Bài tập lần 18

34, Sách Thầy Hợp

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{r=1} = x - y \\ u|_{r=2} = \ln 2 - \frac{1}{4} y + x \end{cases}$$

- Đổi biến $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\rightarrow v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ T/m bài toán

$$\frac{v_r}{r} + v_{rr} + \frac{v_{\theta\theta}}{r^2} = 0 \qquad 1 \le r < 2, \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

ĐK biên $v(1,\theta) = \cos\theta - \sin\theta$

$v(2,\theta) = \ln 2 - \frac{1}{2}\sin\theta + 2\cos\theta.$

Chuỗi nghiệm của $v(r,\theta)$ có dạng

$$v(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)]$$

$$v(1,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)]$$

$$= \cos\theta - \sin\theta$$

$\rightarrow$ Đồng nhất hệ số, Ta được

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + c_1 = 1 \\ b_1 + d_1 = -1 \\ a_n + c_n = 0 \quad \forall n \ne 1 \\ b_n + d_n = 0 \quad \forall n \ne 1 \end{cases}$$

$$v(2,\theta) = a_0 + b_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} [c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)]$$

$$= \ln 2 - \cancel{\tfrac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin\theta + 2\cos\theta.$$

-> Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ 2a_1 + \dfrac{c_1}{2} = 2 \\ 2b_1 + \dfrac{d_1}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ 2^n a_n + 2^{-n} c_n = 0 \ \forall n \neq 1 \\ 2^n b_n + 2^{-n} d_n = 0 \ \forall n \neq 1 \end{cases}$$

Từ $\begin{cases} a_1 + c_1 = 1 \\ 2a_1 + \dfrac{c_1}{2} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$

Từ $\begin{cases} b_1 + d_1 = -1 \\ 2b_1 + \dfrac{d_1}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} b_1 = 0 \\ d_1 = -1 \end{cases}$

Từ $\begin{cases} a_n + c_n = 0 \\ 2^n a_n + 2^{-n} c_n = 0 \end{cases} \forall n \neq 1 \to a_n = c_n = 0 \ \forall n \neq 1$

Từ $\begin{cases} b_n + d_n = 0 \\ 2^n b_n + 2^{-n} d_n = 0 \end{cases} \forall n \neq 1 \to b_n = d_n = 0 \ \forall n \neq 1$

Tóm lại. $a_0 = 0$, $b_0 = 1$

$a_1 = 1$, $b_1 = 0$

$c_1 = 0$, $d_1 = -1$

$a_n, b_n, c_n, d_n = 0 \ \forall n \neq \{1, 0\}$

$\to v(r,\theta) = \ln r + r\cos\theta - r^{-1}\sin\theta = \ln r + r\cos\theta - \dfrac{\sin\theta}{r}$

$= \ln r + r\cos\theta - \dfrac{r\sin\theta}{r^2} = \ln\sqrt{x^2+y^2} + x - \dfrac{y}{x^2+y^2}.$

Thử lại

$$u_x = \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} + 1 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + 1 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_{xx} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y(x^2+y^2)^2 - 4y(y^2-x^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{x^2-y^2+2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4y^3+4x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$ (T/m)