KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC
BỘ MÔN GIẢI TÍCH

Phương trình đạo hàm riêng (MAT 2036)
Bài tập thực hành

Dư Đức Thắng

Hà Nội, ngày 8 tháng 6 năm 2020

Chương 1
Giới thiệu về phương trình đạo hàm riêng. Phương trình cấp 1

1.1. Giới thiệu phương trình đạo hàm riêng

1. Phân loại phương trình đạo hàm riêng dưới đây và cho biết cấp tương ứng của các phương trình.

(a) $(u_y)^2 + u_{xxx} = 0$ (Phương trình nửa tuyến tính cấp 3)

(b) $\sin(1 + u_x)^2 + u^3 = \sin x$ (Phương trình phi tuyến cấp 1)

(c) $e^{\Delta u} = x$ (Phương trình tuyến tính cấp 2)

(d) $u_t + u_{txx} + uu_x = 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. (Phương trình nửa tuyến tính cấp 2)

(e) $u_t + (f(u))_x = 0$ (Phương trình tựa tuyến tính cấp 1)

(f) $xu_{xx} + (x - y)u_{xy} - yu_{yy} = 0$ (Phương trình tuyến tính cấp 2)

(g) $u_t + u^2 u_{xx} = 0$. (Phương trình tựa tuyến tính cấp 2)

2. Xác định bậc của phương trình sau

(a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

(b) $u_{xxx} + u_{xy} + a(x)u_y + \log u = f(x, y)$

(c) $u_x + cu_y = d$

(d) $uu_{xx} + u_{yy}^2 + e^u = 0$.

3. Phương trình nào sau đây là tuyến tính? tựa tuyến tính? phi tuyến? nếu là phương trình tuyến tính thì nó có thuần nhất không?

(a) $u_{xx} + u_{yy} - 2u = x^2$

(b) $u_{xy} = u$

(c) $uu_x + xu_y = 0$

(d) $u_x(1 + u_y) = u_{xx}$

(e) $(\sin u_x)u_x + u_y = e^x$

4. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình dưới đây bằng các phương pháp thích hợp *(tích phân trực tiếp, chuyển về phương trình vi phân, tách biến hoặc kết hợp các phương pháp)*

(a) $u_x = 3x^2 + y^2$, $u = u(x, y)$.

Lời giải. Tích phân phương trình theo x ta được $u(x, y) = x^3 + y^2x + C(y)$.

(b) $u_{xyz} = 0$, $u = u(x, y, z)$.

Lời giải. Nghiệm cần tìm là $u(x, y, z) = A(x, y) + B(y, z) + C(z, x)$.

(c) $yu_x = x^2y$, $u = u(x, y)$.

Lời giải. $y = 0$: Phương trình trở thành $0 = 0$.

$y \neq 0$: Tích phân phương trình theo x ta được $u(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + C(y)$.

(d) $u_x - 2u = 0$, $u = u(x, y)$.

Lời giải. Tích phân phương trình theo x ta được $u(x, y) = e^{2x}C(y)$.

(e) $u_x + 2xu = 4xy$.

Lời giải. Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số, tích phân phương trình theo x ta được $u(x, y) = C(y)e^{-x^2} + 2y$.

(f) $yu_{xy} + 2u_x = x$ *(Gợi ý: tích phân phương trình theo x, sau đó dùng phương pháp chuyển về phương trình vi phân)*

Lời giải. Đặt $u_x = v$ ta được phương trình vi phân cấp 1 $yv_y + 2v = x$. Tích phân phương trình theo y ta được

$$v(x, y) = \frac{C(x)}{y^2} + \frac{x}{2}.$$

Khi đó ta có phương trình

$$u_x = \frac{C(x)}{y^2} + \frac{x}{2} \Rightarrow u(x, y) = \frac{C(x)}{y^2} + \frac{x^2}{4} + C_1(y).$$

(g) $u_{yy} - x^2u = 0$.

5. Để tìm nghiệm của phương trình dạng đặc biệt, đôi khi người ta dùng phương pháp đổi biến dạng e^{rx+sy}. Cách làm này giúp chuyển phương trình đạo hàm riêng về một hệ phương trình vi phân thường với các biến r, s. Hãy dùng phương pháp này để giải các phương trình sau

(a) $2u_x + 3u_y - 2u = 0$.

(b) $u_{xyz} - u = 0$.

(c) $4u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$.

(d) $u_{xx} + u_{yy} = u$.

6. Xét phương trình tuyến tính cấp hai $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$, với các hằng số thực a, b, c. Chứng minh rằng nếu biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (trường hợp phương trình loại hyperbolic) thì phương trình có nghiệm tổng quát dạng $u(x, y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\gamma x + \delta y)$, với các hệ số thực α, β, γ,δ, còn f, g là các hàm số thuộc C^2.

1.2. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 1

1.2.1. Phương trình tuyến tính với hệ số hằng số

1. Giả sử u_1, u_2 là các nghiệm của phương trình $au_x + bu_t = 0$. Chứng minh rằng $c_1u_1 + c_2u_2$ cũng là nghiệm của phương trình, với c_1, c_2 là các hằng số bất kì.

Lời giải. Tính toán trực tiếp và kiểm tra trong biểu thức.

2. Tìm nghiệm của phương trình trên nếu biết thêm Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $u(x, t) = f(bx - at)$. Thay vào điều kiện tương ứng ở dưới ta sẽ có nghiệm cần tìm.

(a) $u(x, 0) = xe^{-x^2} \quad \Rightarrow u(x, t) = \frac{bx-at}{b} e^{-\left(\frac{bx-at}{b}\right)^2}$.

(b) $u(0, t) = t \quad \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{a}(at - bx)$.

3. Làm tương tự các yêu cầu của bài 2 cho các phương trình sau

(a) $u_t - u_x = 0$. Tìm nghiệm của phương trình khi $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$.

Lời giải. Nghiệm tổng quát của phương trình là $u(x, t) = f(x+t)$. Thay vào điều kiện đầu ta tìm được nghiệm của bài toán $u(x, t) = \frac{1}{1+(x+t)^2}$.

(b) $u_t - 2u_x = 2$

Lời giải. Nghiệm của phương trình là $u = u_0 + u_*$, trong đó u_0 là nghiệm của phương trình thuần nhất, $u_0(x, t) = f(x+2t)$, còn u_* là một nghiệm riêng của phương trình, có dạng $u_* = 2t$. Vậy nghiệm nghiệm cần tìm là $u(x, t) = f(x + 2t) + 2t$. Thử lại ta được điều phải chứng minh.

(c) $2u_t + 3u_x = 0$

(d) $au_t + bu_x = u$, $a, b \neq 0$.

4. Xét phương trình $au_x + bu_y = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Đạo hàm theo hướng của u là gì?

Lời giải. Đạo hàm theo hướng của phương trình là véc tơ $\vec{n} = (-b, a)$.

(b) Tìm các đường cong đặc trưng của phương trình.

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình đã cho là $ay - bx = C$.

(c) Tìm nghiệm của phương trình.

Lời giải. $u = F(bx - ay)$.

5. Tìm nghiệm của các phương trình thuần nhất sau

(a) $u_x + x^2 u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng là $y' = x^2 \Rightarrow y - x^3/3 = C$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là $u(x, y) = F(y + x^3/3)$.

(b) $e^{x^2} u_x + x u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng là $y' = xe^{-x^2} \Rightarrow y + \frac{1}{2}e^{-x^2} = C$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là $u(x, y) = F(y + \frac{1}{2}e^{-x^2})$.

(c) $u_x + \sin x u_y = 0$

(d) $x u_x + y u_y = 0$

6. Tìm nghiệm của các phương trình sau

(a) $a u_x + b u_y = f, \quad a, b, f \in \mathbb{R}$.

Lời giải. $u(x, y) = F(bx - ay)$.

(b) $u_x + 2u_y + u = 0$

Lời giải. Nghiệm của phương trình được xác định từ việc giải hệ phương trình vi phân tìm đường cong tham số hóa $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \ (\ell), \qquad \frac{du}{dx} = u \quad \text{trên họ đường cong } (\ell).$$

Giải ra ta được $(\ell) = \{(x, y) : y - 2x = C\}$, $u(x, y) = C(y - 2x)e^x$.

(c) $u_x + 2u_y + 2u = 1$

Lời giải. Nghiệm của phương trình là $u(x, y) = C(y - 2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

(d) Tìm nghiệm của các phương trình trên với điều kiện ban đầu $u(x, 0) = x^2$.

Lời giải. Thay điều kiện đầu cho phương trình tương ứng ta được $u(x, 0) = C(-2x)e^x = x^2$, suy ra $C(-2x) = x^2 e^{-x}$. Đổi biến $(-2x \to x)$ ta được $C(x) = \dfrac{x^2}{4}e^{x/2}$.

Vậy nghiệm cần tìm là

$$u(x, y) = \frac{(y - 2x)^2}{4} e^{(y-2x)/2 + x} = \frac{(y - 2x)^2}{4} e^{y/2}.$$

(e) Tìm nghiệm của các phương trình trên với điều kiện ban đầu $u(x,0) = 2x^2 + 3x$.

7. Giải phương trình

$$au_x + bu_y = 0$$

Lời giải. Ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình là

$$u(x,y) = F(bx - ay).$$

với các điều kiện đường bên sau

(a) $u(x,y)|_{(x,y)\in\{bx-ay=1\}} = h(x)$.

Lời giải. Thay vào điều kiện đường bên ta được

$$u(x,y)|_{bx-ay=1} = F(1) = h(x).$$

Như vậy nếu $h(x)$ là hàm hằng thì phương trình sẽ có vô số nghiệm, ngược lại thì phương trình vô nghiệm.

(b) $u(x,y)|_{(x,y)\in\{x-y=1\}} = h(x)$. Hãy nhận xét về nghiệm của các bài toán nói trên.

Lời giải. Thay vào điều kiện đường bên ta được

$$F(bx - a(x-1)) = h(x) \Rightarrow F((b-a)x + a) = h(x) \overset{z=(b-a)x+a}{\Longrightarrow} F(z) = h\left(\frac{z-a}{b-a}\right).$$

Như vậy nếu $b = a$ thì phương trình vô nghiệm (trở lại trường hợp trước), còn khi $b \neq a$ thì nghiệm của bài toán sẽ là

$$u(x,y) = h\left(\frac{(bx-ay)-a}{b-a}\right).$$

8. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

(a) $2u_x - 3u_y = x$

Lời giải. Đường đặc trưng của phương trình được tìm từ phương trình

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2y + 3x = C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình sẽ là

$$u(x,y) = F(2y+3x) + \frac{1}{4}x^2.$$

Các bài sau làm tương tự.

(b) $u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$

(c) $u_x + u_y - u = 0$

(d) $3u_x - 4u_y = x + e^x$.

(e) $u_x + 3u_y = 9y^2$

9. Tìm nghiệm của phương trình

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}$$

thỏa mãn các điều kiện đường bên sau

(a) $u(x,0) = \sin(x^2)$

Lời giải. Ta tìm họ đường đặc trưng của phương trình từ phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow y - 2x = C.$$

Ta xét phép đổi biến $(x,y) \to (w,z)$ sao cho nó làm đơn giản hóa phương trình ban đầu. Vì vế phải là một hàm phụ thuộc vào $x+y$ nên trong trường hợp ta xét phép đổi biến

$$\begin{cases} y - 2x = w \\ y + x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{w+2z}{3} \\ x = \frac{z-w}{3}. \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được phương trình đạo hàm riêng tương ứng ($u(x,y) \to v(w,z)$) là $3v_z - 4v = e^z$.

Giải phương trình trên bằng phương pháp biến thiên hằng số. Ta tìm nghiệm $v = v_0 + v_*$, trong đó v_0 là nghiệm của phương trình thuần nhất $3v_z - 4v = 0$, tức là $v_0(w,z) = C(w)e^{4/3z}$, còn v_* là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất, sử dụng biểu thức của phương trình thuần nhất. Ta xét $v_* = C_*(z)e^{4/3z}$. Thay vào biểu thức của phương trình ta được hệ thức tìm C như sau:

$$3C_*'(z)e^{4/3z} = e^z \Rightarrow C_*'(z) = \frac{1}{3}e^{-1/3z} \Rightarrow C_*(z) = -e^{-1/3z},$$

tức là nghiệm riêng cần tìm $v_*(w,z) = -e^{-z}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là

$$v(w,z) = C(w)e^{4/3z} + e^z \Rightarrow u(x,y) = C(y-2x)e^{4/3(x+y)} + e^{x+y}.$$

Thay điều kiện ban đầu vào ta được

$$u(x,0) = C(-2x)e^{4/3x} + e^x = \sin(x^2) \Rightarrow C(-2x) = \sin(x^2)e^{-4/3x} - e^{-1/3x}$$
$$\Rightarrow C(x) = \sin\left(\frac{1}{4}x^2\right)e^{2/3x} - e^{-1/6x}.$$

Vậy nghiệm cần tìm là

$$u(x,y) = e^{2y}\sin\left(\frac{(y-2x)^2}{4}\right) - e^{y+5/3x} + e^{x+y}.$$

Các bài tập sau được làm tương tự.

(b) $u(0,y) = y^2$

(c) $u(x,-x) = x$

(d) $u(x,4x) = x^2$

(e) $u(x,x^2) = f(x)$.

10. Chứng minh rằng phương trình $u_x + u_y - u = 0$ với điều kiện đường bên $u(x,x) = \tan(x)$ không có nghiệm.

Lời giải. Họ các đường đặc trưng của phương trình là $y - x = C$. Khi đó ta tìm được biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu từ phương trình vi phân (trên đường đặc trưng)

$$\frac{du}{dx} = u \quad \Rightarrow \quad \ln u = x + C \quad \Rightarrow \quad u = C(y-x)e^x.$$

Thay vào điều kiện trên đường $y = x$, ta được $u(x,x) = C(0)e^x = \tan x \Rightarrow C(0) = e^{-x}\tan x$. Vậy phương trình vô nghiệm.

11. Với điều kiện nào của hàm $f(x)$ thì phương trình nói trên với điều kiện đường bên $u(x,x) = f(x)$ có nghiệm?

Lời giải. Từ phương trình cuối cùng ta suy ra chỉ khi hàm $f(x)$ có dạng Ae^x thì phương trình ban đầu mới có nghiệm. Khi đó nghiệm cần tìm có dạng $u(x,y) = C(y-x)e^x$, với $C(x$ là tất cả các hàm thỏa mãn $C(0) = A$. Rõ ràng, vì là điều kiện cho trên đường đặc trưng nên phương trình có vô số nghiệm.

12. Cho phương trình

$$u_x + 3u_y + u = 1.$$

(a) Tìm điều kiện của hàm $g(x)$ trong điều kiện đường bên $u(x,3x) = g(x)$ để phương trình nói trên có nghiệm? Khi đó biểu thức nghiệm của phương trình sẽ như thế nào?

(b) Hãy viết hai nghiệm khác nhau của phương trình trên khi $g(x) = -1 + 2e^x$.

13. Giải phương trình $u_x - 2u_y = 0$ với điều kiện đường bên $u(x,e^x) = e^{2x} + 4xe^x + 4x^2$.

14. Thầy giáo yêu cầu các bạn tìm nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất

$$au_x + bu_y + cu = 0,$$

trong đó a, b, c là các hằng số thỏa mãn $ab \neq 0$. Bạn Lan nói rằng: "Nghiệm của phương trình là $u(x, y) = e^{-cx/a} f(bx - ay)$". Bạn Nam lại cho rằng: "Không đâu, nghiệm của phương trình phải là $u(x, y) - e^{-cy/b}(bx - ay)$." Vậy ai là người có câu trả lời đúng?

Lời giải. Nhận xét rằng phương trình trên được viết lại dưới dạng (vì sao vậy nhỉ?)

$$u_x + \frac{b}{a} u_y + \frac{c}{a} u = 0,$$

hoặc

$$\frac{a}{b} u_x + u_y + \frac{c}{b} u = 0.$$

Cả hai phương trình trên đều có họ đường đặc trưng là $bx - ay = C$, vì vậy nghiệm của chúng lần lượt sẽ là

$$u(x, y) = C(bx - ay)e^{-c/ax} \quad \text{hoặc} \quad u(x, y) = C(bx - ay)e^{-c/by}.$$

Như vậy hai bạn đều nói đúng. Câu hỏi thêm ở đây là làm thế nào để chuyển từ câu trả lời của Nam sang câu trả lời của Lan, các bạn thử xem sao? (Dễ nhỉ!)

15. Hãy tìm tất cả các nghiệm khả vi liên tục khắp nơi (gọi là nghiệm thuộc C^1) của phương trình $u_x = 0$ với điều kiện $u(x, x^2) = x$.

Lời giải. Phương trình có nghiệm tổng quát là $u(x, y) = C(y)$, với C là hàm thuộc C^1. Thay vào điều kiện đường biên ta có

$$u(x, x^2) = C(x^2) = x.$$

Từ đây ta đổi biến $x^2 := z$, $z > 0$ cho nên nghiệm của phương trình có thể là $C(z) = \pm\sqrt{z}$, tức là nghiệm của phương trình ban đầu là $u(x, y) = \pm\sqrt{y}$ với $y > 0$. Miền xác định của các hàm này là $y \geq 0$, và hàm này khả vi liên tục trên nửa trục dương Oy.

16. Một quần thể dân cư có mật độ dân cư là $C(y)$, với $y \geq 0$. Tốc độ sinh của quần thể này tại thời điểm t tỉ lệ với kích thước của quần thể theo công thức $\alpha \int_0^\infty P(y, t)dy$ với $\alpha > 0$ là một hằng số nào đó. (ta giả thiết rằng $\int_0^\infty C(y)dy < \infty$.) Tốc độ chết là một hằng số, kí hiệu là $D(y, t) = k > 0$ với $y \geq 0$. Hãy tìm hàm mật độ dân cư $P(y, t)$ với mọi $y, t > 0$.

Lời giải. Đây là một bài toán xây dựng mô hình cho một vấn đề thực tế. Sinh viên tìm hiểu cách giải trong cuốn [Bleecker D., Basic Partial Differential Equations, trang 67, 68].

1.2.2. Phương trình với hệ số biến thiên

Xét phương trình

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y). \tag{1.2.1}$$

Phương pháp thông dụng để giải phương trình này là tìm họ đường cong đặc trưng $\{\varphi(x,y) = C\}$ thông qua phép tham số hóa $y = y(x)$, và giải phương trình vi phân tương ứng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{1.2.2}$$

Khi đó ta xét phép đổi biến $w = \varphi(x,y), \quad z = y$, và tìm ẩn hàm $v(w,z)$. Qua phép đặt này, phương trình được xét sẽ trở về dạng

$$b_1(w,z)v_z + c_1(w,z)v = f_1(w,z), \tag{1.2.3}$$

trong đó b_1, c_1, f_1 chính là các hàm b, c, f qua phép đổi biến $(x,y) \to (w,z)$. Nếu đặt $m(w,z) = \exp\left(\int_0^z \frac{c_1(w,\zeta)}{b_1(w,\zeta)} d\zeta\right)$ thì nghiệm của phương trình (1.2.3) được viết dưới dạng

$$v(w,z) = \frac{1}{m(w,z)} \left(\int_0^z m(w,\zeta)\frac{f_1(w,\zeta)}{b_1(w,\zeta)} d\zeta + \frac{f_1(w,\zeta)}{b_1(w,\zeta)}\right)$$

với giả thiết là các hàm được ghi trong biểu thức đều có nghĩa. Tuy nhiên, việc tính các tích phân trên một cách tường minh không phải lúc nào cũng làm được.

Bên cạnh việc tìm họ đường cong đặc trưng bằng phép tham số hóa $y = y(x)$, với một số trường hợp người ta xét phép tham số hóa $x = x(t)$, $y = y(t)$. Khi đó (hệ) phương trình tìm đường cong đặc trưng sẽ là

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t),y(t)), \quad \frac{dy}{dt} = b(x(t),y(t)).$$

Qua phép đặt $U(t) = u(x(t),y(t))$, $C(t) = c(x(t),y(t))$, $F(t) = f(x(t),y(t))$, hàm $U(t)$ sẽ là nghiệm của phương trình vi phân

$$U'(t) + C(t)U(t) = F(t).$$

Nghiệm của phương trình này có dạng

$$U(t) = \frac{1}{m(t)}\left(\int_0^t m(s)F(s)ds + U(0)\right), \quad m(t) = \exp\left(\int_0^t C(s)ds\right).$$

Khi đó nghiệm của phương trình ban đầu sẽ có dạng biểu diễn theo tham số t.

1. Xét phương trình (1.2.2) tìm họ đường đặc trưng $\{\varphi(x,y) = C\}$ của phương trình (1.2.1). Hãy kiểm tra rằng phép đổi biến $w = \varphi(x,y), \quad z = y$ giúp đưa phương trình ban đầu về phương trình (1.2.3).

2. Tìm nghiệm của các phương trình thuần nhất sau

(a) $u_x + x^2 u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu sẽ là $u(x, y) = F(y - x^3/3)$.

(b) $e^{x^2} u_x + x u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

$$\frac{dy}{dx} = x e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu sẽ là $u(x, y) = F(2y - e^{-x^2})$.

(c) $u_x + \sin x u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow \quad y = -\cos x + C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu sẽ là $u(x, y) = F(y + \cos x)$.

(d) $x u_x + y u_y = 0$

3. Chứng minh rằng phương trình $-y u_x + x u_y = 0$ với điều kiện $u(x, 0) = 3x$ không có nghiệm.

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\ln x + C \quad \Rightarrow \quad xy = C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu sẽ là $u(x, y) = F(xy)$. Rõ ràng tại điều kiện đầu đã cho thì $u(x, 0) = F(0) = 3x$, cho ta phương trình vô nghiệm.

4. Hãy tìm một hàm $f(x)$ để phương trình $-y u_x + x u_y = 0$ với điều kiện $u(x, 0) = f(x)$ có nghiệm. Với hàm $f(x)$ thế nào thì nghiệm được tìm là duy nhất? là không duy nhất?

Lời giải. Từ bài tập trên ta có nghiệm của phương trình là $u(x, y) = F(xy)$. Điều kiện đầu cho ta $F(0) = f(x)$, tức là chỉ với các hàm $f(x) = \text{const}$ thì bài toán mới có nghiệm. Hiển nhiên nghiệm này là không duy nhất. Bạn có thể thử thấy rằng mọi hàm $F(z)$ mà $F(0)$ là hằng số cho trước nào đó (phù hợp với điều kiện ban đầu $F(0) = \text{const}$ thì đều là nghiệm của bài toán.

5. *(Bài tập ví dụ)* Tìm nghiệm của phương trình $xu_x - yu_y + yu = 0$.

Lời giải. Ta tìm họ đường cong đặc trưng của phương trình từ phép tham số hóa $y = y(x)$ nhờ phương trình

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Tích phân phương trình cuối cùng ta được $\log|x| + \log|y| = C$, tức là $xy = C$. Từ đây ta có phép đổi biến

$$w = xy,\ z = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{w}{z},\ y = z.$$

Thay vào phương trình đầu ta được (chú ý điều kiện $z \neq 0$), $-zv_z + zv = 0$. Tích phân phương trình này ta tìm được nghiệm

$$v(w, z) = C(w)e^z.$$

Đổi về biến (x, y) ta được nghiệm cần tìm của phương trình đầu là

$$u(x, y) = C(xy)e^y, \quad C(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}).$$

Cần chú ý rằng đường đặc trưng của phương trình này có điểm bất thường (vì sao?) nên ta viết nghiệm của phương trình dưới dạng

$$u(x, y) = \begin{cases} C(xy)e^y, & y \leq 0, \\ D(xy)e^y, & y \geq 0. \end{cases}$$

Ở đây các hàm $C(\cdot), D(\cdot)$ thuộc C^1.

Câu hỏi: Tương tự cách trên hãy viết nghiệm của phương trình trong trường hợp không thuần nhất, với vế phải là hàm $f(x, y) = y^2$.

6. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trong miền xác định của nó

(a) $xu_x + 2yu_y = 0, \quad x > 0, y > 0.$

(b) $xu_x - 2yu_y + u = e^x, \quad x > 0.$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -2\ln x + C \quad \Rightarrow \quad yx^2 = C.$$

Thực hiện phép đổi biến tương ứng với $w = x^2y, z = x$ ta đưa phương trình đầu về phương trình với (w, z) như sau, chú ý rằng $x = z, y = w/z^2$, và đặt $v(w, z) = u(x, y)$:

$$xv_z + v = e^z.$$

Như vậy nghiệm của phương trình đầu được xác định từ phương trình vi phân sau (coi w như hệ số)

$$\frac{dv}{dz} + \frac{1}{z}v = \frac{e^z}{z}.$$

Giải phương trình này bằng phương pháp biến thiên hằng số, ta được nghiệm cần tìm. Ta có nghiệm $v = v_0 + v_*$, trong đó v_0 thỏa mãn phương trình

$$v_z + \frac{1}{z}v = 0, \quad \Rightarrow v_0(w,z) = \frac{C(w)}{z}.$$

Ta tìm $v_*(w,z)$ là nghiệm có dạng $v_*(w,z) = \frac{C_*(w,z)}{z}$, thỏa mãn phương trình vi phân ở trên. Thay vào ta được phương trình vi phân để tìm C_* là

$$\frac{dC_*(w,z)}{dz} = e^z \Rightarrow C_*(w,z) = e^z.$$

Thay vào biểu thức của v_* ta được $v_*(w,z) = \frac{e^z}{z}$. Vậy ta tìm được nghiệm của phương trình ban đầu là

$$v(w,z) = \frac{C(w) + e^z}{z} \Rightarrow u(x,y) = \frac{C(yx^2) + e^x}{x}.$$

Thử lại ta được đây chính là nghiệm của phương trình.

(c) $yu_x - 4xu_y = 2xy$, với mọi (x,y)

7. Tìm nghiệm của các phương trình của bài tập trên ứng với các điều kiện đường bên tương ứng

(a) $u(x, 1/x) = x, \quad x > 0.$

(b) $u(1,y) = y^2.$

(c) $u(x,0) = x^4.$

8. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $xu_y - 2yu_x = 0$ trên mặt phẳng $x0y$.

1.2.3. Phương trình không tuyến tính

Trong phần này, ta làm quen với một số phương trình nửa tuyến tính và phương trình tựa tuyến tính dạng đơn giản.

(1) Phương trình nửa tuyến tính. Cũng cần nhắc các bạn rằng đối với phương trình nửa tuyến tính

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u),$$

(2) Phương trình tựa tuyến tính. Tương tự như đối với phương trình nửa tuyến tính, ở phần này ta chỉ xét dạng đơn giản của phương trình tựa tuyến tính, thường sẽ được viết dưới dạng

$$a(x,y,u)u_x + b(xy,u)u_y = f(x,y,u).$$

việc tìm nghiệm của các phương trình trên bằng phương pháp đường đặc trưng chính là giải hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \quad \frac{du(x, y(x))}{dx} = f(x, y(x), u(x, y(x))).$$

Nhìn chung ta không giải tường minh những phương trình này trong trường hợp tổng quát được. Có thể nói việc tìm nghiệm này hoàn toàn không đơn giản chút nào, và chỉ trong một số rất ít trường hợp, khi mà các hệ số a, b và hàm ở vế phải f có dạng rất đặc biệt thì ta mới làm được. Một số ví dụ dưới đây sẽ cho chúng ta hình dung này.

1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình nửa tuyến tính

   (a) *Bài tập ví dụ.* $u_t + tu_x = u^2$

   Lời giải. Phương trình tìm đường đặc trưng tương ứng là

   $$\frac{dx}{dt} = t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}t^2 + C \quad \Rightarrow C = x - \frac{1}{2}t^2.$$

   Xét phép đổi biến $w(x, t) = x - \frac{1}{2}t^2, z = t$ thì ta sẽ có phương trình đối với $v(w, z) = u(x, t)$

   $$v_z = v^2 \quad \Rightarrow v(w, z) = \frac{1}{C(w) - z}.$$

   Vậy nghiệm cần tìm sẽ là

   $$u(x, t) = \frac{1}{C\left(x - \frac{1}{2}t^2\right) - t}.$$

   (b) $yu_x + xu_y = u^2 + u.$

   (c) $u_x + xyu_y = \frac{1}{u}.$

2. Tìm nghiệm của các phương trình tựa tuyến tính với điều kiện cho trước tương ứng

   (a) *Bài tập ví dụ.* $u_t + uu_x = 0$ ứng với điều kiện đầu $u(x, 0) = 3x.$

   Lời giải. Ta tìm nghiệm của phương trình từ hệ sau

   $$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

   Giải phương trình thứ nhất ta được $u(x, t) = \text{const} = u(x(0), 0) = 3x(0)$. Thay giá trị này của u vào phương trình thứ hai, ta được

   $$\frac{dx}{dt} = 3x(0) \quad \Rightarrow x = 3x(0)t + x(0) \quad \Rightarrow x(0) = \frac{x}{3t + 1}.$$

   Vậy nghiệm cần tìm sẽ có dạng

   $$u(x, t) = \frac{3x}{3t + 1}.$$

   Nhận xét. Việc áp dụng một cách linh hoạt phép tham số hóa đường cong giúp ta tìm ra nghiệm một cách dễ dàng hơn.

(b) $u_t - u^2 u_x = 3u$, $u(x,0) = f(x)$.

(c) $u_t - t^2 u u_x = -u$, $u(x,0) = f(x)$.

(d) $u_t + t^2 u u_x = 5$, $u(x,0) = x$.

3. Viết nghiệm của phương trình với điều kiện là hàm gián đoạn sau.

(a) *Bài tập ví dụ.* $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 2 & x > 0. \end{cases}$.

Lời giải. Ta xét hệ phương trình vi phân

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Phương trình thứ nhất cho nghiệm $u(x,t) = \text{const} = u(x(0),0)$, còn đường cong đặc trưng của phương trình này có dạng

$$x(t) = u(x(0),0)t + x(0) = \begin{cases} t + x(0) & x(0) < 0, \\ 2t + x(0) & x(0) > 0. \end{cases},$$

Khi $x(0) < 0$ thì đường đặc trưng sẽ có hệ số góc bằng 1, còn khi $x(0) > 0$ thì có hệ số góc bằng 1/2. Vì $u(x(0),0)$ không xác định tại điểm $x(0) = 0$, nên không có đường đặc trưng nào đi qua điểm $t = 0$ ứng với $x(0) = 0$. Nếu viết lại dưới dạng

$$x(0) = \begin{cases} x - t & x < t \\ x - 2t & x > 2t \end{cases}$$

thì trong dải $t < x < 2t$, giá trị $x(0) = 0$, và không có đường đặc trưng nào trong dải này. Nghiệm của phương trình lúc đó sẽ có dạng $u = \dfrac{x}{t}$ với $t < x < 2t$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x - t < 0, \\ 2, & x - 2t > 0, \\ \dfrac{x}{t}, & t < x < 2t. \end{cases}$$

(b) $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 1, \\ 12 & x > 1. \end{cases}$.

(c) $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = -x$.

(d) $u_t + u^2 u_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} 4 & x < 0, \\ 3 & x > 0. \end{cases}$.

(e) $u_t + 4uu_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} 3 & x < 1, \\ 2 & x > 1. \end{cases}$.

4. Hãy tìm nghiệm của *phương trình Burgers không nhớt*

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Phương trình này sẽ cho ta khái niệm về "shock". Các bạn có thể tìm hiểu thêm vấn đề này ở các công trình nghiên cứu về phương trình mô tả các định luật bảo toàn.

Chương 2
Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2

2.1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp 2 và đưa về dạng chính tắc

1. Chứng minh rằng nghiệm tổng quát của phương trình $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$ là

$$u(x, y) = F(xy) + xG\left(\frac{y}{x}\right).$$

Hãy chứng minh rằng phương trình trên không có dạng nghiệm khác.

Lời giải. Thay trực tiếp vào phương trình ta sẽ kiểm tra được nghiệm.

Để chứng tỏ phương trình không có nghiệm nào khác, ta xét phép đổi biến $w = xy, z = \frac{x}{y}$, khi đó tính toán ta đưa phương trình được xét về dạng $u(x, y) \to v(w, z)$

$$v_{wz} - \frac{1}{2w}v_z = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (v_z)_w - \frac{1}{2w}(v_z) = 0.$$

Giải phương trình trên như một phương trình tuyến tính cấp 1 theo w ta được $v_z = Cw^{1/2}$, từ đó giải được nghiệm cần tìm là

$$v(w, z) = F(w) + w^{1/2}G(z).$$

Thay trở lại biến x, y và thực hiện một số phép biến đổi đơn giản, ta được điều phải chứng minh.

2. Phân loại và đưa các phương trình sau về dạng chính tắc

(a) $u_{xx} + 7u_{xy} + 12u_{yy} + u_x - 2u_y - 3u = 0$

Lời giải. Biệt thức $\delta = \frac{49}{4} - 12 = \frac{1}{4} > 0$. Phương trình là hyperbolic.

Phương trình đặc trưng tương ứng là: $y'^2 - 7y' + 12 = 0$, có hai nghiệm $y' = 4$ và $y' = 3$. Giải hai phương trình vi phân này ta được hai họ đường đặc trưng $y - 4x = C$ và $y - 3x = C$. Xét phép đổi biến $\xi = y - 3x$, $\eta = y - 4x$, ta có thể tính được

$$\begin{aligned}
&u_x = -3u_\xi - 4u_\eta,\\
&u_y = u_\xi + u_\eta,\\
&b_1 = (-3)(-4) + \frac{7}{2}(-3-4) + 12 = 24 - \frac{49}{2} = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = c_1 = 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình chính tắc cần xác định sẽ là

$$2(-\frac{1}{2})u_{\xi\eta} + (-3u_\xi - 4u_\eta) - 2(u_\xi + u_\eta) - 3u = u_{\xi\eta} + 5u_\xi + 6u_\eta + 3u = 0.$$

(b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 0$

Lời giải. Ta có $\delta = 1 - 5 = -4 < 0$ nên phương trình thuộc loại elliptic.

Phương trình đặc trưng là

$$y'^2 - 2y' + 5 = 0 \Rightarrow y' = 1 \pm 2i \Rightarrow y = x \pm 2ix + C.$$

Đặt $\xi = y - x$, $\eta = 2x$ ta được

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = -v_\xi + 2v_\eta, \\ u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi, \\ a_1 &= c_1 = 1 - 2 + 5 = 4, b_1 = 0. \end{aligned}$$

Như vậy ta tìm được phương trình chính tắc là

$$4(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) - 2(-v_\xi + 2v_\eta) + 3v_\xi = 0 \Rightarrow v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{5}{4}v_\xi - v_\eta = 0.$$

Câu hỏi: Có thể tìm được nghiệm (tường minh) của phương trình chính tắc này bằng các tính toán sơ cấp được không?

(c) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + u_y + u = 0$

Lời giải. Ta có $\delta = 0$ nên phương trình thuộc loại parabolic.

Phương trình đặc trưng là

$$y'^2 + 6y' + 9 = 0 \Rightarrow y' = 3 \Rightarrow y = 3x + C.$$

Đặt $\xi = y - 3x$, $\eta = y$, ta có

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = -3v_\xi, \\ u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi + v_\eta, \\ a_1 &= b_1 = 0, \quad c_1 = c = 9. \end{aligned}$$

Như vậy phương trình có dạng chính tắc là

$$9v_{\eta\eta} + 4v_\xi + v_\eta + v = 0.$$

(d) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$

(e) $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} + 7u_y = \sin x$

(f) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$

3. Phân loại và đưa các phương trình sau về dạng chính tắc trong các miền tương ứng

(a) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_x = 0$

Lời giải. Ta có $\delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, nên phương trình thuộc loại parabolic trên toàn mặt phẳng tọa độ.

Phương trình đặc trưng là

$$y'^2 + 2\cos x y' - 3 - \sin^2 x = 0 \Rightarrow y' + \cos x = \pm 2 \Rightarrow y + \sin x \pm 2x = C.$$

Đặt $\xi = y + 2x + \sin x$, $\eta = y - 2x + \sin x$, ta có

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = (2 + \cos x)v_\xi + (-2 + \cos x)v_\eta, \tag{2.1.1}$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = v_\xi + v_\eta, \tag{2.1.2}$$

$$a_1 = c_1 = 0, \tag{2.1.3}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= (\cos^2 x - 4) - (2 + \cos x + (-2 + \cos x))\cos x - (3 + \sin^2 x) \\ &= -7 - \sin^2 x - \cos^2 x = -8. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, cần lưu ý là ở (2.1.1), biến thay thế ξ là một hàm không tuyến tính theo x, vì vậy mặc dù không tính rõ thành phần của u_{xx}, vẫn còn thành phần $v_\xi(\xi_{xx}$ và $v_\eta \eta_{xx}$ không bị triệt tiêu. Hệ số của nó chính là hệ số của số hạng u_{xx}. Hệ số nhận được sau tính toán này sẽ được bổ sung vào hệ số của v_ξ. Ví dụ như ở đây ta tính được thành phần bổ sung đó là $-\cos x(v_\xi + v_\eta)$. Thay vào phương trình ban đầu ta được phương trình chính tắc cần tìm là

$$16v_{\xi\eta} - y((2 + \cos x)v_\xi + (-2 + \cos x)v_\eta) - \cos(v_\xi + v_\eta) = 0.$$

Các bài tập sau làm tương tự.

(b) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$

Lời giải. Biệt thức $\delta = x^2y^2 - 2x^2y^2 = -x^2y^2 \leq 0$. Như vậy phương trình này là parabolic trên các đường $y = 0$ hoặc $x = 0$, và là elliptic khi $xy \neq 0$. Ta xét từng trường hợp:

- Nếu $x = 0$ thì phương trình ban đầu có dạng $y^2 u_{xx} + yu_y = 0$.

- Nếu $y = 0$ thì phương trình ban đầu có dạng $2x^2 u_{yy} = 0$. Hai phương trình này đều là các phương trình parabolic dạng chính tắc.

- Xét phương trình đặc trưng có dạng

$$y^2 y'^2 - 2xyy' + 2x^2 = 0 \iff (y' - x)^2 + x^2 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm phức liên hợp là $yy' - x = \pm xi$. Ta tìm được $y^2 - x^2 = \pm x^2 i$. Như vậy ta có thể xét phép đổi biến

$$\xi = y^2 - x^2, \quad \eta = x^2.$$

Tính toán tiếp theo ta sẽ được kết quả $a_1 = c_1 = 8x^2y^2$, $b_1 = 0$, hệ số của u_ξ có thêm thành phần $2u_\xi(2x^2 - y^2)$. Thay vào biểu thức ban đầu ta đưa được phương trình về dạng chính tắc

$$8x^2y^2(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) + 2y^2v_\xi + 2v_\xi(2x^2 - y^2) = 0.$$

Rút gọn lại ta được

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{2y^2}v_\xi = 0.$$

(c) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0$

Lời giải. Phương trình có biệt thức $\delta = 0$ nên thuộc dạy parabolic. Ta tìm được phương trình đặc trưng (rút gọn): $(e^x y' - e^y)^2 = 0$. Ta tìm được phép đổi biến tương ứng $\xi = e^{-y} - e^{-x}$, $\eta = y$. Qua phép đổi biến này, ta tìm được dạng chính tắc của phương trình là

$$e^{2y}v_{\eta\eta} + (e^{-y} - e^{-x})v_\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\eta\eta} + \xi e^{-\eta}v_\xi = 0.$$

(d) $\tan^2 x u_{xx} - 2y\tan x u_{xy} + y^2u_{yy} + \tan^3 x u_x = 0$

Lời giải. Phương trình là parabolic, và có phương trình đặc trưng dạng $(\tan x y' + y)^2 = 0$, tức là ta có phép đổi biến tương ứng $\xi = y\sin x$, $\eta = y$. Ta tìm được phương trình chính tắc có dạng

$$v_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2}v_\xi = 0.$$

(e) $xu_{xx} + u_{yy} = x^2$

(f) $u_{xx} + u_{xy} - xu_{yy} = 0,\ x \leq 0$, với mọi y

(g) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0$

(h) $\sin^2 x u_{xx} + \sin 2x u_{xy} + \cos^2 x u_{yy} = x$

(i) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = e^x$

(j) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ (Phương trình Tricomi)

Những bài tập sau hoàn toàn tương tự các ví dụ đã giải ở trên. Việc giải quyết nó được dành cho độc giả.

4. Đưa về dạng chính tắc trong miền mà loại phương trình vẫn giữ nguyên.

(a) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2y = 0$

(b) $y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0 \; m \in \mathbb{Z}^+$,

(c) $u_{xx} + xu_{yy} + u_x - xu_y = 0$

(d) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$

(e) $\sin^2 xu_{xx} + u_{yy} = 0$

5. Đặt $u = ve^{\lambda x + \mu y}$ và chọn các tham số λ, μ thích hợp, hãy đơn giản hoá các phương trình sau.

(a) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$

(b) $u_{xx} = \frac{1}{a^2}u_y + \beta u_x + \alpha u$

(c) $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$

6. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau:

(a) $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} - \cos xu_y = 0$

Lời giải. Ta có $\delta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$ với mọi x, y, vì vậy đây là phương trình hyperbolic. Phương trình đặc trưng tương ứng là ${y'}^2 + 2\sin xy' - \cos^2 x = 0$. Giải ra ta được $y' + \sin x = \pm 1$, tức là ta sẽ xét phép đổi biến tương ứng

$$\xi = y - \cos x + x, \quad \eta = y - \cos x - x.$$

Ta tính được

$$\begin{aligned}
\xi_x &= \sin x + 1, \\
\eta_x &= \sin x - 1, \\
\xi_y &= \eta_y = 1, \\
\xi_{xx} &= \eta_{xx} = \cos x, \\
u_x &= (\sin x + 1)v_\xi + (\sin x - 1)v_\eta, \\
u_y &= v_\xi + v_\eta.
\end{aligned}$$

Vì đây là phương trình hyperbolic, nên $a_1 = c_1 = 0$, còn

$$\begin{aligned}
b_1 &= (\sin x + 1)(\sin x - 1) - \sin x(\sin x + 1 + \sin x - 1) - \cos^2 x \\
&= \sin x^2 - 1 - 2\sin x^2 - \cos^2 x = -2.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng ξ_{xx} và η_{xx} khác 0 nên (các bạn tính toán cụ thể!) phương trình chính tắc sẽ có dạng $v_{\xi\eta} = 0$. Khi đó nghiệm của phương trình sẽ là

$$u(x, y) = G(y - \cos x + x) + H(y - \cos x - x).$$

(Gợi ý: Thành phần đạo hàm riêng cấp 1 của phương trình qua phép đổi biến sẽ là $v_\xi \cos x + v_\eta \cos x - \cos x(v_\xi + v\eta) = 0$*. Đây chính là điều ta mong chờ!)*

(b) $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$

Lời giải Xét phương trình đặc trưng tương ứng

$$xy'^2 - y = 0 \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow \sqrt{y} = \pm\sqrt{x} + C.$$

Vậy ta xét phép đổi biến $\xi = \sqrt{y} + \sqrt{x}, \eta = \sqrt{y} - \sqrt{x}$. Ta tìm được

$$y = \frac{(\xi+\eta)^2}{4}, \quad x = \frac{(\xi-\eta)^2}{4},$$

và sử dụng các tính toán chi tiết

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}(v_\xi - v_\eta), \\ u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{1}{2\sqrt{x}}(v_\xi + v_\eta), \\ u_{xx} &= (A) - \frac{1}{4x\sqrt{x}}(v_\xi - v_\eta), \\ u_{yy} &= (B) - \frac{1}{4y\sqrt{y}}(v_\xi + v_\eta), \end{aligned}$$

suy ra

$$xu_{xx} - yu_{yy} = (\cdots)v_{\xi\eta} - \frac{1}{4\sqrt{x}}(v_\xi - v_\eta) + \frac{1}{4\sqrt{y}}(v_\xi - v_\eta).$$

Thay vào phương trình ban đầu ta tìm được dạng chính tắc của phương trình là $v_{\xi\eta} = 0$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là

$$v(\xi,\eta) = G(\xi) + H(\eta) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = G(\sqrt{y} + \sqrt{x}) + H(\sqrt{y} - \sqrt{x}).$$

(c) $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ (gợi ý: đặt $v = (x-y)u$),

(d) $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$ (gợi ý: đặt $u = e^{-(x^2+y^2)/2}v$),

Nhận xét 2.1.1. Trước tiên ta cần đưa phương trinh về dạng chính tắc. Thông thường phương trình nhận được mà từ đó có thể viết được nghiệm tổng quát một cách tường minh sẽ có hai dạng $v_{\xi\eta} = 0$ hoặc $v_{\xi\eta} + \alpha v_\xi = 0$, nên từ đây ta tìm được biểu thức nghiệm tổng quát (còn gọi là các đường cong tích phân tổng quát). Biểu thức nghiệm của chúng sẽ có dạng $u(\xi,\eta) = G(\xi) + H(\eta)$ hoặc $u(\xi,\eta) = e^{-\alpha\eta}G(\xi) + H(\eta)$.

7. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

(a) $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0$

(b) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

(c) $u_{xy} + au_x = 0$

(d) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y - 2 = 0$

(e) $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0,\ a, b = \text{const},$

(f) $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{xy}$

2.2. Bài toán giá trị đường bên của phương trình tuyến tính cấp 2 loại hyperbolic

Việc tìm nghiệm của bài toán giá trị đường bên chính là việc ta thay các điều kiện cho trên các đường (không phải là đường đặc trưng) của ẩn hàm để tìm các hàm G và H phù hợp. Các dạng phương trình mà từ đó viết được biểu thức nghiệm là rất ít và tương đối đặc biệt.

1. Tìm các miền elliptic, hyperbolic, parabolic của phương trình

$$(\lambda + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$$

theo λ.

2. Giải bài toán giá trị đường bên sau

(a) $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0$, $u(x, 5x) = 0$,$u_y(x, 5x) = 3x^2$.

(b) $u_{xx} + 7u_{xy} + 12u_{yy} = 0$, $u(x, 5x) = 0$,$u_x(x, 5x) = 5x^2$.

(c) $u_{xy} - u_x = 0$, $u(x, x) = 0$, $u_x(x, x) = x^2e^x$.

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Phương trình có nghiệm tổng quát $u(x, y) = e^yG(x) + H(y)$. Thay vào các điều kiện được cho ta có

$$\begin{cases} u(x,x) &= e^xG(x) + H(x) = 0, \\ u_x(x,x) &= e^xG'(x) = x^2e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x) = -e^xG(x), \\ G(x) = \frac{1}{3}x^3. \end{cases} \Rightarrow H(x) = -\frac{1}{3}x^3e^x.$$

Vậy nghiệm cần tìm là

$$u(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 - y^3)e^y.$$

Bạn đọc có thể kiểm tra lại hàm trên là nghiệm của phương trình.

3. Xét phương trình

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0.$$

(a) Phân loại và đưa phương trình về dạng chính tắc.

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Ta có $\delta = 4 > 0$ nên phương trình là hyperbolic.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

Lời giải. Phương trình đặc trưng tương ứng là $y'^2 - 4y' = 0$. Giải ra ta được $y' = 0$ và $y' = 4$. Vậy phép đổi biến tương ứng với phương trình này là $\xi = y, \eta = y - 4x$. Phương trình ban đầu sẽ được đưa về dạng chính tắc với các thông số

$$a_1 = c_1 = 0, b_1 = 16 + 2(-4) = 8,$$
$$u_x = -4v_\eta.$$

Suy ra phương trình chính tắc có dạng

$$-16v_{\xi\eta} - 4v_\eta = 0 \Rightarrow v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}v_\eta = 0.$$

Vậy nghiệm cần tìm của phương trình là $v(\xi,\eta) = e^{-\xi/4}G(\eta) + H(\xi)$, hay là

$$u(x,y) = e^{-y/4}G(y-4x) + H(y).$$

(c) Tìm nghiệm của phương trình với điều kiện ban đầu cho trên đường thẳng $y = 8x$

$$u(x,y)|_{y=8x} = 0, \quad u_x(x,y)|_{y=8x} = 4e^{-2x}.$$

Lời giải. Thay giá trị trên đường bên của nghiệm u ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u(x,8x) = e^{-2x}G(4x) + H(8x) = 0, \\ u_x(x,8x) = -4e^{-2x}G'(4x) = 4e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(8x) = -e^{-2x}G(4x), \\ G'(4x) = -1 \end{cases}$$

Giải phương trình cuối cùng $G'(4x) = -1$ ta được $\frac{dG(4x)}{d(4x)} = -1$, tức là $G(4x) = -4x$. Vậy ta được

$$G(x) = -x \Rightarrow H(x) = -\frac{x}{2}e^{-x/4}.$$

Vậy nghiệm cần tìm của bài toán sẽ là

$$u(x,y) = -(y-4x)e^{-y/4} + \frac{y}{2}e^{-y/4} = \frac{y-8x}{2}e^{-y/4}.$$

Thử lại ta thấy đúng là nghiệm cần tìm.

4. Trả lời các câu hỏi tương tự câu 3 đối với phương trình

$$y^5u_{xx} - yu_{yy} + 2u_y = 0,$$

biết rằng điều kiện ban đầu là $u(0,y) = 8y^3, \quad u_x(0,y) = 6$, với mọi $y > 0$.

Lời giải. Với $y > 0$, phương trình là hyperbolic. Ta có phương trình đặc trưng là $y^5y'^2 - y = 0$, từ đó tìm được phép đổi biến tương ứng

$$\xi = y^3 - 3x, \quad \eta = y^3 + 3x.$$

Ta có các biến đổi tương ứng

$$\begin{aligned}
&\xi_x = -3, \quad \eta_x = 3, \quad \xi_y = \eta_y = 3y^2, \\
&\xi_{yy} = \eta_{yy} = 6y, \qquad \xi_{xx} = \eta_{xx} = \xi_{xy} = \eta_{xy} = 0 \\
&u_x = -3v_\xi + 3v_\eta, \qquad u_y = 3y^2(v_\xi + v_\eta),
\end{aligned}$$

Đây là phương trình hyperbolic nên $a_1 = c_1 = 0$, còn $b_1 = y^5(-9) - y.9y^4 = 18y^5$, và đồng thời, tương tự bài tập ở trước, ta tìm được (cái này dành cho các bạn!) phương trình chính tắc là $v_{\xi\eta} = 0$. Suy ra nghiệm tổng quát cần tìm là

$$u(x, y) = G(y^3 - 3x) + H(y^3 + 3x).$$

Thay vào điều kiện ban đầu ta được hệ

$$\begin{cases} G(y^3) + H(y^3) = 8y^3 \\ -3G'(y^3) + 3H'(y^3) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2G'(y^3) + 3y^2H(y^3) = 24y^2 \\ -3G'(y^3) + 3H'(y^3) = 6 \end{cases}$$

Từ hai phương trình trên ta dẫn đến phương trình $H'(y^3) = 5$, suy ra $H(y^3) = 5y^3$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được $G(y^3) = 3y^3$. Vậy nghiệm của bài toán sẽ là

$$u(x, y) = 3(y^3 - 3x) + 5(y^3 + 3x) = 8y^3 + 6x.$$

5. Trả lời các câu hỏi tương tự câu 3 đối với phương trình

$$u_{xx} + (1 + y^2)^2 u_{yy} - 2y(1 + y^2)u_y = 0,$$

biết rằng điều kiện ban đầu là $u(x, 0) = g(x),\ u_y(x, 0) = f(x)$, với $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

6. Phép biến đổi Fourier $\mathcal{F}$ của một hàm khả tích $u(x, y)$ được cho bởi công thức

$$\mathcal{F}[u](\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y)e^{-i(x\xi + y\eta)} dxdy, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

Xét phương trình

$$au_{xx} + bu_{yy} = f(x, y).$$

(a) Biến đổi phương trình trên bằng phép biến đổi Fourier $(x, y) \to (\xi, \eta)$.

(b) Tìm nghiệm của phương trình trên từ việc giải phương trình đã được biến đổi Fourier với giả thiết rằng u có giá compact, tức là tập

$$\operatorname{supp} u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ u(x, y) \neq 0\}$$

là một tập compact.

(c) Xét trường hợp $a = b = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $a = 1$, $b = -1$.

2.3. Bài toán Sturm-Liouville

Một trong những công cụ hữu hiệu để giải phương trình đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính hay được sử dụng là phương pháp tách biến và biểu diễn nghiệm dưới dạng chuỗi Fourier. Đây là một dạng nghiệm đặc biệt, cơ bản mô tả được hình dáng nghiệm của phương trình ban đầu, khi các thông tin ban đầu và thông tin ở biên được cung cấp đầy đủ. Dạng tách biến này sẽ đưa phương trình tuyến tính cấp hai về một hệ hai phương trình vi phân thường tuyến tính cấp 2, và việc giải nó sẽ dẫn đến việc tìm nghiệm của bài toán Sturm-Liouville. Ta xét một ví dụ sau: Tìm nghiệm của bài toán truyền sóng trên dây hữu hạn $u = u(x,t)$ thỏa mãn $(x,t) \in [0,\ell] \times \mathbb{R}^+$,

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x,t) \in (0,\ell) \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \end{cases}$$

Hiện tượng vật lí ở đây là sự truyền dao động (sóng) trên dây căng thẳng có chiều dài ℓ. Để tìm nghiệm của phương trình này, người ta xét một loại nghiệm đặc biệt có dạng $u(x,t) = X(x)T(t)$, gọi là nghiệm dưới dạng tách biến. Nhiệm vụ của ta là tìm tất cả các hàm X, T thỏa mãn bài toán. Thay biểu thức vào phương trình ta được

$$XT'' = a^2 X'' T \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{aT} := -\lambda,$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là số thực (vì sao?). Từ đây ta được một hệ hai phương trình vi phân thường

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0, \\ T'' + a\lambda T = 0. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ở trên ta giải để tìm tất cả các cặp không tầm thường (λ, X) thỏa mãn, rồi thay giá trị λ vừa tìm được vào phương trình tiếp theo để tìm T. Từ đây ta có được nghiệm của bài toán ban đầu. Việc giải bài toán thứ nhất tìm (λ, X) được gọi là giải bài toán Sturm-Liouville mà ta xét dưới đây.

1. Tìm tất cả các cặp không tầm thường (λ, X) thỏa mãn

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,\pi), \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Lời giải. Phương trình được xét là một phương trình vi phân thường cấp 2. Bằng cách tìm nghiệm cơ bản dưới dạng $X = e^{zx}$, ta đưa phương trình trên về dạng phương trình đặc trưng

$$z^2 + \lambda = 0.$$

Đến đây ta tìm z dựa vào giá trị của λ. Ta có các trường hợp sau

- *Trường hợp* $\lambda < 0$. Nghiệm tổng quát cần tìm sẽ có dạng $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Thay giá trị của X tại $x = 0$ và $x = \pi$ ta được

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0, \\ X(\pi) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0 \quad \text{why?.}$$

- *Trường hợp* $\lambda = 0$. Phương trình có nghiệm là $X(x) = Ax + B$. Thay các giá trị của X tại 0 và π ta được $A = B = 0$.

- *Trường hợp* $\lambda > 0$. Nghiệm của phương trình sẽ có dạng (why?)

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Thay vào các điều kiện tại hai đầu mút ta được

$$\begin{cases} X(0) = A = 0, \\ X(\pi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + Be\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ hai ta suy ra, với lí do $B \neq 0$, $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Từ đây ta tìm được các giá trị của $\lambda = k^2$, với mọi $k = 1, 2, \ldots$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là

$$X_k(x) = a_k \sin(kx), k = 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow X(x) = \sum_k X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx).$$

2. Tìm các giá trị riêng λ_n và hàm riêng X_n của các bài toán Sturm-Liouville sau

(a) $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X'(L) = 0$.

Lời giải. Ta chỉ giải bài toán với trường hợp $\lambda > 0$, vì các trường hợp còn lại chỉ cho $X \equiv 0$. Với $\lambda > 0$, nghiệm cần tìm của phương trình Sturm-Liouville (S-L) có dạng tổng quát là

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Thay vào các điều kiện biên ta được hệ

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X'(L) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}L = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai, vì A đã bằng 0 và phương trình không thể có nghiệm tầm thường, nên ta phải có $B \neq 0$, suy ra $\cos\sqrt{\lambda}L = 0$, tức là $\sqrt{\lambda}L = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ta tìm được toàn bộ các giá trị của λ thỏa mãn điều này, là

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2L} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4L^2}.$$

Nghiệm tương ứng của bài toán (S-L) sẽ là

$$X_k(x) = a_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right),$$

trong đó a_k là các hệ số (k bắt đầu từ bao nhiêu bạn nhỉ?) được xác định từ các điều kiện của bài toán phương trình đạo hàm riêng tương ứng. Nghiệm tổng quát sẽ có dạng

$$X(x) \approx \sum_{k=?}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right).$$

(b) $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) + aX(L) = 0$, $X'(0) + bX'(L) = 0$.

(c) $(xX'(x))' + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(L) = 0$.

3. Giải bài toán

$$\begin{cases} X'' + 2aX + \lambda X = 0, \ a > 1 \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

4. Tìm giá trị a sao cho λ âm

$$\begin{cases} X'' + aX + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

5. Giải bài toán $X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < X < L$, với các điều kiện tương ứng

(a) $X(0) - X'(0) = 0, \quad X(L) + X'(L) = 0$. ($L < \pi/2$)

(b) $X'(0) = 0$, $X(L) = 0$.

(c) $L = \pi$: $X(0) - X'(0) = 0$, $X(\pi) - X'(\pi) = 0$.

(d) $L = \pi$: $\pi X(0) - X(\pi) = 0$, $\pi X'(0) + X'(\pi) = 0$.

6. Chứng minh rằng bài toán sau không có nghiệm

$$\begin{cases} X'' + X = 0, \ 0 < x < 2\pi \\ X(0) = 0, X(2\pi) = 1. \end{cases}$$

Nếu thay vì 2π, ta có điều kiện $X(L) = 1$, thì bạn hãy xác định tất cả các giá trị của $L > 0$ sao cho bài toán trên có nghiệm.

7. Không giải bài toán

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \ 0 < x < 1, \\ X(0) = 0, \ X(1) + X'(1) = 0, \end{cases}$$

hãy chứng minh rằng mọi giá trị riêng λ của nó là dương.

Chương 3

Bài toán dây rung

3.1. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy. Công thức d'Alembert

1. Chứng minh rằng nếu f, u_0, u_1 là các hàm điều hoà trong $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1([0, +\infty))$ thì nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + g(t)f(x), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

được tính qua công thức

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Nhận xét 3.1.1.

- Nếu xét trường hợp $n = 1$, khi đó hàm u_0, u_1 là hàm điều hòa tức là $u_0'' = 0, u_1'' = 0$. Lúc đó ta đơn giản được dạng của hàm u_0, u_1 và cả $f(x)$. Việc kiểm tra nghiệm chỉ là điều đơn giản.

- Trường hợp số chiều của không gian cao hơn 1, ví dụ $u_0(x) = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u_1(x) = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì việc tính toán sẽ trở thành trường hợp tổng quát.

2. Giải các bài toán Cauchy dưới đây, với $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x. \end{cases}$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Áp dụng kết quả của bài toán 1 ở trên (sau khi kiểm tra tính chất các hàm $u_0 = 0$, $u_1 = x$ và $g(x)f(t) = xt$, ta suy ra nghiệm cần tìm của bài toán có dạng

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 0 + xt + x\int_0^t (t-\tau)\tau d\tau \\ &= xt + x\left(\frac{t\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right)\Big|_0^t = xt + \frac{xt^3}{6}. \end{aligned}$$

(b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x + \cos x. \end{cases}$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Bài toán được chia thành 2 bài toán thành phần $u = v + w$, trong đó v là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \\ v(x,0) = \sin x,\ v_t(x,0) = x + \cos x. \end{cases}$$

Từ công thức d'Alembert ta được

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x-t) + \sin(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (\zeta + \cos\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta^2}{2} + \sin\zeta\right)\Big|_{x-t}^{x+t} \\ &= \sin(x+t) + xt. \end{aligned}$$

Còn w là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + e^x, \\ v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Áp dụng công thức nghiệm được nêu trong tài liệu, ta được

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t\tau)}^{x+(t-\tau)} e^\zeta d\zeta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t d\tau (e^{x+(t-\tau)} - e^{x-(t-\tau)}) \\ &= e^x(e^t + e^{-t} - 2) = e^{x-t}(e^t - 1)^2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm cần tìm là $u = v + w$, tức là

$$u(x,t) = \sin(x+t) + xt + e^{x-t}(e^t - 1)^2.$$

(c) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

3. Giải các bài toán sau với điều kiện cho trên các đường bên:

(a) $\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 3x^2,\ u_y(x,0) = 0, \end{cases} \qquad |x| < +\infty.$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Rõ ràng đây là phương trình hyperbolic, với các đường đặc trưng $y + x = C_1, y - 3x = C_2$, như vậy ta sẽ xét phép đổi biến $\xi = y + x$, $\eta = y - 3x$. Ta có phương trình chính tắc tương ứng là $v_{\xi\eta} = 0$, tức là nghiệm cần tìm có dạng

$$u(x, y) = G(y + x) + H(y - 3x).$$

Thay vào các điều kiện đầu ta được

$$\begin{cases} G(x) + H(-3x) = 3x^2 \\ G'(x) + H'(-3x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G'(x) - 3H'(-3x) = 6x \\ G'(x) + H'(-3x) = 0 \end{cases}$$

Từ hai phương trình trên ta được $4G'(x) = 6x$, tức là $G(x) = \frac{3}{4}x^2$, ta suy ra $H(-3x) = \frac{9}{4}x^2$, tức là $H(x) = \frac{1}{4}x^2$. Vậy nghiệm cần tìm sẽ là

$$u(x, y) = \frac{3}{4}(y + x)^2 + \frac{1}{4}(y - 3x)^2 = \frac{1}{4}(4y^2 + 12x^2) = y^2 + 3x^2.$$

(b) $\begin{cases} u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = 8x - 4x^2,\ u_x|_\Gamma = 5 + 4x, \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y = 3x$.

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Bỏ qua một số bước chi tiết, được thực hiện tương tự ví dụ trên, ta có phương trình đường đặc trưng tương ứng là ${y'}^2 + 4y' - 5 = 0$. Đây là phương trình hyperbolic với hai nghiệm phân biệt $y' = 1$ và $y' = -5$. Ta có phép đổi biến tương ứng là $\xi = y - x$, $\eta = y + 5x$. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là

$$u(x, y) = G(y - x) + H(y + 5x).$$

Thay vào các điều kiện đường bên ta được

$$\begin{cases} G(2x) + H(8x) = 8x - 4x^2 \\ -G'(2x) + 5H'(8x) = 5 + 4x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2G'(2x) + 8H'(8x) = 8 - 8x \\ -G'(2x) + 5H'(8x) = 5 + 4x \end{cases}$$

Từ hai phương trình cuối cùng ở trên, ta suy ra $H'(8x) = 1$, tức là $H(8x) = 8x$. Vậy ta viết được $G(2x) = -4x^2$, suy ra $H(z) = z$, $G(z) = -z^2$. Thay vào biểu thức của nghiệm của phương trình, ta suy ra nghiệm cần tìm của bài toán là

$$u(x, y) = (y - x)^2 + y + 5x.$$

(c) $\begin{cases} 4y^2u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \\ u(x, 0) = g(x),\ u_y(x, 0) = h(x), \end{cases}$ $|x| < +\infty$.

(d) $\begin{cases} u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u(x, y)|_\Gamma = g(x),\ u_y(x, y)|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ $|x| < +\infty, \Gamma = \{y = \sin x\}$.

4. Tìm điều kiện cần và đủ để các bài toán với điều kiện đường bên cho trên các đường đặc trưng sau có nghiệm

(a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,t)|_{x-t=0} = g(x),\ u_t(x,t)|_{x-t=0} = h(x), \end{cases} \quad |x| < +\infty.$

Lời giải. Nghiệm của phương trình có dạng $u(x,t) = G(x+t) + H(x-t)$. Thay vào điều kiện đường bên ta được hệ

$$\begin{cases} G(2x) + H(0) = g(x) \\ G'(2x) - H'(0) = h(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4G''(2x) = g''(x) \\ G'(2x) - H'(0) = h(x), \end{cases} \Rightarrow g''(x) = 2h'(x). \tag{3.1.1}$$

Đây chính là điều kiện cần của bài toán. Để kiểm tra điều ngược lại, ta chứng tỏ rằng với mối quan hệ giữa g và h như ở trên, ta tìm được biểu thức nghiệm của bài toán, tức là xác định được dạng của hàm G và H. Thật vậy, từ biểu thức $g'' = 2h'$, ta tích phân hai vế lên (vì sao làm được điều này?) để được hệ thức $g'(x) = 2h(x) + C$. Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình ở trên, ta được

$$G(2x) = g(x) - H(0) \quad \Rightarrow G(x) = g\left(\frac{x}{2}\right) - H(0). \tag{3.1.2}$$

Đạo hàm phương trình thứ nhất theo x rồi thế vào phương trình thứ hai, ta tận dụng hệ thức ở (3.1.1) để suy ra $H'(0) = \frac{1}{2}C$. Như vậy với hàm H là bất kì thỏa mãn $H'(0)$ là hằng số của hệ thức liên hệ giữa g và h, còn G được cho bởi biểu thức (3.1.2), với $H(0)$ là hằng số bất kì.

(b) $\begin{cases} u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y + x = 0$.

(c) $\begin{cases} 2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $x - 2y = 0$.

(d) $\begin{cases} 3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y - 3x = 0$.

3.2. Bài toán giá trị biên-ban đầu

1. Tìm nghiệm của bài toán.

(a) $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = -2\sin x + 8\sin 2x, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Tìm nghiệm bài toán này dưới dạng đặc biệt $u(x,t) = X(x)T(t)$. Khi tìm được các hàm X, T thích hợp, ta sẽ biểu diễn nghiệm dưới dạng chuỗi Fourier tương ứng. Khi thay biểu thức trên vào phương trình được xét cùng điều kiện biên, ta có

$$XT'' = 4X''T,\ (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}^+, \quad X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0,\ t > 0.$$

Từ đây ta có hệ thức

$$\frac{X"}{X} = \frac{T''}{4T} := -\lambda, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

trong đó λ là một hệ số thực nào đó cần tìm. Ta có bài toán Sturm-Liouville tương ứng

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X(\pi) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Áp dụng kết quả đã có ở phần Sturm-Liouville, ta được $\lambda_k = k^2$, $X_k(x) = \alpha_k \sin(kx)$, đồng thời thay vào phương trình vi phân với t ta được $T_k(t) = A_k \cos(2kt) + B_k \sin(2kt)$, trong đó k là số tự nhiên khác 0 (vì sao?). Kết hợp lại ta được nghiệm của bài toán có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2kt) + b_k \sin(2kt)) \sin(kx),$$

trong đó a_k, b_k được tìm từ các điều kiện ban đầu của bài toán, với các hàm cho ở điều kiện ban đầu cũng được thác triển thành chuỗi Fourier tương ứng. Ta có thể sử dụng công thức tính hệ số Fourier, nhưng chú ý một chút là các hàm cho ở điều kiện ban đầu đều là các hàm lượng giác, vì vậy ta có thể đồng nhất hệ số (chú ý là các hàm lượng giác lập thành một cơ sở trực chuẩn). Cụ thể ta có

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = \sin x$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kb_k \sin(kx) = -2\sin x + 8\sin(2x).$$

Đồng nhất hệ số của hai hệ thức trên ta được

$$a_k = 0, \forall k > 1, a_1 = 1; \quad b_1 = -1, b_2 = 2, b_k = 0, \forall k > 2.$$

Vậy nghiệm cần tìm của bài toán sẽ là

$$u(x,t) = (\cos(2t) - \sin(2t)) \sin x + 2\sin(4t)\sin(2x).$$

(b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin^3 x,\ u_t(x,0) = 3\sin x + 4\sin 2x, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

Lời giải. Làm tương tự bài trên. Chú ý phân tích

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

(c) $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = -2\sin\frac{\pi x}{2\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell},\ u_t(x,0) = \frac{3\pi a}{\ell}\sin\frac{3\pi x}{2\ell}, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\ell,t) = 0, \end{cases}$$

Lời giải. Làm tương tự như mẫu trên. Chú ý

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2\ell}\right)^2 := \omega_k^2, \quad X_k = \alpha_k \sin(\omega_k x).$$

Biểu thức nghiệm có dạng

$$u(x,t) \approx \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2\ell}t\right) + b_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2\ell}t\right))\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2\ell}x\right),$$

thay vào điều kiện đầu và đồng nhất hệ số ta được

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(\omega_k x) = \sin\frac{\pi x}{2\ell} - \sin\frac{3\pi x}{2\ell}$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a\omega_k b_k \sin(\omega_k x) = \frac{3\pi a}{2\ell}\sin\frac{3\pi x}{2\ell}.$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_k = 0, k > 1; \quad b_1 = 1, b_k = 0,\ k \neq 1.$$

Ta có nghiệm tương ứng

$$u(x,t) = \cos(a\omega_0 t)\sin(\omega_0 x) - \cos(a\omega_1 t)\sin(\omega_1 x) + \sin(a\omega_1 t)\sin(\omega_1 x).$$

(d) $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 1 + 3\cos x,\ u_t(x,0) = -4\cos 2x - \cos x, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, \end{cases}$$

Lời giải. Ta viết lại điều kiện ban đầu dưới dạng

$$u(x,0) = 1 + 3\cos x, \quad u_t(x,0) = -2 - \cos x - 2\cos 2x.$$

Từ các điều kiện biên ta suy ra nghiệm của bài toán sẽ được viết theo chuỗi

$$u(x,t) \approx a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(akt) + b_k \sin(akt))\cos(kx).$$

Đồng nhất hệ số để tìm các hệ số của nghiệm ta được

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) = 1 + 3\cos x$$
$$\Rightarrow a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_k = 0, k \geq 2,$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} akb_k \cos(kx) = -\cos x - 4\cos 2x$$
$$\Rightarrow b_1 = -\frac{1}{a},\ b_2 = -\frac{2}{a},\ b_k = 0, k > 0.$$

Nghiệm của bài toán sẽ là

$$u(x,t) = 1 + \left(3\cos(at) - \frac{1}{a}\sin(at)\right)\cos x - \frac{2}{a}\sin(2at)\cos(2x$$

2. Giải các bài toán biên-ban đầu dưới đây. Chú ý rằng các bài tập tiếp theo đòi hỏi tính toán nhiều hơn và phức tạp hơn bài tập ở mục trước.

(a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bx(x-\ell),\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\ell,t) = 0, \end{cases}$

Lời giải. Từ phương trình thuần nhất tương ứng, ta xây dựng được biểu diễn nghiệm của bài toán theo chuỗi Fourier như sau:

$$u(x,t) \approx \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Sử dụng công thức trên ta xây dựng được nghiệm của bài toán không thuần nhất. Đầu tiên ta khai triển hàm $x(x-\ell)$ theo chuỗi Fourier với hệ cơ sở là $\{\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\}$ ta được chuỗi

$$bx(x-\ell) = 2b\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)\ell^2}{k^3\pi^3} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Như vậy hàm T_k cần tìm sẽ là nghiệm của phương trình vi phân thường

$$T_k'' + k^2a^2T_k = 2b\frac{(1-(-1)^k)\ell^2}{k^3\pi^3}, T(0) = T'(0) = 0.$$

Để giải phương trình này để tìm T_k, ta áp dụng công thức đã có trong tài liệu.

(b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x(\pi - x)\cos t,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = x + 1,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = t + 1,\ u(\ell,t) = t^3 + 2, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x^2 - x,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases}$

Gợi ý cách giải. Ta tìm nghiệm dưới dạng tách biến. Khi đó phương trình được viết lại thành

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 4T}{T}.$$

Từ đây ta xây dựng biểu thức của bài toán Sturm-Liouville, cũng như hệ số tương ứng với hàm T. Chú ý việc chuyển hàm $x^2 - x$ về chuỗi Fourier theo cơ sở tương ứng.

(e) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t - u,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \pi x - x^2,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

Gợi ý cách giải. Ta làm tương tự bài trên.

3. Sử dụng phương pháp tách biến để tìm tất cả các nghiệm của bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - k u_t, \quad 0 < x < L, -\infty < t < \infty, \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0. \end{cases}$$

Gợi ý cách giải. Sử dụng các kết quả đã có, ta suy ra được nghiệm của bài toán có dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k/2t}(a_n \cos(\alpha_n t) + b_n \sin(\alpha_n t)) \sin(\omega_n x),$$

với

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \alpha_n^2 = \frac{k^2}{4} + \omega_n^2.$$

Vì nghiệm được tìm ở lớp hàm khả vi liên tục nên sẽ bị chặn theo x và t. Với miền xác định như của bài toán, ta suy ra chỉ có $k = 0$ mới cho nghiệm phù hợp. Khi đó nghiệm tương ứng sẽ được viết lại dễ dàng.

4. Giải bài toán truyền dao động tuần hoàn

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2\pi, 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x), \quad 0 < x < 2\pi \\ u(0,t) = 0,\ u(2\pi,t),\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t). \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Gợi ý cách giải.}}$ Với tính chất tuần hoàn thì nghiệm tổng quát của bài toán được viết dưới dạng

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x),$$

trong đó

$$X_k(x) = A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx), \quad T_k(t) = \alpha_k \cos(akt) + \beta_k \sin(akt).$$

Việc tìm các hệ số của nghiệm sẽ phụ thuộc vào các tích phân tương ứng của g và f theo hệ cơ sở của khai triển Fourier.

Chương 4
Bài toán truyền nhiệt

4.1. Tóm tắt lí thuyết

Phương trình truyền nhiệt mô tả hiện tượng truyền tải nhiệt độ (mở rộng ra là truyền tải nồng độ vật chất) thông qua các hiện tượng khuếch tán, tiêu tán và phóng xạ. Các hiện tượng này được quan sát trong thực tế, ở các phản ứng hóa học, các hiện tượng vật lí thông dụng cũng như trong các ngành khoa học phức tạp khác (vật lí lượng tử...).

Trong khuôn khổ chương trình học, ta hạn chế việc nghiên cứu các bài toán của phương trình truyền nhiệt ở dạng đơn giản, xét hiện tượng truyền nhiệt 1-chiều trên thanh $(x, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, hoặc trên bề mặt phẳng $(x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, với môi trường nói chung là đồng nhất. Phương trình tương ứng được xét là

$$u_t = a^2 \Delta u = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$$

cùng các điều kiện ban đầu (điều kiện Cauchy, đối với biến thời gian t) và điều kiện biên (đối với biến không gian (x, y).) Nghiệm của bài toán được tìm là nghiệm *bị chặn*. Cũng tương tự như trường hợp phương trình hyperbolic, ta sử dụng các kĩ thuật thông dụng để tìm nghiệm: phương pháp tách biến, phương pháp biểu diễn thành chuỗi Fourier, nguyên lí Duhamel (đối với phương trình không thuần nhất và đối với các điều kiện biên không thuần nhất).

Để đơn giản, ta xét bài toán trong trường hợp 1-chiều. Biểu thức nghiệm cơ bản của phương trình có dạng

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \quad t > 0, -\infty < x < \infty.$$

Đối với bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

ta có công thức Poisson tìm nghiệm của bài toán

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} g(\xi) d\xi.$$

Đối với bài toán biên-ban đầu (đơn giản, thuần nhất)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, (*) \end{cases}$$

điều kiện biên Dirichlet $(*)$ có thể được thay bởi các điều kiện biên khác:

- Điều kiện Neumann: $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$,
- Điều kiện hỗn hợp: $u_x(0,t) = 0, u(L,t) = 0$, v.v.

ta áp dụng phương pháp tách biến và sử dụng các kĩ thuật đã biết của phương trình hyperbolic để viết được nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-a^2\omega_k^2 t}\varphi(\omega_k x)$$

với (ω_k, φ) được xác định tùy theo các điều kiện biên của bài toán. Chú ý rằng đôi khi k được xuất phát từ 0. Ví dụ

- Điều kiện Dirichlet: $\varphi(z) = \sin(z)$, $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$.
- Điều kiện Neumann: $\varphi(z) = \cos(z)$, $\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2L}$.
- Điều kiện hỗn hợp: tùy theo dạng thức của điều kiện.

Việc xác định a_k được thực hiện thông qua việc biểu diễn hàm ban đầu $g(x)$ theo chuỗi Fourier tương ứng với nghiệm, tức là

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi(\omega_k x), \quad g_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\varphi(\omega_k x)dx.$$

Trong trường hợp không thuần nhất, ta sử dụng nguyên lí Duhamel để đưa bài toán về các dạng đơn giản. Ví dụ trường hợp bài toán biên-ban đầu không thuần nhất,

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in V_T, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{IBVP-f}$$

ta dựa vào dạng của điều kiện cho trên biên và sử dụng phương pháp tách biến để tìm nghiệm thích hợp. Ví dụ như trong bài toán (IBVP-f), ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Ở đây ta sẽ xác định $T_k(t)$ từ việc thay biểu thức nghiệm u vào phương trình và biểu diễn f thành chuỗi Fourier theo hệ cơ sở tương ứng để nhận được một hệ các phương trình vi phân thường theo t, với các điều kiện tương ứng. Cần chú ý rằng nghiệm của phương trình vi phân sẽ được tìm theo phương pháp biến thiên hằng số, có dạng

$$T_k(t) = T_k(0)e^{-a^2\omega_k^2 t} + \int_0^t e^{-a^2\omega_k^2(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau,$$

với $T_k(0)$ được tìm từ điều kiện ban đầu của bài toán. Chú ý rằng việc xác định hệ số $T_k(t)$ trong thực hành phụ thuộc nhiều vào dạng thức của phương trình. Việc giải bài toán kiểu này đòi hỏi khá nhiều công sức và không phải lúc nào cũng được một biểu thức nghiệm "gọn gàng".

4.2. Bài tập

1. Giải bài toán

(a) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \cos 3x. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \sin 2x \cos 4x. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_t = 16u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \cos^2 4x. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2+2x+2}. \end{cases}$

2. Tìm nghiệm không giới nội của bài toán

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x^2 - 2x + 3. \end{cases}$$

3. Giải bài toán biên ban đầu

(a) $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin x(1 - 4\cos x), & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$

(b) $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x < l/2, \\ 1 - x & l/2 < x < l, \end{cases} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x,0) = x^2 - 1 \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = e^x \sin \pi x \\ u(0,t) = u(1,t) = t, & t > 0. \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2\sin x \sin t, & t > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0. \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < L, \\ u(x,0) = x + 3\sin(2\pi/L), \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = L, & t > 0. \end{cases}$$

(g) $$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x + \sin(3\pi/2) - 1 \\ u(0,t) = -1, u_x(1,t) = 1, & t > 0. \end{cases}$$

(h) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 4 - 2\pi + 2x + 7\cos(3x/2) \\ u_x(0,t) = 2, u(\pi,t) = 4, & t > 0. \end{cases}$$

4.3. Lời giải

1. Giải bài toán Cauchy bằng công thức Poisson, chú ý rằng các phương trình đều có dạng chính tắc.

(a) Điều kiện Cauchy $u(x,0) = \cos 3x$ suy ra

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(\xi - x)^2}{4t} \right\} \cos 3x dx.$$

Thực hiện phép đổi biến $z = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}$, sử dụng đẳng thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2} \cos \beta z dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

và chú ý rằng tích phân $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2} \sin \beta z dz = 0$, ta suy ra nghiệm của bài toán là

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cos(3x + 6\sqrt{t}z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} (\cos 3x \cos(6\sqrt{t}z) - \sin 3x \sin(6\sqrt{t}z)) dz \\ &= \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \cos(6\sqrt{t}z) dz \\ &= \cos 3x e^{-9t}. \end{aligned}$$

Thử lại thấy đây chính là nghiệm của bài toán cần tìm.

(b) $u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-324t} \sin 6x - e^{-36t} \sin 2x)$.

[Lời giải của Nguyễn Phi Minh, sinh viên lớp K56SP, 2013-2014]

Áp dụng công thức Poisson thì ta được:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{6\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(\xi-x)^2}{36t}} \sin(2\xi) \cos(4\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{6\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-(\xi-x)^2}{36t}} \frac{1}{2} [\sin(6\xi) - \sin(2\xi)] d\xi$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\xi-x)^2}{36t}} \sin(6\xi) d(\xi) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\xi-x)^2}{36t}} \sin(2\xi) d(\xi) \right]$$

Đặt:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\xi-x)^2}{36t}} \sin(6\xi) d(\xi)$$

và,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\xi-x)^2}{36t}} \sin(2\xi) d(\xi)$$

Sau đó phải tính :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\xi-x)^2}{36t}} \sin(6\xi) d\xi$$

Đặt $\xi - x = \lambda \Longrightarrow d\xi = d\lambda$.

Do đó ta có:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \sin(6\lambda + 6x) d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} [\sin(6\lambda)\cos(6x) + \cos(6\lambda)\sin(6x)] d\lambda$$

Áp dụng $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \sin(6\lambda) d\lambda = 0$ vì hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ.

Vậy:

$$I_1 = \sin(6x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \cos(6\lambda) d\lambda$$

$$= 2\sin(6x) \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \cos(6\lambda) d\lambda$$

Từ $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha)^2(\lambda)^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{\frac{-(\beta)^2}{4(\alpha)^2}}$

Vậy

$$I_1 = 6\sqrt{\pi t} \sin(6x) e^{-324t}.$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\xi - x)^2}{36t}} \sin(2\xi) d(\xi)$$

Đặt $\xi - x = \lambda \Longrightarrow d\xi = d\lambda$

Do đó:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \sin(2\lambda + 2x) d(\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} (\sin(2\lambda)\cos(2x) + \cos(2\lambda)\sin(2x)) d\lambda$$

$$= \sin(2x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \cos(2\lambda) d\lambda$$

vì $\cos(2x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \sin(2\lambda) d\lambda = 0$

$$\Longrightarrow I_2 = 2\sin(2x) \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-(\lambda)^2}{36t}} \cos(2\lambda) d\lambda$$

Vì $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha)^2(\lambda)^2} \cos(\beta\lambda) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{\frac{-(\beta)^2}{4(\alpha)^2}}$

nên,

$$I_2 = 2.\sin(2x).\frac{\sqrt{\pi}}{2}(6\sqrt{t})e^{\frac{-4}{4}36t}$$

$$= \sin(2x)6\sqrt{t\pi}e^{-36t}$$

Vậy,

$$u(x,t) = \frac{1}{12\sqrt{t\pi}}\left[6\sqrt{\pi t}\sin(6x)e^{-324t} - \sin(2x)6\sqrt{t\pi}e^{-36t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(6x)e^{-324t} - \sin(2x)e^{-36t}]$$

(c) $u(x,t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1024t}\cos 8x)$.

(d) $u(x,t) = (1+16t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{1+16t}\right\}$. Ta có

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2.2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\xi-x)^2}{16t} - \xi^2\right\}d\xi \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Bigg\{-\frac{1+16t}{16t}\Bigg(\xi^2 - 2\xi\frac{x}{1+16t} + \frac{x^2}{(1+16t)^2} \\
&\qquad - \frac{x^2}{16t(1+16t)} + \frac{x^2}{16t}\Bigg)\Bigg\}d\xi \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1+16t}{16t}\left(\xi - \frac{x}{1+16t}\right)^2\right\}d\xi e^{-\frac{x^2}{1+16t}}
\end{aligned}$$

Sử dụng tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha)^2(\lambda)^2}\cos(\beta\lambda)d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{\frac{-(\beta)^2}{4(\alpha)^2}}$ ta suy ra kết quả

$$u(x,t) = \frac{1}{(1+16t)^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{1+16t}}.$$

(e) $u(x,t) = (1+36t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{-x^2+2x+2+108t}{1+36t}\right\}$. Bài tập này làm tương tự bài trước. Chú ý việc thêm bớt để đưa tất cả các vị trí có ξ vào một bình phương của một tổng, từ đó áp dụng được công thức Gauss.

2. Ta cần xây dựng nghiệm không giới nội của bài toán

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & t \geqslant 0,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

(Trong bài này, $a = 1$, $n = 1$, và hàm $f(x) = x^2 - 2x + 3$.)

Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm của bài toán trên có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{ka^2}}{k!} \Delta^k f(x),$$

trong đó $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$, $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Việc chứng minh điều khẳng định này được thực hiện bằng cách thử tực tiếp nghiệm vào phương trình đầu; điều kiện Cauchy được kiểm tra khi cho $t \to 0$. Khi đó nghiệm của bài toán của chúng ta sẽ là

$$u(x,t) = x^2 - 2x + 3 + 2t.$$

3. Giải bài toán biên - ban đầu bằng phương pháp tách biến và biểu diễn thành chuỗi Fourier.

(a) Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng $u(x,t) = X(x)T(t)$. Thay vào phương trình và điều kiện biên, ta dẫn tới bài toán của phương trình Sturm-Louville

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Ta dễ dàng tìm được giá trị riêng $\lambda_k = k^2$, và nghiệm $X_k(x) = \sin kx$. Vậy nghiệm cần tìm của bài toán sẽ là

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Để xác định c_k, ta thay nghiệm vào điều kiện Cauchy. Trong thực tế, ta nên phân tích điều kiện Cauchy theo hệ cơ sở đã biểu diễn nghiệm u. Ở đây ta có

$$u(x,0) = \sin x(1 - 4\cos x) = \sin x - 2\sin 2x,$$

nên ta dễ dàng kéo theo

$$c_1 = 1, c_2 = -2, c_k = 0,\ k = 3, 4, \ldots$$

Vậy, nghiệm cần tìm của bài toán là

$$u(x,t) = e^{-t} \sin x - 2e^{-4t} \sin 2x.$$

(b) Tương tự bài trên, ta tìm được giá trị riêng và vectơ riêng

$$\lambda_k = \omega_k^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \omega_k x.$$

Ở đây ta tìm được c_k là hệ số của biểu diễn khai triển hàm

$$f(x) = \begin{cases} x,\ 0x < l/2, \\ l - x,\ l/2 < x < l \end{cases}$$

thành chuỗi Fourier theo hệ cơ sở $\sin \omega_k x$. Ta tìm được

$$c_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{l/2} x \sin \omega_k x dx + \int_{l/2}^{l} (l - x) \sin \omega_k x dx\right) = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2},\ k = 0, 1, \ldots.$$

Vậy nghiệm cần tìm sẽ có dạng

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)xe^{-(2k-1)^2 t}.$$

(c) Câu này làm tương tự câu trước, nhưng chú ý rằng điều kiện biên thay đổi dẫn tới bài toán Sturm-Liouville thay đổi

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X'(0) = X(l) = 0.$$

Điều này kéo theo $\omega_k = \frac{1}{2} + k$ và $X_k(x) = \cos \omega_k x$.

(d) Từ điều kiện biên, ta sẽ tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tách biến

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \omega_k x,\ \omega_k = k\pi.$$

Thay biểu thức nghiệm vào phương trình đầu và biểu diễn hàm $f(x,t) = x + 2t$ theo chuỗi Fourier

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \omega_k x,\ \omega_k = k\pi,$$

với

$$f_k(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 (x + 2t)\sin k\pi x dx = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi^2} + \frac{2t}{k\pi^2}(1 - (-1)^k),$$

ta được hệ phương trình

$$T_k' = (k^2\pi^2 - 2k\pi)T_k + f_k.$$

Từ đây, giải phương trình vi phân thường tuyến tính cấp 1 ta suy ra

$$T_k(t) = T_k(0)e^{-\alpha_k t} + \int_0^t f_k(\tau)e^{-\alpha_k(t-\tau)}d\tau,$$

với $\alpha_k = k^2\pi^2 - 2k\pi$, và $T_k(0)$ được tìm từ hệ thức của điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \omega_k x = e^x \sin \pi x,$$

Việc tìm này là phức tạp vì vế phải của điều kiện đầu là hàm $e^x \sin \pi x$.

(e) Ta xét phép đặt $w(x,t) = x + t - L$, khi đó, bài toán sẽ trở thành: Tìm $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, thoả mãn

$$v_t = v_{xx} - 1 + x, v(x,0) =)x+1)(L-x),\ v_x(0,t) = v(L,t) = 0.$$

Ta giải được

$$\lambda_k = \omega_k^2 = \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right]^2,$$

và

$$X_k(x) = \cos\omega_k x.$$

Ta tìm được

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\cos\omega_k x,$$

với $v_k(t)$ thoả mãn phương trình vi phân

$$v_k' = \omega_k^2 v_k + s_k,$$

trong đó s_k là các hệ số của khai triển Fourier của hàm $-1+x$ theo hệ cơ sở $\cos\omega_k x$, tức là

$$s_k = \frac{\int_0^L(-1+x)\cos\omega_k x dx}{\int_0^L \cos^2\omega_k x dx} = ...$$

Ta tìm được

$$v_k(t) = v_k(0)e^{-\omega_k^2 t} + s_k\int_0^t e^{-\omega_k^2(t-\tau)}d\tau,$$

và

$$v_k(0) = \frac{\int_0^L(1+x)(L-x)\cos\omega_k x dx}{\int_0^L \cos^2\omega_k x dx} = ...$$

Các tính toán sẽ do sinh viên tự hoàn thiện.

(f) Các bài tiếp theo là tương tự. Có thể tham khảo cuốn bài tập của B.Neta cho các bài tập này. Riêng câu cuối cùng làm tương tự bài tập **3d**.

Chương 5
Bài toán biên của phương trình Laplace

5.1. Tóm tắt lí thuyết

Trong chương này, chúng ta tập trung giải quyết các bài toán biên của phương trình Laplace $\Delta u = 0$ trong trường hợp 2 chiều $u = u(x, y)$. Ở đây miền xác định của bài toán sẽ có hình dáng đặc biệt, gồm hình chữ nhật, hình tròn, hình khuyên, hình quạt, với các điều kiện biên dạng Diriclet, Neumann, Robin và hỗn hợp. Chúng ta cũng quan tâm một chút đến hàm điều hòa (định nghĩa, tính chất) và nguyên lí cực đại (phát biểu và ứng dụng vào chứng mình tính duy nhất nghiệm). Việc tìm nghiệm của các bài toán được thực hiện bằng phương pháp tách biến trong hệ tọa độ tương ứng. Một số lưu ý

- Toán tử Laplace bất biến đối với phép dịch chuyển và phép quay.

- Phép đổi biến từ hệ tọa độ Đề các sang hệ tọa độ cực $(x, y) \to (r, \theta)$ chuyển phương trình Laplace về dạng

$$r^2 v_{rr} r v_r + v_{\theta\theta} = 0.$$

- Trường hợp phương trình Laplce có vế phải không thuần nhất, ta có phương trình Poisson

$$\Delta u = f(x, y).$$

Khi đó ta chuyển phương trình Poisson về phương trình Laplace bằng cách tìm một hàm $u^*(x, y)$ sao cho $\Delta u^* = f(x, y)$, và đặt $v = u - u^*$. Rõ ràng v thỏa mãn $\Delta v = 0$. Khi áp vào các bài toán biên tương ứng, ta cần chú ý điều kiên biên theo v sẽ là $u - u^*$ lấy giá trị trên biên.

Việc tìm nghiệm của bài toán được thực hiện bằng phương pháp tách biến. Tương ứng với các hệ tọa độ Đề các hay tọa độ cực, nghiệm tổng quát sẽ được viết dưới dạng

$$v(r, \theta) = C_0 + C_1 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) + r^{-k}(c_k \cos(k\theta) + d_k \sin(k\theta)),$$

hoặc

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cosh(\omega_k y) + b_k \sin(\omega_k y))\varphi(\omega_k x),$$

trong đó ω_k và φ được xác định từ bài toán Sturm-Liouville tương ứng với điều kiện biên. Bên cạnh phương pháp tách biến, người ta còn xây dựng nghiệm của bài toán biên của phương trình Laplace bằng hàm Green, với miền xác định đặc biệt (hình tròn, hình dải (strip) hoặc nửa mặt phẳng). Đối với miền Ω là mặt tròn tâm O bán kính R, ta có công thức Poisson cho bài toán biên Dirichlet trong của phương trình Laplace

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\psi - \theta)} g(\theta)d\theta,$$

với $g(\theta)$ là giá trị của ẩn hàm cho trên biên. Đối với bài toán biên Dirichlet ngoài, nghiệm tìm được theo công thức Poisson sẽ là

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - R^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\psi - \theta)} g(\theta)d\theta.$$

5.2. Bài tập thực hành

1. Hãy

(a) Thử trực tiếp rằng hàm $u(x,y) = -\ln r$, $r \neq 0$ là nghiệm phương trình Laplace $\Delta u = 0$.

(b) Tìm biểu thức của toán tử Laplace trong

i. hệ toạ độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, (trường hợp trên mặt phẳng),

ii. hệ toạ độ trụ $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, (trường hợp trong không gian),

iii. hệ toạ độ cầu $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, (trường hợp trong không gian),

2. Chứng minh rằng nghiệm phương trình

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu = 0, \quad c < 0, \tag{5.2.1}$$

không đạt cực đại dương hoặc cực tiểu âm tại một điểm trong của miền. Từ đó suy ra tính duy nhất nghiệm của bài toán Dirichlet trong miền giới nội Ω với biên $\partial\Omega$

$$\begin{cases} \Delta u + au_x + bu_y + cu = 0, \quad c < 0, \\ u|_{\partial\Omega} = f(x,y). \end{cases} \tag{5.2.2}$$

3. Tìm phép thế hàm $v(x,y) = \phi(x,y)u(x,y)$, đưa phương trình (5.2.1) về phương trình $\Delta v + \lambda v = 0$.

4. Ký hiệu $H(\Omega)$ là tập hợp các hàm điều hoà trong $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Chứng minh rằng

(a) $H(\Omega)$ là một không gian vectơ, mọi tổ hợp tuyến tính của hàm điều hoà cũng là hàm điều hoà.

(b) $H(\Omega)$ ổn định với phép lấy đạo hàm: đạo hàm riêng u_x và u_y của hàm điều hoà u cũng là các hàm điều hoà.

(c) Nếu $u, v \in H(\Omega)$ thì $uv \in H(\Omega) \iff \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0$.

5. Giả sử $u(x, y)$ là hàm điều hoà. Chứng minh rằng các hàm sau cũng là hàm điều hoà.

(a) $u(x + h)$, $h = (h_1, h_2)$ là một vectơ bất kỳ.

(b) $u(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

(c) $u(Cx)$, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ là một ma trận trực giao bất kỳ.

6. Giải các bài toán Dirichlet trên các hình tương ứng.

(a) $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = 3 - 4y^2 - 4xy^2, \end{cases}$ với Ω là mặt tròn tâm O bán kính 2, Γ là biên của Ω.

(b) $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = 2 - y + y^3 - x^2y + x^2, \end{cases}$ với Ω là phần ngoài của mặt tròn tâm O bán kính 2, Γ là biên của Ω.

(c) $\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_{r=1} = x - y, \\ u|_{r=2} = \ln 2 - \frac{1}{4}y + x, \end{cases}$ với Ω là hình vành khăn $1 < r < 2$.

7. Tìm nghiệm của các bài toán biên của phương trình Laplace $\Delta u = 0$ trong miền Ω là hình tròn $\Omega = B(0, a)$ trong hệ tọa độ cực. Để thuận tiện, ta vẫn giữ kí hiệu Laplacian của hàm u như trong hệ tọa độ Đề các.

(a) $a = 2$, $u(a, \theta) = \cos^3\theta + \sin 2\theta$.

(b) $a = 3$, $u(a, \theta) = \theta^2 + 2\theta$.

(c) $a = 2$, $(u + \frac{1}{2}u_r)(a, \theta) = \cos^2\theta \sin\theta + 2\sin^3\theta$.

8. Tìm nghiệm của bài toán biên của phương trình Laplace $\Delta u = 0$ trong miền Ω là vành khăn $a < r < b$, với điều kiện biên tương ứng sau

(a) $a = 1, b = 2$, $u(a, \theta) = \sin\theta$, $u(b, \theta) = \cos 2\theta \sin\theta$.

(b) $a = 1, b = 3$, $u(a, \theta) = \cos^2\theta$, $(u + u_r)(b, \theta) = \sin\theta$.

(c) $a = 1, b = 2$, $(u + u_r)(a, \theta) = \cos 2\theta \sin\theta$, $u(b, \theta) = \cos\theta$

9. Tìm nghiệm của bài toán biên của phương trình Laplace trong miền hình quạt $\{0 < r < a, 0 < \theta < \alpha\}$ với các điều kiện tương ứng sau

(a) $a = 1$, $\alpha = \pi/2$, $u(a, \theta) = \cos^2\theta$, $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$.

(b) $a = 2$, $\alpha = \pi/4$, $u(a, \theta) = \sin^3\theta + 3\cos\theta$, $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$.

(c) $a = 1$, $\alpha = \pi/3$, $u(a, \theta) = 2\theta$, $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$.

(d) $a = 2$, $\alpha = \pi/3$, $u(a, \theta) = \theta^2$, $u(r, 0) = u_\theta(r, \alpha) = 0$.

10. Tìm nghiệm của bài toán biên ngoài với Ω là miền ngoài của hình tròn tâm O bán kính a, với điều kiện trên biên tương ứng

(a) $a = 2$, $u(a, \theta) = \ln 2 + 4\cos 3\theta$.

(b) $a = 1$, $u(a, \theta) = \theta + \sin^2\theta + 2\cos 3\theta$.

11. (*) Dùng công thức Poisson tính trực tiếp nghiệm của bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{trong } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \cos\theta, \end{cases}$$

với mặt tròn Ω bán kính R.

12. Cho $B_R(0)$ là hình tròn tâm 0 bán kính R. Chuyển phương trình Laplace sang toạ độ cực (ρ, φ). Tìm nghiệm của bài toán Dirichlet với các điều kiện biên được cho như sau:

(a) $u|_{\rho=R} = 2$,

(b) $u|_{\rho=R} = a\cos\varphi$,

(c) $u|_{\rho=R} = 1 + 2\sin\varphi$,

(d) $u|_{\rho=R} = a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi, a, b = const.$

13. Giải bài toán Dirichlet trong hình chữ nhật $\Delta u = 0$, $0 < x < L, 0 < y < H$, với các điều kiện biên tương ứng sau

(a) $L = 1, H = 2$, $u(x, 0) = u(x, 1) = \sin\frac{5\pi x}{2}$, $u(0, y) = u(2, y) = 0$.

(b) $L = a, H = b$, $u(x, 0) = B\sin\frac{\pi x}{a}$, $u(x, b) = 0$, $u(0, y) = A\sin\frac{\pi y}{b}$, $u(a, y) = 0$.

(c) $u(0, y) = u(L, y) = 0$, $u(x, 0) - u_y(x, 0) = 0$, $u(x, H) = f(x)$.

(d) $u_x(0, y) = u_x(L, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, H) = f(x)$.

14. Tìm nghiệm của bài toán Neumman $\Delta u = 0$ trong hình chữ nhật $0 < x < L$, $0 < y < H$, với các điều kiện trên biên tương ứng

(a) $L = H = \pi$, $u_x(0, y) = u_y(\pi, y) = u_y(x, \pi) = 0$, $u_y(x, 0) = \cos x - 2\cos^2 x + 1$, với điều kiện tương thích $u(0, 0) = 0$.

(b) $u_x(0, y) = u_x(L, y) = u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, H) = g(x)$, với điều kiện tương thích $\displaystyle\int_0^L g(x)dx = 0$. Hãy giải thích lí do phải có điều kiện tương thích này.

15. (*). Xét bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{trong } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Nếu tồn tại số λ sao cho bài toán trên có nghiệm không tầm thường $u \neq 0$, thì ta gọi λ là *giá trị riêng*, nghiệm u tương ứng được gọi là *hàm riêng* của toán tử Laplace trong Ω. Hãy tìm giá trị riêng và hàm riêng của toán tử Laplace trong các trường hợp sau.

(a) $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$,

(b) $\Omega = \{(x.y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

16. Chứng minh rằng với các hệ số A_n, B_n được cho trong (**??**), (**??**), (**??**), nghiệm của bài toán Dirichlet trong (**??**)- (**??**) được cho theo công thức

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

(Gợi ý: Chứng minh rằng chuỗi trên là hội tụ và có tổng là một hàm điều hòa liên tục trên mặt tròn kín $r \leq 1$. Việc chứng minh điều kiện biên chỉ là điều đơn giản).

17. Khi vế phải của phương trình elliptic không thuần nhất, ta có phương trình Poisson $\Delta u = f(x, y)$. Để giải bài toán biên của phương trình loại này, ta tìm cách đặt ẩn phụ. Trước tiên tìm hàm $u^*(x, y)$ thích hợp sao cho $\Delta u^* = f(x, y)$, sau đó đặt $v = u - u^*$, thì v là nghiệm của phương trình Laplace. Điều kiện biên tương ứng khi đó sẽ là $v|_\Gamma = (u - u^*)|_\Gamma$ đối với bài toán biên Dirichlet, và tương tự với các loại điều kiện khác. Đây cũng tương tự như phương pháp Duhamel mà ta đã làm quen ở các chương trước. Hãy giải các bài toán biên của phương trình Poisson sau (kí hiệu Γ là biên của miền Ω).

(a) $\begin{cases} \Delta u = 2x, & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = x - x^3 + 2xy^2, \end{cases}$ với Ω là mặt tròn đơn vị.

(b) $\begin{cases} \Delta u = 12(x^2 - y^2), & \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = xy, \end{cases}$ với Ω là mặt tròn tâm O bán kính 2.

(c) $\begin{cases} \Delta u = xy, \quad \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = x^2 + 2xy^3, \end{cases}$ với Ω là miền ngoài của mặt tròn tâm O bán kính 3.

(d) $\begin{cases} \Delta u = xy(x^2 - y^2), \quad \text{trong } \Omega, \\ u|_\Gamma = x^2 + 2xy^3, \end{cases}$ với Ω là miền ngoài của mặt tròn đơn vị.

5.3. Giải một số bài tập

1. *Giải bài tập 6a.* Giải bài toán Dirichlet

$$\begin{cases} (a) \quad \Delta u = 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ (b) \quad u|_\Gamma = 3 - 4y^2 - 4xy^2, \end{cases} \tag{5.3.4}$$

với Ω là mặt trong tâm 0 bán kính 2, Γ là biên của Ω.

Trong hệ toạ độ cực $r0\theta$, phương trình (5.3.4)(a) có dạng

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

còn điều kiện biên (5.3.4)(b) trở thành

$$u|_\Gamma = 3 - 4r^2\sin^2\theta - 4r^3\cos\theta\sin^2\theta.$$

Sử dụng phương pháp tách biến tìm nghiệm của bài toán biên Dirichlet trong trên mặt tròn, ta có công thức nghiệm của bài toán biên có dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta).$$

Từ điều kiện biên ta có

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= 3 - 4r^2\sin^2\theta - 4r^3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= 3 - 16\sin^2\theta - 32\sin^2\theta\cos\theta \\ &= 3 - 8(1-\cos 2\theta) - 16\cos\theta(1-\cos 2\theta) \\ &= -5 + 8\cos 2\theta - 16\cos\theta + 16\cos\theta\cos 2\theta \\ &= -5 + 8\cos 2\theta - 16\cos\theta + 8(\cos\theta + \cos 3\theta) \\ &= 8\cos 3\theta + 8\cos 2\theta - 8\cos\theta - 5. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức xác định hệ số của khai triển Fourier của nghiệm bài toán (D) và kết quả

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta = \begin{cases} 0 \quad m \neq n, \\ 1 \quad m = n, \end{cases}$$

ta có

$$A_0 = -5,\ A_1 = -8,\ A_2 = 8,\ A_3 = 8,\ A_n = 0, \quad \forall n > 3.$$

Vậy nghiệm cần tìm của bài toán là

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= 8r^3\cos 3\theta + 8r^2\cos 2\theta - 8r\cos\theta - 5 \\ &= 8r^3(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 8r^2(2\cos^2\theta - 1) - 8r\cos\theta - 5 \\ &= 32r^3\cos^3\theta + 16r^2\cos^2\theta - 24r^3\cos\theta - 8r\cos\theta - 8r^2 - 5. \end{aligned}$$

Thay (r,θ) bởi (x,y) ta được nghiệm của phương trình

$$u(x,y) = 8x^3 + 8x^2 - 8y^2 - 8x(3x^2 + 3y^2 + 1) - 5.$$

2. *Giải bài tập 17a.* Đặt $v = u - x^3/3$. Khi đó bài toán (D) với u sẽ trở thành

$$\begin{cases} (a) & \Delta v = 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ (b) & v|_\Gamma = x - \frac{4}{3}x^3 + 2xy^2. \end{cases} \tag{5.3.5}$$

3. *Giải bài tập 6b.* Đưa bài toán đang xét về hệ toạ độ cực rồi chuyển về bài toán Dirichlet trong bằng cách đặt $u(r,\theta) = r'v(r',\theta)$, với $rr' = 4$. Khi đó bài toán (D) với u sẽ trở thành

$$\begin{cases} (a) & \Delta v = 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ (b) & v|_\Gamma = 1 + \frac{1}{2}(y^3 - x^2y + x^2 - y). \end{cases} \tag{5.3.6}$$

4. *Giải bài tập 6c.* Sử dụng phương pháp Fourier để tìm nghiệm của phương trình Laplace dưới dạng

$$u(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin n\theta.$$

Thay các điều kiện biên tương ứng ta được

$$\mathcal{C}_1 = 0,\ \mathcal{C}_2 = 1,$$

$$a_1 = 1,\ a_n = 0,\ n = 2,3,\dots,\ b_n = 0,\ n = 1,2,\dots,$$

$$d_1 = -1,\ d_n = 0,\ n = 2,3,\dots,\ c_n = 0,\ n = 1,2,\dots.$$

Vậy ta được nghiệm của bài toán là

$$u(r,\theta) = \ln r + r\cos\theta - \frac{1}{r}\sin\theta,$$

hay biểu diễn theo (x,y)

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + x - \frac{y}{x^2+y^2}.$$

V., VI. Sử dụng các công thức đã biết và phương pháp Fourier nêu trong bài trên.