KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC
BỘ MÔN GIẢI TÍCH

Bài giảng Phương trình đạo hàm riêng (MAT 2036)

Dư Đức Thắng

Hà Nội, ngày 16 tháng 4 năm 2020

Mục lục

Chương 1 Giới thiệu về phương trình đạo hàm riêng. Phương trình cấp 1 **1**

1.1. Một số khái niệm cơ bản 1

1.2. Một số phương trình đạo hàm riêng tiêu biểu 4

1.2.1. Phương trình tuyến tính 4

1.2.2. Các phương trình không tuyến tính 5

1.2.3. Các bài toán trong phương trình đạo hàm riêng 6

1.3. Phương trình cấp 1. Phương pháp đường đặc trưng 6

1.3.1. Các phương trình hệ số hằng số 7

1.3.2. Phương pháp đường đặc trưng 9

1.3.3. Bài toán Cauchy của phương trình không thuần nhất 12

1.3.4. Phương trình tuyến tính với hệ số biến thiên 15

1.3.5. Ý nghĩa vật lí 17

1.3.6. Phương trình tựa tuyến tính 19

1.4. Bài toán Sturm-Liouville 22

1.5. Tóm tắt lí thuyết và Bài tập: Phương trình cấp 1 24

1.5.1. Tóm tắt lí thuyết 24

1.5.2. Bài tập 24

Chương 2 Mở đầu về phương trình cấp hai **29**

2.1. Phân loại phương trình cấp hai 29

2.1.1. Trường hợp ẩn hàm là hàm hai biến 29

2.1.2. Trường hợp nhiều hơn hai biến số 37

2.2. Một số ví dụ cho các ứng dụng thực tiễn 39

2.2.1. Phương trình dao động của dây 39

2.2.2. Phương trình truyền nhiệt trong môi trường đẳng hướng 41

2.2.3. Phương trình Laplace 43

2.3. Tính đặt chỉnh của bài toán phương trình đạo hàm riêng 44

2.3.1. Bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh. Phản ví dụ của Hadamard . 44

2.3.2. Định lí Cauchy-Kovalevskaia 45

2.4. Bài tập: Phân loại phương trình cấp 2 46

Chương 3 Bài toán dây rung **51**
3.1. Mở đầu 51
3.2. Đặt bài toán 51
3.3. Tính đặt chỉnh của bài toán Cauchy 54
3.3.1. Công thức d'Alembert 54
3.3.2. Xác định nghiệm bằng phương pháp trực tiếp 55
3.3.3. Tính ổn định của nghiệm 56
3.4. Bài toán dây rung trên nửa trục 57
3.5. Bài toán dây rung với hai đầu cố định 58
3.6. Trường hợp ngoại lực khác không 60
3.7. Giải bài toán biên-ban đầu với vế phải khác không 61
3.8. Ý nghĩa vật lý 63
3.9. Một số chủ đề mở rộng 64
3.9.1. Nghiệm cơ bản của phương trình truyền sóng 1 chiều 64
3.9.2. Một số chủ đề liên quan tới phương trình truyền sóng 64
3.10. Bài tập chương 3 65

Chương 4 Bài toán truyền nhiệt 1 chiều. Phương trình parabolic **69**
4.1. Mở đầu 69
4.1.1. Thiết lập các điều kiện Cauchy và các điều kiện biên 69
4.1.2. Nguyên lí cực đại cực tiểu 71
4.1.3. Ứng dụng của nguyên lí cực đại cực tiểu 73
4.2. Giải bài toán Cauchy bằng phương pháp tách biến 74
4.3. Bài toán biên ban đầu thứ nhất 77
4.3.1. Bài toán thuần nhất 77
4.3.2. Trường hợp không thuần nhất 78
4.3.3. Trường hợp tổng quát. Nguyên lí Duhamel 80
4.4. Ý nghĩa vật lí và một số gợi ý nghiên cứu 81
4.4.1. Ý nghĩa vật lí 81
4.4.2. Một số mở rộng 81
4.5. Bài tập chương 4 81

Tài liệu tham khảo **83**

Chương 1
Giới thiệu về phương trình đạo hàm riêng. Phương trình cấp 1

Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số khái niệm cơ bản của các phương trình đạo hàm riêng, nghiệm của chúng và một số cách phân loại các phương trình. Chúng ta cũng làm quen với phương trình đạo hàm riêng cấp 1, phương pháp đường đặc trưng để tìm nghiệm tổng quát của chúng cũng như trong trường hợp cho trước điều kiện ở một thời điểm xác định.

1.1. Một số khái niệm cơ bản

Phương trình đạo hàm riêng là phương trình nêu lên mối quan hệ giữa ẩn hàm là một hàm nhiều biến, các biến độc lập và (một số hữu hạn) các đạo hàm riêng của nó. Ta sử dụng một số kí hiệu sau:

- **Biến độc lập:** thường được kí hiệu là $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Người ta cũng dùng biến độc lập kiểu $(x, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$. Khi đó biến t được gọi là biến thời gian, còn biến x được gọi là biến không gian. Trong khuôn khổ chương trình học này, chúng ta xét $n = 1, 2, 3$.

- **Ẩn hàm:** thường được kí hiệu là $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$. Trong trường hợp *hệ phương trình* đạo hàm riêng thì ta sử dụng kí hiệu $\mathcal{U}(x) = (u_1(x), \ldots, u_p(x)) \in \mathbb{R}^p$. Tuy nhiên, trong khuôn khổ chương trình học, chúng ta không đề cập tới vấn đề hệ phương trình này.

- **Đạo hàm riêng:** Xét $\alpha \in \mathbb{N}$ là số tự nhiên, và bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ sao cho $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. Ta kí hiệu

$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_k^{\alpha_k}},$$

gọi là đạo hàm riêng cấp α của ẩn hàm u.

Trong trường hợp tổng quát, véc tơ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, trong đó $\alpha_i = 0, 1, \ldots, k$ là các số tự nhiên, được gọi là *đa chỉ số*. Khái niệm này được sử dụng cho hệ phương trình đạo hàm riêng. Ta kí hiệu module của α là đại lượng $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$. Ta cũng sử dụng khái niệm đạo hàm riêng cấp α như vừa định nghĩa ở trên.

Với trường hợp $k = 1$, ta có

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

là đạo hàm riêng cấp 1 của ẩn hàm u. Tùy theo các bài toán khác nhau, ta còn viết Du là ∇u hoặc $\operatorname{grad} u$.

Để cho thuận tiện, ta sử dụng các kí hiệu sau

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y},\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

Ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1.1. Xét tập $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, số tự nhiên $m \in \mathbb{N}$. Xét ẩn hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$. [(1)] Một *Phương trình vi phân đạo hàm riêng* (gọi tắt là Phương trình đạo hàm riêng) **cấp** m là phương trình có dạng

$$F\left(x, u(x), Du, D^2u, \dots, D^m u\right) = 0. \tag{1.1.1}$$

Ở đây F là một hàm nhiều biến thể hiện mối liên hệ giữa ẩn hàm, các biến độc lập và các đạo hàm riêng của ẩn hàm, có cấp cao nhất là m. Trong trường hợp $u \in \mathbb{R}$, và biến $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta viết phương trình dưới dạng

$$F(x, y, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) = 0.$$

Ví dụ 1.1.1.

- Phương trình Laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

  là phương trình đạo hàm riêng cấp hai. Đây là phương trình mô tả phân bố thế vị trên một đĩa hai chiều (trong $\mathbb{R}^2$), cho thấy một thực tế là khi thời gian đủ dài, phân bố vật chất trong môi trường sẽ không thay đổi (trạng thái tĩnh - stationary).

- Phương trình dịch chuyển

$$u_t + f(x,t)u_x = g(x,t)$$

  là phương trình đạo hàm riêng cấp một. Phương trình này mô tả hiện tượng đối lưu *(advection)* một chiều, hay còn gọi là phương trình giao thông (transport equation).

[(1)] Trong trường hợp hệ phương trình đạo hàm riêng thì ẩn hàm u là một ánh xạ từ Ω vào $\mathbb{R}^p$, với p là một số tự nhiên lớn hơn 1.

Định nghĩa 1.1.2 (Nghiệm của phương trình đạo hàm riêng). Xét tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ và hàm $v : \Omega \to \mathbb{R}$ có đạo hàm riêng đến cấp m. Hàm $v(x)$ được gọi là *nghiệm của phương trình đạo hàm riêng* (1.1.1) nếu thỏa mãn

$$F(x, v(x), Dv(x), \ldots, D^m v(x)) = 0, \quad \text{với mọi } x \in \Omega.$$

Tiếp theo, ta đưa ra một cách phân loại các phương trình đạo hàm riêng như sau

Định nghĩa 1.1.3.

- Phương trình (1.1.1) được gọi là *tuyến tính* (linear) nếu F là hàm tuyến tính đối với ẩn hàm và tất cả các đạo hàm riêng của ẩn hàm. Phương trình tuyến tính cấp hai tổng quát đối với hàm $u = u(x, y)$ có dạng

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y).$$

- Phương trình tựa tuyến tính được gọi là *nửa tuyến tính* (semi-linear) nếu biểu thức chứa các đạo hàm riêng cấp cao nhất của ẩn hàm là tuyến tính.V Ví dụ phương trình Koteweg - de Vries:

$$u_t + uu_x + 6u_{xxx} = f(x,t),$$

là một phương trình nửa tuyến tính. Một ví dụ khác là phương trình chuyển động với vế phải phi tuyến

$$u_x + u_t = u^2.$$

- Phương trình (1.1.1) được gọi là *á tuyến tính* hay *tựa tuyến tính* (quasi-linear) nếu nó tuyến tính đối với đạo hàm riêng cấp cao nhất của ẩn hàm, tức là các hệ số của đạo hàm riêng cấp cao nhất của ẩn hàm chỉ phụ thuộc vào các đạo hàm riêng của ẩn hàm có cấp thấp hơn cấp của phương trình. Phương trình tựa tuyến tính cấp hai tổng quát có dạng

$$a(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y,u,u_x,u_y) = 0,$$

trong đó a, b, c, d là các hàm phù hợp.

- Phương trình thuộc dạng còn lại được gọi là *phi tuyến* hoặc hoàn toàn phi tuyến (fully non-linear).

Một cách hình tượng, ta có bao hàm thức của các loại phương trình

Tuyến tính $\subsetneq$ Nửa tuyến tính $\subsetneq$ Tựa tuyến tính $\subsetneq$ Phi tuyến

Bên cạnh việc phân loại phương trình như trên, người ta còn phân loại theo cấp của đạo hàm riêng, theo thuộc tính của phương trình đặc trưng ứng với nó, hoặc phân biệt phương trình và hệ phương trình đạo hàm riêng. Chú ý rằng việc phân loại theo cách này hay cách khác không đem lại một điều gì đặc biệt cả. Mặc dù vậy, người ta sử dụng mỗi cách phân loại vào một mục đích cụ thể, ví dụ như cách phân loại theo đặc trưng của phương trình.

Trong khuôn khổ chương trình học, chúng ta sẽ chủ yếu chỉ đề cập đến các phương trình tuyến tính cấp hai cơ bản nhất và các bài toán biên hoặc bài toán giá trị ban đầu tương ứng, thông qua các phương trình đại diện của mỗi loại: đó là phương trình Laplace, phương trình truyền nhiệt một chiều và phương trình truyền sóng trên dây căng thẳng. Những kiến thức cao hơn, phức tạp hơn được giới thiệu trong các tài liệu tham khảo ở cuối bài giảng này.

1.2. Một số phương trình đạo hàm riêng tiêu biểu

Trong mục này ta giới thiệu một số phương trình đạo hàm riêng tiêu biểu, có ứng dụng trong thực tiễn trong các ngành khoa học thực nghiệm như vật lý, hoá học, môi trường, khoa học trái đất...

1.2.1. Phương trình tuyến tính

Các phương trình tuyến tính được giới thiệu trong phần này là các phương trình cơ bản, có dạng đơn giản, chính tắc.

1. *Phương trình Laplace* do Laplace đưa ra vào khoảng năm 1780

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. *Phương trình Helmholtz* được Helmholtz nghiên cứu vào năm 1860

$$-\Delta u = \lambda u.$$

3. *Phương trình chuyển dịch tuyến tính*

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0.$$

4. *Phương trình Liouville* được nghiên cứu vào khoảng 1851

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (b_i u)_{x_i} = 0.$$

5. *Phương trình truyền nhiệt* được Fourier công bố năm 1810-1822

$$u_t = \Delta u.$$

6. *Phương trình Schrodinger* mang tên nhà vật lí Schrodinger, được nghiên cứu vào năm 1926, lần đầu tiên được công bố khi ông còn là một sinh viên năm thứ ba

$$iu_t + \Delta u = 0.$$

7. *Phương trình truyền sóng* được d'Alembert đưa ra năm 1752

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

và dạng tổng quát của nó

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0.$$

1.2.2. Các phương trình không tuyến tính

Các phương trình không tuyến tính có mặt trong nhiều bài toán thực tế.

1. *Phương trình Poisson phi tuyến*

$$\Delta u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. *Phương trình Hamilton - Jacobi*

$$u_t + H(Du) = 0,$$

trong đó $Du = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ là đạo hàm riêng theo các biến không gian của ẩn hàm.

3. *Phương trình truyền sóng phi tuyến*

$$u_{tt} + u_{xx} = f(x, t, u).$$

4. *Phương trình Koteweg - de Vries* mô tả chuyển động của sóng nước trong một dòng kênh

$$u_t + uu_x + 6u_{xxx} = 0.$$

5. *Phương trình Navier - Stokes cho dòng chất lỏng lý tưởng không nén được* mô tả hiện tượng chuyển động rối của dòng không khí phía sau cánh máy bay, hoặc chuyển động của dòng chất lỏng lý tưởng.

$$u_t + u \cdot Du - \Delta u = -Dp$$
$$\operatorname{div} u = 0.$$

Đây là một bài toán vật lý-toán, có nghiệm trong thực tiễn, nhưng việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán này trong lớp hàm bình phương khả tích $L^2(\Omega)$, cho đến nay vẫn là một bài toán mở. Có thể nói cho đến giờ, mặc dù đã có những thành tựu quan trọng, nhưng người ta vẫn chưa biết được nhiều thông tin về các tính chất của phương trình này, ví dụ về tính tồn tại nghiệm, vấn đề về tính duy nhất nghiệm. Có một giải thưởng của Viện Toán học Clay (Mỹ) trị giá 1 triệu USD dành cho ai giải được vấn đề liên quan đến phương trình Navier - Stokes này (tìm hiểu từ khóa "The 7 Millenium Problems" trên internet).

6. *Phương trình mặt cực tiểu*

$$(1+|\nabla u|^2)\Delta u - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

1.2.3. Các bài toán trong phương trình đạo hàm riêng

Tương tự như đối với phương trình vi phân thường (Ordinary differential equation), phương trình đạo hàm riêng, nếu có nghiệm, nói chung sẽ có vô số nghiệm. Để tìm được duy nhất một nghiệm thoả mãn yêu cầu của đặt ra ban đầu, người ta đưa ra một số ràng buộc (gọi là điều kiện) nhất định của ẩn hàm. Điều kiện đó có thể được cho ở trên một phần (hoặc toàn bộ) biên của miền được xét (mà ta hay ký hiệu là $\partial\Omega = \Gamma$) đối với bài toán không phụ thuộc thời gian, hoặc cho tại một thời điểm nào đó được xác định trong quá khứ (đối với các bài toán tiến hóa, tức là bài toán phụ thuộc thời gian). Bài toán biết giá trị của ẩn hàm hoặc độ biến thiên của ẩn hàm trên biên của miền xác định sẽ được gọi là *bài toán biên* (boundary-valued problems), bài toán cho trước giá trị của ẩn hàm tại một thời điểm nào đó cùng với đạo hàm riêng của ẩn hàm được gọi là *bài toán giá trị ban đầu* (initial-valued problems). Bài toán giá trị ban đầu còn được gọi tên là *bài toán Cauchy*, tương tự như đối với phương trình vi phân thường. Đôi khi người ta xét *bài toán biên-ban đầu* (boundary initial-valued problems), bao gồm cả các giá trị cho trước trên biên và giá trị của ẩn hàm tại thời điểm ban đầu.

1.3. Phương trình cấp 1. Phương pháp đường đặc trưng

Trước khi bắt đầu làm việc với phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2, ta hãy làm quen với các phương trình cấp 1 và phương pháp đường đặc trưng để giải phương trình loại này. Phương trình cấp 1 (trong không gian hai chiều $\mathbb{R}^2$), là phương trình có dạng tổng quát

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y + c(x,y,u)u = d(x,y).$$

Đôi khi, để phân biệt biến thời gian và không gian, người ta xét phương trình cấp 1 hai biến (x,t), trong đó $x \in \mathbb{R}$ mô tả các dịch chuyển về không gian, còn $t \in \mathbb{R}^+$ thể hiện sự biến thiên về mặt thời gian, có dạng

$$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t + c(x,t,u)u = d(x,t).$$

Chú ý 1.3.1.

- Trường hợp các hệ số là hằng số, ta có phương trình cấp 1 tuyến tính hệ số hằng. Nếu $d \equiv 0$ thì ta gọi là phương trình thuần nhất.

- Trường hợp a, b, c là các hàm chỉ phụ thuộc vào biến (x, y), (x, t) thì ta có phương trình tuyến tính hệ số biến thiên.

- Nếu các hệ số có phụ thuộc vào ẩn hàm, ta sẽ có phương trình dạng tựa tuyến tính hoặc nửa tuyến tính.

Trong khuôn khổ tập bài giảng này, chúng ta sẽ chỉ xét một số dạng đơn giản của các phương trình dạng tựa tuyến tính hoặc nửa tuyến tính.

1.3.1. Các phương trình hệ số hằng số

Đầu tiên ta xét một ví dụ sau

Ví dụ 1.3.1. Xét ẩn hàm $u = u(x,t)$. Tìm nghiệm của phương trình

$$u_x + u_t = 0. \tag{1.3.2}$$

Ta có thể đoán được một số nghiệm cụ thể của phương trình này, ví dụ như $u(x,t) = 0$, $u(x,t) = x - t$, $u(x,t) = \sin(x - t)$, v.v., và từ đó ta nhận xét rằng nếu đặt

$$u(x,t) = f(x - t), \tag{1.3.3}$$

trong đó $f(\cdot)$ là một hàm khả vi nào đó, thì nó sẽ là một nghiệm của phương trình đang xét.

Hiển nhiên, vì f được chọn bất kỳ nên phương trình có vô số nghiệm. Để có thể xác định một nghiệm cụ thể, ta cần áp vào ẩn hàm (và cả các đạo hàm riêng ở cấp nào đó của nó) các điều kiện cụ thể. Ví dụ nếu dọc theo trục $0x$, ta có điều kiện

$$u(x,0) = e^{-x^2},$$

thì khi thay vào biểu thức nghiệm nêu ở trên, ta sẽ xác định được nghiệm duy nhất

$$u(x,t) = e^{-(x-t)^2}.$$

Một câu hỏi đặt ra: Liệu biểu thức nghiệm nêu ở (1.3.3) có phải là duy nhất, và nghiệm tổng quát của phương trình trên là gì? Có một số phương pháp giải ra nghiệm tổng quát của phương trình này. Ý tưởng chung của các phương pháp là đưa nó về một (hệ) phương trình vi phân thường tương ứng. Ta xét phép đổi biến

$$\alpha = ax + bt, \quad \beta = cx + dt,$$

trong đó a, b, c, d là các tham số được chọn thích hợp.Ta tính toán trực tiếp

$$u_x = au_\alpha + cu_\beta, \quad u_t = bu_\alpha + du_\beta.$$

Từ đó suy ra được

$$(a + b)u_\alpha + (c + d)u_\beta = 0. \tag{1.3.4}$$

Ta chọn a, b, c, d sao cho một trong hai thành phần của phương trình trên bị triệt tiêu. Giả sử ta chọn $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$ thì sẽ được

$$u_\alpha = 0$$

tức là $u = C(\beta)$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là

$$u(x, t) = f(x - t).$$

Ví dụ trên là một trường hợp khá đặc biệt. Ta tiếp tục xét ví dụ sau đây, với phương trình trong hệ tọa độ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$au_x + bu_y = 0, \ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1.3.5}$$

Người ta sử dụng một số phương pháp khác nhau để giải phương trình này như sau.

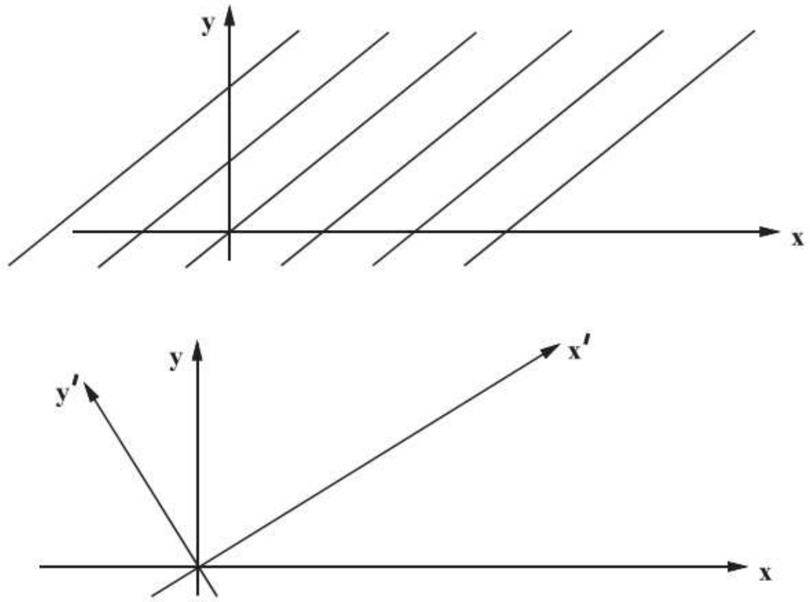
- *Phương pháp hình học (Geometric method):* Đại lượng $au_x + bu_y$ chính là đạo hàm định hướng của hàm u dọc theo chiều của vector $V = (a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}$ trong không gian hai chiều $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Đại lượng này phải bằng không, có nghĩa là hàm $u(x, y)$ phải là hằng số theo chiều của vector V. Vector $(b, -a)$ trực giao với vector V và đường thẳng song song với vector V thoả mãn phương trình $bx - ay = \text{const} = C$ và theo đó nghiệm của u là giá trị hằng số, gọi là $f(C)$. Với $C \in \mathbb{R}$ là giá trị bất kỳ ta có

$$u(x, y) = f(C) = f(bx - ay)$$

cho tất cả các giá trị của (x, y).

- *Phương pháp tọa độ (Coordinate method):* Làm tương tự như ở ví dụ đầu tiên (1.3.2), ta xét phép đổi biến

$$w = ax + by, \quad z = bx - ay$$



Hình 1.1: Đường đặc trưng và phương pháp tọa độ

Ta có

$$u_x = u_w w_x + u_z z_x = a u_w + b u_z$$
$$u_y = u_w z_y + u_z z_y = b u_w - a u_z$$

Do đó $au_x + bu_y = a(au_w + bu_z) + b(bu_w - au_z) = (a^2 + b^2)u_w$, do $a^2 + b^2 \neq 0$ nên ta có $u_w = 0$. Từ đó suy ra

$$u(x, y) = f(z) = f(bx - ay).$$

Nhận xét 1.3.1. Chú ý rằng có nhiều cách lựa chọn phép đổi biến, nhưng ta sẽ ưu tiên các phép đổi biến phù hợp

1.3.2. Phương pháp đường đặc trưng

Ta xét ví dụ mở rộng của Ví dụ (1.3.2). Xét phương trình dịch chuyển có dạng

$$u_t + bu_x = 0. \quad (1.3.6)$$

Với b là một hằng số cho trước, ta cần xác định nghiệm của phương trình. Phương trình nói trên mô tả chuyển động của một chất điểm trong môi trường đồng chất dọc theo đường thẳng có phương $(1, b)$. Nếu tham số hóa đường thẳng này $x = x(t)$, ta có thể xem ẩn hàm $u(x, t)$ như hàm một biến $v(t) = u(x(t), t)$. Tính đạo hàm hàm hợp

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Từ phương trình (1.3.6), ta tìm được (bạn đọc giải thích?)

$$\frac{dx}{dt} = b. \tag{1.3.7}$$

Đồng thời, từ biểu thức của phương trình ta có hệ thức

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Giải phương trình đầu tiên ta được $x(t) = C + bt$, tức là ta tìm được họ đường cong tích phân tương ứng $\varphi(x,t) = x - bt$. Tích phân phương trình thứ hai, ta có ẩn hàm v là hàm hằng dọc theo họ đường thẳng $C = x(t) - bt$. Các đường (thẳng) này được gọi là các *đường đặc trưng*. Từ đây, ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của phương trình sẽ có dạng

$$u(x,t) = f(x - bt),$$

trong đó $f(z)$ là hàm một biến khả vi bất kì. Như vậy, việc tìm nghiệm của phương trình (1.3.6) được chuyển về việc giải phương trình vi phân thường (1.3.7). Đường cong tích phân tổng quát tìm được từ phương trình này sẽ cho nghiệm tương ứng của phương trình ban đầu.

Trong trường hợp ta biết trạng thái ban đầu của chuyển động tại thời điểm $t = 0$ là $u(x,0) = \phi(x)$, ta áp dụng biểu thức nghiệm vừa tìm được

$$u(x,t) = \phi(x - bt).$$

Nghiệm này là xác định và duy nhất.

Ta xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1.3.2. Giải phương trình sau theo các cách khác nhau

$$3u_x - 2u_y = 0.$$

Giải. - *Phương pháp hình học.* Ta thấy rằng dọc theo họ đường thẳng có véc tơ chỉ phương $(2,3)$, nghiệm của phương trình là các hằng số, vì vậy nghiệm của nó sẽ là một hàm chỉ phụ thuộc vào họ đường thẳng đó. Ta suy ra ngay nghiệm của phương trình là

$$u_0(x,y) = \varphi(2x + 3y).$$

- *Phương pháp đổi biến.* Thực hiện phép đổi biến

$$w = 2x + 3y, \quad z = y$$

(Chú ý rằng ta có vô số cách đổi biến!) Khi đó ta rút ra

$$x = w - 3z, \quad y = z.$$

Đặt $v(w,z) = u(x,y)$. Thế thì ta có

$$3u_x - 2u_y = 3(v_w \cdot w_x + v_z \cdot z_x) - 2(v_w \cdot w_y + v_z \cdot z_y) = -2v_z.$$

(Cách đổi biến này giúp ta loại đi được một đạo hàm riêng có mặt trong phương trình). Như vậy phương trình ban đầu sẽ trở thành

$$-2v_z = 0.$$

Tức là hàm v sẽ KHÔNG phụ thuộc vào biến z, do đó nó sẽ có dạng $v = \varphi(w)$. Đổi trở lại biến ban đầu ta được

$$u(x,y) = \varphi(2x+3y).$$

□

Ví dụ 1.3.3. Giải bài toán Cauchy

$$u_x - u_y + 2u = 0, \quad u(x,0) = x^2.$$

Giải. Ở đây xuất hiện hệ số tự do của phương trình, ứng với ẩn hàm u. Ta thực hiện phép đổi biến thích hợp

$$w = x + y, \quad z = y \quad \Rightarrow x = w - z,\ y = z.$$

Phương trình khi đó sẽ trở thành (đặt $v(w,z) = u(x,y)$)

$$-v_z + 2v = 0. \tag{1.3.8}$$

Giải phương trình vi phân này với biến z (cố định biến w) ta được nghiệm tổng quát

$$v(w,z) = e^{2z}\varphi(w).$$

Thay lại biến ban đầu, ta được

$$u(x,y) = e^{2y}\varphi(x+y).$$

Tại trạng thái cho trước $(x,0)$ ta có $u(x,0) = x^2$, vì thế nghiệm cần tìm của bài toán Cauchy được xét sẽ là

$$u(x,y) = e^{2y}(x+y)^2.$$

Nghiệm này là duy nhất. □

1.3.3. Bài toán Cauchy của phương trình không thuần nhất

Bây giờ ta xét trường hợp không thuần nhất, tức là tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_t + bu_x = h(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp đặc trưng nêu ở trên, ta dẫn tới hệ phương trình vi phân thường cho ẩn hàm $v(x(t),t)$

$$\frac{dx}{dt} = b, \tag{1.3.9}$$

$$\frac{dv}{dt} = h(x(t),t). \tag{1.3.9b}$$

Từ (1.3.9) ta tìm được phương trình đường đặc trưng là $x(t) - bt = x(0)$, và bằng cách tích phân phương trình (1.3.9b) ta có biểu thức nghiệm của v là

$$v(t) = v(0) + \int_0^t h(x(s),s)ds.$$

Chú ý rằng $v(0) = f(x(0)) = f(x(t) - bt)$, và thực hiện phép đổi biến trong tích phân ta suy ra nghiệm cần tìm của bài toán là

$$u(x,t) = f(x - bt) + \int_0^t h(x(s),s)ds.$$

Ta xét ví dụ sau

Ví dụ 1.3.4. Giải bài toán Cauchy

$$u_x - u_y + 2u = 1, \quad u(x,0) = x^2.$$

Giải. Từ kết quả đã tìm được ở Ví dụ trước, nghiệm tổng quát của bài toán thuần nhất tương ứng là

$$u(x,y) = e^{2y}\varphi(x+y).$$

Sử dụng phương pháp biến thiên hằng số giải phương trình (1.3.8) với vế phải bằng 1, ta được

$$v(w,z) = v_0(w,z) + v_*(w,z) = e^{2z}C(w) + \frac{1}{2} \Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2} + e^{2y}\varphi(x+y).$$

Thay điều kiện đầu vào nghiệm trên ta được

$$u(x,0) = \frac{1}{2} + C(x) = x^2 \Rightarrow C(x) = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm cần tìm

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + e^{2y}(x+y)^2 - \frac{1}{2}e^{2y}.$$

□

Khi trạng thái đầu tiên của phương trình được cho trên một đường thẳng không song song với các trục tọa độ, người ta gọi các đường đó là điều kiện đường bên (side curve condition). Khác với trường hợp bài toán Cauchy vừa được xét ở trên, nghiệm của bài toán với điều kiện đường bên không phải lúc nào cũng tồn tại và duy nhất. Ta xét một số ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1.3.5. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u(x, 4x+2) = 0.$$

Giải. Xét phép đổi biến

$$\begin{cases} w = 2x - y, \\ z = x + y, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}(w+z), \\ y = \frac{1}{3}(2z - w). \end{cases}$$

Rõ ràng ta có thể chọn z theo nhiều cách khác nhau, nhưng chú ý rằng vế phải là một biểu thức phụ thuộc vào $x+y$, việc chọn z như trên sẽ giúp ta giải quyết bài toán dễ dàng hơn. Phương trình đạo hàm riêng tương ứng bây giờ sẽ là

$$3v_z - 4v = e^z.$$

Nghiệm của phương trình này có dạng (chi tiết xin dành cho bạn đọc,)

$$v(w,z) = -e^z + e^{4z/3}C(w) \quad \Rightarrow u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4(x+y)/3}\varphi(2x-y).$$

Nếu viết lại $4(x+y)/3 = 4x - 4(2x-y)/3$ thì nghiệm tương ứng của phương trình sẽ là

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}\varphi(2x-y).$$

Bây giờ ta thay giá trị của ẩn hàm u trên đường cong $y = 4x+2$ để tìm hàm φ. Ta được

$$u(x, 4x+2) = -e^{5x+2} + e^{4x}\varphi(-2x-2) = 0 \Rightarrow \varphi(-2x-2) = e^{x+2}.$$

Vậy $\varphi(z) = e^{(-z+2)/2}$. Ta suy ra nghiệm cần tìm của bài toán Cauchy là

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4x}e^{-\frac{1}{2}(2x-y+2)} = -e^{x+y} + e^{3x+\frac{1}{2}y+1}.$$

□

Điều kiện đầu của bài toán Cauchy trong ví dụ trên được lấy trên một đường không phải là đường đặc trưng của phương trình. Khi đó nghiệm tìm được là duy nhất. Câu hỏi đặt ra: chuyện gì sẽ xảy ra khi mà điều kiện đầu được lấy trên một đường đặc trưng của phương trình? Ta xét các ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 1.3.6. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u(x, 2x-1) = 0.$$

Giải. Nghiệm tổng quát của phương trình đã được xác định ở ví dụ trước

$$u(x, y) = -e^{x+y} + e^{4x}\varphi(2x - y).$$

Thay điều kiện ban đầu ta được

$$u(x, 2x-1) = -e^{3x-1} + e^{4x}\varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(1) = e^{-x-1}.$$

Rõ ràng vế trái là một hằng số $= \varphi(1)$, trong khi vế phải lại là một hàm phụ thuộc x, không đồng nhất hằng số, vì vậy nghiệm của bài toán là không tồn tại. $\square$

Như vậy, ví dụ trên cho ta thấy rằng khi điều kiện đầu được cho trên đường đặc trưng, bài toán có thể không có nghiệm. Vậy muốn bài toán có nghiệm thì ta cần phải làm gì? Và nếu nó có nghiệm, thì liệu nghiệm đó có duy nhất không? Ta xét ví dụ dưới đây

Ví dụ 1.3.7. Tìm nghiệm của bài toán

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x},$$

Nghiệm của bài toán có là duy nhất không? Vì sao?

Giải. Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$u(x, y) = -e^{x+y} + e^{4x}\varphi(2x - y).$$

Thay điều kiện đường bên vào ta được

$$u(x, 2x) = -e^{3x} + e^{4x}\varphi(0) = -e^{3x} + e^{4x}.$$

Như vậy các hàm $\varphi(x)$ thỏa mãn phương trình $\varphi(0) = 1$ đều cho nghiệm của bài toán. Ví dụ $\phi(x) = x$, $\phi(x) = \cos x$, $\phi(x) = e^x$. Ứng với các hàm nói trên, ta có nghiệm tương ứng là

$$u(x, y) = -e^{x+y} + e^{4x}, \quad u(x, y) = -e^{x+y} + e^{4x}\cos(2x - y), \quad u(x, y) = -e^{x+y} + e^{4x}e^{2x-y}.$$

Các hàm số nói trên đều là nghiệm của bài toán, cho thấy rằng nghiệm của bài toán là không duy nhất. $\square$

Bây giờ ta thay điều kiện đường bên của bài toán trên bởi hàm $u(x, 2x) = \phi(x)$. Câu hỏi đặt ra là hàm ϕ phải thỏa mãn điều kiện gì thì bài toán trên mới có nghiệm. Ta trở lại nghiệm tổng quát của bài toán

$$u(x, y) = -e^{x+y} + e^{4x}\varphi(2x - y).$$

Khi thay vào điều kiện đường bên, ta được

$$u(x, 2x) = -e^{3x} + \varphi(0)e^{4x} = \phi(x).$$

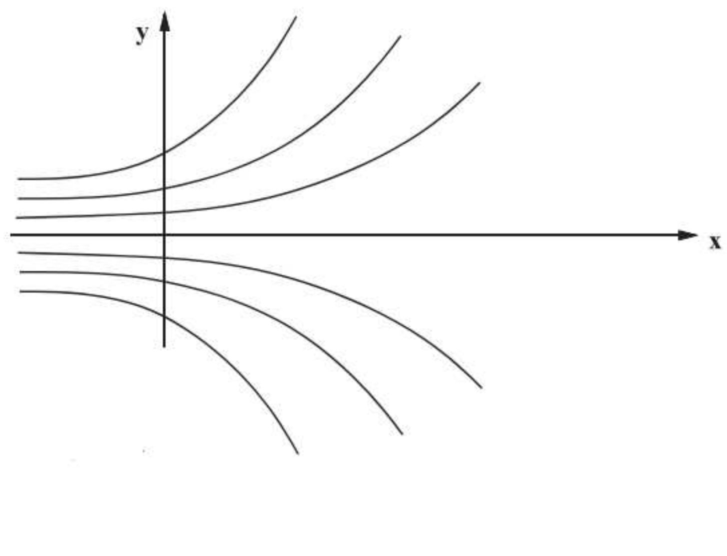
Như vậy chỉ hàm $\phi(x)$ có dạng như trên, với $\varphi(0) = C$ là hằng số bất kì, thì bài toán được xét mới có nghiệm. Rõ ràng, như ta nêu ở trong ví dụ, nghiệm của bài toán là không duy nhất.

1.3.4. Phương trình tuyến tính với hệ số biến thiên

Xét phương trình cấp 1 tổng quát với nghiệm $u = u(x, y)$ trong $\mathbb{R}^2$

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y), \tag{1.3.10}$$

trong đó a, b, c, d là các hàm số phụ thuộc vào (x, y) được xét trên cùng miền xác định của phương trình.



Hình 1.2: Đường đặc trưng của phương trình với hệ số biến thiên

Chú ý 1.3.2. Chú ý rằng mọi phương trình có dạng (1.3.10) đều có thể đưa về dạng

$$u_x + pu_y + qu = h \tag{1.3.11}$$

trong đó p, q, h là các hàm đủ trơn thích hợp, vì vậy thay vì xét phương trình (1.3.10) ta sẽ xét phương trình này.

Đầu tiên ta xét trường hợp $q = 0$.Tương tự trường hợp hệ số của phương trình là các hằng số, ta nhận xét rằng nghiệm của phương trình (1.3.11) là không đổi dọc theo đường cong (ℓ) có véc tơ pháp vuông góc với véc tơ là $(1, p(x, y))$. Điều này có nghĩa là nghiệm của phương trình (1.3.11) có dạng

$$u = \Phi(\phi(x, y)),$$

trong đó $\{\phi(x, y) = C\}$ là phương trình của đường cong (ℓ). Việc tìm nghiệm của phương trình được đưa về tìm đường cong tích phân $\varphi = C$. Tham số hóa đường cong (ℓ) theo dạng $y = y(x)$, và sử dụng đạo hàm hàm ẩn, ta nhận được phương trình vi phân ứng với phương trình (1.3.11) có dạng (bạn đọc giải thích?)

$$y' = p(x, y). \tag{1.3.12}$$

Rõ ràng nghiệm của (1.3.12) là một họ đường cong trong mặt phẳng $x0y$. Việc giải phương trình vi phân (1.3.12) sẽ cho ta tích phân tổng quát

$$\phi(x, y) = C,$$

chính là họ đường cong mà ta đang tìm. Ta gọi $\phi(x, y)$ là *đường cong đặc trưng* của phương trình đạo hàm riêng (1.3.11).Như vậy ta kết luận được rằng nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là

$$u(x, y) = \Phi(\phi(x, y)),$$

trong đó $\Phi(\cdot)$ là một hàm số thích hợp bất kì.

Ví dụ 1.3.8. Tìm nghiệm của phương trình

$$u_x + xu_y = 0.$$

Ta có phương trình đặc trưng tương ứng là

$$\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow y - \frac{x^2}{2} = C.$$

Vậy nghiệm cần tìm sẽ là

$$u(x, y) = f\left(y - \frac{x^2}{2}\right),$$

trong đó f là hàm một biến bất kì.

Xét trường hợp phương trình hệ số biến thiên không thuần nhất

$$u_x + p(x, y)u_y = h(x, y).$$

Sử dụng phương pháp đường đặc trưng, việc tìm họ đường cong đặc trưng $\varphi(x, y) = C$, ứng với phép tham số hóa $y = y(x)$ sẽ đưa phương trình này về hệ hai phương trình vi phân thường

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y), \quad \frac{du}{dx} = h(x, y).$$

Giải phương trình thứ nhất ta sẽ tìm được họ đường cong (ℓ) có dạng $\varphi(x, y) = C$. Thay đường cong tích phân nhận được vào phương trình thứ hai, ta sẽ đi giải một phương trình vi phân thường của ẩn hàm $v(x, y(x)) := u(x, y)$. Nếu giải được phương trình này, ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình ban đầu.

Có một thực tế hiển nhiên là việc giải phương trình thứ hai là khó và không phải lúc nào cũng thực hiện được một cách tường minh. Chỉ một số trường hợp rất đơn giản, khi hàm p và hàm h được cho thuận tiện thì ta mới tìm được biểu thức nghiệm [tường minh] của phương trình. Các ví dụ sau sẽ thể hiện điều này.

Ví dụ 1.3.9. Ta xét lại ví dụ ở trên, với vế phải không thuần nhất

$$u_x + xu_y = f(x, y),$$

Nghiệm của bài toán được tìm dưới dạng

$$u(x, y) = \varphi(y - \frac{1}{2}x^2) + F(x, y),$$

trong đó $F(x, y)$ là tích phân tương ứng với $f(x, y)$.

1.3.5. Ý nghĩa vật lí

Ta có thể mô tả phương trình dịch chuyển bằng một số mô hình vật lí sau.

a) Chuyển động của dòng chất lỏng một chiều

Xét một dòng chất lỏng có vận tốc v chảy trong một ống nhỏ có tiết diện là A. Giả sử rằng dòng chất lỏng đó bị ô nhiễm với mật độ là một hàm hai biến $u(x, t)$ phụ thuộc vào vị trí x và thời gian t. Khi đó, ở thời điểm t, lượng chất ô nhiễm đi qua một phần ống từ vị trí x_1 đến x_2 sẽ là

$$T_{(x_1,x_2)}(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t)Adx.$$

Tương tự, biểu thức miêu tả lượng chất ô nhiễm đi qua vị trí x trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 là

$$X_{(t_1,t_2)}(x) = \int_{t_1}^{t_2} u(x, t)Avdx.$$

Phương trình cân bằng vật chất sẽ được viết

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2)Adx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1)Adx + \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t)Avdt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t)Avdt.$$

Điều này có nghĩa rằng trong phần ống từ x_1 đến x_2 tại thời điểm t_2, lượng chất ô nhiễm sẽ bằng lượng ô nhiễm tại thời điểm t_1 cộng thêm chênh lệch lượng ô nhiễm tại hai vị trí x_1 và x_2 trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2. Ở đây ta giả thiết rằng không có nguồn gây ô nhiễm bên trong ống, và không có hiện tượng thẩm thấu ô nhiễm ra thành ống. Với chú ý rằng A là một hàm theo x còn v là một hàm phụ thuộc (x, t), biểu thức dưới dấu tích phân sẽ được tính là Sử dụng các tính toán đơn giản ta nhận được

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2)Adx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1)Adx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \partial_x[u(x, t)A]dt \right) dx,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t)Avdt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t)Adt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} \partial_t[u(x, t)Av]dx \right) dt,$$

tức là ta có

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \partial_x[u(x, t)A]dxdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t[u(x, t)Av]dtdx = 0.$$

Vì x_i, t_i được chọn bất kì nên ta thu được

$$\frac{\partial[u(x, t)A]}{\partial x} + \frac{\partial[u(x, t)Av]}{\partial t} = 0.$$

Đây chính là phương trình dịch chuyển một chiều. Khi A, v là các hằng số thì phương trình được xét sẽ trở về dạng quen thuộc

$$\frac{\partial[u(x, t)]}{\partial x} + v\frac{\partial[u(x, t)]}{\partial t} = 0.$$

b) Phương trình đối lưu

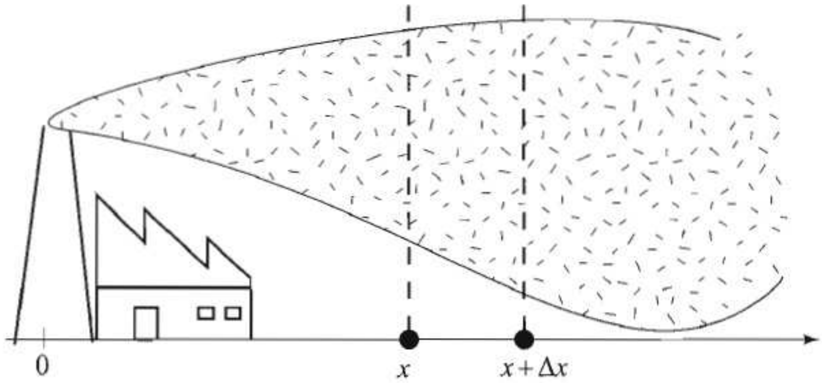
Phương trình đối lưu có dạng

$$u_t(x, t) = -\kappa u_x(x, t) + k(x, t), \tag{1.3.13}$$

trong đó κ là tham số dương và k là hàm phụ thuộc (x, t). Phương trình này được áp dụng trong mô hìn hoá nghiên cứu việc lan truyền của AIDS, động lực dòng, chuyển động của dòng chất lỏng và dòng chất khí. Ta giả thiết rằng gió thổi theo 1 hướng với tốc độ $\kappa(m/s)$ trùng với hướng dương của trục Ox. Giả thiết rằng khi dịch chuyển, gió đã làm bay một khối lượng khói thải ra từ một nhà máy được đặt tại điểm gốc O. Đặt $u(x, t)$ là mật độ của chất thải (tính bằng số lượng hạt vật chất trên một mét) tại thời điểm t, và giả sử các hạt chất thải sẽ lắng xuống với tốc độ có tỉ lệ r với $u(x, t)$ không đổi. Khi đó hàm số u thoả mãn phương trình (1.3.13) với $k(x, t) = -ru(x, t)$. Ta sẽ chứng minh được rằng

(a) nghiệm tổng quát của phương trình (1.3.13) sẽ có dạng

$$u(x, t) = e^{-rt} f(x - \kappa t),$$



Hình 1.3: Phân bố tại thời điểm t giữa hai vị trí x và $x + \Delta x$.(xem [1, Ex.27, pp.16])

với f là một hàm bất kì. Việc chứng minh này đơn giản chỉ là thay hàm này vào biểu thức của phương trình để kiểm tra tính đúng của nó. Nếu có thể, người đọc chứng minh rằng bên ngoài nghiệm này, phương trình không còn nghiệm nào khác.

(b) Nếu kí hiệu M là số lượng phân tử [khí thải] trong không khí tại thời điểm $t = 0$ thì số lượng của phân tử tại thời điểm $t > 0$ sẽ bằng $e^{-rt}M$.[Gợi ý: số phân tử chính là tích phân của hàm mật độ trên toàn trục số $-\infty < x < \infty$].

1.3.6. Phương trình tựa tuyến tính

Xét ẩn hàm $u = u(x,t)$ xác định trong miền $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Ta xét ví dụ một phương trình tựa tuyến tính như sau

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1.3.14}$$

Phương trình trên có thể có dạng phức tạp hơn như sau

$$u_t + uu_x + u = 0,$$

hay dạng tổng quát của nó

$$a(x,t,u)u_t + b(u,t,x)u_x + c(x,t,u) = 0,$$

trong đó a, b, c là các hàm cho trước, xác định trên Ω. Để tìm nghiệm của phương trình này, ta sử dụng (duy nhất) cách tìm họ đường đặc trưng. Phương trình đường đặc trưng, được tham số hóa $x = x(t)$, của phương trình trên được xác định từ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b(x,t,u)}{a(x,t,u)}$$

Tìm được họ đường cong tích phân là nghiệm tổng quát $\varphi(x,t) = C$ của phương trình vi phân kể trên (một việc mà nhìn qua đã thấy gần như bất khả thi rồi!), ta sẽ viết được nghiệm của phương trình trên thông qua phương trình vi phân thường (ở đây ta sẽ xét phép đổi biến $w = \varphi(x,t)$, $z = \psi(x,t)$, trong đó $\psi(x,t)$ đủ đẹp)

$$\frac{du}{dt} + c(x,t,u) = 0.$$

Việc giải phương trình này, và cả phương trình trên, nói chung là điều bất khả. Tuy nhiên, ở phạm vi của bài học của chương trình, ta sẽ xét một số trường hợp tương đối đơn giản. Mục tiêu của chúng ta khi đó là xác định được họ đường cong đặc trưng của phương trình, từ đó xác định được biểu thức nghiệm của phương trình ban đầu. Trên thực tế, các phương trình tựa tuyến tính cấp một này sẽ có ứng dụng trong việc nghiên cứu các định luật bảo toàn nói chung: việc chuyển hóa trong một hệ kín từ trạng thái này sang trạng thái khác sẽ duy trì tính "ổn định" của hệ đó. Thực chất, trong việc giải phương trình cấp 1 tựa tuyến tính này, "hình dáng" của đường đặc trưng đóng vai trò rất quan trọng. Ta xét một số ví dụ minh họa sau liên quan đến "hình dáng" của các đường đặc trưng, tất nhiên, từ đơn giản đến phức tạp hơn. (Các ví dụ dưới đây được lấy trong cuốn [7][3.2, trang 44].

Ví dụ 1.3.10.

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = 3x.$$

Lời giải. Phương trình tìm đường đặc trưng có dạng $\dfrac{dx}{dt} = u$, trên đó nghiệm của bài toán sẽ thỏa mãn phương trình $\dfrac{du}{dt} = 0$ với điều kiện ban đầu được viết dưới dạng $u(x(0),0) = 3x(0) := 3x_0$. Từ phương trình thứ hai ta tìm được

$$u(x,t) = C = u(x(0),0) = 3x_0.$$

Thay giá trị này vào phương trình vi phân đầu tiên, ta được

$$\frac{dx}{dt} = 3x_0 \Rightarrow x = 3x_0 t + x_0.$$

Vậy ta tìm được $x_0 = \frac{x}{3t+1}$. Thay vào biểu thức của u ta được

$$u(x,t) = \frac{3x}{3t+1}.$$

Vì thời gian t được tính từ 0 nên nghiệm của bài toán xác định trên toàn miền xác định của nó.

Ví dụ 1.3.11. Giải bài toán Cauchhy

$$u_t + t^2 uu_x = 5, \quad u(x,0) = x.$$

Lời giải. Phương trình trên được tương đương với hệ phương trình vi phân

$$\frac{du}{dt} = 5, \quad u(x(0),0) = x(0) := x_0, \quad \frac{dx}{dt} = t^2 u.$$

Từ phương trình thứ nhất và điều kiện ban đầu, ta được $u(x,t) = 5t + u(x(0),0) = 5t + x_0$. Thay giá trị này vào phương trình tìm đường đặc trưng

$$\frac{dx}{dt} = t^2 u(x,t) = t^2(5t + x_0) \Rightarrow x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{x_0}{3}t^3 + x_0.$$

Vậy thế $x_0 = \dfrac{3(4x - 5t^4)}{4(t^3+3)}$ vào biểu thức của u, ta được nghiệm cần tìm là

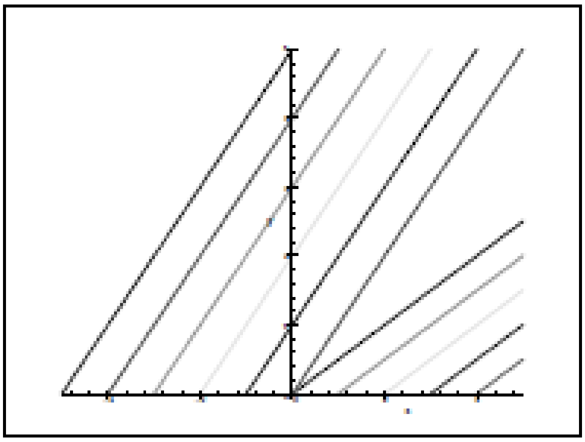
$$u(x,t) = 5t + \frac{3(4x - 5t^4)}{4(t^3+3)} = \frac{12x - 5t^4 + 15t}{4(t^3+3)}.$$

Nhận xét rằng trong hai ví dụ trên, các đường đặc trưng có thể là các đường thẳng hoặc đường cong, nhưng nói chung là liên tục, không bị gián đoạn trong miền xác định của nó. Vì vậy, nghiệm nhận được sẽ là liên tục (và khả vi liên tục.) Tuy nhiên, khi điều kiện ban đầu bị đứt gãy, tức là các hàm bậc thang, thì sẽ có những khu vực có vô số nghiệm, hoặc nghiệm ở đó xuất hiện hiện tượng sốc (shock). Ta xét hai ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1.3.12 (**Hiện tượng đường đặc trưng hình quạt**). Xét bài toán giá trị ban đầu sau

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 2 & x > 0. \end{cases}$$

Ta xét hệ phương trình vi phân tương ứng $\dfrac{du}{dt} = 0, \quad \dfrac{dx}{dt} = u.$



Hình 1.4: Các đường đặc trưng dạng quạt (fan-like characteristics)

Phương trình thứ nhất cho nghiệm $u(x,t) = \mathrm{const} = u(x(0),0)$, còn đường cong đặc trưng của phương trình này có dạng

$$x(t) = u(x(0),0)t + x(0) = \begin{cases} t + x(0) & x(0) < 0, \\ 2t + x(0) & x(0) > 0. \end{cases},$$

Khi $x(0) < 0$ thì đường đặc trưng sẽ có hệ số góc bằng 1, còn khi $x(0) > 0$ thì có hệ số góc bằng 1/2. Vì $u(x(0), 0)$ không xác định tại điểm $x(0) = 0$, nên không có đường đặc trưng nào đi qua điểm $t = 0$ ứng với $x(0) = 0$. Nếu viết lại dưới dạng

$$x(0) = \begin{cases} x - t & x < t \\ x - 2t & x > 2t \end{cases}$$

thì trong dải $t < x < 2t$, giá trị $x(0) = 0$, và không có đường đặc trưng nào trong dải này. Nghiệm của phương trình lúc đó sẽ có dạng $u = \dfrac{x}{t}$ với $t < x < 2t$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x - t < 0, \\ 2, & x - 2t > 0, \\ \dfrac{x}{t}, & t < x < 2t. \end{cases}$$

1.4. Bài toán Sturm-Liouville

Nhìn chung, việc xác định nghiệm tường minh của một bài toán của phương trình đạo hàm riêng chỉ thực hiện được trong những trường hợp đơn giản về dạng phương trình, về hình dạng của miền xác định. Một trong những phương pháp thường được sử dụng để xây dựng nghiệm của các bài toán của phương trình đạo hàm riêng là *phương pháp tách biến*. Phương pháp này sẽ dẫn đến việc giải phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

cùng với các điều kiện biên tương ứng. Bài toán của phương trình vi phân này được gọi là *Bài toán Sturm-Liouville*. Người ta chứng minh được rằng bài toán [biên] này có nghiệm (kí hiệu là X_n, được gọi là các hàm riêng), ứng với các giá trị λ_n (gọi là các giá trị riêng).

Ví dụ 1.4.1. Xét phương trình truyền nhiệt một chiều

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

cùng với các điều kiện biên và điều kiện ban đầu tương ứng. Việc tìm nghiệm của bài toán này dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) T_n(t),$$

sẽ dẫn đến hệ phương trình vi phân thường

$$\begin{cases} \dot{T}(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Giả sử ta có điều kiện biên thuần nhất. Khi đó, bài toán Sturm-Liouville tương ứng sẽ là

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

Ta có định nghĩa

Định nghĩa 1.4.1 (Bài toán Sturm-Liouville). Xét các hàm p, q, σ khả vi liên tục thích hợp. Bài toán Sturm-Liouville trong khoảng (a, b) có dạng

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + q(x)X(x) + \lambda\sigma(x)X(x) = 0,\ x \in (a, b),$$

cùng với các điều kiện biên tương ứng.

Định nghĩa 1.4.2. Bài toán Sturm-Liouville được gọi là *chính qui* nếu nó có điều kiện biên dạng

$$\begin{cases} \alpha X(a) + \beta X'(a) = 0, \\ \gamma X(b) + \delta X'(b) = 0. \end{cases}$$

Chú ý 1.4.1. Bài toán Sturm-Liouville được gọi là kì dị (không chính quy-singular) nếu một trong các điều kiện sau thoả mãn

1. Hàm $p(x)$ triệt tiêu tại hai đầu mút.

2. Một trong các hàm p, q, σ tiến ra vô cùng ở ít nhất một trong hai đầu mút.

Một số tính chất của bài toán Sturm-Liouville được thể hiện qua định lí sau.

Định lý 1.4.1. *Ta có các khẳng định sau*

1. $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Tồn tại một số đếm được các giá trị $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ *sao cho* λ_1 *là nhỏ nhất và*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

3. Ứng với mỗi giá trị riêng λ_n *ta xác định được một hàm riêng* X_n *có đúng* $n-1$ *không điểm trong khoảng* (a, b)*. Tập* $\{X_n\}_n$ *lập thành một hệ cơ sở đầy đủ, tức là mọi hàm* f *trơn đều biểu diễn được dưới dạng chuỗi Fourier tổng quát*

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x_-)}{2}.$$

1.5. Tóm tắt lí thuyết và Bài tập: Phương trình cấp 1

1.5.1. Tóm tắt lí thuyết

Phương trình tuyến tính và tựa tuyến tính cấp 1 có dạng

$$a(x,y)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

được giải bằng một số phương pháp khác nhau. Trong khuôn khổ chương trình học, chúng tôi giới thiệu hai phương pháp thông dụng là phương pháp đổi biến (change of variable) và phương pháp đường đặc trưng (characterisation method).

a) Phương pháp đổi biến

Phương pháp này đổi biến $(x,y) \to (w,z)$ sao cho đưa phương trình ban đầu về dạng phương trình chỉ có đạo hàm riêng của một biến, ví dụ $v_z = C(w,z,u)$. Khi đó việc tìm nghiệm của phương trình theo z trở nên dễ dàng hơn. Tuy nhiên, vai trò của hàm C ở đây là rất quan trọng, nó quyết định xem phương trình có giải được hay không.

b) Phương pháp đường đặc trưng

Ta tìm nghiệm của phương trình trên các đường đặc trưng của nó, là những đường mà ở đó phương trình bằng hằng số. Ta tham số hoá các đường cong đặc trưng bởi họ tham số $y = y(x)$. Khi đó phương trình được xét tương đương với một hệ các phương trình vi phân thường

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y,u)}{a(x,y)}, \quad \frac{du}{dx} = c(x,y,u).$$

Chú ý rằng $u = u(x, y(x))$, $y = y(x)$. Giải phương trình thứ nhất theo y, giả thiết rằng tại một thời điểm ban đầu nào đó $x = x_0$ (có thể cho bằng 0) thì $u(x_0, y) = u_0(y)$, và tại điểm đó, trên đường đặc trưng ta có $u(x_0, y(x_0)) = u_0(y_0)$. Ta khử điểm ban đầu trong biểu thức cuối cùng của u sẽ được nghiệm. Tất nhiên, việc giải phương trình này không phải lúc nào cũng làm được. Nó phụ thuộc rất nhiều vào phương trình, các hệ số, tham số và cả điều kiện đầu.

1.5.2. Bài tập

1. Phân loại phương trình đạo hàm riêng dưới đây và cho biết cấp tương ứng của các phương trình.

   (a) $(u_y)^2 + u_{xxx} = 0$

   (b) $\sin(1+u_x)^2 + u^3 = \sin x$

   (c) $e^{\Delta u} = x$

   (d) $u_t + u_{txx} + uu_x = 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(e) $u_t + (f(u))_x = 0$

(f) $xu_{xx} + (x-y)u_{xy} - yu_{yy} = 0$

(g) $u_t + u^2 u_{xx} = 0$.

2. Xác định bậc của phương trình sau

(a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

(b) $u_{xxx} + u_{xy} + a(x)u_y + \log u = f(x,y)$

(c) $u_x + cu_y = d$

(d) $uu_{xx} + u_{yy}^2 + e^u = 0$.

3. Phương trình nào sau đây là tuyến tính? tựa tuyến tính? phi tuyến? nếu là phương trình tuyến tính thì nó có thuần nhất không?

(a) $u_{xx} + u_{yy} - 2u = x^2$

(b) $u_{xy} = u$

(c) $uu_x + xu_y = 0$

(d) $u_x(1+u_y) = u_{xx}$

(e) $(\sin u_x)u_x + u_y = e^x$

4. Giả sử u_1, u_2 là các nghiệm của phương trình $au_x + bu_t = 0$. Chứng minh rằng $c_1u_1 + c_2u_2$ cũng là nghiệm của phương trình, với c_1, c_2 là các hằng số bất kì.

5. Tìm nghiệm của phương trình trên nếu biết thêm

(a) $u(x,0) = xe^{-x^2}$

(b) $u(0,t) = t$

(c) cho $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$

6. Làm tương tự các yêu cầu của bài 5 cho các phương trình sau

(a) $u_t - u_x = 0$. Tìm nghiệm của phương trình khi $u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$.

(b) $u_t - 2u_x = 2$

(c) $2u_t + 3u_x = 0$

(d) $au_t + bu_x = u$, $a, b \neq 0$.

7. Xét phương trình $au_x + bu_y = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Đạo hàm theo hướng của u là gì?

(b) Tìm các đường cong đặc trưng của phương trình.

(c) Tìm nghiệm của phương trình.

8. Tìm nghiệm của các phương trình thuần nhất sau

(a) $u_x + x^2 u_y = 0$

(b) $e^{x^2} u_x + x u_y = 0$

(c) $u_x + \sin x u_y = 0$

(d) $x u_x + y u_y = 0$

9. Giả sử u, v là các hàm thoả mãn

$$u_x = -\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t} = -u_x.$$

Chứng minh rằng u, v là các nghiệm của phương trình truyền sóng

$$u_x = \pm u_t.$$

10. Giả sử ta có điều kiện đầu $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = h(x)$. Hãy xây dựng bài toán Cauchy cho phương trình cấp hai đối với u.

11. Vẽ các đường đặc trưng và giải bài toán Cauchy sau:

(a) $u_t + 3u_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, \ 0 < x < 1, \\ 0, \text{ ngược lại} \end{cases}$

(b) $u_t - 2u_x = e^{2x}$, $u(x,0) = f(x)$.

(c) $u_t + x u_x = 1$, $u(x,0) = f(x)$.

(d) $u_t + 3t u_x = u$, $u(x,0) = f(x)$.

(e) $u_t - t^2 u_x = -u$, $u(x,0) = 3e^x$.

12. Xét phương trình tựa tuyến tính $u_t + 2u u_x = 0$.

(a) Xác định phương trình đặc trưng. Xác định nghiệm tổng quát của phương trình.

(b) Tìm nghiệm $u(x,t)$ biết rằng $u(x,0) = \begin{cases} 1, \ x < 0, \\ 1 + \frac{x}{L}, \ 0 < x < L, \\ 0, \ x > L. \end{cases}$

13. Chứng minh rằng đường đặc trưng của phương trình

$$u_t + 2uu_x = 0, \quad u(x,0) = f(x),$$

là các đường thẳng.

14. Giải các bài toán Cauchy sau, với $u(x,0) = f(x)$ cho trước

(a) $u_t = 0$, $u(x,0) = g(x)$.

(b) $u_t + t^2 uu_x = -u, u(x,0) = x$.

(c) $u_t - u^2 u_x = 3u, u(x,0) = g(x)$.

(d) $u_t + cu_x = e^{-3x}$

(e) $u_t + tu_x = 5$

(f) $u_t + xu_x = x$.

15. Giải các bài toán Cauchy của phương trình tựa tuyến tính sau, cho trước $u(x,0) = f(x)$.

(a) $u_t - u^2 u_x = 3x$

(b) $u_t + t^2 uu_x = -u$.

(c) $u_t + xuu_x = 5 + u$, $f(x) = x$.

16. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm $u = e^{\alpha x + \beta y}$, với α và β được chọn thích hợp:

(a) $u_x + 3u_y + u = 0$

(b) $u_{xx} + u_{yy} = 5e^{x-2y}$.

17. Viết phương trình $u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$, trong hệ toạ độ $s = x + y$, $t = 2x$.

18. Chứng tỏ rằng các bài toán sau là bài toán Sturm-Liouville chính qui và tìm các giá trị riêng λ_n và hàm riêng X_n tương ứng.

(a) $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X'(L) = 0$.

(b) $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) + aX(L) = 0$, $X'(0) + bX'(L) = 0$.

(c) $(xX'(x))' + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(L) = 0$.

19. Giải bài toán

$$\begin{cases} X'' + 2aX + \lambda X = 0, \ a > 1 \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

20. Tìm giá trị a sao cho λ âm

$$\begin{cases} X'' + aX + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

21. Giải bài toán Cauchy

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

22. Bài toán Cauchy của *phương trình nhớt Burger* có dạng

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0, \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Có hai trạng thái shock xuất phát tại thời điểm ban đầu $t = 0$, ứng với hai vị trí $x = 0$ và $x = 1$. Điều này sẽ dẫn đến một trạng thái shock thứ ba. Hãy tìm nghiệm (giải tích) của bài toán, vẽ hình và chỉ ra các đường cong bao của nó.

Chương 2
Mở đầu về phương trình cấp hai

Trong chương này chúng ta sẽ làm quen với một cách phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai dựa biệt thức của phần chính của phương trình. Tiếp theo, chúng ta sẽ làm quen với một số phương trình và bài toán đại diện cho mỗi loại phương trình. Ta cũng sẽ làm quen với một số khái niệm về tính đặt chỉnh của bài toán phương trình đạo hàm riêng và một số ví dụ về bài toán đặt không chỉnh.

2.1. Phân loại phương trình cấp hai

Như đã nêu trong phần giới thiệu, chương trình của môn học tập trung vào các phương trình tuyến tính cấp hai. Có nhiều các phân loại lớp phương trình này. Một trong những cách thông dụng và thuận tiện là phân loại chúng thành ba loại phương trình *elliptic*, *parabolic*, và *hyperbolic*. Để cho thuận tiện, ta sẽ bắt đầu bằng việc phân loại trong trường hợp ẩn hàm là hàm hai biến. Cách phân loại trong trường hợp ẩn hàm là hàm nhiều biến sẽ được giới thiệu ở phần cuối của chương.

2.1.1. Trường hợp ẩn hàm là hàm hai biến

Xét phương trình đạo hàm riêng cấp hai hai biến với các hệ số thực

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = 0, \tag{2.1.1}$$

hay dạng rút gọn

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \tag{2.1.2}$$

với a, b, c là các hàm đủ trơn xác định trên Ω. Cần phải chú ý rằng (điều này sẽ được giải thích kĩ hơn ở các chuyên đề sâu hơn về Phương trình đạo hàm riêng và Giải tích hàm), việc phân loại các phương trình dạng (2.1.2) sẽ **chỉ** phụ thuộc vào thành phần chính[(1)]

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy},$$

mà không chịu ảnh hưởng bởi hàm $F(\cdot)$ phía sau. Xét điểm $(x_0, y_0) \in \Omega$ cố định. Phương trình (2.1.2) tại điểm (x_0, y_0) được gọi là

a) thuộc loại *ellip* (hay *phương trình elliptic*) nếu tại điểm đó $b^2 - ac < 0$,

[(1)]principle part

b) thuộc loại *hyperbol* (hay *phương trình hyperbolic*) nếu tại điểm đó $b^2 - ac > 0$,

c) thuộc loại *parabol* (hay *phương trình parabolic*) nếu tại điểm đó $b^2 - ac = 0$.

Nếu phương trình (2.1.2) thuộc một loại nào đó tại mọi điểm thuộc miền Ω thì nói rằng phương trình thuộc loại đó trong miền Ω. Hiển nhiên, về lí thuyết việc phân loại được hoàn thành, tuy nhiên, xét ở khía cạnh thực hành, điều này chưa thực sự thuyết phục, vì nếu chỉ dừng lại ở việc nhận biết phương trình này thuộc loại nào thì câu chuyện quá tẻ nhạt. Người ta còn muốn đi xa hơn! Để làm được điều đó, người ta đã chứng minh được rằng qua phép đổi biến bất kỳ

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y), \end{aligned}$$

với $\xi(x, y), \eta(x, y) \in C^2(\Omega)$ sao cho jacobian

$$|J| = \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right| \neq 0,$$

loại của phương trình sẽ không thay đổi. Điều này có nghĩa rằng qua một phép đổi biến thích hợp (bất kì!), phương trình sẽ không thay đổi tính chất (mặc dù nó thay đổi "hình dạng".) Từ đó, thông qua phép đổi biến $(x, y) \to (\xi, \eta)$, ta sẽ đưa phương trình được xét về một phương trình có dạng đơn giản hơn.(2) Bây giờ ta đi chứng minh khẳng định ở trên. Thật vậy, với phép đổi biến ở trên, ta có (3)

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned}$$

Thay các đại lượng trên vào phương trình (2.1.2) ta được

$$a_1(\xi, \eta) u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi, \eta) u_{\xi\eta} + c_1(\xi, \eta) u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\eta, u_\xi) = 0,$$

với

$$\begin{aligned} a_1 &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2, \\ b_1 &= a\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c\xi_y \eta_y, \\ c_1 &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

(2) Một trong những phép đổi biến đó sẽ đưa phương trình về dạng *chính tắc*.

(3) Nếu không có gì nhầm lẫn, ta vẫn sử dụng kí hiệu ẩn hàm u qua phép đổi biến $(x, y) \to (\xi, \eta)$.

Ở đây, chú ý rằng F và F_1 đang được xét là các đa thức thuần nhất đối với các biến độc lập, ẩn hàm và các đạo hàm riêng cấp 1. Tính toán đơn giản ta được (bạn đọc hãy thử xem sao?!)

$$b_1^2 - a_1c_1 = (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2.$$

Rõ ràng dấu của vế trái và vế phải của biểu thức trên là như nhau. Ta có điều cần chứng minh.

Bây giờ, trong vô vàn cách đổi biến, ta phải chọn một cách đổi biến thích hợp để đơn giản hóa phương trình ban đầu, bạn sẽ chọn cách nào? Nhận xét trực quan ta có thể thấy rằng a_1 và c_1 có cùng dạng, là một phương trình đạo hàm riêng cấp một phi tuyến, chỉ khác "biến". Vậy nếu ta chọn ξ, η là các nghiệm của phương trình

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = 0, \tag{2.1.4}$$

thì trong (2.1.3) ta có $a_1 = c_1 = 0$, tức là phương trình ban đầu đã trở nên đơn giản hơn, vì chỉ còn đại lượng ứng với hệ số b_1. (Còn gì bằng!) Từ nhận xét này, ta phát biểu kết quả dưới đây thể hiện mối liên quan giữa nghiệm của phương trình (2.1.4) với việc đưa phương trình (2.1.2) về dạng đơn giản hơn.

Bổ đề 2.1.1. *Nếu $z = \varphi(x, y)$ là một nghiệm của phương trình* (2.1.4) *thì hệ thức*

$$\varphi(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{2.1.5}$$

xác định hàm $y = y(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thường

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0. \tag{2.1.6}$$

Ngược lại, nếu $\varphi(x, y) = C$ là nghiệm tổng quát của phương trình (2.1.6) *thì hàm $z = \varphi(x, y)$ là một nghiệm riêng của phương trình* (2.1.4).

Chứng minh.($\Rightarrow$) Theo giả thiết, vì $z = \varphi(x, y)$ là nghiệm của (2.1.4) nên ta có hệ thức

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0, \tag{2.1.7}$$

hay

$$a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0. \tag{2.1.8}$$

Điều này có thể thực hiện được vì ta có thể coi $a \neq 0$, tức là $\varphi_y(x, y) \neq 0$.[4] Nhắc lại rằng, theo định lý hàm ẩn, hàm $y = y(x)$ được xác định từ hệ thức (2.1.5) có đạo hàm được cho theo công thức

$$y'(x) = -\frac{\varphi_x(x, y(x))}{\varphi_y(x, y(x))}. \tag{2.1.9}$$

Từ đó suy ra (2.1.6).

($\Leftarrow$) Ngược lại, nói rằng biểu thức (2.1.5) là nghiệm của (2.1.6) có nghĩa là ẩn hàm $y(x)$ xác định từ hệ thức (2.1.5) thoả mãn (2.1.6) với mọi giá trị của hằng số C.

Để chứng minh hàm $z = \varphi(x, y)$ là nghiệm của (2.1.4) ta hãy chứng minh rằng (2.1.7) được thoả mãn tại mọi điểm (x_0, y_0) bất kỳ trong miền xác định của $\varphi(x, y)$. Thật vậy, xét điểm (x_0, y_0), đặt $C_0 = \varphi(x_0, y_0)$ và xét ẩn hàm $y(x)$ xác định từ hệ thức

$$\varphi(x, y) = C_0.$$

Theo giả thiết, hàm y như trên sẽ thoả mãn (2.1.6), tức là thoả mãn (2.1.6) tại điểm (x_0, y_0). Theo (2.1.9), ta có

$$y'(x_0) = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\bigg|_{(x_0, y_0)}. \tag{2.1.10}$$

Thay (2.1.10) vào (2.1.6) ta được (2.1.8) tại điểm (x_0, y_0) và do đó có (2.1.4) tại (x_0, y_0). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

Phương trình (2.1.6) được gọi là *phương trình đặc trưng* của (2.1.2), đường cong tích phân $\varphi(x, y) = C$ được gọi là *đường cong đặc trưng* của (2.1.2).[5]

Nhận xét 2.1.1. Nếu từ hệ thức (2.1.5) ta không suy ra được ẩn hàm y theo x thì ta thay đổi vai trò của y và x, tìm ẩn hàm $x = x(y)$ thoả mãn phương trình

$$a - 2bx' + cx'^2 = 0.$$

Bây giờ ta xét các cách đổi biến để đưa các phương trình về dạng chính tắc đối với từng loại.

Phương trình hyperbolic. Ta có $\delta = b^2 - ac > 0$.

---

[4] Không giảm tổng quát, ta có thể coi $a \neq 0$ và $\varphi_y \neq 0$. Trường hợp ngược lại, ta sẽ xét trường hợp $c \neq 0$ và tương ứng là $\varphi_x \neq 0$.

[5] Ở đây ta đang nói đến phương trình đặc trưng và đường cong đặc trưng đối với phương trình tuyến tính cấp hai.

1. Trường hợp $a \neq 0$. Khi đó phương trình (2.1.6) có hai nghiệm thực đối với y' là

$$y'_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

từ đó suy ra hai nghiệm phân biệt $\varphi(x, y)$ và $\psi(x, y)$. Áp dụng Bổ đề 2.1.1 ta có thể xét phép đổi biến $(x, y) \mapsto (\xi, \eta) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$. Ta có

$$\left|\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\right| = \det \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} \neq 0.$$

Thay vào phương trình (2.1.3) thì ta được $a_1 = c_1 = 0$, và phương trình ban đầu sẽ có dạng chính tắc

$$u_{\xi\eta} = F_1^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{2.1.11}$$

2. Trường hợp $a = 0$. Khi đó phương trình các đường đặc trưng của (2.1.2) có dạng $a - 2bx' + cx'^2 = 0$, ta có ngay dạng chính tắc

$$u_{xy} = F^*(x, y, u, u_x, u_y).$$

3. Nếu thực hiện phép đổi biến

$$\xi = \alpha - \beta, \quad \eta = \alpha + \beta,$$

thì dạng chính tắc của phương trình (2.1.11) có dạng

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta).$$

Nhận xét 2.1.2. Nếu không gây nhầm lẫn, ta vẫn sử dụng kí hiệu ẩn hàm là u sau khi thực hiện phép đổi biến $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$. Khi đó ẩn hàm u sẽ được xem là một hàm phụ thuộc vào hai biến độc lập mới (ξ, η).

Ví dụ 2.1.1. Phân loại và đưa về dạng chính tắc phương trình sau:

$$u_{xx} - 7u_{xy} + 12u_{yy} + u_x - 2u_y - 3u = 0.$$

Ta có phương trình đường đặc trưng tương ứng là $y'^2 + 7y' + 12 = 0$. Vì biệt thức $\Delta = 1 > 0$ nên đây là phương trình hyperbolic. Từ đó, áp dụng Bổ đề 2.1.1 ở trên ta được nghiệm của phương trình đường đặc trưng là $y' = -3$ và $y' = -4$. Ta nhận được hai [họ] đường cong tích phân tổng quát tương ứng

$$y + 3x = C_1,$$

$$y + 4x = C_2.$$

Thực hiện phép đổi biến $\xi = y + 3x$, $\eta = y + 4x$ ta tính được

$$b_1 = \xi_x\eta_x - \frac{7}{2}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \xi_y\eta_y = 12 - \frac{49}{2} + 12 = -\frac{1}{2},$$

và

$$u_x = 3u_\xi + 4u_\eta, \quad u_y = u_\xi + u_\eta.$$

Khi đó phương trình chính tắc là

$$-u_{\xi\eta} + u_\xi + 2u_\eta - 3u = 0.$$

Phương trình elliptic. Ta có $\delta = b^2 - ac < 0$. Với giả thiết rằng a, b, c là những hàm giải tích đối với x và y, phương trình đường đặc trưng của (2.1.2) có nghiệm phức (cùng với liên hợp của nó). Khi đó dạng tổng quát của phương trình đường đặc trưng sẽ là $\varphi(x, y) = C$ và $\varphi^*(x, y) = C$, với $\varphi^* = C$ là liên hợp phức của đường cong $\phi(x, y)$ của phương trình đặc trưng. Ta có nhận xét rằng

$$a_1 = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0, \tag{2.1.12}$$

$$c_1 = a\varphi_x^{*2} + 2b\varphi_x^*\varphi_y^* + c\varphi_y^{*2} = 0, \tag{2.1.13}$$

tức là nếu xét phép đổi biến (phức)

$$\xi = \varphi(x, y),$$
$$\eta = \varphi^*(x, y),$$

thì phương trình nhận được sẽ có dạng đơn giản hơn phương trình ban đầu. Ta xét cách biểu diễn

$$\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y),$$

với α, β là các hàm số thực, đóng vai trò phần thực và phần ảo của φ. Thay vào (2.1.12) ta được

$$a\alpha_x^2 + 2b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2 = a\beta_x^2 + 2b\beta_x\beta_y + c\beta_y^2,$$
$$a\alpha_x\beta_x + b(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + c\alpha_y\beta_y = 0.$$

tức là nếu xét phép đổi biến[6]

$$\alpha = \alpha(x, y),$$
$$\beta = \beta(x, y),$$

[6] Thực chất ở đây ta đặt

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \varphi^*(x, y)), \quad \beta = \frac{1}{2i}(\varphi(x, y) - \varphi^*(x, y)).$$

thì a có

$$\left|\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)}\right| \neq 0,$$

Từ các tính toán ở trên, phương trình (2.1.2) sẽ trở thành

$$a_2u_{\alpha\alpha} + 2b_2u_{\alpha\beta} + c_2u_{\beta\beta} + F_2(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta) = 0,$$

với

$$a_2 = c_2 = a\alpha_x^2 + 2b\alpha_x\alpha_y + c\alpha_y^2 \quad \text{và} \quad b_2 = 0.$$

Rõ ràng ta có hệ thức $b_2^2 - a_2c_2 = -a_2^2 < 0$. Khi đó, phương trình chính tắc của phương trình (2.1.2) sẽ có dạng

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta). \tag{2.1.14}$$

Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 2.1.2.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 0.$$

Phương trình đường đặc trưng:

$$y'^2 - 2y' + 5 = 0,$$

có biệt thức $\Delta = -4 < 0$. Từ đó phương trình có nghiệm phức $y' = 1 + 2i$, kéo theo đường cong tích phân tương ứng $y - x - 2ix = C_1$. Đặt

$$\alpha = y - x,$$

$$\beta = -2x.$$

Sử dụng các tính toán đơn giản ta nhận được $a_2 = c_2 = 4$, $b_2 = 0$, từ đó nhận được phương trình chính tắc tương ứng là

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{5}{4}u_\alpha + u_\beta = 0.$$

Phương trình parabolic. Tương ứng với trường hợp $\delta = b^2 - ac = 0$. Khi đó phương trình đường đặc trưng có nghiệm kép

$$\varphi(x,y) = C.$$

Ta dùng phép thế biến

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

với $\psi(x,y)$ là hàm được chọn tùy ý [7] và thoả mãn điều kiện

$$\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right| \neq 0.$$

[7] Hàm ψ được chọn sao cho đơn giản và thuận tiện trong việc tính các hệ số sau đổi biến.

Tính toán tương tự trường hợp hyperbolic ta thu được các hệ số a_1, b_1 triệt tiêu, còn c_1 không triệt tiêu, cho bởi công thức

$$c_1 = a(\eta_x)^2 + 2b\eta_x\eta_y + c(\eta_y)^2.$$

Khi đó phương trình chính tắc của phương trình (2.1.2) sẽ có dạng

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\eta, u_\xi). \tag{2.1.15}$$

Chú ý rằng trong trường hợp $b = 0$ thì phương trình (2.1.2) có sẵn dạng (2.1.15).

Ví dụ 2.1.3. Phân loại và đưa về dạng chính tắc

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x + u_y + 12u = 0.$$

Ta có phương trình đường đặc trưng là $y'^2 - 4y' + 4 = 0$ có biệt thức $\Delta = 0$, vậy đây là phương trình parabolic. Phương trình đặc trưng có nghiệm $y' = 2$, suy ra $y - 2x = C$. Xét phép đổi biến

$$\xi = y - 2x,$$
$$\psi = y.$$

Rõ ràng ξ và ψ trực giao với nhau. Theo phần lý thuyết, các hệ số a_1 và b_1 triệt tiêu, còn $c_1 = 1$. Vậy ta có dạng chính tắc của phương trình đã cho là

$$u_{\eta\eta} + 5(-2u_\xi) + u_\xi + u_\eta + 12u = 0$$
$$\iff u_{\eta\eta} - 9u_\xi + u_\eta + 12u = 0.$$

Nhận xét 2.1.3. Ở trên ta mới chỉ xét trường hợp các hệ số của đạo hàm riêng cấp 2 của ẩn hàm là các hằng số. Trong trường hợp a, b, c là các hàm số (phụ thuộc x, y) thì cần chú ý xác định miền mà ở đó phương trình thuộc loại nào. Ví dụ phương trình Tricomi

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0,$$

có biệt thức $\delta = -y$. Thế thì miền elliptic của nó sẽ là miền $\{x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$, miền hyperbolic của nó sẽ là $\{x \in \mathbb{R},\ y < 0\}$, và miền parabolic của nó sẽ là đường thẳng $y = 0$, tức là trục hoành. Trong mỗi miền, ta lại xác định được phương trình chính tắc của phương trình ban đầu, và rõ ràng các phương trình đó là khác nhau. Cũng cần chú ý thêm là khi các hệ số không còn là hằng số, đường cong đặc trưng sẽ không còn là họ các đường thẳng, và vì vậy đạo hàm cấp hai của phép đổi biến $(x, y) \to (\xi, \eta)$ sẽ không bị triệt tiêu. Trong thực hành, người học cần chú ý các thành phần này để biểu thức của phương trình chính tắc là đầy đủ.

2.1.2. Trường hợp nhiều hơn hai biến số

Ta xét ký hiệu toán tử vi phân đạo hàm riêng cấp hai tuyến tính

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2.1.16}$$

ở đây giả thiết rằng $a_{ij}(x)$, $i, j = 1 \ldots, n$, là các hàm khả vi liên tục đến cấp hai theo biến $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, và $a_{ij} = a_{ji}$. Bài toán đặt ra là phân loại và đưa phương trình đạo hàm riêng có dạng

$$L[u] + F(x, u, Du) = 0, \tag{2.1.17}$$

về dạng chính tắc (ở đây F là hàm cho trước bất kì thích hợp). Ta xét dạng song tuyến tính ứng với toán tử $L[u]$

$$\omega(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j. \tag{2.1.18}$$

Sử dụng các kết quả của đại số tuyến tính, ta xét ma trận

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Ở đây, ma trận A là đối xứng vì giả thiết $a_{ij} = a_{ji}$. Xét điểm $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ cố định. Để phân loại phương trình, chúng ta xét phương trình đặc trưng

$$\det(A(x^0) - \lambda E) = 0, \tag{2.1.19}$$

trong đó E là ma trận đơn vị, còn λ là một đại lượng vô hướng. Ta có các định nghĩa sau

Định nghĩa 2.1.1. Xét điểm $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ thuộc miền xác định của phương trình (2.1.17). Phương trình (2.1.17) được gọi là

1. *phương trình elliptic* tại điểm x^0nếu tại điểm đó tất cả n nghiệm đối với λ của phương trình đặc trưng (2.1.19) đều khác không và cùng dấu. Khi đó dạng toàn phương tương ứng sẽ là một dạng xác định (dương hoặc âm).

2. *phương trình hyperbolic* tại điểm x^0 nếu tại điểm đó tất cả n nghiệm đối với λ của phương trình đặc trưng (2.1.19) đều khác không, với $n - 1$ nghiệm cùng dấu.

3. *phương trình parabolic* tại điểm x^0 nếu tại điểm đó phương trình đặc trưng tương ứng đối với λ có một nghiệm bằng không, và $n - 1$ nghiệm còn lại (2.1.19) khác không và cùng dấu. Khi đó dạng toàn phương tương ứng sẽ là một dạng xác định (dương hoặc âm).

Có một cách xây dựng dạng chính tắc tương tự như trường hợp hàm hai biến như sau. Xét phương trình tuyến tính cấp hai nhiều biến dạng tổng quát

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0.$$

Xét phép đổi biến $x \mapsto \xi$, hay cụ thể hơn là

$$\xi_k = \xi_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó ta có các biến đổi tương ứng

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik} \\ u_{x_ix_j} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_ix_j}, \end{aligned}$$

với $\alpha_{jk} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}u_{\xi_k}u_{\xi_l} + \sum_{k=1}^{n} b_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

trong đó

$$\begin{aligned} a_{kl} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}, \\ b_k &= \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_{ik} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi_k)_{x_ix_j}. \end{aligned}$$

Ta xét dạng song tuyến tính tại điểm x^0

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^0 y_i y_j,$$

Nếu xét phép biến đổi tuyến tính không suy biến $y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_i\eta_k$, tức là $\det(\alpha_{ik}) \neq 0$, thì ta được dạng song tuyến tính mới

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0 \eta_k\eta_l,$$

Sử dụng các kết quả của đại số tuyến tính, ta thấy rằng số các hệ số trên đường chéo a_{ii} khác không của dạng song tuyến tính ở trên sẽ chính là hạng của ma trận (a_{ij}^0), và số các hệ số âm là không đổi, đồng thời ta có

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 1 \text{ hoặc } 0, \quad \bar{a}_{ij}^0 = 0,\ i \neq j.$$

Ta gọi dạng song tuyến tính đấy là *dạng chính tắc* [8] Dạng chính tắc tương ứng sẽ là

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + \Phi = 0, \quad \text{dạng elliptic,}$$

$$u_{x_1 x_1} - \sum_{i=2}^{n} u_{x_i x_i} + \Phi = 0, \quad \text{dạng hyperbolic,}$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_i x_i}) + \Phi = 0,\ m > 0 \quad \text{dạng parabolic.}$$

2.2. Một số ví dụ cho các ứng dụng thực tiễn

Mục này được dành để giới thiệu tới bạn đọc một số mô hình thực tiễn dẫn đến phương trình và các bài toán giá trị ban đầu và bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai cơ bản.[9]

2.2.1. Phương trình dao động của dây

Xét sợi dây căng thẳng theo trục Ox. Người ta tác động khiến cho sợi dây dao động. Bài toán đặt ra là sẽ nghiên cứu quy luật dao động của sợi dây. Ta có các giả thiết:

- Sợi dây rất mảnh và không cưỡng lại sự uốn.

- Có lực căng T tương đối lớn so với trọng lượng của dây, tức là bỏ qua được trong lượng của sợi dây.

- Ta chỉ xét những dao động ngang của sợi dây, tức là khi dao động, các phần tử của dây chỉ chuyển động theo phương vuông góc với trục Ox, không xét các dao động của dây nằm ngoài mặt phẳng Oux.

Xét tại vị trí điểm M trên sợi dây, ký hiệu độ lệch của M so với vị trí cân bằng là u, khi đó $u = u(x,t)$, với x là toạ độ của M trên dây và t là thời gian. Tại thời điểm $t = t_0$ cho trước ta có $u = u(x, t_0) = f(x)$, tức là tại điểm $t = t_0$, ta nhận được hình dáng của dây rung $u = f(x)$. Giả thiết thêm rằng độ lệch của dây $u(x,t)$ và đạo hàm riêng u_x là rất nhỏ đến mức có thể bỏ qua đại lượng $(u_x)^2$. Xét đoạn dây giới hạn bởi hai điểm M_1, M_2 với hoành độ tương ứng x_1 và x_2. Vì ta có thể bỏ qua đại lượng $(u_x)^2$ nên độ dài của đoạn dây M_1M_2 bằng:

$$l' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \approx x_2 - x_1 = l,$$

tức là bằng độ dài của đoạn $\overline{M_1M_2}$ ở trạng thái cân bằng, hay độ dài của sợi dây không đổi khi nó dao động. Vậy, theo định luật Hooke, lực căng của sợi dây cũng không thay đổi

---

[8] dạng chính tắc: canonical form.

[9] Mục này được dành cho độc giả đọc và tìm hiểu. Có thể xem, ví dụ như trong [1, 4, 7, 2]...

$T = T_0$. Ta sẽ thiết lập phương trình dao động của dây dựa vào nguyên lý d'Alembert [(10)]: *"Trong chuyển động của đoạn dây, tổng các lực tác động vào đoạn dây, kể cả lực quán tính bằng không; do đó tổng các hình chiếu của các lực trên một trục bất kỳ là bằng không."* Ta có hình chiếu lên trục u của tổng các lực tác dụng lên đoạn dây M_1M_2, bao gồm lực căng của dây, ngoại lực tác dụng và lực quán tính bằng không. Khi đó ta có lực căng của dây hướng theo phương tiếp tuyến tại M_1 và M_2, bằng T_0. Như vậy tổng hình chiếu các lực căng tại M_1 và M_2 lên trục u bằng

$$Y = T_0[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)], \tag{2.2.20}$$

với $\alpha(x)$ là góc hợp với trục Ox của véctơ tiếp tuyến tại điểm x. Thay

$$\sin\alpha(x) = \frac{\tan\alpha(x)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

vào (2.2.20), ta được

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx. \tag{2.2.21}$$

Giả sử $p(x,t)$ là ngoại lực tác động vào sợi dây, song song với trục u và phân phối trên một đơn vị chiều dài. Khi đó hình chiếu trên trục u của ngoại lực tác động lên đoạn dây đang xét là

$$P = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx. \tag{2.2.22}$$

Gọi tỷ trọng dài của sợi dây là $\rho(x)$ (tức là mật độ phân bố vật chất theo chiều dài). Khi đó lực quán tính của đoạn dây đang xét là

$$Z = -\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx. \tag{2.2.23}$$

Từ (2.2.21), (2.2.22), (2.2.23), áp dụng nguyên lý d'Alembert ở trên ta được

$$Y + P + Z = \int_{x_1}^{x_2}\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t)\right)dx. \tag{2.2.24}$$

Chú ý rằng x_1 và x_2 là những vị trí bất kỳ, ta suy ra biểu thức dưới dấu tích phân của (2.2.24) phải triệt tiêu, tức là

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t). \tag{2.2.25}$$

Phương trình (2.2.25) được gọi là phương trình dao động của dây. Trong trường hợp dây đồng chất, ngoại lực tác động bằng không, phương trình (2.2.25) trở thành

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{với} \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho(x)}}. \tag{2.2.26}$$

[(10)] D'Alembert principle.

Lẽ dĩ nhiên, phương trình (2.2.25) có vô số nghiệm. Nghiệm duy nhất sẽ được xác định ứng với một số điều kiện cho trước nào đấy, đây tương ứng với các bài toán biên và bài toán giá trị ban đầu cho phương trình (2.2.25). Việc nghiên cứu các bài toán biên và bài toán giá trị ban đầu đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Xét trong các không gian 2,3 chiều, ta có các bài toán truyền sóng tương ứng trên màng rung ($u = u(x, y, t)$, ví dụ là mặt trống) và bài toán truyền âm trong không gian ($u = u(x, y, z, t)$, với ví dụ là hiện tượng truyền sóng của ăng ten). Việc thiết lập các phương trình đó được tiến hành tương tự như cách ở trên.

2.2.2. Phương trình truyền nhiệt trong môi trường đẳng hướng

Xét một vật thể rắn V giới hạn bởi mặt kín trơn S, mà nhiệt độ của nó tại điểm (x, y, z) tại thời điểm t là một hàm $u(x, y, z, t)$. Khi nhiệt độ tại các phần của vật thể khác nhau thì trong vật thể đó có sự trao đổi nhiệt lượng từ phần nóng hơn sang phần lạnh hơn. Xét một diện tích ΔS trong vật thể. Khi đó nhiệt lượng ΔQ truyền qua diện tích đó trong khoảng thời gian Δt sẽ tỷ lệ với tích $\Delta S \Delta t$ và với $\frac{\partial u}{\partial n}$, trong đó vectơ $\overrightarrow{n}$ là vectơ pháp tại phần mặt ΔS hướng theo chiều truyền nhiệt, tức là

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S \Delta t,$$

k được gọi là hệ số truyền nhiệt. Vì môi trường đang xét là đẳng hướng nên hệ số k không phụ thuộc vào phương của mảnh ΔS mà chỉ phụ thuộc vào (x, y, z). Ta thiết lập sự thay đổi nhiệt lượng trong V trong khoảng thời gian t_1 đến t_2 bất kỳ, từ đó thiết lập được phương trình truyền nhiệt. Gọi $\gamma(x, y, z)$ là nhiệt dung và $\rho(x, y, z)$ là tỷ khối của V tại điểm (x, y, z), phần thể tích ΔV sẽ hấp thụ được một nhiệt lượng ΔQ_1 là

$$\Delta Q_1 = [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\gamma(x, y, z)\rho(x, y, z)\Delta V.$$

Từ đó suy ra thể tích V sẽ hấp thụ một lượng nhiệt là

$$Q_1 = \iiint\limits_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\gamma(x, y, z)\rho(x, y, z)dV$$

hay

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV. \tag{2.2.27}$$

Mặt khác, nhiệt lượng Q_1 bằng tổng nhiệt lượng Q_2 truyền từ ngoài vào qua biên S và lượng nhiệt Q_3 tự sinh trong V do các nguồn nhiệt khác nhau trong V. Ta có

$$Q_2 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}dS, \quad (\overrightarrow{n} \text{ là pháp tuyến trong của } S). \tag{2.2.28}$$

Gọi F là mật độ nguồn nhiệt trong vật thể tại từng điểm. Khi đó

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t)dV. \tag{2.2.29}$$

Kết hợp (2.2.27), (2.2.28), (2.2.29) và hệ thức $Q_1 = Q_2 + Q_3$, ta được

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t)dV.$$

Áp dụng công thức Oxtrogradski, chú ý rằng $\vec{n}$ là pháp tuyến trong của S, ta được

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \left(\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k\overrightarrow{\operatorname{grad}}u) - F(x,y,z,t)\right) dV = 0.$$

Vì thể tích V được lấy bất kỳ, ta có

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\overrightarrow{\operatorname{grad}}u) + F(x,y,z,t). \tag{2.2.30}$$

Phương trình này gọi là *phương trình truyền nhiệt trong vật thể đẳng hướng không thuần nhất*, được biểu diễn dưới dạng phân kì [11]. Trong trường hợp thuần nhất, các hệ số γ, ρ và k đều là hằng số, phương trình truyền nhiệt ở trên trở thành

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t),$$

với

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \quad f(x,y,z,t) := \frac{F(x,y,z,t)}{\gamma\rho}.$$

Ta thường kí hiệu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

và gọi là Laplacian của hàm u. Tương ứng với số chiều của không gian bằng hai và một, ta nhận được các phương trình truyền nhiệt trên bản mỏng ($u = u(x,y,t)$) và trên thanh ($u = u(x,t)$). Tương tự phương trình truyền sóng, ta cũng thiết lập các điều kiện ban đầu và điều kiện biên để xác định nghiệm của phương trình truyền nhiệt, ta dẫn đến bài toán giá trị biên-ban đầu của phương trình truyền nhiệt hoặc bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt.

[11] dạng phân kì: divergent form

2.2.3. Phương trình Laplace

Ta tiếp tục xét phương trình (2.2.30). Giả sử đến một thời điểm nào đó, các điều kiện biên và các nguồn nhiệt được xét trong bài toán truyền nhiệt không còn phụ thuộc thời gian thì lúc đó nghiệm của bài toán truyền nhiệt sẽ ở trạng thái "tĩnh" (12). Khi đó, phân bố nhiệt độ trong miền được xét là "ổn định" đối với thời gian, được gọi là *thế vị nhiệt độ*. Ta đi thiết lập phương trình của hiện tượng này. Nhắc lại rằng phương trình này được "xuất phát" từ phương trình truyền nhiệt, kết hợp với thực tế là ẩn hàm không phụ thuộc vào thời gian, ta có phương trình

$$-\Delta u = 0. \tag{2.2.31}$$

Phương trình này được gọi là *phương trình Laplace*.(13) Ở đây ta đang xét trường hợp không có nguồn nhiệt, tức là xét vế phải bằng không. Trong trường hợp có nguồn nhiệt (và nguồn nhiệt đó không phụ thuộc thời gian) thì ta có phương trình Poisson

$$-\Delta u = f(x).$$

Cùng phương trình elliptic này, ta thiết lập các bài toán biên, với các giá trị trên biên được cho dưới dạng trực tiếp ($u|_S = \varphi(P)$) hoặc gián tiếp ($\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \varphi(P)$). Bài toán tìm phân bố của nhiệt độ bên trong một vật thể (kín, không có tiếp xúc với bên ngoài) khi biết được (đo được) nhiệt độ ở trên [toàn bộ] biên được gọi là *Bài toán Dirichlet*, theo tên nhà toán học L.Dirichlet là người đầu tiên nghiên chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán này. Bài toán tìm nghiệm của phương trình elliptic khi biết giá trị trên biên của đạo hàm theo hướng pháp tuyến của ẩn hàm được gọi là *Bài toán Neumann*. Ý nghĩa vật lí của điều kiện biên Neumann chính là người ta có thể tìm được phân bố nhiệt (thế vị nhiệt) của vật thể khi biết được tốc độ phân tán nhiệt độ ra môi trường ngoài ở mọi điểm trên biên của vật thể đó. Bài toán tìm nghiệm của phương trình khi biết giá trị trên biên của tổng giữa ẩn hàm cần tìm và đạo hàm theo hướng pháp tuyến của ẩn hàm gọi là *Bài toán hỗn hợp* hay *Bài toán Robin*. Bên cạnh đó, ta cũng xét bài toán mà điều kiện biên Neumann được cho trên một phần biên, và điều kiện biên Dirichlet được cho trên phần biên còn lại của vật thể. Việc nghiên cứu các bài toán như nêu ở trên không chỉ có ý nghĩa về mặt định tính mà còn có ứng dụng rất thực tiễn trong các bài toán vật lý, hoá học, sinh thái học...Có thể nêu một ví dụ đơn giản nhất là mô tả chuyển động không xoáy của chất lỏng lý tưởng (thuần nhất,

(12)steady-state solutions

(13)Bài toán được lấy theo tên nhà toán học P-S. Laplace của Pháp thế kỉ 18-19, lần đầu tiên đề xuất vào năm 1780. Dạng phân kì của nó (khi môi trường không đồng chất)

$$\nabla(a\nabla u) = 0$$

Ta sử dụng kí hiệu ∇u tương tự như Du, và chú ý rằng $\nabla^2 u = \Delta u$.

không nén được) trong môi trường đồng nhất, vectơ vận tốc v của chất lỏng lý tưởng sẽ là vectơ thế, tức là tồn tại hàm thế $\varphi(x,y,z)$ sao cho $\vec{v}(x,y,z) = -\overrightarrow{\text{grad}}\varphi$. Khi đó phương trình chuyển động liên tục cho ta

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

hay

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = 0,$$

tức là

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

2.3. Tính đặt chỉnh của bài toán phương trình đạo hàm riêng

2.3.1. Bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh. Phản ví dụ của Hadamard

Trong các bài toán vật lý dẫn đến các bài toán của phương trình đạo hàm riêng, một vấn đề thực tiễn đặt ra là các sai số do thực nghiệm, đo đạc các số liệu thực tiễn sẽ ảnh hưởng đến sai số của nghiệm. Do đó việc mô hình hóa toán học các quá trình vật lý cần thỏa mãn các đòi hỏi sau:

- Nghiệm của bài toán phải **tồn tại** trong một lớp hàm X nào đó.

- Nghiệm đó là **duy nhất** trong một lớp hàm Y nào đó.

- Nghiệm của bài toán **phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện đã cho** của bải toán (điều kiện ban đầu, điều kiện cho trên biên, số hạng tự do, các hệ số của phương trình.

J.S.Hadamard (186-1963) đã đưa ra khái niệm về tính **đặt chỉnh (đặt đúng đắn, đặt tốt – well-posed)** của một bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng: Một bài toán được gọi là đặt đúng đắn nếu thỏa mãn cả ba điều kiện trên. Nếu không thỏa mãn một trong ba điều kiện trên thì bài toán được gọi là bài toán **đặt không chỉnh (đặt không đúng đắn – ill-posed problem)**.

Ví dụ 2.3.1.

1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Người ta chứng minh được rằng với f thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo y và liên tục theo (x,y) trong một miền nào đó chứa (x_0,y_0) thì bài toán là đặt đúng đắn.

2. Xét bài toán giá trị ban đầu của phương trình elliptic sau: cho $u = u(x, y)$ xác định trong $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Bài toán

$$\begin{aligned} -\Delta u = 0, &\quad \text{trong } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = g(x), & \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi(x). & \end{aligned}$$

Cho $g(x) = 0$ và $\varphi(x) = \sin ax$ thì ta nhận được nghiệm của bài toán là

$$u(x, y) = \frac{1}{a} \sin(ax) \sinh(ay).$$

Rõ ràng các dữ kiện Cauchy (g, φ) bị chặn theo tham số a, nhưng nghiệm u sẽ bùng nổ (blow-up) khi $a \to \infty$. Do vậy nghiệm sẽ không phụ thuộc và điều kiện ban đầu. Thực chất, nghiệm này không bị chặn theo bất kỳ một chuẩn nào (ví dụ chuẩn Sobolev hay chuẩn Hölder).

2.3.2. Định lí Cauchy-Kovalevskaia

Trong mục này, ta sẽ nêu ra một điều kiện cần và đủ để tồn tại nghiệm giải tích[(14)] của bài toán Cauchy của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai tổng quát. Xét $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ là một miền trong $\mathbb{R}^n$. Ta xét bài toán Cauchy tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai tổng quát

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), \tag{2.3.32}$$

ở đây a_{ij}, a_i, a, f là các hàm đủ trơn. Ta nhắc lại rằng bài toán tìm nghiệm của phương trình thỏa mãn các điều kiện ban đầu tại $t = t_0$ là bài toán Cauchy[(15)] Trong phương trình vi phân thường, ứng với trường hợp $n = 2$, ta đã có định lý Cauchy khẳng định rằng bài toán Cauchy có nghiệm giải tích duy nhất trong một lận cận nào đó của t_0, nếu các hệ số và số hạng tự do của phương trình là các hàm giải tích trong khoảng (a, b) chứa điểm t_0. Một cách tự nhiên, ta tìm cách mở rộng kết quả trên cho trường hợp phương trình đạo hàm riêng. Giả

[(14)] nghiệm giải tích: analytical solution.

[(15)] Ở đây khái niệm Cauchy được gắn với điều kiện của ẩn hàm cho tại một **thời điểm cố định**. Một cách tổng quát, bài toán Cauchy cấp m là bài toán mà "điều kiện Cauchy" (Cauchy data) của ẩn hàm được cho trên một *siêu mặt* $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ cho bởi biểu thức

$$\phi(x) = 0.$$

Ở đây $\phi(\cdot)$ là hàm có m đạo hàm riêng liên tục và siêu mặt S là chính quy, hiểu theo nghĩa $D\phi \neq 0$. Điều kiện Cauchy cho trên S đối với phương trình cấp m chứa các đạo hàm riêng cấp thấp hơn m, và phải thoả mãn điều kiện tương thích (compatibility condition) trên S.

sử biến của phương trình là $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ được viết dưới dạng $x = (x', t)$, trong đó $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, và đặt $t := x_n$, ở đây t đóng vai trò biến thời gian còn x' đóng vai trò biến không gian. Bài toán Cauchy của phương trình đạo hàm riêng (2.3.32) là tìm nghiệm của phương trình biết rằng trên mặt phẳng $t = t^0$ và trong một lân cận của x^0 có các điều kiện ban đầu

$$u|_{t=t^0} = u_0(x'), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t^0} = u_1(x'). \tag{2.3.33}$$

Định lý sau, mang tên nhà nữ toán học Nga **S. V. Kovalevskaia** (1850 - 1891), sẽ chỉ ra các điều kiện (cần và đủ) để bài toán Cauchy có nghiệm giải tích duy nhất. Giả sử viết phương trình (2.3.32) dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{in}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u + h(x), \tag{2.3.34}$$

Định lý 2.3.1 (Cauchy-Kovalevskaia). *Giả sử b_{ij}, b_{in}, b_i, b, h là các hàm giải tích trong một lân cận nào đó của điểm x^0 còn u_0, u_1, là các hàm giải tích trong một lận cận nào đó của điểm $(x^0)'$. Khi đó bài toán Cauchy* (2.3.34)-(2.3.33) *có nghiệm giải tích*[16] *trong một lân cận nào đó của điểm x^0 và là nghiệm duy nhất trong lớp các hàm giải tích.*

Việc chứng minh định lí này nằm ngoài khuôn khổ của bài giảng. Bạn đọc có thể tìm hiểu về vấn đề này thông qua các từ khoá Cauchy-Kovalevskaia theorem, well-posedness, ill-posedness, Hadamard's conter example, regularization methods...

2.4. Bài tập: Phân loại phương trình cấp 2

1. Chứng minh rằng
$$u = F(xy) + xG\left(\frac{y}{x}\right)$$
là nghiệm tổng quát của
$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

2. Phân loại các phương trình sau tại từng điểm (x, y) tương ứng

   (a) $xu_{xx} + u_{yy} = x^2$

   (b) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = e^x$

   (c) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ (Phương trình Tricomi)

3. Phân loại và đưa các phương trình sau về dạng chính tắc

[16] Còn gọi là nghiệm cổ điển của phương trình đạo hàm riêng

(a) $u_{xx} - 7u_{xy} + 12u_{yy} + u_x - 2u_y - 3u = 0$

(b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 0$

(c) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + u_y + u = 0$

(d) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$

(e) $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} + 7u_y = \sin x$

(f) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$

4. Phân loại và đưa các phương trình sau về dạng chính tắc trong các miền tương ứng

(a) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_x = 0$

(b) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y = 0$

(c) $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$

(d) $\tan^2 x u_{xx} - 2y \tan x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \tan^3 x u_x = 0$

(e) $x_{xx} + u_{yy} = x^2$

(f) $u_{xx} + u_{xy} - xu_{yy} = 0,\ x \le 0$, với mọi y

(g) $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xyu_x + y^2 u_y = 0$

(h) $\sin^2 x u_{xx} + \sin 2x u_{xy} + \cos^2 x u_{yy} = x$

5. Đưa về dạng chính tắc trong miền mà loại phương trình vẫn giữ nguyên.

(a) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0$

(b) $y^{2m+1} u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0\ m \in \mathbb{Z}^+$,

(c) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$

(d) $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$

(e) $\sin^2 x u_{xx} + u_{yy} = 0$

6. Đặt $u = ve^{\lambda x + \mu y}$ và chọn các tham số λ, μ thích hợp, hãy đơn giản hoá các phương trình sau.

(a) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$

(b) $u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_y + \beta u_x + \alpha u$

(c) $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$

(d) Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau:

i. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$

ii. $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$

iii. $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ (gợi ý: đặt $v = (x-y)u$),

iv. $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$ (gợi ý: đặt $u = e^{-(x^2+y^2)/2}v$),

(e) Tìm tích phân tổng quát của các phương trình sau:

i. $u_{xx} - a^2 u_{yy} = 0$

ii. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$

iii. $u_{xy} + au_x = 0$

iv. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y - 2 = 0$

v. $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0,\ a, b = \text{const}$,

vi. $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{xy}$

(f) Tìm các miền elliptic, hyperbolic, parabolic của phương trình

$$(\lambda + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$$

theo λ.

(g) Xét phương trình

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0.$$

i. Phân loại và đưa phương trình về dạng chính tắc.

ii. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

iii. Tìm nghiệm của phương trình với điều kiện ban đầu cho trên đường thẳng $y = 8x$

$$u(x,y)|_{y=8x} = 0, \quad u_x(x,y)|_{y=8x} = 4e^{-2x}.$$

(h) Trả lời các câu hỏi tương tự câu 6g đối với phương trình

$$y^5 u_{xx} - yu_{yy} + 2u_y = 0,$$

biết rằng điều kiện ban đầu là $u(0,y) = 8y^3, \quad u_x(0,y) = 6$, với mọi $y > 0$.

(i) Trả lời các câu hỏi tương tự câu 6g đối với phương trình

$$u_{xx} + (1+y^2)^2 u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0,$$

biết rằng điều kiện ban đầu là $u(x,0) = g(x),\ u_y(x,0) = f(x)$, với $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

7. Phép biến đổi Fourier $\mathcal{F}$ của một hàm khả tích $u(x,y)$ được cho bởi công thức

$$\mathcal{F}[u](\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} u(x,y)e^{-i(x\xi+y\eta)}dxdy, \quad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2,$$

Xét phương trình

$$au_{xx} + bu_{yy} = f(x,y).$$

(a) Biến đổi phương trình trên bằng phép biến đổi Fourier $(x, y) \to (\xi, \eta)$.

(b) Tìm nghiệm của phương trình trên từ việc giải phương trình đã được biến đổi Fourier với giả thiết rằng u có giá compact, tức là tập

$$\operatorname{supp} u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ u(x, y) \neq 0\}$$

là một tập compact.

(c) Xét trường hợp $a = b = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $a = 1$, $b = -1$.

Chương 3
Bài toán dây rung

3.1. Mở đầu

Trong chương này, để làm quen với phương trình hyperbolic, chúng ta sẽ xét các mô hình truyền sóng trong thực tiễn. "Sóng" ở đây được hiểu là hiện tượng lan truyền dao động trong không gian. Ví dụ về sự lan truyền dao động là hiện tượng dây đàn rung (1 chiều), hiện tượng lan toả của sóng nước trên mặt hồ (2 chiều) và hiện tượng lan truyền sóng âm (3 chiều). Chúng ta quan tâm tới việc thiết lập các bài toán mô tả các hiện tượng dao động kể trên, từ đó có những nhận xét về nghiệm tương ứng.

Trong khuôn khổ môn học, chúng ta sẽ hạn chế làm việc với mô hình truyền sóng 1 chiều(1). Bài toán đặt ra sẽ là tìm một hàm $u(x,t)$ biểu diễn hiện tượng biến dạng của dây rung ở mỗi vị trí $x \in (0,l)$ trong mỗi thời điểm $t \geq 0$, ở đây l là chiều dài của dây. Với sự tham gia của các điều kiện cho trước, ta sẽ thiết lập các bài toán tương ứng và từ đó đưa ra các công thức nghiệm thích hợp. Chúng ta sẽ bắt đầu với việc thiết lập bài toán ứng với phương trình hyperbolic chuẩn tắc, thuần nhất. Sau khi xét bài toán Cauchy, ứng với dữ kiện cho trước về thời gian, ta sẽ xét bài toán hỗn hợp, trong đó có các dữ kiện cho trước về không gian và thời gian. Tiếp theo, ta sẽ xét bài toán ứng với phương trình hyperbolic dạng tổng quát hơn và có số chiều cao hơn. Kết thúc chương này là một số ví dụ và bài tập thực hành.

3.2. Đặt bài toán

Xét phương trình hyperbolic thuần nhất

$$\Box u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u = u(x,t),\, (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty),$$

hoặc phương trình truyền sóng không thuần nhất

$$\Box u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad u = u(x,t),\, (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty), \tag{3.2.1}$$

cùng với các điều kiện ban đầu (dữ kiện Cauchy cho theo thời gian) hoặc các điều kiện ở hai đầu mút của dây (dữ kiện cho theo không gian). Tương ứng với các điều kiện nói trên là các bài toán Cauchy và bài toán hỗ hợp. Đầu tiên, ta xét bài toán Cauchy tương ứng của

(1) 1-D wave equation models.

phương trình truyền sóng (3.2.1) sau

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty), \tag{3.2.2}$$

$$u(x,t_0) = g(x), \quad x \in [0,l], \tag{3.2.3}$$

$$u_t(x,t_0) = h(x), \quad x \in [0,l]. \tag{3.2.4}$$

Chú ý rằng đoạn $[0,l]$ có thể được thay bằng cả trục thực $\mathbb{R}$. Từ Chương 1, ta đã nêu ra cách thiết lập để dẫn đến phương trình truyền sóng trên dây căng thẳng. Trong các mục tiếp theo đây, ta đi chứng minh rằng tính đặt chỉnh của bài toán Cauchy, tức là chứng minh các định lí về sự tồn tại của nghiệm, về tính duy nhất của nghiệm, và chứng minh định lí về sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ kiện Cauchy. Điều này phù hợp với thực tiễn vật lý của hiện tượng truyền sóng trên dây.

Định lý 3.2.1 (Tính duy nhất của nghiệm). *Tồn tại không nhiều hơn một nghiệm* $u \in C^2(\Omega)$ *của bài toán Cauchy* (3.2.1)*,* (3.2.2)*,* (3.2.3)*.*

Nhận xét 3.2.1. Một số giả thiết cho bài toán:

- Nghiệm được hiểu theo nghĩa cổ điển, tức là ẩn hàm $u(x.t)$ là hàm khả vi liên tục cấp hai theo x và t.

- Bằng cách co giãn hệ toạ độ, đặt $t' = at$, ta có thể giả sử hệ số $a = 1$.

- Bằng cách tịnh tiến hệ toạ độ, ta có thể coi $t_0 = 0$.

- Để chứng minh Định lý, ta chứng minh rằng hiệu của hai nghiệm bất kỳ của bài toán đồng nhất bằng 0. Giả sử u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán trên, khi đó hiệu $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ thoả mãn bài toán

$$v_{tt} = v_{xx}, \quad (x,t) \in [0,l] \times (0,+\infty), \tag{3.2.5}$$

$$v(0,x) = 0, \quad x \in [0,l], \tag{3.2.6}$$

$$v_t(0,x) = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{3.2.7}$$

Khi đó nghiệm $u(x,t)$ của bài toán trên sẽ đồng nhất bằng không.

Chứng minh. Giả sử $u(x,t)$ là nghiệm của bài toán Cauchy ở trên, sao cho u khả vi liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp hai trong Ω. Xét tam giác K có đáy là đường $t = t_0 = 0$, các cạnh bên là các đường đặc trưng của phương trình hyperbolic, có phương trình $x + t = C_1$ và $x - t = C_2$. Khi đó

$$u_t\left(u_{tt} - u_{xx}\right) = 0,$$

suy ra

$$I = \iint_K u_t\,(u_{tt} - u_{xx})\,dxdt = 0,$$

Lại có

$$\begin{aligned} u_t \cdot u_{tt} &= \frac{1}{2}\partial_t(u_t^2),\\ u_t \cdot u_{xx} &= \partial_x(u_t \cdot u_x) - \frac{1}{2}\partial_t(u_x^2). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$I = -\frac{1}{2}\iint_K \big(\partial_t(u_x^2 + u_t^2) - \partial_x(2u_x u_t)\big)\,dxdt = 0.$$

Theo công thức Green, tích phân này sẽ được viết thành

$$\frac{1}{2}\int_{\partial K} 2u_t u_x dt + (u_x^2 + u_t^2)dx = 0.$$

Từ công thức của đường đặc trưng ta suy ra hệ thức

$$u_t = \pm u_x$$

Khi đó, dọc theo các đường đặc trưng l,[(2)] ta có, chẳng hạn

$$\frac{\partial u}{\partial m} = u_t + u_x = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = u_t - u_x = 0,$$

trong đó đạo hàm được lấy theo phương m của đường đặc trưng và theo phương pháp tuyến n của đường đặc trưng[(3)]. Vậy dọc theo các đường đặc trưng đó ta có $u(x,t) = \text{const}$. Vì các đường đặc trưng là lấy bất kì nên ta suy ra $u(x,t) = u(x,0) = 0$. Điều này đúng với mọi điểm (x,t) nằm trong tam giác K đang xét. Vì K được chọn bất kỳ nên ta suy ra $u(x,t) \equiv 0$. Điều phải chứng minh. □

Chú ý 3.2.1. Đối với bài toán biên-ban đầu, người ta sử dụng phiếm hàm năng lượng toàn phần để chứng minh tính duy nhất nghiệm của nó (xem [6]). Ta xét phiếm hàm năng lượng

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^l ((v_x)^2 + (v_t)^2)dx,$$

trong đó $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ là hiệu của hai nghiệm nào đó của bài toán Cauchy được xét. Ta sẽ chứng minh rằng $E(t)$ không phụ thuộc vào t, kéo theo $E(t) = E(0) = 0$. Điều này có nghĩa là $v_t = v_x = 0$, tức là $v(x,t) = \text{const} = v(x,0) = 0$. Việc chứng minh

[(2)] thực chất là một cạnh bên của tam giác K đang xét.

[(3)] Ở đây các véctơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$ có phương vuông góc với nhau, là véctơ chỉ phương của họ đường đặc trưng của các phương trình dịch chuyển (xem thêm phần Phương trình cấp 1).

được tiến hành bằng cách xét đạo hàm $E'(t)$, và sử dụng các điều kiện ban đầu của bài toán để suy ra hệ thức

$$E'(t) = \int_0^l (v_{tt} - v_{xx})v_t dx = 0,$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh. Chi tiết xin dành cho độc giả tìm hiểu trong tài liệu đã dẫn.

Chú ý 3.2.2. Sử dụng chứng minh tương tự, ta cũng có kết luận về tính duy nhất nghiệm của bài toán biên-ban đầu loại 2 (với điều kiện biên Neumann) và bài toán biên-ban đầu loại 3 (với điều kiện biên hỗn hợp) của phương trình hyperbolic. Chi tiết chứng minh xin được xem như một bài tập dành cho độc giả.

3.3. Tính đặt chỉnh của bài toán Cauchy

3.3.1. Công thức d'Alembert

Xét bài toán Cauchy thuần nhất trên dây vô hạn (không có hạn chế ở hai đầu mút)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \tag{3.3.8}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3.9}$$

$$u_t(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3.10}$$

ở đây các hàm g và h là các hàm thích hợp, cho trước. Ta cần tìm nghiệm của bài toán được biểu diễn qua g và h. Chú ý rằng phương trình (3.3.8) có thể viết được dưới dạng toán tử

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{3.3.11}$$

Đặt $v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$. Khi đó phương trình (3.3.11) trở thành

$$v_t(x,t) + a v_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.3.12}$$

Áp dụng nghiệm của phương trình chuyển dịch được nêu trong Chương 1, ta tìm nghiệm bài toán (3.3.8)- (3.3.10) dưới dạng $v(x,t) = \alpha(x - at)$, trong đó $\alpha(x) := v(x,0)$. Kết hợp với (3.3.11) ta được

$$u_t(x,t) - a u_x(x,t) = \alpha(x - at), \quad \text{trong} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty). \tag{3.3.13}$$

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình chuyển dịch không thuần nhất với $f(x,t) = \alpha(x - at)$ ta suy ra nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \beta(x + at) + \int_0^t \alpha(x + a(t-s) - as) ds$$

đổi biến $y := x + at - 2as$ ta được

$$= \beta(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \alpha(y)dy, \quad (b(x) = u(x,0)).$$

Ở đây α và β là các hàm cần tìm thỏa mãn bài toán Cauchy đang xét, tức là thoả mãn các điều kiện Cauchy của bài toán. Thay nghiệm vừa tìm được vào bài toán ta được

$$\begin{aligned}
&\beta(x) = u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},\\
&\alpha(x) = v(x,0) = u_t(x,0) - au_x(x,0) = h(x) - g'(x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm cần tìm là

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+at) + g(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(y)dy, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0. \tag{3.3.14}$$

Công thức (3.3.14) được gọi là **công thức d'Alembert**, lấy theo tên nhà toán học người Pháp đề xuất việc nghiên cứu phương trình truyền sóng này. Các tính toán trên đã chứng minh được định lý về sự tồn tại nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng.

Định lý 3.3.1 (Sự tồn tại nghiệm). *Giả sử $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, cho trước và hàm u được xác định bằng công thức* (3.3.14). *Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng*

1. $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$,
2. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ *trong* $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$,
3. *với mọi* $x^0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u(x,t) = g(x^0), \quad \lim_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u_t(x,t) = h(x^0).$$

Chứng minh. Các bước ở trên đã chứng minh các Khẳng định 1 và 2. Để chứng tỏ 3, ta kiểm tra trực tiếp giới hạn trong khẳng định. Điều này hoàn toàn dễ dàng đối với các bạn. □

3.3.2. Xác định nghiệm bằng phương pháp trực tiếp

Bên cạnh việc xác định nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng theo Định lý 3.3.1 ta có thể xác định nghiệm của bài toán trên bằng phương pháp trực tiếp. Ta có phương trình các đường đặc trưng của phương trình hyperbolic có dạng

$$dx^2 - a^2dt^2 = 0,$$

Từ Chương 1, ta suy ra phương trình có nghiệm

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \tag{3.3.15}$$

Rõ ràng với mọi hàm $f(\xi)$ và $g(\eta)$ khả vi trong (3.3.15), bằng cách đạo hàm ta có kết luận chúng đều là nghiệm của phương trình được xét. Như vậy biểu thức (3.3.15) đúng là nghiệm của phương trình truyền sóng đang xét, ta được nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{3.3.16}$$

Giả sử bài toán Cauchy (3.2.2)-(3.2.3)-(3.2.4) có nghiệm, khi đó nghiệm được biểu diễn bằng công thức (3.3.15). Sử dụng các dữ kiện ban đầu ta tìm được dạng của các hàm f_i. Ta có

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = g(x). \tag{3.3.17}$$

Đạo hàm hai vế của (3.3.15) và cho $t = 0$, ta được

$$af_1'(x) - af_2'(x) = h(x), \tag{3.3.18}$$

suy ra

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} h(\xi)d\xi. \tag{3.3.19}$$

Từ các tính toán trên ta suy ra

$$f_1(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} h(\xi)d\xi + \frac{C}{2}, \tag{3.3.20}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} h(\xi)d\xi - \frac{C}{2}. \tag{3.3.21}$$

Thay vào (3.3.15) ta được nghiệm tổng quát của phương trình là

$$u(x,t) = \frac{g(x+at)+g(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(\xi)d\xi. \tag{3.3.22}$$

3.3.3. Tính ổn định của nghiệm

Từ công thức nghiệm của bài toán Cauchy đã nêu ở mục trước, ta chứng minh được tính ổn định của nghiệm, tức là sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ kiện Cauchy. Ta có Định lý sau

Định lý 3.3.2 (Tính ổn định của nghiệm). *Nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình hyperbolic phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện ban đầu. Nói cách khác, với mọi khoảng thời gian* $[0, t_0]$*, và với mọi giá trị* $\epsilon > 0$*, luôn tồn tại* $\delta(t_0, \epsilon)$ *sao cho nếu*

$$|g| < \delta, \qquad |h| < \delta,$$

thì

$$|u(x,t)| < \epsilon, \qquad \forall t \in [0, t_0].$$

Chứng minh. Từ công thức d'Alembert, ta có

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{2}(|g(x+at)| + |g(x-at)| + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |h(y)|dy \le \delta(1+t_0) := \epsilon.$$

Bây giờ ta chọn $\delta = \dfrac{\epsilon}{1+t_0}$ thì sẽ được điều phải chứng minh. □

Vậy, từ các Định lý 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, ta có khẳng định

Định lý 3.3.3. *Bài toán Cauchy* (3.2.2)-(3.2.3)-(3.2.4) *của phương trình truyền sóng 1 chiều được đặt đúng đắn.*

3.4. Bài toán dây rung trên nửa trục

Đối với bài toán xét trên nửa trục $x > 0$, ứng với hiện tượng dây rung bị cố định một đầu (hoặc chịu một lực tác dụng phụ thuộc thời gian, ví dụ sợi dây bị buộc vào một lò xo), ta có bài toán

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, t > 0\\
&u(0,t) = \mu(t),\ t > 0,\\
&u(x,0) = \varphi_0(x), \quad 0 < x < \infty\\
&u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 < x < \infty.
\end{aligned}$$

Cũng có thể xét điều kiện ở $x = 0$ là $u_x(0,t) = \mu(t)$. Khi đó sẽ hiện tượng truyền sóng sẽ bị ảnh hưởng bởi một lực phản xạ (tức là phụ thuộc vào $\mu(t)$.) Chi tiết bạn đọc có thể tìm hiểu ở từ khoá "phương pháp phản xạ" (the reflection method, xem [6, Mục 3.3.3]). Đầu tiên ta có mệnh đề sau.

Định lý 3.4.1. *Xét bài toán Cauchy*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{3.4.23}$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 < x < \infty. \tag{3.4.24}$$

Ta có các kết luận sau:

- *Nếu φ_0, và φ_1 là các hàm lẻ tại điểm x_0 thì nghiệm $u(x_0, 0) = 0$.*

- *Nếu φ_0, và φ_1 là các hàm chẵn tại điểm x_0 thì $u_x(x_0, 0) = 0$.*

Chứng minh. □

3.5. Bài toán dây rung với hai đầu cố định

Ta xét bài toán dây rung như trong các mục trước, nhưng ở đây dây rung có độ dài hữu hạn l và có hai đầu mút bị cố định như sau

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega \\ &u(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0,l], \\ &u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0,l], \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{aligned} \tag{3.5.25}$$

Bài toán này được gọi ngắn gọn là *bài toán biên-ban đầu* [(4)]. Tất nhiên ta không thể xác định nghiệm của bài toán trên theo dạng bất kì, mà sẽ xây dựng biểu thức nghiệm có dạng đặc biệt, gọi là dạng tách biến. Ta viết nghiệm của phương trình (3.5.25) dưới dạng $u(x,t) = X(x)T(t)$. Thay biểu thức nghiệm vào phương trình (3.5.25) ta được

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda,$$

ở đó λ là một hằng số, vì hai vế của phương trình nêu trên, nếu muốn bằng nhau, thì phải bằng một đại lượng vô hướng, tức là các biến độc lập bị triệt tiêu. Từ phương trình trên ta suy ra một hệ phương trình vi phân thường

$$\begin{cases} T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, & \text{(a)} \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. & \text{(b)} \end{cases} \tag{3.5.26}$$

Giải (3.5.26)(b), sử dụng điều kiện ở biên để tìm giá trị λ thích hợp. Ta có các trường hợp sau:

- $\lambda < 0$: Phương trình vi phân thường có nghiệm

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Thay các điều kiện biên

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$
$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0,$$

suy ra

$$C_1 = C_2 = 0.$$

[(4)] initial-boundary valued problem.

- $\lambda = 0$: Dễ dàng suy ra $C_1 = C_2 = 0$.

- $\lambda > 0$: Phương trình vi phân có nghiệm

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Thay các điều kiện biên

$$X(0) = C_1 = 0,$$
$$X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$

Chú ý rằng nghiệm cần tìm không tầm thường ta suy ra $C_2 \neq 0$. Vậy

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \quad \Longleftrightarrow \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2},\ k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Thay λ vừa tìm được vào (3.5.26)(a) ta có

$$T''(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2} T(t) = 0.$$

Phương trình có nghiệm

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at.$$

Từ những lập luận trên suy ra phương trình truyền sóng đang xét có nghiệm dạng

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Để cho gọn, đôi khi ta đặt $\omega_k = \frac{k\pi}{l}$. Ta xây dựng chuỗi hình thức

$$u(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \tag{3.5.27}$$

và xác định hệ số A_k và B_k sao cho chuỗi trên thoả mãn các điều kiện ban đầu của bài toán. Giả sử chuỗi có thể đạo hàm hình thức từng từ theo t, ta có các hệ thức

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi_0(x),$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} B_k \sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi_1(x).$$

Giả sử φ_0 và φ_1 có thể khai triển thành chuỗi Fourier theo $\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}$ trong đoạn $[0,l]$. Khi đó ta xác định được hệ số A_k và B_k theo các công thức

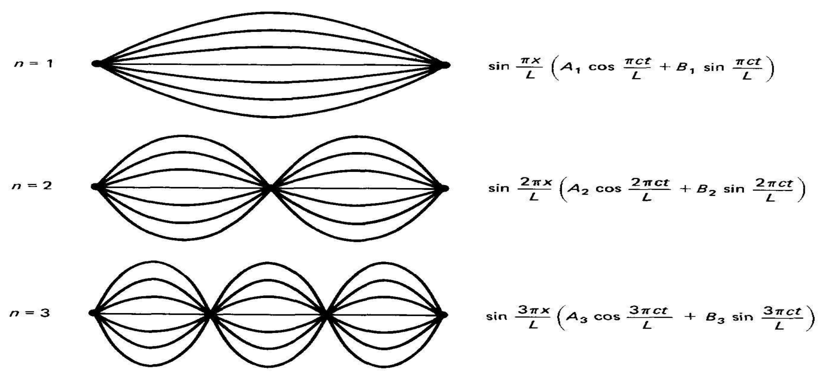
$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx, \tag{3.5.28}$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx. \tag{3.5.29}$$

Nhận xét 3.5.1. Cuối cùng ta đi tìm các điều kiện của φ_0 và φ_1 để chuỗi (3.5.27) với các hệ số được xác định ở (3.5.28) và (3.5.29) thực sự là nghiệm của bài toán biên-ban đầu đang xét. Cụ thể là ta cần tìm điều kiện để chuỗi (3.5.27) hội tụ đều. Sử dụng các kết quả của giải tích Fourier ta có

- Hàm φ_0 trong $[0, l]$ có các đạo hàm liên tục cho tới cấp hai, có đạo hàm cấp ba liên tục từng khúc và
$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0.$$
- Hàm φ_1 trong $[0, l]$ khả vi liên tục, có đạo hàm cấp hai liên tục từng khúc và
$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0.$$

(Chi tiết chứng minh có thể xem ở các giáo trình cơ bản về Phương trình Đạo hàm riêng.)



Chú ý 3.5.1. Từ hình minh hoạ, ta có nhận xét rằng với $n = 2$ thì dây rung có hình dạng như hai sợi dây giống nhau có chiều dài là $l/2$ và có cùng tần số cơ bản. Ta gọi hiện tượng này là hiện tượng *sóng dừng*. Mỗi một sóng dừng có thể được xem là tổng hợp của hai sóng chạy. Ta lấy ví dụ bước sóng thứ n, tức là xét thành phần $\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l}$, thấy rằng
$$\sin \omega_n x \sin \omega_n at = \frac{1}{2} \cos \omega_n (x - at) - \frac{1}{2} \cos \omega_n (x + at),$$
tức là một sóng dịch chuyển về phía trái với vận tốc $-a$ và một sóng dịch chuyển về phía phải với vận tốc a. Trên thực tế, biểu thức nghiệm (sóng) của bài toán biên-ban đầu đang xét là sự chồng chất của các sóng dừng. Điều này dẫn tới việc ta có thể xem nghiệm này là tổng hợp của hai sóng di chuyển ngược chiều nhau với cùng độ lớn vận tốc a.

3.6. Trường hợp ngoại lực khác không

Trước hết, ta xét bài toán Cauchy không thuần nhất với điều kiện Cauchy triệt tiêu
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R},$$
$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ở đây f là hàm cho trước thích hợp. Với mỗi $s \in \mathbb{R}$ cố định, đặt

$$w(x,t;s) = \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} f(\tau,s)d\tau,$$

thì ta thấy rằng w sẽ là nghiệm của bài toán Cauchy thuần nhất với điều kiện Cauchy tương ứng

$$w(x,0;s) = 0, \quad w_t(x,t;s) = f(x,s).$$

Bây giờ ta đặt

$$v(x,t) = \int_0^t w(x,t-s;s)ds = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\tau,s)d\tau,$$

thì ta dễ dàng kiểm tra rằng v thoả mãn Bài toán Cauchy không thuần nhất được xét. Điều này dành cho độc giả thực hiện như một bài tập đơn giản.

Bây giờ ta xét bài toán Cauchy không thuần nhất với điều kiện Cauchy không triệt tiêu.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R},\\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R},\\ u_t(x,0) &= h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sử dụng kĩ thuật chồng chất nghiệm, ta suy ra được biểu thức nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+at) + g(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

Và ta cũng có khẳng định về tính đặt đúng đắn của bài toán này. Việc chứng minh được thực hiện theo phương pháp biến thiên hằng số. Bạn đọc có thể xem như đây là một bài tập thực hành, hoặc tham khảo trong một số tài liệu (ví dụ [6, 7, 1, 3].)

3.7. Giải bài toán biên-ban đầu với vế phải khác không

Trong mục này, ta cũng sử dụng phương pháp Fourier để xác định nghiệm của bài toán biên-ban đầu với vế phải khác không. Để cho đơn giản, trước tiên ta xét bài toán với các điều kiện Cauchy và điều kiện biên thuần nhất sau

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{3.7.30}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,l], \tag{3.7.31}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3.7.32}$$

Ở đây các điều kiện biên có dạng Dirichlet. Làm tương tự phần bài toán Cauchy với vế phải khác không, ta đi tìm nghiệm $u(x,t)$ là tổng của một hàm u_0 là nghiệm của bài toán biên-ban đầu thuần nhất, và một nghiệm riêng u_* của bài toán. Việc tìm nghiệm của bài toán thuần nhất đã được thực hiện trong các phần trước. Ta sẽ đi tìm nghiệm riêng u_* không tầm thường của bài toán biên-ban đầu trên dưới dạng tách biến

$$u_*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

với giả thiết rằng hàm $f(x,t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier trong $[0,l]$ theo $\left\{\sin \frac{k\pi x}{l}\right\}$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} f(x,t)dx.$$

Thay biểu thức nghiệm vào phương trình (3.7.30) ta được

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k'' + \omega_k^2 T_k) \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được hệ phương trình vi phân

$$T_k'' + \omega_k^2 T_k = f_k,$$

với điều kiện có nghiệm của phương trình là $T_k(0) = T_k'(0) = 0$. Áp dụng lý thuyết phương trình vi phân thường ta có ngay công thức nghiệm của phương trình là

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(\tau) \sin \omega_k(t-\tau)d\tau$$

thay giá trị của $f_k(\tau)$ vào tích phân ta được

$$= \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x,\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x dx\right) \sin \omega_k(t-\tau)d\tau$$
$$= \frac{2}{l\omega_k}\int_0^t \left(\int_0^l f(x,\tau) \sin \frac{k\pi}{l} x dx\right) \sin \omega_k(t-\tau)d\tau,$$

với điều kiện hàm $f(x,t)$ liên tục, có đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai đối với biến x và cấp một đối với biến t, thoả mãn

$$f(0,t) = f(l,t) = 0.$$

Cuối cùng ta đi đến bài toán biên-ban đầu tổng quát. Xét bài toán

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega$$
$$u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$
$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t), \quad t \geq 0.$$

Xét hàm $u^*(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}(\nu(t) - \mu(t))$, đặt

$$u = v + \omega + u^*, \tag{3.7.33}$$

trong đó v là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \Omega, \\ &u(x,0) = \phi^*(x),\ u_t(x,0) = \psi^*(x), \quad x \in [0,l], \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

với $\phi^*(x) = \phi(x) - u^*(x,0)$, $\psi^*(x) = \psi(x) - u^*_t(x,0)$, còn ω thoả mãn bài toán

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + f^*(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,l], \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0, \end{aligned}$$

với $f^*(x,t) = f(x,t) - \left(u^*_{tt} - a^2 u^*_{xx}\right)$. Các bài toán xác định v, ω đều đã được xét ở trên, vì vậy ta có nghiệm của bài toán cần tìm là (3.7.33).

3.8. Ý nghĩa vật lý

Phương trình truyền sóng mô tả hiện tượng truyền sóng trong môi trường thực tế, như các hiện tượng truyền sóng âm trong không gian (ứng với trường hợp hàm $u = u(x,y,z,t)$), ở đó hàm sóng mô tả sóng âm được truyền trong không gian theo các mặt cầu có bán kính phụ thuộc vào thời gian t; hiện tượng truyền sóng trên mặt phẳng (như sóng trên mặt nước, $u = u(x,y,t)$); hiện tượng truyền sóng dọc trên dây (ứng với trường hợp hàm $u = u(x,t)$). Bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng trên dây thể hiện quá trình quan sát sợi dây dao động khi biết trước trạng thái ban đầu của toàn bộ sợi dây. Nói chung ta luôn có thể biểu diễn nghiệm dưới dạng một chuỗi Fourier với các giả thiết thích hợp. Khi nghiên cứu bài toán biên - ban đầu của phương trình truyền sóng, ở chương này ta hạn chế ở trường hợp không gian một chiều nên hiện tượng không rõ ràng, khi nghiên cứu dao động trên mặt phẳng ($n = 2$) thì tức là ta đi nghiên cứu một màng rung khi biết được các trạng thái ban đầu của màng và điều kiện cho trên biên của màng đang xét. Một cách tổng quát, khi nghiên cứu nghiệm của phương trình hyperbolic, người ta đi nghiên cứu nghiệm trong trường hợp $n = 3$ và $n = 2$, từ đó tổng quát hoá lên trường hợp n chẵn và lẻ, các tính chất của nghiệm của phương trình trong hai trường hợp trên là đặc trưng cho các trường hợp số chiều không gian tương ứng là chẵn hoặc lẻ. Ngoài các nghiệm giải tích (theo Định lý Cauchy - Kovalevskaia) khi các hàm cho trước là đủ trơn, trong trường hợp các hàm cho trước không đủ trơn, thậm chí chỉ khả tích (trong thực tiễn là như vậy, đôi khi các hàm đó chỉ là một tập hợp các số liệu đo đạc được, rất rời rạc và không liên tục) thì người ta cần phải mô tả nghiệm của phương trình trong một lớp hàm khác, ví dụ như lớp hàm khả tích, hay trong các không gian hàm thích hợp, ở đây là các không gian Sobolev thích hợp. Đây là một lĩnh vực rất rộng lớn, phức tạp và cũng không kém phần lý thú: Nghiên cứu định tính các phương trình đạo hàm riêng.

3.9. Một số chủ đề mở rộng

3.9.1. Nghiệm cơ bản của phương trình truyền sóng 1 chiều

Nghiệm cơ bản của phương trình truyền sóng một chiều được cho bởi công thức

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}H(at - |x|).$$

Để chứng minh điều này, ta cần chứng minh rằng nghiệm cơ bản của phương trình sẽ thoả mãn hệ thức

$$L[u](x,t) = (u_{tt} - a^2 u_{xx})(x,t) = \delta(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

với hàm $H(\cdot)$ là hàm Heaviside

$$H(at - |x|) = \begin{cases} 1 & -\infty < x < \infty, t > -\frac{x}{a}, \\ -1 & -\infty < x < \infty, t > \frac{x}{a}, \\ 0 & \text{các trường hợp còn lại}, \end{cases}$$

và hàm $\delta(\cdot,\cdot)$ là δ-hàm Dirac, nhận giá trị khác 0 tại duy nhất một điểm (x,t) nào đó, và có tích phân [Lebesgue] bằng đơn vị. Ở đây, ta cần chứng minh nghiệm theo nghĩa phân bố, tức là với mọi hàm trơn $\phi(x,t)$,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^+} \phi(x,t)L[u](x,t)dxdt = \phi(0,0).$$

Tìm hiểu thêm ở các sách về Hàm suy rộng, Giải tích hàm và Phương trình đạo hàm riêng với từ khoá *fundamental solution*, *wave equation in* $\mathbb{R}^n$, *distribution*, δ*-function*...

3.9.2. Một số chủ đề liên quan tới phương trình truyền sóng

1. Sóng mặt

2. Sóng cầu

3. Tích phân năng lượng trong $\mathbb{R}^n$

4. Biểu diễn nghiệm của phương trình truyền sóng trong môi trường không đồng chất. Dạng divergence

5. Tính đặt không chỉnh của bài toán biên Dirichlet (bài toán biên thứ nhất)

6. Bài toán Cauchy trên nửa mặt phẳng $x > 0$. Phương pháp phản xạ

7. Bài toán Goursart

8. Bài toán Darboux. Phương pháp xấp xỉ nghiệm

Một số tài liệu để tham khảo: Các sách về Phương trình đạo hàm riêng, Phương trình hyperbolic, bài toán Cauchy. Ví dụ xem các tài liệu [6, 5, 2, 4, 8]

3.10. Bài tập chương 3

1. Chứng minh rằng nếu f, u_0, u_1 là các hàm điều hoà trong $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1([0, +\infty))$ thì nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u + g(t)f(x), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

được tính qua công thức

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

2. Giải các bài toán dưới đây, với $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x + \cos x. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

3. Giải các bài toán sau:

(a) $\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 3x^2,\ u_y(x,0) = 0, \end{cases}$ $\quad |x| < +\infty.$

(b) $\begin{cases} u_{xx} - 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = 8x - 4x^2,\ u_x|_\Gamma = 5 + 4x, \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y = 3x$.

(c) $\begin{cases} 4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_y(x,0) = h(x), \end{cases}$ $|x| < +\infty.$

(d) $\begin{cases} u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u(x,y)|_\Gamma = g(x),\ u_y(x,y)|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ $|x| < +\infty$, $\Gamma = \{y = \sin x\}.$

4. Tìm điều kiện cần và đủ để các bài toán sau có nghiệm, với $-\infty < x < +\infty$.

(a) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x,t)|_{x-t=0} = g(x),\ u_t(x,t)|_{x-t=0} = h(x), \end{cases}$ $|x| < +\infty.$

(b) $\begin{cases} u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y + x = 0$.

(c) $\begin{cases} 2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $x - 2y = 0$.

(d) $\begin{cases} 3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0, \\ u|_\Gamma = g(x),\ u_x|_\Gamma = h(x), \end{cases}$ ở đây Γ là đường thẳng $y - 3x = 0$.

5. Tìm nghiệm của bài toán.

(a) $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = -2\sin x + 8\sin 2x, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin^3 x,\ u_t(x,0) = 3\sin x + 4\sin 2x, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = -2\sin\frac{\pi x}{2\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell},\ u_t(x,0) = \frac{3\pi a}{\ell}\sin\frac{3\pi x}{2\ell}, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\ell,t) = 0, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 1 + 3\cos x,\ u_t(x,0) = -4\cos^2 x - \cos x, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, \end{cases}$

(e) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + bx(x-\ell),\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\ell,t) = 0, \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x(\pi - x)\cos t,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \end{cases}$$

(g) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = x+1,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = t+1,\ u(\ell,t) = t^3 + 2, \end{cases}$$

(h) $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t\cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = \pi x, \\ u(0,t) = 2t,\ u(\frac{\pi}{2},t) = 0, \end{cases}$$

(i) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x^2 - x,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases}$$

(j) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_t - u,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \pi x - x^2,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \end{cases}$$

Chương 4
Bài toán truyền nhiệt 1 chiều. Phương trình parabolic

4.1. Mở đầu

Tiếp theo phương trình hyperbolic, trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu một mô hình thực tiễn là hiện tượng lan truyền nhiệt độ trên một thanh mỏng. Khái niệm "mỏng" ở đây được hiểu một cách toán học, tức là độ dày của thanh là rất nhỏ so với độ dài của thanh, và hiện tượng khuếch tán nhiệt độ chỉ được xét dọc theo chiều dài của thanh, mà không bị thất thoát theo phương thẳng đứng. Phương trình mô tả hiện tượng này là phương trình loại parabolic có dạng tổng quát

$$c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),$$

trong đó c, k là các hệ số, phụ thuộc vào (x,t), cùng các điều kiện Cauchy tương ứng, được cho theo biến thời gian và không gian. Trong khuôn khổ chương trình, ta sẽ xét dạng chính tắc của phương trình như sau

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad u = u(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty). \tag{4.1.1}$$

Trái với bài toán của phương trình hyperbolic, ở chương này ta sẽ chỉ cần một điều kiện đối với biến thời gian. Khi đó ta sẽ có bài toán Cauchy (bài toán giá trị ban đầu) tương ứng. Ta sẽ chứng minh được tính đặt chỉnh của bài toán này. Tiếp theo, ta cũng sẽ chỉ ra được tính đặt đúng đắn của bài toán hỗn hợp của phương trình parabolic. Trong chương này, ta sẽ làm quen với *Nguyên lí cực đại cực tiểu*, và áp dụng nó vào việc chứng tỏ tính đặt chỉnh của bài toán hỗn hợp. Phần cuối của chương là phần giới thiệu một số hướng phát triển và gợi ý bước đầu nghiên cứu đối với loại phương trình này, một số bài tập thực hành và gợi ý lời giải.

4.1.1. Thiết lập các điều kiện Cauchy và các điều kiện biên

Tương tự như đối với phương trình hyperbolic, người ta xây dựng các bài toán Cauchy, bài toán biên-ban đầu của phương trình parabolic bằng cách thiết lập các điều kiện ban đầu và điều kiện biên tương ứng (xem, ví dụ [6, Chương 4].) Điều kiện Cauchy được thiết lập theo thời gian, tức là ẩn hàm $u(x,t)$ tại thời điểm $t = t_0$ sẽ bằng một hàm thích hợp nào đó

$$u(x,t)|_{t=t_0} = g(x),\ x \in [0,l],$$

với l là chiều dài của thanh được xét, có thể bằng vô hạn. Ta xét miền đóng $\Omega_T = [0,l] \times [t_0,T]$, miền mở $\Omega_T^0 = (0,l) \times (t_0,T)$. Ta có một số cách thiết lập điều kiện biên trên thanh được cho như sau:

1. Điều kiên biên Dirichlet: tại các đầu mút $x = 0$ và $x = l$ ta có

$$u(0,t) = \mu_0(t),\ u(l,t) = \mu_l(t),\ t \in [t_0,T],$$

với μ_0, μ_l là các hàm được cho trên $[t_0,T]$. Ở đây T có thể bằng vô hạn. Điều kiện biên Dirchlet cho biết giá trị của ẩn hàm cần tìm tại biên của miền Ω_T được xét.

2. Điều kiện Neumann: tại đầu mút $x = 0$ hoặc $x = l$, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu_0(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu_l(t),$$

với ν là các hàm cho trước trên $[t_0,T]$. Điều kiện biên Neumann cho biết độ khuếch tán của [dòng] nhiệt độ[(1)] ra ngoài hệ ở hai đầu mút.

3. Ta có thể thiết lập một số điều kiện biên khác, ví dụ như điều kiện ứng với *định luật Newton của hiện tượng truyền nhiệt* như sau

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)],$$

trong đó θ được cho trước. Tại biên $x = 0$ ta có điều kiện tương ứng

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \lambda[u(0,t) - \theta(t)],$$

4. Nếu giá trị của l là rất lớn và thời gian được xét $[t_0,T]$ là nhỏ, ta có thể bỏ qua điều kiện biên để chỉ xét điều kiện ban đầu về thời gian. Khi đó ta có điều kiện Cauchy đã nêu ở trên. Bên cạnh đó, có thể xét bài toán biên-ban đầu với một đầu rất xa, tức là chỉ có điều kiện biên trên một đầu mút $u(0,t) = \varphi(t)$.

5. Ta cũng có thể xét điều kiện phi tuyến (tuy nhiên điều này không được xét trong khuôn khổ môn học) ví dụ như điều kiện mô tả *định luật Stefan-Boltzmann* trong quá trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sigma[u^4(0,t) - \theta^4(t)].$$

---

(1) heat flux

Định nghĩa 4.1.1.

1. Hàm u được gọi là *nghiệm* của *bài toán biên-ban đầu thứ nhất* của phương trình parabolic nếu

   (a) nó được xác định trên miền đóng Ω_T,

   (b) nó thoả mãn phương trình parabolic trên miền mở Ω_T^0,

   (c) nó thoả mãn các điều kiện ban đầu và điều kiện biên Dirichlet

   $$u(x,t_0) = \phi(x),\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),$$

   sao cho các hàm ϕ, μ_i là các hàm liên tục, thoả mãn

   $$\phi(0) = \mu_1(t_0),\ \phi(l) = \mu_2(t_0).$$

2. Khi thay điều kiện Dirichlet bằng điều kiện biên Neumann, ta có *bài toán biên-ban đầu thứ hai*; nếu thay bằng điều kiện hỗn hợp, ứng với định luật Newton mà ta nêu ở trên, ta có *bài toán biên- ban đầu thứ ba*.

4.1.2. Nguyên lí cực đại cực tiểu

Trong phần này, ta xét phương trình truyền nhiệt có hệ số hằng

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v. \tag{4.1.2}$$

Bằng cách đổi biến

$$v = e^{\mu x + \lambda t} u,\ \mu = -\frac{\beta}{2a},\ \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2},$$

thì phương trình (4.1.2) sẽ trở về dạng đơn giản

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{4.1.3}$$

Ta có nguyên lí cực đại cực tiểu như sau.

Định lý 4.1.1. *Giả sử $u(x,t)$ là hàm liên tục trên miền đóng Ω_T, và thoả mãn phương trình* (4.1.3) *trong miền mở Ω_T^0. Khi đó nghiệm $u(x,t)$ đạt giá trị cực đại hoặc cực tiểu của nó tại $t = t_0$, $x = 0$ hoặc $x = l$.*

Chú ý rằng bằng các phép dịch chuyển thích hợp, ta có thể coi $t_0 = 0$.

Chứng minh. Gọi M là giá trị cực đại của $u(x,t)$ với $t = 0$ ($0 \le x \le l$), hoặc với $x = 0$ hoặc $x = l$ ($t > 0$). Giả thiết rằng hàm $u(x,t)$ đạt giá trị cực đại tại một điểm (x_0, t_0) nào đó bên trong miền Ω_T^0. Khi đó ta có

$$u(x_0, t_0) = M + \epsilon.$$

Vì hàm đạt cực đại tại (x_0, t_0) nên ta có

$$u_x(x_0, t_0) = 0,\ u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0.$$

Hơn nữa, vì $u(x_0, t)$ đạt cực đại tại $t \in [0, T]$ nên $u_t(x_0, t_0) \geq 0$. Thực chất, ta có $u_t(x_0, t_0) = 0$ nếu $t_0 < T$ và $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ với $t_0 = T$.

Bây giờ, ta đi tìm một điểm $(x_1, t_1) \in (0, l) \times (0, T]$ sao cho $u_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$ và $u_t(x_1, t_1) > 0$. Xét hàm

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t),\ k \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \epsilon, \quad k(t_0 - t) \leq kT.$$

Chọn $k > 0$ sao cho $kT < \frac{\epsilon}{2}$, tức là $k < \frac{\epsilon}{2T}$. Khi đó ta có giá trị lớn nhất của $v(x, t)$ tại $t = 0$ (theo $x \in [0, l]$) hoặc $x = 0$ hoặc $x = l$ (theo $t \in [0, T)$) không thể vượt quá $M + \frac{\epsilon}{2}$. Từ đây và cách đặt hàm v ta suy ra

$$v(x, t) \leq M + \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.1.4}$$

với $t = 0$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = l$. Vì hàm v là liên tục trên Ω_T nên tồn tại điểm (x_1, t_1) sao cho v đạt giá trị lớn nhất, tức là

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \epsilon.$$

Từ (4.1.4) ta thấy rằng $0 < x_1 < l$, và $0 < t_1 \leq T$. Từ đây suy ra

$$v_{xx}(x_1, t_1) = u_{xx}(x_1, t_1) \leq 0,$$

và

$$v_t(x_1, t_1) = u_t(x_1, t_1) - k \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng kéo theo $u_t(x_1, t_1) \geq k$, tức là tại điểm (x_1, t_1) thì hàm số u không thoả mãn phương trình parabolic. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng mọi điểm trong tập mở Ω_T đều thoả mãn phương trình parabolic. Ta có điều phải chứng minh. Để chứng minh điều kiện cực tiểu, ta chú ý rằng hàm $u_1 = -u$ cũng thoả mãn phương trình parabolic và cực đại của hàm u_1 chính là cực tiểu của hàm u. □

Trong trường hợp miền Ω_T là vô hạn, ta có định lí cực đại cực tiểu tương ứng.

Định lý 4.1.2. *Giả sử $u(x, t)$ là nghiệm của phương trình* (4.1.1) *liên tục và giới nội trong miền $\Omega_T = \mathbb{R} \times [0, T]$. Khi đó nếu M và m là cận trên và cận dưới của nghiệm $u(x, t)$ tại $t = 0$, tức là*

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x, 0), \quad m = \inf_{x \in \mathbb{R}} u(x, 0).$$

thì trong miền mở Ω_T, ta có

$$m \leq u(x, t) \leq M.$$

4.1.3. Ứng dụng của nguyên lí cực đại cực tiểu

Một ứng dụng của Nguyên lí cực đại cực tiểu chính là việc chứng minh tính đặt chỉnh của bài toán Cauchy hoặc bài toán biên-ban đầu của phương trình truyền nhiệt. Trước hết ta xét bài toán Cauchy: *Tìm hàm u liên tục và giới nội khi $t \geq 0$, thoả mãn*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \tag{4.1.5}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.1.6}$$

Khi đó ta có định lí

Định lý 4.1.3. *Nghiệm giới nội của bài toán* (4.1.5)-(4.1.6) *là duy nhất, phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu được cho khi $t = 0$.*

Chứng minh. Từ nguyên lí cực đại cực tiểu trong miền vô hạn (Định lí 4.1.2) , xét hai nghiệm $u(x,t)$ và $v(x,t)$ sao cho

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x,0) - v(x,0)| < \varepsilon, \tag{4.1.7}$$

khi đó trong miền $\Omega_T = \mathbb{R} \times [0,T]$, $T < \infty$, ta sẽ có

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon, \quad \forall (x,t) \in S. \tag{4.1.8}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, ta xét bài toán biên-ban đầu trong miền bị chặn Ω_T như sau: *Tìm hàm $u(x,t)$ liên tục, xác định trong Ω_T thoả mãn phương trình*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \; (x,t) \in \Omega_T^0,$$

và thoả mãn các điều kiện biên-ban đầu sau

$$u(x,0) = \varphi(x), \; x \in (0,l),$$
$$u(0,t) = \mu_0(t), \; u(l,t) = \mu_l(t), \; t \in (0,T).$$

Ta có định lí

Định lý 4.1.4. *Nghiệm liên tục của bài toán biên-ban đầu là duy nhất.*

Chứng minh. Xét u_1 và u_2 là nghiệm của bài toán trên với cùng điều kiện biên-ban đầu. Khi đó hàm

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

sẽ thoả mãn phương trình $v_t = a^2 v_{xx}$, cùng các điều kiện biên-ban đầu thuần nhất. Theo Nguyên lí cực đại cực tiểu, ta thấy rõ ràng hàm v thoả mãn các điều kiện của Nguyên lí và do đó đạt giá trị cực đại tại $t = 0$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = l$. Tuy nhiên, tại cả ba điểm trên hàm v đều triệt tiêu, nên ta suy ra hàm v bằng 0 tại mọi điểm trong Ω_T, tức là $v(x,t) \equiv 0$ trong Ω_T. Ta có điều phải chứng minh.

□

4.2. Giải bài toán Cauchy bằng phương pháp tách biến

Về thực chất, một bài toán Cauchy có thể được xem như một bài toán biên-ban đầu trong miền không giới hạn, tức là trường hợp mà độ dài của thanh là rất lớn so với khoảng cách thời gian được xét. Tuy nhiên, việc xây dựng nghiệm của bài toán Cauchy có một số điểm khác biệt so với việc xây dựng nghiệm của bài toán biên-ban đầu nói chung. Chính vì thế, ta xét nó như một trường hợp riêng biệt. Xét bài toán Cauchy như sau: *Tìm hàm $u(x,t)$ xác định trong miền không bị chặn $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ thoả mãn*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.2.9}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.2.10}$$

trong đó g là hàm liên tục và giới nội cho trước. Ta sử dụng phương pháp tách biến đã được giới thiệu ở phần phương trình hyperbolic. Ta tìm nghiệm riêng giới nội của phương trình(4.2.9) dưới dạng

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Thay vào (4.2.9) ta được

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu \,(= \text{const}\,.) \tag{4.2.11}$$

Từ đó ta có hệ phương trình vi phân thường

$$T'(t) + a^2 \mu T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \mu X(x) = 0.$$

Vì nghiệm đang tìm là giới nội nên $\mu > 0$,[2] ta đặt $\mu = \lambda^2$. Thay vào hệ phương trình ta được

$$\begin{aligned}
T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,\\
X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.
\end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
T(t) &= e^{-a^2\lambda^2 t},\\
X(x) &= A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,
\end{aligned}$$

trong đó các hệ số A, B là các hằng số, phụ thuộc λ. Vậy nghiệm của phương trình $u_\lambda(x,t)$ ứng với giá trị λ nào đó sẽ có dạng

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]. \tag{4.2.12}$$

Tích phân (4.2.12) theo λ được

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda, \tag{4.2.13}$$

Với giả thiết tích phân trong biểu thức trên là hội tụ đều và có thể đạo hàm dưới dấu tích phân hai lần theo x và một lần theo t, ta có hàm số này cũng là nghiệm của phương trình (4.2.9). Để tìm nghiệm của bài toán Cauchy (4.2.9)-(4.2.10), ta cần xác định các hàm $A(\lambda)$ và $B(\lambda)$ để u thoả mãn điều kiện ban đầu (4.2.10).

Giả sử rằng ta có thể biểu diễn $u(x,0) = g(x)$ dưới dạng tích phân Fourier

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda.
\end{aligned}$$

Trong (4.2.13) cho $t = 0$ và đồng nhất với biểu diễn dưới dạng tích phân Fourier của hàm g ở trên ta tìm được $A(\lambda)$ và $B(\lambda)$ có dạng

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,\\
B(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\sin\lambda\xi d\xi.
\end{aligned}$$

[2]Có thể dễ dàng kiểm tra các trường hợp $\mu \le 0$ để thấy rằng nghiệm sẽ tăng ra vô cùng khi t tiến ra vô hạn.

Thay vào (4.2.13) ta được

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi.
\end{aligned}
$$

Thay đổi thứ tự lấy tích phân và sử dụng công thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}, \tag{4.2.14}$$

ta được

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} g(\xi)d\xi \tag{4.2.15}$$

Công thức (4.2.15) được gọi là *công thức Poisson đối với bài toán Cauchy* (4.2.9)-(4.2.10). Đặt

$$F(\xi,\tau;x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}, & \text{với} \quad \tau < t, \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases} \tag{4.2.16}$$

Khi đó công thức Poisson (4.2.15) có dạng

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,0;x,t)g(\xi)d\xi. \tag{4.2.17}$$

Hàm $F(\xi,\tau;x,t)$ được gọi là *nghiệm cơ bản của phương trình truyền nhiệt*. Chú ý rằng khi $(\xi,\tau) \neq (x,t)$, đối với biến (x,t) hàm F thoả mãn phương trình (4.2.9), còn đối với biến (ξ,τ) hàm F thoả mãn phương trình liên hợp với phương trình (4.2.9)

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{4.2.18}$$

Ta có khẳng định

Định lý 4.2.1. *Giả sử hàm $g(x)$ liên tục và giới nội. Khi đó bài toán Cauchy* (4.2.9)-(4.2.10) *có nghiệm $u(x,t)$ được xác định bằng công thức* (4.2.17).

Chứng minh. Để chứng minh định lí này, trước hết ta kiểm tra rằng công thức (4.2.17) thoả mãn phương trình (4.2.9) với $t > 0$. Chú ý rằng nghiệm cơ bản (4.2.16) thoả mãn phương trình (4.2.17), vì vậy ta chỉ cần chứng minh rằng có thể đạo hàm dưới dấu tích phân hai lần theo biến x và một lần theo biến t, tức là chứng minh rằng tích phân nhận được bằng cách đạo hàm hình thức biểu thức dưới dấu tích phân theo x hoặc t là hội tụ trong miền chữ nhật $0 \le t_0 \le t \le T$, $|x| \le N$, với mọi t_0, T, N tuỳ ý dương. Điều này đúng vì hàm g giới nội, còn hàm $x^m e^{-ax^2}$ giảm về 0 khi $x \to \infty$ nhanh hơn mọi hàm đa thức, và khi đó hàm dưới dấu tích phân không lớn hơn $C/(1+\xi^2)$. Sử dụng tính hội tụ của tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+\xi^2} d\xi$ và tiêu chuẩn Weierstrass suy ra tích phân đang xét hội tụ đều, tức là điều ta cần chứng minh.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng hàm cho bởi công thức (4.2.17) giới nội trong miền $t > 0$. Điều này dễ dàng suy ra từ tính giới nội của hàm g, tức là ta có

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\le \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} |g(\xi)| d\xi \\
&\le \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = M. \quad \text{(áp dụng (4.2.14))}.
\end{aligned}$$

Cuối cùng ta dễ dàng chứng minh rằng hàm cho bởi công thức (4.2.17) thoả mãn điều kiện ban đầu, tức là

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = g(x). \tag{4.2.19}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Như vậy, từ Định lí 4.1.3 và Định lí 4.2.1 ta suy ra

Định lý 4.2.2. *Nếu nghiệm tìm trong lớp hàm giới nội với dữ kiện ban đầu giới nội thì bài toán Cauchy* (4.2.9)-(4.2.10) *của phương trình truyền nhiệt trong miền $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ được đặt đúng đắn.*

Nhận xét 4.2.1. Nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt sẽ khả vi mọi cấp trong miền $t > 0$, và mọi $x \in \mathbb{R}$, không phụ thuộc vào việc hàm g có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ không. Tính chất này phân biệt phương trình truyền nhiệt với phương trình truyền sóng.

4.3. Bài toán biên ban đầu thứ nhất

Trong mục này, ta sẽ đi xây dựng nghiệm của bài toán biên-ban đầu thứ nhất, ứng với điều kiện biên Dirichlet trong miền bị chặn Ω_T. Nhắc lại rằng việc sử dụng điều kiện biên Dirichlet chỉ nhằm làm đơn giản các phép tính mà thôi.

4.3.1. Bài toán thuần nhất

Xét bài toán biên ban đầu thứ nhất không có vế phải

$$\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in V_T, \\
u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \\
u(0,t) = u(l,t) = 0.
\end{cases} \tag{IBVP}$$

Trong đó hàm $\varphi(x)$ được giả thiết liên tục, khả vi từng khúc, và $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Ta sẽ sử dụng phương pháp tách biến Fourier để giải bài toán. Giả sử nghiệm giới nội của bài toán là $u(x,t) = X(x)T(t)$. Thay vào phương trình ta được

$$X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2T(t)} = -\lambda.$$

Từ đó suy ra một hệ phương trình vi phân thường sau

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{4.3.20}$$

$$T'(t) + \lambda a^2T(t) = 0. \tag{4.3.21}$$

Làm tương tự bài toán hỗn hợp hyperbolic ta được

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Từ đó suy ra dạng nghiệm của phương trình là

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{l}x, \quad T(t) = B_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t},$$

$$u_k(x,t) = C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l}x.$$

Lấy chuỗi hình thức

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right),$$

là nghiệm của phương trình. Với việc khai triển hàm $\varphi(x)$ theo hệ $\left\{\sin \frac{k\pi}{l}x\right\}$, ta tìm được hệ số C_k của biểu thức nghiệm $u(x,t)$ từ hệ thức

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right),$$

tức là

$$C_k = \varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi}{l}\xi d\xi, \; k = 1, 2, \ldots$$

Ta có thể chứng minh được rằng với các giả thiết trên của hàm φ thì biểu thức $u(x,t)$ nêu ở trên chính là nghiệm thực sự của bài toán. Để chứng minh điều này, ta đi chỉ ra tính hội tụ đều của chuỗi, từ đó cho phép khả vi từng từ của chuỗi theo x và t, tương ứng.

4.3.2. Trường hợp không thuần nhất

Xét bài toán biên ban đầu thứ nhất với vế phải khác 0

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in V_T, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{IBVP-f}$$

Tương tự như các lập luận của phần bài toán biên-ban đầu của phương trình hyperbolic, ta tìm nghiệm giới nội của bài toán dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Chú ý 4.3.1. Dạng của nghiệm của bài toán rõ ràng phụ thuộc rất nhiều vào loại điều kiện biên đang được xét. Ví dụ như ở đây là điều kiện biên Dirichlet cho cả hai đầu mút.

Thay vào phương trình ta được

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) \right) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

trong đó

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi.$$

Vì $\left\{\sin \frac{k\pi}{l} x\right\}$ là hệ trực chuẩn, nên đẳng thức trên xảy ra tương đương với hệ phương trình vi phân thường

$$T_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = f_k(t), \quad T(0) = 0,\ k = 1, 2, \dots.$$

Giải phương trình trên ta được

$$T_k(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau) d\tau.$$

Tức là ta có biểu thức nghiệm cần tìm sẽ là

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \right] \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right),$$

hoặc khi thay giá trị của f_k vào, ta được

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} \xi\right) \right\} f(\xi,\tau) d\xi d\tau \\ &:= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

với $G(x, \xi, t-\tau)$ là hàm Green của bài toán, được cho theo công thức

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} \xi\right).$$

4.3.3. Trường hợp tổng quát. Nguyên lí Duhamel

Để giải các bài toán Cauchy hoặc bài toán biên ban đầu cho các phương trình parabolic[(3)], người ta đưa ra *Nguyên lí Duhamel*, mang tên nhà kỹ sư Anh những năm thế kỷ thứ XVIII như sau: *Xét bài toán*

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \ell, t > 0, \tag{4.3.22}$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 < x < \ell, \tag{4.3.23}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0. \tag{4.3.24}$$

Đặt

$$u(x,t) = \int_0^t V(x,t;\tau)d\tau$$

trong đó $V(x,t;\tau)$ là nghiệm của bài toán đã biết

$$V_t - V_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, t > 0, \tag{4.3.25}$$

$$V(x,0;\tau) = f(x,\tau),\ 0 < x < \ell, \tag{4.3.26}$$

$$V(0,t;\tau) = V(\ell,t;\tau) = 0. \tag{4.3.27}$$

Ta cũng tìm nghiệm bằng phương pháp tách biến, nhưng đặt

$$V(x,t;\tau) = X(x)T(t,\tau)$$

trong đó τ đóng vai trò như một tham số cố định. Khi đó ta sẽ dẫn đến hệ phương trình vi phân thường đối với X và T như sau:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T_t(t,\tau) + \lambda T(t,\tau) = 0, \end{cases} \tag{4.3.28}$$

với các điều kiện biên tương ứng $X(0) = X(\ell) = 0$. Làm tương tự như đã biết, ta sẽ suy ra biểu thức nghiệm của bài toán sẽ có dạng

$$V(x,t;\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau) e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \tag{4.3.29}$$

trong đó $A_k(\tau)$ sẽ được xác định từ biểu thức

$$A_k(\tau) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x,\tau)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)dx, \tag{4.3.30}$$

[(3)]Nguyên lí này đã được trình bày một cách tương tự ở phần Phương trình hyperbolic. Ta cũng có thể áp dụng nó cho phương trình elliptic.

Nhận xét 4.3.1. Trong trường hợp tổng quát, không phải khi nào ta cũng có thể viết được biểu thức nghiệm tường minh cho mỗi bài toán, nó phụ thuộc vào dạng của phương trình, vào miền lấy tích phân, số chiều của không gian, vân vân.

Nhận xét 4.3.2. Trường hợp vế phải và các điều kiện biên, ban đầu đều không triệt tiêu, ta sẽ sử dụng nguyên lí chồng chất nghiệm để phân rã bài toán ra thành các bài toán đơn giản hơn. Cách này hoàn toàn tương tự như những gì ta đã làm đối với dạng phương trình hyperbolic.

4.4. Ý nghĩa vật lí và một số gợi ý nghiên cứu

4.4.1. Ý nghĩa vật lí

Nghiệm của bài toán Cauchy, xét về phương diện vật lí, mô tả nhiệt độ phân bố trên một thanh dài vô hạn cách nhiệt với môi trường xung quanh khi cho trước phân bố nhiệt độ ở thời điểm ban đầu. Một cách lí tưởng, từ công thức nghiệm của bài toán Cauchy ta có thể thấy chỉ sau một khoảng thời gian t rất nhỏ, nhiệt độ ở mọi điểm của thanh đều thay đổi so với trạng thái ban đầu. Trong thực tế điều này là vô lí nhưng khi xét tại những điểm ở rất xa gốc quan sát và tại những thời điểm t rất nhỏ, điều này không khác mấy so với thực tế. Vì vậy công thức Poisson có thể coi là biểu diễn khá tốt quy luật truyền nhiệt trên thanh.

4.4.2. Một số mở rộng

1. Tìm hiểu về hàm Green của phương trình parabolic
2. Bài toán biên-ban đầu thứ hai, bàn toán biên-ban đầu trên nửa đường thẳng
3. Phương pháp nghiệm cơ bản (fundamental solution method)
4. Bài toán trong không gian nhiều chiều:
   (a) Hiện tượng truyền nhiệt trên mặt phẳng
   (b) Hiện tượng khuếch tán vật chất trong không gian. Ứng dụng trong bài toán tìm nguồn khuếch tán (bài toán ngược).

4.5. Bài tập chương 4

1. Giải bài toán

(a) $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \cos 3x. \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \sin 2x \cos 4x. \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} u_t = 16u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \cos^2 4x. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2+2x+2}. \end{cases}$

2. Tìm nghiệm không giới nội của bài toán

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x^2 - 2x + 3. \end{cases}$$

3. Giải bài toán biên ban đầu

(a) $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \sin x(1 - 4\cos x), & 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x < l/2, \\ 1 - x & l/2 < x < l, \end{cases} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x,0) = x^2 - 1 \\ u_x(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = e^x \sin \pi x \\ u(0,t) = u(1,t) = t, & t > 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2\sin x \sin t, & t > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\frac{\pi}{2},t) = 0. \end{cases}$

Tài liệu tham khảo

[1] N. Asmar. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2 edition, 1987.

[2] Trần Đức Vân. *Giáo trình phương trình đạo hàm riêng*, volume 1. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2000.

[3] R. Haberman. *Elementary Applied Partial Differential Equations. With Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1987.

[4] Nguyễn Mạnh Hùng. *Phương trình đạo hàm riêng*, volume 1. NXB Giáo dục, 2002.

[5] Nguyễn Thừa Hợp. *Giáo trình phương trình đạo hàm riêng*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[6] Đinh Nho Hào. *Partial Differential Equations*. University of Gottingen, 2001.

[7] B. Neta. *Partial Differential Equations*. MA 3132 Lecture Notes. Monterey, CA 93943, 2002.

[8] V.S. Vladimirov. *Equations of mathematical physics*. Pure and applied mathematics. M. Dekker, 1971.