

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **2**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 1**

Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **60 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xác phương trình sau:

$$x^2 u_{xx}(x, y) + 3xy u_{xy}(x, y) + \frac{5y^2}{2} u_{yy}(x, y) + xu_x(x, y) = 0 \text{ trong } B = \{(x-2)^2 + (y-2)^2 < 1\}.$$

(a) Xác định dạng và chuyển phương trình đang xét về dạng chính tắc.

(b) Giả sử v là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 trong B thỏa mãn:

$$x^2 v_{xx}(x, y) + 3xy v_{xy}(x, y) + \frac{5y^2}{2} v_{yy}(x, y) + xv_x(x, y) > 0 \text{ trong } B.$$

Chứng minh rằng v không đạt cực đại địa phương trong B .

(c) Giả sử u là nghiệm của phương trình đang xét và liên tục đến tận biên, có giá trị trên biên $u(x, y) = 1$ khi $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$. Chứng minh rằng $u(x, y) = 1$ trong B .

Câu 2. Một đoạn dây chiều dài π dao động xung quanh vị trí cân bằng với tốc độ lan truyền 2. Nếu đặt hệ trục tọa độ sao cho một đầu đoạn dây ở gốc còn đầu kia có tọa độ $x = \pi$ thì đầu tại gốc tự do còn đầu kia cố định. Sợi dây bắt đầu từ trạng thái nghỉ và trạng thái ban đầu $f(x) = \pi - x$.

(a) Thiết lập bài toán biên hỗn hợp cho hàm dao động $u(x, t)$ của đoạn dây.

(b) Xác định sóng tiến - sóng lùi. Vẽ đồ thị của hàm dao động $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = \pi/4, \pi/2, \pi$.

Câu 3. Xét bài toán biên Neumann cho phương trình Laplace ngoài quạt:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \text{ trong } Q = \{x^2 + y^2 > 1, x > 0, y > 0\}$$

với điều kiện biên $u_x(0, y) = u_y(x, 0) = 0$ khi $x > 1, y > 1$, và

$$\partial_\nu u(x, y) = x^4 - y^2 + a \text{ khi } x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0,$$

trong đó ν là pháp tuyến ngoài đơn vị trên phần cung tròn của biên của Q . Tìm a để bài toán đã cho có nghiệm. Khi đó hãy giải bài toán đã cho.