Ngày . . No.

Bài tập lần 9

Đề 4 - GK - K64TT - Câu 2, ý (b)

$u_{tt} = u_{xx}$ khi $0 \le x < 3$, $t > 0$

$u(0,t) = u(3,t) = 0$ khi $t \ge 0$

$u(x,0) = \chi_{[0,1]}(x) = f(x)$ khi $0 \le x \le 3$

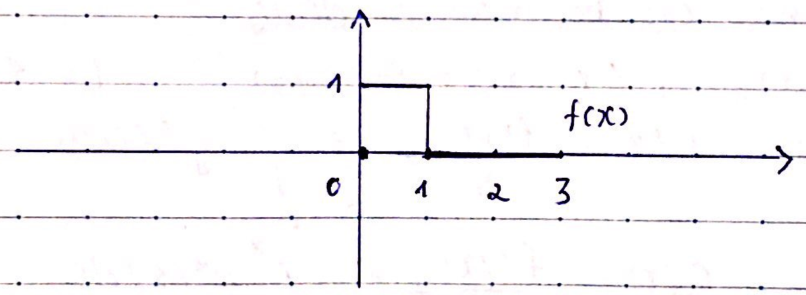
$u_t(x,0) = \chi_{[1,2]}(x) = g(x)$ khi $0 \le x \le 3$

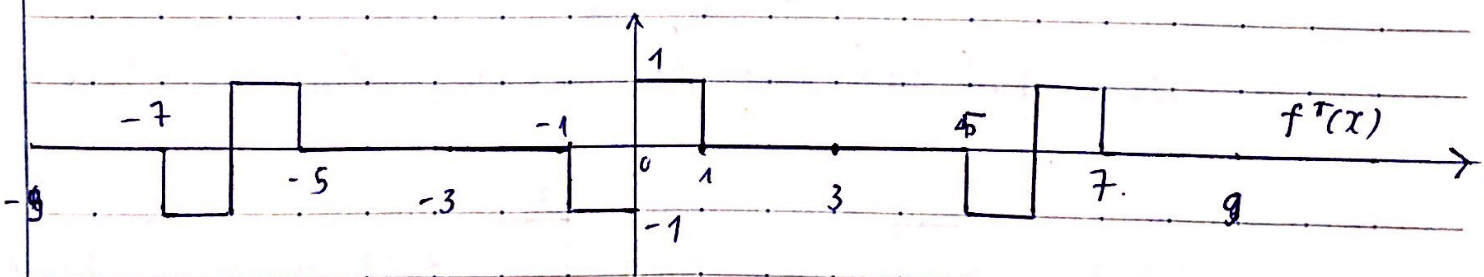
Giải

- Do $u(0,t) = u(3,t) = 0$ khi $t \ge 0$ → Ta thác triển lẻ tuần hoàn chu kì 6 các hàm $f(x)$ và $g(x)$ thành $f^*(x)$ và $g^*(x)$

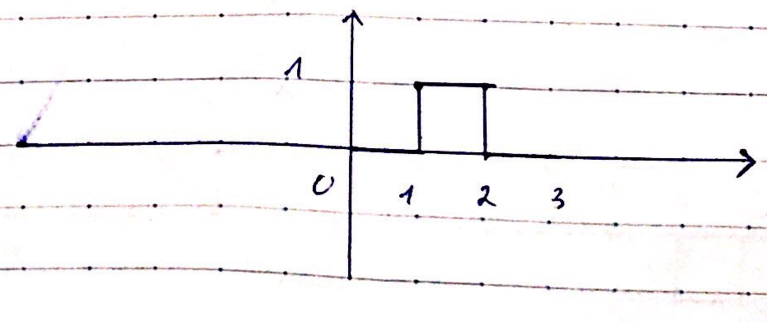
+) $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ khi $0 \le x \le 3$

$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nếu } 1 < x < 3 \end{cases}$$

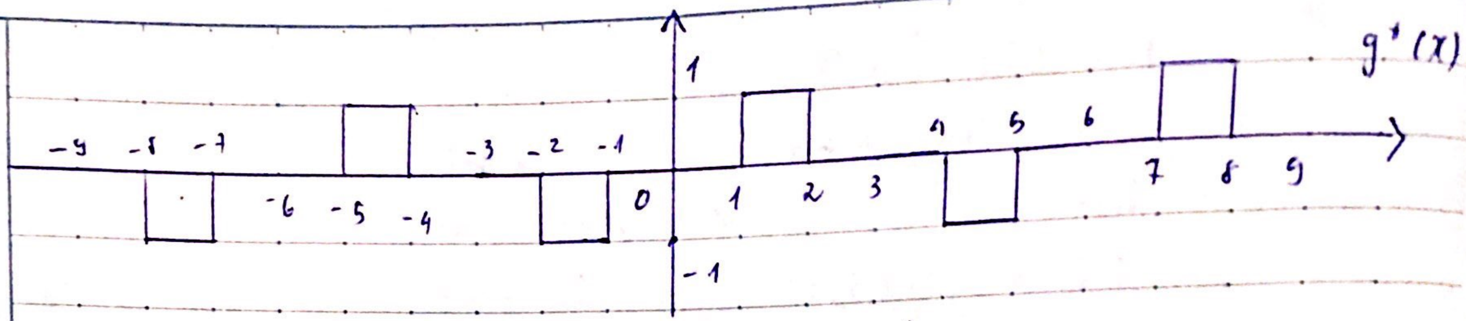


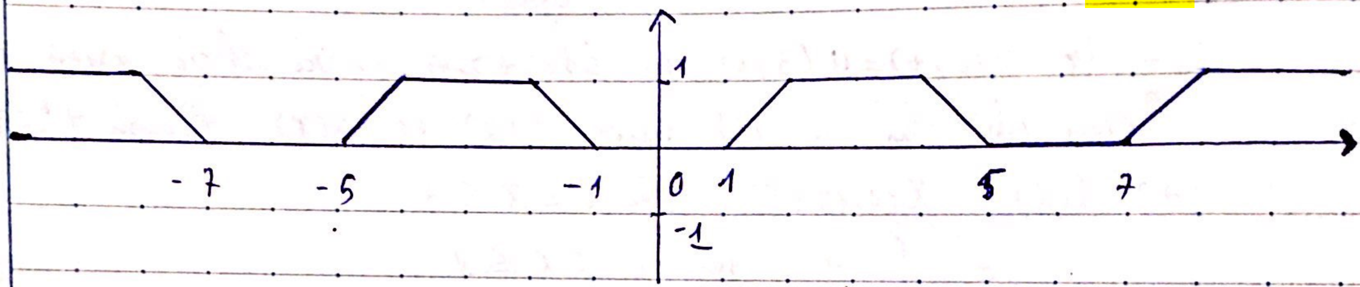

+) $g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$ khi $0 \le x \le 3$ $= \begin{cases} 1 & \text{khi } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{khi } 0 \le x < 1 \text{ hoặc } 2 < x \le 3 \end{cases}$




Scanned with CamScanner




Tiếp theo ta lấy tích phân $\int_0^x g^*(s)ds$



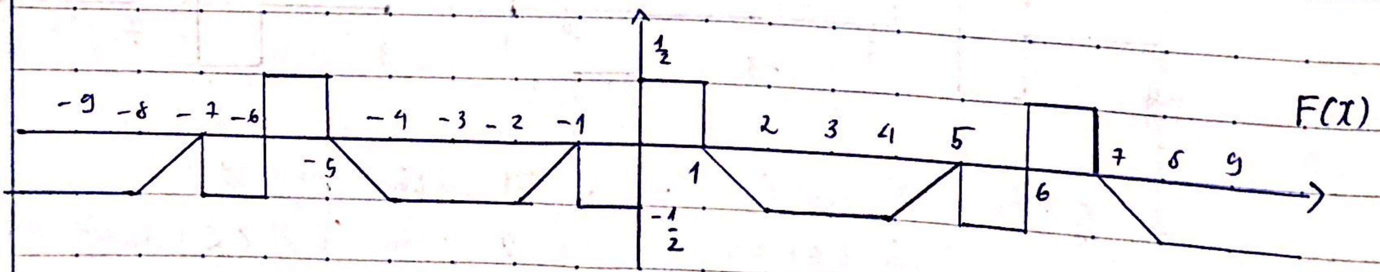
*) Nghiệm của bài toán có dạng

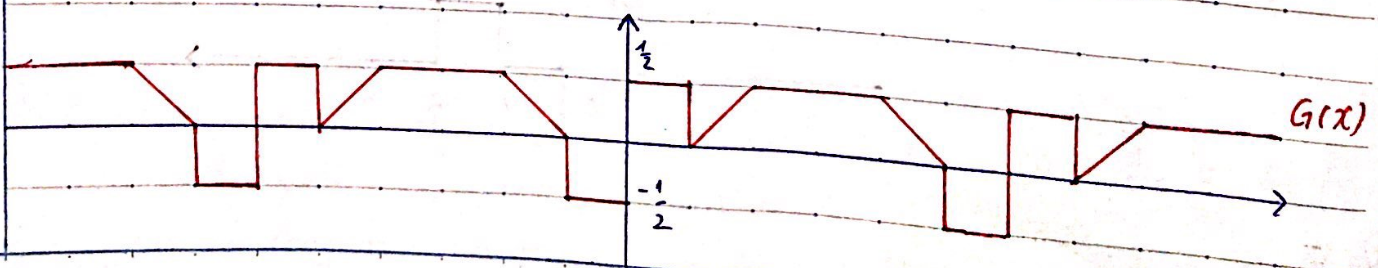
$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t) \quad (0 \le x \le 3)$

Sóng tiến $F(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x g^*(s)ds$

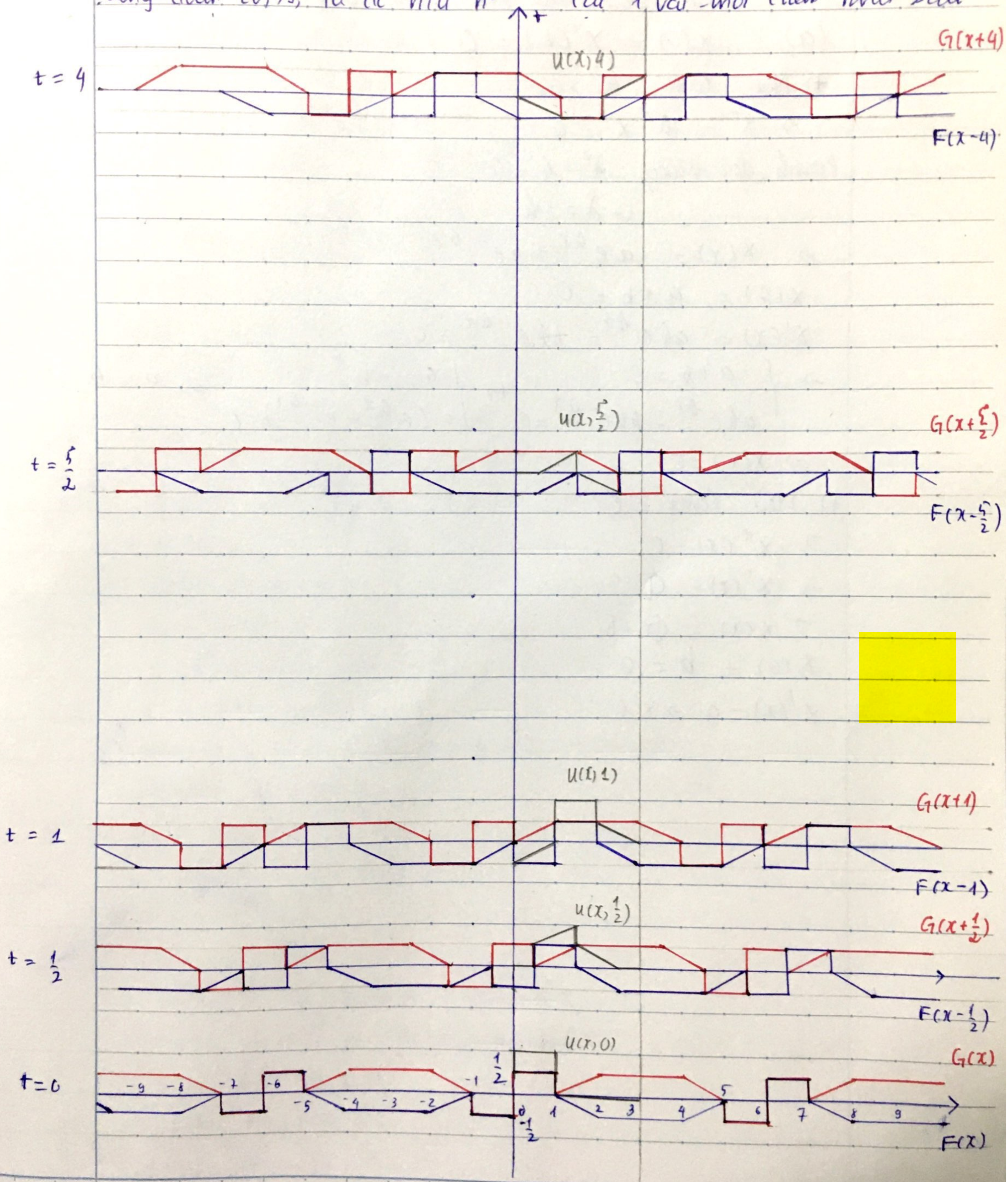
Sóng lùi $G(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x g^*(s)ds$

- Ta có hình ảnh sóng tiến và sóng lùi như sau



Dịch chuyển sóng tới sang phải, sóng lùi sang trái sau đó tổng hợp 2 sóng trong đoạn [0,3], ta đc hình n° tại 1 vài thời điểm như sau



Bài 2;

$$X''(x) - \text{Const}\, X(x) = 0 \;,\; 0 < x < L$$

(a) $X(0) = X'(L) = 0$

+) Nếu $\text{Const} = k^2 > 0$

$\Rightarrow X''(x) - k^2 X(x) = 0$

Ptrình đặc trưng $\lambda^2 - k^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm k$

$\Rightarrow X(x) = a.e^{kx} + b.e^{-kx}$

$X(0) = a + b = 0$

$X'(x) = k(a e^{kx} - b e^{-kx})$

$\Rightarrow X'(L) = k(a e^{kL} - b e^{-kL}) = 0$

$\Rightarrow a e^{KL} - b e^{-KL} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a e^{KL} - b e^{-KL} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a(e^{kL} + e^{-kL}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$

$\Rightarrow X(x) = 0$

+) Nếu $\text{Const} = 0$

$\Rightarrow X''(x) = 0$

$\Rightarrow X'(x) = a$

$\Rightarrow X(x) = ax + b$

$X(0) = b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow X(x) = 0$

$X'(L) = a = 0$

+) Nếu $\text{Const} = -k^2 < 0$

$\Rightarrow X''(x) + k^2 X(x) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + k^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm ik$

$\Rightarrow X(x) = a\cos kx + b\sin kx$

$X(0) = a = 0 \Rightarrow X(x) = b.\sin kx$

$X'(x) = bk \cos kx$

$X'(L) = bk\cos kL = 0$

$\to \cos kL = 0$

$\to kL = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$\to k = \frac{\pi}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$

$\to Const = -\frac{\pi^2}{L^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$: là các giá riêng

Chọn $b_n = 1 \to X_n(x) = \sin \frac{\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ là các hàm riêng tương ứng.

(b). $X'(0) = X(L) = 0$

+) Nếu $Const = k^2 > 0$

$\to X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$

$X'(x) = k(ae^{kx} - be^{-kx})$

$\to X'(0) = k(a-b) = 0 \to a = b$

$X(L) = ae^{kL} + be^{-kL} = \cancel{2ae}\ a(e^{KL} + e^{-KL}) = 0$

$\to a = b = 0 \Rightarrow X(x) = 0$

+) Nếu $Const = 0$

$\to X(x) = ax + b$

$\left.\begin{array}{l} X'(x) = a \to X'(0) = a = 0 \\ X(L) = La + b = b = 0 \end{array}\right\} \to a = b = 0 \to X(x) = 0$

+) Nếu $Const = -k^2 < 0$

$\to X(x) = a\cos kx + b\sin kx$

$X'(x) = \cancel{-k}$

Scanned with CamScanner

Ngày . . No.

$X'(x) = k(b\cos kx - a\sin kx)$

$\to X'(0) = bk = 0 \Leftrightarrow b = 0$

$\to X(x) = a\cos kx$

$X(L) = a\cos kL = 0$

$\to \cos kL = 0$

$\to kL = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$\to k = \frac{\pi}{L}(n+\frac{1}{2})$

$\to Const = -\frac{\pi^2}{L^2}(n+\frac{1}{2})^2$ là các giá trị riêng

Chọn $a_n = 1 \to X_n(x) = \cos\frac{\pi}{L}(n+\frac{1}{2})x$ là các hàm riêng tương ứng

(c) $X'(0) = X'(L) = 0$

+) Nếu $Const = k^2 > 0$

$\to X(x) = a e^{kx} + b e^{-kx}$

$X'(x) = k(a e^{kx} - b e^{-kx})$

$X'(0) = k(a-b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

$X'(L) = k(a e^{kL} - b e^{-kL}) = ak(e^{kL} - e^{-kL}) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\to a = b = 0 \to X(x) = 0$

+) Nếu $Const = 0$

$\to X(x) = ax + b$

$X'(x) = a \to X'(0) = a = 0,\ b \in \mathbb{R}$

Chọn $b_0 = 1 \to X_0(x) = 1$

+) Nếu $Const = -k^2 < 0$

$\to X(x) = a\cos kx + b\sin kx$

$X'(x) = k(b\cos kx - a\sin kx)$

$X'(0) = bk = 0 \to b = 0 \to X'(x) = -ak\sin kx$

$X'(L) = -ak\sin kL = 0$

$\to \sin kL = 0$

Scanned with CamScanner

$\rightarrow kL = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$\rightarrow \Delta = \frac{n\pi}{k} \quad k = \frac{n\pi}{L}$

$\rightarrow$ Const $= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ là các giá trị riêng

Chọn $a_n = 1 \rightarrow X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$ là các hàm riêng tương ứng

(d) $X(0) = X(L)$

$X'(0) = X'(L)$

+) Nếu Const $= k^2 > 0$

$\rightarrow X(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$

$\left.\begin{array}{l} X(0) = a + b \\ X(L) = ae^{kL} + be^{-kL} \end{array}\right\} \rightarrow a + b = ae^{kL} + be^{-kL}$

$X'(x) = k.(a.e^{kx} - b e^{-kx})$

$X'(0) = X'(L) \rightarrow \cancel{ae}\ a - b = ae^{kL} - be^{-kL}$

$\rightarrow \begin{cases} a(1 - e^{kL}) + b(1 - e^{-kL}) = 0 & (1) \\ a.(1 - e^{kL}) + b(-1 + e^{-kL}) = 0 & (2) \end{cases}$

Trừ (1) cho (2) $\rightarrow b.(2 - 2e^{-kL}) = 0$

$\Leftrightarrow b.(1 - e^{-kL}) = 0$ (Do $k \neq 0, L \neq 0$)

$\rightarrow b = 0$ Thay vào (1)

$\rightarrow a(1 - e^{kL}) = 0 \rightarrow a = 0$ (Do $k \neq 0, L \neq 0$)

$\rightarrow a = b = 0 \rightarrow X(x) = 0$

+) Nếu Const $= 0$

$\rightarrow X(x) = ax + b$

$X(0) = X(L) \rightarrow b = aL + b \Leftrightarrow aL = 0$

$X'(0) = X'(L) \rightarrow a = a$

$\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$

Chọn $b_0 = 1 \rightarrow X_0(x) = 1$

+) Nếu $const = -k^2 < 0$

$\rightarrow X(x) = a\cos kx + b\sin kx$

$X(0) = X(L) \rightarrow a = a.\cos Lk + b.\sin Lk$

$\rightarrow a(1-\cos Lk) - b\sin kL = 0$

$X'(x) = k(b\cos kx - a\sin kx)$

$X'(0) = X'(L) \Rightarrow bk\,\cancel{\cos kx} = k(b\cos kL - a\sin kL)$

$\rightarrow b(1-\cos kL) + a.\sin kL = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} a(1-\cos kL) - b\sin kL = 0 \\ a.\sin kL + b(1-\cos kL) = 0 \end{cases}$$

Hệ ptr. trên có nghiệm $\neq 0$ tầm thường khi

$$\begin{vmatrix} 1-\cos kL & -\sin kL \\ \sin kL & 1-\cos kL \end{vmatrix} = (1-\cos kL)^2 + \sin^2 kL = 2 - 2\cos kL = 0$$

$\Leftrightarrow \cos kL = 1$

$\rightarrow kL = \cancel{k2}\, n2\pi$

$\rightarrow k = \frac{n2\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$\rightarrow$ Các giá trị riêng $const = -\frac{4n^2\pi^2}{L^2}$

Chọn $a_n = b_n = 1 \rightarrow$ Các hàm riêng tương ứng

$X_n(x) = \cos\frac{2n\pi x}{L} + \sin\frac{2n\pi x}{L}$.