

**Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng**

Mã môn học: **MAT3365**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **3**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1.** Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x, t) + (2u(x, t) - 1)u_x(x, t) = 0 \text{ khi } x > 0, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy  $u(x, 0) = 2, x > 0$ , và  $u(0, t) = 1, t > 0$ .

- (a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng chân không. Giải nghiệm  $u(x, t)$  trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.
- (b) Vẽ thêm các đường đặc trưng ở vùng chân không, từ đó xác định nghiệm  $u(x, t)$  ở vùng chân không. Vẽ đồ thị của  $u(x, t)$  tại các thời điểm  $t = 0, 1, 2$ .

**Câu 2.** Xét phương trình cấp 2 sau:

$$2xu_{xx}(x, y) + (2y - x^2/y)u_{xy}(x, y) - xu_{yy}(x, y) = 0, x > 0, y > 0.$$

- (a) Xác định loại và chuyển phương trình đã cho về dạng chính tắc.
- (b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho. Thiết lập đẳng thức hình bình hành cho nghiệm tổng quát.
- (c) Tìm nghiệm  $u(x, y)$  của phương trình đã cho thỏa mãn

$$u(x, 0) = x, \text{ khi } x > 0, u(1, y) = 1 \text{ khi } y > 0.$$

**Câu 3.** Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 2u_{xx}(x, t) & \text{khi } 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = \cos^2(x) & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Dùng phương pháp tách biến giải bài toán đang xét.
- (b) Bằng cách thác triển chẵn, tuần hoàn chu kỳ  $2\pi$  rồi dùng công thức Poisson giải bài toán đang xét. So sánh kết quả thu được với kết quả ở câu (a).