

**Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng**

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **2**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 2**

Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1.** Xác phương trình sau:

$$x^2 u_{xx}(x, y) - 3xy u_{xy}(x, y) + \frac{25y^2}{4} u_{yy}(x, y) + xu_x(x, y) + u_y(x, y) - 4u(x, y) = 0,$$

trong  $B = \{(x - 2)^2 + (y + 2)^2 < 1\}$ .

- (a) Xác định dạng và chuyển phương trình đang xét về dạng chính tắc.
- (b) Giả sử  $u$  là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 trong  $B$  thỏa mãn phương trình đang xét. Chứng minh rằng  $u$  không đạt cực đại dương địa phương trong  $B$ .
- (c) Giả sử  $u$  là nghiệm của phương trình đang xét và liên tục đến tận biên, có giá trị trên biên  $u(x, y) = x^2$  khi  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$ . Chứng minh rằng  $u(x, y) = x^2$  trong  $B$ .

**Câu 2.** Một đoạn dây chiều dài  $\pi$  dao động xung quanh vị trí cân bằng với tốc độ lan truyền 2. Nếu đặt hệ trục tọa độ sao cho một đầu đoạn dây ở gốc còn đầu kia có tọa độ  $x = \pi$  thì hai đầu cố định. Sợi dây bắt đầu từ trạng thái nghỉ và trạng thái ban đầu  $f(x) = x\chi_{[\pi/4, 3\pi/4]}(x)$ .

- (a) Thiết lập bài toán biên hỗn hợp cho hàm dao động  $u(x, t)$  của đoạn dây.
- (b) Xác định sóng tiến - sóng lùi. Vẽ đồ thị của hàm dao động  $u(x, t)$  tại các thời điểm  $t = \pi/8, \pi/4, \pi/2$ .

**Câu 3.** Xét bài toán biên Neumann cho phương trình Laplace ngoài quạt:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \text{ trong } Q = \{x^2 + y^2 > 1, x > 0, y < 0\}$$

với điều kiện biên  $u_x(0, y) = u_y(x, 0) = 0$  khi  $x > 1, y < -1$ , và

$$\partial_\nu u(x, y) = x^4 - y^2 + a \text{ khi } x^2 + y^2 = 1, x > 0, y < 0,$$

trong đó  $\nu$  là pháp tuyến ngoài đơn vị trên phần cung tròn của biên của  $Q$ . Tìm  $a$  để bài toán đã cho có nghiệm. Khi đó hãy giải bài toán đã cho.