

Chuyên đề 1

HÀM SỐ & CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

§ 1. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

☆☆☆

I – Các dạng toán thường gặp và phương pháp giải

➤ **Dạng toán 1.** Tìm tham số m để hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên D ?

Trong đó D có thể là $(-\infty; \alpha)$, $(\alpha; +\infty)$, $(\alpha; \beta)$, $(\alpha; \beta]$, $[\alpha; \beta)$, $[\alpha; \beta]$, $.....$

— **Bước 1.** Ghi điều kiện để $y = f(x; m)$ đơn điệu trên D . Chẳng hạn:

Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x; m) \geq 0$.

Đề yêu cầu $y = f(x; m)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x; m) \leq 0$.

— **Bước 2.** Độc lập m ra khỏi biến số và đặt về còn lại là $g(x)$ được: $\begin{cases} m \geq g(x) \\ m \leq g(x) \end{cases}$.

— **Bước 3.** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D .

— **Bước 4.** Dựa vào bảng biến thiên kết luận: $\begin{cases} \text{Khi } m \geq g(x) \Rightarrow m \geq \max_D g(x) \\ \text{Khi } m \leq g(x) \Rightarrow m \leq \min_D g(x) \end{cases}$.

➤ **Dạng toán 2.** Tìm m để hàm số: $y = f(x; m) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d$ đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ?

— **Bước 1.** Tính $y' = f'(x; m) = ax^2 + bx + c$.

— **Bước 2.** Hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad (i)$

— **Bước 3.** Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài $= l \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = l$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = l^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = l^2 \quad (ii)$$

— **Bước 4.** Giải (ii) và giao với (i) để suy ra giá trị m cần tìm.

II – Thí dụ minh họa và bài tập rèn luyện

1/ Các thí dụ về tìm m để hàm số đơn điệu trên D mà để độc lập m

Thí dụ 1. Tìm m để $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$?

Đại học khối A – A₁ năm 2013

ĐS: $m \leq -1$.

Thí dụ 2. Tìm m để $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$?

Đề thi thử Đại học lần I năm 2014 – THPT Hậu Lộc 2 – Thanh Hóa

ĐS: $m \leq -3$.

Thí dụ 3. Tìm m để $y = x^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 1$ nghịch biến trên $[0; 2]$?

ĐS: $m \geq \frac{11}{9}$.

Thí dụ 4. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + 5x + m^2 + 6}{x + 3}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

Dự bị Đại học năm 2003

ĐS: $-4 \leq m \leq 4$.

Thí dụ 5. Tìm m để: $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 2014$ giảm $\forall x \leq -\frac{1}{4}$?

$$\text{ĐS: } -\frac{25}{12} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{3}.$$

Thí dụ 6. Tìm m để $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên $(1; 2)$?

$$\text{ĐS: } 1 < m \leq 2.$$

2/ Các thí dụ tìm m để hàm số đơn điệu trên D mà không độc lập được m

Thí dụ 7. Tìm m để hàm số: $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

Đề thi thử Đại học năm 2014 – THPT Lục Ngạn số 1 – Bắc Giang

$$\text{ĐS: } m \leq 1.$$

Thí dụ 8. Tìm m để: $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + mx^2 - 2x + m^3$ giảm trên $(-\infty; 1)$?

$$\text{ĐS: } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < m \leq 1.$$

Thí dụ 9. Tìm tham số m để hàm số: $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 4m^2 - 4m - 2}{x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

$$\text{ĐS: } \frac{1-\sqrt{13}}{3} \leq m \leq \frac{7+\sqrt{14}}{7}.$$

Thí dụ 10. Tìm tham số m để $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{-x + 2m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$?

$$\text{ĐS: } m \in [2 + \sqrt{3}; +\infty).$$

3/ Các thí dụ về hàm bậc ba đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng l

Thí dụ 11. Tìm tham số m để hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx - 10$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 ?

$$\text{ĐS: } m = -\frac{15}{4}.$$

Thí dụ 12. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 2 ?

$$\text{ĐS: } m = 0.$$

★ Bài tập rèn luyện

BT 1. Tìm m để $y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 - (2m-1)x^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

$$\text{ĐS: } m \geq \frac{4}{11}.$$

BT 2. Tìm m để $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 6$ đơn điệu tăng trong khoảng $(5; +\infty)$?

$$\text{ĐS: } m \in (-\infty; 4].$$

BT 3. Tìm m để $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$?

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An

$$\text{ĐS: } -2 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

BT 4. Tìm m để $y = \frac{2}{3}x^3 - 2mx^2 + (m^2 - 2m + 1)x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

$$\text{ĐS: } m \in (-\infty; 3 - \sqrt{6}].$$

BT 5. Tìm m để $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$ đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$?

$$\text{ĐS: } m \in \left[-2; \frac{3}{2}\right].$$

BT 6. Tìm m để $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$?

$$\text{ĐS: } m \leq -\frac{1}{7}.$$

BT 7. Tìm m để $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

$$\text{ĐS: } m \in [-1; 1].$$

BT 8. Tìm m để $y = \frac{-2x^2 - 3x + m}{2x + 1}$ nghịch biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$?

$$\text{ĐS: } m \geq -1.$$

BT 9. Tìm m để $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{-x + m}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$?

$$\text{HD: } t = x - 2 \Rightarrow \text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t^2 - 2(4-2m)t - (m^2 - 10m + 7) \leq 0 \\ m \leq 2 \end{cases}, \forall t \in (0; +\infty).$$

BT 10. Tìm m để $y = \frac{2x^2 + mx + 2 - m}{x + m - 1}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

$$\text{ĐS: } m \geq 2\sqrt{2} - 2.$$

BT 11. Tìm m để $y = -x^3 + x^2 - (2-m)x + 1$ tăng trên đoạn có độ dài $= 2$?

ĐS: không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

BT 12. Tìm m để $(C_m): y = x^3 + 3mx^2 + 3(m+1)x + 2$ nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 ?

Đề thi thử Đại học 2014 lần II – TT. BDVH Hoa Sen

$$\text{ĐS: } m < \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \vee m > \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

§ 2. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO

☆☆☆

I – Tương giao giữa đồ thị hàm số nhất biến và đường thẳng

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = \alpha x + \beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn điều kiện K ?

Phương pháp giải

— **Bước 1.** (Bước này giống nhau ở các bài toán tương giao của hàm nhất biến)

+ Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và $(C): \frac{ax + b}{cx + d} = \alpha x + \beta$

$$\Leftrightarrow g(x) = \alpha cx^2 + (\beta c + \alpha d - a)x + \beta d - b = 0, \forall x \neq -\frac{d}{c}.$$

+ Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0; \Delta > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}.$

Giải hệ này, ta sẽ tìm được $m \in D_1$ (i)

+ Gọi $A(x_1; \alpha x_1 + \beta)$, $B(x_2; \alpha x_2 + \beta)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x) = 0$. Theo Viét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta c + \alpha d - a}{c\alpha}; P = x_1 x_2 = \frac{\beta d - b}{\alpha c} \quad (\text{ii})$$

— **Bước 2.**

- + Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của x_1, x_2 (iii)
- + Thế (ii) vào (iii) thu được phương trình hoặc BPT với biến số là m. Giải tìm được $m \in D_2$ (*)
- + Từ (i), (*) $\Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Thí dụ 13. Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{2x-2}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$?

Đề thi thử Đại học lần I khối B năm 2014 – THPT Ngô Gia Tự

ĐS: $m = 10 \vee m = -2$.

Thí dụ 14. Chứng minh rằng đường thẳng $d: x - y + m = 0$ luôn cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x-1}{1-2x}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m ? Tìm m sao cho $AB = \left| \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \right|$ với O là gốc tọa độ ?

Đề thi thử Đại học lần I khối B năm 2014 – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

ĐS: $m = -1$.

Thí dụ 15. Tìm m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại A và B sao cho trọng tâm của ΔOAB thuộc $d': x - 2y - 2 = 0$?

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Ba Đình – Thanh Hóa

ĐS: $m = -\frac{11}{5}$.

Thí dụ 16. Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = 2x - 2m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-m}{mx+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và cắt trục Ox, Oy theo thứ tự tại M, N sao cho $S_{\Delta OAB} = 3S_{\Delta OMN}$?

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Chuyên Lý Tự Trọng – Cần Thơ

ĐS: $m = \pm \frac{1}{2}$.

Thí dụ 17. Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$ thì đường thẳng $d: x + y - m = 0$ luôn cắt $(C): y = \frac{2x-1}{x+3}$ tại hai điểm phân biệt A, B và ΔAIB cân tại I (I là giao điểm hai đường tiệm cận) ? Tìm m để $AB^2 = 3.IA^2$?

Đề thi thử Đại học năm 2012 – TT.BDVH Thăng Long Tp. HCM

ĐS: $m = -1 \pm \sqrt{14}$.

Thí dụ 18. Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và ΔAIB đều (với I là giao điểm hai tiệm cận) ?

Học sinh giỏi tỉnh Thái Nguyên năm 2014

ĐS: $m = 3 \pm \sqrt{6}$.

Thí dụ 19. Lập phương trình đường thẳng d, biết rằng đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ cắt d tại hai điểm phân biệt B, C sao cho ΔABC đều với $A(-2; 5)$?

Học sinh giỏi tỉnh Tiền Giang năm 2013

ĐS: $d_1: y = x + 1$ hoặc $d_2: y = x - 5$ là hai đường thẳng cần tìm.

Thí dụ 20. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+1}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $d_1: y = x$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để đường $d_2: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt C, D sao cho bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình bình hành ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 khối B – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

ĐS: $m = 2$.

Thí dụ 21. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Lập hai phương trình đường thẳng d_1, d_2 đi qua giao điểm I của hai tiệm cận và cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là các đỉnh của một hình chữ nhật, biết đường chéo hình chữ nhật có độ dài bằng $\sqrt{30}$?

Đề thi thử Đại học lần III năm 2013 – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

ĐS: $\begin{cases} d_1 : 2x - y - 1 = 0 \\ d_2 : x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} d_1 : x - 2y + 1 = 0 \\ d_2 : 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ là các đường cần tìm.

Thí dụ 22. Cho đường thẳng $d : y = -x + m$ và hai điểm: $M(3;4), N(4;5)$. Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{2x-1}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho bốn điểm A, B, M, N lập thành tứ giác lồi $AMBN$ có diện tích bằng 2 ?

Đề thi thử Đại học khối A năm 2014 – THPT Đức Thọ – Hà Tĩnh

ĐS: $m = 8$.

Thí dụ 23. Tìm m để đường thẳng $d : y = mx + 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau ?

Đại học khối D năm 2011

ĐS: $m = -3$.

Thí dụ 24. Tìm m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị $(C) : y = \frac{x}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° với O là gốc tọa độ ?

ĐS: $m = -2 \vee m = 6$.

Thí dụ 25. Tìm m để đường thẳng $d : y = m(x-3)$ cắt đồ thị $(C) : y = \frac{x-2}{x-1}$, trong đó có ít nhất một giao điểm có hoành độ lớn hơn 1 ?

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Nguyễn Văn Trỗi – Hà Tĩnh

ĐS: $\forall m \in \mathbb{R}$.

Thí dụ 26. Tìm m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt $(C) : y = \frac{x-2}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học khối D năm 2014 – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

ĐS: $m = 2$.

Thí dụ 27. Tìm tham số m để đường thẳng $d : y = mx - m - 1$ cắt đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{x}{1-x}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho biểu thức $T = AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1;1)$?

Đề thi thử Đại học năm 2013 khối A – THPT Chuyên Lý Tự Trọng – Cần Thơ

ĐS: $m = -1$.

Thí dụ 28. Chứng minh rằng với mọi m thì đường thẳng $d : y = x + m$ luôn cắt đồ thị $(C) : y = \frac{1-x}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B . Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B . Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất ?

ĐS: $m = -1$.

❖ **Bài tập rèn luyện về sự tương giao giữa hàm số nhất biến và đường thẳng**

BT 13. Tìm m để $d: y = -2x + m$ cắt $(C): y = \frac{x-2}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có độ dài bằng $\sqrt{30}$?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I khối D – THPT Chu Văn An – Hà Nội

ĐS: $m = \frac{13}{2}$.

BT 14. Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $d_1: y = x$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B .

Tìm m để đường $d_2: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt C, D sao cho bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình bình hành ?

ĐS: $m = 10$.

BT 15. Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$\triangle OAB$ vuông tại O với O là gốc tọa độ ?

Đề thi thử Đại học lần I năm 2014 – THPT Chuyên Quốc Học – Huế

ĐS: $m = \frac{2}{3}$.

BT 16. Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$OA^2 + OB^2 = 2$ với O là gốc tọa độ ?

Đề thi thử Đại học lần I năm 2013 – THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An

ĐS: $m = -1$.

BT 17. Cho điểm $A(0;5)$ và đường thẳng Δ đi qua điểm $I(1;2)$ có hệ số góc k . Tìm các giá trị của k để đường thẳng Δ cắt $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm M, N sao cho $\triangle AMN$ vuông tại A ?

Đề thi thử Đại học lần III năm 2013 – THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội

ĐS: $k = 3 \vee k = \frac{1}{3}$.

BT 18. Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho

$\triangle PMN$ đều với $P(2;5)$?

ĐS: $m = -5 \vee m = 1$.

BT 19. Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt $(C): y = \frac{2x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$\triangle OAB$ có trọng tâm là điểm $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$?

Đề thi thử Đại học lần II năm 2013 – Chuyên Quốc Học – Huế

ĐS: $m = 4$.

BT 20. Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho

$S_{\triangle OAB} = \sqrt{3}$ với O là gốc tọa độ ?

Đại học khối B năm 2010

ĐS: $m = \pm 2$.

BT 21. Tìm m để $d: y = 2x + m$ cắt $(C): y = \frac{2x-4}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $4S_{\triangle IAB} = 15$ với I là giao điểm hai đường tiệm cận ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 lần I khối A – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

ĐS: $m = \pm 5$.

BT 22. Chứng minh rằng $\forall m$ thì đồ thị $(C): y = \frac{3x - 2m}{mx + 1}$ luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C và D sao cho $S_{\Delta OAB} = 2.S_{\Delta OCD}$?

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Thuận Thành số 3 – Bắc Ninh

ĐS: $m = \pm \frac{2}{3}$.

BT 23. Tìm m để đường thẳng $d: y = m - x$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x + 3}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt A, B nằm hai phía của trục tung sao cho góc \widehat{AOB} nhọn (với O là gốc tọa độ) ?

Đề thi thử Đại học khối A năm 2013 – THPT Số 1 Tuy Phước

ĐS: $-2 < m - \frac{3}{2}$.

BT 24. Tìm m để đường thẳng $d: 2x - y + m = 0$ cắt đồ thị $(C): y = \frac{2x - 3}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt có tung độ dương ?

Đề thi thử Đại học năm 2013 – THPT Phan Bội Châu – Nghệ An

ĐS: $m > 4 + \sqrt{40}$.

BT 25. Cho hàm số $y = \frac{x}{x - 1}$, (C) . Tìm tất cả các giá trị tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m - 1$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB nội tiếp trong đường tròn có bán kính $2\sqrt{2}$.
ĐS: $m = -1 \vee m = 7$.

BT 26. Gọi d là đường thẳng qua $A(-2; 0)$ và có hệ số góc k . Tìm k để d cắt đồ thị $(C): y = \frac{x + 3}{x + 2}$ tại hai điểm phân biệt M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho $AM = 2AN$?

Đề thi thử Đại học 2014 khối A, B lần III – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

ĐS: $M(-1; 2), N\left(-\frac{5}{2}; -1\right) \Rightarrow d \equiv AM: y = 2x + 4 \Rightarrow k = 2$.

II – Tương giao giữa đồ thị hàm số bậc ba và đường thẳng

Bài toán tổng quát

Tìm m để đường thẳng $d: y = \alpha x + \beta$ cắt $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại ba điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

Phương pháp giải

— Bước 1.

+ Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha x + \beta \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + \underbrace{(c - \alpha)x + d - \beta}_{h(x)} = 0 \quad (*)$$

Giả sử nhằm được trước $(*)$ có một nghiệm $x = x_0$. Khi đó chia Hoocner để phân tích:

$$(*) \Leftrightarrow (x - x_0)(ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

+ Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\neq x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1 \quad (i)$$

- + Gọi $A(x_0; \alpha x_0 + \beta)$, $B(x_1; \alpha x_1 + \beta)$, $C(x_2; \alpha x_2 + \beta)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$. Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b'}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c'}{a}$.

Bước 2.

- + Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của x_1, x_2 (ii)
- + Thế biểu thức tổng – tích vào (ii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m \in D_2$ (iii)
- + Từ (i), (iii) $\Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận những giá trị m cần tìm.

Lưu ý

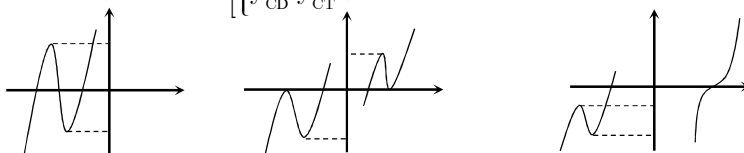
Có thể dùng phương pháp cực trị nếu không đoán được trước nghiệm $x = x_0$.

Cụ thể ta có các trường hợp sau: (với n là số giao điểm phân biệt)

— $d \cap (C) = n = 3 \Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} y = h(x): \text{có 2 cực trị} \\ y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases}$

— $d \cap (C) = n = 2 \Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} y = h(x): \text{có 2 cực trị} \\ y_{CD} \cdot y_{CT} = 0 \end{cases}$

— $d \cap (C) = n = 1 \Leftrightarrow (*)$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} y = h(x): \text{đồng biến trên } \mathbb{R} \\ y = h(x): \text{có 2 cực trị} \\ y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases}$



Còn nhiều công thức nữa, chẳng hạn ba nghiệm dương, âm,... Nhưng bạn hãy tập suy luận bằng cách vẽ nháp dạng đồ thị hàm bậc ba và biện luận số nghiệm phương trình hoành độ giao điểm của nó với trục Ox.

Thí dụ 29. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc k. Tìm giá trị của k để đường thẳng d cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$?

Đề thi thử Đại học lần I khối D năm 2014 – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

ĐS: $k = 1$.

Thí dụ 30. Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 3$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt, trong đó có đúng một điểm có hoành độ âm ?

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Số 1 Tuy Phước

ĐS: $m \in (-\infty; -1] \setminus \{-9\}$.

Thí dụ 31. Tìm tham số m để $d: y = 2mx - m - 1$ cắt đồ thị hàm số $(C_m): y = -x^3 + (2m + 1)x^2 - m - 1$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 khối D – THPT Chuyên – Vĩnh Phúc

ĐS: $m = -\frac{1}{2} \vee m = \frac{1}{4} \vee m = 1$ là các giá trị cần tìm.

Trong các thí dụ trên, tôi đã tìm ra được cả ba nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm bằng nguyên tắc nhẩm nghiệm. Còn nếu không tìm ra được nghiệm hoặc không đủ ba nghiệm, sẽ làm như thế nào ? Ta cùng xét hai bài tập nhỏ sau:

— **Bài toán không tìm được nghiệm nào của phương trình hoành độ giao điểm:**

Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng ?

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \quad (*)$$

Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) thì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $(*)$. Khi đó, ta sẽ phân tích được: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$ và đồng nhất hệ số của x^2 , ta được: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, (i). Do x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng theo thứ tự đó nên $x_1 + x_3 = 2x_2$ (ii). Thế (ii) vào (i), ta được: $x_2 = 1$.

Thế $x_2 = 1$ vào $(*)$ được $m = 11$. Do đây chỉ là điều kiện cần, ta xét thêm điều kiện đủ, nghĩa là khi $m = 11$ thì $(*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \vee x_2 = 1 \vee x_3 = 1 + 2\sqrt{3} \text{ luôn có } x_1 + x_3 = 2x_2 \text{ nên } m = 11 \text{ là giá trị cần tìm của bài toán.}$$

Cần nhớ: nếu đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có các nghiệm x_1, x_2, x_3 khi $f(x) = 0$ thì ta luôn phân tích được thành tích số dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

— **Bài toán không tìm đủ ba nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:**

Tìm m để $(C_m): y = x^3 - (2m + 1)x^2 - 9x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng ?

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x[x^2 - (2m + 1)x - 9] = 0 \quad (i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - (2m + 1)x - 9 = 0 \end{cases} \quad (ii)$$

Nhận thấy phương trình (ii) có $P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = -9 < 0$ nên luôn có hai nghiệm trái dấu nhau \Rightarrow (i) luôn có ba nghiệm phân biệt $\forall m$ là: $x_1; 0; x_2$. Để ba nghiệm này theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thì

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Thí dụ 32. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân ?

$$\text{ĐS: } m = -\frac{9}{2} \vee m = -\frac{4}{3} \vee m = \pm\sqrt{6}.$$

Thí dụ 33. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1; 2)$ với hệ số góc $k > -3$ đều cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

Đại học khối D năm 2008

Thí dụ 34. Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x + 1$ cắt $(C_m): y = 2x^3 - 3mx^2 + (m - 1)x + 1$ tại ba điểm A, B, C phân biệt, sao cho điểm $C(0; 1)$ nằm giữa A và B đồng thời AB có độ dài bằng $\sqrt{30}$?

$$\text{ĐS: } m = 0 \vee m = \frac{8}{9}.$$

Thí dụ 35. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2; 4)$ và có hệ số góc k . Tìm k để d cắt $(C): y = x^3 - 3x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $\triangle OBC$ cân tại O (với O là gốc tọa độ) ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 khối B – Chuyên Quốc Học – Huế

$$\text{ĐS: } k = 1 \vee k = \frac{1}{3}.$$

Thí dụ 36. Cho $d: y = x + 4$ và điểm $K(1; 3)$. Tìm m để $d(C_m): y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 4), B, C$ sao cho $S_{\triangle KBC} = 8\sqrt{2}$?

Đề thi thử Đại học 2010 – THPT Minh Khai – Hà Tĩnh

$$\text{ĐS: } m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}.$$

Thí dụ 37. Tìm tham số m để đường thẳng $\Delta: y = mx - \frac{1}{3}$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho A cố định và $S_{\triangle OBC} = 2S_{\triangle OAB}$?

$$\text{ĐS: } m = \frac{3}{4}.$$

Thí dụ 38. Hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm I là tâm đối xứng của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ và cắt (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B sao cho $S_{\triangle OAB} = \sqrt{2}$?

$$\text{ĐS: } d_1: y = 1 - x \text{ hoặc } d_2: y = -(1 + \sqrt{3})x + 1 + \sqrt{3} \text{ hoặc } d_3: y = (\sqrt{3} - 1)x + 1 - \sqrt{3}.$$

Thí dụ 39. Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(-1; 0)$ và cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $G(2; 2)$ là trọng tâm của $\triangle OBC$ với O là gốc tọa độ ?

$$\text{ĐS: } d: y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Thí dụ 40. Cho đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - (m + 1)x^2 + x + 2m + 1$. Tìm m để $d: y = x + m + 1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc các tiếp tuyến với (C_m) tại A, B, C bằng 12 ?

Học sinh giỏi tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013

$$\text{ĐS: } m = 2.$$

Thí dụ 41. Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = m(2 - x) + 2$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x^2 - 2$ tại ba điểm phân biệt $A(2; 2), B, C$ sao cho tích các hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học 2014 – Đề số 2 – Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ

$$\text{ĐS: } m = -1.$$

Thí dụ 42. Chứng minh rằng khi m thay đổi thì $d: y = m(x + 1) + 2$ luôn cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x$ tại một điểm A cố định. Xác định giá trị của m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B vuông góc với nhau ?

$$\text{ĐS: } m = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}.$$

Thí dụ 43. Tìm m để $d: y = m(x - 1) + 2$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x$ tại ba điểm phân biệt ?

Học sinh giỏi tỉnh An Giang năm 2014

$$\text{ĐS: } m > 0.$$

★ **Bài tập rèn luyện về sự tương giao giữa hàm số bậc ba và đường thẳng**

BT 27. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để đường thẳng $d: y = 1 - x$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt ?

Đại học khối D năm 2013

$$\text{ĐS: } m < 0 \vee m > \frac{8}{9}.$$

BT 28. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$?

Đại học khối A năm 2010

$$\text{ĐS: } m \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \setminus \{0\}.$$

BT 29. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2; -2)$ có hệ số góc bằng k . Tìm k để d cắt đồ thị hàm số $(C): y = -x^3 + 3x$ tại ba điểm phân biệt đều có hoành độ lớn hơn -2 ?

Đề thi thử Đại học năm 2013 lần I – Dương Đình Nghệ – Thanh Hóa

$$\text{ĐS: } -1 < k < 0.$$

BT 30. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 + mx^2 - x - m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng ?

$$\text{ĐS: } m = \pm 3 \vee m = 0.$$

BT 31. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - (3m+1)x^2 + (5m+4)x - 8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân ?

$$\text{ĐS: } m = 2.$$

BT 32. Tìm m để $\Delta: y = mx - 2m + 5$ cắt đồ thị $(C): y = 2x^3 - 6x + 1$ tại ba điểm phân biệt và khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến Δ bằng 2 lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến Δ ?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I – THPT Chu Văn An – Hà Nội

BT 33. Tìm m để $d: y = 2x - 7$ cắt $(C_m): y = x^3 - (m+2)x^2 + 4m - 3$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc tiếp tuyến với (C_m) tại ba điểm A, B, C bằng 28 ?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I – THPT Hồng Quang – Hải Dương

$$\text{ĐS: } m = 2.$$

BT 34. Tìm m để $d: y = 2mx - 2m + 6$ cắt $(C): y = -2x^3 + 6x + 2$ tại A, B, C sao cho tổng hệ số góc các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng -6 ?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I – THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu

$$\text{ĐS: } m = 1.$$

BT 35. Tìm m để $d: y = mx - m - 1$ cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt A, B, C ($x_A < x_B < x_C$) sao cho ΔAOC cân tại O ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần IV – THPT Chuyên – ĐH KHTN

$$\text{ĐS: } m = 1.$$

BT 36. Tìm m để $d: y = 1 - x$ cắt đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1), B, C$ sao cho $S_{\Delta KBC} = \sqrt{5}$ với $K(1; 2)$?

$$\text{ĐS: } m = \pm 1.$$

BT 37. Cho hàm số đồ thị $(C_m): y = (2-m)x^3 - 6mx^2 + 9(2-m)x - 2$. Tìm m để đường thẳng $d: y = -2$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với $A(0; -2)$ sao cho $S_{\Delta OBC} = \sqrt{13}$?

$$\text{ĐS: } m = \frac{14}{13} \vee m = 14.$$

BT 38. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 2mx^2 + 2mx - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(1;0)$, B và C sao cho $k_1 + k_2 = BC\sqrt{5}$. Trong đó k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với (C_m) tại B và C ?
 ĐS: $m = -1 \vee m = 2$.

BT 39. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;0)$, biết rằng d cắt đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau ?

Đề thi thử Đại học năm 2013 khối A – THPT Bỉm Sơn – Thanh Hóa

$$\text{ĐS: } k = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{2} \vee k = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

BT 40. Tìm m để $(C_m): y = x^3 + mx^2 + 1$ cắt đường thẳng $d: y = 1 - x$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại B và C vuông góc với nhau ?

$$\text{ĐS: } m = \pm\sqrt{5}.$$

BT 41. Tìm m để $(C_m): y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2$ cắt trục hoành Ox tại duy nhất một điểm ?

Học sinh giỏi cấp trường năm 2014 – THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An

$$\text{ĐS: } m \neq 1.$$

III – Tương giao giữa đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương và đường thẳng

Bài toán tổng quát

Tìm m để đường thẳng $d: y = \alpha$ cắt $y = f(x; m) = ax^4 + bx^2 + c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

Phương pháp giải

— Bước 1.

- + Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(C): ax^4 + bx^2 + c - \alpha = 0$ (i)
- + Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (i) $\Leftrightarrow at^2 + bt + c - \alpha = 0$ (ii)
- + Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m \in D_1$ (*), cụ thể:

- Để $(C) \cap d = n = 4$ điểm phân biệt \Leftrightarrow (i) có bốn nghiệm phân biệt \Leftrightarrow (ii) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa:

$$0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \Rightarrow m \in D_1. \\ S > 0 \end{cases}$$

- Để $(C) \cap d = n = 3$ điểm phân biệt \Leftrightarrow (i) có ba nghiệm phân biệt \Leftrightarrow (ii) có nghiệm t_1, t_2 thỏa:

$$0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

- Để $(C) \cap d = n = 2$ điểm phân biệt \Leftrightarrow (i) có hai nghiệm phân biệt \Leftrightarrow (ii) có hai nghiệm trái dấu hoặc

$$\text{có nghiệm kép dương} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \Delta = 0. \\ S > 0 \end{cases}$$

- Để $(C) \cap d = n = 1$ điểm \Leftrightarrow (i) có đúng một nghiệm \Leftrightarrow (ii) có nghiệm kép $= 0$ hoặc $t_1 = 0$ và

$$t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ b = c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases}.$$

— **Bước 2.**

- + Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2 (**)
- + Thế biểu thức tổng – tích vào $(**)$ sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m
 $\Rightarrow m \in D_2$ (***)
- + Từ $(**), (***) \Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận những giá trị m cần tìm.

Thí dụ 44. Tìm m để $(C_m): y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng (cách đều) ?

$$\text{ĐS: } m = 3 \vee m = -\frac{13}{9}.$$

Thí dụ 45. Tìm m để $d: y = -1$ cắt $(C_m): y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 ?

Đại học khối D năm 2009

$$\text{ĐS: } -\frac{1}{3} < m < 1 \text{ và } m \neq 0.$$

Thí dụ 46. Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị của hàm số $(C): y = -x^4 + 5x^2 - 4$ tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$?

$$\text{ĐS: } m = -\frac{7}{4}.$$

Thí dụ 47. Tìm tham số m để đồ thị $(C_m): y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm A, B, C, D phân biệt sao cho $S_{\Delta KAC} = 4$ với $K(3; -2)$ (A, B, C, D được xếp theo thứ tự hoành độ tăng dần) ?

Đề thi thử Đại học năm 2013 lần III – THPT Quỳnh Lưu I – Nghệ An

$$\text{ĐS: } m = 4.$$

Thí dụ 48. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 + 2(m+1)x^2 + 2m + 4$ cắt $d: y = 3$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 6$?

$$\text{ĐS: } m = -5.$$

Thí dụ 49. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 4x^2 + m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C_m) và trục hoành Ox có diện tích phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau ?

$$\text{ĐS: } m = \frac{20}{9}.$$

Thí dụ 50. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 1$ cắt tia Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = 2x_1$?

$$\text{ĐS: } m = \frac{5}{4}.$$

❖ **Bài tập rèn luyện về sự tương giao giữa hàm số bậc bốn và đường thẳng**

BT 42. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn $\sqrt{3}$?

$$\text{ĐS: } m = -\frac{1}{2} \vee m \geq 1.$$

BT 43. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = (x^2 - 1)^2 - (m + 1)^2(1 - m)^2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ tương ứng lập thành một cấp số cộng ?

$$\text{ĐS: } m = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \vee m = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

BT 44. Xác định m để đồ thị $(C_m): y = x^4 + 2mx^2 + m + 3$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ thỏa: $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < 2 < x_4$?

$$\text{ĐS: } -3 < m < -\frac{19}{9}.$$

BT 45. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$?

$$\text{ĐS: } m = 0.$$

BT 46. Giả sử đồ thị $(C): y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2 + m + 2$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 . Chứng minh rằng biểu thức: $T = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \leq 0$?

BT 47. Chứng minh rằng đồ thị $(C_m): y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m$ luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt $\forall m < 0$?

BT 48. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - (m^2 + 2)x^2 + m^2 + 1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành mà có phần phía trên trục hoành có diện tích bằng $\frac{96}{15}$?

$$\text{ĐS: } m = \pm 2.$$

BT 49. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt đồ thị $(C): y = \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔABD là tam giác đều, trong đó D là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (C) ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần III – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

$$\text{ĐS: } \Delta: y = \frac{7}{3}.$$

§ 3. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài toán tổng quát

Cho đồ thị hàm số $(C): \begin{cases} y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ y = f(x; m) = ax^4 + bx^2 + c \end{cases}$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có n cực trị thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

Phương pháp giải

— **Bước 1.** Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.

Giải và tìm được giá trị $m \in D_1$ (i)

— **Bước 2.** Biến đổi điều kiện K và giải, sẽ tìm được $m \in D_2$ (ii)

Từ (i), (ii) $\Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ là những giá trị m cần tìm.

I – Cực trị của hàm số bậc ba

Một số lưu ý đối với cực trị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

— Hàm số có cực đại, cực tiểu (hai cực trị) $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

— Hoành độ x_1, x_2 của các điểm cực trị là các nghiệm của phương trình $y' = 0$.

— Để viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị, ta thường sử dụng phương pháp tách đạo hàm:

+ Phân tích (bằng chia đa thức $y : y'$): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$

+ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y = h(x)$ (phần dư bậc nhất trong phép chia đa thức $y : y'$).

Thí dụ 51. Tìm m để hàm số $(C): y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

Đại học khối D năm 2012

$$\text{ĐS: } m = \frac{2}{3}.$$

Thí dụ 52. Tìm m để hàm số $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - (2m - 1)x^2 + (1 - 4m)x + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $3x_1 + x_2 = 4$?

$$\text{ĐS: } m = \frac{1}{2} \vee m = 2.$$

Thí dụ 53. Tìm m để $(C_m): y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x + 1$ có cực đại và cực tiểu thỏa mãn: $x_{\text{CD}}^2 = x_{\text{CT}}$?

Đề thi thử Đại học 2010 lần I – THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội

$$\text{ĐS: } m = -2.$$

Thí dụ 54. Tìm m để $(C_m): y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ có cực đại, cực tiểu và hoành độ cực tiểu bé hơn 1 ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I – THPT Cẩm Bình – Hà Tĩnh

$$\text{ĐS: } m < -1 \text{ hoặc } \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5} \text{ là những giá trị cần tìm.}$$

Thí dụ 55. Tìm m để hàm số $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ có cực trị trong khoảng $(1; +\infty)$?

$$\text{ĐS: } m > 1.$$

Thí dụ 56. Tìm m để $(C_m): y = 2x^3 + 3(m - 3)x^2 + 11 - 3m$ đạt cực trị tại hai điểm A và B sao cho ba điểm A, B, C(0; -1) thẳng hàng ?

$$\text{ĐS: } m = 4.$$

Thí dụ 57. Chứng minh rằng $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ luôn có cực đại, cực tiểu $\forall m$.
Tìm m để các điểm cực trị A, B của hàm số (C_m) cùng với điểm I(1; 1), tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{5}$?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I khối A – THPT Nghi Sơn – Thanh Hóa

$$\text{ĐS: } m = -1 \vee m = \frac{3}{5}.$$

Thí dụ 58. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3m(m - 2)x + 1$ có hai điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + 1$?

Đề thi thử Đại học năm 2012 lần VI – THPT Chuyên – ĐHSPT Hà Nội

$$\text{ĐS: } m = 1 \vee m = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}.$$

Thí dụ 59. Tìm m để hàm số $(C_m): y = -x^3 + 3x^2 + 3m(m + 2)x + 1$ có hai cực trị A, B đối xứng nhau qua điểm I(1; 3) ?

Đề thi thử Đại học 2014 – THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp

$$\text{ĐS: } m = -2 \vee m = 0.$$

Thí dụ 60. Tìm m để $(C_m): y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với $d: y = x + 2$?

Đại học khối B năm 2013

ĐS: $m = 0 \vee m = 2$.

Thí dụ 61. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có các điểm cực đại, cực tiểu A, B và đường thẳng đi qua điểm cực trị tạo với đường thẳng $d: x + 4y - 2014 = 0$ một góc $\alpha = 45^\circ$?

ĐS: $m = -\frac{1}{2}$.

Thí dụ 62. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ để hàm số có cực trị, đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O ?

ĐS: $m = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Thí dụ 63. Tìm m để $(C_m): y = x^3 + 6mx^2 + 9x + 2m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị bằng $\frac{4\sqrt{5}}{5}$?

ĐS: $m = \pm 1$.

Thí dụ 64. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $\triangle OAB$ vuông tại O ?

ĐS: $m = -1 \vee m = 2$ là các giá trị cần tìm.

Thí dụ 65. Tìm m để hàm số $(C_m): y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân ?

ĐS: $m = -\frac{3}{2}$.

Thí dụ 66. Tìm m để hàm số $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng $\frac{\sqrt{10}}{2}$?

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp

ĐS: $m = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Thí dụ 67. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $S_{\triangle OAB} = 48$ với O là gốc tọa độ ?

Đại học khối B năm 2012

ĐS: $m = -2 \vee m = 2$ là các giá trị cần tìm.

Thí dụ 68. Cho hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ và đường thẳng Δ đi qua điểm cực đại của (C) và có hệ số góc bằng $m^2 + \frac{1}{4}$. Tìm m để khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến đường thẳng Δ lớn nhất ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần IV – THPT Chuyên – ĐHSPT Hà Nội

ĐS: $m = \pm \frac{1}{2}$.

Thí dụ 69. Tìm m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $S_{\triangle IAB}$ đạt giá trị lớn nhất ?

ĐS: $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

★ **Bài tập rèn luyện về cực trị của hàm số bậc ba**

BT 50. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - 3mx + 4$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho:

$$\frac{x_1^2 + 2mx_2 + 9m}{m^2} + \frac{m^2}{x_2^2 + 2mx_1 + 9m} = 2 \quad ?$$

ĐS: $m = -4$.

BT 51. Chứng minh rằng $\forall m$ thì hàm số $(C_m): y = x^3 + (m+1)x^2 - x$ có cực đại, cực tiểu và

$$|y_{CD} - y_{CT}| = \frac{1}{2} |x_{CD} - x_{CT}|^3 \quad ?$$

Đề thi thử Đại học 2013 lần I – THPT Chuyên – ĐHSPT Hà Nội

BT 52. Tìm m để $(C_m): y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 1$ có cực trị. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$ với x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số ?

ĐS: $m = -4$.

BT 53. Tìm m để hàm số $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ có cực đại và cực tiểu và các hoành độ

cực trị lớn hơn 1 ?

ĐS: $m > 2$.

BT 54. Tìm m để $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m+1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho

$$x_1 < 2 < x_2 \quad ?$$

$$\text{ĐS: } m < -\frac{1}{7}.$$

BT 55. Chứng minh rằng $\forall m$ thì $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 5m$ có đồ thị (C_m) luôn có hai điểm cực trị phân biệt A, B, đồng thời trung điểm I của AB luôn chạy trên một đường thẳng cố định ?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I – THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội

ĐS: I $(m; 2m)$ chạy trên đường $y = 2x$ cố định.

BT 56. Chứng minh rằng hàm số $(C_m): y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ luôn có cực đại và cực tiểu. Tìm m để hàm số có các điểm cực trị cách đều trục tung ?

ĐS: $m = 0$.

BT 57. Tìm m để $(C_m): y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu cách đều gốc tọa độ O ?

Đại học khối B năm 2007

$$\text{ĐS: } m = \pm \frac{1}{2}.$$

BT 58. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A, B và đường thẳng AB đi qua điểm I $(1; 0)$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối D lần I – THPT Ngô Gia Tự – Bắc Ninh

ĐS: $m = \pm 1$.

BT 59. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 + 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $\widehat{AOB} = 120^\circ$?

$$\text{ĐS: } m = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

BT 60. Cho $y = x^3 - 2(2m+1)x^2 + (5m^2 + 10m - 3)x - 10m^2 - 4m + 6$ có đồ thị hàm số (C_m) . Tìm m để (C_m) có hai cực trị và các giá trị cực trị của hàm số trái dấu nhau ?

$$\text{ĐS: } m \in (-3; 1) \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}.$$

BT 61. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3x^2 - 3m(m+2)x - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành ?

$$\text{ĐS: } m \in \left(-\infty; -\frac{5}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty \right).$$

BT 62. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - m)x + 4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $x = 1$?

$$\text{ĐS: } \frac{7 - \sqrt{37}}{2} < m < \frac{7 + \sqrt{37}}{2}.$$

BT 63. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3x^2 + m^2 - m + 1$ đạt cực trị tại hai điểm A, B sao cho $S_{\triangle ABC} = 7$ với $C(-2; 4)$?

$$\text{ĐS: } m = 3 \vee m = -2.$$

BT 64. Tìm m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tiếp xúc với đường tròn $(C_m): (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$?

$$\text{ĐS: } m = 2 \vee m = -\frac{4}{3}.$$

BT 65. Tìm m để $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm trị là nhỏ nhất ?

$$\text{ĐS: } m = 0.$$

BT 66. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 1$ có cực đại, cực tiểu và đồng thời các điểm cực đại, cực tiểu A, B của đồ thị hàm số cùng với điểm $M(-2; 2)$ tạo thành góc $\widehat{AMB} = 90^\circ$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Lê Hữu Trát I

$$\text{ĐS: } m = 0 \vee m = -1.$$

BT 67. Tìm m để $(C_m): y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có cực trị sao cho khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là lớn nhất ?

$$\text{ĐS: } m = 1.$$

II – Cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương

Một số lưu ý đối với cực trị của hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

— Hàm số luôn nhận $x = 0$ làm một điểm cực trị.

— Khi hàm số có ba điểm cực trị $A(0; c), B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$ thì tam giác ABC cân tại A . Khi đó, nếu điều kiện K là:

$$+ \triangle ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$+ \triangle ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB = BC.$$

$$+ \triangle ABC \text{ có diện tích bằng } S \Leftrightarrow S = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \text{ với } AH: \text{đường cao.}$$

Thí dụ 70. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại, cực tiểu mà các cực đại, cực tiểu tạo thành tam giác có diện tích bằng 1 ?

Đề thi thử Đại học 2014 khối A lần II – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

$$\text{ĐS: } m = 1$$

Thí dụ 71. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông ?

Đại học khối A năm 2012

ĐS: $m = 0$.

Thí dụ 72. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc bằng 30° ?

Học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh năm 2014

ĐS: $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \vee m = \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}}$.

Thí dụ 73. Tìm m để $(C_m): y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên ?

Đề thi thử Đại học 2014 – THPT Nguyễn Khuyến – TP. HCM

ĐS: $m = -\frac{5}{3}$.

Thí dụ 74. Tìm m để $(C_m): y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác đều ?

ĐS: $m = 2 - \sqrt[3]{3}$.

Thí dụ 75. Tìm m để hàm số $(C_m): y = 2x^4 - m^2x^2 + m^2 - 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm O, A, B, C là bốn đỉnh của hình thoi ?

Đề thi thử Đại học năm 2014 khối A lần I – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

ĐS: $m = \pm\sqrt{2}$.

Thí dụ 76. Tìm m để hàm số $(C_m): y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho các điểm A, B, C và điểm O nằm trên một đường tròn, trong đó O là gốc tọa độ ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I khối A, B – THPT Quốc Oai

ĐS: $m = \pm 1$.

Thí dụ 77. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có bán kính bằng 1 ?

ĐS: $m = 1 \vee m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Thí dụ 78. Tìm m để $(C_m): y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có các điểm cực trị nằm trên các trục tọa độ ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối D lần I – Sở GD & ĐT Vĩnh Phúc

ĐS: $m \in (-\infty; 0] \cup \{2\}$ là những giá trị cần tìm

Thí dụ 79. Chứng minh rằng $\forall m$ thì hàm số $(C_m): y = x^4 - 2(m^2+1)x^2 + 1$ có ba điểm cực trị. Tìm m để khoảng cách từ điểm cực đại đến đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (C_m) nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học 2012 lần II – THPT Chuyên ĐHS Hà Nội

ĐS: $m = 0$.

Thí dụ 80. Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ và đường thẳng Δ đi qua điểm cực đại của của (C) và có hệ số góc k . Tìm k để tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của (C) đến Δ nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần II – THPT Chuyên – ĐHSPT Hà Nội

$$\text{ĐS: } k = \pm \frac{1}{4}.$$

Thí dụ 81. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất ?

$$\text{ĐS: } m = 0.$$

★ **Bài tập rèn luyện về cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương**

BT 68. Xác định tham số m để hàm số $(C_m): y = x^4 - 4(m - 1)x^2 + 2m - 1$ có ba cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

$$\text{ĐS: } m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

BT 69. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$?

Đề thi thử Đại học 2014 khối A lần I – THPT Hùng Vương – Bình Phước

$$\text{ĐS: } m = 2.$$

BT 70. Tìm m để hàm số $(C_m): y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$ với O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là điểm hai cực trị còn lại ?

Đại học khối B năm 2011

$$\text{ĐS: } m = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

BT 71. Tìm m để $(C_m): y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120° ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần II – THPT Lương Tài II – Bắc Ninh

$$\text{ĐS: } m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

BT 72. Tìm m để $(C_m): y = \frac{1}{4}x^4 - (3m + 1)x^2 + 2(m + 1)$ có ba điểm cực trị tạo thành tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O ?

$$\text{ĐS: } m = \frac{1}{3}.$$

BT 73. Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm cực đại của đồ thị $(C): y = (x + 1)^2(x - 1)^2$ sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị (C) đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A lần I – THPT Chuyên Amsterdam – Hà Nội

$$\text{ĐS: } d \equiv Oy: x = 0 \text{ hoặc } d: y = 1.$$

BT 74. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$?

$$\text{ĐS: } m = 1.$$

BT 75. Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân ?

ĐS: $m = 1$.

BT 76. Tìm các giá trị của m để hàm số $(C_m): y = x^4 - 8m^2x^2 + 1$ có ba cực trị A, B, C và $S_{\triangle ABC} = 64$?

ĐS: $m = \pm\sqrt[5]{2}$.

BT 77. Tìm tham số m để $(C_m): y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại ?

ĐS: $m \leq 0$.

BT 78. Tìm tham số m để $(C_m): y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có các điểm của cực trị đều nằm trên các trục tọa độ ?

ĐS: $m \leq 0 \vee m = 2$.

BT 79. Tìm tham số m để $(C_m): y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất ?

ĐS: $m = \frac{1}{2}$.

§ 4. TIẾP TUYẾN VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN

===== ☆☆☆ =====

I – Kiến thức cần nhớ

— Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ **tại** điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$\Delta: \boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$$

↓
①

↓
②

↓
③

Với $k = y'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến.

—————→ Để viết phương trình tiếp tuyến Δ , ta cần tìm ba thành phần x_0, y_0, k .

— Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ **tiếp xúc nhau** \Leftrightarrow hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có

ng nghiệm (nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")

II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp

① **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc k cho trước**

— Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_0)$.

— Do phương trình tiếp tuyến Δ có hệ số góc $k \Rightarrow y'(x_0) = k$ (i)

— Giải (i) tìm được $x_0 \longrightarrow y_0 = f(x_0) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_0) + y_0$.

✎ **Lưu ý.** Hệ số góc $k = y'(x_0)$ của tiếp tuyến Δ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta // d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan \alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến Δ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left| \frac{k - a}{1 + k.a} \right| = \tan \alpha$

② **Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua (kể từ) điểm $A(x_A; y_A)$**

— Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $y_0 = f(x_0)$ và $k = y'(x_0)$ theo x_0 .

— Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(x_0; y_0)$ là $\Delta: y = k(x - x_0) + y_0$.

— Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_o) + y_o$ (i)

— Giải phương trình (i) $\longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình Δ .

③ Viết PTTT Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo x_o .

— Đề cho $\begin{cases} \Delta OAB \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA \cdot OB = 2S \end{cases}$ vuông cân $\Leftrightarrow \Delta$ tạo với Ox một góc 45° và (i)

— Giải (i) hoặc (ii) $\longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến Δ .

④ Tìm những điểm trên đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ mà từ đó vẽ được 1, 2, 3, ..., n tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$

— Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến x_M trong M)

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M \\ f'(x) = k \end{cases}$ (i)

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)

— Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = số nghiệm x của (iii).

⑤ Tìm những điểm $M(x_M; y_M)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau

— PTTT Δ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M \\ f'(x) = k \end{cases}$ (i)

— Thế k từ (ii) vào (i), được: $f(x) = f'(x) \cdot (x - x_M) + y_M$ (iii)

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow$ (iii) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

➤ Lưu ý.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

$\begin{cases} \text{(iii): có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2. \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0. \end{cases}$

— Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o; y_o)$ và Δ là tiếp tuyến với $k = f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k = f'(x_o) = k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o) \cdot k_d = -1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o; y_o)$.

Thí dụ 82. Lập phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$, biết nó song song với đường thẳng $d: 9x - y + 6 = 0$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I – THPT Hậu Lộc II

ĐS: $\Delta: y = 9x - 26$.

Thí dụ 83. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{1}{6}x - 1$?

Đại học khối D năm 2010

ĐS: $\Delta: y = -6x + 10$.

Thí dụ 84. Gọi $M \in (C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tính $S_{\Delta OAB}$?

Cao đẳng khối A, A₁, B, D năm 2013

ĐS: $S_{\Delta OAB} = \frac{121}{6}$.

Thí dụ 85. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x+2}{2x+3}$, biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O ?

Đại học khối A năm 2009

ĐS: $\Delta: y = -x - 2$.

Thí dụ 86. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{2x}{x+2}$, biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận của (C) một ΔAIB vuông cân đỉnh I với I là giao điểm của hai đường tiệm cận ?
ĐS: $\Delta: y = x$ hoặc $\Delta: y = x + 8$.

Thí dụ 87. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{2x-3}{x-2}$, biết tiếp tuyến đó cắt đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $AB = IB\sqrt{2}$ với $I(2;2)$?

Học sinh giỏi tỉnh Bình Phước năm 2014

ĐS: $\Delta: y = -x + 2$ hoặc $\Delta: y = -x + 6$.

Thí dụ 88. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$?

Đại học khối B năm 2008

ĐS: $\Delta_1: y = 24x + 15$ hoặc $\Delta_2: y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.

Thí dụ 89. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm M. Biết điểm M cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng 6 ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Sầm Sơn – Thanh Hóa

ĐS: $\Delta_1: y = 9x + 7$ hoặc $\Delta_2: y = 9x - 25$.

Thí dụ 90. Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) .

1/ Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị hàm số (C) sao cho Δ cắt trục hoành tại A mà $OA = 6$?

2/ Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại $M \in (C)$ sao cho Δ cắt đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang tại A, B sao cho $\cos \widehat{ABI} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ với I là giao điểm của hai đường tiệm cận ?

Đề thi thử Đại học 2014 – THPT Nguyễn Khuyến – TP. HCM

$$\text{ĐS: } 1/ \begin{cases} \Delta : y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ \Delta : y = -x + 6 \end{cases} \quad 2/ \begin{cases} \Delta : y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ \Delta : y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2} \end{cases}$$

Thí dụ 91. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x$, biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng

$\Delta : x + y + 1 = 0$ một góc α , sao cho $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có hoành độ nguyên ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần V khối A – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

ĐS: $\Delta : y = 9x$ hoặc $\Delta : y = 9x - 32$.

Thí dụ 92. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$, biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(4; -2)$?

Đề thi thử Đại học 2014 – Đề số 04 – Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ

ĐS: Vậy $\Delta : y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ hoặc $\Delta : y = -x + 5$ hoặc $\Delta : y = -x + 1$.

Thí dụ 93. Xác định m để đồ thị $(C): y = \frac{2x+m}{x-1}$ có tiếp tuyến song song và cách đường thẳng $d : 3x + y - 1 = 0$ một khoảng cách bằng $\sqrt{10}$?

Đề thi thử Đại học 2014 đề số 5 – Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ

ĐS: $m = \frac{1}{12} \vee m = \frac{67}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Thí dụ 94. Viết phương trình tiếp tuyến d của $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{82} \cdot OB$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần II – THPT Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp

ĐS: $\Delta : y = -\frac{1}{9}x + \frac{25}{9}$ hoặc $\Delta : y = -\frac{1}{9}x + \frac{13}{9}$ là các tiếp tuyến cần tìm

Thí dụ 95. Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của $(C): y = \frac{x-1}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm M thỏa mãn $IM \perp \Delta$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần IV – THPT Chuyên ĐH Vinh

ĐS: $\Delta : y = -x + 1$ hoặc $\Delta : y = -x + 5$ là các tiếp tuyến cần tìm.

Thí dụ 96. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m \neq 0$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị $(C_m): y = mx^3 - (2m+1)x + m+1$ tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4 ?

Đề thi thử Đại học 2014 khối A lần I – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

ĐS: $m = 7 \pm 2\sqrt{14} \vee m = -9 \pm 6\sqrt{2}$.

Thí dụ 97. Tìm tham số m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3x^2 + (m-2)x + 3m$ vuông góc với đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I – THPT Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên

ĐS: $m = 4$.

Thí dụ 98. Tìm trên đường thẳng $d: y = 9x - 7$ những điểm mà qua đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2 - 2$?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I – THPT Chuyên Amsterdam Hà Nội

ĐS: $M(m; 9m - 7)$ với $m \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{1\}$ là các điểm cần tìm.

Thí dụ 99. Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại ba điểm phân biệt $M(2; 0)$, N , P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc nhau ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A lần I – THPT Bim Sơn – Thanh Hóa

ĐS: $d: y = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}(x - 2)$.

Thí dụ 100. Gọi k_1 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $(C_m): y = \frac{x+m}{x+1}$ với trục hoành.

Gọi k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $|k_1 + k_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học 2013 lần III – Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp

ĐS: $|k_1 + k_2|_{\min} = 1$ khi $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Thí dụ 101. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = \frac{x}{x-1}$, biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất ?

Đề thi thử Đại học 2011 khối B, D – THPT Lê Văn Huru – Thanh Hóa

ĐS: $x_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x$ và với $x_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -x + 4$.

Thí dụ 102. Lập phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{x-2}{x+1}$ mà tiếp tuyến này cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại các điểm A, B sao cho bán kính vòng tròn nội tiếp ΔIAB lớn nhất, với I là giao của hai đường tiệm cận ?

ĐS: $\Delta: y = x + 2 \pm 2\sqrt{3}$.

❖ **Bài tập rèn luyện về tiếp tuyến và bài toán liên quan đến tiếp tuyến**

BT 80. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1-x}{2x+1}$, sao cho tiếp tuyến đi qua giao điểm của đường tiệm cận và trục Ox ?

Đề thi thử Đại học 2014 khối D lần II – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

ĐS: $d: y = -\frac{1}{12}x - \frac{1}{24}$.

BT 81. Tìm m để tiếp tuyến của $(C_m): y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1; 2)$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – Tuổi Trẻ online (đề số 1)

ĐS: $m = \frac{5}{8}$.

BT 82. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$, biết rằng tiếp điểm của tiếp tuyến đó với (C) cách điểm $A(0;1)$ một khoảng $= 2$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A lần II – THPT Chuyên ĐH Vinh

ĐS: $d_1: y = 3x - 1$ hoặc $d_2: y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$.

BT 83. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{x}{1-x}$ tại M , biết rằng tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tại A và B sao cho M là trung điểm của AB ?

Đề thi thử Đại học 2014 – Đề số 01 – Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ

ĐS: $\Delta: x - y - 4 = 0$.

BT 84. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3mx + 2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ góc α , biết $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A lần I – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

ĐS: $m \geq -\frac{1}{2}$.

BT 85. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$, biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A, B – THPT Thuận Thành Số I – Bắc Ninh

ĐS: $d: y = x + 1$ hoặc $d: y = x + 5$.

BT 86. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến này cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa: $OA = 4OB$?

Đề thi thử Đại học 2010 lần II – THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội

ĐS: $d: y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ hoặc $d: y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

BT 87. Gọi d là tiếp tuyến của $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 1$ tại điểm cực đại A , đường thẳng d cắt trục Oy tại điểm B . Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng 6, với O là gốc tọa độ ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Lương Ngọc Quyến – Thái Nguyên

ĐS: $m = -1 \vee m = 3$.

BT 88. Cho $A(0;m)$ và hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tìm m để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) và hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó nằm về hai phía trục hoành ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A lần II – THPT Chuyên Hạ Long

ĐS: $m > -\frac{2}{3}$ và $m \neq 1$.

BT 89. Tìm trên $d: y = 2x + 1$ các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$?

ĐS: $M_1(0;1), M_2(-1;-1), M_3(2;5), M_4(1;3)$.

BT 90. Tìm m để $(C_m): y = -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1$ tiếp xúc với đường thẳng $d: y = 2mx - m - 1$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I khối D – THPT Lê Xoay

ĐS: $m = 0 \vee m = \frac{1}{2}$.

BT 91. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$ và M là điểm bất kỳ trên (C) , tiếp tuyến của (C) tại M cắt các tiệm cận tại A và B . Chứng minh rằng $S_{\Delta IAB}$ không đổi khi M thay đổi trên (C) ?

Đề thi thử Đại học 2011 khối A – THPT Chuyên Lê Quý Đôn

ĐS: $IA = \frac{12}{a+1}; IB = 2(a+1) \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot AB = 12$.

BT 92. Viết phương trình tiếp tuyến với $(C): y = \frac{2x}{x+2}$, biết khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất ?

Đề thi thử Đại học 2010 – THPT Bồ Hạ – Bắc Giang

ĐS: $d: y = x$ hoặc $d: y = x + 8$.

BT 93. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = \frac{x+2}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận đến tiếp tuyến là lớn nhất ?

ĐS: $\Delta: \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$.

BT 94. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tìm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A và B với chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất ?

ĐS: $M_1(1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}), M_2(1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}) \Rightarrow P_{\Delta} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.

BT 95. Chứng minh rằng khi m thay đổi thì $(C_m): y = x^4 + mx^2 - m - 1$ luôn luôn đi qua hai điểm cố định A, B . Tìm m để các tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau ?

ĐS: $m = -\frac{3}{2} \vee m = -\frac{5}{2}$.

BT 96. Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm $M \in (C): y = \frac{x+1}{2x-1}$ mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = 2m - 1$?

ĐS: $m = \frac{1}{3}$.

BT 97. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - mx + m - 1$ tại điểm M có hoành độ $x = -1$ cắt đường tròn (C) có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ theo dây cung có độ dài nhỏ nhất ?

ĐS: $m = 2$.

BT 98. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{x}{x-1}$, biết tiếp tuyến tạo với hai đường tiệm cận của (C) một

tam giác có chu vi $= 4 + 2\sqrt{2}$?

ĐS: $y = -x \vee y = -x + 4$

BT 99. Hãy viết phương trình tiếp tuyến chung của $(C): y = x^3 - 4x^2$ với parabol $(P): y = x^2 - 8x + 4$?

BT 100. Hai điểm M, N thay đổi trên $(C): y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với tiếp tuyến của (C) tại N. Viết phương trình đường thẳng MN biết MN tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{8}{3}$?

ĐS: $MN: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ hoặc $MN: y = 3x + 4$.

§ 5. BÀI TOÁN TÌM ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

☆☆☆

I – Bài toán tổng quát và phương pháp giải

— **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Tìm điểm $M \in (C)$ thỏa mãn điều kiện K cho trước

— **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M(x_o; f(x_o)) \in (C)$.

+ Từ điều kiện K cho trước, biến đổi dẫn đến phương trình (hoặc bất phương trình) theo x_o , giải tìm

$$x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow M(x_o; f(x_o)).$$

Một số kiến thức cần nhớ:

— Khoảng cách giữa hai điểm A, B là: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

— Khoảng cách $M(x_o; y_o)$ đến $\Delta: ax + by + c = 0$ là $d(M; \Delta) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

+ Nếu $\Delta: x = a \Rightarrow d(M; \Delta) = |x_o - a|$.

+ Nếu $\Delta: y = b \Rightarrow d(M; \Delta) = |y_o - b|$.

+ Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là: $|x_o| + |y_o|$.

— Diện tích $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

— A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB $\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases}$.

— A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$ (với I là trung điểm AB)

+ A, B đối xứng nhau qua trục hoành $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$.

+ A, B đối xứng nhau qua trục tung $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$.

— Khoảng cách giữa đường thẳng Δ với đường cong (C) bằng khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm $M \in \Delta$ và một điểm $N \in (C)$.

— Điểm $M(x; y)$ được gọi là có tọa độ nguyên nếu x và y đều là số nguyên.

Thí dụ 103. Tìm trên đồ thị $(C): y = \frac{1-x}{2x+1}$ tất cả các điểm có tọa độ nguyên ?

ĐS: có bốn điểm $M_1(0; 1)$, $M_2(-1; -2)$, $M_3(1; 0)$, $M_4(-2; -1)$ cần tìm.

Thí dụ 104. Lập phương trình Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ biết rằng parabol (P) đi qua các điểm $M(x_i; y_i) \in (C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ có tọa độ là các số nguyên với hoành độ $x_i > -4$?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I khối A – THPT Chuyên Lào Cai

ĐS: $(P): y = x^2 - 3x - 3$.

Thí dụ 105. Tìm trên $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$ những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận là nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học 2011 khối A, B – THPT Nguyễn Huệ

ĐS: có hai điểm $M(0;1)$ hoặc $M(-2;3)$ cần tìm.

Thí dụ 106. Tìm các điểm M trên đường thẳng $d: y = -2x + 19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = (x+2)(x-1)^2$ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng $d': x + 9y - 8 = 0$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I – THPT Trần Phú – Hà Tĩnh

ĐS: $M_1(3;13)$ hoặc $M_2\left(\frac{1}{11}; \frac{207}{11}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Thí dụ 107. Tìm $A, B \in (C): y = \frac{2x}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $\triangle OAB$ vuông tại O ?

ĐS: $A(-1;1)$, $B(3;3)$ hoặc $A(-3;3)$, $B(-1;1)$ là các điểm cần tìm.

Thí dụ 108. Tìm trên đồ thị $(C): y = \frac{2x}{x-1}$ hai điểm B, C thuộc hai nhánh, sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với $A(2;0)$?

ĐS: $B(-1;1)$, $C(3;3)$.

Thí dụ 109. Tìm điểm $M \in (C): y = x^3 - 3x + 2$ sao cho $\triangle ABM$ cân tại M với $A(0;4)$, $B\left(\frac{7}{2}; \frac{9}{4}\right)$?

Đề thi thử Đại học 2012 lần VII – THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội

ĐS: $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right)$, $M_2\left(\frac{-1+\sqrt{77}}{4}; \frac{-7+4\sqrt{77}}{4}\right)$, $M_3\left(\frac{-1-\sqrt{77}}{4}; \frac{-7-4\sqrt{77}}{4}\right)$.

Thí dụ 110. Tìm trên $(C): y = \frac{2x-4}{x+1}$ hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng MN với $M(-3;0)$, $N(-1;-1)$?

Đề thi thử Đại học 2013 – THPT Thoại Ngọc Hầu – An Giang

ĐS: $A(2;0)$, $B(0;-4)$ hoặc $A(0;-4)$, $B(2;0)$ là các điểm cần tìm.

Thí dụ 111. Tìm những điểm $M \in (C): y = \frac{x-1}{2x+2}$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$?

Đề thi thử Đại học 2014 – THPT Triệu Sơn 4 – Thanh Hóa

ĐS: $M_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M_2\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Thí dụ 112. Tìm $A \in (C) : y = x^3 - 3x + 1$ biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A , cắt đồ thị (C) tại B (khác điểm A) thỏa: $x_A + x_B = 1$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần II – THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An

ĐS: $A(-1; 3)$.

Thí dụ 113. Tìm $M \in (C) : y = \frac{x+2}{x-3}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Đào Duy Từ – Thanh Hóa

ĐS: $M(4; 6)$ hoặc $M(2; -4)$.

Thí dụ 114. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận $(C) : y = \frac{2x-1}{x+1}$. Tìm trên đồ thị (C) điểm M có hoành độ dương, sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt hai đường tiệm cận tại A và B thỏa mãn: $IA^2 + IB^2 = 40$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A, B – THPT Hà Huy Tập – Hà Tĩnh

ĐS: $M(2; 1)$.

Thí dụ 115. Tìm $M \in (C) : y = \frac{2x-1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với hai tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp $= \sqrt{2}$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I – THPT Hoàng Lê Kha – Thanh Hóa

ĐS: $M_1(0; 1)$ hoặc $M_2(2; 3)$.

Thí dụ 116. Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{x}{1-x}$. Tìm hai điểm $A, B \in (C)$ để tứ giác $OABI$ là hình thang có đáy $AB = 3OI$?

Đề thi thử Đại học 2014 – Đề số 3 – Tạp Chí Toán Học & Tuổi Trẻ

ĐS: $A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); B\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-5}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); B\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$

Thí dụ 117. Tìm trên $(C) : y = \frac{2x-3}{x-2}$ những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất ?

ĐS: $M_1(1; 1)$ hoặc $M_2(3; 3)$.

Thí dụ 118. Gọi M là điểm bất kì trên $(C) : y = \frac{2x-3}{x-2}$, I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tiếp tuyến d của (C) tại M cắt các đường tiệm cận tại A và B . Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích có diện tích nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học 2011 – THPT Lương Tài II – Bắc Ninh

ĐS: $M_1(1; 1) \vee M_2(3; 3)$.

Thí dụ 119. Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của $(C) : y = \frac{2x-1}{x-1}$. Tìm tọa độ các điểm A, B lần lượt thuộc hai nhánh của (C) sao cho $IA + IB$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

Đề thi thử Đại học 2012 khối D – THPT Nguyễn Hữu Cừu Tp. HCM

ĐS: $A(0;1)$, $B(2;3)$ hoặc $A(2;3)$, $B(0;1)$ là các điểm cần tìm.

❖ **Bài tập rèn luyện về tìm điểm đặc biệt của đồ thị hàm số**

BT 101. Tìm $M \in (Oxy)$ để có đúng 1 họ $(C_m): y = \frac{2mx + m^2 + 2m}{2x + 2m}$ đi qua.

Đại học Sư phạm Quy Nhơn khối A năm 2000

ĐS: tập hợp điểm là một đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ có tâm là $I(-1;1)$ và bán kính $R = 1$ trừ đi các điểm $(0;1), (-2;1)$.

BT 102. Tìm $M \in (C): y = \frac{2x}{x+1}$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục Ox, Oy tại A, B sao cho $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{4}$?

Đại học khối D năm 2007

ĐS: $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ hoặc $M(1;1)$.

BT 103. Tìm các điểm $A, B \in (C): y = -x^3 + 3x$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Chuyên Lý Tự Trọng – Cần Thơ

ĐS: $A(2;-2), B(-2;2)$ hoặc $A(-2;2), B(2;-2)$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

BT 104. Gọi A, B là hai điểm cực trị của $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tìm tọa độ các điểm $M \in (C)$ sao cho ΔMAB cân tại M ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A lần I – THPT Chuyên Bắc Ninh

ĐS: $M_2\left(-\frac{\sqrt{14}}{2}; 2 - \frac{\sqrt{14}}{4}\right), M_3\left(\frac{\sqrt{14}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

BT 105. Tìm $A, B \in (C): y = \frac{4-2x}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến với (C) tại các điểm đó song song với nhau, đồng thời ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O với O là gốc tọa độ ?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I khối A, B – THPT Đoàn Thượng – Hải Dương

ĐS: $A(-1;1), B(3;3)$ hoặc $A(3;3), B(-1;1)$.

BT 106. Tìm điểm $M \in (C): y = \frac{2x+1}{x-1}$, sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận ngang (C) tại F và ΔEFM vuông tại F với $E(1;0)$?

Đề thi thử Đại học 2014 lần II – THPT Chuyên ĐHS Hà Nội

ĐS: $M(1 + \sqrt[3]{3}; 2 + \sqrt[3]{9})$.

BT 107. Tìm những điểm trên đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x+2}{2x-1}$ cách đều hai điểm $A(2;0), B(0;2)$?

Đề thi thử Đại học 2011 khối D – THPT Nguyễn Huệ

ĐS: $M\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.

BT 108. Tìm $M \in (C): y = x^3 - 3x + 2$ để tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt đồ thị (C) tại điểm thứ hai là N thỏa mãn $|x_M - x_N| = 6$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I – THPT Thái Hòa – Nghệ An

ĐS: $M(2;4) \vee M(-2;0)$.

BT 109. Tìm trên hai nhánh của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$, các điểm M, N sao cho các tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại bốn điểm lập thành một hình thang ?

ĐS: mọi điểm M, N thuộc hai nhánh của (C) đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BT 110. Tìm các điểm trên $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$, sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{18}{5}$ (đvdt) ?

Đề thi thử Đại học 2011 lần II – TTBDVH Thăng Long – Tp. HCM

BT 111. Tìm điểm M trên đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: x - 4y + 8 = 0$ là ngắn nhất ?

ĐS: $M\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

BT 112. Tìm điểm $M \in d: y = 3x - 2$ sao tổng khoảng cách từ M đến hai điểm cực trị của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ là nhỏ nhất ?

ĐS: $M\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

BT 113. Tìm tọa độ điểm $M \in (C): y = \frac{2x-1}{x+1}$, sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất ?

Đề thi thử Đại học 2011 lần I – THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội

ĐS: $M_1(-1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}) \vee M_2(-1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.

BT 114. Tìm trên đồ thị $(C): y = x^3 + 3x - 2$ các cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(2;18)$?

ĐS: $A(1;2), B(3;34)$ hoặc $A(3;34), B(1;2)$.

BT 115. Tìm các điểm cố định của $(C_m): y = x^4 + mx^2 - (m+1)$.

Đại học Sư phạm Vinh khối G năm 1999

ĐS: $A(-1;0), B(1;0)$.

§ 6. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH DỰA VÀO ĐỒ THỊ

☆☆☆

① **Loại 1.** Đề cho $(C): y = f(x)$. Hãy vẽ $(C_1): y = |f(x)|$?

— **Bước 1.** Ta có $(C_1): y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

— **Bước 2.** Đồ thị hàm số (C_1) được suy ra từ (C) như sau:

- + Phần I: Giữ lại phần (C) phía trên Ox (khi $f(x) \geq 0$).
- + Phần II: Lấy đối xứng qua Ox của phần đồ thị (C) nằm dưới Ox .
- + Hợp hai phần đồ thị, ta được đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$.

② **Loại 2.** Đề cho $(C): y = f(x)$. Hãy vẽ $(C_2): y = f(|x|)$?

— **Bước 1.** Ta có $(C_2): y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{ khi } x \geq 0 \\ f(-x) = f(x) & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$.

— **Bước 2.** Đồ thị hàm số (C_2) được suy ra từ (C) như sau:

- + Phần I: Giữ lại phần (C) bên phải Oy (khi $x \geq 0$).
- + Phần II: Lấy đối xứng qua Oy phần vừa giữ lại của (C) .
- + Hợp hai phần đồ thị, ta được đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$.

③ **Loại 3.** Đề cho $(C): y = f(x)$. Hãy vẽ $(C_3): |y| = f(x)$?

— **Bước 1.** Ta có: $|y| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{K}$ thì $y = \pm f(x), \forall x \in \mathbb{K}$.

— **Bước 2.** Đồ thị (C_3) được suy ra từ (C) như sau:

- + Phần I: Phần của đồ thị $(C): y = f(x)$ ứng với $y \geq 0$ (trên Ox).
- + Phần II: Là phần đối xứng với phần (I) qua trục Ox.
- + Hợp hai phần đồ thị, ta được đồ thị $(C_3): |y| = f(x)$.

④ **Loại 4.** Đề cho $(C): y = f(x)$. Hãy vẽ $(C_4): y = |f(|x|)|$?

Đây loại hợp của hai phần đồ thị (C_1) và (C_2) .

— Giữ lại phần (C) bên phải Oy (bỏ phần bên trái).

— Lấy đối xứng qua Oy phần vừa giữ lại được (C_2) .

— Giữ lại phần (C_2) phía trên Ox.

— Lấy đối xứng qua Ox của phần đồ thị (C_2) nằm dưới Ox.

⑤ **Loại 5.** Đề cho $\begin{cases} (C): y = u(x) \cdot v(x) \\ (C): y = \frac{u(x)}{v(x)} \end{cases}$. Hãy vẽ $(C_5): \begin{cases} y = |u(x)| \cdot v(x) \\ y = \frac{u(x)}{|v(x)|} \end{cases}$?

— **Bước 1.** Giữ nguyên phần đồ thị $(C): \begin{cases} y = u(x) \cdot v(x) \\ y = \frac{u(x)}{v(x)} \end{cases}$ khi $v(x) > 0$ (I)

— **Bước 2.** Lấy đối xứng phần còn lại qua trục hoành Ox (II)
 $\Rightarrow (I) \cup (II) = (C_5)$.

Thí dụ 120. Từ $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$, tìm m để phương trình $(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})^3 - 6\sqrt{16-x^2} + 2m + 1 = 0$ có nghiệm ?

Đề thi thử Đại học 2014 khối A lần I – THPT Ngô Gia Tự – Vĩnh Phúc

$$\text{ĐS: } -\frac{41}{2} \leq m \leq -\frac{1+16\sqrt{2}}{2}.$$

Thí dụ 121. Dựa vào đồ thị $(C): y = \frac{3x-4}{x-2}$, hãy m để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$, (i)

có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$?

$$\text{ĐS: } m \in \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{10} \right].$$

Thí dụ 122. Dựa vào đồ thị (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$ hãy tìm giá trị m để hệ $\begin{cases} (y-2)x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = m^2 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ có đúng bốn nghiệm nguyên ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A, B – THPT Hà Trung – Thanh Hóa

$$\text{ĐS: } m = \pm\sqrt{10}.$$

Thí dụ 123. Dựa vào (C): $y = -x^4 + 4x^2 - 1$, tìm m để: $4(3+2\sqrt{2})^x - (17+12\sqrt{2})^x = m^2 - 3m - 2$, (i) có đúng một nghiệm $x \in [0; \log_{1+\sqrt{2}} 2]$?

$$\text{ĐS: } \begin{cases} m = 0 \vee m = 3 \\ m \in \left[\frac{3-\sqrt{29}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{29}}{2} \right]. \end{cases}$$

Thí dụ 124. Dựa vào đồ thị hàm số (C): $y = 2x^4 - 4x^2$, hãy tìm m để phương trình $x^2|x^2 - 2| = m$ (i) có đúng 6 nghiệm thực phân biệt ?

Đại học khối B năm 2009

$$\text{ĐS: } m \in (0; 1).$$

Thí dụ 125. Từ (C): $y = -x^4 + 4x^2 - 3$, hãy tìm m để phương trình $|-x^4 + 4x^2 - 3| = 7m^2 - m$, (*) có nghiệm thuộc $[-2; \sqrt{5}]$?

Đề thi thử Đại học 2013 lần I khối A – THPT Lý Thái Tổ – Bắc Ninh

$$\text{ĐS: } -1 \leq m \leq 0 \vee \frac{1}{7} \leq m \leq \frac{8}{7}.$$

Thí dụ 126. Từ đồ thị (C): $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$, hãy tìm m để phương trình $2|x^3| - 9x^2 + 12|x| = m$, (*) có 6 nghiệm phân biệt ?

Đại học khối A năm 2006

$$\text{ĐS: } 4 < m < 5.$$

Thí dụ 127. Dựa vào đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$, hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$(|x| - 1) \log_2 m = |x| + 1, (i) ?$$

$$\text{ĐS: Nếu } \begin{cases} \log_2 m < -1 \\ \log_2 m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow (ii): \text{ có hai nghiệm phân biệt.}$$

$$\text{Nếu } \log_2 m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow (ii): \text{ có đúng một nghiệm.}$$

$$\text{Nếu } -1 < \log_2 m < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 2 \Rightarrow (ii): \text{ vô nghiệm.}$$

Thí dụ 128. Dựa vào (C): $y = \frac{x+1}{2x+3}$, hãy biện luận số nghiệm phương trình $|x+1| = m(2x+3)$, (i) theo tham số m ?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Cổ Loa – Hà Nội

$$\text{ĐS: Nếu } x \in \left[-\frac{1}{2}; 0 \right): (ii) \text{ vô nghiệm. Nếu } x \in \left[0; \frac{1}{2} \right): (ii) \text{ có hai nghiệm.}$$

Nếu $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$: phương trình có đúng một nghiệm.

Thí dụ 129. Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2$, hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$x = \frac{m}{x^2 - 2x}, \quad (i) ?$$

Đề thi thử Đại học 2013 lần I – THPT Đông Sơn I – Thanh Hóa

ĐS: nếu: $m < 0 \vee m > 4$: (ii) có một nghiệm.

Nếu $m = 0$: (ii) vô nghiệm. Nếu $m \in (0; 4)$: (ii) có ba nghiệm phân biệt.

Nếu $m = 4$: (ii) có hai nghiệm phân biệt.

Thí dụ 130. Dựa vào $(C): y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, hãy tìm tham số m để $|x-1| \cdot 2^{\sqrt{m^2-4m}} - 2x + 1 = 0$, (i) có đúng hai nghiệm phân biệt ?

ĐS: $m < 2 - \sqrt{5} \vee m > 2 + \sqrt{5}$.

❖ **Bài tập rèn luyện biện luận số nghiệm dựa vào đồ thị**

BT 116. Dựa vào $(C): y = -x^3 + 3x + 1$, hãy tìm tham số m để phương trình: $27^x - 3^{x+1} + m = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt ?

Đề thi thử Đại học 2014 lần I – THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu

ĐS: $m \in (0; 2)$.

BT 117. Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = 8x^4 - 9x^2 + 1$, hãy biện luận theo m số nghiệm phương trình: $8 \cos^4 x - 9 \cos^2 x + m = 0, \forall x \in [0; \pi]$?

Đề thi thử Đại học 2013 khối A – THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng

ĐS: Nếu $m > \frac{81}{32}$: phương trình vô nghiệm. Nếu $m = \frac{81}{32}$: phương trình có 2 nghiệm.

Nếu $1 \leq m < \frac{81}{32}$: phương trình có 4 nghiệm. Nếu $0 < m < 1$: phương trình có 2 nghiệm.

Nếu $m = 0$: phương trình có 1 nghiệm. Nếu $m < 0$: phương trình vô nghiệm.

BT 118. Dựa vào đồ thị $(C): y = -x^4 + 4x^2 - 1$, hãy tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + y - 4x^2 + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = m^2 - 2m \end{cases}$ có

đúng ba nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $m = 2 \vee m = 0$.

BT 119. Từ $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$, hãy tìm tham số m để $\left| 2x(\sqrt{2x-1}-3) - \sqrt{2x-1} + 4 \right| = e^{2m} - e^m$ có 5 nghiệm phân biệt ?

ĐS: Không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

BT 120. Từ đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 4x^2 + 3$, hãy tìm m để phương trình $|x^4 - 4x^2 + 3| = \log_2 m$ có bốn nghiệm phân biệt ?

Đề thi thử Đại học 2010 – THPT Tổng Văn Trân – Nam Định

ĐS: $m = 1 \vee 2 < m < 9$.

BT 121. Từ đồ thị hàm số $(C): y = 2x^2 - x^4$, hãy tìm tham số m để phương trình $|m| - |x^4 - 2x^2| = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt ?

Đề thi thử Đại học 2010 – THPT Bồ Hạ – Bắc Giang

ĐS: $m \geq 0$.

BT 122. Dựa vào $(C): y = 2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}$, hãy tìm tham số m để phương trình $\left| 2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2} \right| = m^2 - m + \frac{1}{2}$ có đúng 8 nghiệm phân biệt ?

ĐS: $m \in (0;1)$.

BT 123. Dựa vào $(C): y = \frac{x-1}{x+1}$, hãy biện luận số nghiệm của phương trình: $mx + m = |x-1| + x + 1$?

ĐS: Nếu $\begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$: phương trình có hai nghiệm. Nếu $0 \leq m \leq 2$: phương trình có một nghiệm.

BT 124. Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2 - 4$, hãy tìm m để phương trình $(x+2)^2 = \frac{\log_2 m}{|x-1|}$ có đúng bốn nghiệm ?

Đề thi thử Đại học 2012 khối A, D1 – THPT Chuyên Ngoại Ngữ – Hà Nội

ĐS: $m \in (1;16)$.

BT 125. Dựa vào $(C): y = x^3 - 3x + 1$, hãy tìm tham số m để phương trình $|x|^3 - 3|x| = m^3 - 3m$ có bốn nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $-2 < m < -\sqrt{3} \vee \begin{cases} 0 < m < \sqrt{3} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

BT 126. Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2x - 2 = \frac{m}{|x-1|} ?$$

Đề thi thử Đại học 2011 khối A – THPT Minh Châu – Hưng Yên

ĐS: Nếu $m < -2$: vô nghiệm.

Nếu $m = -2$: có 2 nghiệm kép.

Nếu $-2 < m < 0$: có 4 nghiệm

Nếu $m \geq 0$: có 2 nghiệm phân biệt.

BT 127. Dựa vào $(C): y = x^4 - 4x^2 + 3$, hãy tìm tham số m để phương trình $(x^2 - 1)|x^2 - 3| = \log_2 m$ có hai nghiệm phân biệt ?

ĐS: $m > 2 \vee \frac{1}{8} < m < 1$.

BT 128. Dựa vào $(C): y = \frac{2x}{x-1}$, hãy biện luận số nghiệm của phương trình: $(m-2)|x| - m = 0, \forall x \in [-1;2]$

Đại học Quốc Gia Tp. HCM 1999 khối D đợt II

ĐS: Nếu $m < 1$: hai nghiệm. Nếu $m = 1$: một nghiệm.

Nếu $1 < m < 4$: vô nghiệm. Nếu $m \geq 4$: một nghiệm.

BT 129. Từ đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - x^2 + 2$, hãy nêu cách vẽ đồ thị hàm số $(C'): |y| = x^3 - x^2 + 2$.

Đại học Hàng Hải năm 1996

BT 130. Dựa vào đồ thị hàm số $(C): y = 2x^3 - 3x + 2$, hãy tìm m để phương trình

$$|x^3 - 3x + 2| = \log_{\sqrt{2}}(m^2 + 1)$$
 có bốn nghiệm thực phân biệt ?

ĐS: $|m| < 1 \vee m \neq 0$.

BT 131. Dựa vào $(C): y = (x-1)^3 - 3x$, hãy tìm m để hệ bất $\begin{cases} |x-1|^3 - 3x - m < 0 \\ \frac{1}{2} \log_2 x^2 + \frac{1}{3} \log_2 (x-1)^3 \leq 1 \end{cases}$ có nghiệm ?

ĐS: $m \geq 5$.