$$6.50 \quad \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

$$6.51 \quad \frac{4a^3}{9}; \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$$6.52 \quad \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$$

$$6.53 \quad \frac{a}{\sqrt{6}}; 90^\circ$$

$$6.54 \quad a\sqrt{2}$$

$$6.55 \quad \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \tan \varphi$$

$$6.56 \quad \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$$

$$6.57 \quad \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$6.58 \quad \frac{a^3\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$6.59 \quad \frac{9a^3}{208}$$

$$6.60 \quad \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}; \frac{7a}{12}$$

$$6.61 \quad \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$$

$$6.62 \quad 120^\circ$$

$$6.63 \quad \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$$

$$6.64 \quad \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$$

$$6.65 \quad \frac{a^3}{2}; \frac{1}{4}$$

$$6.66 \quad \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$$

$$6.67 \quad \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}; \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$$

Chương 7

Tích phân và ứng dụng

| | | |
|-----|---|----|
| 7.1 | Tính các tích phân sau: | 57 |
| 7.2 | Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường sau: | 59 |
| 7.3 | Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi hình phẳng (H) khi quay quanh Ox. Biết (H) được giới hạn bởi các đường sau: | 59 |
| | Đáp Số | 60 |

7.1 Tính các tích phân sau:

Bài 7.1 (D-12).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$$

Bài 7.3 (A-12).

$$I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$$

Bài 7.2 (B-12).

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$$

Bài 7.4 (D-11).

$$I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$$

Bài 7.5 (B-11).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

Bài 7.6 (A-11).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$$

Bài 7.7 (D-03).

$$I = \int_0^2 |x^2 - x| dx.$$

Bài 7.8 (D-04).

$$I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx.$$

Bài 7.9 (D-05).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx.$$

Bài 7.10 (D-06).

$$I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx.$$

Bài 7.11 (D-07).

$$I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx.$$

Bài 7.12 (D-08).

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx.$$

Bài 7.13 (D-09).

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}.$$

Bài 7.14 (D-10).

$$I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx.$$

Bài 7.15 (B-03).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx.$$

Bài 7.16 (B-04).

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx.$$

Bài 7.17 (B-05).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx.$$

Bài 7.18 (B-06).

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}.$$

Bài 7.19 (B-08).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4}) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}.$$

Bài 7.20 (B-09).

$$I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx.$$

Bài 7.21 (B-10).

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2 + \ln x)^2} dx.$$

Bài 7.22 (A-03).

$$I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}.$$

Bài 7.23 (A-04).

$$I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx.$$

Bài 7.24 (A-05).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx.$$

Bài 7.25 (A-06).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx.$$

Bài 7.26 (A-08).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx.$$

Bài 7.27 (A-09).

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx.$$

Bài 7.28 (A-10).

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{1 + 2e^x} dx.$$

7.2 Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường sau:

Bài 7.29 (B-02). $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}.$

Bài 7.30 (A-02). $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3.$

Bài 7.31 (A-07). $y = (e + 1)x$ và $y = (1 + e^x)x.$

7.3 Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi hình phẳng (H) khi quay quanh Ox. Biết (H) được giới hạn bởi các đường sau:

Bài 7.32 (B-07). $y = x \ln x, y = 0, x = e.$

Đáp số

- | | | |
|--|---|---|
| 7.1 $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$ | 7.11 $(\frac{5e^4-1}{32})$ | 7.22 $(\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3})$ |
| 7.2 $\frac{1}{2}(2\ln 3 - 3\ln 2)$ | 7.12 $(\frac{3-2\ln 2}{16})$ | 7.23 $(\frac{11}{3} - 4\ln 2)$ |
| 7.3 $I =$ | 7.13 $(\ln(e^2 + e + 1) - 2)$ | 7.24 $(\frac{34}{27})$ |
| $\frac{2}{3} + \frac{-2}{3}\ln 2 + \ln 3$ | 7.14 $(\frac{e^2}{2} - 1)$ | 7.25 $(\frac{2}{3})$ |
| 7.4 $\frac{34}{3} + 10\ln\frac{3}{5}$ | 7.15 $(\frac{1}{2}\ln 2)$ | 7.26 $(\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}})$ |
| 7.5 $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ | 7.16 $(\frac{116}{135})$ | 7.27 $(\frac{8}{15} - \frac{\pi}{4})$ |
| 7.6 $\frac{\pi}{4} + \ln(\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2})$ | 7.17 $(2\ln 2 - 1)$ | 7.28 $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+2e}{3})$ |
| 7.7 (1) | 7.18 $(\ln\frac{3}{2})$ | 7.29 $(2\pi + \frac{4}{3})$ |
| 7.8 $(3\ln 3 - 2)$ | 7.19 $(\frac{4-3\sqrt{2}}{4})$ | 7.30 $(\frac{109}{6})$ |
| 7.9 $(e + \frac{\pi}{4} - 1)$ | 7.20 $(\frac{1}{4}(3 + \ln\frac{27}{16}))$ | 7.31 $(\frac{e}{2} - 1)$ |
| 7.10 $I = (\frac{5-3e^2}{4})$ | 7.21 $(-\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{2})$ | 7.32 $(\frac{\pi(5e^3-2)}{27})$ |

www.MATHVN.com