TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỒ ÁN 2

Phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bất đẳng thức biến phân

Sinh viên: VŨ THỊ TÂM

tam.vt185403@sis.hust.edu.vn

Ngành Toán Tin

Giảng viên hướng dẫn: **PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY** ______ Chữ kí của GVHD

Bộ môn: **Toán ứng dụng**

Viện: **Toán ứng dụng và Tin học**

HÀ NỘI–2022

NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN

1. Mục tiêu và nội dung của đồ án

(a) Mục tiêu: Đề tài đồ án nghiên cứu về phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực.

(b) Nội dung: Giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân, nêu mối liên hệ với bài toán giải phương trình toán tử và điểm bất động; trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực; chứng minh sự hội tụ của phương pháp; đề xuất và tính toán ví dụ số minh họa.

2. Kết quả đạt được

(a) Dịch và trình bày kết quả trong [12] và một số tài liệu liên quan về phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân.

(b) Chứng minh sự hội tụ mạnh của các phương pháp.

(c) Đưa và và tính toán ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của phương pháp trong không gian Hilbert thực hữu hạn chiều.

3. Ý thức làm việc của sinh viên:

(a) Có ý thức, trách nhiệm trong quá trình học tập và làm đồ án.

(b) Đam mê, ham học hỏi và tìm hiểu những kiến thức chuyên sâu liên quan đến đồ án.

(c) Hoàn thành tốt đồ án, đáp ứng yêu cầu đề ra.

Hà Nội, ngày 22 tháng 02 năm 2022

Giảng viên hướng dẫn

PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

Lời cảm ơn

Đầu tiên, em xin gửi lời cảm ơn đến cô, PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, Bộ môn Toán ứng dụng, Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Thật may mắn khi em được cô hướng dẫn trong thời gian làm Đồ án 2. Ban đầu, hiểu biết của em về bài toán còn rất hạn chế. Nhưng cô đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn cho em rất nhiều điều, từ những điều nhỏ như cách đọc tài liệu chuyên ngành, dịch thuật, cách soạn thảo bằng LaTeX, tới những kiến thức quan trọng để em có thể hoàn thành được đồ án. Hơn nữa cô còn dành thời gian chỉ ra những lỗi sai của em. Em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới cô, em mong rằng trong những học kỳ tiếp theo vẫn sẽ tiếp tục được cô hướng dẫn đồ án.

Em xin gửi lời cảm ơn đến các anh chị, các bạn trong nhóm seminar "Bất đẳng thức biến phân và các vấn đề liên quan", đặc biệt là anh Nguyễn Trung Nghĩa và các bạn trong nhóm đồ án do cô Nguyễn Thị Thu Thủy hướng dẫn trong học kỳ này. Thời gian được học tập, trao đổi cùng với nhóm đã để lại cho em nhiều kinh nghiệm và mang tới nhiều kiến thức mà trước giờ em chưa biết tới để có thể hoàn thành đồ án.

Em cũng xin cảm ơn các Thày Cô Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã dạy dỗ em trong suốt những năm vừa qua, giúp em có nền tảng kiến thức vững chắc để hoàn thành đồ án này.

Hà Nội, ngày 22 tháng 02 năm 2022

Tác giả đồ án

Tâm

Vũ Thị Tâm

Tóm tắt nội dung Đồ án

Đồ án trình bày các nội dung sau:

1. Giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán giải phương trình toán tử và bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert thực H
2. Trình bày các kiến thức cơ sở liên quan đến việc xây dựng phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bài toán bất đẳng thức biến phân.
3. Trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm giải bài toán bất đẳng thức biến phân.
4. Đưa ra và tính toán ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của phương pháp trong không gian hữu hạn chiều.

Hà Nội, ngày 22 tháng 02 năm 2022

Tác giả đồ án

Vũ Thị Tâm

Mục lục

Bảng ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
H	không gian Hilbert thực
$\forall x$	với mọi x
$x \in D$	x thuộc tập D
$x \notin D$	x không thuộc tập D
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của x và y
$\|x\|$	chuẩn Euclide của x
P_C	phép chiếu mêtric lên tập C
HSDM	phương pháp lai ghép đường dốc nhất
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân được nhà toán học người Italia, Stampacchia và đồng nghiệp [6] nghiên cứu và đưa ra đầu tiên vào cuối những năm 60 và đầu những năm 70 của thế kỷ trước. Từ đó đến nay, bất đẳng thức biến phân luôn là một chủ đề nghiên cứu mang tính thời sự, thu hút được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu do vai trò quan trọng của bài toán trong lý thuyết toán học cũng như trong nhiều ứng dụng thực tế. Bất đẳng thức biến phân được chỉ ra là một công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán cân bằng chẳng hạn như bài toán cân bằng mạng giao thông, bài toán cân bằng thị trường độc quyền nhóm, bài toán cân bằng tài chính và bài toán cân bằng di cư.

Đồ án này nhằm tìm hiểu và trình bày các nghiên cứu về phương pháp lai ghép đường dốc nhất để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực.

Nội dung của đồ án được trình bày trong hai chương. Chương 1 giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực và mối liên hệ với bài toán giải phương trình toán tử, bài toán điểm bất động. Chương 2 trình bày một phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trên cơ sở bài báo [12], chứng minh sự hội tụ của phương pháp, đưa ra và tính toán ví dụ minh họa.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực

Chương này giới thiệu về ánh xạ không giãn, toán tử chiếu, toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert thực. Giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân và nêu mối liên hệ với bài toán giải phương trình toán tử và bài toán điểm bất động. Kiến thức của chương được viết trên cơ sở tổng hợp các tài liệu [1–3, 6, 10] và một số tài liệu được trích dẫn trong đó.

1.1 Toán tử chiếu trong không gian Hilbert

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Ký hiệu $\mathbb{R}$ để biểu thị tập hợp các số thực. Cho $T : C \to H$ là một ánh xạ. Ký hiệu $\mathcal{D}(T)$ và $\mathcal{R}(T)$ ký hiệu miền xác định và miền giá trị của T, I là toán tử đơn vị trong H.

Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có đẳng thức sau:

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in H. \tag{1.1}$$

1.1.1 Ánh xạ không giãn

Định nghĩa 1.1 (xem [3]) Cho C là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Ánh xạ $T : C \to H$ được gọi là

(i) Ánh xạ L-liên tục Lipschitz trên C nếu tồn tại hằng số $L \geq 0$ sao cho

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in C. \tag{1.2}$$

(ii) Trong (1.2), nếu $L \in [0, 1)$ thì T được gọi là ánh xạ co; nếu $L = 1$ thì T được gọi là ánh xạ không giãn.

Ví dụ 1.1 (a) Ánh xạ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $F(x) = \dfrac{1}{2}x$ là ánh xạ co với hệ số co là $\dfrac{1}{2}$; còn $F(x) = \cos x$ là ánh xạ không giãn.

(b) Ánh xạ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $F(x) = \dfrac{1}{3}Ax$ là ánh xạ co; còn $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}Ax$ là ánh xạ không giãn, ở đây $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

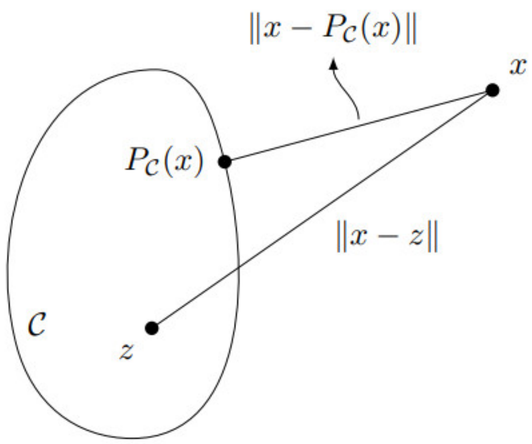
1.1.2 Toán tử chiếu

Định nghĩa 1.2 (xem [2]) Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực H. Phép chiếu mêtric chiếu H lên C được định nghĩa như sau: với mỗi $x \in H$ tồn tại duy nhất một phần tử $P_C x \in C$ thỏa mãn

$$\|x - P_C x\| \le \|x - y\| \quad \forall y \in C. \tag{1.3}$$

Từ Định nghĩa 1.2 ta thấy với mọi $x \in H$, $\overline{x} = P_C x$ khi và chỉ khi

$$\overline{x} \in C \quad \text{và} \quad \|x - \overline{x}\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in C\}. \tag{1.4}$$



Hình 1.1: Minh họa về phép chiếu metric

Bổ đề 1.1 (xem [3]) *Giả sử P_C là phép chiếu mêtric chiếu không gian Hilbert thực H lên một tập con lồi, đóng, khác rỗng C của H. Khi đó các kết luận sau là đúng:*

(i) $z = P_C x$ *nếu và chỉ nếu bất đẳng thức sau thỏa mãn*

$$\langle x - z,\, y - z\rangle \le 0, \quad x \in H,\ y \in C \tag{1.5}$$

(ii) Với mọi $x, y \in H$*,*

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \le \langle P_C x - P_C y,\, x - y\rangle\,. \tag{1.6}$$

Đặc biệt P_C *là ánh xạ không giãn, nghĩa là*

$$\|P_C x - P_C y\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in H \tag{1.7}$$

(iii) Với mọi $x, y \in H$ *ta có*

$$\|\left(I - P_C x\right) x - \left(I - P_C y\right) y\|^2 \le \langle\left(I - P_C\right) x - \left(I - P_C\right) y,\ x - y\rangle\,. \tag{1.8}$$

Đặc biệt

$$\|\left(I - P_C\right) x - \left(I - P_C\right) y\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in H. \tag{1.9}$$

Ký hiệu $\mathrm{Fix}(T)$ là tập điểm bất động của ánh xạ $T : H \to H$, nghĩa là

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in H \mid x = T(x)\}.$$

Ví dụ 1.2 Xét siêu phẳng $\mathcal{C}$ và nửa không gian đóng $\mathcal{Q}$ là hai tập con lồi đóng khác rỗng của một không gian Hilbert thực H được cho bởi

$$\mathcal{C} = \{x \in H \mid \langle a, x\rangle = b\}, \quad \mathcal{Q} = \{x \in H \mid \langle a, x\rangle \le b\}$$

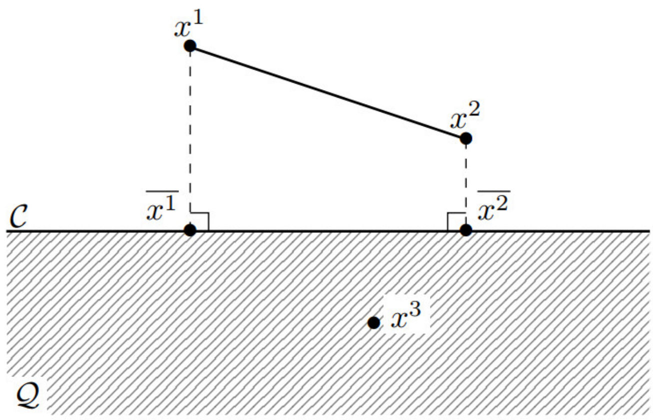
trong đó $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ và $b \in \mathbb{R}$. Với một điểm bất kỳ x thuộc H, ta có

$$P_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu} \quad \langle a, x\rangle = b, \\ x + \frac{b - \langle a, x\rangle}{\|a\|^2} a, & \text{nếu} \quad \langle a, x\rangle \ne b. \end{cases}$$

$$P_{\mathcal{Q}}(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu} \quad \langle a, x\rangle \le b, \\ x + \frac{b - \langle a, x\rangle}{\|a\|^2} a, & \text{nếu} \quad \langle a, x\rangle > b. \end{cases}$$

Lấy tùy ý các điểm x^1, x^2, x^3 trong không gian, giả sử như Hình 1.2. Khi đó, ta được: $P_{\mathcal{C}} x^1 = P_{\mathcal{Q}} x^1 = \overline{x^1}, P_{\mathcal{C}} x^2 = P_{\mathcal{Q}} x^2 = \overline{x^2}, P_{\mathcal{Q}} x^3 = x^3$. Bằng hình học, dễ thấy:

$$\left\|P_{\mathcal{C}} x^1 - P_{\mathcal{C}} x^2\right\| = \left\|\overline{x^1} - \overline{x^2}\right\| \le \left\|x^1 - x^2\right\|$$



Hình 1.2: Ví dụ về phép chiếu mêtric

tức $P_{\mathcal{C}}$ là ánh xạ không giãn, tương tự với $P_{\mathcal{Q}}$. Hơn nữa, từ công thức xác định phép chiếu mêtric lên $\mathcal{C}$ và $\mathcal{Q}$, dễ thấy tập điểm bất động của các ánh xạ $P_{\mathcal{C}}$ và $P_{\mathcal{Q}}$ là:

$$\text{Fix}\,(P_{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}, \quad \text{Fix}\,(P_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{Q}.$$

1.1.3 Toán tử đơn điệu

Định nghĩa 1.3 (xem [3]) Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực H, $T : C \to H$ là một toán tử từ C vào H. Toán tử A được gọi là:

(i) Toán tử đơn điệu nếu

$$\langle Tx - Ty,\, x - y\rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C \tag{1.10}$$

(ii) Toán tử η-đơn điệu mạnh, nếu tồn tại một hằng số $\eta > 0$ sao cho

$$\langle Tx - Ty,\, x - y\rangle \geq \eta\|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in C \tag{1.11}$$

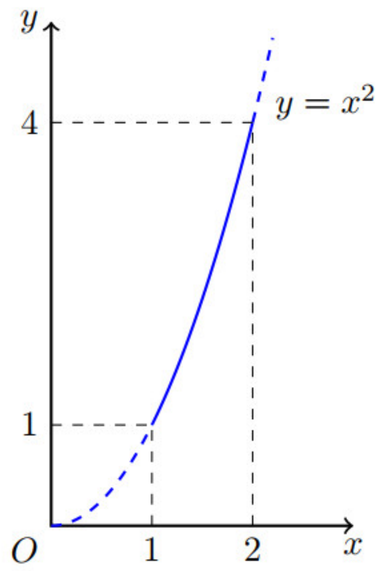
(iii) Toán tử đơn điệu mạnh ngược trên C với hệ số $\beta > 0$ (hay β-đơn điệu mạnh ngược trên C) nếu

$$\langle Tx - Ty,\, x - y\rangle \geq \beta\|Tx - Ty\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

Nhận xét 1.1 (a) Từ Bổ đề 1.1(ii) ta thấy toán tử chiếu P_C là toán tử đơn điệu mạnh ngược trên C với hằng số $\beta = 1$.

(b) Theo các Định nghĩa 1.1(i) và Định nghĩa 1.3(iii), nếu T là toán tử β-đơn điệu mạnh ngược thì T là ánh xạ L-liên tục Lipschitz với hằng số $L = \dfrac{1}{\beta}$.

Ví dụ 1.3 Xét hàm số $f(x) = x^2$ trên $C = [1, 2] \subset \mathbb{R}$ (xem Hình 1.3).



Hình 1.3: Đồ thị hàm số $y = x^2$ trên $[1, 2]$

Với mọi $x_1, x_2 \in C$ ta có

$$\begin{aligned}\langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2\rangle &= [f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2)\\ &= \left(x_1^2 - x_2^2\right)(x_1 - x_2)\\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2\\ &\geq 2.(x_1 - x_2)^2 = 2\|x_1 - x_2\|^2.\end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = x^2$ là 2-đơn điệu mạnh trên C. Mặt khác:

$$\begin{aligned}\|f(x_1) - f(x_2)\| &= |f(x_1) - f(x_2)|\\ &= \left|x_1^2 - x_2^2\right|\\ &= |x_1 + x_2|\,|x_1 - x_2|\\ &\leq 4|x_1 - x_2| = 4\|x_1 - x_2\|.\end{aligned}$$

Do đó, $f(x) = x^2$ là 4-liên tục Lipschitz trên C. Lại xét:

$$\begin{aligned}\langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2\rangle &= [f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2)\\ &= \left(x_1^2 - x_2^2\right)(x_1 - x_2)\\ &= \frac{1}{x_1 + x_2}\left|x_1^2 - x_2^2\right|^2\\ &= \frac{1}{x_1 + x_2}\left\|f(x_1) - f(x_2)\right\|^2\\ &\geq \frac{1}{4}\left\|f(x_1) - f(x_2)\right\|^2.\end{aligned}$$

Do vậy, $f(x) = x^2$ là $\frac{1}{4}$-đơn điệu mạnh ngược trên C.

1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân

1.2.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân

Bài toán 1.1 (xem [10]) Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực H và ánh xạ $F : C \to H$. Bài toán bất đẳng thức biến phân xác định bởi miền ràng buộc C và ánh xạ F (thường gọi là ánh xạ giá hay ánh xạ mục tiêu), ký hiệu $\mathrm{VI}(F, C)$, là bài toán:

$$\text{Tìm } x^* \in C \quad \text{sao cho} \quad \langle F(x^*), x - x^*\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{1.12}$$

Nếu F là toán tử đơn điệu thì ta có bất đẳng thức biến phân đơn điệu. Tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân (1.12) với ánh xạ giá F và tập ràng buộc C được ký hiệu là $\Omega_{(F,C)}$.

Bài toán bất đẳng thức biến phân có mối liên hệ trực tiếp với bài toán cực trị. Hãy xem xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.4 Cho hàm một biến thực f khả vi trên $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Tìm phần tử $x^* \in [a, b]$ thỏa mãn

$$f(x^*) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ba tình huống sau đây có thể xảy ra:

(i) Nếu $x^* \in (a, b)$ thì $f'(x^*) = 0$.

(ii) Nếu $x^* = a$ thì $f'(x^*) \geq 0$.

(iii) Nếu $x^* = b$ thì $f'(x^*) \le 0$.

Những phát biểu trên được tổng hợp thành

$$f'(x^*)(x - x^*) \ge 0 \quad \forall x \in [a, b],$$

đây là một bất đẳng thức biến phân.

1.2.2 Bài toán giải phương trình toán tử

Trong trường hợp đặc biệt nếu $C = H$, bài toán VI(F, C) tương đương với bài toán giải phương trình toán tử: tìm phần tử x^* sao cho $F(x^*) = 0$.

Mệnh đề 1.1 (xem [10]) *Nếu $H = \mathbb{R}^n$, $C = \mathbb{R}^n$ và ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ thì $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân* VI(F, C) *khi và chỉ khi x^* là nghiệm của phương trình toán tử $F(x^*) = 0$.*

Chứng minh. Nếu $F(x^*) = 0$ thì bất đẳng thức (1.12) xảy ra dấu bằng. Do đó, ta có $x^* \in \Omega_{(F,C)}$.

Ngược lại, nếu $x^* \in \Omega_{(F,C)}$ thì $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Chọn $x = x^* - F(x^*)$, ta được $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 \quad$ hay $-\|F(x^*)\|^2 \ge 0$. Do đó $F(x^*) = 0$. $\square$

1.2.3 Bài toán điểm bất động

Định nghĩa 1.4 (xem [2]) Cho C là tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực H và ánh xạ $T : C \to C$. Điểm $x \in C$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ T nếu $T(x) = x$.

Xét ánh xạ $T : C \to H$ được cho bởi

$$F(x) = x - T(x) \quad \forall x \in C.$$

Khi đó, bài toán VI(F, C) trùng với bài toán tìm điểm bất động Fix(T) của ánh xạ T. Thật vậy, nếu x^* là điểm bất động của ánh xạ T thì $T(x^*) = x^*$, khi đó $F(x^*) = 0$ và bất đẳng thức (1.12) xảy ra dấu bằng. Do đó $x^* \in \Omega_{(F,C)}$.

Ngược lại, nếu $x^* \in \Omega_{(F,C)}$ thì

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \ge 0 \quad \forall x \in C.$$

Chọn $x = T(x^*)$, ta được

$$\langle x^* - T(x^*), T(x^*) - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{hay} - \|T(x^*) - x^*\|^2 \geq 0.$$

Mặt khác, ta luôn có $\|T(x^*) - x^*\|^2 \geq 0$. Do đó $T(x^*) = x^*$. Tức là $x^* \in \mathrm{Fix}(T)$. □

Bổ đề 1.2 (xem [3]) *Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H và ánh xạ $T : C \to C$. Cho $x^* \in C$ và $\lambda > 0$. Khi đó, $x^* \in \Omega_{\mathrm{FC}}$ khi và chỉ khi $x^* \in \mathrm{Fix}(T)$, ở đây $T(x) = P_C(x - \lambda F(x))$.*

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa của $\mathrm{Fix}(T)$ với $T(x) = P_C(x - \lambda F(x))$, ta nhận được:

$$\begin{aligned}
x^* \in \mathrm{Fix}(T) \quad &\Leftrightarrow \quad x^* = T(x^*) \\
&\Leftrightarrow \quad x^* = P_C(x^* - \lambda F(x^*)) \\
&\Leftrightarrow \quad \langle x^* - \lambda F(x^*) - x^*, z - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C \\
&\Leftrightarrow \quad \langle \lambda F(x^*), z - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C \\
&\Leftrightarrow \quad \langle F(x^*), z - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C \\
&\Leftrightarrow \quad x^* \in \Omega_{\mathrm{FC}}.
\end{aligned}$$

□

Chương 2

Phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân

Chương này trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu. Nội dung của chương được trình bày trong ba mục. Mục thứ nhất giới thiệu cách tiếp cận phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và một số bổ đề liên quan đến việc chứng minh sự hội tụ của phương pháp. Mục thứ hai mô tả hai phương pháp lai ghép đường dốc nhất và trình bày sự hội tụ của các phương pháp. Mục thứ ba đưa ra và tính toán ví dụ số minh họa. Chương trình thực nghiệm được viết bằng ngôn ngữ Python. Kiến thức của chương được tham khảo từ [12] và một số tài liệu được trích dẫn trong đó.

2.1 Nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu

2.1.1 Sự tồn tại nghiệm và phương pháp lai ghép đường dốc nhất

Chương này ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu (1.12) đã đề cập ở Chương 1. Giả sử ánh xạ giá F là trên không gian Hilbert thực

H là phi tuyến, η-đơn điệu mạnh và k-liên tục Lipschitz trên một tập con lồi, đóng, khác rỗng C của H.

Bất đẳng thức biến phân (1.12) được Stampacchia [8] nghiên cứu đầu tiên và kể từ đó bài toán này được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu vì những ứng dụng của nó trong lý thuyết điều khiển tối ưu, tối ưu hóa, lập trình toán học, cơ khí và tài chính (xem [5, 7, 8, 11, 14]).

Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm là vấn đề quan trọng của bài toán VI(F, C). Như đã biết, nếu F là ánh xạ đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz trên C thì bài toán VI(F, C) có nghiệm duy nhất.

Vấn đề đặt ra là làm thế nào để tìm được nghiệm của bài toán VI(F, C), nếu có. Ngoài ra, ta cũng biết rằng bài toán VI(F, C) tương đương với phương trình điểm bất động (xem Chương 1):

$$u^* = P_C(u^* - \mu F(u^*)), \tag{2.1}$$

trong đó $\mu > 0$ là một hằng số cố định tùy ý. Vì vậy, phương pháp điểm bất động có thể được thực hiện để tìm một nghiệm của bài toán VI(F, C) với điều kiện F thỏa mãn một số điều kiện và tham số $\mu > 0$ được chọn thích hợp. Ví dụ, nếu F là một ánh xạ đơn điệu và liên tục Lipschitz trên C và $\mu > 0$ đủ nhỏ, thì ánh xạ được xác định bởi phía phải của (2.1) là một ánh xạ co. Khi đó, nguyên lý ánh xạ co Banach đảm bảo rằng các dãy lặp Picard hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán VI(F, C).

Phương pháp điểm bất động (2.1) bao gồm phép chiếu P_C, có thể không hề dễ dàng để tính toán, do tính phức tạp của tập lồi C tùy ý. Để giảm bớt sự phức tạp khi cần tính toán phép chiếu P_C, Yamada (xem [4, 13]) đã giới thiệu một phương pháp lai ghép đường dốc nhất để giải bài toán VI(F, C). Ý tưởng của phương pháp này như sau: Giả sử C là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn $T : H \to H$, tức là

$$C = \{x \in H \mid Tx = x\}.$$

Giả sử F là ánh xạ η-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz trên C. Lấy một số cố định $\mu \in \big(0, 2\eta/L^2\big)$ và một dãy số thực $\{\lambda_n\}$ trong khoảng $(0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện dưới đây:

(L1) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

(L2) $\sum_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$;

(L3) $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n - \lambda_{n+1})/\lambda_{n+1}^2 = 0$.

Với xấp xỉ ban đầu $u_0 \in H$ tùy ý, ta xây dựng dãy $\{u_n\}$ bằng công thức lặp sau:

$$u_{n+1} := Tu_n - \lambda_{n+1}\mu F(Tu_n), \quad n \geq 0. \tag{2.2}$$

Yamada [13] đã chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ xác định bởi (2.2) hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán VI(F, C). Một ví dụ về dãy $\{\lambda_n\}$ thỏa mãn các điều kiện (L1)–(L3) là

$$\lambda_n = 1/n^\sigma, \quad \text{trong đó} \quad 0 < \sigma < 1.$$

Trong trường hợp C là giao của các tập hợp điểm bất động của N ánh xạ không giãn $T_i : H \to H$ với $N \geq 1$ nguyên, Yamada đề xuất một thuật toán khác:

$$u_{n+1} := T_{[n+1]}u_n - \lambda_{n+1}\mu F(T_{[n+1]}u_n), \quad n \geq 0, \tag{2.3}$$

trong đó $T_{[k]} := T_{k \mod N}$, trong đó số nguyên $k \geq 1$, với hàm mod nhận các giá trị trong tập $\{1, 2, \ldots, N\}$ (tức là nếu $k = jN + q$ đối với số nguyên $j \geq 0$ và $0 \leq q < N$, thì $T_{[k]} = N$ nếu $q = 0$ và $T_{[k]} = q$ nếu $1 < q < N$), trong đó $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ và ở (2.3), các tham số thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) và (L4) dưới đây:

(L4) $\sum_{n\to\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+N}|$ hội tụ.

Trong những điều kiện này, Yamada [13] đã chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy $\{u_n\}$ tới nghiệm duy nhất của bài toán VI(F, C).

Mục tiếp theo của chương sẽ nghiên cứu sự hội tụ của các phương pháp đường dốc nhất (2.2) và (2.3), với điều kiện (L3) được thay thế bởi điều kiện:

(L3)′ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = 1$ hoặc tương đương $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = 0$

và điều kiện (L4) được thay thế bởi điều kiện:

(L4)′ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+N}} = 1$ hoặc tương đương $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n - \lambda_{n+N}}{\lambda_{n+N}} = 0$.

Rõ ràng là điều kiện (L3)$'$ yếu hơn điều kiện (L3), cùng với các điều kiện (L1) và (L2); hơn nữa, (L3)$'$ bao gồm sự lựa chọn quan trọng và linh hoạt $(1/n)$ cho $\{\lambda_n\}$, trong khi (L3) thì không thỏa mãn. Không khó để thấy rằng điều kiện (L4) suy ra điều kiện (L4)$'$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+N}}$ tồn tại. Tuy nhiên, nói chung, các điều kiện (L4) và (L4)$'$ không thể so sánh được với nhau, theo nghĩa cái này không bao hàm cái kia.

2.1.2 Một số bổ đề bổ trợ

Ta cần các bổ đề sau cho việc chứng minh sự hội tụ của phương pháp.

Bổ đề 2.1 (xem [12]) *Cho $\{s_n\}$ là một dãy số không âm thỏa mãn điều kiện*

$$s_{n+1} \leq (1-\alpha_n)s_n + \alpha_n\beta_n, \quad n \geq 0, \tag{2.4}$$

trong đó $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ là những dãy số thực sao cho:

(i) $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, *hoặc tương đương*

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n) := \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1-\alpha_k) = 0$$

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$, *hoặc (ii)$'$* $\sum_n \alpha_n\beta_n$ *là hội tụ.*

Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

Chứng minh: Đầu tiên, giả sử rằng (i) và (ii) thỏa mãn. Với bất kỳ $\varepsilon > 0$, giả sử $N \geq 1$ là một số nguyên đủ lớn để

$$\beta_n < \varepsilon \text{ với } n > N.$$

Theo (2.4), với $n > N$,

$$\begin{aligned} s_{n+1} &\leq (1-\alpha_n)s_n + \varepsilon\alpha_n \\ &\leq (1-\alpha_n)(1-\alpha_{n-1})s_{n-1} + \varepsilon(1-(1-\alpha_n)(1-\alpha_{n-1})). \end{aligned}$$

Do đó, bằng cách quy nạp, ta thu được

$$s_{n+1} \leq \prod_{j=N}^{n}(1-\alpha_j)\, s_N + \varepsilon\left[1 - \prod_{j=N}^{n}(1-a_j)\right], \quad n > N.$$

Theo điều kiện (i), cho $n \to \infty$ trong bất đẳng thức cuối cùng, suy ra

$$\limsup_{n\to\infty} s_{n+1} \le \varepsilon.$$

Bây giờ, giả sử rằng (i) và $(ii)'$ thỏa mãn. Sử dụng (2.4), với mọi $n > m$, ta nhận được

$$s_{n+1} \le \prod_{j=m}^{n} (1-\alpha_j)\, s_m + \sum_{j=m}^{n} \alpha_j \beta_j. \tag{2.5}$$

Trong (2.5) cho $n \to \infty$, sau đó cho $m \to \infty$, ta thu được

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \le 0.$$

□

Bổ đề 2.2 (Nguyên lý nửa đóng, xem [12]) *Cho C là một tập con, lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H, $T : C \to H$ là một ánh xạ không giãn. Nếu T có một điểm bất động, thì $I - T$ là ánh xạ nửa đóng, nghĩa là bất cứ dãy $\{x_n\}$ nào trong C hội tụ yếu đến $x \in C$ và dãy $\{(I-T)x_n\}$ hội tụ mạnh về y nào đó, thì $(I-T)x = y$. Ở đây, I là toán tử đơn vị của H.*

Bổ đề sau là hệ quả trực tiếp của tích vô hướng.

Bổ đề 2.3 (xem [2]) *Trong không gian Hilbert thực H ta luôn có bất đẳng thức*

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \quad x, y \in H.$$

2.2 Sự hội tụ của phương pháp lai ghép đường dốc nhất

2.2.1 Mô tả phương pháp

Cho H là một không gian Hilbert thực; cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của H. Giả sử $F : H \to H$ là một ánh xạ liên tục L-liên tục Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên C, tức là, F thỏa mãn các điều kiện

$$\|Fx - Fy\| \le L\|x-y\|, \quad x, y \in C, \tag{2.6}$$

$$\langle Fx - Fy, x-y\rangle \ge \eta\|x-y\|^2, \quad x, y \in C. \tag{2.7}$$

Với những điều kiện này, bất đẳng thức biến phân

$$\langle Fu^*, v-u^*\rangle \ge 0, \quad v \in C$$

có một nghiệm duy nhất $u^* \in C$.

Như đã trình bày ở Chương 1, phép chiếu P_C được đặc trưng bởi bất đẳng thức

$$\langle x - P_C x, y - P_C x\rangle \le 0, \quad y \in C.$$

Do đó, bài toán bất đẳng thức biến phân VI(F, C) tương đương với bài toán điểm bất động

$$u^* = P_C(I - \mu F)u^* \tag{2.8}$$

trong đó $\mu > 0$ là hằng số. Vì P_C là ánh xạ không giãn, nên

$$F_\mu x := P_C(I - \mu F)x$$

là một ánh xạ co trên C với

$$0 < \mu < 2\eta/L^2.$$

Thật vậy, với $x, y \in C$, ta có:

$$\begin{aligned}
&\|P_C(I - \mu F)x - P_C(I - \mu F)y\|^2\\
&\le \|(I - \mu F)x - (I - \mu F)y\|^2\\
&= \|x - y\|^2 - 2\mu\langle x - y, Fx - Fy\rangle + \mu^2\|Fx - Fy\|^2\\
&\le \left[1 - \mu\left(2\eta - \mu L^2\right)\right]\|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó, với $0 < \mu < 2\eta/L^2$, F_μ là một ánh xạ co. Khi đó, với mọi $u_0 \in C$ ban đầu, dãy lặp Picard

$$u_{n+1} = P_C\left(u_n - \mu F u_n\right), \quad n \ge 0$$

hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất u^* của bài toán VI(F, C). Phương pháp này được gọi là phương pháp chiếu gradient (xem [14]). Nó đã được sử dụng rộng rãi trong nhiều vấn đề thực tế, một phần do cấu trúc đơn giản và hội tụ nhanh của nó.

Tuy nhiên, như đã nêu ở mục trước, Yamada [13] chỉ ra hai hạn chế của việc sử dụng phương pháp chiếu gradient. Thứ nhất, tính liên tục L-Lipschitz và η-đơn điệu mạnh của ánh xạ giá F khá hạn chế trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Nhiều công trình đã được thực hiện để nới lỏng hạn chế này, chẳng hạn trong không gian Hilbert hữu hạn chiều, người ta đã chứng minh rằng tính liên tục và tính đơn điệu của F là đủ. Thứ hai, phương pháp chiếu gradient yêu cầu thông tin của phép chiếu P_C, không phải lúc nào cũng tính toán được một cách rõ ràng. Một số cách để nới lỏng giới hạn thứ hai đã được đưa ra; ví dụ, phép chiếu Bregman.

Trong [13], Yamada đã nới lỏng hạn chế thứ hai theo cách sau: Thay thế phép chiếu P_C bằng một ánh xạ không giãn $T : H \to H$ với

$$\mathrm{Fix}(T) = C$$

Lưu ý rằng

$$\mathrm{Fix}\,(P_C) = C.$$

Từ đó, đề xuất một thuật toán lai ghép đường dốc nhất tạo ra một dãy hội tụ mạnh (hội tụ theo chuẩn) tới nghiệm duy nhất u^* của bài toán $\mathrm{VI}(F, C)$.

Bây giờ cho λ là một số trong đoạn $[0, 1]$ và cho $\mu > 0$. Ánh xạ liên kết với ánh xạ không giãn $T : H \to H$, ký hiệu là $T^\lambda : H \to H$ cho bởi

$$T^\lambda x := Tx - \lambda\mu F(Tx), \quad x \in H.$$

Khi đó, T^λ là ánh xạ co với điều kiện $\mu < 2\eta/L^2$. Thật vậy,

$$\left\|T^\lambda x - T^\lambda y\right\| \leq (1 - \lambda\tau)\|x - y\|, \quad x, y \in H, \tag{2.9}$$

trong đó

$$\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu\left(2\eta - \mu L^2\right)} \in (0, 1).$$

Giả sử rằng C là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn $T : H \to H$. Cho $u_0 \in H$ tùy ý và gọi $\{\lambda_n\}$ là một dãy trong $[0, 1]$. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất được Yamada [13] giới thiệu là thuật toán

$$u_{n+1} := T^{\lambda_{n+1}} u_n = Tu_n - \lambda_{n+1}\mu F\left(Tu_n\right), \quad n \geq 0. \tag{2.10}$$

2.2.2 Sự hội tụ

Sự hội tụ mạnh của dãy $\{u_n\}$ xác định bởi (2.10) được trình bày trong định lý sau đây.

Định lý 2.1 (xem [12]) *Giả sử rằng* $0 < \mu < 2\eta/L^2$ *và các điều kiện* (L1), (L2), (L3)$'$ *đặt lên dãy tham số* $\{\lambda_n\}$ *được thỏa mãn. Khi đó, dãy* $\{u_n\}$ *sinh ra bởi thuật toán* (2.10) *hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất* u^* *của bài toán* $\mathrm{VI}(F, C)$.

Chứng minh: Ta chứng minh Định lý 2.1 theo các bước dưới đây.

Bước 1: Chứng minh dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Thật vậy, ta có (lưu ý rằng $T^{\lambda}u^* = u^* - \lambda\mu F u^*$ với $\lambda > 0$)

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+1} - u^*\| = \left\|T^{\lambda_{n+1}}u_n - u^*\right\| \\
&\leq \left\|T^{\lambda_{n+1}}u_n - T^{\lambda_{n+1}}u^*\right\| + \left\|T^{\lambda_{n+1}}u^* - u^*\right\| \\
&\leq (1 - \lambda_{n+1}\tau)\|u_n - u^*\| + \lambda_{n+1}\mu\|F(u^*)\|.
\end{aligned}$$

Bằng cách quy nạp, có thể dễ dàng nhận thấy rằng

$$\|u_n - u^*\| \leq \max\{\|u_0 - u^*\|, (\mu/\tau)\|F(u^*)\|\}, \quad n \geq 0.$$

Bước 2: Chứng minh $\|u_{n+1} - Tu_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Thật vậy, ở Bước 1, dãy $\{u_n\}$ bị chặn, nên dãy $\{F(Tu_n)\}$ cũng bị chặn. Từ đó,

$$\|u_{n+1} - Tu_n\| = \lambda_{n+1}\mu\|F(Tu_n)\| \to 0.$$

Bước 3: Chứng minh $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u_n\| &= \left\|T^{\lambda_{n+1}}u_n - T^{\lambda_n}u_{n-1}\right\| \\
&\leq \left\|T^{\lambda_{n+1}}u_n - T^{\lambda_{n+1}}u_{n-1}\right\| + \left\|T^{\lambda_{n+1}}u_{n-1} - T^{\lambda_n}u_{n-1}\right\| \\
&\leq (1 - \lambda_{n+1}\tau)\|u_n - u_{n-1}\| + |\lambda_{n+1} - \lambda_n|\,\mu\|F(Tu_{n-1})\|.
\end{aligned}$$

Đặt

$$M = \sup\{\|F(Tu_n)\| \ \mid n \geq 0\}$$

ta được

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq (1 - \lambda_{n+1}\tau)\|u_n - u_{n-1}\| + (\lambda_{n+1}\tau)\beta_{n+1},$$

trong đó

$$\beta_{n+1} = \mu M|\lambda_{n+1} - \lambda_n| / (\tau\lambda_{n+1}) \to 0$$

do điều kiện (L3)$'$. Theo Bổ đề 2.1, ta suy ra

$$\|u_{n+1} - u_n\| \to 0.$$

Bước 4: Chứng minh $\|u_n - Tu_n\| \to 0$. Đây là hệ quả trực tiếp của Bước 2 và 3.

Bước 5: Chứng minh $\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*), u_n - u^*\rangle \leq 0$.

Để chứng minh điều này, ta chọn một dãy con $\{u_{n_i}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho

$$\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*), u_n - u^*\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle -F(u^*), u_{n_i} - u^*\rangle .$$

Không mất đi tính tổng quát, ta có thể giả định thêm rằng u_{n_i} hội tụ yếu tới $\tilde{u}$, ở đây $\tilde{u} \in H$. Theo Bổ đề 2.2 và Bước 4, ta có

$$\tilde{u} \in \mathrm{Fix}(T) = C.$$

Bây giờ, vì u^* là nghiệm của bài toán $\mathrm{VI}(F, C)$, ta thu được

$$\limsup_{n\to\infty}\langle -F(u^*), u_n - u\rangle = \langle -F(u^*), \tilde{u} - u^*\rangle \leq 0.$$

Bước 6: Chứng minh $u_n \to u^*$ (hội tụ theo chuẩn). Thật vậy, áp dụng Bổ đề 2.3 có được

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\|^2 &= \left\|\left(T^{\lambda_{n+1}}u_n - T^{\lambda_{n+1}}u^*\right) + \left(T^{\lambda_{n+1}}u^* - u^*\right)\right\|^2 \\
&\leq \left\|T^{\lambda_{n+1}}u_n - T^{\lambda_{n+1}}u^*\right\|^2 + 2\left\langle T^{\lambda_{n+1}}u^* - u^*, u_{n+1} - u^*\right\rangle \\
&\leq (1 - \lambda_{n+1}\tau)\|u_n - u^*\|^2 + 2\mu\lambda_{n+1}\langle -F(u^*), u_{n+1} - u^*\rangle .
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.1 kết hợp với Bước 5 cho kết quả $\|u_n - u^*\| \to 0$.

$\square$

Tiếp theo, ta xét một trường hợp tổng quát hơn, với

$$C = \bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{Fix}(T_i),$$

trong đó $N \geq 1$ là một số nguyên và $T_i : H \to H$ là ánh xạ không giãn, với mỗi $1 \leq i \leq N$.

Bây giờ ta giới thiệu một phương pháp lai ghép đường dốc nhất khác để giải bài toán $\mathrm{VI}(F, C)$. Phương pháp được mô tả như sau: Lấy một số $\mu \in \left(0, 2\eta/L^2\right)$ và một dãy $\{\lambda_n\} \subset [0, 1]$, với xấp xỉ ban đầu $u_0 \in H$ tùy ý, ta xây dựng dãy $\{u_n\}$ bởi

$$\begin{aligned}
u_1 &= T_1 u_0 + \lambda_1 \mu F(Tu_0)\\
u_2 &= T_2 u_1 + \lambda_2 \mu F(Tu_1)\\
&\vdots\\
u_N &= T_N u_{N-1} + \lambda_N \mu F(Tu_{N-1})\\
u_{N+1} &= T_{N+1} u_N + \lambda_{N+1} \mu F(Tu_N).
\end{aligned}$$

Dãy $\{u_n\}$ có thể được viết lại ở dạng

$$u_{n+1} = T^{\lambda_{n+1}}_{[n+1]} u_n = T_{[n+1]} u_n - \lambda_{n+1}\mu F\left(T_{[n+1]} u_n\right), \quad n \geq 0. \tag{2.11}$$

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp (2.11) được nêu trong định lý sau.

Định lý 2.2 (xem [12]) *Cho* $\mu \in \left(0, 2\eta/L^2\right)$ *và các điều kiện* (L1), (L2), (L4)$'$ *thỏa mãn. Giả sử thêm rằng*

$$\begin{aligned}
C = \bigcap_{n=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i) &= \mathrm{Fix}(T_1 T_2 \cdots T_N)\\
&= \mathrm{Fix}(T_N T_1 \cdots T_{N-1})\\
&= \cdots = \mathrm{Fix}(T_2 T_3 \cdots T_N T_1).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ *được tạo bởi thuật toán* (2.11) *hội tụ mạnh (hội tụ theo chuẩn) tới nghiệm duy nhất* u^* *của bài toán* $\mathrm{VI}(F, C)$.

Chứng minh: Ta chia chứng minh thành nhiều bước.

Bước 1: Chứng minh dãy $\{u_n\}$ bị chặn.

Thật vậy, ta có (lưu ý rằng $T^{\lambda_n}_{[n]} u^* = u^* - \lambda_n \mu F(u^*)$ với $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - u^*\| &= \left\| T^{\lambda_{n+1}}_{[n+1]} u_n - u^* \right\|\\
&\leq \left\| T^{\lambda_{n+1}}_{[n+1]} u_n - T^{\lambda_{n+1}}_{[n+1]} u^* \right\| + \left\| T^{\lambda_{n+1}}_{[n+1]} u^* - u^* \right\|\\
&\leq (1 - \lambda_{n+1}\tau) \|u_n - u^*\| + \lambda_{n+1}\mu \|F(u^*)\|.
\end{aligned}$$

Từ đó, ta quy nạp được:

$$\|u_n - u^*\| \leq \max\{\|u_0 - u^*\|, (\mu/\tau)\|F(u^*)\|\}, \quad n \geq 0.$$

Bước 2: Chứng minh $\left\|u_{n+1} - T_{[n+1]}u_n\right\| \to 0$. Thật vậy,

$$\left\|u_{n+1} - T_{[n+1]}u_n\right\| = \lambda_{n+1}\mu \left\|F\left(T_{[n+1]}u_n\right)\right\| \to 0$$

vì $\{\lambda_n\}$ thỏa mãn (L1) và dãy $\{u_n\}$ bị chặn.

Bước 3: Chứng minh $\|u_{n+N} - u_n\| \to 0$. Vì $T_{[n+N]} = T_{[N]}$, nên

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+N} - u_n\| \\
&= \left\|T^{\lambda_{n+N}}_{[n+N]}u_{n+N-1} - T^{\lambda_n]}_{[n]}u_{n-1}\right\| \\
&\leq \left\|T^{\lambda_{n+N}}_{[n+N]}u_{n+N-1} - T^{\lambda_{n+N}}_{[n+N]}u_{n-1}\right\| + \left\|T^{\lambda_{n+N}}_{[n+N]}u_{n-1} - T^{\lambda_n}_{[n]}u_{n-1}\right\| \\
&\leq (1 - \lambda_{n+N}\tau)\|u_{n+N-1} - u_{n-1}\| + |\lambda_{n+N} - \lambda_n|\,\mu\left\|F\left(T_{[n]}u_{n-1}\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned}
M &= \sup\left\{\left\|F\left(T_{[n]}u_{n-1}\right)\right\| \mid n \geq 1\right\} \\
\beta_n &= \mu M\,|\lambda_{n+N} - \lambda_n| / (\tau\lambda_{n+N}) \to 0
\end{aligned}$$

từ (L4)$'$, ta đi đến

$$\|u_{n+N} - u_n\| \leq (1 - \lambda_{n+N}\tau)\|u_{n+N-1} - u_{n-1}\| + (\lambda_{n+N}\tau)\,\beta_n.$$

Bây giờ, ta áp dụng (2.1) suy ra

$$\|u_{n+N} - u_n\| \to 0.$$

Bước 4 Chứng minh $u_n - T_{[n+N]}\ldots T_{[n+1]}u_n \to 0$ theo chuẩn. Thật vậy, lưu ý rằng mỗi T_i là ánh xạ không giãn và sử dụng Bước 2, ta nhận được

$$\begin{aligned}
&u_{n+N} - T_{[n+N]}u_{n+N-1} \to 0 \\
&T_{[n+N]}u_{n+N-1} - T_{[n+N]}T_{[n+N-1]}u_{n+N-2} \to 0, \\
&\vdots \\
&T_{[n+N]}\cdots T_{[n+2]}u_{n+1} - T_{[n+N]}\cdots T_{[n+1]}u_n \to 0.
\end{aligned}$$

Từ đây,

$$u_n - T_{[n+N]}\cdots T_{[n+1]}u_n \to 0$$

theo chuẩn.

Bước 5: Chứng minh $\limsup_{n\to\infty} \langle -F(u^*), u_n - u^* \rangle \le 0$. Để thấy điều này, ta chọn một dãy con $\{u_{n_i}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho

$$\limsup_{n\to\infty} \langle -F(u^*), u_n - u^* \rangle = \lim_{i\to\infty} \langle -F(u^*), u_{n_i} - u^* \rangle .$$

Vì dãy $\{u_n\}$ bị chặn, ta có thể giả sử rằng u_{n_i} hội tụ yếu đến $\tilde{u}$ với $\tilde{u} \in H$. Vì nhóm ánh xạ $\{T_i : 1 \le i \le N\}$ là hữu hạn, ta có thể giả định thêm (chuyển sang một dãy con khác nếu cần) rằng, với một số nguyên $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$

$$T_{[n_l]} \equiv T_k, \quad \forall i \ge 1.$$

Từ Bước 4

$$u_{n_i} - T_{[i+N]} \cdots T_{[i+1]} u_{n_i} \to 0.$$

Do đó, theo Bổ đề 2.2, ta suy ra

$$\tilde{u} \in \operatorname{Fix}\left(T_{[i+N]} \cdots T_{[i+1]}\right).$$

Cùng với giả thiết (2.12) suy ra $\tilde{u} \in C$. Bây giờ, vì u^* là nghiệm của bài toán VI(F, C), nên

$$\limsup_{n\to\infty} \langle -F(u^*), u_n - u^* \rangle = \langle -F(u^*), \tilde{u} - u^* \rangle \ge 0.$$

Bước 6: Chứng minh $u_n \to u^*$ theo chuẩn. Thật vậy, áp dụng Bổ đề 2.3, ta được

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+1} - u^*\|^2 \\
&= \left\| T_{[n+1]}^{\lambda_{n+1}} u_n - u^* \right\|^2 \\
&= \left\| \left(T_{[n+1]}^{\lambda_{n+1}} u_n - T_{[n+1]}^{\lambda_{n+1}} u^* \right) + \left(T_{[n+1]}^{\lambda_{n+1}} u^* - u^* \right) \right\|^2 \\
&\le \left\| T_{[n+1]}^{\lambda_{n+1}} u_n - T_{[n+1]}^{\lambda_{n+1}} u^* \right\|^2 + 2 \left\langle T_{[n+1]}^{\lambda_{n+1}} u^* - u^*, u_{n+1} - u^* \right\rangle \\
&\le (1 - \lambda_{n+1}\tau) \|u_{n+1} - u^*\|^2 + 2\mu\lambda_{n+1} \langle -F(u^*), u_{n+1} - u^* \rangle .
\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 2.1 và Bước 5, ta nhận được $\|u_n - u^*\| \to 0$.

$\square$

Giả thiết (2.12) trong Định lý 2.2 sẽ tự động thỏa mãn nếu mỗi T_i là ánh xạ không giãn. Vì phép chiếu mêtric là ánh xạ không giãn, nên ta có hệ quả sau của Định lý 2.2.

Hệ quả 2.1 (xem [12]) *Cho* $\mu \in \left(0, 2\eta/L^2\right)$ *và các điều kiện* (L1), (L2), (L4)$'$ *thỏa mãn. Chọn* $u_0 \in H$ *và xây dựng dãy* $\{u_n\}$ *bởi công thức lặp*

$$u_{n+1} := P_{[n+1]}u_n - \lambda_{n+1}\mu F\left(P_{[n+1]}u_n\right), \quad n \geq 0,$$

trong đó

$$P_k = P_{C_k}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ *hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất* u^* *của bài toán* $\mathrm{VI}(F, C)$, *với* $C = \bigcap_{k=1}^{N} C_k$. *Đặc biệt, dãy* $\{u_n\}$ *được xác định bởi công thức*

$$u_{n+1} := P_{[n+1]}u_n - (\mu/(n+1))F\left(P_{[n+1]}u_n\right), \quad n \geq 0$$

hội tụ theo chuẩn tới nghiệm duy nhất u^* *của bài toán* $\mathrm{VI}(F, C)$.

2.3 Ví dụ số minh họa

Mục này đưa ra và tính toán ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của phương pháp lai ghép đường dốc nhất đã được đề cập ở Mục 2.2 trong không gian Hilbert thực hữu hạn chiều. Chương trình thực nghiệm được viết bằng ngôn ngữ Python và được chạy trên máy tính cá nhân Dell Latitude Core i5-4300U, CPU 2.50 GHz, RAM 8GB.

Ví dụ 2.1 Xét $H = \mathbb{R}^3$, ánh xạ giá F, ánh xạ không giãn T và tập ràng buộc C được cho như sau:

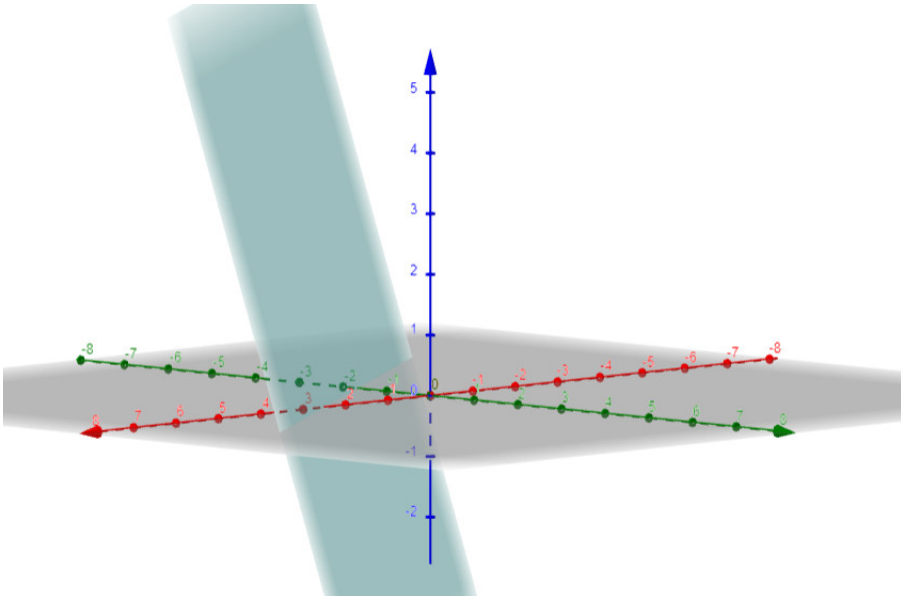
- $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $Fx = \dfrac{2}{5}Mx$ với $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $Tx = P_C x$;
- $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 5\} \subset \mathbb{R}^3$.

Trước hết ta tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}(F, C)$.

Gọi x^* là nghiệm của bài toán VI(F, C),

$$
\begin{aligned}
& \langle Fx^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C \\
\Leftrightarrow \quad & \left\langle \frac{2}{5}x^*, x - x^* \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C \\
\Leftrightarrow \quad & \langle x^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C \\
\Leftrightarrow \quad & \langle x^*, x^* \rangle \leq \langle x^*, x \rangle \quad \forall x \in C \\
\Leftrightarrow \quad & \|x^*\|^2 \leq \langle x^*,\ x \rangle \leq \|x^*\| \,.\, \|x\| \ (\text{BĐT Cauchy – Schwart}) \quad \forall x \in C \\
\Leftrightarrow \quad & \|x^*\| \leq \|x\| \quad \forall x \in C.
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của bài toán VI(F, C) trong trường hợp này là điểm x^* có chuẩn nhỏ nhất trong C.



Hình 2.1: Hình ảnh siêu phẳng $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5$ trong không gian ba chiều

Tập C là nửa không gian chứa điểm gốc tọa độ $(0, 0, 0)$ có mặt phẳng tựa là mặt phẳng $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5$ như trên Hình 2.1. Do C chứa điểm $x = (0, 0, 0)$ nên hiển nhiên $x^* = (0, 0, 0)$ là nghiệm của bài toán VI(F, C).

Bây giờ, ta sử dụng phương pháp lai ghép đường dốc nhất (2.10) để xấp xỉ nghiệm x^* của bài toán VI(F, C).

Trước hết, ta kiểm tra các điều kiện đặt lên ánh xạ giá F và ánh xạ không giãn T.

- F là ánh xạ η-đơn điệu mạnh trên C và L-liên tục Lipschitz C với $\eta = \dfrac{2}{5}$ và $L = 0.692820323027551$ (sử dụng Python với hàm np.linalg.norm());

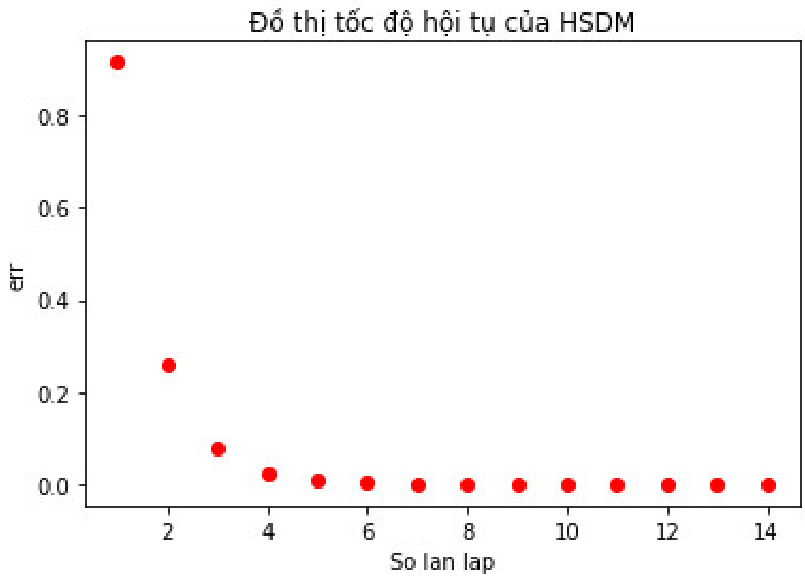
- Vì $Tx = P_C x$ nên T là ánh xạ không giãn trên C.

Chọn $\lambda_n = \frac{1}{n}$, dễ thấy dãy $\{\frac{1}{n}\}$ thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) và (L3)′; với η và L đã được xác định, ta chọn $\mu \in (0, 2\eta/L^2)$ tùy ý. Bây giờ, tính toán dãy lặp (2.10) với tiêu chuẩn dừng là sai số giữa nghiệm xấp xỉ và nghiệm đúng nhỏ hơn $\varepsilon > 0$ cho trước với $\varepsilon = 10^{-6}$.

Lần lặp k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\|x^k - x^*\|$
1	0.2448	0.4896	0.7344	0.9159577282822605
2	0.06932736	0.13865472	0.20798208	0.25939922864953613
3	0.02096459	0.04192919	0.06289378	0.07844232674361971
4	0.00658121	0.01316241	0.01974362	0.024624615211357097
5	0.00211652	0.00423303	0.00634955	0.00791927625197244
...	...	...	...	...
13	3.51031183 $\times 10^{-7}$	7.02062366 $\times 10^{-7}$	1.05309355 $\times 10^{-6}$	1.3134384181531868$\times 10^{-6}$
14	1.20979387 $\times 10^{-7}$	2.41958774 $\times 10^{-7}$	3.62938161 $\times 10^{-7}$	4.526634164323142 $\times 10^{-7}$

Bảng 2.1: Kết quả tính toán dãy lặp (2.10) cho Ví dụ 2.1 với $x^0 = (1, 2, 3)^\top$, $\lambda = 1/n$, $\mu = 1.6$.

Trong Bảng 2.1 với $\mu = 1.6$ ta cần 14 lần lặp để tìm được nghiệm xấp xỉ với sai số $\varepsilon = 10^{-6}$.

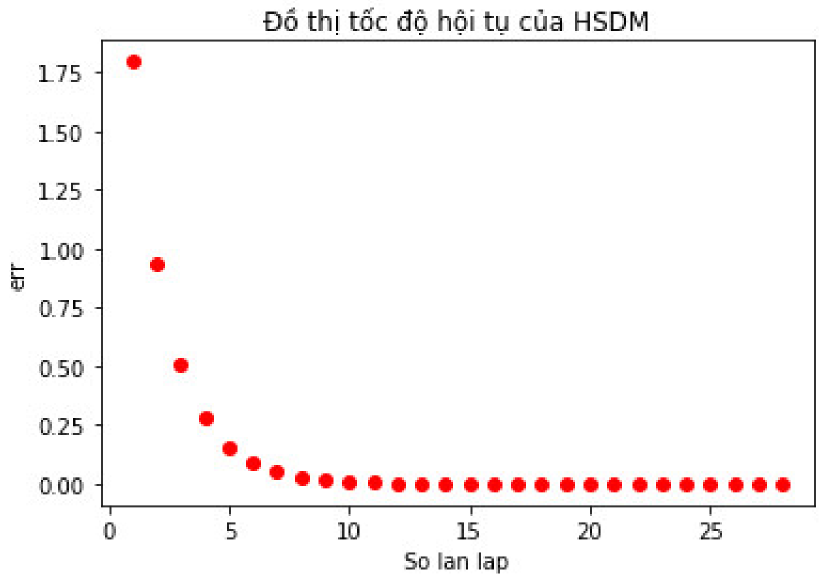


Hình 2.2: Đồ thị tốc độ hội tụ của HSDM với $\mu = 1.6$

Trong Bảng 2.2, chọn $\mu = 1$ thì thuật toán kết thúc sau 28 lần lặp để thu được nghiệm xấp xỉ với cùng sai số như trên.

Lần lặp k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\|x^k - x^*\|$
1	0.48	0.96	1.44	1.7959955456514918
2	0.2496	0.4992	0.7488	0.9339176837387758
3	0.134784	0.269568	0.404352	0.5043155492189388
4	0.07440077	0.14880154	0.2232023	0.27838218316885427
5	0.04166443	0.08332886	0.12499329	0.15589402257455837
...	...	...	..	...
27	3.00787358 $\times 10^{-7}$	6.01574715 $\times 10^{-7}$	9.02362073 $\times 10^{-7}$	1.1254432386003892 $\times 10^{-6}$
28	1.7798314 $\times 10^{-7}$	3.5596628 $\times 10^{-7}$	5.3394942 $\times 10^{-7}$	6.65951930151127 $\times 10^{-7}$

Bảng 2.2: Kết quả tính toán dãy lặp (2.10) cho Ví dụ 2.1 với $x^0 = (1, 2, 3)^\top$, $\lambda = 1/n$, $\mu = 1$.

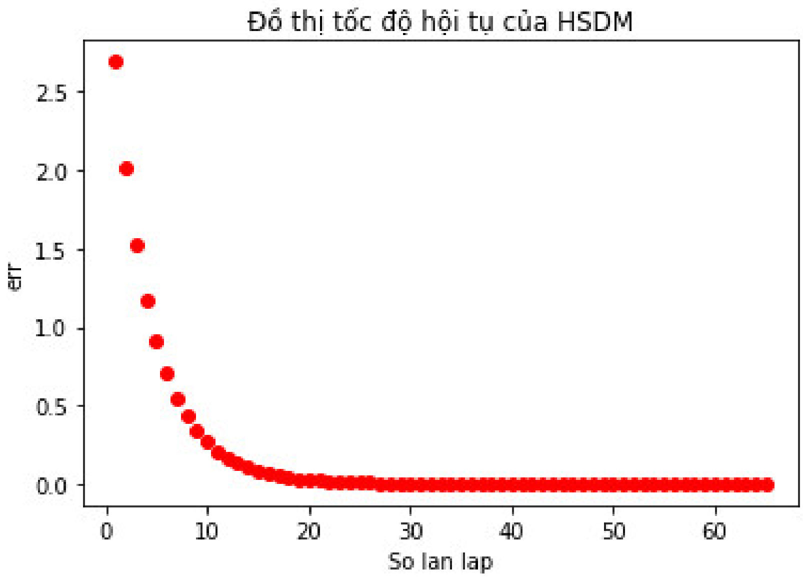


Hình 2.3: Đồ thị tốc độ hội tụ của HSDM với $\mu = 1$

Trong Bảng 2.3, chọn $\mu = 0.5$ thì thuật toán kết thúc sau 65 lần lặp để thu được nghiệm xấp xỉ với cùng sai số như trên.

Lần lặp k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\|x^k - x^*\|$
1	0.72	1.44	2.16	2.6939933184772378
2	0.5376	1.0752	1.6128	2.011515011129671
3	0.408576	0.817152	1.225728	1.5287514084585498
4	0.31378637	0.62757274	0.9413591	1.1740810816961662
5	0.24266146	0.48532292	0.72798437	0.9079560365117019
...	...	...	...	...
64	2.92088285 $\times 10^{-7}$	5.84176571 $\times 10^{-7}$	8.76264856 $\times 10^{-7}$	1.092894290551161 $\times 10^{-6}$
65	2.32962535 $\times 10^{-7}$	4.65925071 $\times 10^{-7}$	6.98887606 $\times 10^{-7}$	8.716659917365623 $\times 10^{-7}$

Bảng 2.3: Kết quả tính toán dãy lặp (2.10) cho Ví dụ 2.1 với $x^0 = (1, 2, 3)^\top$, $\lambda = 1/n$, $\mu = 0.5$.



Hình 2.4: Đồ thị tốc độ hội tụ của HSDM với $\mu = 0.5$

Nhận xét 2.1 Với những giá trị μ khác nhau thì số lần lặp thực hiện thuật toán cũng khác nhau. Cụ thể là với μ càng lớn, càng gần giá trị $2\eta/L^2$ thì số lần lặp càng nhỏ và ngược lại μ càng tiến về 0 thì số lần lặp càng lớn.

Mà μ được tính dựa vào hai hệ số là η và L. Do vậy tính chất của ánh xạ F ảnh hưởng lớn đến tốc độ hội tụ của thuật toán.

Kết luận

1 Kết luận

Đồ án đã đạt được mục tiêu đề ra

Đồ án đã nghiên cứu phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực vô hạn chiều.

Kết quả của đồ án

1. Giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân và mối liên hệ với bài toán giải phương trình toán tử, bài toán điểm bất động.
2. Trình bày hai phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực trên cơ sở tài liệu [12] và một số tài liệu liên quan.
3. Đưa ra và tính toán một ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của phương pháp trong không gian hữu hạn chiều.

Kỹ năng đạt được

1. Bước đầu biết tìm kiếm, đọc, dịch tài liệu chuyên ngành liên quan đến nội dung đồ án.
2. Biết tổng hợp các kiến thức đã tìm hiểu và kiến thức trong tài liệu tham khảo để viết báo cáo đồ án.
3. Chế bản đồ án bằng LaTeX.
4. Biết tóm tắt nội dung đồ án và biết trình bày một báo cáo khoa học.

2 Hướng phát triển của đồ án trong tương lai

1. Cải tiến phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải bài toán bất đẳng thức biến phân và một số bài toán liên quan.

2. Áp dụng giải bài toán tối ưu.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Trần Vũ Thiệu, Nguyễn Thị Thu Thủy (2021), *Tối ưu phi tuyến – Lý thuyết và phương pháp giải*, NXB Bách Khoa Hà Nội.

[2] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và Giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[3] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu (2009), *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer.

[4] F. Deutsch, and I. Yamada (1998), "Minimizing Certain Convex Functions over the Intersection of the Fixed-Point Sets of Nonexpansive Mappings", *Num. Func. Anal. Optim.*, 19, pp. 33-56.

[5] R. Glowinski (1984), *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer, New York.

[6] P. Hartman, G. Stampacchia (1966), "On some nonlinear elliptic differential functional equations", *Acta Math.*, **115**, pp. 271–310.

[7] P. Jaillet, D. Lamberton, B. Lapeyre (1990), "Variational Inequalities and the Pricing of American Options", *Acta Applicandae Mathematicae*, 21, pp. 263-289.

[8] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York.

[9] I. Konnov (2001), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer, Berlin, Germany.

[10] I.V. Konnov, E. Laitinen (2002), "Theory and applications of variational inequalities", *Preprint, Department of Mathematical Sciences Faculty of Science University of Oulu*, April 2002.

[11] J.T. Oden (1986), *Qualitative Methods on Nonlinear Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[12] H.K. Xu, T.H. Kim (2003), "Convergence of Hybrid Steepest-Descent Methods for Variational Inequalities", *J. Optim Theory Appl.*, 119(1), pp. 185–201.

[13] I. Yamada (2001), "The hybrid steepest-descent method for variational inequality problems over the intersection of the fixed-point sets of nonexpansive mappings", *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications*, Edited by D. Butnariu, Y. Censor, and S. Reich, North-Holland, Amsterdam, Holland, pp. 473-504.

[14] E. Zenidler (1985), *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, III: Variational Methods and Applications*, Springer, New York.