Chuyên đề: Tổ Hợp – Xác suất

A. Lý thuyết cơ bản :

I. Qui tắc đếm :

1. Qui tắc cộng : Một công việc nào đó có thể thực hiện một trong hai phương án A hoặc B. Nếu phương án A có m cách tực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kỳ cách nào trong phương án A thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

2. Qui tắc nhân : Một công việc nào đó có thể bao gồm hai công đoạn A và B. Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có m.n cách thực hiện

II .Hoán vị:

1. Giai thừa :

+ n! = 1.2.3…n = (n -1)!n.

+ Qui ước : 0! = 1.

+ $\frac{n!}{P!}=(p+1)(p+2)...n$ (Với $n>P$).

+ $\frac{n!}{(n-p)!}=(n-p+1).(n-p+2)...n$ (Với $n>P$).

2. Hoán vị Không lặp :

Một tập hợp gồm n phần tử $(n\geq 1)$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử là : $P_n=n!$.

3. Hoán vị lặp :

Cho k phần tử khác nhau : $a_1,a_2,...,a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2

phần tử $a_2,\ldots,n_k$ phần tử a_k (với $n_1+n_2+...+n_k=n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1,n_2,...,n_k)$ của k phần tử.

Số các hoán vị lặp cấp n, kiểu $(n_1,n_2,...,n_k)$ của k phần tử là :

$$P_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

4. Hoán vị vòng quanh :

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là : $Q_n=(n-1)!$.

III. Chỉnh hợp:

1. Chỉnh hợp không lặp :

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A $(1\le k\le n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là : $A_n^k=n(n-1)...(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Chú ý :

+ Công thức trên cũng đúng cho trường hợp k = 0 hoặc k = n.

+ Khi k = n thì $A_n^n=P_n=n!$.

2. Chỉnh hợp lặp :

Cho tập A gồm n phần tử. Một dãy gồm k phần tử của A, trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của A.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của A là : $\overline{A_n^k}=n^k$.

IV. Tổ hợp:

1. Tổ hợp không lặp :

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k $\left(1\le k\le n\right)$ phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử là : $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$.

+ Qui ước : $C_n^0=1$.

<u>Tính chất</u> :

+ $C_n^0=C_n^n=1$.

+ $C_n^k=C_n^{n-k}$.

+ $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$.

+ $C_n^k=\dfrac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$.

2. Tổ hợp lặp :

Cho tập $A=\left\{a_1,a_2,...,a_n\right\}$ và số tự nhiên k bất kỳ. Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một tập hợp gồm k phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong n phần tử của A.

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử là : $\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k$.

3. Phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp :

+ Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ nhau bỡi công thức : $A_n^k=k!C_n^k$.

+ Chỉnh hợp : Có thứ tự   Tổ hợp : không có thứ tự.

$\Rightarrow$ Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử $\rightarrow$ chỉnh hợp. Ngược lại là tổ hợp.

+ Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử $\left(k\le n\right)$.

- Không thứ tự, không hoàn lại : C_n^k.

- Có thứ tự, không hoàn lại : A_n^k.

- Có thứ tự, có hoàn lại : $\overline{A_n^k}$.

V. Các dạng bài tập cơ bản trong nguyên lý đếm :

1. Phương pháp chung giải bài toán về cấu tạo số :

Giả sử m,n là các số nguyên dương với $m \le n$ thì :

a. Số cách viết m trong n chữ số khác nhau vào m vị trí định trước là A_n^m.

b. Số cách viết m chữ số khác nhau trong n vị trí định trước là A_n^m (ở $n-m$ vị trí còn lại không thay đổi chữ số).

c. Số cách viết m chữ số giông nhau trong n vị trí định trước là $C_n^{n-m} = C_n^m$.

d. Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, số các số có m chữ số tạo thành từ chúng là $(n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

2. Các dạng toán thường gặp :

Dạng 1: Số tạo thành chứa các số định trước

Cho tập hợp gồm n chữ số, trong đó có chữ số 0, từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số khác nhau sao cho trong đó có k chữ số định trước (thuộc n chữ số nói trên) với $k < m \le n$.

Cách giải :

Số tạo thành gồm m vị trí $\overline{a_1a_2...a_m}$. Gọi tập hợp k chữ số định trước là X. Ta xét hai bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về tập hợp X và chữ số 0 như sau :

a. Trong X chứa chữ số 0.

+ Ta có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho chữ số 0.

+ Số cách chọn $(k-1)$ chữ số khác 0 thuộc X trong $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^{m-k}.

+ Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là $S = (m-1)A_{m-1}^{k-1}.A_{n-k}^{m-k}$.

b. Trong X không chứa chữ số 0.

Bước 1: Tính các số tạo thành chứa chữ số 0.

+ Lần lượt có $(m-1)$ cách chọn vị trí cho chữ số 0.

+ Số cách viết k chữ số thuộc X vào $(m-1)$ vị trí còn lại là A_{m-1}^{k}.

+ Số cách chọn $(m-k-1)$ trong số $(n-k-1)$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $(m-k-1)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k-1}.

+ Theo quy tắc nhân, ta được số các số đó là $S_1=(m-1)A_{m-1}^{k}.A_{n-k-1}^{m-k-1}$.

Bước 2: Tính số các số tạo thành không chứa chữ số 0.

+ Số cách viết k chữ số thuộc X trong m vị trí là A_m^k.

+ Số cách chọn $(m-k)$ trong số $(n-k-1)$ chữ số khác 0 mà không thuộc X vào $(m-k)$ vị trí còn lại là A_{n-k-1}^{m-k}. Theo quy tắc nhân, ta được các số đó là $S_2=A_m^k.A_{n-k-1}^{m-k}$.

Bước 3: Theo quy tắc cộng, ta được số các số tạo thành thỏa mãn bài toán là : $S=S_1+S_2$.

Ví dụ : Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

Giải : Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2...a_6}$, với $a_1,a_2,...,a_6\in\{0,1,2,...,9\}$ và $a_1\neq 0$.

+ Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 0.

+ Với mỗi cách chọn trên lại có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 1 và có A_8^4 cách chọn vị trí cho 4 trong 8 chữ số còn lại.

+ Vậy có tất cả $5.5.A_4^8=42000$ số gồm 6 chữ số khác nhau và trong các chữ số đó có mặt chữ số 0 và 1.

Dạng 2: Số tạo thành không chứa hai chữ số định trước cạnh nhau.

Cho tập hợp gồm n chữ số, từ chúng viết được bao nhiêu số có m $(m\leq n)$ chữ số khác nhau sao cho trong đó có 2 chữ số định trước nào đó không đứng cạnh nhau.

Cách giải :

Số tạo thành có dạng $\overline{a_1a_2...a_m}$ và 2 chữ số định trước là x, y (thuộc n chữ số đã cho). Ta xét 3 bài toán nhỏ theo các khả năng của giả thiết về 2 chữ số x, y và chữ số 0 như sau :

a. Nếu n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và hai chữ số định trước x, y khác 0.

Bước 1: Tính số các số tạo thành một cách bất kì.

+ Có $n-1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0, Chọn các chữ số còn lại đặt vào các vị trí còn lại có A_{n-1}^{m-1}.

+ Vậy, có tất cả là $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$ số có dạng như thế.

Bước 2: Tính số các số có 2 chữ số x, y cạnh nhua theo thứ tự $\overline{xy}$ và $\overline{yx}$.

+ TH 1 : $\overline{a_1a_2} = \overline{xy}$. Khi đó mỗi số $\overline{a_3...a_m}$ ứng với một chỉnh hợp chập $(m-2)$ của $(n-2)$ chữ số khác x, y. Số các số đó là : $S_2 = A_{n-2}^{m-2}$.

+ **TH 2 :** $\overline{a_1a_2} \neq \overline{xy}$. Lần lượt ta có $(n-3)$ cách chọn chữ số cho $a_1 \neq 0, x, y$. $(m-2)$ cách chọn vị trí cho $\overline{xy}$. Số cách chọn $(m-3)$ trong $(n-3)$ chữ số còn lại khác a_1, x, y cho $(m-3)$ vị trí còn lại là A_{n-3}^{m-3}. Theo quy tắc nhân, số các số đó là : $S_3 = (n-3)(m-2)A_{n-3}^{m-3}$.

Từ hai trường hợp trên, ta được số các số có chứa $\overline{xy}$ là $S_2 + S_3$.

Tương tự cũng có $S_2 + S_3$ số chứa $\overline{yx}$.

Bước 3: Vậy số các số thỏa mãn bài toán là : $S = S_1 - 2(S_2 + S_3)$.

b. Nếu n chữ số đã cho chứa chữ số 0 và một trong hai chữ số định trước bằng 0.

Bước 1: Tính số các số tạo thành bất kỳ.

Có $n-1$ cách chọn vị trí cho chữ số 0 và khi đó số các số đó là : $S_1 = (n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

Bước 2: Tính số các số có hai chữ số x và 0 cạnh nhau : $S_2 = (2m-3)A_{n-2}^{m-2}$. (Có $m-1$ cách viết $\overline{x0}$ và có $m-2$ cách viết $\overline{0x}$ vào m vị trí)

Bước 3: Vậy số các số thỏa mãn bài toán là : $S = S_1 - S_2$.

c. Nếu n chữ số đã không chứa chữ số 0 : $S = A_n^m - 2(m-1)A_{n-2}^{m-2}$.

Ví dụ : Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu chữ số có 6 chữ số khác nhau. Trong đó có bao nhiêu số mà chữ số 1 và chữ số 6 không đứng cạnh nhau.

Giải :

+ Bước 1: Tính số các số tạo thành bất kỳ.

Có 6 cách chọn chữ số đầu tiên khác 0 và có A_6^5 cách chọn 5 trong 6 số vào 5 vị trí còn lại. Vậy có $6.A_6^5$ số có 6 chữ số tạo thành từ các số trên.

+ Bước 2: Tính số các số có 2 chữ số 1, 6 cạnh nhau theo tứ tự 16 và 61.

- TH 1: Nếu 2 chữ số đầu tiên là 1, 6. Khi đó có 2! Cách đảo vị trí 2 số này. Có A_5^4 cách chọn 4 trong 5 số vào 4 vị trí còn lại. Vậy có 2!. A_5^4 số có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số trên và có hai số đầu tiên là 1 và 6.

- TH 2: Nếu số đầu tiên khác 1 và 6, khi đó có 4 cách chọn để số này khác 0. Có 4 cách chọn vị trí cho 2 số 1 và 6 cạnh nhau. Có A_4^3 cách chọn 3 trong 4 số vào 3 vị trí còn lại. Mặt khác ta có 2! Cách đảo vị trí 2 số 1 và 6 cạnh nhau. Vậy có 4.4. A_4^3.2! số có 6 chữ số có 2 số 1 và 6 đứng cạnh nhau và không đứng đầu tiên.

+ Bước 3: Vậy số các số thỏa mãn bài toán là : $S = 6.A_6^5 - 2\left(A_5^4 + 4.4.A_4^3\right) = 3312$ số.

Dạng 3: SỐ tạo thành chứa chữ số lập lại

Ví dụ : Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện 3 lần, một chữ số khác xuất hiện 2 lần và một chữ số khác hai chữ số trên xuất hiện 1 lần.

Giải :

+ Nếu kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu, lần lượt là :

- Có 10 cách chọn chữ số xuất hiện 3 lần và có C_6^3 cách chọn 3 trong 6 vị trí cho chữ số đó.

- Có 9 cách chọn chữ số xuất hiện 2 lần và có C_3^2 cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại cho chữ số đó.

- Có 8 cách chọn chữ số cho vị trí còn lại cuối cùng.

Vậy ta được số các số đó là : $S = 10.C_6^3.9.C_3^2.8 = 720.C_6^3.C_3^2$.

+ Do vai trò của 10 chữ số 0, 1, 2, …, 9 là như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là : $\frac{9}{10}S = 648.C_6^3.C_3^2$ số.

<u>Bài toán tổng quát</u> : Cho tập hợp gồm n chữ số, từ chúng viết được bao nhiêu số có m chữ số sao cho trong đó có một chữ số xuất hiện k lần, một chữ số q lần với k + q = m.

<u>Cách giải</u> : Ta xét hai bài toán nhỏ sau đây.

a. Nếu n chữ số đã cho có chứa chữ số 0.

<u>Bước 1</u>: Nếu kể cả chữ số 0 đứng đầu, ta thấy :

+ Có n cách chọn chữ số xuất hiện k lần và có C_m^k cách chọn k trong m vị trí cho chữ số đó.

+ Sau đó có $(n-1)$ cách chọn chữ số xuất hiện q lần cho q vị trí còn lại.

+ Theo qui tắc nhân ta tính được số các số đó là : $S = n.(n-1).C_m^k$ số.

<u>Bước 2</u>: Vai trò của n chữ số như nhau nên số các số có chữ số đứng đầu khác 0 thỏa mãn bài toán là :

$\frac{n-1}{n}.S$

b. Nếu n chữ số đã cho không chứa chữ số 0 : $S = n.(n-1).C_m^k$ **số.**

3. <u>Các dạng bài toán số học tích hợp sự vật, hiện tượng</u>.

<u>Dạng 1</u>: Bài toán chọn vật.

a. Đặc trưng của bài toán :

Chọn một tập hợp gồm k phần tử từ n phần tử khác nhau, k phần tử không có tính chất gì thay đổi nếu như hoán vị k vị trí của nó. Đây chính là đặc điểm để nhận dạng sử dụng công thức tổ hợp.

b. Phương pháp :

Bước 1: Liệt kê các tính chất có thể có của tập con cần chọn.

Bước 2: Phân chia trường hợp (nếu có).

Bước 3: Tính số cách chọn bằng cách dựa vào công thức C_n^k.

Bước 4: Dùng qui tắc nhân và qui tắc cộng suy ra kết quả.

Ví dụ : Một hợp đựng 7 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng.

a. Có bao nhiêu cách lấy ra 7 viên bi đủ 3 màu, trong đó có 3 viên bi xanh và nhiều nhất 2 viên bi đỏ.

b. Có nhiêu cách lấy ra 8 viên bi có đủ 3 màu.

Giải :

a. Xét 2 trường hợp sau :

+ **TH 1:** Có 1 viên bi đỏ :

- Khi đó có C_5^1 cách lấy 1 viên bi đỏ, có C_7^3 cách lấy ra 3 viên bi xanh và có C_4^3 cách lấy ra 3 viên bi vàng. Vậy có $C_5^1.C_7^3.C_4^3$ cách lấy ra 7 viên bi trong đó có 3 viên bi xanh, 1 bi đỏ và 3 bi vàng.

+ **TH 2:** Có 2 viên bi đỏ :

- Khi đó có C_5^2 cách lấy 2 viên bi đỏ, có C_7^3 cách lấy ra 3 viên bi xanh và có C_4^2 cách lấy ra 2 viên bi vàng.

Vậy có $C_5^2.C_7^3.C_4^2$ cách lấy ra trong đó có 2 bi đỏ, 3 bi xanh và 2 bi vàng.

Vậy có tất cả $C_5^1.C_7^3.C_4^3 + C_5^2.C_7^3.C_4^2 = 2800$ cách.

b. - Số cách lấy ra 8 viên bi bất kỳ có C_{16}^8 cách.

- Số cách lấy ra 8 viên bi không có màu vàng mà chỉ có màu đỏ và màu xanh là

$C_7^7.C_5^1 + C_7^6.C_5^2 + C_7^5.C_5^3 + C_7^4.C_5^4 + C_7^3.C_5^5 = 495$ cách.

- Số cách lấy ra 8 viên bi không có màu đỏ mà chỉ có màu vàng và màu xanh là

$C_7^7.C_4^1 + C_7^6.C_4^2 + C_7^5.C_4^3 + C_7^4.C_4^4 = 165$ cách.

- Số cách lấy ra 8 viên bi không có màu xanh mà chỉ có màu vàng và màu đỏ là

$C_5^5.C_4^3+C_5^4.C_4^4=9$ cách.

Vậy có tất cả $C_{16}^8-\left(495+165+9\right)=12201$ cách.

Dạng 2: Bài toán chọn người

Ví dụ : Lớp 11A của Tuấn có 11 học sinh nam và 18 học sinh nữ.

a. Có bao nhiêu cách chọn ra một đội văn nghệ gồm 10 người có nam và có nữ.

b. Chọn ra một tổ trực nhật gồm 13 người, trong đó có một tổ trưởng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu Tuấn luôn có mặt trong tổ và chỉ là thành viên.

Giải :

a. - Chọn 10 người trong 29 người cả nam và nữ có C_{29}^{10} cách.

- Chọn 10 người đều là nam có C_{11}^{10} cách.

- Chọn 10 người đều là nữ có C_{18}^{10} cách.

Vậy có $C_{29}^{10}-C_{11}^{10}-C_{18}^{10}=19986241$ cách chọn.

b. - Do Tuấn luôn có mặt trong tổ nên chỉ chọn 12 người trong 28 người còn lại.

- Chọn một tổ trưởng có C_{28}^1 cách.

- Chọn 11 thành viên còn lại trong 27 người có C_{27}^{11} cách.

Vậy có tất cả $C_{28}^1.C_{27}^{11}$ = 216332480 cách chọn.

Dạng 3: Bài toán sắp xếp vật.

Ví dụ : Tại cuộc thi Theo Dòng Lịch Sử, ban tổ chức sử dụng 7 thẻ vàng và 7 thẻ đỏ, đánh dấu mỗi loại theo các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi có bao nhiêu cách xếp tất cả các thẻ này thành một hàng sao cho hai thẻ cùng màu không nằm cạnh nhau.

Giải :

- Nếu các thẻ vàng nằm ở vị trí lẻ thì các thẻ đỏ nằm ở vị trí chẵn, ta có 7!.7! cách xếp khác nhau.

- Nếu các thẻ đỏ nằm ở vị trí lẻ thì các thẻ vàng nằm ở vị trí chẵn, ta có 7!.7! cách xếp khác nhau.

Vậy có tất cả 7!.7! + 7!.7! = 50803200 cách.

Dạng 4: Bài toán sắp xếp người.

Ví dụ : Một tổ có 8 học sinh gồm 5 nữ và 3 nam. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các học sinh trong tổ đứng thành một hàng dọc vào lớp sao cho.

a. Các bạn nữ đứng chung với nhau.

b. Nam nữ không đứng chung nhau.

Giải :

a. Các bạn nữ đứng chung với nhau xem như một nhóm đoàn kết nên ta có 4! Cách. Và có 5! Hoán vị các bạn nữ với nhau. Vậy có 4!.5! = 2880 cách.

b. Các bạn nam đứng riêng có 3! Cách. Các bạn nữ đứng riêng ta có 5! Cách. Có 2! Cách đổi chỗ 2 nhóm nam và nữ nên có tất cả 2!.3!.5! = 1440 cách.

Dạng 5: Bài toán đếm trong hình học.

Ví dụ : Cho 15 điểm trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tập hợp các đường thẳng đi qua hai điểm của 15 điểm đã cho. Số giao điểm khác 15 điểm đã cho do các đường thẳng này tạo thành nhiều nhất là bao nhiêu.

Giải :

- Vì cứ 2 điểm có một đường thẳng nên số đường thẳng từ 15 điểm là $C_{15}^2 = 105$ đường.

- Nếu cứ 2 đường thẳng cho 1 giao điểm thì sẽ có C_{105}^2 giao điểm.

- Nhưng mỗi điểm đã cho có 14 đường thẳng đi qua nên điểm này phải là giao của C_{14}^2 cặp đường thẳng. Như vậy với 15 điểm đã cho sẽ có 15. C_{14}^2 giao điểm trong C_{105}^2 giao điểm nói trên. Suy ra số giao điểm cần tiềm là C_{105}^2 - 15. C_{14}^2 = 4095 giao điểm.

Dạng 6: Bài toán phân chia tập hợp.

Cho tập A có n phần tử khác nhau. Chia tập A thành các tập con $A_1, A_2, ..., A_k$, trong đó mỗi tập

con A_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ có n_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ phần tử. Khi đó việc chọn n_i phần tử trong n phần tử là phép chọn và loại trừ dần các phần tử đã được chọn.

Ví dụ : Cần phải phát 6 đề thi khác nhau cho 4 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề thi nếu mỗi em học sinh đều làm ít nhất 1 bài thi.

Giải :

TH 1: Mỗi em đều làm một bài thi

- Có $C_6^4 = 15$ cách chọn đề thi.

- Chọn 4 đề thi phát cho 4 học sinh có 4! cách phát.

Vậy có tất cả 4!.15 = 360 cách phát đề thi mà mỗi em làm 1 bài.

TH 2: Có một em nào đó làm 2 bài thi.

- Có C_6^2 cách chọn 2 bài thi trong 6 bài thi và có 4. C_6^2 cách phát 2 bài thi cho 1 trong 4 học sinh.

- Với 4 bài thi còn lại sẽ có A_4^3 cách chia cho 3 thí sinh.

Vậy có 4. $C_6^2 . A_4^3$ = 1440 cách phát đề thi mà trong đó có 1 em làm 2 bài thi.

TH 3: Có hai em nào đó làm 2 bài thi.

- Có C_6^2 cách chọn 2 bài thi trong 6 bài thi và có 4. C_6^2 cách phát 2 bài thi cho 1 trong 4 học sinh.

- Có C_4^2 cách chọn 2 bài thi trong 4 bài thi còn lại và có 3. C_4^2 cách phát 2 bài thi cho 1 trong 3 thí sinh còn lại.

- Với 2 bài thi còn lại sẽ có 2! cách phát cho 2 thí sinh còn lại.

Vậy có tất cả 4. C_6^2.3. C_4^2.2! = 2160 cách phát đề thi mà trong đó có 2 em làm hai bài thi.

TH 4: Có một em nào đó làm 3 bài thi.

- Có C_6^3 cách chọn 3 bài thi trong 6 bài thi và có 4. C_6^3 cách phát 3 bài thi cho 1 trong 4 học sinh.

- Với 3 bài thi còn lại có 3! Cách phát cho 3 thí sinh còn lại.

Vậy có 4. C_6^3.3! = 480 cách phát đề thi mà trong đó có 1 em làm 3 bài thi.

Vậy số cách phát đề thi theo yêu cầu bài toán là 360 + 1440 + 2160 + 480 = 4440 cách.

B. Bài tập :

I. Dạng Quy tắc đếm :

Bài 1: Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường. Không có con đường nào nối thành phố B với thành phố C. Hỏi có bao nhiêu đường đi từ thành phố A đến thành phố D.

ĐS : 12 cách.

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau nhỏ hơn 2.10^8, chia hết cho 3, có thể được viết bỡi các chữ số 0, 1, 2. *ĐS :* $2.3^7 - 1 = 4373$ số.

Bài 3: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên thỏa

1. Gồm 6 chữ số.

2. Gồm 6 chữ số khác nhau.

3. Gồm 6 chữ số khác nhau và chia hết cho 2.

ĐS : *a.* 6^6 *b. 6!* *c. 3.5!.*

Bài 4: Có 25 đội bóng tham gia tranh cúp. Cứ 2 đội phải đấu với nhau 2 trận. Hỏi có bao nhiêu trận đấu.

ĐS : 25.24 = 600 trận.

Bài 5: Một bó hoa gồm có 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn ra 5 bông hồng có đủ 3 màu.

Bài 6: Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số thỏa

1. Số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

2. Số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau.

3. Số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

4. Số lẻ có 3 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 400.

<u>Bài 7</u>: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình biểu diễn, biết rằng chất lượng các vở kịch, điệu múa và bài hát là như nhau.

ĐS : 36 cách.

<u>Bài 8</u>: Một người có 7 cái áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cái cà vạt trong đó có 2 cái màu vàng. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn áo – cà vạt nếu :

1. Chọn áo nào, cà vạt nào cũng được.

2. Đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt màu vàng.

ĐS : a. 35 b. 29.

<u>Bài 9</u>: Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 người đàn ông và 2 người phụ nữ ngồi trên một chiếc ghế dài sao cho hai người cùng phái phải ngồi gần nhau.

<u>Bài 10</u>: Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội văn nghệ có 8 người sao cho có ít nhất 3 nữ.

<u>Bài 11</u>: Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và khác 0, biết rằng tổng của 3 chữ số này bằng 9.

ĐS : 18.

<u>Bài 12</u>: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt đúng 3 lần, chữ số 2 có mặt đúng 2 lần và mỗi chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

ĐS : 3360.

<u>Bài 13</u>: Từ 0, 1, 2,…,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số thỏa.

1. Các chữ số khác nhau.

2. Hai chữ số kề nhau phải khác nhau.

3. Khác nhau và bắt đầu bằng 345

ĐS : *a.* $9A_9^4$. *b.* 9^5 *c.* 6.

<u>Bài 14</u>: Tính tổng tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.

ĐS : 37332960.

<u>Bài 15</u>: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ, người ta muốn chọn ra một bó hoa gồm 7 bông. Hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó

1. Có đúng 1 bông hồng đỏ.

2. Có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

ĐS : a. 112 b. 150.

II. <u>Dạng Rút gọn biểu thức</u> :

<u>Bài 1</u>: Rút gọn cá biểu thức sau

1. $A=\frac{6!}{(m-2)(m-3)}\left[\frac{1}{(m+1)(m-4)}.\frac{(m+1)!}{(m-5)!5!}-\frac{m(m-1)!}{12(m-4)!3!}\right]$ (Với $m\geq 5$).

2. $B=\frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!}-\frac{9!}{2!7!}\right)$.

3. $C=\frac{5!}{m(m+1)}.\frac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$.

4. $D=\frac{A_5^2}{P_2}+\frac{A_{10}^5}{7P_5}$.

5. $E=P_1A_2^1+P_2A_3^2+P_3A_4^3+P_4A_5^4-P_1P_2P_3P_4$.

6. $F=C_n^n.C_{2n}^n.C_{3n}^n$.

7. $G=C_n^1+2\frac{C_n^2}{C_n^1}+...+k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}}+...+n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$.

8. $H=\frac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}}+\frac{C_{15}^8+2C_{15}^9+C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$.

III. Dạng Chứng minh :

Bài 1: Chứng minh rằng

1. $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$.

2. $P_n = (n-1)P_{n-1} + (n-2)P_{n-2} + ... + 2P_2 + P_1 + 1$.

3. $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 3$.

4. $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}$.

Bài 2: Chứng minh rằng

1. $\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + ... + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}$ với $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

2. $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2.A_{n+k}^{n}$.

3. $C_n^k.C_{n-k}^{p-k} = C_n^p.C_p^k$ với $k \leq p \leq n$.

4. $C_n^r = \frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$. Với $r \leq n$.

5. $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$. Với $m \leq n$.

6. $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$ với $3 \leq k \leq n$.

7. $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ với $2 < k < n$.

8. $C_r^0.C_q^p + C_r^1.C_q^{p-1} + ... + C_r^p.C_q^0 = C_{r+q}^p$ với $p \leq r \leq q$

HD: *Sử dụng khai triển* $(1+x)^r.(1+x)^q = (1+x)^{r+q}$. *So sánh hệ số* x^p *ở 2 vế.*

9. $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

HD: *Sử dụng câu 8 với* $p = q = r = n$.

10. $C_{2p}^0 + C_{2p}^2 + C_{2p}^4 + ... + C_{2p}^{2p} = C_{2p}^1 + C_{2p}^3 + C_{2p}^5 + ...C_{2p}^{2p-1}$

HD: *Sử dụng* $(x+y)^{2p}$ *và* $(x-y)^{2p}$.

IV. <u>Dạng giải phương trình – Hệ phương trình – Bất phương trình</u> :

<u>Bài 1</u>: Giải các phương trình và bất phương trình sau.

1. $\dfrac{x!-(x-1)!}{(x+1)!}=\dfrac{1}{6}$.

2. $\dfrac{1}{n-2}\left(\dfrac{5}{n+1}.\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!4!}-\dfrac{n.(n-1)!}{12(n-3).(n-4)!2!}\right)\le 5$.

3. $P_2.x^2-P_3.x=8$.

4. $\dfrac{P_x-P_{x-1}}{P_{x+1}}=\dfrac{1}{6}$.

<u>Bài 2</u>: Giải các phương trình và bất phương trình sau.

1. $A_n^3+5A_n^2=2(n+15)$.

2. $3A_n^2-A_{2n}^2+42=0$.

3. $\dfrac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4}.P_3}=210$.

4. $P_x.A_x^2+72=6\left(A_x^2+2P_x\right)$.

5. $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\dfrac{15}{(n-1)!}$.

6. $\dfrac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}}-\dfrac{143}{4P_{n-1}}<0$.

<u>Bài 3</u>: Giải các phương trình và bất phương trình sau.

1. $\dfrac{A_n^4}{A_{n+1}^3-C_n^{n-4}}=\dfrac{24}{23}$.

2. $\dfrac{1}{C_4^x}-\dfrac{1}{C_5^x}=\dfrac{1}{C_6^x}$.

3. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + ... + C_x^{x-10} = 1023$.

4. $x^2 - C_4^x.x + C_3^2.C_3^1 = 0$.

5. $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14$.

6. $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \dfrac{1}{14P_3}$.

7. $\dfrac{P_{n+5}}{(n-k)!} \le 60A_{n+3}^{k+2}$.

8. $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0$.

<u>Bài 4</u>: Giải các hệ phương trình và hệ bất phương trình sau.

1. $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x+1}} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$

2. $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y + 2C_x^y = 80 \end{cases}$

4. $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \dfrac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \dfrac{1}{24} \end{cases}$

VI. <u>Nhị thức newton</u> :

1. Công thức khai triển nhị thức newton : Với mọi $n \in \mathbb{N}$ và với mọ cặp số a, b ta có :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

2. Tính chất :

+ Số các số hạng trong khai triển bằng n + 1.

+ Tổng các số mũ của a và b trong khai triển bằng n.

+ Số hạng tổng quát (thứ k + 1) có dạng : $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ với $k = \overline{0,n}$.

+ Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau : $C_n^k = C_n^{n-k}$.

+ $C_n^0 = C_n^n = 1$ và $C_n^{k-1} + C_n^n = C_{n+1}^k$.

3. Nhận xét : Nếu trong khai triển nhị thức newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì ta sẽ thu được những công thức đặc biệt, chẳng hạn :

+ $\left(1+x\right)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n \quad \Rightarrow \quad C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

+ $\left(1-x\right)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + ... + \left(-1\right)^n C_n^n \quad \Rightarrow \quad C_n^0 - C_n^1 + ... + \left(-1\right)^n C_n^n = 0$.

VII. Các dạng bài tập thường gặp :

1. Dạng 1 : Xác định các hệ số trong khai triển nhị thức newton.

Bài 1: Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển của nhị thức.

1. $\left(x + \dfrac{1}{x^4}\right)^{10}$. **2.** $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^4}\right)^{12}$.

3. $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^5$. **4.** $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^6$.

Bài 2:

1. Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $\left(2x+3y\right)^{25}$.

2. Tìm các số hạng giữa của hai triển $\left(x^3 - xy\right)^{15}$.

Bài 3: Trong khai triển và thu gọn các đơn thức đồng dạng đa thức :

$P\left(x\right) = \left(1+x\right)^9 + \left(1+x\right)^{10} + ... + \left(1+x\right)^{14}$ ta sẽ thu được đa thức $P\left(x\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{14}x^{14}$.

Hãy xác định hệ số a_9.

Bài 4: Cho đa thức $P\left(x\right) = \left(1+x\right) + 2\left(1+x\right)^2 + ... + 20\left(1+x\right)^{20}$ được viết dưới dạng

$P\left(x\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$. Tìm hệ số a_{15}.

Bài 5: Khai triển $P\left(x\right) = \left(x-2\right)^{80} = a_0 + a_1x + ... + a_{80}x^{80}$. Tìm hệ số a_{78}.

Bài 6: Khai triển $P\left(x\right) = \left(3+x\right)^{50} = a_0 + a_1x + ... + a_{50}x^{50}$.

1. Tìm hệ số a_{46}.

2. Tính tổng $S = a_0 + a_1 + ... + a_{50}$.

Bài 7:

1. Tìm số hạng không chứa căn thức trong khai triển của nhị thức $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$.

2. Tìm số mũ n của biểu thức $\left(\sqrt{b}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{12}}\right)^n$. Biết tỉ số giữa các hệ số của số hạng thứ 5 và thứ 3 trong khai triển của nhị thức đó là 7 : 2 . Tìm số hạng thứ 6.

Bài 8: Trong khai triển của nhị thức $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, tìm các số hạng chứa a, b với lũy thừa giống nhau.

Bài 9:

1. Trong khai triển $\left(a\sqrt{a}+\dfrac{1}{a^4}\right)^n$ cho biết hiệu số giữa hệ số của hạng tử thứ 3 và thứ 2 là 44. Tìm n.

2. Cho biết trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$, tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ 2 và thứ 3 bằng 46. Tìm hạng tử không chứa *x*.

3. Trong khai triển $(1+x)^n$ theo lũy thừa tăng của *x*, cho biết $\begin{cases} T_3 = 4T_5 \\ T_4 = \dfrac{40}{3}T_6 \end{cases}$. Tìm n và *x*.

4. Cho khai triển nhị thức $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + ... + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$. Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

2. Dạng 2 : Áp dụng khai triển nhị thức newton để chứng minh hệ thức và tính tổng tổ hợp.

Phương pháp:

+ $a^kC_n^k$ liên quan đến $(1+a)^n$.

+ $C_n^k.C_m^i$ liên quan đến so sánh hệ số của $(1+x)^n.(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$.

+ kC_n^k liên quan đến đạo hàm của $(1+x)^n$. (Nếu có dạng $k(k-1)C_n^k$ hoặc $k^2C_n^k$ thì ta tính đến đạo hàm cấp 2).

+ $\frac{1}{k+1}C_n^k$ hoặc $\frac{1}{(k+1)(k+2)}C_n^k$ liên quan đến tích phân của $(1+x)^n$.

<u>Bài 1</u>: Tính các tổng sau.

1. $S_1 = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$.

2. $S_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ...$

3. $S_3 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$

4. $S_4 = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^kC_n^k + ... + 2^nC_n^n$.

5. $S_5 = C_n^0 + 2^2C_n^2 + 2^4C_n^4 + ...$

<u>Bài 2</u>: Biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số a (a là số tự nhiên) của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

<u>Bài 3</u>: Tính các tổng sau.

1. $S_1 = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$.

2. $S_2 = 3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - ... + C_{16}^{16}$.

<u>Bài 4</u>: Cho $f(x) = (1+x)^n \quad (2 \le n \le \mathbb{Z})$.

1. Tính $f''(1)$.

2. Chứng minh rằng : $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$.

<u>Bài 5</u>: Chứng minh rằng

1. $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{2^n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$.

2. $2C_n^0-2^2\frac{1}{2}C_n^1+2^3\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}\left[1+(-1)^n\right]$.

3. $C_n^1+2C_n^2+C_n^3+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n.2^{n-1}$.

4. $2.1C_n^2+3.2C_n^3+...+n(n-1)C_n^n=n.(n-1)2^{n-2}$.

VIII. Xác suất :

1. Biến cố và xác suất :

a. Biến cố :

+ Không gian mẫu Ω : Là tập các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.

+ Biến cố A : Là tập các kết quả của phép thử làm xảy ra A và $A\subset\Omega$.

+ Biến cố không : ϕ

+ Biến cố chắc chắn : Ω.

+ Biến cố đối của A : $\overline{A}=\Omega\setminus A$.

+ Giao hai biến cố : $A\cap B$.

+ Hợp hai biến cố : $A\cup B$.

+ Hai biến cố xung khắc : $A\cap B=\phi$.

+ Hai biến cố độc lập : Nếu việc xảy ra biến cố này không làm ảnh hưởng đến việc xảy ra biến cố kia.

b. Xác xuất.

+Xác suất của biến cố : $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

+ $0\le P(A)\le 1,\quad P(\Omega)=1,\quad P(\phi)=0$.

+ Quy tắc cộng : Nếu $A\cap B=\phi$ thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Mở rộng : A, B bất kì thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A.B)$.

+ $P(\overline{A})=1-P(A)$.

+ Qui tắc nhân : Nếu A, B độc lập thì $P\left(A.B\right)=P\left(A\right).P\left(B\right)$.

2. <u>Bài tập</u> :

<u>Bài 1</u>: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất của biến cố.

1. Tổng hai mặt xuất hiện bằng 8.

2. Tích hai mặt xuất hiện là số lẻ.

3. Tích hai mặt xuất hiện là số chẵn.

ĐS : *a.* $\frac{5}{36}$. *b.* $\frac{1}{4}$ *c.* $\frac{3}{4}$.

<u>Bài 2</u>: Một lớp học có 25 học sinh, trong đó có 15 học sinh khá môn toán, 16 em học khá môn văn.

1. Tính xác suất để chọn được 2 em học khá cả 2 môn.

2. Tính xác suất để chọn được 3 em học khá môn toán nhưng không học khá môn văn.

ĐS : a. $n\left(A\cap B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)-n\left(A\cup B\right)=15+15-25=17\Rightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{C_7^2}{25}$

b. $\frac{C_8^3}{25}$.

<u>Bài 3</u>: Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố :

1. Tổng hai mặt xuất hiện bằng 7.

2. Các mặt xuất hiện có số chấm bằng nhau.

ĐS : *a.* $\frac{1}{6}$ *b.* $\frac{1}{6}$.

<u>Bài 4</u>: Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ chỉ khác nhau về màu. Lấy ngẫu nhiên một viên bi, rồi lấy tiếp một viên nữa. Tính xác suất của biến cố lần thứ hai lấy ra được viên bi xanh.

ĐS : $\frac{5}{8}$.

<u>Bài 5</u>: Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội, tính xác xuất để.

1. Cả 3 em đều là học sinh giỏi.

2. Có ít nhất một học sinh giỏi.

3. Không có học sinh trung bình.

3. <u>Biến ngẫu nhiên và rời rạc</u>.

a. Biến ngẫu nhiên rời rạc.

+ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

+ $P(X = x_k) = P_k$. $P_1 + P_2 + ... + P_1 = 1$.

b. Kì vọng (Giá trị trung bình)

+ $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$.

c. Phương sai và độ lêch chuẩn.

+ $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - \mu^2$.

+ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

<u>Bài 6</u>: Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền. Mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn của người thứ nhất là 0,8. Tính xác suất làm bàn của người thứ hai, biết rằng xác suất để cả hai người cùng làm bàn 0,56 và xác suất để bị thủng lưới ít nhất một lần là 0,94.

<u>Bài 7</u>: Một hộp đựng 5 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên. Gọi X là số bi đỏ lấy ra. Tính kỳ vọng, phương sai và độ lêch chuẩn của X.

<u>Bài 8</u>: Hai xạ thủ độc lập cùng bắn vào một bia. Mỗi người bắn một viên đạn. Xác suất để xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là 0,7. Xác suất để xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là 0,8. Gọi X là số đạn bắn trúng bia. Tính kỳ vọng và phương sai của X.

IX. <u>Các bài toán trong những kỳ thi đại học</u> :

<u>Bài 1</u>: Cho khai triển nhị thức :

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{\frac{-x}{3}}\right)^n=C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n+C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)+...+C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(n nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n, tìm n và *x*.

(Khối A – 2002)

<u>Bài 2</u>: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n\geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1A_2...A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1A_2...A_{2n}$. Tìm n.

(Khối B – 2002)

<u>Bài 3</u>: Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n=243$. ***(Khối D – 2002)***

<u>Bài 4</u>: Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức niuton của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng

$C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$ và (n là số nguyên dương, $x>0$). ***(Khối A – 2003)***

<u>Bài 5</u>: Cho n là số nguyên dương, tính tổng $C_n^0+\frac{2^2-1}{2}C_n^1+\frac{2^3-1}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

(Khối B – 2003)

<u>Bài 6</u>: Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của

$\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$. ***(Khối D – 2003)***

<u>Bài 7</u>: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$. ***(Khối A – 2004).***

<u>Bài 8</u>: Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó ccos thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình ,dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2. ***(Khối B – 2004)***

<u>Bài 9</u>: Tìm các số hạng không chứa *x* trong khai triển nhị thức niuton của $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x>0$.

(Khối D – 2004)

<u>Bài 10</u>: Tìm số nguyên dương n sao cho

$C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2005$ ***(Khối A – 2005).***

<u>Bài 11</u>: Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

(Khối B – 2005)

<u>Bài 12</u>: Tính giá trị biểu thức $M=\frac{A_{n+1}^4+3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$ với n là số nguyên dương ***(Khối D – 2005)***

<u>Bài 13</u>: Tìm hệ số của số hạng x^{26} trong khai triển nhị thức niuton của $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng

$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$ với n nguyên dương. ***(Khối A – 2006).***

<u>Bài 14</u>: Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\geq 4)$. Biết rằng, số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k\in\{1,2,...,n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

(Khối B – 2006)

<u>Bài 15</u>: Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B, 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy. ***(Khối D – 2006)***

<u>Bài 16</u>: Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ với n là số nguyên dương.

(Khối A – 2007).

<u>Bài 17</u>: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức niuton $(2+x)^n$, biết

$3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048$ với n nguyên dương. ***(Khối B – 2007)***

<u>Bài 18</u>: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$. ***(Khối D – 2007)***

<u>Bài 19</u>: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$.

(Khối A – 2008).

<u>Bài 20</u>: Chứng minh rằng $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$ với n, k là các số nguyên dương và $k \le n$.

(Khối B – 2008)

<u>Bài 21</u>: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.

(Khối D – 2008)

============= **HẾT** ==============