

**Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng**

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **3**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 1**

Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **60 phút** (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1.** Xét phương trình sau:

$$x^2 u_{xx}(x, y) - 6xu_{xy}(x, y) + 9u_{yy}(x, y) + xu_x(x, y) = 4x^2 \text{ trong } x > 0.$$

- (a) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho.
- (b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- (c) Tìm nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn các điều kiện

$$u(x, 0) = \ln(x) + x^2 + x^3, u_y(x, 0) = x^3.$$

**Câu 2.** Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền sóng:

$$u_{tt}(x, t) = 9u_{xx}(x, t), x > 0, t > 0,$$

với điều kiện biên Neumann  $u_x(0, t) = 0$  và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x\chi_{[2,3]}(x), x \geq 0.$$

- (a) Xác định sóng tiến - sóng lùi.
- (b) Vẽ đồ thị nghiệm  $u(x, t)$  tại các thời điểm  $t = 1/4, 1/2, 1$ .
- (c) Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm.

**Câu 3.** Xét bài toán biên cho phương trình Laplace trong hình tròn:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, B = \{x^2 + y^2 < 4\}.$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u(x, y) = \begin{cases} xy & \text{khi } x^2 + y^2 = 4, xy > 0, \\ 0 & \text{khi } x^2 + y^2 = 4, xy \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Dùng công thức Poisson tính  $u(x, 0)$ .
- (b) Chứng minh rằng  $u(x, y) > \max\{xy, 0\}$  trong  $B$ .
- (c) Dùng phương pháp tách biến giải bài toán đang xét.