Bài tập lần 3.

Tài liệu Sivaji: Bài 2.2 (Trang 36) Ý (v)

$xu_x + (x+y)u_y = u+1, \quad u(x,0) = x^2$

(1) Kiểm tra điều kiện hoành.

Điều kiện Cauchy: $u(x,0) = x^2 \to \begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = 0 \\ u_0(s) = s^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) = s \\ b(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) + y_0(s) = s + 0 = s \end{cases}$

$\Rightarrow y'_0(s)\, a(x_0(s), y_0(s)) + x'_0(s)\, b(x_0(s), y_0(s))$

$= 0'.s - s's = -s \neq 0 \Leftrightarrow s \neq 0$

(2) Tìm nghiệm và đưa ra miền xác định

Hệ phương trình đặc trưng.

$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \\ u'(t) = u(t) + 1 \end{cases}$

Điều kiện Cauchy. $\begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = 0 \\ u_0(s) = s^2 \end{cases}$

+) $x'(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = c_1 e^t$

+) $y'(t) = x(t) + y(t) \Rightarrow y'(t) = c_1 e^t + y(t)$

$\Leftrightarrow y'(t) - y(t) = c_1 e^t$

$\Leftrightarrow e^{-t}(y'(t) - y(t)) = c_1$

$\Leftrightarrow e^{-t} y(t) = c_1 t + c_2$

$\Leftrightarrow y(t) = c_1 e^t t + c_2 e^t$

+) $u'(t) = u(t) + 1 \Rightarrow e^{-t}(u'(t) - u(t)) = e^{-t}$

$\Leftrightarrow e^{-t}u(t) = -e^{-t} + C_3$

$\Leftrightarrow u(t) = C_3 e^{t} - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} \\ y(t) = C_1 t e^{t} + C_2 e^{t} \\ u(t) = C_3 e^{t} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t,s) = s e^{t} \\ y(t,s) = s t e^{t} + C_2 e^{t} = s t e^{t} \\ u(t,s) = (s^2+1) e^{t} - 1 \end{cases}$$

+) $x(t,s) = s e^{t} \Rightarrow s = e^{-t} x$

+) $y(t,s) = s t e^{t} = t x \Rightarrow t = \frac{y}{x} \Rightarrow s = x e^{-\frac{y}{x}} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

+) $u = (s^2+1) e^{t} - 1$

$= (x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1) e^{\frac{y}{x}} - 1$

Thử lại:

$u_x = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} (x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1) + 2x(e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} e^{-\frac{y}{x}})$

$\Rightarrow x u_x = -\frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} (x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1) + 2x^2 (e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} e^{-\frac{y}{x}})$

$u_y = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} (x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1) - 2x e^{-\frac{y}{x}}$

$\Rightarrow (x+y) u_y = e^{\frac{y}{x}} (x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1) - 2x^2 e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} (x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1) - 2xy e^{-\frac{y}{x}}$

$\Rightarrow x u_x + (x+y) u_y = e^{\frac{y}{x}} (x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1) = u + 1$ (TM)

$u(x,0) = x^2 + 1 - 1 = x^2$ (TM ĐK Cauchy)

Miền xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Thứ
Ngày . . No.

Tài liệu Sivaji - Bài 2.13 - Trang 38

$$\begin{cases} u u_t + u_x = 0 \\ u(x,1) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \geq 1 \end{cases}$$

Đổi ký hiệu biến $t \to y$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x + u u_y = 0 \\ u(x,1) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Hệ PTĐT $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = u(t) \\ u'(t) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 + t \\ u(t) = C_2 \\ y'(t) = C_2 \Rightarrow C_2 t + C_3 \end{cases}$$

ĐK Cauchy $u(x,1) = \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = 1 \\ u_0(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tham số $\begin{cases} x(t,s) = t + s \\ u(t,s) = \dfrac{1}{s} \\ y(t,s) = \dfrac{t}{s} + C_3 = \dfrac{t}{s} + 1 \end{cases}$

+) $x = t + s \Rightarrow s = x - t$

+) $y = \dfrac{t}{s} + 1 = \dfrac{t}{x-t} + 1 = \dfrac{x}{x-t} \Rightarrow t = x - \dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow s = x - x + \dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow u = \dfrac{1}{s} = \dfrac{y}{x}$.

Thử lại

$$\left.\begin{array}{l} u_x = -\dfrac{y}{x^2} \\ u_y = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow u_x + u u_y = \frac{-y}{x^2} + \frac{y}{x^2} = 0 \quad (T/M)$$

ĐK Cauchy $u(x,1) = \dfrac{1}{x}$ (T.M)

Sách của Mohammed Niksirat

– Problem 2.8 (Trang 44): ý (b)

b) $\begin{cases} x u_x + x u u_y = 1 \quad (*) \\ u|\{y - x = 0\} = 1 \Leftrightarrow u(x,x) = 1 \end{cases}$

ĐK Cauchy $u(x,x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = s \\ u_0(s) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) = s \\ b(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) u_0(s) = s \end{cases}$

$\Rightarrow y_0'(s) a(x_0(s), y_0(s)) - x_0'(s) b(x_0(s), y_0(s))$

$= s' . s - s' . s = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) ~~khoa~~ không thỏa mãn điều kiện Cauchy

– Problem 2.28 (Trang 54)

$\begin{cases} u_t + \alpha (1 + x^2) u_x = t \\ u(0,x) = x \end{cases}$

Hệ PT ĐT: $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{du}{t} = dz$

$\Rightarrow \begin{cases} t'(z) = 1 \\ x'(z) = 1 + x^2(z) \\ u'(z) = t(z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t(z) = z + C_1 \\ x(z) = \tan(z + C_2) \\ u(z) = z + C_1 = \dfrac{z^2}{2} + C_1 z + C_3 \end{cases}$

Thứ
Ngày . . No.

ĐK Cauchy. $u(0,x) = x \rightarrow \begin{cases} t_0(s) = 0 \\ x_0(s) = s \\ u_0(s) = s \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} t(z,s) = z \\ x(z,s) = \tan(z + \arctan s) \\ u(z,s) = \dfrac{z^2}{2} + s \end{cases}$

+) $x = \tan(z + \arctan s)$

$\rightarrow z + \arctan s = \arctan x$

$\rightarrow \arctan s = \arctan x - z = \arctan x - t$

$\rightarrow s = \tan(\arctan x - t)$

$\rightarrow u(z,s) = \dfrac{z^2}{2} + s = \dfrac{t^2}{2} + \tan(\arctan x - t) = u(t,x)$

+) Thử lại

$u_t = t - (\tan^2(\arctan x - t) + 1)$

$u_x = \dfrac{1 + \tan^2(\arctan x - t)}{1 + x^2}$

$\rightarrow u_t + (1 + x^2) u_x = 1$ (TM)

ĐK Cauchy $u(0,x) = \tan(\arctan x) = x$ (T/m)

Tài liệu BT_PDE.doc.pdf, Trang 43-44 : Bài 1 ý (a)

$u_t + u u_x = 0$ khi $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$u(x,0) = \begin{cases} 2 \text{ khi } x \geq 1 \\ 1 \text{ khi } x > 1 \end{cases}$

Hệ phương trình đặc trưng

$\begin{cases} t'(\tau) = 1 \\ x'(\tau) = u(\tau) \\ u'(\tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(\tau) = t + C_1 \\ u(\tau) = C_2 \\ x(\tau) = C_2 \tau + C_3 \end{cases}$

KOKUYO

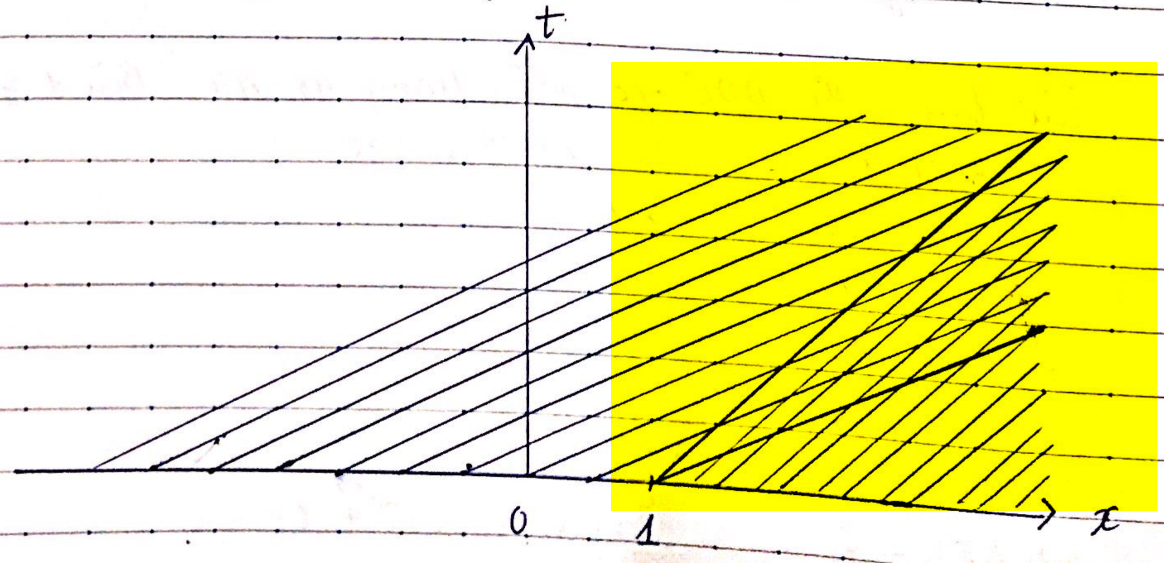
ĐK Cauchy
$$\begin{cases} t_0(s) = 0 \\ x_0(s) = s \\ u_0(s) = \rho_0(s) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t(\tau, s) = \tau \\ x(\tau, s) = \tau \rho_0(s) + s \\ u(\tau, s) = \rho_0(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = t\rho_0(s) + s$$

Với $\rho_0(s) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Vẽ các đường đặc trưng



Thứ

Ngày . . No.

+). Các vùng chỉ có 1 đường đặc trưng đi qua

Vùng 1: $\{(x,t), t>0, x > 2t+1\}$

Vùng 2: $\{(x,t), t>0, x < t+1\}$

+). Vùng sốc: $\{(x,t), t>0, t+1 < x < 2t+1\}$

Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có 1 đg đặc trưng đi qua.

Vùng 1: $\begin{cases} t>0 \\ x>2t+1 \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = 1$

Vùng 2: $\begin{cases} t>0 \\ x<t+1 \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = 2.$