Bài tập lần 19

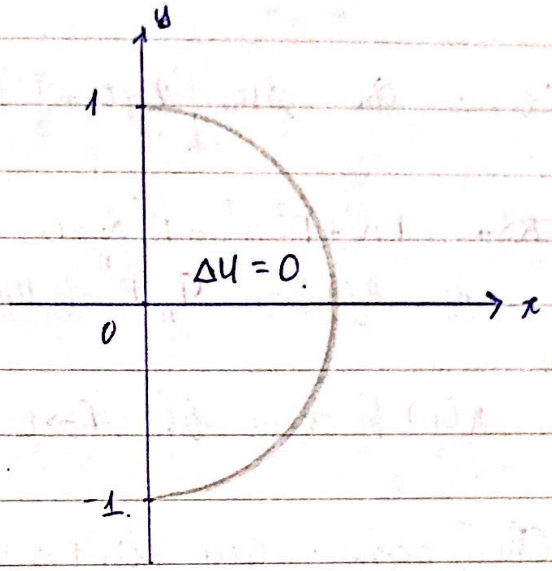
Đề thi GK K64TH

Đề 1 - Câu 3b:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , x > 0, \; x^2 + y^2 < 1.$$

$$u(0, y) = 0 \qquad -1 \le y \le 1.$$

$$u(x, y) = xy \quad \text{khi } x^2 + y^2 = 1, \; x \geq 0.$$



Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\to v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ Tìm bài toán

$$\frac{v_r}{r} + v_{rr} + \frac{v_{\theta\theta}}{r^2} = 0 \quad (1) \quad 0 < r < 1, \; -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

ĐK biên $v(r, -\frac{\pi}{2}) = v(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (2)$

$$v(1, \theta) = \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

$v(r, \theta)$ bị chặn khi $r \to 0^+ \quad (3)$

Ta xác định cơ sở của không gian nghiệm của bài toán $\{(1), (2), (3)\}$ gồm các phần tử có dạng $v(r, \theta) = R(r)\,\Phi(\theta)$

Từ (1) $\Rightarrow R''\Phi + \frac{R'\Phi}{r} + \frac{R\Phi''}{r^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{rR' + r^2R''}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \text{Const}$$

→ Bài toán S-T:

$$\begin{cases} \Phi'' + Const\ \Phi = 0 & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \Phi(-\frac{\pi}{2}) = \Phi(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\to Const\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\right)^2 = n^2$$

$$\Phi_n(\theta) = a_n \sin\left[n\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\to \cancel{rR'} + rR' + r^2R'' - n^2R = 0$$

$$\to R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}$$

Do $R(r)$ bị chặn khi $r \to 0^+ \to R_n(r) = a_n r^n$

→ Chuỗi nghiệm của $v(r,\theta)$ là

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin\left[n\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$v(1,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left[n\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left[2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-\pi\right] = -\frac{1}{2}\sin\left[2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Đồng nhất hệ số, Ta được $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_n = 0\ \forall n \neq 2$

$$\to v(r,\theta) = -\frac{r^2}{2}\sin\left[2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) = r^2\sin\theta\cos\theta = xy = u(x,y)$$

Thử lại: $u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$ (T/m)

$u(x,y) = xy$ Khi $x \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 1$

$\to u(x,y) = xy$ Khi $x^2+y^2 = 1$, $x \geq 0$ (T/m)

Sách Niksirat - Trang 195 - 198

6.24

$$\begin{cases} \Delta \phi = -\lambda \phi \\ \phi(0,y) = \phi_x(a,y) = 0 \\ \phi(x,0) = \phi_x(x,b) = 0 \end{cases}$$

Trong HCN $\Omega = (0,a) \times (0,b)$

~~- Từ đk đề bài, Ta có bài toán S-T~~ ~~$\{ X''$~~

- Ta xác định cơ sở của không gian nghiệm của bài toán gần các phải.

Có dạng $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$

- Từ điều kiện đề bài, ta có bài toán S-T

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda_1 X(x) = 0, & X(0) = X'(a) = 0 \\ Y''(y) - \lambda_2 Y(y) = 0, & Y(0) = Y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_{1n} = -\left(\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2, \quad X_{1n}(x) = \sin\left[\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\lambda_{2m} = -\left(\frac{\pi}{b}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)^2, \quad Y_m(y) = \sin\left[\frac{\pi}{b}\left(m+\frac{1}{2}\right)y\right], \quad m = 0,1,2,\ldots$$

$$\rightarrow \phi_{n,m}(x,y) = X_n(x)Y_m(y) = \sin\left[\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\sin\left[\frac{\pi}{b}\left(m+\frac{1}{2}\right)y\right], \quad n,m = 0,1,2,\ldots$$

→ Chuỗi nghiệm

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \sin\left[\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\sin\left[\frac{\pi}{b}\left(m+\frac{1}{2}\right)y\right]$$