CHUYÊN ĐỀ 1: TỔ HỢP – XÁC SUẤT

- KIẾN THỨC CẦN PHẢI NHỚ:

- Trước tiên ta cần nhớ các công thức:

1. Các công thức về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

cần nhớ	**Hoán vị:**	**Chỉnh hợp**	**Tổ hợp**
Công thức	$p_n = n! \quad n \geq 1$	$A^k{}_n = \dfrac{n!}{(n-k)!} \quad 1 \leq k \leq n$	$C^k{}_n = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \quad 1 \leq k \leq n$
Ví dụ:	Có bao nhiêu cách xếp 4 bạn vào 4 chiếc ghế theo hàng ngang.	từ các số: 2,3,5,7 có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau.	1 tổ có 10 bạn, lấy 4 bạn đi quét nhà. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.
Đáp án:	Ta sắp xếp thứ tự cho 4 bạn $p_4 = 4!$	Ta lấy từ 4 số (2,3,5,7) ra 3 số và sắp xếp thứ tự: $A^3{}_4 = \dfrac{4!}{(4-3)!} \quad = 4!$	Ta lấy từ 10 người ra 4 người và không sắp xếp thứ tự: $C^4{}_{10} = \dfrac{10!}{(10-4)!4!}$

- Tiếp theo ta phải phân biệt được khi nào thì dùng hoán vị, khi nào dùng chỉnh hợp, khi nào dùng tổ hợp và khi nào thì kết hợp hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp (bài toán kết hợp).

Câu hỏi phân loại	**Hoán vị:**	**Chỉnh hợp**	**Tổ hợp**
1. ***Có sắp xếp thứ tự hay không?***	**Có**	**Có**	**Không**
2. ***Nếu sắp xếp thì sắp xếp bao nhiêu phần tử?***	**tất cả (n phần tử)**	**chỉ k phần tử trong n phân tử**	

Với câu hỏi đầu ta nhận biết được tổ hợp, còn với câu hỏi 2 ta nhận biết được hoán vị và chỉnh hợp.

2. Các công thức về nhị thức newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$$

Trong đó ta lưu ý : số hạng thứ k+1 của vế phải trong khai triển trên có công thức tổng quát là:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

3. Các công thức về xác suất:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Trong đó: A- là biến cố.
n(A)- là số phần tử của biến cố A.
$n(\Omega)$ - là số phần tử của không gian mẫu.
$P(A)$ - là xác suất của biến cố A.

- **CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI:**

1. Các dạng toán về: hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp:

<table>
<tr><th>STT</th><th>Các dạng toán</th><th>Hoán vị</th><th>Chỉnh hợp</th><th>Tổ hợp</th></tr>
<tr><td>Dạng 1</td><td>sắp xếp các số
(không có chữ số 0)

VD: Từ các số: 1,2,3,4,5,6</td><td>• Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau
• $P_6 = 6! = ?$</td><td>• có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau.
• $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = ?$</td><td>• có bao nhiêu <u>tập hợp</u> gồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ những số trên
• $C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = ?$</td></tr>
<tr><td>Dạng 2</td><td>Sắp xếp các số
(có chữ số 0)

VD: từ các số: 0, 1,2, 3, 4, 5,6

<u>Phương pháp</u>:
ta tính các số có chữ số đầu tiên là 0
(những số này thực chất coi như không tồn tại).</td><td colspan="3">• Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau
• <u>Giải:</u>
+ các số tự nhiên có 6 chữ số mà chữ số đầu là 0 có dạng: $\overline{0a_1a_2a_3a_4a_5}$
+ có 1 cách chọn chữ số 0 đứng đầu.
+ 5 chữ số còn lại $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ được chọn trong 6 chữ số 1,2,3,4,5,6. vậy có A_6^5 cách chọn: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$
Vậy có: 1. $A_6^5 = A_6^5$ số có 6 chữ số $\overline{0a_1a_2a_3a_4a_5}$ (chữ số đầu là 0).
Mặt khác: từ 7 chữ số 0,1,2,3,4,5,6 thì số tự nhiên có 6 chữ số có thể lập được (kể cả trường hợp chữ số 0 đứng đầu) là:
$A_7^6 = \frac{7!}{(7-6)!} = 7!$
<u>Vậy</u>
số tự nhiên có 6 chữ số (số 0 không đứng đầu) = số tự nhiên có 6 chữ số (kể cả trường hợp số 0 đứng đầu) - số tự nhiên có 6 chữ số mà số đầu tiên là 0
Ta có:
số tự nhiên có 6 chữ số (số 0 không đứng đầu) = A_7^6 - A_6^5</td></tr>
<tr><td>Dạng 3</td><td>Sắp xếp các số
(có điều kiện kèm theo)
VD:
Từ các số: 1,2,3,4,5.</td><td colspan="3">a. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau.
b. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau có số hàng đơn vị là 5.
• <u>Giải:</u>
Gọi số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau có dạng: $\overline{a_1a_2a_3}$
a. + Số chẵn thì tận cùng phải là 2 hoặc 4. Vậy a_3 có 2 cách chọn (hoặc 2 hoặc 4).
+ Sau khi đã chọn 1 số làm a_3 thì $\overline{a_1a_2}$ còn 4 số để mà chọn (trừ số đã chọn làm a_3). vậy số cách chọn $\overline{a_1a_2}$ trong 4 số đó sẽ là chỉnh hợp chập 2</td></tr>
</table>

		của 4: $A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}$ Vậy: số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau là: $2.A_4^2=?$ b. + chữ số hàng đơn vị là 5 nên a_3 có 1 cách chọn. + Vậy còn 4 số: 1,2,3,4 (trừ số 5) để chọn làm $\overline{a_1a_2}$. Vậy số cách chọn $\overline{a_1a_2}$ trong 4 số đó sẽ là chỉnh hợp chập 2 của 4: A_4^2 Vậy: số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà tận cùng là 5 là: $1.A_4^2=?$
Dạng 4	**Bốc đồ vật** VD: Hai hộp chứa các quả cầu: + hộp thứ nhất chứa 3 quả đỏ và 2 quả xanh. + hộp thứ hai chứa 4 quả đỏ và 6 quả xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 quả cầu sao cho: Chú ý: khi giải dạng bài này phải luôn đặt câu hỏi: + có bao nhiêu quả để chọn? + chọn bao nhiêu quả? Chú ý: với bài tính xác suất làm tương tự để tính số phần tử của không gian mẫu và của các biến cố.	a. 3 quả bất kỳ. b. 3 quả đỏ. c. 3 quả xanh. d. 3 quả trong đó có 2 quả đỏ, 1 quả xanh. e. 3 quả trong đó có ít nhất 1 quả đỏ. f. 3 quả trong đó bắt buộc phải có 1 quả xanh. Giải: a. Nếu lấy 3 quả bất kỳ thì có bao nhiêu quả để chọn? (có 3+2+4+6 quả để chọn) và chọn 3 quả trong 15 quả nên số cách chọn là: $C_{15}^3=?$ b. Nếu lấy 3 quả đỏ thì có bao nhiêu quả để chọn? (có 3 + 4 quả đỏ ở cả 2 hộp để chọn) số cách chọn 3 quả đỏ trong 2 hộp là: $C_7^3=?$ c. Tương tự với 3 qủa xanh? d. 3 quả trong đó 2 đỏ, 1 xanh: + số cách chọn 2 quả đỏ ở 2 hộp là: $C_7^2=?$ + số cách chọn 1 quả xanh ở 2 hộp là: $C_8^1=?$ vậy số cách chọn 3 quả trong đó có 2 quả đỏ, 1 quả xanh là: $C_7^2.C_8^1=?$ e. ta chia thành 3 trường hợp: + TH1: 1 đỏ, 2 xanh. + TH2: 2 đỏ, 1 xanh. + TH3: 3 đỏ. Sau đó làm tương tự các phần trên rồi cộng kết quả ở 3 trường hợp lại. f. Làm tương tự phần e.(3 quả trong đó có ít nhất 1 quả màu xanh)
Dạng 5	**sắp xếp vị trí theo hàng** VD: có 10 học sinh	• hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp vị trí theo hàng dọc? • Giải: số cách sắp xếp vị trí theo hàng dọc là số hoán vị của 10 người. KL: có $P_{10}=10!$ cách sắp xếp. (chú ý: sắp xếp theo hàng ngang làm tương tự và được kết quả giống như với hàng dọc).

Dạng 6	**sắp xếp vị trí theo vòng tròn** VD: có 10 học sinh, hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp vị trí theo vòng tròn. *<u>Chú ý:</u> theo tính chất của vòng tròn, nên ta lấy cố định 1 người đầu tiên và sắp xếp 9 người còn lại vào 9 vị trí giống như với sắp xếp cho hàng*	Giải: Lấy cố định người đầu tiên. Như vậy còn 9 người để sắp xếp vào 9 vị trí vậy số cách sắp xếp theo vòng tròn cho 10 người là: $P_9 = 9!$ Chú ý: VD2: làm nhanh, số cách sắp xếp vị trí cho 12 người theo vòng tròn. giải: lấy cố định 1 vị trí, nên còn lại 11 người để sắp xếp vào 11 vị trí. vậy số cách sắp xếp là: $P_{11} = 11!$ VD3: sắp xếp theo vòng tròn 50 người ?
Dạng 7	**viết khai triển nhị thức newton** VD: viết dạng khai triển nhị thức: $\left(2+x\right)^{12}$ Phương pháp: đơn thuần áp dụng công thức.	Giải: $\left(2+x\right)^{12} = C_{12}^{0}2^{12} + C_{12}^{1}2^{11}.x + ... + C_{12}^{12}x^{12}$ Dùng máy tính (hoặc tính bằng tay) để tính các tổ hợp trong khai triển trên và thay vào vế phải của khai triển trên ta được kết quả.
Dạng 8	**Các bài toán liên quan đến khai triển nhị thức newton** VD1: cho biết số hạng thứ 10 trong khai triển: $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{12}$ VD2: Cho biết hệ số của số hạng thứ 8 trong khai triển: $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{22}$	**<u>Phương pháp giải:</u>** Tất cả đều dựa vào công thức tổng quát của số hạng thứ k+1 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ + Trong công thức trên có 2 ẩn là: k và n. tuỳ đầu bài cho ta tìm được k hoặc tìm được n, từ đó dựa vào đầu bài tìm ra ẩn còn lại **Giải:** VD1: số hạng thứ 10 tức: $T_{k+1} = T_{10}$ từ đó suy ra: k+1=10 vậy: <u>k=9</u>. dễ thấy <u>n=12.</u> Thay k=9, n=12 và a=2/x, b=x vào công thức: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ ta có: số hạng thứ 10 trong khai triển có dạng: $T_{10} = C_{12}^{9}\left(\frac{2}{x}\right)^{12-9} x^9 = C_{12}^{9}2^3.x^6$ VD2: Số hạng thứ 8 nên ta biết được: $T_{k+1} = T_8$ suy ra k+1=8 vậy k=7. Dễ thấy n=22. Thay k=7, n=22 và a=2/x, b=x vào công thức: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ ta có: số hạng thứ 8 trong khai triển có dạng: $T_8 = C_{22}^{7}\left(\frac{2}{x}\right)^{22-7} x^7 = C_{22}^{7}2^{15}.x^{7-15} = C_{22}^{7}2^{15}.x^{-8}$ vậy hệ số của số hạng thứ 8 là: $C_{22}^{7}2^{15} = ?$

	VD3: cho biết hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển: $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{22}$	VD3: dễ thấy n=22. ta tìm k. Số hạng thứ k+1 có dạng: $T_{k+1}=C_{22}^{k}\left(\frac{2}{x}\right)^{22-k}x^{k}=C_{22}^{k}2^{22-k}x^{k-22+k}=C_{22}^{k}2^{22-k}x^{2k-22}$ Do số hạng cần tìm chứa x^2 nên ta có: $x^{2k-22}=x^{2}\Leftrightarrow 2k-22=2\Leftrightarrow k=12$ Vậy số hạng đó có dạng: $T_{12+1}=C_{22}^{12}2^{22-12}x^{2.12-22}=C_{22}^{12}2^{10}x^{2}$ Vậy hệ số là: $C_{22}^{12}2^{10}$
Dạng 9	**Tính xác suất của 1 biến cố**	Phương pháp: Hoàn toàn dựa vào 7 dạng bài tập đầu để tính số phần tử của biến cố và số phần tử của không gian mẫu. và áp dụng công thức: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ để làm.