

Bài tập về nhà lần 15

Câu 2, lý (a) Đề 4 - GK - K63TH

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = xy & -1 < x, y < 1 \\ u_x(-1, y) = u_x(1, y) = 0 & -1 \leq y \leq 1 \\ u_y(x, -1) = x + a, u_y(x, 1) = 1 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Bài toán có nghiệm khi điều kiện tương thích xảy ra.

$$\begin{aligned} \iint_{[-1,1]^2} \Delta u(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 [u_x(1, y) - u_x(-1, y)] dy + \int_{-1}^1 [u_y(x, 1) - u_y(x, -1)] dx \\ &= \int_{-1}^1 [u_y(x, 1) - u_y(x, -1)] dx \end{aligned}$$

$$(Do \quad u_x(1, y) = u_x(-1, y) = 0)$$

Vậy nếu $u(x, y)$ là nghiệm của bài toán thì ta có đẳng thức

$$\iint_{[-1,1]^2} \Delta u(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 (u_y(x, 1) - u_y(x, -1)) dx$$

$$\iint_{[-1,1]^2} xy dx dy = \int_{-1}^1 (1 - x - a) dx$$

$$\left(\int_{-1}^1 x dx \right) \left(\int_{-1}^1 y dy \right) = \left((1-a)x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$0 = 1 - a - \frac{1}{2} + 1 - a + \frac{1}{2}$$

$$0 = 2 - 2a$$

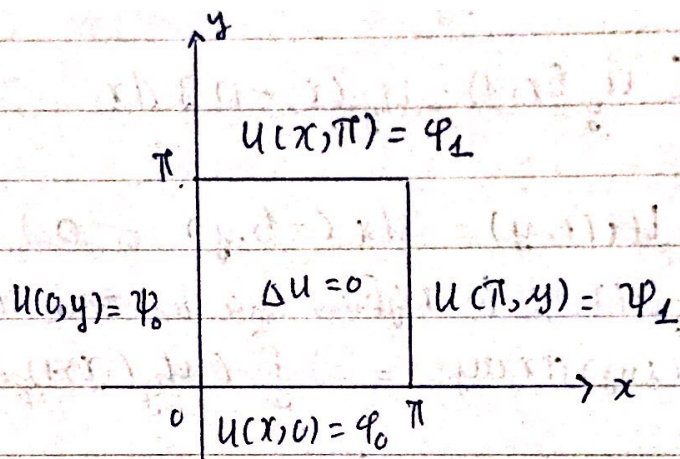
$$a = 1$$

→ Nếu $a \neq 1$ thì bài toán đang xét vô nghiệm

Sách Pinchover - Rubinstein, Trang 204 - 205

7.4

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 1 \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \end{cases}$$



Với điều kiện biên Dirichlet $\begin{cases} u(x,0) = u(x,\pi) = 1 \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \end{cases}$

Ta có điều kiện tương thích của bài toán là

$$\begin{cases} \psi_0(0) = \varphi_0(0) \\ \varphi_0(\pi) = \varphi_1(0) \\ \psi_1(0) = \varphi_0(\pi) \\ \psi_1(\pi) = \varphi_1(\pi) \end{cases}$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} \varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ \psi_0(y) = \psi_1(y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi_0(0) = 0, \varphi_0(0) = 1 \Rightarrow \psi_0(0) \neq \varphi_0(0)$$

\Rightarrow Điều kiện tương thích không xảy ra.

7.8

$$\Delta u = 0 \quad 0 < x, y < \pi$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(x, \pi) = \varphi_1(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, y) = \psi_0(y) = 0 \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$u(\pi, y) = \psi_1(y) = \sin y \quad 0 \leq y \leq \pi$$

Với điều kiện biên Dirichlet

$$\begin{cases} u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = 0 & 0 \leq y \leq \pi \\ u(\pi, y) = \sin y \end{cases}$$

Ta có điều kiện tương thích của bài toán là:

$$\psi_0(0) = \varphi_0(0)$$

$$\psi_0(\pi) = \varphi_1(0)$$

$$\psi_1(0) = \varphi_0(\pi)$$

$$\psi_1(\pi) = \varphi_1(\pi)$$

Mà

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ \psi_0(y) = 0, \quad \psi_1(y) = \sin y & 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_0(0) = \psi_0(0) = 0 \\ \psi_0(\pi) = \varphi_1(0) = 0 \\ \psi_1(0) = \sin 0 = 0 = \varphi_0(\pi) \\ \psi_1(\pi) = \sin \pi = 0 = \varphi_1(\pi) \end{cases}$$

→ Điều kiện tương thích xảy ra.