TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM NGHIỆM CHUẨN NHỎ NHẤT CỦA BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

ĐỒ ÁN 2

Chuyên ngành: TOÁN TIN

Chuyên sâu: Các phương pháp tối ưu

Giảng viên hướng dẫn: PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

Sinh viên thực hiện: PHẠM TRUNG HỘI

Lớp: Toán tin 02 - K63

HÀ NỘI – 2021

NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN

1. Mục tiêu và nội dung của đồ án

(a) Mục tiêu: Đề tài đồ án nghiên cứu về một phương pháp tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán điểm bất động và bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert thực.

(b) Nội dung: Giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP); bài toán điểm bất động (FPP) và mối liên hệ giữa chúng; trình bày một phương pháp lặp tìm nghiệm chuẩn nhỏ nhất của bài toán VIP và FPP; đề xuất và tính toán ví dụ số minh họa.

2. Kết quả đạt được

(a)

(b)

(c)

3. Ý thức làm việc của sinh viên:

(a)

(b)

Hà Nội, ngày ... tháng ... năm 2021

Giảng viên hướng dẫn

PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

Lời cảm ơn

...

Hà Nội, tháng ... năm 2021

Tác giả đồ án

Hội

Tóm tắt nội dung Đồ án

1.

2.

3.

Hà Nội, tháng ... năm 2021

Tác giả đồ án

Hội

Mục lục

Bảng ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
H	không gian Hilbert thực
$\nabla f(x)$	véctơ gradient của hàm f tại điểm x
P_C	phép chiếu mêtric lên tập C
VIP	bài toán bất đẳng thức biến phân (Variational Inequality Problem)
FPP	bài toán điểm bất động (Fixed Point Problem)

Danh sách bảng

Danh sách hình vẽ

Mở đầu

Cho H là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và chuẩn $\|.\|$, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của H và ánh xạ $A : H \to H$. Bài toán bất đẳng thức biến phân (Variational Inequality Problem) với ánh xạ A và tập ràng buộc C là bài toán

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \qquad \text{(VIP)}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) là một trong những bài toán trọng tâm trong giải tích phi tuyến, tối ưu hóa, phương trình vi phân, bài toán điều khiển, bài toán cân bằng, bài toán bù, bài toán giá trị biên v.v... Khi tập ràng buộc C của bài toán (VIP) được cho dưới dạng ẩn, chẳng hạn tập điểm bất động của một họ các ánh xạ không giãn, thì bài toán (VIP) còn có nhiều ứng dụng trong bài toán xử lý tín hiệu, khôi phục ảnh v.v... Đặc biệt, ta có thể xem C là tập điểm bất động của phép chiếu mêtric P_C từ H lên C, khi đó ta có bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn P_C.

Đồ án này nhằm nghiên cứu phát triển phương pháp lai ghép (đạo hàm tăng cường và xấp xỉ mềm) để tìm ra nghiệm chung cho bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert. Kết hợp thuật toán đạo hàm tăng cường hai bước và thuật toán xấp xỉ mềm, chúng ta đề xuất một phương pháp hội tụ mạnh, chứa các trường hợp đặc biệt của một số thuật toán hiện có. Một số ví dụ số được thực hiện để chứng minh hiệu suất của phương pháp được đề xuất so với các thuật toán giống extragradient lai cổ điển.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động

Chương này giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert thực H. Nội dung của chương bao gồm hai phần. Phần thứ nhất trình bày về các khái niệm cơ bản trong không gian Hilbert. Phần thứ hai trình bày các bài toán, các bổ đề dùng cho chứng minh sự hội tụ của thuật toán.

1.1 Không gian Hilbert

Cho H là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và chuẩn $\|.\|$ được định nghĩa như sau:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{và} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

với mọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong H và $A : H \to H$ là một ánh xạ, đuợc gọi là ánh xạ giá. Bài toán bất đẳng thức biến phân (variation inequality problem - VIP)([10], [11], [17], [18], [19] , [20]) với ánh xạ giá A và tập ràng buộc C được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{1.1}$$

Tập nghiệm của (1.1) được ký hiệu là $\mathrm{VI}(A, C)$. Ta đã biết rằng VIP là một trong những bài toán trọng tâm trong giải tích phi tuyến, tối ưu hóa, phương trình vi phân, và các bài toán liên quan . Một bài toán khác cũng đóng một vai trò rất quan trọng trong toán học, là bài toán điểm bất động (fixed point problem - FPP). Bài toán điểm bất động cho ánh xạ $S : H \to H$ là tìm một điểm $x^* \in H$ sao cho:

$$x^* = Sx^*. \tag{1.2}$$

Tập nghiệm của (1.2), ký hiệu là $\mathrm{Fix}(S)$, là tập các điểm bất động của S. Đồ án này tập trung vào bài toán tìm nghiệm chung của (1.1) và (1.2) và có thể viết như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega := \mathrm{VI}(A, C) \cap \mathrm{Fix}(S). \tag{1.3}$$

Trong trường hợp $Ax = kx, k \geq 0$, khi đó bài toán bất đẳng thức biến phân có dạng

$$\begin{aligned}
\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } & \langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \\
& \Leftrightarrow \langle kx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \\
& \Leftrightarrow \langle x^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \\
& \Leftrightarrow \langle x^*, x^* \rangle \leq \langle x^*, y \rangle \quad \forall y \in C \\
& \Leftrightarrow \|x^*\|^2 \leq \langle x^*, y \rangle \leq \|x^*\|.\|y\| \quad \forall y \in C \\
& \Leftrightarrow \|x^*\| \leq \|y\| \quad \forall y \in C.
\end{aligned}$$

Đây là bài toán tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất.

Bài toán (1.3) đã được nghiên cứu trong những năm gần đây, xem [[13], [25], [26], [28], [31] [36]] và các tài liệu tham khảo trong đó. Động lực của việc nghiên cứu bài toán tìm nghiệm chung này là do các ứng dụng của nó đối với các mô hình toán học phức tạp, mà các ràng buộc của chúng có thể được mô tả bằng các tập điểm bất động hoặc tập nghiệm của các bất đẳng thức biến phân.

Hai nhóm phương pháp phổ biến để giải (1.1) là phương pháp hiệu chỉnh và phương pháp chiếu. Trong đồ án này, ta sẽ tập trung vào các phương pháp chiếu. Phương pháp chiếu đơn giản nhất để giải quyết (1.1) là phương pháp chiếu gradient. Tuy nhiên, sự hội tụ của nó đòi hỏi điều kiện các toán tử là đơn điệu mạnh hoặc đơn điệu mạnh ngược. Để tránh những điều kiện này, phương pháp đạo hàm tăng cường (EGM) được giới thiệu bởi Korpelevich cho bài toán điểm yên ngựa đã được mở rộng sang các bài toán đơn điệu, thậm chí là giả đơn điệu [8]. EGM tạo ra hai chuỗi lặp lại sau đây,

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó $\lambda > 0$ là một tham số phù hợp. Trong những năm gần đây, EGM trong (1.4) đã được nhiều tác giả nghiên cứu và mở rộng. Ví dụ, Censor [13] đã giới thiệu phương pháp dưới đạo hàm – đạo hàm tăng cường (SEGM) để giải bài toán (1.1) trong không gian Hilbert như sau:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ T_n = \{v \in H : \langle x_n - \lambda A x_n - y_n, v - y_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda A y_n). \end{cases} \tag{1.5}$$

Ưu điểm chính của SEGM là phép chiếu thứ hai được thực hiện trên một nửa không gian được xác định tường minh.

Để giải (1.3), các phương pháp chiếu nói trên thường được kết hợp với phép lặp kiểu Krasnoselski-Mann, xem [[13], [15] và [16]]. Các phương pháp thu được hội tụ yếu trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Để có được sự hội tụ mạnh, EGM và SEGM thường được kết hợp với một số phương pháp khác như phương pháp chiếu lai ghép (hybrid projection method) [[14], [2] - [4], [6]] hoặc phương pháp xấp xỉ mềm [[16], [5], [22], [25], [31]], hay như một trường hợp đặc biệt là phương pháp lặp Halpern. Ví dụ, để giải (1.3) khi $A : H \to H$ là toán tử đơn điệu và L - liên tục Lipschitz và $S : H \to H$ là ánh xạ β - bán co, người ta có thể kết hợp (1.5) với phép lặp giống Krasnoselski Mann và phương pháp chiếu lai như trong [[14], Thuật toán 3.6] để có được phương pháp lai dưới đạo hàm - đạo hàm tăng cường sau (HSEGM) như sau:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ T_n = \{v \in H : \langle x_n - \lambda A x_n - y_n, v - y_n \rangle \leq 0\}, \\ z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda A x_n), \\ t_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)[\beta_n z_n + (1 - \beta_n) S z_n], \\ C_n = \{z \in H : \|t_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = \{z \in H : \langle x_n - z, x_n - x_0 \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0). \end{cases} \tag{1.6}$$

trong đó $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1, 0 < \beta_n < 1 - \beta$ và λ là một tham số dương phù hợp. Bằng cách làm tương tự như trong [[13], Định lý 7.1] và [[14], Định lý 4.1], ta có thể đảm bảo rằng $\{x_n\}$ được tạo ra bởi (1.6) hội tụ mạnh đến $P_\Omega(x_0)$.

Mặt khác, để tìm kiếm một phương pháp để giải cụ thể (1.3), Maing'e [[25]] đã đưa ra bài toán bất đẳng thức biến phân,

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \Omega \text{ sao cho } \langle F x^\dagger, x^* - x^\dagger \rangle \geq 0, \quad \forall x^* \in \Omega, \tag{1.7}$$

trong đó $F : H \to H$ là một toán tử thỏa mãn hai điều kiện:

(LC) F là k - Lipschitz liên tục ($k > 0$), tức là

$$\|Fx - Fy\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

(SM) F là η - đơn điệu mạnh ($\eta > 0$), tức là

$$\langle Fx - Fy, x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in H.$$

Ví dụ 1.1 Ta có $F = \dfrac{2}{5}x$ là k-Lipschitz liên tục với $k = \dfrac{2}{5}$ và η-đơn điệu mạnh với $\eta = \dfrac{2}{5}$.

Dễ thấy rằng (1.7) có nghiệm duy nhất là $x^\dagger$ nhờ những điều kiện này và thực tế là Ω là một tập con lồi, đóng và khác rỗng. Cũng trong [[25]], Maing'e đã đề xuất phương pháp lai dưới đạo hàm - đạo hàm tăng cường

(HEGVM) như sau :

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ x_{n+1} = [(1-w)I + wS]t_n, \quad t_n = z_n - \alpha_n F z_n. \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó $\lambda_n > 0, \alpha_n > 0, w \in [0,1]$ là các tham số phù hợp. Tác giả đã chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ được tạo bởi (1.8) hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $x^\dagger$ của (1.7) theo giả thiết rằng A là đơn điệu, Lipschitz liên tục và S là bán co. Ưu điểm của (1.8) so với (1.6) là không yêu cầu phải xây dựng các tập C_n, Q_n và tính $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0)$.

Gần đây, Zykina và Melenchuk [[32]] đã giới thiệu một phương pháp đạo hàm tăng cường hai bước với kích thước bước cố định thích hợp $\lambda > 0$ cho VIP trong không gian Euclide. Trong phương pháp này, mỗi lần lặp cần tính ba phép chiếu trên tập chấp nhận được . Chính xác hơn, thuật toán trong [[32]] được mô tả như sau:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ z_n = P_C(y_n - \lambda A y_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A z_n). \end{cases} \tag{1.9}$$

Phương pháp này đã được sử dụng để giải quyết các bài toán quản lý tài nguyên [[33], [34]] và cũng mở rộng cho các bài toán cân bằng trong không gian Euclide [[9]]. Nhấn mạnh rằng thuật toán (1.9) không chứa thuật toán (1.4) khi $\lambda > 0$. Trong đồ án này, được thúc đẩy và truyền cảm hứng bởi kết quả của Maing´e [[25]], Zykina và Melenchuk [[32] - [34]], ta giới thiệu một thuật toán hội tụ mạnh chung, gọi là phương pháp xấp xỉ mềm phân bậc hai bước (TSEGVM), để giải quyết bài toán (1.7) trong không gian Hilbert. Phương pháp này có dạng:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n = P_C(y_n - \rho_n A y_n), \\ t_n = P_C(x_n - \rho_n A z_n) \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)v_n + \beta_n S v_n, v_n = t_n - \alpha_n F t_n. \end{cases} \tag{1.10}$$

trong đó $\rho_n > 0, 0 \leq \lambda_n \leq \rho_n, \beta_n \in [0,1], \alpha_n \in [0,1]; A : H \to H$ là toán tử đơn điệu và Lipschitz liên tục, $S : H \to H$ là ánh xạ bán co và $F : H \to H$ là một toán tử thỏa mãn các điều kiện (LC) và (SM) ở trên. Bây giờ, chúng ta quan sát thấy rằng nếu $\lambda_n = 0, \alpha_n = 0, \rho_n = \lambda$ và $S = I$, khi đó thuật toán (1.10) trở thành EGM trong (1.4). Nếu $\lambda_n = \rho_n = \lambda > 0, S = I$ và $\alpha_n = 0$ thì thuật toán (1.10) được rút gọn thành thuật toán đạo hàm tăng cường hai bước (1.9) của Zykina và Melenchuk. Cuối cùng, nếu $\lambda_n = 0$ và $\beta_n = w$ thì thuật toán (1.10) trở thành HEGVM trong (1.8) của Maing'e. Đối với sự hội tụ, trong các điều kiện thích hợp được áp dụng cho các tham số, như trong HEGVM, chuỗi $\{x_n\}$ được tạo bởi thuật toán (1.10) hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $x^\dagger$ của (1.7). Các chứng minh trong đồ án này dựa trên các công trình [[25], [9], [32]]. Trong trường hợp đặc biệt, khi $F = I - x_0$, trong đó x_0 là một điểm đã cho trong H, nghiệm chính xác $x^\dagger$ tính trong Ω là giá trị gần đúng nhất của x_0, tức là $x^\dagger = P_\Omega x_0$. Cuối cùng, chúng ta xem xét hai vấn đề kiểm tra sơ bộ và so sánh hiệu suất của thuật toán với một số thuật toán đạo hàm tương tự khi $F = I - x_0$.

1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán điểm bất động

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của H. Một toán tử $A : H \to H$ được gọi là:

(i) đơn điệu mạnh trên C nếu tồn tại một hằng số $\eta > 0$ sao cho

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2, \forall x, y \in C;$$

(ii) đơn điệu trên C nếu

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0, \forall x, y \in C;$$

(iii) đơn điệu cực đại nếu nó là đơn điệu và đồ thị $G(A) := \{(x, Ax) : x \in C\}$ của nó không phải là tập con riêng của bất kỳ đồ thị ánh xạ đơn điệu nào khác;

(iv) L - Lipschitz liên tục trên C nếu tồn tại một hằng số dương L sao cho

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in C.$$

Ví dụ 1.2 Ta có $A = \frac{1}{9}Mx$ với $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ là ánh xạ đơn điệu trên C và L-Lipschitz liên tục trên C với $L = \frac{2}{3}$.

Tiếp theo, chúng ta nhớ lại một số khái niệm về ánh xạ không giãn và các ánh xạ tổng quát hơn, ví dụ trong [25]. Ánh xạ $S : C \to C$ được gọi là:

(i) không giãn nếu $\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C$;

(ii) tựa không giãn nếu $Fix(S) \neq \emptyset$ và

$$\|Sx - x^*\| \leq \|x - x^*\|, \forall x^* \in Fix(S), \forall x \in C;$$

(iii) β - bán co nếu $Fix(S) \neq \emptyset$ và tồn tại $\beta \in [0, 1)$ sao cho:

$$\|Sx - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 + \beta\|x - Sx\|^2, \forall x^* \in Fix(S), \forall x \in C;$$

(iv) nửa đóng tại 0 nếu với mỗi dãy $x_n \subset C, x_n \rightharpoonup x$ và $\|Sx_n - x_n\| \to 0$ thì $Sx = x$.

Ví dụ 1.3 Ta có $S = \frac{1}{3}x$ là bán co với hằng số $\beta = 0$ và nửa đóng tại 0.

Biết rằng mỗi ánh xạ không giãn nửa đóng tại 0. Chúng ta có những điều sau đây cho một ánh xạ bán co.

Bổ đề 1.1 ([25], Nhận xét 4.2) *Giả sử rằng $S : C \to C$ là một ánh xạ β - bán co sao cho $Fix(S) \neq \emptyset$. Ta có*

(i) $S_w = (1 - w)I + wS$ là ánh xạ tựa không giãn trên C với mọi $w \in [0, 1 - \beta]$. Hơn nữa:

$$\|S_w x - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 - w(1 - \beta - w)\|Sx - x\|^2, \forall x^* \in Fix(S), \forall x \in C;$$

(ii) $Fix(S)$ là đóng và lồi.

Nhớ lại rằng hình nón pháp tuyến N_C của C tại điểm $x \in C$ được xác định bởi:

$$N_C(x) = w \in H : \langle w, x - y \rangle \geq 0, \forall y \in C.$$

Với mỗi $x \in H$, vì C không rỗng, đóng và lồi nên tồn tại một phần tử duy nhất trong C, ký hiệu là $P_C x$, sao cho $\|x - P_C x\| = \min\{\|y - x\| : y \in C\}$. Ánh xạ $P_C : H \to C$ gọi là phép chiếu metric từ H lên C. Từ định nghĩa của phép chiếu metric, nó có các tính chất đặc trưng sau đây.

Bổ đề 1.2 *Cho* $P_C : H \to C$. *Ta có*

(i) Với mọi $x \in C, y \in H, \|x - P_C y\|^2 + \|P_C y - y\|^2 \leq \|x - y\|^2$;

(ii) $z = P_C x$ *khi và chỉ khi* $\langle x - z, z - y\rangle \geq 0, \forall y \in C$.

Bổ đề 1.3 ([25], Nhận xét 4.4) *Cho* $\{a_n\}$ *là dãy số thực không âm. Giả sử với bất kỳ số nguyên* m *nào, tồn tại một số nguyên* p *sao cho* $p \geq m$ *và* $a_p \leq a_{p+1}$. *Cho* n_0 *là một số nguyên sao cho* $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$ *và xác định, với mọi số nguyên* $n \geq n_0$,

$$\tau(n) = \max\{k \in N : n_0 \leq k \leq n, a_k \leq a_{k+1}\}.$$

Khi đó $0 \leq a_n \leq a_{\tau(n)+1}$ *với mọi* $n \geq n_0$. *Hơn nữa, dãy* $\{\tau(n)\}_{n\geq n_0}$ *không giảm và hướng đến* $+\infty$ *khi* $n \to \infty$.

Bổ đề 1.4 ([27]) *Cho* C *là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert* H *và cho* A *là một ánh xạ đơn điệu và liên tục Lipschitz (chẵn, liên tục) của* C *trong* H *với* $D(A) = C$. *Gọi* Q *là một ánh xạ được xác định bởi*

$$Q(x) = \begin{cases} Ax + N_C(x) & \text{nếu} \quad x \in C, \\ \emptyset \quad \text{nếu} \quad x \notin C. \end{cases}$$

Khi đó Q *là đơn thức cực đại và* $Q^{-1}0 = VI(A, C)$.

Chúng ta bắt đầu với bổ đề sau.

Bổ đề 1.5 *Cho* $A : H \to H$ *là một toán tử đơn điệu và liên tục* L *- Lipschitz sao cho* $VI(A, C) \neq \emptyset$. *Giả sử rằng hai tham số* λ *và* ρ *thoả mãn điều kiện* $0 < \rho < \dfrac{1}{3L}$ *và* $0 \leq \lambda \leq \rho$. *Cho* $x \in H$ *và*

$$y = P_C(x - \lambda Ax), \quad z = P_C(y - \rho Ay), \quad t = P_C(x - \rho Az).$$

Sau đó, các ước tính sau đây giữ cho mỗi $x^* \in VI(A, C)$.

(i) $\|t - z\| \leq \|x - y\| + \rho L\|y - z\|$.

(ii) $\|t - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 - (1 - 3\rho L)[\|y - x\|^2 + \|y - z\|^2]$.

Chứng minh. (i) Từ các định nghĩa của z, t, tính không giãn của P_C

và L - Lipschitz liên tục của A, chúng ta có

$$\begin{aligned} \|t - z\| &= \|P_C(x - \rho Az) - P_C(y - \rho Ay)\| \\ &\le \|(x - \rho Az) - (y - \rho Ay)\| \\ &\le \|x - y\| + \rho\|Az - Ay\| \\ &\le \|x - y\| + \rho L\|z - y\|. \end{aligned}$$

(ii) Từ $t = P_C(x - \rho Az)$, Bổ đề (1.2)(i) và $x^* \in C$, thu được

$$\begin{aligned} \|t - x^*\|^2 &\le \|x - \rho Az - x^*\|^2 - \|x - \rho Az - t\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 - \|x - t\|^2 - 2\rho\langle Az, t - X^*\rangle. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Khi $x^* \in VI(A, C), \langle Ax^*, z - x^*\rangle \ge 0$. Do đó, từ tính đơn điệu của A mà $\langle Az, z - x^*\rangle \ge \langle Ax^*, z - x^*\rangle \ge 0$, và như vậy

$$\langle Az, t - x^*\rangle = \langle Az, t - z\rangle + \langle Az, z - x^*\rangle \ge \langle Az, t - z\rangle. \tag{1.12}$$

Kết hợp các quan hệ (1.11) và (1.12), chúng ta nhận được

$$\|t - x^*\|^2 \le \|x - x^*\|^2 - \|x - t\|^2 - 2\rho\langle Az, t - z\rangle \tag{1.13}$$
$$= \|x - x^*\|^2 - \|x - t\|^2 + 2\rho\langle Ay - Az, t - z\rangle - 2\rho\langle Ay, t - z\rangle. \tag{1.14}$$

Sử dụng tính liên tục Lipschitz của A và bất đẳng thức $2ab \le a^2 + b^2$, chúng ta có được

$$2\langle Ay - Az, t - z\rangle \le 2\|Ay - Az\|\|t - z\| \le 2L\|y - z\|\|t - z\| \le L\|y - z\|^2 + L\|t - z\|^2$$

Điều này cùng với quan hệ (1.14) có nghĩa là

$$\|t - x^*\|^2 \le \|x - x^*\|^2 - \|x - t\|^2 + \rho L\|y - z\|^2 + \rho L\|z - t\|^2 - 2\rho\langle Ay, t - z\rangle. \tag{1.15}$$

Từ $z = P_C(y - \rho Ay)$ và Bổ đề (1.2) (ii),chúng ta có

$$\langle y - \rho Ay - z, z - v\rangle \ge 0, \quad \forall v \in C.$$

Điều này với $v = t \in C$ dẫn đến

$$\begin{aligned}
2\rho\langle Ay, t-z\rangle &\geq 2\langle y-z, t-z\rangle = 2\langle y-x, t-z\rangle + 2\langle x-z, t-z\rangle \\
&= 2\langle y-x, t-y\rangle + 2\langle y-x, y-z\rangle + 2\langle x-z, t-z\rangle \\
&= 2\langle y-x, t-y\rangle + \|y-x\|^2 + \|y-z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|x-z\|^2 \\
&\qquad + \|t-z\|^2 - \|x-t\|^2 \\
&= 2\langle y-x, t-y\rangle + \|y-x\|^2 + \|y-z\|^2 + \|t-z\|^2 - \|x-t\|^2.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Kết hợp (1.15) và (1.16), chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
\|t-x^*\|^2 &\leq \|x-x^*\|^2 - \|y-x\|^2 - (1-\rho L)\|y-z\|^2 - (1-\rho L)\|z-t\|^2 \\
&\qquad + 2\langle x-y, t-y\rangle \\
&\leq \|x-x^*\|^2 - \|y-x\|^2 - (1-\rho L)\|y-z\|^2 + 2\langle x-y, t-y\rangle \\
&\leq \|x-x^*\|^2 - (1-3\rho L)L[\|y-x\|^2 + \|y-z\|^2] + 2\langle x-y, t-y\rangle
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Từ $y = P_C(x - \lambda Ax)$ và Bổ đề (1.2) (ii), $\langle x - \lambda Ax - y, y - v\rangle \geq 0$ với mọi $v \in C$. Với $v = t \in C$ thì

$$\lambda\langle Ax, t-y\rangle \geq \langle x-y, t-y\rangle. \tag{1.18}$$

Do đó, từ (1.17), có được

$$\|t-x^*\|^2 \leq \|x-x^*\|^2 - (1-3\rho L)L[\|y-x\|^2 + \|y-z\|^2] + 2\lambda\langle Ax, t-y\rangle. \tag{1.19}$$

Bây giờ, nếu $\langle Ax, t-y\rangle \leq 0$, từ (1.19) và $\lambda \geq 0$, chúng ta đi đến kết luận. Mặt khác, giả sử rằng $\langle Ax, t-y\rangle > 0$. Do đó, từ (1.18) và $\rho \geq \lambda \geq 0$, chúng ta nhận được

$$\langle x-y, t-y\rangle \leq \lambda\langle Ax, t-y\rangle \leq \rho\langle Ax, t-y\rangle. \tag{1.20}$$

Tiếp theo, sử dụng (1.13) và (1.20), ta có

$$\begin{aligned}
\|t-x^*\|^2 &\leq \|x-x^*\|^2 - \|x-t\|^2 - 2\rho\langle Az, t-z\rangle \\
&\leq \|x-x^*\|^2 - \|(x-y)-(t-y)\|^2 - 2\rho\langle Az, t-z\rangle \\
&\leq \|x-x^*\|^2 - \|x-y\|^2 - \|t-y\|^2 + 2\langle x-y, t-y\rangle - 2\rho\langle Az, t-z\rangle \\
&\leq \|x-x^*\|^2 - \|x-y\|^2 - \|t-y\|^2 + 2\rho\langle Ax, t-y\rangle - 2\rho\langle Az, t-z\rangle.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Từ $z = P_C(y-\rho Ay)$ và Bổ đề (1.2) (ii), ta nhận được $\langle y-\rho Ay-z, z-v\rangle \geq 0$ với mọi $v \in C$. Với $v = y \in C$ có ý rằng $-\rho\langle Ay, z-y\rangle \geq \|y-z\|^2$. Như vậy,

$$-2\rho\langle Ay, z-y\rangle - 2\|y-z\|^2 \geq 0. \tag{1.22}$$

Thêm số hạng không âm này vào vế phải của bất đẳng thức (1.21), chúng ta thấy

$$\begin{aligned}\|t-x^*\|^2 \leq \|x-x^*\|^2 - \|x-y\|^2 - \|t-y\|^2 - 2\|y-z\|^2 + 2\rho[\langle Ax, t-y\rangle \\ - \langle Az, t-z\rangle - \langle Ay, z-y\rangle].\end{aligned} \tag{1.23}$$

Sử dụng điều kiện Lipschitz của A, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}&\langle Ax, t-y\rangle - \langle Az, t-z\rangle - \langle Ay, z-y\rangle\\ &\quad= \langle Ax, t-z\rangle + \langle Ax, z-y\rangle - \langle Az, t-z\rangle - \langle Ay, z-y\rangle\\ &\quad= \langle Ax-Az, t-z\rangle + \langle Ax-Ay, z-y\rangle\\ &\quad\leq L\|x-z\|\|t-z\| + L\|x-y\|\|z-y\|\\ &\quad\leq \frac{L}{2}[\|x-z\|^2 + \|z-t\|^2 + \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2].\end{aligned} \tag{1.24}$$

Kết hợp các quan hệ (1.23) và (1.24), chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}\|t-x^*\|^2 &\leq \|x-x^*\|^2 - \|x-y\|^2 - \|t-y\|^2 - 2\|y-z\|^2 + \rho L[\|x-z\|^2 + \|z-t\|^2\\ &\quad + \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2]\\ &= \|x-x^*\|^2 - (1-\rho L)\|x-y\|^2 - (2-\rho L)\|y-z\|^2 + \rho L\|x-z\|^2\\ &\quad + \rho L\|z-t\|^2 - \|t-y\|^2.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác và bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ với mọi $a, b \in \Re$, ta được

$$\|x-z\|^2 \leq (\|x-y\| + \|y-z\|)^2 \leq 2(\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2).$$
$$\|z-t\|^2 \leq (\|z-y\| + \|y-t\|)^2 \leq 2(\|z-y\|^2 + \|y-t\|^2).$$

Kết hợp quan hệ (1.25) và hai bất đẳng thức cuối cùng, chúng ta thấy

$$\begin{aligned}\|t-x^*\|^2 &\leq \|x-x^*\|^2 - (1-3\rho L)\|x-y\|^2 - (2-5\rho L)\|y-z\|^2 - (1-2\rho L)\|t-y\|^2\\ &\leq \|x-x^*\|^2 - (1-3\rho L)\|x-y\|^2 - (2-5\rho L)\|y-z\|^2\\ &\leq \|x-x^*\|^2 - (1-3\rho L)[\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2].\end{aligned} \tag{1.26}$$

Điều này hoàn thành việc chứng minh Bổ đề (1.5). □

Nhận xét 1.1 Trong Bổ đề (1.5), chúng ta đưa ra ước tính (ii) và trình bày các bằng chứng trong trường hợp $0 \leq \lambda \leq \rho$. Một ước tính khác trong trường hợp đặc biệt khi $\lambda = \rho > 0$ đã được mô tả trong [30].

Trong suốt đồ án này, chúng ta coi ánh xạ $F : H \to H$ thỏa mãn các điều kiện (LC) và (SM) được đề cập trong P1.

Bổ đề 1.6 *[xem [29], Bổ đề 3.1] Cho μ được cố định tùy ý trong $(0, \frac{2\eta}{k^2})$ và xác định ánh xạ $G : H \to H$ bởi*

$$G^\mu(x) = (1 - \mu F)x, \quad x \in H.$$

Sau đó
(i) G^μ là liên tục Lipschitz trên H với hằng số $\sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu k^2)}$.
(ii) Với mọi $v \in (0, \mu)$ và mọi $x, y \in H$,

$$\|G^v(y) - x\| \leq (1 - \frac{v\tau}{\mu})\|y - x\| + v\|Fx\|,$$

Trong đó $\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu k^2)} \in (0, 1)$.

Chứng minh. (i) Từ định nghĩa của G^μ, η- đơn điệu mạnh và k - Lipschitz liên tục của F, chúng ta có được

$$\begin{aligned}\|G^\mu(x) - G^\mu(y)\|^2 &= \|(x - y) - \mu(Fx - Fy)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\mu\langle x - y, Fx - Fy\rangle + \mu^2\|Fx - Fy\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 + \mu^2 k\|x - y\|^2 \\ &= (1 - \mu(2\eta - \mu k))\|x - y\|^2.\end{aligned}$$

Điều này mang lại kết luận mong muốn. Tiếp theo, chúng ta chứng minh khẳng định (ii) trong bổ đề này. Từ định nghĩa của G, chúng ta có

$$\begin{aligned}\|G^v(y) - x\| &= \|(y - vFy) - (x - vFx) - vFx\| \\ &\leq \|(y - vFy) - (x - vFx)\| + v\|Fx\| \\ &= \|(1 - \frac{v}{\mu})(y - x) + \frac{v}{\mu}[(y - \mu F(y)) - (x - \mu Fx)]\| + v\|Fx\| \\ &= \|(1 - \frac{v}{\mu})(y - x) + \frac{v}{\mu}[G^\mu(y) - G^\mu(x)]\| + v\|Fx\| \\ &\leq (1 - \frac{v}{\mu})\|y - x\| + \frac{v}{\mu}\sqrt{1 - \mu(2\eta - \mu k^2)}\|y - x\| + v\|Fx\| \\ &= (1 - \frac{v\tau}{\mu})\|y - x\| + v\|Fx\|.\end{aligned}$$

Điều này hoàn thành chứng minh. □

Chương 2

Phương pháp lặp tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân và điểm bất động

2.1 Mô tả phương pháp

Bây giờ, chúng ta có thể mô tả chi tiết thuật toán như sau:

Thuật toán 2.1 (Phương pháp xấp xỉ mềm phân bậc hai bước - TSEGVM)
Khởi tạo. *Chọn* $x_0 \in H$ *và chuỗi tham số* $\lambda_n \subset [0, +\infty), \rho_n \subset (0, +\infty), \alpha_n \subset [0, 1], \beta_n \subset [0, 1]$.

Bước 1. *Tính toán*

$$\begin{aligned} y_n &= P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ z_n &= P_C(y_n - \rho_n A y_n), \\ t_n &= P_C(x_n - \rho_n A z_n). \end{aligned}$$

Bước 2. *Đặt* $v_n = t_n - \alpha_n F t_n$ *và tính*

$$x_{n+1} = (1 - \beta_n) v_n + \beta_n S v_n.$$

Để thiết lập sự hội tụ của Thuật toán (2.1)*, chúng ta áp dụng các điều kiện sau:*

Điều kiện A

(A1) $A : H \to H$ *đơn điệu trên* C *và* L *- Lipschitz liên tục trên* H.

(A2) $S : H \to H$ *là bán co với hằng số* $\beta \in [0, 1)$ *và nửa đóng tại 0.*

(A3) Tập nghiệm $\Omega := VI(A, C) \cap Fix(S)$ *không rỗng.*

Điều kiện B

(B1) $0 < \rho_* \leq \rho_n \leq \rho^* < \dfrac{1}{3L}$ *và* $0 \leq \lambda_n \leq \rho_n$.

(B2) $0 < \beta_* \leq \beta_n < \dfrac{1-\beta}{2}$.

(B3) $\alpha_n > 0, \alpha_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

2.2 Sự hội tụ

Bổ đề 2.1 *Ta có*

(i) $\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|v_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - v_n\|^2$ *với mỗi* $x^* \in \Omega$ *và mọi* $n \geq 0$.

(ii) Các dãy x_n, y_n, z_n, t_n, v_n *có giới hạn.*

Chứng minh. (i) Từ định nghĩa của x_{n+1}, chúng ta có thể viết

$$\|x_{n+1} - v_n\|^2 = (\beta_n)^2 \|v_n - Sv_n\|^2$$

và như vậy,

$$\|v_n - Sv_n\|^2 = \frac{1}{(\beta_n)^2} \|x_{n+1} - v_n\|^2. \tag{2.1}$$

Vì S là β - bán co, nên theo Bổ đề (1.1), toán tử $(1 - \beta_n)I + \beta_n S$ tựa không giãn và

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \beta_n)v_n + \beta_n S v_n - x^*\|^2 \\ &\leq \|v_n - x^*\|^2 - \beta_n(1 - \beta - \beta_n)\|Sv_n - v_n\|^2 \\ &= \|v_n - x^*\|^2 - \frac{1 - \beta - \beta_n}{\beta_n} \|x_{n+1} - v_n\|^2, \end{aligned}$$

trong đó đẳng thức cuối cùng theo sau từ (2.1). Từ giả định trên β_n, chúng ta thấy

$$\frac{1 - \beta - \beta_n}{\beta_n} \geq 1,$$

và do đó,

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|v_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - v_n\|^2 \quad (2.2)$$

(ii) Cho $\mu \in (0, \frac{2\eta}{L^2})$ là bất động. Vì $\alpha_n \to 0$, chúng ta có thể giả sử rằng $\alpha_n \subset (0, \mu)$. Từ định nghĩa của G_μ trong Bổ đề (1.6) và của v_n trong Thuật toán (2.1), ta có $v_n = G^{\alpha_n}(t_n)$. Sử dụng Bổ đề (1.6)(ii) cho $y = t_n, x = x^*$ và $v = \alpha_n$, chúng ta thu được

$$\|v_n - x^*\| = \|G^{\alpha_n}(t_n) - x^*\| \leq (1 - \frac{\alpha_n \tau}{\mu})\|t_n - x^*\| + \alpha_n\|F(x^*)\|, \quad (2.3)$$

trong đó τ được xác định như trong Bổ đề (1.6). Từ Bổ đề (1.5)(ii), Bước 1 của Thuật toán (2.1) và giả thuyết (B1), chúng ta thu được

$$\|t_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|. \quad (2.4)$$

Hơn nữa, từ (2.2) với $n := n - 1$, chúng ta có

$$\|x_n - x^*\|^2 \leq \|v_{n-1} - x^*\|^2. \quad (2.5)$$

Vì vậy, nó theo sau từ (2.4) rằng

$$\|t_n - x^*\| \leq \|v_{n-1} - x^*\|$$

Điều này cùng với (2.3) có ý rằng

$$\begin{aligned}
\|v_n - x^*\| &\leq (1 - \frac{\alpha_n \tau}{\mu})\|v_{n-1} - x^*\| + \alpha_n\|F(x^*)\| \\
&= (1 - \frac{\alpha_n \tau}{\mu})\|v_{n-1} - x^*\| + \frac{\alpha_n \tau}{\mu}(\frac{\mu}{\tau}\|F(x^*)\|) \\
&\leq \max\{\|v_{n-1} - x^*\|, \frac{\mu}{\tau}\|F(x^*)\|\}.
\end{aligned}$$

Bằng cách cảm ứng, chúng ta có được

$$\|v_n - x^*\| \leq \max\{\|v_0 - x^*\|, \frac{\mu}{\tau}\|F(x^*)\|\}, \quad \forall n \geq 1.$$

Do đó, dãy $\{v_n\}$ bị giới hạn, và từ (2.4) và (2.5), dãy $\{x_n\}$ và $\{t_n\}$ cũng bị ràng buộc. Cuối cùng, giới hạn của $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ được tuân theo từ Bổ đề (1.5) (ii) và (B1). Điều này kết thúc chứng minh. □

Bổ đề 2.2 *Ước tính sau đây phù hợp với mọi $x^* \in \Omega$ và $n \geq 0$,*

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2 &- (1 - 3\rho_n L)[\|y_n - x_n\|^2 + \|y_n - z_n\|^2] \\
&- \|x_{n+1} - t_n\|^2 - 2\alpha_n\langle x_{n+1} - x^*, Ft_n\rangle.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Từ Bổ đề (1.5) và Bước 1 của Thuật toán (2.1), chúng ta thu được

$$\|t_n - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2 - (1 - 3\rho_n L)[\|y_n - x_n\|^2 + \|y_n - z_n\|^2]. \quad (2.6)$$

Từ bổ đề (2.1) (i), chúng ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|v_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - v_n\|^2 \\
&= \|t_n - \alpha_n F t_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - (t_n - \alpha_n F t_n)\|^2 \\
&= \|t_n - x^*\|^2 - 2\alpha_n \langle x_{n+1} - x^*, F t_n \rangle - \|x_{n+1} - t_n\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 - (1 - 3\rho_n L)[\|y_n - x_n\|^2 + \|y_n - z_n\|^2] \\
&- 2\alpha_n \langle x_{n+1} - x^*, F t_n \rangle - \|x_{n+1} - t_n\|^2.
\end{aligned}$$

Điều này hoàn thành chứng minh. □

Bổ đề 2.3 *Giả sử rằng $\{t_m\}$ là một dãy con của $\{t_n\}$ hội tụ yếu với p. Ngoài ra, nếu những điều sau đây được lưu giữ*

$$\lim_{m\to\inf} \|y_m - x_m\|^2 = \lim_{m\to\inf} \|y_m - z_m\|^2 = \lim_{m\to\inf} \|x_{m+1} - t_m\|^2 = 0. \quad (2.7)$$

Sau đó $p \in \Omega = VI(A, C) \cap Fix(S)$.

Chứng minh. Vì C đóng và lồi trong H nên C đóng yếu. Do đó, từ $t_m \subset C$ và $t_m \rightharpoonup p$, ta thu được $p \in C$. Hơn nữa, theo (2.7), ta cũng có $x_m, y_m, z_m \rightharpoonup p$. Theo điều kiện (LC) và giới hạn của $\{t_m\}$ mà $\{F(t_m)\}$ bị ràng buộc. Từ định nghĩa của v_m và $\alpha_m \to 0$ ta tìm được

$$v_m - t_m = \alpha_m F t_m \to 0.$$

Do đó, $v_m \rightharpoonup p$ và từ (2.7), chúng ta nhận được

$$\|x_{m+1} - v_m\| \to 0. \quad (2.8)$$

Theo như (2.1), (2.8) và (B2) rằng

$$\|v_m - S v_m\|^2 = \frac{1}{\beta_m^2}\|x_{m+1} - v_m\|^2 \leq \frac{1}{\beta_*^2}\|x_{m+1} - v_m\|^2 \to 0.$$

Do đó, từ tính nửa đóng của S tại 0 và $v_m \rightharpoonup p$, chúng ta có $p \in Fix(S)$. Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh rằng $p \in VI(A, C)$. Với mọi $x \in H$, cho

$$Q(x) = \begin{cases} Ax + N_C(x) & \text{nếu} \quad x \in C \\ \emptyset \quad \text{nếu} \quad x \notin C, \end{cases}$$

trong đó $N_C(.)$ là hình nón thông thường của C. Vì A là đơn điệu và liên tục Lipschitz nên Bổ đề (1.4) đảm bảo rằng Q là đơn điệu cực đại và $Q^{-1}(0) = VI(A, C)$. Đối với mỗi cặp (x, y) trong đồ thị của Q, tức là, $(x, y) \in G(Q)$, một đồ thị $y - Ax \in N_C(x)$. Theo định nghĩa của $N_C(x)$,

$$\langle x - z, y - Ax\rangle \geq 0, \quad \forall z \in C.$$

Thay $z = t_m \in C$ vào bất đẳng thức cuối cùng, ta được

$$\langle x - t_m, y\rangle \geq \langle x - t_m, Ax\rangle. \tag{2.9}$$

Theo $t_m = P_C(x_m - \rho_m A z_m)$ và Bổ đề (1.2) (ii), chúng ta thu được

$$\langle x - t_m, t_m - x_m + \rho_m A z_m\rangle \geq 0,$$

có nghĩa là

$$\langle x - t_m, A z_m\rangle \geq \langle x - t_m, \frac{x_m - t_m}{\lambda}\rangle. \tag{2.10}$$

Các quan hệ (2.9), (2.10) và tính đơn điệu của A dẫn đến

$$\begin{aligned}
\langle x - t_m, y\rangle \geq \langle x - t_m, Ax\rangle &= \langle x - t_m, Ax - At_m\rangle \\
&+ \langle x - t_m, At_m - Az_m\rangle + \langle x - t_m, Az_m\rangle \\
&\geq \langle x - t_m, At_m - Az_m\rangle + \langle x - t_m, \frac{x_m - t_m}{\rho_m}\rangle \\
&\geq -\|x - t_m\|\|At_m - Az_m\| - \|x - t_m\|\frac{\|x_m - t_m\|}{\rho_m} \\
&\geq -M_x[\|At_m - Az_m\| + \frac{\|x_m - t_m\|}{\rho_*}],
\end{aligned} \tag{2.11}$$

trong đó $M_x = \sup\{\|x - t_m\| : m \geq 0\} < +\infty$ do có giới hạn của dãy $\{t_m\}$. Từ Bổ đề (1.5) và Bước 1 của Thuật toán (2.1), chúng ta có

$$\|t_m - z_m\| \leq \|x_m - y_m\| + \rho_m L\|y_m - z_m\|.$$

Do đó, từ (2.7) và (B2), ta thu được $\|t_m - z_m\| \to 0$. Vì A là L - Lipschitz liên tục,

$$\|At_m - Az_m\| \to 0. \tag{2.12}$$

Hơn nữa, từ $\|t_m - z_m\| \to 0$ và (2.7), chúng ta nhận được

$$\|x_m - t_m\| \leq \|x_m - y_m\| + \|y_m - z_m\| + \|z_m - t_m\| \to 0. \tag{2.13}$$

Bây giờ, thông qua giới hạn trong (2.11) dưới dạng $n \to \infty$ và sử dụng các quan hệ (2.12), (2.13) và $t_m \rightharpoonup p$, ta thu được $\langle x - p, y\rangle \geq 0$ với mọi $(x, y) \in G(Q)$. Như vậy, từ đơn điệu cực đại của Q và Bổ đề (1.4), người ta có $p \in Q^{-1}(0) = VI(A, C)$. Do đó, $p \in VI(A, C)$ và do đó $p \in \Omega = VI(A, C) \cap Fix(S)$. □

Cuối cùng, chúng ta sẽ chứng minh định lý chính sau đây.

Định lý 2.1 *Giả sử rằng các điều kiện (A1)-(A3) và (B1)-(B3) giữ nguyên và $F : H \to H$ thỏa mãn các điều kiện (LC) và (SM). Sau đó, các chuỗi $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{t_n\}$ được tạo bởi Thuật toán* (2.1) *hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $x^\dagger$ của* (1.7).

Chứng minh. Tập $\varepsilon_n = \|x_n - x^\dagger\|^2$. Vì $\{x_n\}$ và $\{t_n\}$ là các giới hạn nên tồn tại $M > 0, K > 0$ sao cho

$$2\|\langle x_{n+1} - x^\dagger, Ft_n\rangle\| \leq M, \|Ft_n\| \leq K.$$

Sử dụng bổ đề (2.2) cho $x^* = x^\dagger$, chúng ta đạt được

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n + (1 - 3\rho_n L)[\|y_n - x_n\|^2 + \|y_n - z_n\|^2] + \|x_{n+1} - t_n\|^2 \leq \alpha_n M. \tag{2.14}$$

Trường hợp 1. Tồn tại n_0 sao cho dãy $\{\varepsilon_n\}$ giảm dần với mọi $n \geq n_0$. Trong trường hợp này, tồn tại giới hạn của $\{\varepsilon_n\}$, tức là $\varepsilon_n \to \varepsilon \geq 0$. Do đó, từ (2.14), (B1) và (B3), chúng ta có

$$\|y_n - x_n\|^2 \to 0, \|x_{n+1} - t_n\|^2 \to 0. \tag{2.15}$$

Điều này kéo theo $\|t_n - x^\dagger\|^2 \to \varepsilon \geq 0$. Vì $\{t_n\}$ là giới hạn, không mất tính tổng quát nên tồn tại một dãy con $\{t_m\}$ của $\{t_n\}$ hội tụ yếu với p sao cho

$$\liminf_{n\to\infty} \langle t_n - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle t_m - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle = \langle p - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle. \tag{2.16}$$

Do đó, từ (2.15) và Bổ đề (2.3), chúng ta thu được $p \in \Omega$. Điều này cùng với (1.7) có ý rằng $\langle p - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \geq 0$. Do đó, từ (2.16),

$$\liminf_{n\to\infty} \langle t_n - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \geq 0. \tag{2.17}$$

Mặt khác, vì F là η - đơn điệu mạnh, nên với mọi n, chúng ta có

$$\begin{aligned}\langle x_{n+1} - x^\dagger, Ft_n\rangle &= \langle x_{n+1} - t_n, Ft_n\rangle + \langle t_n - x^\dagger, Ft_n\rangle \\ &= \langle x_{n+1} - t_n, Ft_n\rangle + \langle t_n - x^\dagger, Ft_n - Fx^\dagger\rangle + \langle t_n - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \\ &\geq \langle x_{n+1} - t_n, Ft_n\rangle + \eta\|t_n - x^\dagger\|^2 + \langle t_n - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \\ &\geq -K\|x_{n+1} - t_n\| + \eta\|t_n - x^\dagger\|^2 + \langle t_n - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle.\end{aligned}$$

Điều này cùng với (2.15), (2.17) và $\|t_n - x^\dagger\|^2 \to \varepsilon$ có ý rằng

$$\liminf_{n\to\infty} \langle x_{n+1} - x^\dagger, Ft_n\rangle \geq \eta\varepsilon. \tag{2.18}$$

Bây giờ, giả sử rằng $\varepsilon > 0$, thì từ (2.18), tồn tại n_0 sao cho

$$\langle x_{n+1} - x^\dagger, Ft_n\rangle \geq \frac{1}{2}\eta\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0. \tag{2.19}$$

Do đó, theo Bổ đề (2.2) rằng

$$\|x_{n+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_n - x^\dagger\|^2 \leq -2\alpha_n\langle x_{n+1} - x^\dagger, Ft_n\rangle \leq -\eta\varepsilon\alpha_n, \quad \forall n \geq n_0,$$

hoặc $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \leq -\eta\varepsilon\alpha_n, \quad \forall n \geq n_0$. Do đó $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n_0} \leq -\eta\varepsilon\sum_{k=n_0}^{n+1}\alpha_k$. Vì $\eta\varepsilon > 0$ và $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = +\infty, \varepsilon_n \to -\infty$. Đây là một mâu thuẫn, và do đó $\varepsilon = 0$, hoặc $x_n \to x^\dagger$.

Trường hợp 2. Tồn tại một dãy con $\{\varepsilon_{n_i}\}$ của $\{\varepsilon_n\}$ sao cho $\varepsilon_{n_i} \leq \varepsilon_{n_i+1}$ với mọi $i \geq 0$.

Trong trường hợp này, theo Bổ đề (1.3) rằng

$$\varepsilon_{\tau(n)} \leq \varepsilon_{\tau(n)+1}, \varepsilon_n \leq \varepsilon_{\tau(n)+1}, \forall n \geq n_0, \tag{2.20}$$

trong đó $\tau(n) = \max\{k \in N : n_0 \leq k \leq n, \varepsilon_k \leq \varepsilon_{k+1}\}$. Hơn nữa, dãy $\{\tau(n)\}_{n\geq n_0}$ không giảm và tiến đến $+\infty$ khi $n \to \infty$. Sau đó, từ (2.14), (B1) và (B3), $\varepsilon_{\tau(n)} \leq \varepsilon_{\tau(n)+1}$ và $\alpha_{\tau(n)} \to 0$, chúng ta thu được

$$\|y_{\tau(n)} - x_{\tau(n)}\|^2 \to 0, \|y_{\tau(n)} - z_{\tau(n)}\|^2 \to 0, \|x_{\tau(n)+1} - t_{\tau(n)}\|^2 \to 0. \tag{2.21}$$

Khi $\{t_{\tau(n)}\}$ có giới hạn, không mất tính tổng quát, tồn tại một dãy con $\{t_{\tau(m)}\}$ của $\{t_{\tau(n)}\}$ hội tụ yếu về p sao cho

$$\liminf_{n\to\infty} \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle t_{\tau(m)} - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle = \langle p - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle. \tag{2.22}$$

Do đó, từ (2.21) và Bổ đề (2.3), ta kết luận $p \in \Omega$. Bây giờ, chúng ta chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x^*. Sử dụng bổ đề (2.2) cho $x^* = x^\dagger$, chúng ta có được với mọi n

$$2\alpha_{\tau(n)}\langle x_{\tau(n)+1} - x^\dagger, Ft_{\tau(n)}\rangle \le \varepsilon_{\tau(n)} - \varepsilon_{\tau(n)+1} - (1 - 3\rho_n L)\|y_{\tau(n)} - x_{\tau(n)}\|^2 \\ - (1 - 3\rho_n L)\|y_{\tau(n)} - z_{\tau(n)}\|^2 - \|x_{\tau(n)+1} - t_{\tau(n)}\|^2.$$

Do đó, từ (B1), (B3) và (2.20), chúng ta có, với mọi n,

$$\langle x_{\tau(n)+1} - x^\dagger, F(t_{\tau(n)})\rangle \le 0. \tag{2.23}$$

Từ η - đơn điệu mạnh của F và bất đẳng thức (2.23), chúng ta có thể viết rằng với mọi n

$$\begin{aligned}
\eta\|t_{\tau(n)} - x^\dagger\|^2 &\le \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Ft_{\tau(n)} - Fx^\dagger\rangle \\
&= \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Ft_{\tau(n)}\rangle - \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \\
&= \langle t_{\tau(n)} - x_{\tau(n)+1}, Ft_{\tau(n)}\rangle + \langle x_{\tau(n)+1} - x^\dagger, Ft_{\tau(n)}\rangle - \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \\
&\le \langle t_{\tau(n)} - x_{\tau(n)+1}, Ft_{\tau(n)}\rangle - \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \\
&\le \|t_{\tau(n)} - x_{\tau(n)+1}\|\|Ft_{\tau(n)}\| - \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle
\end{aligned}$$

Điều này cùng với (2.21), (2.22), giới hạn của $\{t_{\tau(n)}\}$ và sự liên tục Lipschitz của F có nghĩa là

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \eta\|t_{\tau(n)} - x^\dagger\|^2 &\le -\liminf_{n\to\infty} \langle t_{\tau(n)} - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle. \\
&= -\langle p - x^\dagger, Fx^\dagger\rangle \le 0,
\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng theo sau từ $p \in \Omega$ và $x^\dagger \in VI(F, \Omega)$. Vì $\eta > 0$, chúng ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \|t_{\tau(n)} - x^\dagger\|^2 = 0.$$

Đẳng thức này cùng với (2.21) có nghĩa là $\lim_{n\to\infty} \|x_{\tau(n)+1} - x^\dagger\|^2 = 0$. Do đó, nó theo sau từ (2.20) mà $0 \le \varepsilon_n \le \varepsilon_{\tau(n)+1} = \|x_{\tau(n)+1} - x^\dagger\|^2 \to 0$ as $n \to \infty$. Do đó, $\varepsilon_n \to 0$ và dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $x^\dagger$. Vì vậy, trong cả hai trường hợp, sự hội tụ của $\{y_n\}, \{z_n\}, \{t_n\}$ tiếp theo từ Bổ đề (2.3). Định lý (2.1) được chứng minh. □

Chương 3

Ví dụ minh họa

3.1 Ví dụ minh họa cho sự hội tụ mạnh của thuật toán

Trong phần này, chúng ta thực hiện ví dụ số để minh họa sự hội tụ của TSEGVM ((2.1)) và so sánh nó với thuật toán hội tụ mạnh HEGVM trong ((1.8)).

Phép chiếu trên C được tính toán bằng ngôn ngữ lập trình Python. Tất cả chương trình được thực hiện trên Laptop CPU Intel (R) Core (TM) i5-5300U @ 2,30GHz, RAM 8,00 GB.

Ví dụ 3.1 Cho $H = \mathbb{R}^3$, $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 \leq 2\}$. Các ánh xạ $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ và $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được định nghĩa như sau: $A = \frac{1}{9}Mx$ với $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; $S = \frac{1}{3}x$ và $F = \frac{2}{5}x$.

Dễ thấy A là đơn điệu và L-Lipschitz liên tục trên H với $L = \frac{2}{3}$; S là bán co với hằng số $\beta = 0$ và nửa đóng tại 0 và F thoả mãn điều kiện (LC) và (SM).

Ta có, bài toán có nghiệm duy nhất là $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$

Ta chọn $x^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ là giá trị ban đầu.

Chọn $\lambda = 0.3$, $\rho = 0.4$, sai số $\varepsilon = 10^{-8}$ và các tham số $\beta_n = 0.25$, ta có bảng kết quả (TSEGVM) sau:

Với $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$

Iter	err
1	0.7469
20	0.0020
40	3.4550×10^{-5}
60	6.1793×10^{-7}
80	1.0814×10^{-8}
81	8.8300×10^{-9}

Nghiệm tìm được là $x = \begin{bmatrix} 1.3030 \times 10^{-9} & 8.0706 \times 10^{-9} & -3.3367 \times 10^{-9} \end{bmatrix}^\top$ với 81 lần lặp trong thời gian 0.1155(s)

Với $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Iter	err
1	0.7469
20	0.0003
40	1.6594×10^{-6}
60	1.0880×10^{-8}
61	8.4917×10^{-9}

Nghiệm tìm được là $x = \begin{bmatrix} 1.3786 \times 10^{-9} & 7.6051 \times 10^{-9} & -3.5171 \times 10^{-9} \end{bmatrix}^\top$ với 61 lần lặp trong thời gian 0.0948(s)

Trong thuật toán TSEGVM ở trên ta có thể thấy rằng khi $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ thì tốc độ hội tụ sẽ nhanh hơn khi $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$.

3.2 Ví dụ so sánh với thuật toán HEGVM

Chọn các hệ số tương tự như trên và $w = 0,2$, ta có bảng kết quả (HEGVM) sau

Với $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$

Iter	err
1	0.7829
20	0.0043
40	0.0002
60	7.7810×10^{-6}
80	3.3182×10^{-7}
100	1.3960×10^{-8}
103	8.6713×10^{-9}

Nghiệm tìm được là $x = \begin{bmatrix} 1.2749 \times 10^{-9} & 7.9311 \times 10^{-9} & -3.2655 \times 10^{-9} \end{bmatrix}^\top$ với 103 lần lặp trong thời gian 0.1781(s)

Với $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Iter	err
1	0.7829
20	0.0007
40	8.6205×10^{-6}
60	1.3700×10^{-7}
73	9.946×10^{-9}

Nghiệm tìm được là $x = \begin{bmatrix} 1.6413 \times 10^{-9} & 8.8650 \times 10^{-9} & -4.1991 \times 10^{-9} \end{bmatrix}^\top$ với 73 lần lặp trong thời gian 0.1066(s)

Trong thuật toán HEGVM ở trên ta có thể thấy rằng khi $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ thì tốc độ hội tụ sẽ nhanh hơn khi $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Xét cùng một chuỗi $\{\alpha_n\}$ thì ta có thể nhận thấy rằng tốc độ hội tụ của thuật toán (2.1) nhanh hơn so với tốc độ hội tụ của thuật toán HEGVM.

Điều này có thể lý giải bằng lý do là thuật toán (2.1) chiếu 3 lần lên trên C trong 1 lần lặp còn thuật toán HEGVM chỉ chiếu 2 lần lên trên C nên ta có sự khác biệt về tốc độ hội tụ như trên.

Kết luận

1 Kết luận

Đồ án đã đạt được mục tiêu đề ra

Đồ án đã ...

Kết quả của đồ án

1. ...
2. ...

Kỹ năng đạt được

1. Bước đầu biết tìm kiếm, đọc, dịch tài liệu chuyên ngành liên quan đến nội dung đồ án.
2. Biết tổng hợp các kiến thức đã học và kiến thức trong tài liệu tham khảo để viết báo cáo đồ án.
3. Chế bản đồ án bằng LaTeX.
4. Biết tóm tắt nội dung đồ án và biết trình bày một báo cáo khoa học.
5. ...

2 Hướng phát triển của đồ án trong tương lai

1. ...
2. ...

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Trần Vũ Thiệu, Nguyễn Thị Thu Thủy (2011), *Giáo trình Tối ưu phi tuyến*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[2] Hieu D.V., Muu L.D., Anh P. K.: Parallel hybrid extragradient methods for pseudomonotone equilibrium problems and nonexpansive mappings. Numer. Algorithms. 73, 197-217 (2016)

[3] Hieu, D.V., Anh P.K., Muu L.D.: Modified hybrid projection methods for finding common solutions to variational inequality problems. Comput. Optim. Appl. 66, 75-96 (2017)

[4] Hieu, D.V.: Parallel extragradient-proximal methods for split equilibrium problems. Math. Model. Anal.21, 478-501 (2016)

[5] Hieu, D.V.: Convergence analysis of a new algorithm for strongly pseudomontone equilibrium problems. Numer. Algor. 77, 983-1001 (2018)

[6] Hieu, D. V.: An extension of hybrid method without extrapolation step to equilibrium problems. J. Ind. Manag. Optim. 13, 1723-1741 (2017)

[7] Hieu, D. V.: An explicit parallel algorithm for variational inequalities. Bull. Malys. Math. Sci. Soc.(2017). DOI:10.1007/s40840-017-0474-z

[8] Khanh, P.D.: A modified extragradient method for infinite-dimensional variational inequalities. Vietnam J. Math. 41, 251-263 (2016)

[9] Nguyen, T. P. D., Strodiot, J. J., Nguyen, V. H., Nguyen, T. T. V.: A family of extragradient methods for solving equilibrium problems, J. Ind. Manag. Optim. 11, 619–630 (2015)

[10] Bauschke, H.H., Combettes, P.L.: Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Springer, New York (2011)

[11] Baiocchi, C., Capelo, A.: Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems, Wiley, New York, 1984.

[12] Bauschke, H.H., Chen, J.: A projection method for approximating fixed points of quasi - nonexpansive mappings without the usual demiclosedness condition. J. Nonlinear Convex Anal. 15, 129-135 (2014)

[13] Censor, Y., Gibali, A., Reich, S.: The subgradient extragradientmethod for solving variational inequalities in Hilbert space. J. Optim. Theory Appl. 148 (2), 318-335 (2011)

[14] Censor, Y., Gibali, A., Reich, S.: Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space. Optim. Meth. Softw. 26(4-5), 827-845 (2011)

[15] Censor, Y., Gibali, A., Reich, S.: Extensions of Korpelevichs extragradient method for the variational inequality problem in Euclidean space. Optimization 61, 1119-1132 (2012)

[16] Eslamian, M., Saadati, R., Vahidi, J.: Viscosity iterative process for demicontractive mappings and multivalued mappings and equilibrium problems. Comp. Appl. Math. 36, 1239-1253 (2017)

[17] Facchinei, F., Pang, J.S.: Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementary Problems, NewYork: Springer-Verlag, (2003)

[18] Hartman, P., Stampacchia, G.: On some non-linear elliptic diferential-functional equations. Acta Math.115, 271-310 (1966)

[19] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G.: An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, New York (1980)

[20] Konnov, I. V.: Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities. Springer, Berlin (2000)

[21] Korpelevich, G. M.: The extragradient method for finding saddle points and other problems, Ekonomikai Matematicheskie Metody. 12, 747-756 (1976)

[22] Kraikaew, R., Saejung, S.: Strong convergence of the Halpern subgradient extragradient method for solving variational inequalities in H ilbert spaces. J. Optim. Theory Appl. 163, 399-412 (2014)

[23] Malitsky, Yu. V.: Projected reflected gradient methods for monotone variational inequalities. SIAM J.Optim. 25(1), 502–520 (2015)

[24] Malitsky, Yu. V., Semenov, V. V.: A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems. J. Glob. Optim. 61, 193-202 (2015)

[25] Maing´e, P. E.: A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems. SIAM J. Control Optim. 47, 1499-1515 (2008)

[26] Nadezhkina, N., Takahashi, W.: Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. 128, 191-201 (2006)

[27] Rockafellar, R. T.: On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. Trans Amer Math Soc.149, 75-88 (1970)

[28] Takahashi, W., Toyoda, M.: Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. 118, 417-428 (2003)

[29] Yamada, I.: The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings. In: Butnariu, D., Censor, Y., Reich, S. (eds.) Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization and Their Applications, Elsevier, Amsterdam, 473–504 (2001)

[30] Zaporozhets, D., Zykina, A., Mele´nchuk, N.: Comparative analysis of the extragradient methods for solution of the variational inequalities of some problems. Automation and Remote Control 73, 626-636 (2012)

[31] Zeng, L. C., Yao, J. C.: Strong convergence theorem by an extragradient method for fixed point problems and variational inequality problems. Taiwanese J. Math. 10, 1293-1303 (2006)

[32] Zykina, A., Mele´nchuk, N.: A two-step extragradient method for variational inequalities. Russ. Math.54, 71-73 (2010)

[33] Zykina, A., Mele´nchuk, N.: A doublestep extragradient method for solving a resource management problem. Model. Anal. Inform. Sys. 17, 65-75 (2010)

[34] Zykina, A., Mele´nchuk, N.: A doublestep extragradient method for solving a problem of the management of resources. Autom. Control Comput. Sci.45, 452-459 (2011)

[35] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications III: Variational Methods and Optimization, Springer-Verlag, New York, 1985

[36] Wang, S.: Strong convergence of a regularization algorithm for common solutions with applications. Comp. Appl. Math. 35 (1), 153-169 (2016)