ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI	**ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II**
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN	**NĂM HỌC 2024-2025**
————-	——oOo——-

Môn thi: Phương trình đạo hàm riêng 1

Mã môn học: **MAT2306** Số tín chỉ: **3** Đề số: **1**

Dành cho sinh viên khoá: **K67** Ngành học: **Toán học - SP Toán**

Thời gian làm bài **90 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2 điểm) Xét trụ tứ giác $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z + 1 > 2|y| > 2z, 0 < x < 1\}$.
(a) Vẽ trụ tứ giác Q.
(b) Chứng minh rằng trụ tứ giác Q là miền chính quy. Từ đó hãy chứng minh tồn tại duy nhất một hàm Green đối với Q.

Câu 2. (4 điểm) Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng

$$u_{tt}(x, y, z, t) = \Delta u(x, y, z, t) + \chi_{[0,1]}(t)\chi_{[-1,1]}(x), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0,$$

với các điều kiện ban đầu $u(x, y, z, 0) = 0$ và

$$u_t(x, y, z, 0) = \chi_{B_1(0,0,2)}(x, y, z) - \chi_{B_1(0,0,-2)}(x, y, z),$$

trong đó $B_r(x, y, z)$ là hình cầu tâm (x, y, z) bán kính r. Hãy tính $u(100, y, 0, t), y \in \mathbb{R}, t > 0$.

Câu 3. (3,5 điểm) Xét bài toán biên cho phương trình Laplace trong góc phần tư vành khăn

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \text{ khi } x > 0, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 4,$$

với điều kiện biên $u_x(0, y) = u_y(x, 0) = 0$ khi $1 < x, y < 2$, và

$$u(x, y) = 2x \text{ khi } x^2 + y^2 = 1, u(x, y) = y \text{ khi } x^2 + y^2 = 4.$$

(a) Sử dụng phép phản xạ Schwarz qua trục tung $x = 0$ rồi qua trục hoành $y = 0$ bài toán đang xét chuyển thành bài toán nào trong vành khăn? Từ đó chứng minh rằng $0 < u(x, y) < 2$.
(b) Giải bài toán đang xét.

Câu 4. (2,5 điểm) Cho u là nghiệm bị chặn của bài toán biên - ban đầu cho phương trình

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

điều kiện ban đầu $u(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(i) Với $f = 0, g(x) = \chi_{[a-12,b]}(x)$, với a là tháng sinh, b là ngày sinh của sinh viên. Chứng minh rằng, từ công thức Poisson, nghiệm $u(x, t) \in (0, 1)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$.
(ii) Với $f(x, t) = e^{-t}\cos(cx)$ (c là năm sinh của sinh viên), $g(x) = \chi_{[a-12,b]}(x)$ (ở ý (i)), hãy tính tường minh nghiệm $u(x, t)$.

Chú ý: Sinh viên được sử dụng tài liệu.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2024-2025
Môn thi: Phương trình đạo hàm riêng 1

Mã môn học: **MAT2306** Số tín chỉ: **3** Đề số: **1**
Dành cho sinh viên khoá: **K67** Ngành học: **Toán học - SP Toán**

Lời giải 1. [**2** điểm]

(a) Vẽ trụ tứ giác Q.	**0.5**
(b) Tại các điểm trên biên ∂Q trừ đoạn $I = \{(x,0,0) : x \in (0,1)\}$ đều thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài nên chúng chính quy.	**0.5**
Trong hệ tọa độ trụ $x = x, y = r\sin\theta, z = r\cos\theta$ ta có: $$Q = \{0 < x < 1, \pi/4 < \theta < 7\pi/4, 0 < r < 1/(2\lvert\sin\theta\rvert - \cos\theta)\},$$ $$\Delta u = v_{xx} + v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} \text{ với } v(x,r,\theta) = u(x, r\sin\theta, r\cos\theta).$$ Khi đó hàm $v = r^{1/2}\sin((\theta-\pi/5)/2)$ là hàm cản đối với Q tại các điểm biên $(x,0,0) \in I$. Do đó Q là miền chính quy.	**0.5**
Khi đó với mỗi $X = (x,y,z) \in Q$, do hàm $E(X - \cdot)$ liên tục trên biên ∂Q nên bài toán biên $$\Delta\Phi = 0 \text{ trong } Q, \Phi = E(X-\cdot) \text{ trên } \partial Q$$ đều có nghiệm. Theo NLCĐ nghiệm này là duy nhất. Từ đó dẫn đến hàm Green đối với Q là tồn tại và duy nhất.	**0.5**

Lời giải 2. [**4** điểm]

Tách nghiệm $u = v + (u_1 - u_2)$ với v và $u_j, j = 1,2$, là nghiệm của $$\begin{cases} v_{tt} &= \Delta v + \chi_{[0,1]}(t)\chi_{[-1,1]}(x), \\ v(x,y,z,0) &= 0, \\ v_t(x,y,z,0) &= 0, \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} u_{jtt} &= \Delta u_j, \\ u_j(x,y,z,0) &= 0, \\ u_{jt}(x,y,z,0) &= \psi_j, \end{cases}$$ trong đó $\psi_j = \chi_{B_1(0,0,z_j)}, z_1 = 2, z_2 = -2$.	**0.5**
Do hai hình cầu $B_1(0,0,z_j)$ đối xứng nhau qua mặt phẳng $z = 0$ nên $$u_1(x,y,0,t) = u_2(x,y,0,t).$$	**0.5**
Do $\chi_{[0,1]}(t)\chi_{[-1,1]}(x)$ không phụ thuộc y, z nên v cũng thế. Khi đó: $$v(100,y,0,t) = \frac{1}{2}\iint_\Delta \chi_{[0,1]}(\tau)\chi_{[-1,1]}(x)dxd\tau = \frac{\lvert\Delta \cap R\rvert}{2}$$ với $\Delta = \{100-(t-\tau) < x < 100+(t-\tau), 0 < \tau < t\}, R = [-1,1]\times[0,1]$.	**0.5**

Khi đó ta có $$v(100,y,0,t)=\begin{cases}0 & \text{khi } 0<t<99,\\ 1 & \text{khi } t>102.\end{cases}$$	**1**
$$v(100,y,0,t)=\begin{cases}\frac{(99-t)^2}{4} & \text{khi } 99<t<100,\\ \frac{2t-199}{4} & \text{khi } 100<t<101,\\ 1-\frac{(102-t)^2}{4} & \text{khi } 101<t<102.\end{cases}$$	**1**
Như vậy $$u(100,y,0,t)=v(100,y,0,t)+(u_1(100,y,0,t)-u_2(100,y,0,t))=v(100,y,0,t).$$	**0.5**

Lời giải 3. [3.5 điểm]

(a) Do $u_x(0,y)=0, u_y(x,0)$ ta thác triển chẵn theo x, rồi chẵn theo y hàm u từ góc phần tư vành khăn thành hàm U trên toàn vành khăn. Hàm U thỏa mãn bài toán $$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0,\ \text{khi } 1<x^2+y^2<4,$$ với điều kiện biên $U(x,y)=2\|x\|$ khi $x^2+y^2=1, U(x,y)=\|y\|$ khi $x^2+y^2=4$.	**0.5**
Do $$0\le 2\|x\|\le 2 \text{ khi } x^2+y^2=1, 0\le \|y\|\le 2 \text{ khi } x^2+y^2=4$$ và hàm hằng là hàm điều hòa nên theo NLSS ta có $$0\le U(x,y)\le 2, 1<x^2+y^2<4.$$	**0.5**
Dùng NLCĐ mạnh với lưu ý $U(x,y)$ là hàm điều hòa, khác hằng trên biên, ta có đpcm.	**0.5**
(b)Trong hệ tọa độ cực $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ ta có điều kiện biên: $$v_\theta(r,0)=v_\theta(r,\pi/2)=0, v(1,\theta)=2\cos\theta, v(2,\theta)=2\sin\theta.$$	**0.5**
Do $v_\theta(r,0)=v_\theta(r,\pi/2)=0$ nên chuỗi nghiệm $$v(r,\theta)=a_0\ln r+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nr^{2n}+b_nr^{-2n})\cos(2n\theta).$$	**0.5**
Do $v(1,\theta)=2\cos\theta, v(2,\theta)=2\sin\theta$ nên $$b_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}2\cos\theta d\theta=\frac{4}{\pi}, a_0\ln 2+b_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}2\sin\theta d\theta=\frac{4}{\pi};$$ $$a_n+b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}2\cos\theta\cos(2n\theta)d\theta=\frac{8(-1)^n}{\pi(1-4n^2)},$$ $$4^na_n+4^{-n}b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}2\sin\theta\cos(2n\theta)d\theta=\frac{8}{\pi(1-4n^2)}.$$	**0.5**

Do đó $$a_0=0, b_0=\frac{4}{\pi}, a_n=\frac{8(1-(-4)^{-n})}{\pi(1-4n^2)(4^n-4^{-n})}, b_n=\frac{8((-4)^n-1)}{\pi(1-4n^2)(4^n-4^{-n})}$$ Như vậy $$v(r,\theta)=\frac{4}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(1-4n^2)(4^n-4^{-n})}\left(r^{2n}(1-(-4)^{-n})+r^{-2n}((-4)^n-1)\right)\cos(2n\theta).$$	**0.5**

Lời giải 4. **[2.5** điểm**]**

(a) Dùng công thức Poisson ta có $$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_a^b e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy.$$ Đổi biến $z=(y-x)/\sqrt{4t}$ ta có $$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(erf(\frac{b-x}{\sqrt{4t}})-erf(\frac{a-x}{\sqrt{4t}})\right).$$	**0.5**
Do $b>a$, hàm erf tăng thực sự và $-1<erf(z)<1, z\in\mathbb{R}$, nên ta có đpcm.	**0.5**
(b) Dùng Duhamel ta có $$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_a^b e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy+\int_0^t v(x,t-\tau,\tau)d\tau$$ với $v(x,t,\tau)$ (với $\tau>0$ cố định) là nghiệm của bài toán $$v_t=v_{xx} \text{ với } v(x,t,\tau)=e^{-\tau}\cos(cx).$$ Dùng công thức Poisson: $$v(x,t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}e^{-\tau}\cos(cy)dy=e^{-(c^2t+\tau)}\cos(cx).$$	**1**
Như vậy $$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(erf(\frac{b-x}{\sqrt{4t}})-erf(\frac{a-x}{\sqrt{4t}})\right)+\frac{e^{-t}-e^{-c^2t}}{c^2-1}\cos(cx).$$	**0.5**

Hà Nội, ngày 12 tháng 05 năm 2025
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

TS. Đặng Anh Tuấn