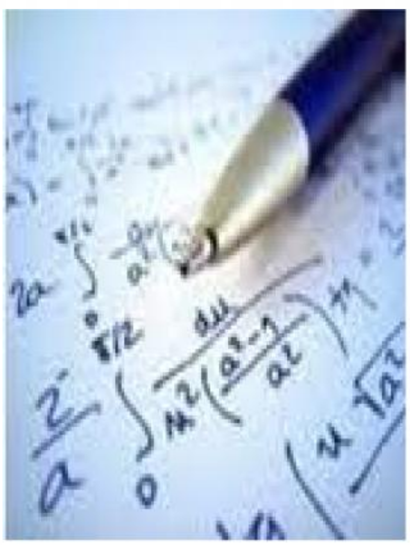
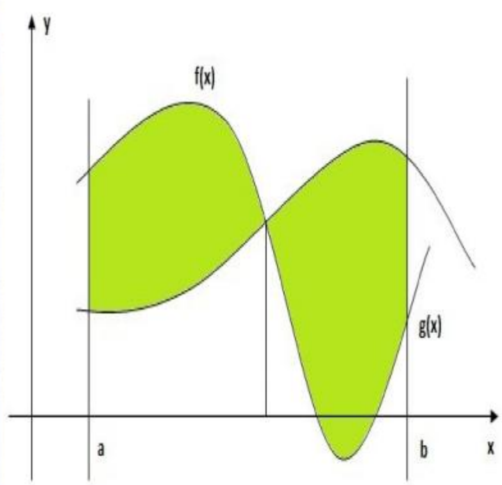
CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI
TÍCH PHÂN

Dùng cho học sinh lớp 12-Ôn thi Đại học và Cao đẳng





Don't try to fix the students, fix ourselves first. The good teacher makes the poor student good and the good student superior. When our students fail, we, as teachers, too, have failed.

HUẾ, 01/2013

MỤC LỤC

A. NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

• Cho hàm số *f* xác định trên K. Hàm số *F* đgl **nguyên hàm** của *f* trên K nếu:

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in K$$

• Nếu *F(x)* là một nguyên hàm của *f(x)* trên K thì **họ nguyên hàm** của *f(x)* trên K là:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, C ∈ R.

• Mọi hàm số *f(x)* liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

2. Tính chất

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (k \neq 0)$

3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

• $\int 0dx = C$ • $\int dx = x + C$ • $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$ • $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$ • $\int e^x dx = e^x + C$	• $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$ • $\int \cos x dx = \sin x + C$ • $\int \sin x dx = -\cos x + C$ • $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ • $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$
• $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \ (a \neq 0)$ • $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C \ (a \neq 0)$	• $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C, (a \neq 0)$ • $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$

4. Phương pháp tính nguyên hàm

a) Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f\left[u(x)\right].u'(x)dx = F\left[u(x)\right] + C$$

b) Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Nếu *u, v* là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì: $\int udv = uv - \int vdu$

B. TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

• Cho hàm số *f* liên tục trên K và $a, b \in K$. Nếu F là một nguyên hàm của *f* trên K thì:

F(b) – F(a) đgl **tích phân của *f* từ *a* đến *b*** và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

• Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho *x*, tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ... = F(b) - F(a)$$

• **Ý nghĩa hình học**: Nếu hàm số *y = f(x)* liên tục và không âm trên đoạn [a; b] thì diện tích *S* của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của *y = f(x)*, trục Ox và hai đường thẳng *x = a, x = b* là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Tính chất của tích phân

• $\int_0^0 f(x)dx = 0$ • $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

• $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (*k: const*)

• $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ • $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- Nếu *f(x)* ≥ 0 trên [a; b] thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Nếu *f(x)* $\geq$ *g(x)* trên [a; b] thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

3. Phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến số

$$\boxed{\int_a^b f\left[u(x)\right].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du}$$

trong đó: $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K, $y = f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K, $a, b \in K$.

b) Phương pháp tích phân từng phần

Nếu *u, v* là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $K, a, b \in K$ thì:

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$$

Chú ý:

- *Cần xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm.*
- Trong phương pháp tích phân từng phần, ta cần chọn sao cho $\int_a^b vdu$ dễ tính hơn $\int_a^b udv$. Trong phần sau sẽ trình bày kỉ thuật lựa chọn u và dv.

C. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN:

VẤN ĐỀ 1: PHÉP THAY BIẾN $t=\sqrt[n]{f(x)}$

Phương pháp: *Khi hàm dưới dấu tích phân có chứa biểu thức có dạng* $\sqrt[n]{f(x)}$. *Lúc đó trong nhiều trường hợp (chứ không phải mọi trường hợp), ta có thể đổi biến bằng cách*

- *Bước 1: Đặt* $t=\sqrt[n]{f(x)}\Rightarrow t^n=f(x)\Rightarrow nt^{n-1}dt=f'(x)dx$
- *Bước 2: Ghi nhớ "Đổi biến thì phải đổi cân"*

BÀI TẬP MẪU: Tính các tích phân sau

<u>Bài 1</u>: Tính $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

Giải:

Đặt t = $\sqrt{1-x^2}$ $\Leftrightarrow$ $t^2 = 1 - x^2$ $\Rightarrow$ xdx = -tdt

Đổi cận:

x	0	1
t	1	0

Khi đó: $I=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1\left(1-t^2\right).t.tdt=\int_0^1\left(t^2-t^4\right)dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{15}.$

<u>Bài 2</u>: Tính $I=\int_0^1 x^3\sqrt[3]{1-x^4}\,dx$

Giải:

Đặt t = $\sqrt[3]{1-x^4}\Rightarrow t^3=1-x^4\Rightarrow x^3dx=-\frac{3}{4}t^2dt$

Đổi cận:

x	0	1
t	1	0

Khi đó: $I=\int_0^1 x^3\sqrt[3]{1-x^4}dx=\frac{3}{4}\int_0^1 t^3dt=\frac{3}{16}t^4\Big|_0^1=\frac{3}{16}$.

Bài 3: Tính $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

Giải:

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow 2tdt=\frac{dx}{x}$

Đổi cận:

x	1	e
t	1	$\sqrt{2}$

Khi đó: $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\int_1^{\sqrt{2}} t.2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=2\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}$.

Bài 4: Tính $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$

Giải:

Ta có: $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}=\int_1^2 \frac{x^2dx}{x^3\sqrt{1+x^3}}$

Đặt $t=\sqrt{1+x^3}\Rightarrow t^2=1+x^3\Rightarrow 2tdt=3x^2dx\Rightarrow x^2dx=\frac{2tdt}{3}$

Đổi cận:

x	1	2
t	$\sqrt{2}$	3

Khi đó:

$$I=\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}=\int_1^2\frac{x^2dx}{x^3\sqrt{1+x^3}}=\frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^3\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^3=\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^3=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$$

Bài 5: Tính $I=\int_{\sqrt{7}}^4\frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

Giải:

- Đặt $t=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow t^2=x^2+9\left(t>0\right)\Rightarrow tdt=xdx;\frac{dx}{x}=\frac{tdt}{x^2}=\frac{tdt}{t^2-9}$

  Đổi cận:

x	$\sqrt{7}$	4
t	4	5

  Khi đó: $\int_4^5\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Big|_4^5=\frac{1}{6}\ln\frac{7}{4}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG: Tính các tích phân sau

1) $\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$ $\quad ĐS:\frac{141}{20}$

2) $\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x+1\right)^3}}dx$ $\quad ĐS:-1+\sqrt{2}$

3) $\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^x}{\left(10-e^x\right)\sqrt{e^x-1}}dx$ $\quad ĐS:\frac{20}{3}$

4) $\int_0^{\sqrt[4]{7}} \frac{x^3}{1+\sqrt[4]{1+x^4}}dx$ $ĐS: \frac{3}{8}+\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}$

5) $\int_{-3}^{-8} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx$ $ĐS: \ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}$

6) $\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx\,(A-2004)$ $ĐS: \frac{11}{3}-4\ln 2$

7) $\int_1^e \frac{\ln x.\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx$ $(Khối\, B-2004).$ $ĐS: \frac{3}{8}\left(3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{2}\right)$

$HD: Đặt\, t=\sqrt[3]{2+\ln^2 x}$

8) $\int_0^{\sqrt{3}} e^{\sqrt{x^2+1}}.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ $ĐS: e^2-e$

9) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}.$ (Khối A-2003). $Đặt\, t=\sqrt{x^2+4}$ $ĐS: \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$

10) $\int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}}dx$.(Dự bị khối D-2005) $Đặt\, t=\sqrt{\ln x+1}.$ $ĐS: \frac{76}{15}$

11) $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)dx.$ $HD: I=I_1+I_2$ $ĐS: e-\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12) $\int_1^2 \frac{x\sqrt{x-1}}{x-10}dx.$ $t=\sqrt{x-1}.$ $DS: \frac{62}{3}-30\ln 2.$

13) $\int_0^1 x^2\sin x^3dx+\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

Hướng dẫn : $I=\int_0^1 x^2\sin x^3dx+\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

Ta tính $I_1=\int_0^1 x^2\sin x^3dx$ đặt $t=x^3$ ta tính được $I_1 = -1/3(\cos 1 - \sin 1)$

Ta tính $I_2=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ đặt $t=\sqrt{x}$ ta tính được $I_2 = 2\int_0^1 (1-\frac{1}{1+t^2})dt=2(1-\frac{\pi}{4})=2-\frac{\pi}{2}$

ĐS :-1/3(cos1 - 1)$+2-\dfrac{\pi}{2}$

14) $\displaystyle\int_2^5 \frac{\ln(\sqrt{x-1}+1)}{x-1+\sqrt{x-1}}dx$

Hướng dẫn :Đặt $t=\sqrt{x-1}+1$. **Đáp số:** $\ln^2 3-\ln^2 2$

15) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$

Hướng dẫn :Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow 2tdt=4dx$.

$$I=\int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}=\frac{1}{2}\int_3^5 \frac{tdt}{\frac{t^2-1}{2}+1+t}=\int_3^5 \frac{tdt}{\left(t+1\right)^2}=\int_3^5 \frac{dt}{t+1}-\int_3^5 \frac{dt}{\left(t+1\right)^2}=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{12}$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

VẤN ĐỀ 2: TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

DẤU HIỆU	CÁCH ĐẶT
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\sin t \text{ với } -\pi/2\le t\le \pi/2 \\ x=\lvert a\rvert\cos t \text{ với } 0\le t\le \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\sin t} \text{ với t} \in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\} \\ x=\dfrac{\lvert a\rvert}{\cos t} \text{ với t} \in\left[0;\pi\right]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\tan t \text{ với } -\pi/2< t< \pi/2 \\ x=\lvert a\rvert\cos t \text{ với } 0< t< \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$	*Đặt* $x=a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t, t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

DẠNG 1: $\sqrt{a^2-x^2}$

BÀI TẬP MẪU: Tính các tích phân sau

Bài 1: Tính $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Giải:

Đặt x = asint, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. $\Rightarrow$ dx = acostdt

Đổi cận:

x	0	a

t	0	$\frac{\pi}{2}$

Khi đó: $I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}.acostdt$

$$= a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tcos^2tdt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-cos4t\right)dt = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}$$

<u>Bài 2</u>: Tính $I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

Giải:

Đặt x = cost, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. $\Rightarrow$ dx = - sint dt

Đổi cận:

x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
t	1	0

Khi đó: $I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 t}.sint}{cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left|\sin t\right|.\sin t}{cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{cos^2 t}dt =$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{cos^2 t}-1\right)dt = \left(\tan t - t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}$. (vì $t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ nên sint $\geq 0 \Rightarrow \left|\sin t\right| = \sin t$)

<u>Bài 3</u>: Tính $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

Giải:

Đặt x = sint, $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. $\Rightarrow$ dx = costdt

Đổi cận:

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Khi đó: $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}.costdt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tcos^2tdt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt =$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-cos4t\right)dt = \frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

Tính các tích phân sau:

1) $\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx$; $HD: Đặt\ x = 2\sin t$ $ĐS: \frac{\pi}{3}$

2) $\int_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}dx$; $HD: Đặt\ x = 3\cos t$ $ĐS: \frac{\sqrt{3}+3}{27}$

3) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $HD: Đặt\ x = \sin t$ $ĐS: \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

4) $\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2}dx$; $HD: Đặt\ x = 4\sin t$

5) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$ $HD: Đặt\ x = \sin t$

6) $\int_1^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-\left(x-1\right)^2}}dx$; $HD: Đặt\ x-1 = 3\sin t$

$7)\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{x-x^2}\,dx.\qquad ĐS:\dfrac{\pi}{16}$

$HD:\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{x-x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}\,dx.\qquad Đặt: 2x-1=\sin t$

DẠNG 2: $\sqrt{x^2-a^2}$

Tính các tích phân sau:

$1)\int_{\sqrt[3]{2}}^{6}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-9}}dx$; $\qquad HD: Đặt\ x=\dfrac{3}{\sin t}\qquad ĐS:\dfrac{\pi}{36}$

$2)\int_{2}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$; $\qquad HD: Đặt\ x=\dfrac{1}{\sin t}\qquad ĐS:\dfrac{\pi}{6}$

$3)\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$; $\qquad HD: Đặt\ x=\dfrac{1}{\cos t}$

$4)\int_{1}^{\frac{5}{2}}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$; $\qquad HD: Đặt\ x=\dfrac{1}{\cos t}$

DẠNG 3: $\sqrt{x^2+a^2}$

BÀI TẬP MẪU:

<u>Bài 1</u>: Tính $I=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{x^2+2x+4}dx$

Giải:

Ta có: $\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{x^2+2x+4}dx=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right).\Rightarrow dx=\sqrt{3}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

Đổi cận:

x	-1	0

t	0	$\frac{\pi}{6}$

Khi đó: $I = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+4}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\left. t \right|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$

<u>Bài 2</u>: Tính $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{1+x^8}dx$

Giải:

Ta có: $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{1+x^8}dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{1+\left(x^4\right)^2}dx$

Đặt $x^4 = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right). \Rightarrow x^3dx = \frac{1}{4}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

Đổi cận:

x	0	0
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Khi đó: $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{1+x^8}dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{1+\left(x^4\right)^2}dx = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{4}\left. t \right|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}.$

<u>Bài 3</u>: Tính $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+\sin^2 x}dx$

Giải:

Đặt $\sin x = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow cosxdx = \left(1+\tan^2 t\right)dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

1) $\int_0^4\frac{1}{4+x^2}dx$; $HD: Đặt\ x=2\tan t$ $ĐS: \frac{\pi}{8}$

2) $\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx$; $HD: Đặt\ x=3\tan t$

3) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$; $HD: Đặt\ x=\tan t$

4) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx$; $HD: Đặt\ x=\tan t$ $ĐS: \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

5) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{9+2x^2}}{x^2}dx$; $HD: Đặt\ \sqrt{2}x=3\tan t$ $ĐS: \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

6) $\int_0^1\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx$; $HD: Đặt\ x=\tan t\quad hoặc\ u=x^2+1$

7) $\int_1^3\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+3}}dx$; $HD: Đặt\ x=\sqrt{3}\tan t$

8) $\int_0^1\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ $ĐS: \frac{\pi+2}{8}$

9) $\int_1^3\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$ $Đặt\ x=\tan t.$ $ĐS: \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}$

10) $\int_0^1 \frac{x}{x^4+x^2+1}dx.$ $ĐS: \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$

HD: Biến đổi tích phân đã cho về dạng: $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1}$

DẠNG 4: $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

Tính tích phân sau:

$1)\int_{-1}^{0}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\quad HD: x=\cos 2t$ $\qquad 2)\int_{0}^{\frac{5}{2}}\sqrt{\dfrac{5+x}{5-x}}$ $\quad HD: x=5\cos 2t$

DẠNG 5: $\sqrt{(x-a)(b-x)}$

Tính tích phân sau: $\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x-1)(2-x)}.$ $\quad$ *Đặt* $x=1+\sin^2 t.$ $\quad$ $ĐS: \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$

BÀI TẬP BỔ SUNG

VẤN ĐỀ 3: TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

Dạng 1: Biến đổi lượng giác về tích phân cơ bản

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x} dx$

Giải:

Đặt t = tanx ; $\Rightarrow dt = \frac{1}{cos^2 x} dx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right) \frac{1}{cos^2 x} dx = \int_0^1 \left(1+t^2\right) dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan 4x dx$

Giải:

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 4x}{cos 4x} dx$

Đặt t = cos4x ; $\Rightarrow dt = -4 sin 4x dx \Rightarrow \sin 4x dx = -\frac{dt}{4}$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{12}$
t	1	$\frac{1}{2}$

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{12}}\tan 4xdx=\int_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{\sin 4x}{cos4x}dx=-\frac{1}{4}\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}\ln 2.$

Ví dụ 3: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^5xdx$

Giải:

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^5xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^4xcoxdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2x\right)^2coxdx$

Đặt t = sinx ; $\Rightarrow dt=cosxdx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Khi đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^5xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2x\right)^2coxdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-t^2\right)^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{15}.$$

Ví dụ 4: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3xdx$

Giải:

Đặt t = tanx ; $\Rightarrow dt=\left(1+\tan^2x\right)dx=\left(1+t^2\right)dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{t^2+1}$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

Khi đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 xdx=\int_0^1\frac{t^3}{t^2+1}dt=\int_0^1\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^1 tdt-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t}{t^2+1}dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right).$$

Ví dụ 5: Tính $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}cos^3xdx$

Giải:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}cos^3xdx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}cos^2x.cosxdx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)cosxdx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)$$

$$=\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}=\frac{5}{24}$$

Ví dụ 7: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sin^4 x+cos^4x}dx$

Giải:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sin^4 x+cos^4x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin 2xcos2x}{\sin^4 x+cos^4x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin 2xcos2x}{1-2\sin^2 xcos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin 2xcos2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}d\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=-\ln\left|1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

Ví dụ 8: Tính $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3x}{1+\sin x}dx$

Giải:

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3x}{1+\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^2x}{1+\sin x}cosxdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin^2x\right)}{1+\sin x}cosxdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin x\right)cosxdx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(cosx-cosx\sin x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}cosxdx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=\left(\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 9: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3xdx$

Giải:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-cos^2x\right)d\left(cosx\right)=-\left(cosx-\frac{cos^3x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Ví dụ 10: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cosx}$

Giải: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cosx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2cos^2\frac{x}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

Ví dụ 11: Tính $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin 2x}$

Giải:

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin 2x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(\sin x+cosx\right)^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left[\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 12: Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$

Giải:

Ta có: $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^2 x}=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{1-cos^2 x}$

- Đặt $t=cosx\Rightarrow dt=-\sin xdx$

Đổi cận:

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	0

Khi đó:

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-dt}{1-t^2}=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t+1}=-\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

Dạng 2: Tích phân dạng $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$

Cách giải: Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$, đưa về tích phân hữu tỉ

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos x+\sin x+2}$ **ĐS:** $\ln\frac{3}{2}$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\cos x + 2\sin x + 2}$ **ĐS:** $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$

Ví dụ 3: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x + 3\sin 2x + 2}$ **ĐS:** $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

Ví dụ 4: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin 2x + 2}$ **ĐS:** $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$

Ví dụ 5: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\sin x}{2-\cos x}dx$ **ĐS:** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} + 2\ln 2$

Dạng 3: Tích phân dạng $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}$

Cách giải:

Cách 1: Đặt $\cos^2 x$ ở mẫu làm thừa số chung sau đó đặt $t = \tan x$

Cách 2: hạ bậc đưa về dạng 2

Ví dụ 1:Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

Giải:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{(\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}cosx\right)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin^2 x + \sin xcosx} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2dx}{(cos^2 x)\left(\sqrt{3}\tan^2 x + \tan x\right)} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2d(\tan x)}{(\tan x)\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)} = 2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\tan x)}{\left(\sqrt{3}\tan x\right)\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)} =$$

$$= 2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}\tan x} - \frac{1}{\sqrt{3}\tan x + 1}\right) d(\tan x) =$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\left(\tan x\right)}{\tan x} - 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)}{\sqrt{3}\tan x + 1} = 2\left(\ln\left|\tan x\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - 2\left(\ln\left|\sqrt{3}\tan x + 1\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\left(\ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 2\left(\ln 4 - \ln 2\right) = 2\ln 3 - 2\ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x}$ **ĐS:** $\frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}$

Ví dụ 3: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x}$ **ĐS:** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Dạng 4: Tích phân dạng $I_1 = \int f(\sin x)\cos x dx;\ \ I_2 = \int f(\cos x)\sin x dx$

A. Cách giải:

- **Đối với** I_1 đặt $t = \sin x$
- **Đối với** I_2 đặt $t = \cos x$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x cox dx$

Giải:

Đặt t = sinx ; $\Rightarrow dt = cosxdx$

Đổi cận:

X	0	$\frac{\pi}{2}$
T	0	1

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x cox dx = \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x cosx\left(1+cosx\right)^2 dx$

Giải:

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x cosx\left(1+cosx\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x cosx\left(1+2cosx+cos^2 x\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cosx+2cos^2 x+cos^3 x\right).\sin x dx$$

- Đặt $t = cosx \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

Khi đó: $I = -\int_1^0 \left(t+2t^2+t^3\right)dt = \int_0^1 \left(t+2t^2+t^3\right)dt = \left(\frac{t^2}{2}+\frac{2t^3}{3}+\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{17}{12}$

B. Các trường hợp đặt biệt:

1. Tích phân có dạng $\int \sin^m x.\cos^n x dx$ **với** $m,n \in \mathbb{Z}^+$

- *Nếu m lẻ hoặc n lẻ thì đặt* $t =$ *hàm có chứa mũ chẵn*
- *Nếu m và n đều chẵn thì hạ bậc*

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x cos^3 x dx$

Giải:

Đặt t = sinx ; $\Rightarrow dt = cosxdx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Khi đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x cos^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\left(1-\sin^2 x\right)cosxdx=\int_0^1 t^3\left(1-t^2\right)dt=\int_0^1\left(t^3-t^5\right)dt=\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 xdx$ **ĐS:** $\frac{2}{15}$

Ví dụ 3: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^3 xdx$ **ĐS:** $\frac{2}{35}$

Ví dụ 4: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^4 xdx$ **ĐS:** $\frac{\pi}{32}$

2. Tích phân dạng $I_1=\int\frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx;\quad I_1=\int\frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx;\quad m,n\in\mathbb{Z}^+$

- Nếu m lẻ thì $\left[\begin{array}{l} \textit{đặt}\ t=\cos x \text{ đối với } \mathrm{I}_1 \\ \textit{đặt}\ t=\sin x \text{ đối với } \mathrm{I}_2 \end{array}\right.$
- Nếu m và n đều chẵn và
  - $m<n$ thì đưa về tan và cot
  - $m>n$ thì đổi hàm ở tử theo mẫu sau đó tách tích phân và hạ bậc
- Nếu m chẵn và n lẻ thì dùng tích phân từng phần

Ví dụ 1: Tính $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3 x}{sin^2 x}dx$

Giải:

Đặt t = sinx ; $\Rightarrow dt=cosxdx$

Đổi cận:

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
T	$\frac{1}{2}$	1

Khi đó:

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3x}{\sin^2x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin^2x)}{\sin^2x}cosxdx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-t^2}{t^2}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt=\left(-\frac{1}{t}-t\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3x}{\cos^2x}dx$ **ĐS:** $\frac{1}{2}$

Ví dụ 3: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3x}{\cos^5x}dx$ **ĐS:** $\frac{9}{4}$

Ví dụ 4: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2x}{\cos^4x}dx$ **ĐS:** $\frac{1}{3}$

Ví dụ 5: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2x}{\cos^3x}dx$. **Hướng dẫn:** $u=\sin x,\ dv=\frac{\sin x}{\cos^3x}dx$ **ĐS:** $\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$

Dạng 5: Tích phân chứa $\int\left(\tan x;\cos x\right)dx;\ \int\left(\cot x;\sin x\right)dx$

Cách giải:

- Đổi về sin và cos
- Đặt t bằng **một** hàm ở mẫu

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{1+\cos x}dx$

Hướng dẫn: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x\left(1+\cos x\right)}dx$. Đặt $t=\cos x$ ĐS: $\ln\frac{3}{2}$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+4\cos^4 x}dx$

Hướng dẫn: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+4\cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x.\cos^3 x}{\cos^4 x\left(1+4\cos^4 x\right)}dx$. Đặt $t=1+4\cos^4 x$ ĐS: $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{5}$

Ví dụ 3: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos 3x}dx$

Hướng dẫn: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos 3x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)}dx$ ĐS: $-\frac{1}{6}\ln 2$

Dạng 6: Đổi biến bất kì

Ví dụ 1: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$

Giải:

Đặt t = $\sin^2$x ; $\Rightarrow dt = \sin 2x dx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin 2x dx = \int_0^1 e^t dt = e^t\Big|_0^1 = e-1.$

Ví dụ 2: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$

Giải:

Đặt t = 1 + $\cos^2$x ; $\Rightarrow dt = -\sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = -dt$

Đổi cận:

X	0	$\frac{\pi}{2}$
T	2	1

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+cos^2 x} dx = -\int_2^1 \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \left(\ln|t|\right)\Big|_1^2 = \ln 2.$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - cosx}{\sin x + cosx}\right) dx$

Giải:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - cosx}{\sin x + cosx}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\left(\sin x + cosx\right)}{\sin x + cosx} = -\left(\ln|\sin x + cosx|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\sqrt{2}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1+cos^2 x} dx$

Giải: Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{1+cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x cos2x}{1+cos^2 x} dx$

- Đặt $t = 1 + cos^2 x \Rightarrow dt = -2\sin x cosx dx = -\sin 2x dx$
- $cos^2 x = t - 1 \Rightarrow cos2x = 2cos^2 x - 1 = 2\left(t-1\right) - 1 = 2t - 3$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$

t	2	$\frac{3}{2}$

Khi đó:

$$I=\int_{2}^{\frac{3}{2}}\frac{-2\left(2t-3\right)dt}{t}=\int_{2}^{\frac{3}{2}}\left(-4+\frac{6}{t}\right)dt=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(4-\frac{6}{t}\right)dt=\left(4t-6\ln\left|t\right|\right)\Big|_{3/2}^{2}=$$

$$=4\left(2-\frac{3}{2}\right)-6\left(\ln 2-\ln\frac{3}{2}\right)=2-6\ln\frac{4}{3}$$

Cách 2: Sử dụng công thức hạ bậc, mẫu xuất hiện $3+\cos 2x$, đặt $t=3+\cos 2x$

Ví dụ 5: Tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x+\cos x+2\right)^{3}}dx$

Giải:

Ta có: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x+\cos x+2\right)^{3}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)}{\left(\sin x+\cos x+2\right)^{3}}dx$

- Đặt $t=\cos x+\sin x+2\Rightarrow dt=\left(\cos x-\sin x\right)dx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	2	$2+\sqrt{2}$

Khi đó:

$$I=\int_{0}^{2+\sqrt{2}}\frac{\left(t-2\right)}{t^{3}}dt=\int_{0}^{2+\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t^{2}}-\frac{2}{t^{3}}\right)dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}\right)\Big|_{0}^{2+\sqrt{2}}=-\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{6+4\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{1-2-\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}+\frac{2}{9}=\frac{2}{9}-\frac{1+\sqrt{2}}{2\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\frac{2}{9}-\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{4\sqrt{2}+4-9}{18\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{4\sqrt{2}-5}{18\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

Ví dụ 6: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{cos2x}{\sin x+cosx+2}dx$

Giải:

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{cos2x}{\sin x+cosx+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(cosx-\sin x\right)\left(cosx+\sin x\right)}{\sin x+cosx+2}dx$

- Đặt $t=cosx+\sin x+2\Rightarrow dt=\left(cosx-\sin x\right)dx$

  Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	2	$2+\sqrt{2}$

  Khi đó:

$$I=\int_0^{2+\sqrt{2}}\frac{\left(t-2\right)}{t}dt=\int_0^{2+\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{t}\right)dt=\left(t-2\ln\left|t\right|\right)\Big|_0^{2+\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}-2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)-3+2\ln3=$$

$$=\sqrt{2}-1+2\left[\ln3-\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right]=\sqrt{2}-1+2\ln\frac{3}{2+\sqrt{2}}$$

Ví dụ 7: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2x\left(1+\sin^2x\right)^3dx$

Giải:

- Đặt $t=1+\sin^2x\Rightarrow dt=2\sin xcosxdx=\sin2xdx$

  Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	2

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\left(1+\sin^2 x\right)^3 dx=\int_1^2 t^3dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_1^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ví dụ 8: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\tan x}$

Giải:

- Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{cos^2x}dx=\left(1+\tan^2 x\right)dx\Rightarrow dx=\frac{dt}{1+\tan^2 x}=\frac{dt}{1+t^2}$

  Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	1

Khi đó: $I=\int_0^1\frac{dt}{\left(1+t\right)\left(1+t^2\right)}=\int_0^1\left[\frac{1}{2\left(1+t\right)}-\frac{t-1}{2\left(1+t^2\right)}\right]dt=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t}}_{J_1}-\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1\frac{tdt}{t^2+1}}_{J_2}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}}_{J_3}$

✓ Tính: $J_1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t+1}=\left.\frac{1}{2}\ln\left|t+1\right|\right|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$

✓ Tính: $J_2=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{tdt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}=\left.\frac{1}{4}\ln\left|t^2+1\right|\right|_0^1=\frac{\ln 2}{4}$

✓ Tính: $J_3=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{\pi}{8}$ (với t = tanu)

Vậy $I=\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 2}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}+\frac{\ln 2}{4}$

Ví dụ 9: Tính $I=\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\sin x+cosx\right)^2}dx$

Giải:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(\sin x+cosx\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx=-\frac{1}{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG: Tính tích phân sau:

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}dx$ $\quad HD: Đặt\ t=\sin x,\quad ĐS: \ln\frac{3\left(6-\sqrt{3}\right)}{5\left(4-\sqrt{3}\right)}$

$BTTT: \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-7\sin x+12}dx$

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx\quad (Khối\ B-2003)$ $\quad ĐS: \frac{1}{2}\ln 2$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx\quad (TN-2006)$ $\quad ĐS: \ln\frac{4}{3}$

4 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2\left(1+\sin x+\cos x\right)}dx.\ (Khối\ B-2008)$

$HD: Đặt\ t=\sin x+\cos x.$ $\quad ĐS: \frac{4-3\sqrt{2}}{4}$

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx.\ (Khối\ A-2008)$ $\quad HD: Đặt\ t=\tan x.$ $\quad ĐS: \frac{10\sqrt{3}}{27}-\frac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$ (Khối A-2006). $\quad HD: Đặt\ t=1+3\sin^2 x.$ $\quad ĐS: \frac{2}{3}$

7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ (Khối A-2005). $\quad HD: Đặt\ t=\sqrt{1+3\cos x}.$ $\quad ĐS: \frac{34}{27}$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x.\cos x}{1+\cos x}dx$ (Khối B-2005). $HD: Đặt\, t = 1+\cos x.$ $ĐS: 2\ln 2 - 1$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 xdx$ (Khối A-2009). $ĐS: \frac{\pi}{4}$

$HD: \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x - 1\right)\cos^2 xd = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^5 x - \cos^2 x\right)dx$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} + \cos x\right)\cos xdx.$ (Khối D-2004). $ĐS: e - 1 + \frac{\pi}{4}$

11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2xdx}{\cos^2 x\sqrt{1+\cos^2 x}}.$ $HD: Đặt\, t = \sqrt{1+\cos^2 x}.$ $ĐS: \sqrt{5} - \sqrt{3}$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan(x-\frac{\pi}{4})}{\cos 2x}dx.$ $HD\;\; I = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^2 x + 1}{(\tan x+1)^2}dx.$ $t = \tan x.$ $DS: \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

12. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx$

Hướng dẫn: $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+x^2}\sin xdx - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin xdx = I_1 - I_2$

Áp dụng hàm lẻ, đặt x=$-t$ thì $I_1 = 0$, tích phân từng phần I_2 được kết quả.

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx.$

Hướng dẫn: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)d\left(\sin 2x\right) = 0$

14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{2-\sin^2 x}dx.$ $DS: 2 + 6\ln\frac{3}{4}.$

Hướng dẫn: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sin 2x.\cos 2x}{3+\cos 2x}dx$. Đặt: t = 3 + cos2x ⇒ dt = -2sin2xdx.

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}dx$.

Hướng dẫn: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2}\right)-2\left(\cos x-\sin x\right)-\sqrt{2}}{\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2}\right)}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos x-\sin x\right)}{\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2}\right)}dx-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}=...=\frac{\pi}{2}-2\tan\frac{\pi}{8}$$

16) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x.\tan x dx.$ $\quad HD: I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$

17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^2 x dx.$ $\quad HD:$ *Đặt* $t=\sin x$

$BTTT:\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin^2 x dx.$

BÀI TẬP BỔ SUNG

Bài 1: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x+\sin x}{cos^2 x}dx$

Giải:

Ta có: $I=\int_0^1\frac{x+\sin x}{cos^2x}dx=\underbrace{\int_0^1\frac{xdx}{cos^2x}}_{I_1}+\underbrace{\int_0^1\frac{\sin x}{cos^2x}dx}_{I_2}$

✓ Tính $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{cos^2x}$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{1}{cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta được:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{cos^2 x} = x\tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{cosx}dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(cosx)}{cosx} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \left(\ln|cosx|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln\frac{1}{2}$$

✓ Tính $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-d(cosx)}{cos^2 x} = \frac{1}{cosx}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 - 1 = 1$

Vậy $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 + 1$

Bài 2: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x cosx}{\sqrt{a^2 cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}dx$

Giải:

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x cosx}{\sqrt{a^2 cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x cosx}{\sqrt{a^2\left(1 - \sin^2 x\right) + b^2 \sin^2 x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x cosx}{\sqrt{\left(b^2 - a^2\right)\sin^2 x + a^2}}dx$$

- Đặt $t = \sqrt{\left(b^2 - a^2\right)\sin^2 x + a^2} \Rightarrow t^2 = \left(b^2 - a^2\right)\sin^2 x + a^2 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = 2\left(b^2 - a^2\right)\sin x cosxdx \\ \sin x cosxdx = \dfrac{tdt}{b^2 - a^2} \end{cases}$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\|a\|$	$\|b\|$

Khi đó: $I = \int\limits_{|a|}^{|b|} \frac{tdt}{t\left(b^2 - a^2\right)} = \frac{1}{b^2 - a^2}.t\Bigg|_{|a|}^{|b|} = \frac{|b| - |a|}{|b|^2 - |a|^2} = \frac{1}{|a| + |b|}$

Bài 3: Tính $I = \int\limits_0^1 \sin\sqrt{x}dx$

- Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2td$

  Đổi cận:

x	0	1
t	0	1

Khi đó:

$$I = 2\int\limits_0^1 t\sin tdt$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \sin tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -cosx \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta được:

$$I = -2\left(tcost\right)\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 costdt = -2\left(tcost\right)\Big|_0^1 + 2\left(\sin t\right)\Big|_0^1 = 2\left(\sin 1 - cos1\right)$$

VẤN ĐỀ 4: TÍCH PHÂN CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp: Giả sử ta cần tính tích phân sau: $\int_a^b |f(x)|dx$

- **Bước 1:** Tính nghiệm của phương trình $f(x)=0$
- **Bước 2:** Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$
- **Bước 3:** Dựa vào bảng xét dấu để bỏ dấu giá trị tuyệt đối và tính tích phân.

Chú ý: Nếu phương trình $f(x)=0$ có dạng không mẫu mực thì ta dùng đạo hàm để xét dấu $f(x)$.

Ví dụ 1: Tính tích phân sau: $\int_0^2 x|x-1|dx$. **ĐS: 1**

Ví dụ 2: Tính tích phân sau: $I=\int_0^2 \left|\frac{3x-1}{x+1}+x-2\right|dx$ ĐS: $1+8\ln 2-4\ln 3$

Hướng dẫn: $I=\int_0^2 \left|\frac{x^2+2x-3}{x+1}\right|dx$

Ví dụ 3: Tính tích phân sau: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-x|dx$

Hướng dẫn:

Xét hàm số $f(x)=\sin x-x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$f'(x)=\cos x-1\le 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow f(x)\le f(0)=0\Rightarrow \sin x-x\le 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\sin x)dx=\frac{\pi^2}{8}-1$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tính tích phân sau: $\int_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx.$

Hướng dẫn: $\int_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|e^x-1\right|dx+\int_{0}^{1}\left|e^x-1\right|dx.\quad ĐS: e+\frac{1}{2}-2$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$a)\int_{-3}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)dx$; $b)\int_{-1}^{1}\frac{\left|x\right|}{x^4+x^2-12}dx$; $c)\int_{1}^{4}\sqrt{x^2-6x+9}$

$d)\int_{-1}^{1}\sqrt{4-\left|x\right|}dx$; $e)\int_{0}^{3}\left|2^x-4\right|dx$; $f)\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}dx$

Đáp số :

$a)8;\quad b)\frac{1}{14}\ln\frac{8}{45};\quad c)\frac{5}{3};\quad d)2\left(5-\sqrt{3}\right);\quad e)4+\frac{1}{\ln 2};\quad f)\frac{24\sqrt{3}+8}{15}$

Bài 3. Tính các tích phân sau:

$a)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\mathrm{sinx}\right|dx$; $b)\int_{0}^{\pi}\sqrt{2+2\cos 2x}dx$ $c)\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx;$ $d)\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1+\mathrm{sinx}}dx$

Đáp số : $a)2;\quad b)4;\quad c)2\sqrt{2};\quad d)4\sqrt{2}$

Bài 4. Tính các tích phân sau:

$a)\int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx\quad ĐS: \frac{1}{\ln 2};$ $b)\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}dx\quad ĐS: 2\sqrt{2}$

Bài 5. Tính tích phân: $I=\int_0^2\left|x^2-x\right|dx$ (Khối D – 2004)

Bài 6. Tính tích phân: $a)\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|\log_2 x\right|dx$ $b)\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\ln x\right|dx$

Bài 7. Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left|\tan x+2\sin x-3x\right|dx$

Hướng dẫn:

Xét hàm $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x,$ với $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x - 1\right)^2\left(2\cos x + 1\right)}{\cos^2 x} \ge 0, \forall \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f(x) \ge f(0) = 0$

$I = \frac{1}{2}\ln 2 - \sqrt{2} + 2 - \frac{3\pi^2}{32}$

BÀI TẬP BỔ SUNG:

VẤN ĐỀ 5: TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

A. Dạng 1: $I = \int\limits_{\beta}^{\alpha} \frac{P(x)}{ax+b}dx, a \neq 0$

Ta cần phải chú ý công thức $\int \frac{k}{ax+b}dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + C$

Bài tập áp dụng: Tính các tích phân sau

$a) I_1 = \int\limits_2^3 \frac{x-1}{x+1}dx;$ $b) I_2 = \int\limits_2^4 \frac{x^2-5}{x-1}dx;$ $c) I_3 = \int\limits_2^4 \frac{x^3}{2x+3}dx$

B. Dạng 2: $I = \int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx, a \neq 0$

$\oplus$Trường hợp 1: $f(x) = ax^2+bx+c$ có hai nghiệm phân biệt

BÀI TẬP ÁP DỤNG: Tính các tích phân sau

Bài 1. Tính tích phân sau:

$a) I_1 = \int\limits_0^1 \frac{3}{x^2-4}dx;$ $b) I_2 = \int\limits_3^4 \frac{1}{x^2+7x-8}dx;$ $c) I_3 = \int\limits_3^4 \frac{x}{x^2-3x+2}dx$

Bài 2. Tính các tích phân sau: $\int\limits_3^5 \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$

Phương pháp:

- *Khi bậc đa thức* $P(x) < 2$ *ta sử dụng phương pháo hệ số bất định*
- *Khi bậc đa thức* $P(x) \geq 2$ *ta sử dụng phép chia đa thức để đưa tử số về đa thức có bậc* <2

$\oplus$Trường hợp 2: $f(x) = ax^2+bx+c = (\alpha x+\beta)^2$ có nghiệm kép

Ta cần lưu ý công thức sau: $\boxed{\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx = -\frac{1}{u(x)} + C}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tính các tích phân sau:

$a) \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-4x+4}dx;$ $b) \int\limits_1^2 \frac{4x}{4x^2-4x+1}dx$

Hướng dẫn câu b) $t = 2x - 1$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$a)\int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2-4x+4}dx;$ $\quad b)\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$

Phương pháp: *Để tránh phức tạp khi biến đổi ta thường đặt* $\boxed{t = \alpha x + \beta}$

Trong hai câu trên, ta thấy bậc tử cao hơn bậc mẫu nên ta có thể chia đa thức, sau đó đưa về trương hợp trên.

$\boxed{\oplus\text{Trường hợp 3}: f(x) = ax^2 + bx + c \text{ vô nghiệm}}$

Ta cần lưu ý cách tính nguyên hàm $\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}dx}$ bằng cách đặt $x = a\tan t$

BÀI TẬP ÁP DỤNG: Tính các nguyên hàm sau

1) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2};$ $ĐS: \frac{\pi}{2};$ $\quad$ 2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1};$ $ĐS: \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3};$ $ĐS: \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right);$ $\quad$ 4) $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^3};$ $ĐS: \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} - \frac{4}{9}$

C.Dạng: $\int \frac{P(x)}{ax^3+bx^2+cx+d}dx, a \neq 0$

1. Đa thức dạng : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **có một nghiệm bội ba**

Ta cần chú ý công thức sau: $\boxed{\int \frac{1}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, \text{ chú ý}: \frac{1}{x^n} = x^{-m}, x > 0}$

Ví dụ: Tính các tích phân sau $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-6x^2+12x-8}$

Bài tập áp dụng

Bài 1. Tính các tích phân sau:

$a)\int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}dx;$ Hướng dẫn: Đặt $t = x - 1$ $\quad b)\int_3^5 \frac{x^3}{(x-1)^3}dx$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$a)\int_2^4 \frac{x^2-4}{(x-1)^3}dx;$ $b)\int_0^1 \frac{x^4}{(x+1)^3}dx$

2. Đa thức dạng : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ **có hai nghiệm**

Bài toán mở đầu: Tính tích phân $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx$

Hướng dẫn: Đặt

$x+1=t \Rightarrow dx=dt$

$x=2 \Rightarrow t=3;\ \ x=3 \Rightarrow t=4$

Lúc đó: $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}=\int_3^4 \frac{dt}{t^2(t-2)}=\int_3^4 \frac{dt}{t^3-2t}$

Dùng phương pháp hệ số bất định

$$\frac{1}{t^3-2t^2}=\frac{At+B}{t^2}+\frac{C}{t-2} \Rightarrow 1 \equiv (A+C)t^2+(-2A+B)t-2B$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1. Tính các tích phân sau:

$a)\int_3^4 \frac{2x+1}{x^2(x-2)}dx;$ $b)\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Hướng dẫn: $b)\ \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$

Bài 2. Tính tích phân sau $\int_3^7 \frac{x^3-1}{x^3+2x^2+x}dx$

3. Đa thức dạng : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ **có ba nghiệm phân biệt**

Bài toán mở đầu: Tính tích phân $\int_2^3 \frac{1}{(x^2-1)x}dx$

Hướng dẫn: $\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$

Bài tập áp dụng:

Bài 1. Tính các tích phân sau:

$a)\int\limits_3^6 \dfrac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}dx;$ $b)\int\limits_3^5 \dfrac{x^2}{\left(x+2\right)\left(x^2-1\right)}dx;$ $c)\int\limits_3^5 \dfrac{x^3}{\left(x-2\right)\left(x^2-1\right)}dx$

Bài 2. Tính tích phân $\int\limits_3^5 \dfrac{x^3}{\left(2x+1\right)\left(4x^2+4x+5\right)}dx$

Hướng dẫn: Đặt $t=2x+1$

3. Đa thức dạng : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ **có một nghiệm (khác bội ba):**

Cách giải:

- **Bước 1:** Phân tích $ax^3+bx^2+cx+d=\left(x-\alpha\right)\left(Ax^2+Bx+C\right)$
- **Bước 2:** Đồng nhất thức $\dfrac{P(x)}{ax^2+bx+c}\equiv\dfrac{a_1}{x-\alpha}+\dfrac{b_1x+c_1}{Ax^2+Bx+C}$

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{2x^2-8x+10}{x^3+x^2+3x+3}dx$

Hướng dẫn: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{2x^2-8x+10}{x^3+x^2+3x+3}dx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{3x+5}{x^2+3}\right)dx=5\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\dfrac{3}{2}\ln 2-\dfrac{5\pi}{4\sqrt{3}}$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{4x^2+9x+8}{x^3+4x^2+6x+4}dx$

Hướng dẫn: $\int\limits_1^2 \dfrac{4x^2+9x+8}{x^3+4x^2+6x+4}dx=\int\limits_1^2\left(\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\right)dx=3\ln\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}\ln 2$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 \dfrac{1}{x^3-1}dx$

Hướng dẫn:

Cách 1: $I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2+x+1}\right)dx$

Cách 2: Đặt $x-1=t$.

Lúc đó:

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^3-1}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{dt}{t(t^2+3t+3)}=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1}\frac{t^2+3t+3}{t(t^2+3t+3)}dt-\int_{-2}^{-1}\frac{t^2+3t}{t(t^2+3t+3)}dt\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1}\frac{1}{t}dt-\int_{-2}^{-1}\frac{t+3}{t^2+3t+3}dt\right]=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{-1}\frac{1}{t}dt-\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{t+3}{t^2+3t+3}dt-\frac{3}{2}\int_{-2}^{-1}\frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right]....$$

Bài tập áp dụng: Tính tích phân sau

$\int_{0}^{1}\frac{3}{x^3+1}dx$ $\quad$ $ĐS:\ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

$\int_{0}^{1}\frac{x^3+2x+5}{x^3+x^2+x+1}dx;$ $\quad$ $ĐS:\ln 2+\frac{3\pi}{4}$

D. Dạng $\int\frac{(ax+b)^m}{(cx+d)^n}dx$, và một số kĩ thuật nguyên hàm

Cách giải: Đặt $t=cx+d$

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int_{0}^{1}\frac{(2x-1)^3}{(x+1)^2}dx$ $\quad$ **ĐS:** $54\ln 2-\frac{75}{2}$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{(3-6x)^3}{(3x+1)^4}dx$ $\quad$ **ĐS:** $\frac{805}{8}-\frac{8}{3}\ln 2$

1. Kĩ thuật biến đổi tử số chứa nghiệm của mẫu số

Ví dụ 1: $I=\int_{2}^{5}\frac{dx}{(x-1)x^2}$. Hướng dẫn: $\int_{2}^{5}\frac{x^2-x^2+1}{(x-1)x^2}dx$

Ví dụ 2: $I = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)x^3}$. Hướng dẫn: $\int_2^5 \frac{x^3 - x^3 + 1}{(x-1)x^3}dx$

Ví dụ 3: $I = \int_1^2 \frac{dx}{5x^5 + 5x}$. Hướng dẫn: $I = \frac{1}{5}\int_1^2 \frac{dx}{x(x^4+1)} = \frac{1}{5}\int_1^2 \frac{x^4 + 1 - x^4}{x(x^4+1)}dx$

Ví dụ 4: $I = \int_1^3 \frac{dx}{x^7 - 10x^3}$. Hướng dẫn: $I = \int_1^3 \frac{dx}{x^3(x^4-10)} = \frac{1}{10}\int_1^3 \frac{x^4 - (x^4 - 10)}{x^3(x^4-10)}dx$

2. Kĩ thuật đặt ẩn phụ với tích phân có dạng $\int \frac{1}{x(\alpha x^n + \beta)^m}dx$

Cách giải:

- **Bước 1:** Nhân tử số và mẫu số cho x^{n-1}
- **Bước 2:** Đặt $t = ax^n + b$

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x(x^2+1)}$**. Hướng dẫn:** $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^2(x^2+1)}$**. Đặt** $t = x^2 + 1$

Ví dụ 2: Tính tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{4x^4 + x}$**. Hướng dẫn:** $\int_1^2 \frac{dx}{4x^4 + x} = \int_1^2 \frac{dx}{x(4x^3+1)} = \int_1^2 \frac{x^2dx}{x^3(4x^3+1)}$

3. Kĩ thuật biến đổi tử số có chứa đạo hàm mẫu số

Ví dụ 1: Tính tích phân sau: $\int_2^3 \frac{x}{x^4 - 1}dx$**.** Hướng dẫn: Đặt $t = x^2$

Ví dụ 2: Tính tích phân sau: $K = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}dx.$

Hướng dẫn: $K = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}d\left(x + \frac{1}{x}\right)$

4. Kĩ thuật tính tích phân có dạng $\int \frac{\left(Ax^2 \pm C\right)}{\left(Ax^2 + B_1 x \mp C\right)\left(Ax^2 + B_2 x \mp C\right)}$

Cách giải:

- **Bước 1: Chia cả tử cả mẫu cho** x^2
- **Bước 2: Đặt** $\left[\begin{array}{l} t = Ax + \frac{C}{x} \\ t = Ax - \frac{C}{x} \end{array}\right.$ **đưa về tích phân hữu tỉ**

Ví dụ 1: Tính tích phân: $\int_1^2 \frac{\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + 2x + 1\right)} dx$ **ĐS:** $\frac{1}{3}\ln\frac{12}{7}$

Ví dụ 2: Tính tích phân: $\int_1^{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}} \frac{\left(x^2 + 1\right)}{x^4 + 1} dx$ **ĐS:** $\frac{1}{2}\ln\frac{35}{36}$

Ví dụ 3:

$K=\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx.$ Hướng dẫn: $K=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Ví dụ 4: $K=\int\frac{x^3}{x^6+1}dx.$ Hướng dẫn: $K=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{(x^2)^3+1}d(x^2)$

BÀI TẬP BỔ SUNG:

VẤN ĐỀ 6: TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM ĐẶC BIỆT

PHƯƠNG PHÁP:

Dựa vào việc đánh giá cận của tích phân và tính chất của hàm số dưới dấu tích phân ta có thể lựa chọn phép đặt ẩn phụ. Ta thường gặp một số tính chất sau:

Tính chất 1: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và hàm lẻ trên $\left[-a;a\right]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Vậy, với tính chất trên ta thường lựa chọn cách đặt $x = -t$

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

Tính chất 2: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và hàm chẵn trên $\left[-a;a\right]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Tương tự ta thường lựa chọn cách đặt $x = -t$

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 + \sin x}{x^2 + 1}dx$

Tính chất 3: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ thì : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

Với dạng này ta thường lựa chọn cách đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$. Với cách đặt này ta dễ dàng chứng minh được $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}}dx = \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{N}$

Ví dụ1: Tính $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{cosx}}dx$

Giải:

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Khi đó:

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}+\sqrt{cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{cos\,t}}{\sqrt{cos\,t}+\sqrt{\sin t}}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{cos\,x}}{\sqrt{cos\,x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

Vậy $I+I=2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{cosx}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{cosx}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 2: Tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+cos^3 x}dx$

Giải:

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Khi đó:

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3 t}{cos^3 t+\sin^3 t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3 x}{cos^3 x+\sin^3 x}dx$$

Vậy $I+I=2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x+cos^3x}{\sin^3x+cos^3x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 3: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6x}{\sin^6x+cos^6x}dx$

Giải:

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Khi đó:

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos^6\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^6t}{cos^6t+\sin^6t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^6x}{cos^6x+\sin^6x}dx$$

Vậy $I+I=2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^6x+cos^6x}{\sin^6x+cos^6x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$

Tính chất 4: Nếu $a>0$, hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ thì với mọi số thực α, ta có : $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_0^a f(x)dx$.

Với dạng này ta thường lựa chọn cách đặt $x=-t$

Ví dụ 1: Tính tích phân của hàm số sau: $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{1+2^x}dx$

Ví dụ 2: Tính tích phân: $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tan^6 x}{e^x + 1} dx$

Giải:

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận:

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
t	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$

Khi đó: $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tan^6 x}{e^x + 1} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{tan^6 t}{e^{-t} + 1} dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{e^t tan^6 t}{e^t + 1} dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^t tan^6 t}{e^t + 1} dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x tan^6 x}{e^x + 1} dx$

Ta có:

$$I + I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tan^6 x}{e^x + 1} dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x tan^6 x}{e^x + 1} dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tan^6 x dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[tan^4 x\left(tan^2 x + 1\right) - tan^2 x\left(tan^2 x + 1\right) + tan^2 x + 1 - 1 \right] dx$$

$$= \left[\frac{tan^5 x}{5} - \frac{tan^3 x}{3} + tanx - x \right] \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{26}{15} - \frac{\pi}{2}$$

Tính chất 5: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ thì : $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{a} f(\sin x)dx$.

Với dạng này ta thường lựa chọn cách đặt $x = \pi - t$

Ví dụ: Tính tích phân sau: $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

Tính chất 6: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì : $\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$.

Với dạng này ta thường lựa chọn cách đặt $t = a+b-x$

Ví dụ : Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$

Giải:

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Khi đó:

$$I = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos t}{1+\sin t}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos x}{1+\sin x}dx$$

Vậy

$$I + I = 2I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\frac{1+\cos x}{1+\sin x} + \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln\frac{1+\cos x}{1+\sin x}.\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\ln 1\right)dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx = 0 \Rightarrow I = 0$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{\left(\sin x + \cos x\right)^3}dx$

Giải:

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Khi đó:

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4cos t}{\left[cos t + \sin t\right]^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4cos x}{\left[cos x + \sin x\right]^3} dx$$

$$\Rightarrow I + I = 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{\left(\sin x + cosx\right)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4cos x}{\left(\sin x + cosx\right)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\left(\sin x + cosx\right)^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{2cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow I = 2$$

Tính chất 7: Nếu $f(x)$ liên tục trên $\left[0;2\pi\right], a > 0$ thì

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a \left[f(x) + f(2a - x)\right]dx$$

Với tính chất trên ta thường đặt $t = 2a - x$

Ví dụ: Tính tích phân $\int_0^{3\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

Tính chất 8: Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T, xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thì

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

Với tính chất trên ta thường đặt $t = x - T$

Ví dụ: Tính tích phân $\int\limits_{0}^{2013\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

$1)\int\limits_{-1}^{1} x^{2004}\sin x dx.$ $Đặt\ x=-t.$ $ĐS: 0$

$2)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$ $HD: Đặt\ x=\frac{\pi}{2}-t.$ $ĐS: \frac{\pi}{4}$

$3)\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin 4x}{1+\sin x}dx$ $HD: Đặt\ x=\pi-t.$ $4)\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{4+4\cos^2 x}dx$ $HD: Đặt\ x=\pi-t.$

$5)\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{4-\cos^2 x}dx$ $HD: Đặt\ x=\pi-t.$ $6)\int\limits_{0}^{2\pi} x\cos^3 x dx$ $HD: Đặt\ x=2\pi-t$

$7)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ $HD: Đặt\ x=\frac{\pi}{2}-t.$ $8)\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ $HD: Đặt\ x=\frac{\pi}{4}-t.$

BÀI TẬP BỔ SUNG

VẤN ĐỀ 7: TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Dạng 1: $P_n(x).\left[\begin{array}{l}\sin(\alpha x+\beta)\\ \cos(\alpha x+\beta)\\ e^{\alpha x+\beta}\end{array}\right.$. Trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n

Đặt $u = P_n(x)$ và $dv = \left[\begin{array}{l}\sin(\alpha x+\beta)\\ \cos(\alpha x+\beta)\\ e^{\alpha x+\beta}\end{array}\right.$

Chú ý: Chỉ số (n) cho ta số lần tích tích phân dạng này

Dạng 2: $P_n(x).\left[\ln(\alpha x+\beta)\right.$. Đặt $u=\ln(\alpha x+\beta)$ và $dv = P_n(x)$

Dạng 3: $\int_a^b e^{\alpha x+b}\cos(mx+n)dx$ hoặc $\int_a^b e^{\alpha x+b}\sin(mx+n)dx$

Với dạng này ta có thể chọn:

$$\left[\begin{array}{l}u=e^{\alpha x+b}, dv=\cos(mx+n)\ \left(\text{hoặc }\ dv=\sin(mx+n)\right)\\ u=\cos(mx+n)\ \left(\text{hoặc }\ u=\sin(mx+n)\right), dv=e^{\alpha x+b}\end{array}\right.$$

Ghi nhớ : Nhất lô nhì đa tam lượng tứ mũ

BÀI TẬP ÁP DỤNG TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN CƠ BẢN

Bài 1: Tính $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=e^{2x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=dx\\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$I=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x}d\left(2x\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$$

$$=\frac{e^2+1}{4}$$

Bài 2: Tính $I=\int_0^1 x^2e^xdx$

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=e^x\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$I=\int_0^1 x^2e^xdx=x^2e^x\Big|_0^1-2\int_0^1 xe^xdx=e-2\int_0^1 xe^xdx$$

Tiếp tục tính: $J=\int_0^1 xe^xdx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$J=\int_0^1 xe^xdx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 xe^xdx=1$$

Vậy $I=e-2$

Bài 3: Tính $I=\int_0^1\left(3x+1\right)e^{-3x}dx$

Đặt $\begin{cases}u=3x+1\\dv=e^{-3x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=3dx\\v=-\dfrac{1}{3}e^{-3x}\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$I=\int_0^1(3x+1)e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-3x}dx$$

$$=-\frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-3x}d\left(e^{-3x}\right)=-\frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x}\Big|_0^1-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{5}{e^3}$$

Bài 4: Tính $I=\int_1^e(4x+1)\ln xdx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=(4x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=2x^2+x\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$I=\int_1^e(4x+1)\ln xdx=\left(2x^2+x\right)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e(2x+1)dx=2e^2+e-\left(x^2+x\right)\Big|_1^e=e^2+2$$

Bài 5: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx$

Đặt $\begin{cases}u=\cos x\\ dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\sin xdx\\ v=e^x\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos xdx=e^x cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx}_{I_1}$$

Tính $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin xdx$

Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=cosxdx\\ v=e^x\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I$$

Suy ra: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x cosx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$

BÀI TẬP CHUYỂN VỀ TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN CƠ BẢN

Bài 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{1 - cos2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos2x dx \right)$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$
- Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos2x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = cos2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 0 + \frac{cos2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx = \frac{\pi^2 + 4}{16}$

Bài 2: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$

Giải:

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x cosx dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = cosxdx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Khi đó:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin x cosx dx = 2\int_0^1 te^t dt$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$\int_0^1 te^t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = te^t \Big|_0^1 - e^t \Big|_0^1 = 1$$

Vậy I = 2

Bài 3: Tính $I = \int_0^1 x \ln\left(x^2 + 1\right) dx$

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$

Đổi cận:

x	0	1

t	1	2

Khi đó:

$$I=\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t dt$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln t \\ dv=dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{t} \\ v=t \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$\int_1^2 \ln t dt = t\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 dt=2\ln 2-1$$

Vậy $I=\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx=\ln 2-\frac{1}{2}$

MỘT SỐ BÀI TẬP DẠNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Bài 1: Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{cos^2x}dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\tan x \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{cos^2x}dx=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{cosx}dx=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(cosx\right)}{cosx}$$

$$=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln\left|cosx\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2$$

Bài 2: Tính $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\ln\left(\sin x\right)dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \cos dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{cosx}{\sin x}dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\ln(\sin x)dx = \sin x\ln(\sin x)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = \sin x\ln(\sin x)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - 1\right)$$

Bài 3: Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = -x\cot x\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot xdx = -\frac{\pi}{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln|\sin x|\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi\left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Bài 4: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + cosx}.e^x dx$

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + cosx}.e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{1 + cosx} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + cosx}.e^x dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + cosx}.e^x dx}_{I_2}$

Tính: $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \dfrac{dx}{cos^2\dfrac{x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \tan\dfrac{x}{2} \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = e^x \tan\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}.e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}.e^x dx$$

Tính: $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}.e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}}.e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}.e^x dx$

Vậy $I = e^{\frac{\pi}{2}}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tính các tích phân sau:

$a)\displaystyle\int_1^e x^3 \ln x dx$; $ĐS: \dfrac{3e^4+1}{16}$ $b)\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$; $ĐS: 1$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$a)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; $b)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$; $c)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx$;

Hướng dẫn và đáp số:

Trong bài 2, ở các câu sau đều sử dụng kết quả của câu trước.

$a)\dfrac{\pi}{2}-1$; $b)2\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$; $c)\dfrac{\pi^3}{8}-3\pi+6$

Bài 3. Tính các tích phân sau:

$a)\int\limits_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; $ĐS: \ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}+1$

$b)\int\limits_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$; $ĐS: -\frac{3}{2}\ln 3+3\ln 2$

Hướng dẫn:

a) Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ dv=dx \end{cases}$; $b)$ Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x+1\right) \\ dv=\frac{1}{x^2}dx \end{cases}$

Bài 4. Tính các tích phân sau:

$a)\int\limits_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx$; $ĐS: \frac{4}{9}\left(2e^3+1\right)$ $b)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$; $ĐS: -\frac{3}{8}\ln 3+\frac{1}{2}$

$c)\int\limits_1^{e} \frac{\ln x}{x^3}dx$; $ĐS: \frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2}$

Hướng dẫn:

a) Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\sqrt{x}dx \end{cases}$; $b)\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left[x\ln\left(1+x\right)-x\ln\left(1-x\right)\right]dx$

Bài 5. Tính các tích phân sau:

$a)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\ln\left(\tan x\right)dx$; Hướng dẫn: $\begin{cases} u=\ln\left(\tan x\right) \\ dv=\sin x dx \end{cases}$ $ĐS: -\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{3}\right)-\ln\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)$

$b)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$; Hướng dẫn: $\begin{cases} u=\ln\left(\cos x\right) \\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases}$ $ĐS: \ln\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\pi}{4}$

$c)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$; $ĐS: \frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 6. Tính các tích phân sau:

$a)\int_{-8}^{0} x\ln\left(\sqrt{1-x}\right)dx$; $ĐS: 6-\frac{63}{2}\ln 3$ $b)\int_{1}^{2} x\ln^2 x dx$; $ĐS: \frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}$

$c)\int_{-3}^{0} \frac{\ln\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$; $ĐS: 4\ln 2-2$ $d)\int_{0}^{1} x\ln\left(x^2+1\right)dx$; $ĐS: -\frac{1}{2}+\ln 2$

Hướng dẫn:

$a,c)$ Đặt $t=\sqrt{1-x}$ sau đó đưa về tính tích phân từng phần

$b)$ Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ dv = xdx \end{cases}$

Bài 7. Tính các tích phân sau:

$a)\int_{1}^{3} \frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; Hướng dẫn: Đặt $u=\ln x, dv=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$ $ĐS: -\frac{\ln 3}{20}+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$

Bài

$c)\int_{0}^{1} \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$; HD: Đặt $u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ $ĐS: \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+1$

8. Tính các tích phân sau:

$a)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos 3x dx$; $ĐS: \frac{-3e^{\pi}-2}{13}$ $b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x dx$ $ĐS: \frac{1}{8}\left(e^{2\pi}-1\right)$

$c)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin 3x dx$; $ĐS: \frac{-3-e^{\frac{\pi}{2}}}{10}$ $d)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

Bài 9. Tính các tích phân sau:

$a) I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(x+\sin x\right)}{\cos^2 x}dx.$ Hướng dẫn: tách thành tổng hai tích phân thành phần

$b)\ I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}.$ Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx \end{cases}$

BÀI TẬP BỔ SUNG

VẤN ĐỀ 8: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

Dạng toán 1: *Tính điện tích hình phẳng giới hạn bởi*

$$\begin{cases}(C): y = f(x),\ f(x) \text{ liên tục trên } \left[a;b\right] \\ y = 0 \text{(trục hoành)} \\ x = a \\ y = b\end{cases}$$ được tính bởi công thức $S = \int_a^b \left|f(x)\right|dx$

Phương pháp:

- ❖ Ta cần phải tìm đầy đủ 4 đường như trên
- ❖ Vì cần phải bỏ dấu trị tuyệt đối nên ta có hai cách giải sau:

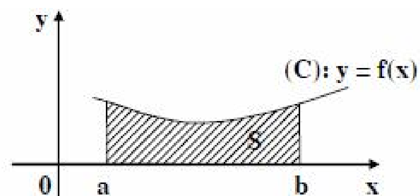
Cách 1: Phương pháp đồ thị:

* Vẽ đồ thị (C) : y = f(x) với $x \in [a\ ;\ b]$

a/ *Trường hợp 1:*

Nếu đồ thị (C) nằm hoàn toàn trên trục hoành Ox (hình a) thì:

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow S = \int_a^b f(x).dx}$$

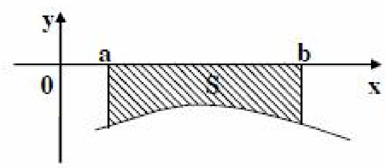


(Hình a)

b/ *Trường hợp 2*:

Nếu đồ thị (C) nằm hoàn toàn dưới trục hoành Ox (hình b) thì:

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow S = -\int_a^b f(x).dx}$$

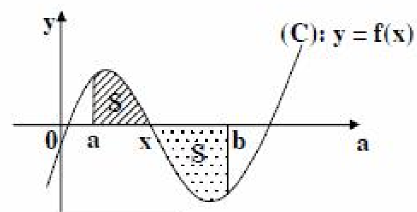


(Hình a)

c/ *Trường hợp 3*:

Nếu đồ thị (C) cắt trục hoành Ox tại một điểm có hoành độ $x = x_0$ (như hình c) thì:

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow S = \int_a^{x_0} f(x).dx + \int_a^b \left|-f(x)\right|.dx}$$



$\boxed{S = S_1 + S_2}$ *(Hình c)*

Ghi chú: Nếu f(x) không đổi dấu trên đoạn [a ; b] thì ta dùng công thức sau:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Cách 2. **Phương pháp đại số:**

- Giải phương trình hoành độ giao điểm : f(x) = 0 (*)
- Giải (*) để tìm nghiệm x trên đoạn [a ; b].
- Nếu (*) vô nghiệm trên khoảng (a ; b) thì ta xét dấu f(x) trên đoạn [a ; b] để bỏ dấu giá trị tuyệt đối hoặc ta sử dụng trực tiếp công thức sau:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

- Nếu (*) có nghiệm $x = x_0$ và f(x) có bảng xét dấu như hình bên thì:

x	a		x_0		b
f(x)		+	0	−	

$$S = \int_a^{x_0} f(x)dx - \int_{x_0}^b f(x)dx.$$

Ghi chú:

(1) Diện tích S luôn là một giá trị dương (không có giá trị $S \le 0$).

(2) Với câu hỏi: "Tính diện tích giới hạn bởi (C): y = f(x) và trục hoành" thì ta phải tìm thêm hai đường x = a, x = b để làm cận tích phân, hai đường này chính là giao điểm của (C) và trục Ox, là 2 nghiệm của phương trình f(x) = 0 (theo phương pháp đại số).

Với câu hỏi đơn giản hơn như: "Tính diện tích giới hạn bởi đường (C) : y = f(x) thì ta phải hiểu đó là sự giới hạn bởi (C) và trục hoành.

(3) Một số hàm có tính đối xứng như: parabol, đường tròn, elip, hàm giá trị tuyệt đối, một số hàm căn thức; lợi dụng tính đối xứng ta tính một phần S rồi đem nhân hai, nhân ba, ... (cũng có thể sử dụng tổng hoặc hiệu diện tích).

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu: *Tính điện tích Hình phẳng giới hạn bởi đò thị hàm số x=f(y)(liên tục trên đoạn [a,b]), trục tung và hai đường thẳng y=a,y=b.*

Khi đó công thức tính diện tích là: $S = \int_a^b |f(y)|dy$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = 4 - x^2$ trục hoành và 2 đường thẳng $x = -1; x = 1$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C): y = 4 - x^2$, $y = 0$ và 2 đường thẳng $x = 1, x = 3$.

Đáp số: $a)\ \frac{22}{3};\quad b)\ 4$

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) y=cosx+1, trục hoành và hai đườn thẳn g $x = 0$ và $x = \frac{2\pi}{3}$

b) $y = x^3 - 1$**,** trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2$

Đáp số: $a)\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3};\quad b)\ \frac{7}{2}$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ và trục hoành

b) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ và trục hoành

Đáp số: $a)\frac{1}{6};\quad b)\frac{37}{12}$

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{e^x + 1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \ln 3$, $x = \ln 8$

Đáp số: $a)2 + \ln\frac{3}{2}$

Bài 5. Tính diện tích tam giác cong giới hạn bởi các đường

$x = 1;\ x = e;\ y = 0;\ y = \frac{\ln x}{2\sqrt{2}}$ **ĐS:** $-1 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x\ln^2(x^2+1)}{x^2+1}$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = \sqrt{e-1}$

Bài 7.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục Ox và $x = 1$. **ĐS:** $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$, trục Ox và $x=1$, $x=e$. **ĐS:** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) $y=xe^x, y=0, x=-1, x=2.$ $ĐS: e^2-\frac{2}{e}+2$

b) $y=x\ln^2 x, y=0, x=-1, x=e.$ $ĐS: \frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$a) y=\ln(x+1), y=0, x=0, x=1$

$b) y=\ln(x+1)$ trục tung và hai đường thẳng $y=$ -1 và $y=1$

Đáp số: $a) 2\ln 2-1$

Dạng toán 2: *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y=f(x), y=g(x) (liên tục trên đoạn [a;b]), 2 đường thẳng x=a, x=b.*

$$\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\(C_2): y = g(x)\\x = a\\x = b\ \ (a < b)\end{cases}$$ được tính bởi công thức: $$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx}$$

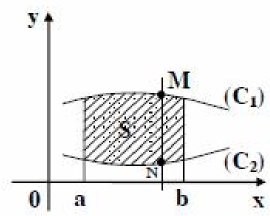
2. Phương pháp giải toán:

***Cách 1*. Phương pháp đồ thị:**

* Trên cùng mặt phẳng toạ độ ta vẽ 2 đồ thị: $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

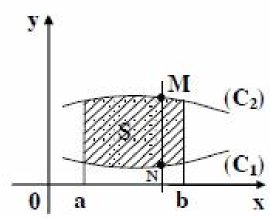
a/ *Trường hợp 1*: (C_1) không cắt (C_2)

- Xác định vị trí: Trên đoạn [a ; b] thì (C_1) nằm trên (C_2) hay (C_2) nằm trên (C_1) bằng cách vẽ một đường thẳng song song với trục tung Oy cắt hai đồ thị tại M và N.
  Khi đó nếu M ở trên N thì đồ thị chứa M sẽ nằm trên đồ thị chứa N.



(hình 2a)

- Nếu (C_1) nằm trên (C_2) thì: $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$. (h.2a)
- Nếu (C_2) nằm trên (C_1) thì: $S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$. (h.2b)
- Trong trường hợp 1, ta có thể dùng trực tiếp công thức sau:
  $S = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$.



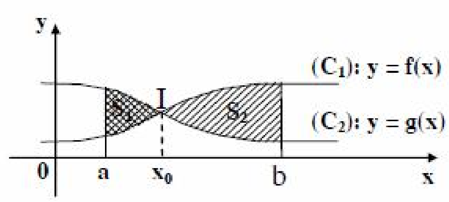
(hình 2b)

b/ Trường hợp 2: (C_1) cắt (C_2) tại điểm I có hoành độ x_0.

$$\boxed{S = \int_a^{x_0} |g(x) - f(x)|dx + \int_{x_0}^b |f(x) - g(x)|dx}$$

Hoặc dùng công thức sau:

$$\boxed{S = \left|\int_a^{x_0} [f(x) - g(x)]dx\right| + \left|\int_{x_0}^b [f(x) - g(x)]dx\right|}$$



***Cách 2*. Phương pháp đại số:**

- Lập phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x)$ (*)
- Nếu (*) vô nghiệm trên khoảng (a ; b) thì ta xét hiệu $f(x) - g(x)$ để bỏ dấu "| |".
- Nếu (*) có một nghiệm x_0 thuộc khoảng (a ; b) thì:

$$S = \int_a^{x_0} |f(x) - g(x)|dx + \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

rồi xét lại từ đầu trên các đoạn $[a; x_0]$ và $[x_0; b]$.

Ghi chú:

(1) Trong thực hành ta nên dùng phương pháp đồ thị.

(2) Khi giao điểm của (C_1) và (C_2) không chắc chắn như số hữu tỉ hoặc số vô tỉ, ta nên thực hiện thêm việc giải phương trình hoành độ $f(x) = g(x)$ cho chính xác.

(3) Hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là các cận của tích phân.

(4) Trên đây khi tính diện tích ta đã coi x là biến, y là hàm. Tuy nhiên trong một số trường hợp ta coi y là biến của hàm x (nghĩa là $x = f(y)$), khi đó việc tính diện tích sẽ đơn giản hơn.

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu: *Tính điện tích Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số x=f(y), x=g(y)(liên tục trên đoạn [a,b]), và hai đường thẳng y=a,y=b.*

Khi đó công thức tính diện tích là: $S = \int_a^b |f(y) - g(y)|dy$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = x^3 + 3x$;$(C_2): y = 4x^2$ hai đường thẳng x=-1;x=2. **ĐS:** $\frac{55}{12}$

Bài 2.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = 4 - x^2$;$(C_2): y = -x + 2$

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = \ln x$;$(C_2): y = -\ln x$ và x=e

ĐS: $a)\frac{27}{6}; \quad b)2$

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = x^2 - 2x$;$(C_2): y = -x^2 + 4x$

d) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = (e+1)x$;$(C_2): y = (1+e^x)x$

ĐS: $a)$ 9; $b)\frac{e}{2} - 1$

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Tìm b sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường thẳng y=1, x=0, x=b bằng $\dfrac{\pi}{4}$. **ĐS:** $b=\pm 1$

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

y = 0; y = $\dfrac{x(1-x)}{x^2+1}$.

Bài 6. Tính diện tích giới hạn bởi các đường: $(D): x+y=0; (C): x^2-2x+y=0$

ĐS: $\dfrac{9}{2}$

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $(D): y=x; (C); y=\sin^2 x + x \left(0 \le x \le \pi\right)$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}$

Bài 8. Tính dện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-4x+3\right|$ và $y=x+3$

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabon(P): $y=-x^2+4x$ và đường thẳng $d: y=x$

Bài 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ và $y=\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}$

Bài 11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$a) y=x\sqrt{1+x^2}, y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x=0, x=\sqrt{3}.$ $ĐS: \dfrac{4}{3}$

$b) x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}; x=\sqrt{1-y^2}$ hai đường thẳng $x=0$ và $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $ĐS: \dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$

Bài 10. Tính diện tich hình phẳng giới hạn bởi

$$y=\left|x^2-1\right| \text{ và } y=\left|x\right|+1$$

Bài 11. Tính diện tich hình phẳng giới hạn bởi

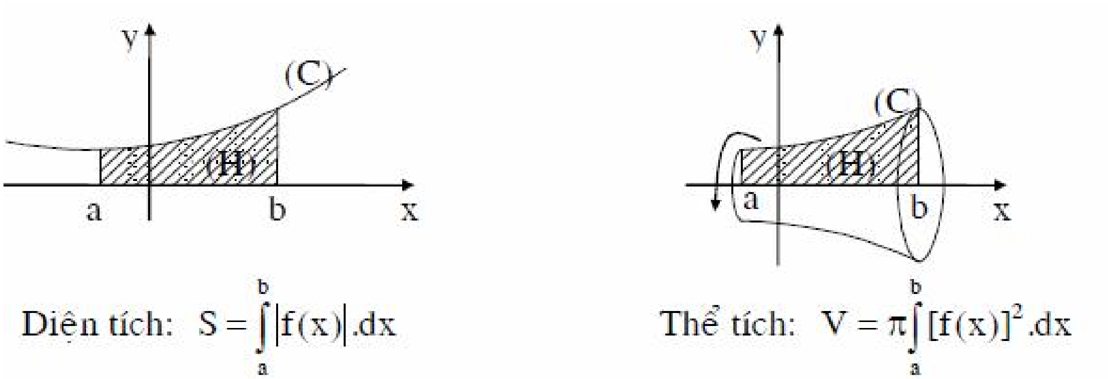
$$y=\left|x^2-4x+3\right| \text{ và } y=x+1$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

VẤN ĐỀ 9: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

Dạng toán 1 : *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi y=f(x), x=a,x=b, trục hoành (y=0) quay quanh trục Ox*

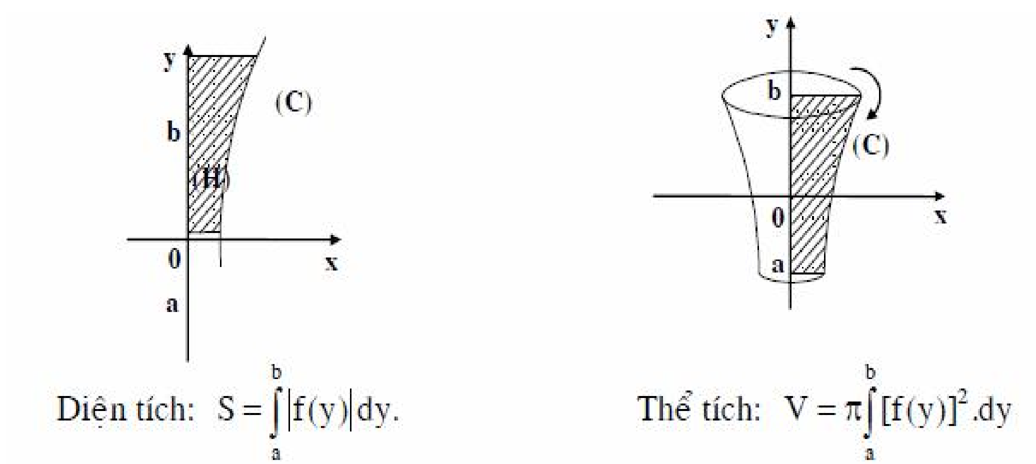
Phương pháp: Áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$



Chú ý:

- Nếu đề toán yêu cầu **:** *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi x=f(y), y=a,y=b, trục trục tung (x=0) quay quanh trục Oy*

  thì ta áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b f^2(y)dy$.



- Trong một số trường hợp chúng ta cần tìm cận a, b thông qua việc thiết lập điều kiện không âm cho hàm số f(x) (hoặc f(y))

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi :

a) Quay quanh trục hoành một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$

b) Quay quanh trục tung một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3 - x^2, x = 0, y = 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$

ĐS: $a)\ \frac{\pi}{2}\left(e^6 - 1\right);$ $\qquad b) 2\pi$

Bài 2. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox, với

$$a) H = \left\{ y = 0; y = \sqrt{1 + \cos^4 x + \sin^4 x}; x = \frac{\pi}{2}; x = \pi \right\}$$

$$b) H = \left\{ y = 0; y = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}; x = 0; x = \frac{\pi}{2} \right\}$$

Hướng dẫn và đáp số:

Khi tính tích phân chú ý biến đổi $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x;$ $\quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x;$

ĐS: $a) \frac{7}{8}\pi^2;$ $\qquad b) \frac{5\pi^2}{16}$

Bài 3. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox, với

$a) H = \left\{ y = 0; y = 3ax - x^2 (a > 0); y = 0 \right\}.$ $\qquad ĐS: \frac{81a^5\pi}{10}$

$b) H = \left\{ y = 0; y = x \ln x; x = 1; x = e \right\}$ $\qquad ĐS: V = \frac{\pi(5e^3 - 3)}{27}$

Bài 4. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$ **ĐS:** $\frac{\pi^2}{2}$

Bài 5. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

a) $y = \ln x, y = 0, x = 2$ $\qquad ĐS: 2\pi\left(\ln 2 - 1\right)^2.$

b) $y = xe^x, y = 0, x = 1$ $\quad$ *ĐS* : $\frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$

Dạng toán 2 : *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi y=f(x), y=g(x), x=a,x=b(a<b),f(x) và g(x) cùng dấu, quayquanh trục Ox*

<u>*Chú thích:*</u>

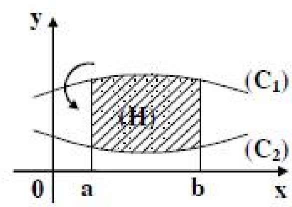
Phương pháp: Áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$ (3)

* f(x) và g(x) cùng dấu có nghĩa là hai phần đồ thị cùng nằm một phía đối với trục Ox, với mọi $x \in$ đoạn [a; b].

* Để bỏ dấu "| |" trong công thức (3) ta chú ý các trường hợp sau:

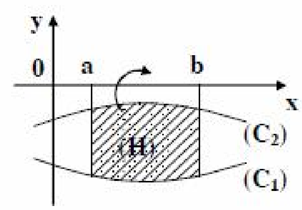
<u>TH1</u>: $(C_1) \cap (C_2) = \varnothing$ và $f(x) > g(x) \ge 0, \forall x \in [a; b]$:

$(3) \Leftrightarrow V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)].dx$



<u>TH2</u>: $(C_1) \cap (C_2) = \varnothing$ và $f(x) < g(x) \le 0, \forall x \in [a; b]$:

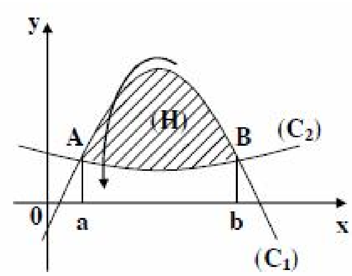
$(3) \Leftrightarrow V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)].dx$



<u>TH3</u>: (C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm A, B có hoành độ

$x = a, x = b$ và $d(x) > g(x) \ge 0, \forall x \in [a; b]$:

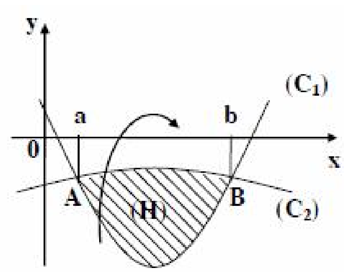
$(3) \Leftrightarrow V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)].dx$



<u>TH4</u>: (C_1) cắt (C_2) tại 2 điểm A, B có hoành độ

$x = a$ và $f(x) < g(x) \le 0, \forall x \in [a; b]$:

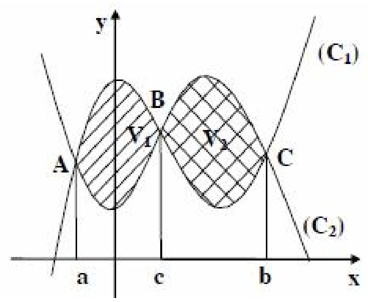
$(3) \Leftrightarrow V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)].dx$



TH5: (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm A, B, C, trong đó $x_A = a$
$x_B = b$, $x_C = c$ với $a < c < b$ như hình bên:

$(3) \Leftrightarrow V = V_1 + V_2$

$$= \pi\int_a^c [f^2(x) - g^2(x)]dx + \pi\int_c^b [g^2(x) - f^2(x)]dx.$$



Chú ý: Nếu đề toán yêu cầu **:** *Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi x=f(y),x=g(y), y=a,y=b, trục tung (x=0) quay quanh trục Oy*

thì ta áp dụng công thức $V = \pi\int_a^b \left|f^2(y) - g^2(y)\right|dy$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng xác định bởi

$a) y = x^2, y = 3x^2.$ $ĐS: \dfrac{162}{5}\pi$

$b) y = \dfrac{4}{x}; y = -x + 5$ $ĐS: 9\pi$

$c) y = 2 - x^2, y = 1,$ quay quanh trục Ox. $ĐS: \dfrac{56}{15}\pi$

$d) y = 2x - x^2, y = x,$ quay quanh trục Ox, $ĐS: \dfrac{\pi}{5}$

$e) y = \left(2x+1\right)^{\frac{1}{3}}, x = 0, y = 3,$ quay quanh trục Oy. $ĐS: \dfrac{480\pi}{7}$

f)$y = x^2 + 1, x = 0$ và hai tiếp tuyến với $y = x^2 + 1$ tại điểm (1;2), quanh trục Ox

$ĐS: \dfrac{8}{15}\pi$

g)y=lnx,y=0,x=e, quanh trục Oy. $ĐS: \dfrac{e^2+1}{2}\pi$

Bài 2. Tính thể tích các khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng xác định

$a) y = x^{\frac{2}{3}}, x = 0$ và tiếp tuyến với đường $y=x^{\frac{2}{3}}$ tại điểm có hoành độ x=1, quay quanh bởi trục Oy

$b) y = \dfrac{1}{x} - 1, y = 0, y = 2x,$ quanh trục Ox

c) y=$\left|2x-x^2\right|, y=0$ và x=3, quanh:

*Trục Ox

* Trục Oy

Hướng Dẫn và Đáp Số:

$a)\frac{\pi}{36}$. Phương trình tiếp tuyến là y=$\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

$$V=\pi\int_0^1 y^3dy-\pi\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}\right)^2dy=\frac{\pi}{36}$$

$b)\pi\left(\frac{5}{3}-2\ln 2\right)$

$c)V_x=\frac{18}{5}\pi \text{ và } V_y=\frac{59}{6}\pi$

$$HD: V_y=\pi\left\{\int_0^1\left[\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-y}\right)^2\right]\right\}dy+\int_0^3\left[9-\left(1+\sqrt{1+y}\right)^2\right]dy=\frac{59}{6}\pi$$

Bài 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường : $x=\sqrt{y}$; $x=0$; $y=-x+2$.

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục Oy.

Hướng dẫn và đáp số:

Phương trình định tung độ giao điểm :

$$\sqrt{y}=2-y\leftrightarrow\begin{cases}2-y\ge 0\\ y^2-5y+4=0\end{cases}$$

$$\leftrightarrow\begin{cases}y\le 2\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=4\ (l)\end{array}\right.\end{cases}\leftrightarrow y=1$$

Đường thẳng y = 2 – x cắt trục tung tại y = 2

Thể tích khối tròn xoay cần tìm : V = V_1+V_2

Trong đó $V_1=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2dy=\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$ (đvtt)

$$V_2=\pi\int_1^2(2-y)^2dy=\pi\int_1^2(y-2)^2d(y-2)=\pi\frac{(y-2)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{\pi}{3}\quad\text{(đvtt)}$$

$$V = \frac{5\pi}{6} \quad (đvtt)$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

MỘT SỐ BÀI TẬP CẦN LÀM TRƯỚC KHI THI

Bài 1. Tính tích phân: $\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}dx$.

ĐS: $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$\int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$. $(Khối\, D - 2009)$. $ĐS: -2 + \ln\left(e^2 + e + 1\right)$

HD: Thêm lượng và bớt lượng $\int_1^3 \frac{1 - e^x + e^x dx}{e^x - 1}$

Bài 3. Tính các tích phân sau:

$\int_1^e \frac{\ln x}{x\left(2+\ln x\right)^2}dx$.(Khối B-2010) $HD: Đặt\, t = \ln x.$ $ĐS: \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$

Bài 4. Tính các tích phân sau:

$\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{1}{e^{2x} + 2e^{-x} - 3}dx$.(Khối B-2006) $HD: Đặt\, t = e^x.$ $ĐS: \ln\frac{3}{2}$

Bài 5. Tính $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$ $HD: x = 2\sin t.$ $ĐS: \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

Bài 6. Tính tích phân sau : $I = \int_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^3}dx.$ HD :Chia cả tử và mẫu cho x^2. $ĐS: \ln\frac{4}{5}$

Bài 7. Tính tích phân: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

Hướng dẫn: $I = \int_{-1}^{1} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x\right)^2 - \left(1+x^2\right)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{2x}dx = ... = 1$

Bài 8. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x.\ln(\cos x)}{\cos x}dx. HD: t = \cos x.$ $ĐS: \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$.

Bài 9: Tính tích phân: $I = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} + \ln^2 x \right) dx$

Giải:

$I = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} + \ln^2 x \right) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx + \int_1^e \ln^2 x dx = I_1 + I_2$

Tính $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Leftrightarrow t^2 = 1 + lnx \Rightarrow 2tdt = \frac{dx}{x}$

Đổi cận:

x	1	e
t	1	$\sqrt{2}$

Khi đó: $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\left(t^2-1\right)tdt}{t} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(t^2-1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - 1\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Tính $I_2 = \int_1^e \ln^2 x dx$

Đặt $\begin{cases} u = ln^2 x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2lnx}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$I_2 = \int_1^e ln^2 xdx = xln^2 x\Big|_1^e - \underbrace{\int_1^e lnxdx}_{I_3} = e - 2\underbrace{\int_1^e lnxdx}_{I_3}$

Tính $I_3 = \int_1^e lnxdx$

Đặt $\begin{cases} u = lnx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I_3 = \int_1^e lnxdx = xlnx\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = -1$$

Suy ra: $I_2 = \int_1^e ln^2xdx = e - 2I_3 = e - 2$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + e - 2 = e - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Bài 10. Tính tích phân: $\int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}}dx.$ $HD: t = \sqrt{3x+1}.$ $DS: \frac{2}{3}e^2$

Bài 11: Tính tích phân: $I = \int_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{e^x} + 2\right)^2}$

Giải:

Ta có: $I = \int_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{e^x} + 2\right)^2} = \int_0^{3\ln 2} \frac{e^{\frac{x}{3}}dx}{e^{\frac{x}{3}}\left(e^{\frac{x}{3}} + 2\right)^2}$

Đặt $t = e^{\frac{x}{3}} \Rightarrow dt = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}dx \Rightarrow 3dt = e^{\frac{x}{3}}dx$

Đổi cận:

x	0	3ln2
t	1	2

Khi đó:

$$I=\int_0^{3\ln 2}\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{e^x}+2\right)^2}=\int_0^{3\ln 2}\frac{e^{\frac{x}{3}}dx}{e^{\frac{x}{3}}\left(e^{\frac{x}{3}}+2\right)^2}=3\int_1^2\frac{dt}{t\left(t+2\right)^3}=3\int_1^2\left(\frac{1}{4t}-\frac{1}{4\left(t+2\right)}-\frac{1}{2\left(t+2\right)^2}\right)=$$

$$=3\left(\frac{1}{4}ln\left|t\right|-\frac{1}{4}ln\left|t+2\right|+\frac{1}{2\left(t+2\right)}\right)\Bigg|_1^2=3\left(\frac{1}{4}ln2-\frac{1}{4}ln4+\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{4}ln3+\frac{1}{6}\right)\right)$$

$$=\frac{3}{4}ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{8}$$

<u>Bài 12</u>: Tính tích phân: $I=\int_0^3\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx$

Giải:

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$

Đổi cận:

x	0	3
t	1	2

Khi đó:

$$I=\int_0^3\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx=\int_1^2\frac{t^2-4}{3t+t^2-2}2tdt=\int_1^2\frac{2t^3-8}{3t+t^2+2}dt=\int_1^2\left(2t-6\right)dt+6\int_1^2\frac{dt}{t+1}$$

$$=\left(t^2-6t\right)\Big|_1^2+6ln\left|t+1\right|\Big|_1^2=6ln\frac{3}{2}-3$$

<u>Bài 13</u>: Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3sinx-2\cos x}{\left(\sin x+cosx\right)^3}dx$

Giải:

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	0

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3sinx-2\cos x}{\left(\sin x+cosx\right)^3}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{3\cos t-2\sin t}{\left(cos t+\sin t\right)^3}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x-2\sin x}{\left(cos x+sinx\right)^3}dx$

Suy ra: 2I = I + I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3sinx-2\cos x}{\left(\sin x+cosx\right)^3}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x-2\sin x}{\left(cos x+sinx\right)^3}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(cos x+sinx\right)^2}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$ 1. Vậy I = $\frac{1}{2}$.

Bài 14: Tính tích phân: $I=\int_0^4\frac{x+1}{\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}dx$

Giải:

Đặt $t=1+\sqrt{1+2x}\Rightarrow dt=\frac{dx}{\sqrt{1+2x}}\Rightarrow dx=\left(t-1\right)dt$ và $x=\frac{t^2-2t}{2}$

Đổi cận:

x	0	4
t	2	4

Khi đó: $I=\int_0^4\frac{x+1}{\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{\left(t^2-2t+2\right)\left(t-1\right)}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{t^3-3t^2+4t-2}{t^2}dt$

$=\frac{1}{2}\int_2^4\left(t-3+\frac{4}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-3t+4ln\left|t\right|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|_2^4=2\ln 2-\frac{1}{4}$

Bài 15: Tính tích phân: $I = \int_0^1 \left(x^2 \sin x^3 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \right) dx$

Giải:

$$I = \int_0^1 \left(x^2 \sin x^3 + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right) dx = \int_0^1 x^2 \sin x^3 dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = I_1 + I_2$$

Tính $I_1 = \int_0^1 x^2 \sin x^3 dx$

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3}$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	1

Khi đó: $I_1 = \int_0^1 x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \sin t dt \ -\frac{1}{3} cos t \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(cos 1 - 1)$

Tính $I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

Đặt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	1

Khi đó:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2t \Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2 - 2I_3$$

Tính $I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$

Đặt $t = tanu \Rightarrow dt = \left(1 + tan^2 u\right) du = \left(1 + u^2\right) du =$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Khi đó: $I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = u \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

Suy ra: $I_2 = 2 - 2I_3 = 2 - \frac{\pi}{2}$

Vậy: $I = -\frac{1}{3}\left(cos1 - 1\right) + 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}cos1 - \frac{\pi}{2}$

<u>Bài 16</u>: Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{cos2x} dx$

Giải:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{cos2x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{tan^2 x + 1}{\left(tan^2 x + 1\right)^2} dx$$

Đặt $t = tanx \Rightarrow dt = \frac{dx}{cos^2 x} = \left(tan^2 x + 1\right) dx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{6}$
t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Khi đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{cos2x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{tan^2x+1}{\left(tanx+1\right)^2}dx=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\left(t+1\right)^2}dx=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{d\left(t+1\right)}{\left(t+1\right)^2}=\frac{1}{t+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Bài 17: Tính tích phân: $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

Giải:

Đặt $t=x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow t-x=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow t^2-2tx+x^2=1+x^2\Leftrightarrow x=\frac{t^2-1}{2t}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

Đổi cận:

x	-1	1
t	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$

Khi đó:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dt}{\left(1+t\right)t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}ln\left|1+t\right|\Bigg|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{t}-ln\left|t\right|+ln\left|1+t\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}=1$$

Bài 18: Tính tích phân: $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinx}{\sqrt{1+x^2}+x}dx$

Giải:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{sinx}{\sqrt{1+x^2}+x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx=I_1+I_2$$

Tính $I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$

Đổi cận:

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
t	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$

Khi đó: $I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Suy ra $2I_1 = I_1 + I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 0$

Tính $I_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = sinxdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -cosx \end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I_2 = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx = -xco\text{s}\, x \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} co\text{s}\, x dx = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \text{s}inx \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}$$

Suy ra: $I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}$

Bài 19: Tính tích phân: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{cos^2 x + 3cosx + 2}$

Giải:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{cos^2x+3cosx+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cosx}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}=I_1-I_2$$

Tính $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cosx}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{cos^2\frac{x}{2}}=tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

Tính $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+tan^2\frac{x}{2}}{3+tan^2\frac{x}{2}}dx$

Đặt $tan\frac{x}{2}=\sqrt{3}tant\Rightarrow\left(1+tan^2\frac{x}{2}\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+tan^2t\right)dt$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{6}$

Khi đó: $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+cosx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+tan^2\frac{x}{2}}{3+tan^2\frac{x}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Vậy: $I=I_1-I_2=1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

<u>Bài 20</u>: Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{\left(2+cosx\right)^3}dx$

Giải:

Đặt $t=2+cosx\Rightarrow dt=-sinxdx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	3	2

Khi đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{\left(2+cosx\right)^3}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinxcosx}{\left(2+cosx\right)^3}dx=-2\int_3^2\frac{t-2}{t^3}dt=2\int_2^3\frac{t-2}{t^3}dt=2\left(\int_2^3\frac{1}{t^2}dt-2\int_2^3\frac{1}{t^3}dt\right)$$

$$=2\left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\Big|_2^3=\frac{1}{18}$$

<u>Bài 21</u>: Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{sin^2x}\sin xcos^3xdx$

Giải:

Đặt $t=sin^2x\Rightarrow dt=2cosxsinxdx$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{sin^2x}\sin xcos^3xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{sin^2x}cos^2x\sin xcosxdx=\frac{1}{2}\int_0^1e^t\left(1-t\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1e^tdt-\frac{1}{2}\int_0^1te^tdt$

$$=\frac{1}{2}e^t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1te^tdt=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I_1$$

Tính $I_1=\int_0^1te^tdt$

Đặt $\begin{cases}u=t\\dv=e^tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\v=e^t\end{cases}$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần

$$I_1 = \int_0^1 te^t dt = te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - e^t \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$$

Vậy: $I = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}e - 1$

D. PHỤ LỤC

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ KHÔNG LÀM THAY ĐỔI CẬN TÍCH PHÂN

Bài toán mở đầu : Tính tích phân $I=\int_{-3}^{5}\left(x^3-3x^2+2\right)^3 dx$

Khi gặp bài toán này, chắc chắn rằng tất cả các bạn đều nghĩ cách khai triển biểu thức dưới dấu tích phân để đưa về các tích phân cơ bản để tính. Đó là một cách suy nghĩ thường hay gặp phải. Nhưng bạn hãy thử làm xem sao, và hãy thử thay $(x^3-3x^2+2)^3$ bằng $(x^3-3x^2+3)^7$, $(x^3-3x^2+3)^9$ .... rồi tính nhé!. Sau đó mời các bạn nghiên cứu lời giải sau:

Lời giải: Đặt x=2-t $\Rightarrow\begin{cases} dx=-dt \\ x=-3: t=5 \\ x=5: t=-3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\int_{5}^{-3}\left((2-t)^3-3(2-t)^2+2\right)^3 dt=\int_{-3}^{5}\left(-t^3+3t^2-2\right)^3 dt=-\int_{-3}^{5}\left(t^3-3t^2+2\right)^3 dt$$

$$=-\int_{-3}^{5}\left(x^3-3x^2+2\right)^3 dx=-I\Rightarrow 2I=0\Leftrightarrow I=0$$

Khi đọc xong lời giải trên chắc chắn các bạn sẽ đặt câu hỏi : Tại sao lại đặt ẩn phụ như vậy? Để tìm câu trả lời xin mời các bạn nghiên cứu tiếp bài toán tổng quát sau:

Bài toán tổng quát: Cho f(x) là hàm lẻ, liên tục trên [-a; a].

Chứng minh rằng $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

Đây là một bài tập khá quen thuộc với các bạn khi học tích phân và nhiều bạn đã biết cách giải. Xong các bạn hãy xem kỹ lời giải sau để " phát hiện" ra vấn đề.

Lời giải: Đặt x= -t $\Rightarrow\begin{cases} dx=-dt \\ x=-a: t=a \\ x=a: t=-a \end{cases}$

$\Rightarrow I=\int_{-a}^{a} f(x)dx=-\int_{a}^{-a} f(-t)dt=\int_{-a}^{a} f(-t)dt$. Do f(x) là hàm lẻ nên f(-x)=-f(x) do đó

$$\Rightarrow I=\int_{-a}^{a} f(-t)dt=-\int_{-a}^{a} f(t)dt=-\int_{-a}^{a} f(x)dx=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=0$$

Qua 2 bài toán trên, điểm chung của cách đặt ẩn phụ là gì?

Câu trả lời là : **Đặt ẩn phụ nhưng không làm thay đổi cận của tích phân.**

Cách đặt tổng quát khi gặp tích phân $\int_a^b f(x)dx$ ***mà không thay đổi cận là*** *đặt x=a+b-t.*

Bài toán mở đầu còn có cách giải khác khá hay để dẫn tới một " suy nghĩ" mới như sau:

Đặt x=1-t $\Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = -3 : t = 4 \\ x = 5 : t = -4 \end{cases} \Rightarrow I = -\int_4^{-4} \left((1-t)^3 - 3(1-t)^2 + 2\right)^3 dt = \int_{-4}^{4} \left(-t^3 + 3t\right)^3 dt$.

Sử dụng kết quả chứng minh của bài toán 2 ta được I=0 (do f(t)= $-t^3+3t$ *là hàm số lẻ).*

Vậy " suy nghĩ" mới ở đây là gì? Việc đặt ẩn phụ như vậy ta đã dẫn đến tích phân có cận "đối xứng" . Trong trường hợp tổng quát để dẫn đến cận " đối xứng" khi gặp tích phân $\int_a^b f(x)dx$ các bạn hãy đặt $x = \frac{a+b}{2} - t$

Bây giờ chúng ta cùng vận dụng suy nghĩ đó để giải một số bài toán sau:

Bài toán 3: Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx$ (Đề thi đại học năm 2000).

Lời giải:

Đặt x=-t $\Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = -\frac{\pi}{4} : t = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} : t = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ (cách đặt này đã không làm thay đổi cận của tích phân) .

Khi đó $I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6(-t) + \cos^6(-t)}{6^{-t} + 1} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 6^t . \frac{\sin^6 t + \cos^6 t}{6^t + 1} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 6^x . \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 6^x.\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1}dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1}dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 3s\text{in}^2 x\cos^2 x\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{3}{4}s\text{in}^2 2x\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{3}{4}s\text{in}^2 2x\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}cos4x\right)dx$$

$$= \left(\frac{5x}{8} + \frac{3}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{16}.$$

Chú ý: Bài toán 3 có dạng tổng quát sau: Nếu f(x) là hàm số liên tục, chẵn thì $I = \int_{-b}^{b} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \int_{-b}^{b} a^x\frac{f(x)}{a^x + 1}dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} f(x)dx$ **.**

Bài toán 4: Tính tích phân $\text{I} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x - 4}dx$

Thông thường khi gặp tích phân trên, hầu hết các bạn đều nghĩ đến phương pháp tính tích phân từng phần. Xong các bạn hãy thử làm như thế và so sánh với lời giải sau:

Lời giải : Đặt $x = \pi - t \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = 0 : t = \pi \\ x = \pi : t = 0 \end{cases}$

Khi đó $I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{\cos^2(\pi - t) - 4}dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{\cos^2 t - 4}dt = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t - 4}dt - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{\cos^2 t - 4}dt$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x - 4}dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}dx - I$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}dx \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4}dx$$

Đặt $cosx = t \Rightarrow \begin{cases} sinxdx = -dt \\ x = 0 : t = 1 \\ x = \pi : t = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{dt}{t^2-4} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(t-2)(t+2)} = \frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{\pi\ln 3}{4}$$

Chú ý: Bài toán 4 có thể tổng quát như sau:

Cho hàm số f(x) liên tục và thoả mãn: f(a+b-x) = f(x) .

Khi đó $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

(để chứng minh kết quả trên các bạn hãy đặt x= a+b-t).

Bài toán 5: Tính tích phân $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}}$ (Đề thi khối A năm 2004)

Với bài toán trên, cách đặt như thế nào để không thay đổi cận của tích phân.

Lời giải: Đặt $\mathrm{t} = 1+\sqrt{x-1}$

Khi đó $\mathrm{x - 1 = (t - 1)^2}$ hay $\mathrm{x=(t-1)^2+1} \Rightarrow \begin{cases} dx = 2(t-1)dt \\ x = 1 : t = 1 \\ x = 2 : t = 2 \end{cases}$ (cách đặt này đảm bảo cận không đổi !)

$$\Rightarrow 2\int_1^2 \frac{(t-1)\left[(t-1)^2+1\right]}{t}.dt = 2\int_1^2 \frac{t^3-3t^2+4t-1}{t}.dt = 2\int_1^2\left(t^2-3t+4-\frac{1}{t}\right).dt$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + 4t - \ln|t|\right)\Bigg|_1^2 = \frac{5}{3} - 2\ln 2 .$$

Chú ý: Bài toán 5 có thể tổng quát dạng $\int_a^b \frac{p(x)}{\sqrt{mx+n}+c}dx$ với p(x) là đa thức chứa biến x; m,n,c là các hằng số . Ta có thể đặt $t = \sqrt{mx+n}+c$ hoặc $t = \sqrt{mx+n}$ đều giải được.

Bài toán 6: Tính tích phân $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}dx$

Lời giải: Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow\begin{cases}dx=-dt\\ x=0:t=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}:t=0\end{cases}$

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=J$$

$$\Rightarrow I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x.\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\left(x+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.$$ Vậy $\begin{cases}I=J\\ I+J=\frac{\pi-1}{2}\end{cases}\Rightarrow I=\frac{\pi-1}{4}$

Chú ý: Bài toán 6 có thể tổng quát thành các dạng sau:

$$\int_a^b\frac{\sin^k mx}{\sin mx+\cos mx}dx\quad;\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin^m ax}}{\sqrt[n]{\sin^m ax}+\sqrt[n]{\cos^m ax}}$$

Qua 6 bài toán trên, tác giả muốn các bạn học sinh có thêm một cách nhìn mới để tiếp cận với phương pháp đặt ẩn phụ trong tính tích phân. Rất mong nhận được sự quan tâm trao đổi.

Cuối cùng mời các bạn vận dụng vào một số bài tập sau:

Tính các tích phân:

$$I_1=\int_0^1\frac{4x-3}{\sqrt{3x+1}+2}dx \qquad I_2=\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}dx$$

$$I_3=\int_{-1}^{1}\left[\lg\left(\sqrt{x^2+1000}+x\right)-\frac{3}{2}\right]dx \qquad I_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$I_5=\int_{-2000}^{2004}\left(x^3-6x^2+16\right)^5dx \qquad I_6=\int_{-1}^{5}e^{x^2-4x+7}\left(x^3-6x+16\right)^{2n+1}dx$$

$I_7 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x.\sin 2x.\cos 3x}{2^x+1}dx$

$I_8 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$

$I_9 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.\sin 2x.\cos 5x}{e^x+1}dx$

$I_{10} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x(tgx+\cot gx)dx$

$I_{11} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}dx$

$I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

$I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}\right)dx$

$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}dx$

SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG TÍNH TÍCH PHÂN

Trong đề thi tốt nghiệp THPT, Đại học , Cao đẳng, THCN của hàng năm bài toán tích phân hầu như không thể thiếu, bài toán về tích phân là một trong những bài toán khó vì nó cần đến sự áp dụng linh hoạt của định nghĩa, các tính chất , các phương pháp tính của tích phân.

Chuyên đề này hy vọng sẽ góp phần giúp các em học sinh hiểu sâu hơn và tránh được những sai lầm thường mắc phải khi giải bài toán về tích phân.

- Đưa ra hệ thống lí thuyết, hệ thống các phương pháp giải.
- Bài tập ứng với từng dạng toán, và chỉ ra những lỗi thường mắc phải của học sinh.

Bài tập 1: Tính tích phân sau I $= \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2}$

Giải:

Hàm số y = $\frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại x= $-1 \in \left[-2;2\right]$ suy ra hàm số không liên tục trên $\left[-2;2\right]$ do đó tích phân trên không tồn tại.

Chú ý: Nhiều học sinh thường mắc sai lầm như sau:

I = $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-2}^{2} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2}$ =- $\frac{1}{x+1} \Big|_{-2}^{2}$ =- $\frac{1}{3}$ -1 = - $\frac{4}{3}$

Nguyên nhân sai lầm :

Hàm số y = $\frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại x= -1 $\in \left[-2;2\right]$ suy ra hàm số không liên tục trên $\left[-2;2\right]$ nên không sử dụng được công thức newtơn – leibnitz như cách giải trên.

Chú ý đối với học sinh:

Khi tính $\int_a^b f(x)dx$ cần chú ý xem hàm số y=f(x) có liên tục trên $\left[a;b\right]$ không? nếu có thì áp dụng phương pháp đã học để tính tích phân đã cho còn nếu không thì kết luận ngay tích phân này không tồn tại.

Bài 2 :Tính tích phân: I = $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$

Giải:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \int_0^{\pi} \frac{d\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \text{tg}\frac{\pi}{4} - tg\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 2$$

Sai lầm thường gặp: Đặt t = tan $\frac{x}{2}$ thì dx = $\frac{2dt}{1+t^2}$; $\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = \int 2(t+1)^{-2}\, d(t+1) = -\frac{2}{t+1} + c$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{-2}{\tan\frac{x}{2}+1}\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\tan\frac{\pi}{2}+1} - \frac{2}{\tan 0+1}$$

do tan $\frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân trên không tồn tại

Nguyên nhân sai lầm:

Đặt t = tan $\frac{x}{2}$ x $\in \left[0;\pi\right]$ tại x = π thì tan $\frac{x}{2}$ không có nghĩa.

Chú ý đối với học sinh:

Đối với phương pháp đổi biến số khi đặt t = u(x) thì u(x) phải là một hàm số liên tục và có đạo hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$.

Một số bài tập tương tự: Tính các tích phân sau

1/ $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin x}$ 2/ $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$

Bài 3: Tính I = $\int_0^4\sqrt{x^2-6x+9}$ dx

Sai lầm thường gặp:

$$I=\int_0^4\sqrt{x^2-6x+9}\,dx=\int_0^4\sqrt{\left(x-3\right)^2}dx=\int_0^4\left(x-3\right)d\left(x-3\right)=\frac{\left(x-3\right)^2}{2}\Big|_0^4=\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-4$$

Nguyên nhân sai lầm:

Phép biến đổi $\sqrt{\left(x-3\right)^2}=x-3$ với x $\in\left[0;4\right]$ là không tương đương.

Lời giải đúng:

$$I=\int_0^4\sqrt{x^2-6x+9}\,dx$$

$$=\int_0^4\sqrt{\left(x-3\right)^2}dx=\int_0^4\left|x-3\right|d\left(x-3\right)=\int_0^3-\left(x-3\right)d\left(x-3\right)+\int_3^4\left(x-3\right)d\left(x-3\right)$$

$$=-\frac{\left(x-3\right)^2}{2}\Big|_0^3+\frac{\left(x-3\right)^2}{2}\Big|_3^4=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$$

Chú ý đối với học sinh: $\boxed{\sqrt[2n]{\left(f\left(x\right)\right)^{2n}}=\left|f\left(x\right)\right|,\left(n\ge 1,n\in N\right)}$

I = $\int_a^b\sqrt[2n]{\left(f\left(x\right)\right)^{2n}}=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$ ta phải xét dấu hàm số f(x) trên $\left[a;b\right]$ rồi dùng tính chất tích phân tách I thành tổng các phân không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Một số bài tập tương tự:

1/ I = $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}$ dx ; 2/ I = $\int_0^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}$ dx

3/ I = $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)}$ dx 4/ I = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{tg^2x+\cot g^2x-2}$ dx

Bài 4: Tính I = $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

Sai lầm thường gặp:

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2+1}=\arctan\left(x+1\right)\Big|_{-1}^{0}=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$$

Nguyên nhân sai lầm :

Đáp số của bài toán thì không sai. Nhưng sử dụng công thức trên không có trong bảng nguyên hàm

Lời giải đúng:

Đặt x+1 = tant $\Rightarrow dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$

với x=-1 thì t = 0

với x = 0 thì t = $\frac{\pi}{4}$

Khi đó I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1+\tan^2 t\right)dt}{\tan^2 t+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

Chú ý đối với học sinh:

Khi gặp tích phân dạng

- $\int_a^b\frac{1}{1+x^2}dx$ ta dùng phương pháp đổi biến số đặt t = tanx hoặc t = cotx
- $\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ thì đặt x = sint hoặc x = cost

***Một số bài tập tương tự*:**

1/ I = $\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$ 2/ I = $\int_0^1 \frac{2x^3+2x+3}{x^2+1}dx$ 3/ I = $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$

Bài 5: Tính :I = $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Suy luận sai lầm: Đặt x= sint , dx = costdt

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin^3 t}{|\cos t|}dt$$

Đổi cận: với x = 0 thì t = 0

với x= $\frac{1}{4}$ thì t = ?

Nguyên nhân sai lầm:

Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1-x^2}$ thì thường đặt x = sint nhưng đối với tích phân này sẽ gặp khó khăn khi đổi cận cụ thể với x = $\frac{1}{4}$ không tìm được chính xác t = ?

Lời giải đúng:

Đặt t = $\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$ dt = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow tdt = xdx$

Đổi cận: với x = 0 thì t = 1; với x = $\frac{1}{4}$ thì t = $\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} \frac{(1-t^2)tdt}{t} = \int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} (1-t^2)dt = \left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{15\sqrt{15}}{192}\right)-\frac{2}{3} = \frac{33\sqrt{15}}{192}-\frac{2}{3}$$

Chú ý đối với học sinh: Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1-x^2}$ thì thường đặt x = sint hoặc gặp tích phân của hàm số có chứa 1+x^2 thì đặt x = tant nhưng cần chú ý đến cận của tích phân đó nếu cận là giá trị lượng giác của góc đặc biệt thì mới làm được theo phương pháp này còn nếu không thì phải nghĩ đến phương pháp khác.

Một số bài tập tương tự:

1/ tính I = $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 2/tính I = $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

Bài 6: Tính I = $\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{1+x^4}dx$

Sai lầm thường gặp : I = $\int_{-1}^{1} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx$

Đặt t = x+ $\frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

Đổi cận với x = -1 thì t = -2 ; với x=1 thì t=2;

I = $\int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^2-2} = \int_{-2}^{2} (\frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}})dt = (\ln\left|t+\sqrt{2}\right| - \ln\left|t-\sqrt{2}\right|)\Big|_{-2}^{2} = \ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|\Big|_{-2}^{2}$

$= \ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \ln\left|\frac{-2+\sqrt{2}}{-2-\sqrt{2}}\right| = 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

Nguyên nhân sai lầm: $\frac{x^2-1}{1+x^4} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}$ là sai vì trong $\left[-1;1\right]$ chứa x = 0 nên không thể chia cả tử cả mẫu cho x = 0 được. Nhưng từ sai lầm này nếu các bạn thấy rằng x=0 không thuộc thuộc tập xác định thì cách làm như trên thật tuyệt vời.

Lời giải đúng:

Xét hàm số F(x) = $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$ (áp dụng phương pháp hệ số bất định)

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1})' = \frac{x^2-1}{x^4+1}$

Do đó I = $\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{1+x^4}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

Chú ý đối với học sinh: Khi tính tích phân cần chia cả tử cả mẫu của hàm số cho x cần để ý rằng trong đoạn lấy tích phân phải không chứa điểm $x = 0$.

ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỪ 2009 -2012

NĂM 2012: Tính các tích phân sau

Bài 1. ĐH Khối A – 2012: $\mathrm{I} = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx$. **ĐS:** $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\ln 2 + \ln 3$

Bài 2. ĐH Khối B – 2012: $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$ **ĐS:** $\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2$

Bài 3. ĐH Khối D – 2012: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)dx$ **ĐS:** $\frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$

Bài 4. CD Khối A,B,D-2012: $I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ **ĐS:** $\frac{8}{3}$

NĂM 2011: Tính các tích phân sau

Bài 1. ĐH Khối A – 2011: $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x + (x+1)\cos x}{x\sin x + \cos x}dx$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + \ln(\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2})$

Bài 2. ĐH Khối B – 2011: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx$ **ĐS:** $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Bài 3. ĐH Khối D – 2011: $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$ **ĐS:** $\frac{34}{3} + 10\ln\frac{3}{5}$

Bài 4. CD Khối A,B,D-2011: $I = \int_1^2 \frac{2x+1}{x(x+1)}dx$ **ĐS:** $\ln 3$

NĂM 2010: Tính các tích phân sau

Bài 1. ĐH Khối A – 2010 $I = \int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ **ĐS:** $I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+2e}{3}$

Bài 2. ĐH Khối B – 2010 $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$ **ĐS:** $I = -\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{2}$

Bài 3. ĐH Khối D – 2010 $I=\int_1^e \left(2x-\frac{3}{x}\right)\ln x dx$ **ĐS:** $I=\frac{e^2-2}{2}$

Bài 4. CD Khối A,B,D-2010 $I=\int_0^1 \frac{2x-1}{x+1}dx$ **ĐS:** $I=\frac{e^2-2}{2}$

NĂM 2009: Tính các tích phân sau

Bài 1. ĐH Khối A – 2009 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x-1)\cos^2 x dx$ **ĐS:** $I=\frac{8}{15}-\frac{\pi}{4}$

Bài 2. ĐH Khối B – 2009 $I=\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}dx$ **ĐS:** $I=\frac{1}{4}\left(3+\ln\frac{27}{16}\right)$

Bài 3. ĐH Khối D – 2009 $I=\int_1^3 \frac{dx}{e^x-1}$ **ĐS:** $\ln\left(e^2+e+1\right)-2$

Bài 4. CD Khối A,B,D-2009 $I=\int_0^1 \left(e^{-2x}+x\right)e^x dx$ **ĐS:** $2-\frac{1}{e}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Đậu Thế Cấp, Huỳnh Công Thái (2008),** *Các kĩ thuật và phương pháp tính tích phân*
2. **Phạm Kim Chung (2008),** *Bài giảng tích phân*
3. **Trần Đình Cư (2011),** *Bài giảng luyện thi cấp tốc chuyên đề tích phân.*
4. **Phan Huy Khải (2008),** *Nguyên hàm- Tích phân và ứng dụng*
5. **Trần Sĩ Tùng (2010),** *Tuyển tập các bài toán tích phân*
6. **Toán hoc và tuổi trẻ**