

**Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng**

Mã môn học: **MAT3365**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **7**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1.** Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x, t) + (2 - 3u(x, t))u_x(x, t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$\text{với điều kiện Cauchy } u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x < -1, \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng chân không. Giải nghiệm  $u(x, t)$  trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.
- (b) Vẽ thêm các đường đặc trưng trong vùng chân không, từ đó xác định nghiệm  $u(x, t)$  trong vùng chân không. Vẽ đồ thị của  $u(x, t)$  tại các thời điểm  $t = 0, 1, 2$ .

**Câu 2.** Xác định loại và chuyển về dạng chính tắc phương trình sau:

$$(1 + 4x^2)u_{xx}(x, y) + 4xu_{xy}(x, y) + u_{yy}(x, y) + 2xu_x(x, y) = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Câu 3.** Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - 4u(x, t) + 4x + \sin t & \text{khi } 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0, t) = 1, u_x(\pi, t) = 1 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = \cos(2x), u_t(x, 0) = x & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng bài toán trên có tối đa một nghiệm.
- (b) Tìm  $v(x)$  thỏa mãn  $v''(x) - 4v(x) + 4x = 0$  và  $v'(0) = v'(\pi) = 1$ . Khi đó  $w = u - v$  thỏa mãn bài toán nào.
- (c) Giải bài toán biên-ban đầu đã cho.