

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT3365**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **4**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$\begin{cases} xu_x(x, y) + u(x, y)u_y(x, y) = y & \text{khi } 0 < x < \infty, -\infty < y < \infty, \\ u(1, y) = 0 & \text{khi } -\infty < y < \infty. \end{cases}$$

- (a) Kiểm tra điều kiện hoành cho bài toán đang xét.
- (b) Giải bài toán đã cho. Kiểm tra lại nghiệm tìm được.

Câu 2. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t) & \text{khi } 0 < x < 3, t > 0, \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{khi } 0 \leq x \leq 3, \\ u_t(x, 0) = 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

- (a) Thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ 6 các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên. Vẽ miền phụ thuộc của điểm $(1, 1)$. Từ đó tính $u(1, 1)$.
- (b) Vẽ đồ thị $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 1, 2$.
- (c) Dùng phương pháp tách biến giải bài toán đã cho. So sánh giá trị $u(1, 1)$ với câu (a).

Câu 3. Giải bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 4u_{xx}(x, t) & \text{khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = e^x \chi_{[-1, 1]}(x) - \chi_{[4, 5]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

trong đó $\chi_{[a, b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$