Bài tập Phương trình Đạo hàm riêng lần 2

Nhóm 7

March 2025

1 Câu 2 đề thi giữa kỳ K65 Toán tin Đề 4

1.1 Câu a

Tốc độ lan truyền c = 2

Do $u_t(x,0) = 1, 0 \le x \le 3$, thác triển lẻ tuần hoàn chu kỳ 6, ta được:

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{Nếu } 6k \le x \le 6k+3, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{Nếu } 6k+3 \le x \le 6k+6, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\int_0^x u_t(s,0)ds = \begin{cases} x & \text{Nếu } 6k \le x \le 6k+3, k \in \mathbb{Z} \\ -x & \text{Nếu } 6k+3 \le x \le 6k+6, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy sóng tiến là:

$$F(x) = \frac{-1}{4} \int_0^x u_t(s,0)ds$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-1}{4}x & \text{Nếu } 6k \le x \le 6k+3, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{4}x & \text{Nếu } 6k+3 \le x \le 6k+6, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$G(x) = \frac{1}{4} \int_0^x u_t(s,0)ds$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & \text{Nếu } 6k \le x \le 6k+3, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{-1}{4}x & \text{Nếu } 6k+3 \le x \le 6k+6, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy

$$u(x,t) = F(x-2t) + G(x+2t)$$

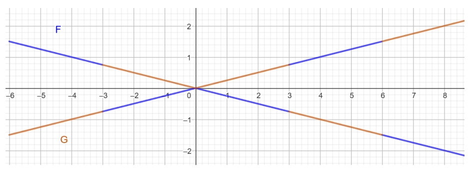
$$u(1,1) = F(-1) + G(3) = \frac{-1}{4} + \frac{-3}{4} = -1$$

1.2 Câu b

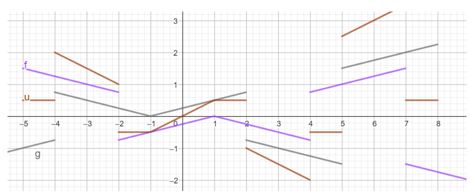
Ta có:

$$u(x, \frac{1}{2}) = F(x-1) + G(x+1)$$
$$u(x,1) = F(x-2) + G(x+2)$$
$$u(x,2) = F(x-4) + G(x+4)$$

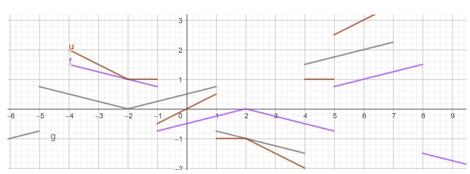
Đồ thị hàm số $F(x)$ và $G(x)$:



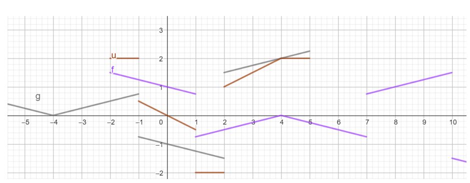
Đồ thị các hàm số $F(x-1)$, $G(x+1)$ và $u(x, \frac{1}{2})$:



Đồ thị các hàm số $F(x-2)$, $G(x+2)$ và $u(x,1)$:



Đồ thị các hàm số $F(x-4)$, $G(x+4)$ và $u(x,2)$:



2 Câu 2 đề thi giữa kỳ K64 Toán học Đề 1

2.1 Câu a

Tốc độ truyền sóng c = 3.

Ta có:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{Nếu } -2 \le x \le -1, \\ 0 & \text{Nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} x & \text{Nếu } 2 \le x \le 3, \\ 0 & \text{Nếu ngược lại} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\int_0^x u_t(s,0)ds = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } x < 2, \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 & \text{Nếu } 2 \le x \le 3, \\ \frac{5}{2} & \text{Nếu } x > 3 \end{cases}$$

Vậy sóng tiến:

$$F(x) = \frac{1}{2}u(x,0) - \frac{1}{6}\int_0^x u_t(s,0)ds$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } x < -2 \\ \frac{1}{2} & \text{Nếu } -2 \le x \le -1 \\ 0 & \text{Nếu } -1 \le x \le 2 \\ \frac{-1}{12}x^2 + \frac{1}{3} & \text{Nếu } 2 \le x \le 3 \\ \frac{-5}{12} & \text{Nếu } x > 3 \end{cases}$$

Sóng lùi:

$$G(x) = \frac{1}{2}u(x,0) + \frac{1}{6}\int_0^x u_t(s,0)ds$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } x < -2 \\ \frac{1}{2} & \text{Nếu } -2 \le x \le -1 \\ 0 & \text{Nếu } -1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3} & \text{Nếu } 2 \le x \le 3 \\ \frac{5}{12} & \text{Nếu } x > 3 \end{cases}$$

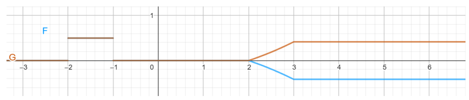
2.2 Câu b

Ta có:

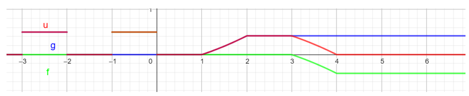
$$u(x, \frac{1}{3}) = F(x-1) + G(x+1)$$

$$u(x, \frac{2}{3}) = F(x-2) + G(x+2)$$
$$u(x, 1) = F(x-3) + G(x+3)$$

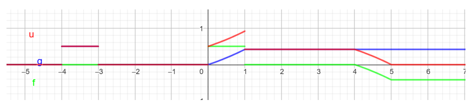
Đồ thị hàm số $F(x)$ và $G(x)$:



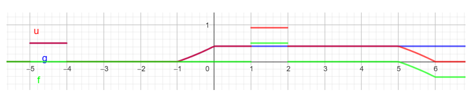
Đồ thị các hàm số $F(x-1)$, $G(x+1)$ và $u(x, \frac{1}{3})$:



Đồ thị các hàm số $F(x-2)$, $G(x+2)$ và $u(x, \frac{2}{3})$:



Đồ thị các hàm số $F(x-3)$, $G(x+3)$ và $u(x, 1)$:



2.3 Câu c

Từ công thức sóng tiến, sóng lùi tìm được ở câu a, ta thấy các điểm x=-2, -1, 2, 3 là các điểm mà $u(x,t)$ không liên tục.
Do đó, tập điểm kỳ dị là

$$\{-2 \pm 3t\} \cup \{-1 \pm 3t\} \cup \{2 \pm 3t\} \cup \{3 \pm 3t\}$$

3 Câu 2 đề thi giữa kỳ K64 Toán học Đề 3

3.1 Phân tích đề bài

Chúng ta có phương trình truyền sóng:

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), \quad x > 0, t > 0 \tag{1}$$
$$u_x(0,t) = 0 \quad \text{(điều kiện biên Neumann)} \tag{2}$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{(điều kiện ban đầu thứ nhất)} \tag{3}$$
$$u_t(x,0) = x\chi_{[2,3]}(x), \quad x \geq 0 \quad \text{(điều kiện ban đầu thứ hai)} \tag{4}$$

Trong đó:

- $u_{tt}(x,t)$ là đạo hàm bậc hai của u theo biến t
- $u_{xx}(x,t)$ là đạo hàm bậc hai của u theo biến x
- $\chi_{[2,3]}(x)$ là hàm đặc trưng trên đoạn $[2,3]$, có nghĩa là:

$$\chi_{[2,3]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in [2,3] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [2,3] \end{cases}$$

Nên điều kiện ban đầu $u_t(x,0) = x\chi_{[2,3]}(x)$ có nghĩa là:

$$u_t(x,0) = \begin{cases} x & \text{nếu } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{nếu } x < 2 \text{ hoặc } x > 3 \end{cases}$$

(a) Xác định sóng tiến - sóng lùi

Ta có $c = 2$ (từ hệ số 4 trong phương trình $u_{tt} = 4u_{xx}$)
Từ công thức D'Alembert ta có nghiệm tổng quát: $u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct) = F(x - 2t) + G(x + 2t)$
áp dụng điều kiện biên Neumann
Ta có :

- $f(x)$ là hàm ban đầu $u(x,0) = 0$
- $g(x)$ là hàm vận tốc ban đầu $u_t(x,0) = x\chi_{[2,3]}(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{khi } x < 2 \text{ hoặc } x > 3 \end{cases} \tag{5}$$

Với điều kiện biên Neumann, ta cần sử dụng **thác triển chẵn**

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Với $f(x) = 0$, ta có $f^*(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Với $g(x) = x\chi_{[2,3]}(x)$, ta có:

$$g^*(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{khi } 0 \leq x < 2 \text{ hoặc } x > 3 \\ -x & \text{khi } -3 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{khi } x < -3 \text{ hoặc } -2 < x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Tính các hàm $F(x)$ và $G(x)$ cho sóng tiến và sóng lùi Từ công thức:

$$F(x) = \frac{f^*(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x g^*(s)ds \tag{9}$$

$$G(x) = \frac{f^*(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x g^*(s)ds \tag{10}$$

Với $c = 2$ và $f^*(x) = 0$, ta có:

$$F(x) = -\frac{1}{4}\int_0^x g^*(s)ds \tag{11}$$

$$G(x) = \frac{1}{4}\int_0^x g^*(s)ds \tag{12}$$

Tính tích phân $\int_0^x g^*(s)ds$

$$\int_0^x g^*(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq -3 \\ \frac{(-x-2)(-x-3)}{2} & \text{khi } -3 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{khi } -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{(x-2)(x-1)}{2} & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{5}{2} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \tag{13}$$

Sóng tiến:

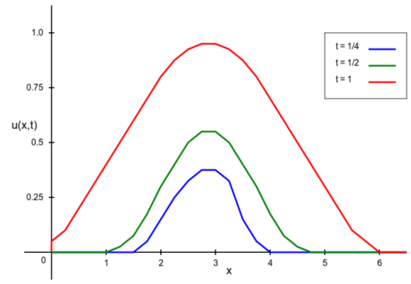
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq -3 \\ -\frac{(-x-2)(-x-3)}{8} & \text{khi } -3 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{khi } -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{(x-2)(x-1)}{8} & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \\ -\frac{5}{8} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \tag{14}$$

Sóng lùi:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq -3 \\ \frac{(-x-2)(-x-3)}{8} & \text{khi } -3 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{khi } -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{(x-2)(x-1)}{8} & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{5}{8} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \tag{15}$$

Khi $2 \leq x \leq 3$, ta có $(x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$, nên:
Sóng tiến $F(x) = -\frac{x^2-3x+2}{8}$ khi $2 \leq x \leq 3$
Sóng lùi $G(x) = \frac{x^2-3x+2}{8}$ khi $2 \leq x \leq 3$

3.2 (b) Vẽ đồ thị nghiệm tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$



Hình 1: Đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$

Để vẽ đồ thị nghiệm, chúng ta cần tính giá trị của $u(x,t)$ tại các thời điểm cụ thể. Từ công thức đã tìm được:

$$u(x,t) = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} |s| \chi_{[2,3]}(|s|) ds$$

Tích phân này chỉ khác 0 khi khoảng $[x-2t, x+2t]$ giao với $[-3,-2] \cup [2,3]$.

Chúng ta tính giá trị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$ cho các giá trị khác nhau của x để vẽ đồ thị:

3.2.1 Tại $t = 1/4$:

Khoảng tích phân là $[x - 1/2, x + 1/2]$. Nếu khoảng này giao với $[2, 3]$, ta có:

$$u(x, 1/4) = \frac{1}{4} \int_{\max(x-1/2,2)}^{\min(x+1/2,3)} s\, ds = \frac{1}{4} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{\max(x-1/2,2)}^{\min(x+1/2,3)}$$

3.2.2 Tại $t = 1/2$:

Khoảng tích phân là $[x - 1, x + 1]$. Nếu khoảng này giao với $[2, 3]$, ta có:

$$u(x, 1/2) = \frac{1}{4} \int_{\max(x-1,2)}^{\min(x+1,3)} s\, ds = \frac{1}{4} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{\max(x-1,2)}^{\min(x+1,3)}$$

3.2.3 Tại $t = 1$:

Khoảng tích phân là $[x - 2, x + 2]$. Khoảng này có thể giao với cả $[-3, -2]$ và $[2, 3]$. Trong trường hợp này, ta cần tính:

$$u(x, 1) = \frac{1}{4} \left(\int_{\max(x-2,2)}^{\min(x+2,3)} s\, ds + \int_{\max(x-2,-3)}^{\min(x+2,-2)} -s\, ds \right)$$

3.3 (c) Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm

Trong phương trình sóng, điểm kỳ dị là những điểm mà tại đó nghiệm $u(x,t)$ không khả vi hoặc không liên tục. Trong trường hợp này, các điểm kỳ dị có thể xuất hiện ở:

1. Các điểm gián đoạn của điều kiện ban đầu $u_t(x,0) = x\chi_{[2,3]}(x)$
2. Các đường đặc trưng và các giao điểm của chúng
3. Điểm phản xạ tại biên $x = 0$

Từ điều kiện ban đầu, chúng ta có gián đoạn tại $x = 2$ và $x = 3$.
Các đường đặc trưng qua các điểm này sẽ là:

$$x - 2t = 2 \quad \text{và} \quad x + 2t = 2 \quad (\text{qua điểm } (2,0)) \tag{16}$$

$$x - 2t = 3 \quad \text{và} \quad x + 2t = 3 \quad (\text{qua điểm } (3,0)) \tag{17}$$

Do có điều kiện biên tại $x = 0$, chúng ta cũng có các đường đặc trưng phản xạ:

$$x + 2t = -2 \quad \text{và} \quad x - 2t = -2 \quad (\text{phản xạ của đặc trưng qua điểm } (-2,0)) \tag{18}$$

$$x + 2t = -3 \quad \text{và} \quad x - 2t = -3 \quad (\text{phản xạ của đặc trưng qua điểm } (-3,0)) \tag{19}$$

Vậy tập các điểm kỳ dị của nghiệm là:

1. Các đường thẳng: $x - 2t = 2$, $x + 2t = 2$, $x - 2t = 3$, $x + 2t = 3$
2. Các đường phản xạ: $x + 2t = -2$, $x - 2t = -2$, $x + 2t = -3$, $x - 2t = -3$
3. Các giao điểm của các đường thẳng này

Các đường thẳng này chia mặt phẳng (x,t) thành các vùng, và nghiệm $u(x,t)$ có biểu thức khác nhau trong mỗi vùng.

4 Bài 19 trang 24

Xét phương trình truyền sóng:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \quad \text{trong} \quad (0,\pi) \times (0,\infty),$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 1 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = x, \; u_t(x,0) = x & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Tìm một hàm $v(x,t) = ax + bt$ để $v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 1$. Đặt $w = u - v$, hãy xác định bài toán mới cho w.

(b) Tính sóng tiến, sóng lùi cho bài toán cho w. Từ đó hãy vẽ đồ thị cho u tại các thời điểm $t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

4.1 Câu (a)

4.1.1 Tìm hàm $v(x,t)$

Tính đạo hàm riêng theo x của $v(x,t)$:

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x}(ax + bt) = a.$$

Theo điều kiện biên:

$$v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 1 \implies a = 1.$$

Vậy $v(x,t) = x + bt$.

4.1.2 Xác định bài toán cho $w = u - v$

Thay $w = u - v$ vào phương trình gốc:

$$w_{tt} - 4w_{xx} = u_{tt} - 4u_{xx} - (v_{tt} - 4v_{xx}) = 0 - 0 = 0.$$

Điều kiện biên cho w:

$$w_x(0,t) = u_x(0,t) - v_x(0,t) = 1 - 1 = 0,$$
$$w_x(\pi,t) = u_x(\pi,t) - v_x(\pi,t) = 1 - 1 = 0.$$

Điều kiện ban đầu:

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = x - x = 0,$$
$$w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = x - b.$$

4.1.3 Chọn $b = \frac{\pi}{2}$

1. **Tính giá trị trung bình của $w_t(x,0)$:**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi w_t(x,0)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x-b)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi x\,dx - \int_0^\pi b\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - b\pi\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - b.
\end{aligned}$$

2. **Đặt giá trị trung bình bằng 0**:

$$\frac{\pi}{2} - b = 0 \implies b = \frac{\pi}{2}.$$

3. **Kết quả**:

$$w_t(x,0) = x - \frac{\pi}{2}.$$

Hàm này có:

- x: Biến thiên tuyến tính trên $[0,\pi]$.
- $-\frac{\pi}{2}$: Triệt tiêu giá trị trung bình của $w_t(x,0)$ trên $[0,\pi]$, $\int_0^\pi w_t(x,0)\,dx = 0$.

4.1.4 Bài toán mới cho w

Bài toán biên mới có dạng:

$$\begin{cases} w_{tt} - 4w_{xx} = 0 & \text{trong } (0,\pi)\times(0,\infty), \\ w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0, \\ w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = x - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Kết luận: Hàm $v(x,t)$ có thể chọn là $v(x,t) = x + \frac{\pi}{2}t$.

4.2 Câu (b): Tính sóng tiến, sóng lùi và vẽ đồ thị

4.2.1 Thác triển hàm cho toàn trục x

Do điều kiện biên Neumann thuần nhất $w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0$, ta thác triển:

- $w(x,0) = 0$ thành hàm f^* **chẵn** và **tuần hoàn** chu kỳ 2π hay chính là đồng nhất $= 0$ trên toàn trục.
- $w_t(x,0) = x - \frac{\pi}{2}$ thành hàm g^* **chẵn** và **tuần hoàn** chu kỳ 2π.

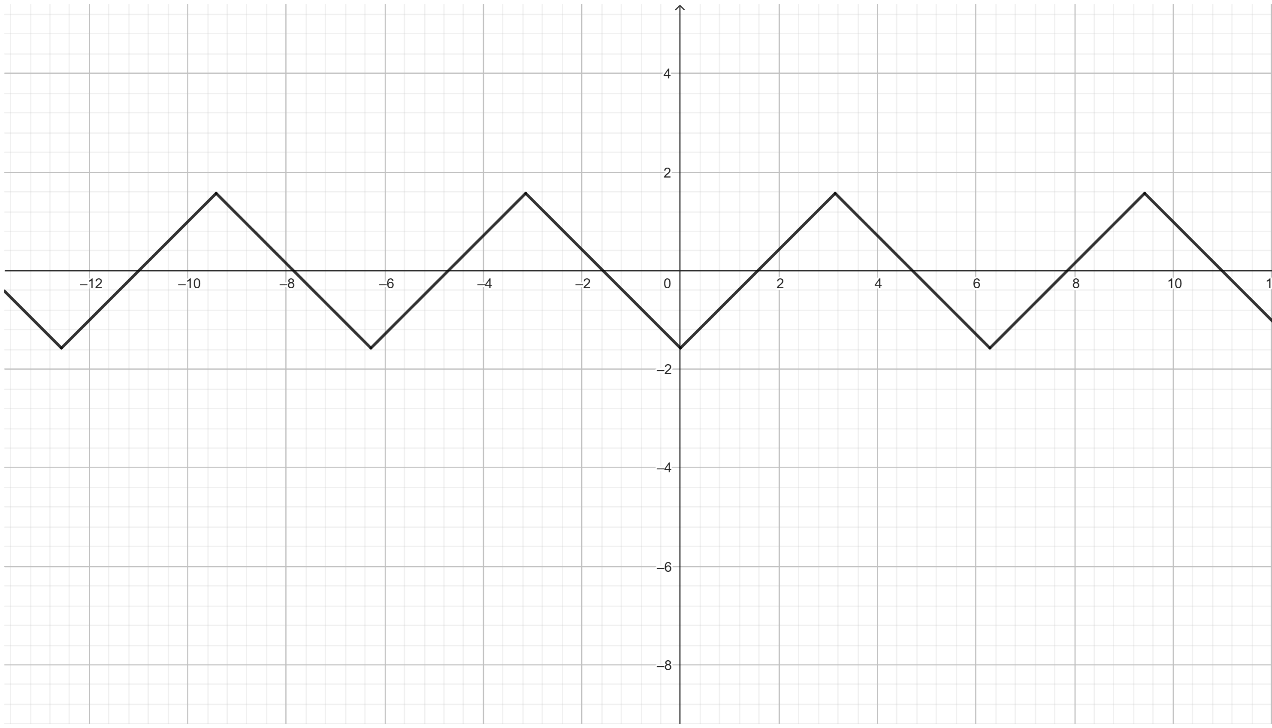
$$g^*(x) \;=\; (-1)^k\Big(x - k\pi - \tfrac{\pi}{2}\Big), \quad \text{nếu } x \in [k\pi,\,(k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$$

1. **Sóng tiến:**

$$F(x) = \frac{f^*(x)}{2} - \frac{1}{4}\int_0^x g^*(s)\,ds$$

2. **Sóng lùi:**

$$G(x) = \frac{f^*(x)}{2} + \frac{1}{4}\int_0^x g^*(s)\,ds$$



Nghiệm của bài toán:

$$w^*(x,t) \;=\; F\big(x-2t\big) \;+\; G\big(x+2t\big).$$

$g^*(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π. Để tính $\displaystyle\int_0^x g^*(s)\,\mathrm{d}s$, ta thực hiện các bước:

1. **Xác định số dư x' modulo 2π**:

$$x' \;=\; x \mod 2\pi, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

2. **Tách phần nguyên chu kỳ**:

$$\int_0^x g^*(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \underbrace{\int_0^{2\pi} g^*(s)\,\mathrm{d}s \;+\; \cdots \;+\; \int_{2\pi(m-1)}^{2\pi m} g^*(s)\,\mathrm{d}s}_{m \text{ chu kỳ đầy đủ}} \;+\; \int_{2\pi m}^{x'+2\pi m} g^*(s)\,\mathrm{d}s.$$

3. **Mỗi chu kỳ đầy đủ cho tổng bằng 0** (vì g^* tuần hoàn và có trung bình 0 trên một chu kỳ, hoặc theo bài toán cụ thể):

$$\int_{2\pi k}^{2\pi k+2\pi} g^*(s)\,\mathrm{d}s \;=\; 0.$$

4. **Chỉ còn lại đoạn cuối từ $2\pi m$ tới $x' + 2\pi m$:**

$$\int_0^{x} g^*(s)\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^{x'} g^*(s)\,\mathrm{d}s.$$

- Trường hợp 1: $0 \le x' < \pi$
  Trên khoảng này, ta có

  $$g^*(s) = s - \frac{\pi}{2}.$$

  Khi đó,

  $$\int_0^{x'} \left(s - \tfrac{\pi}{2}\right) ds \;=\; \left[\frac{s^2}{2} \;-\; \frac{\pi}{2}\,s\right]_0^{x'} \;=\; \frac{(x')^2}{2} \;-\; \pi\,x'\,\frac{1}{2}.$$

  Vậy,

  $$\int_0^{x'} \left(s - \tfrac{\pi}{2}\right) ds \;=\; \frac{(x')^2}{2} \;-\; \frac{\pi\,x'}{1}.$$

  Suy ra

  $$F(x) \;=\; -\frac{1}{4}\Big(\frac{(x')^2}{2} \;-\; \pi\,x'\Big) \;=\; -\frac{(x')^2}{8} \;+\; \frac{\pi\,x'}{8}.$$

  $$G(x) \;=\; \frac{1}{4}\Big(\frac{(x')^2}{2} \;-\; \pi\,x'\Big) \;=\; \frac{(x')^2}{8} \;-\; \frac{\pi\,x'}{8}.$$

- Trường hợp 2: $\pi \le x' < 2\pi$
  Trên khoảng này, ta chia tích phân thành hai phần:

  $$\int_0^{x'} g^*(s)\,ds \;=\; \int_0^{\pi}\left(s - \tfrac{\pi}{2}\right) ds \;+\; \int_{\pi}^{x'}\left(\tfrac{3\pi}{2} - s\right) ds.$$

  Dễ thấy

  $$\int_0^{\pi}\left(s - \tfrac{\pi}{2}\right) ds \;=\; 0.$$

  Vậy

  $$\int_0^{x'} g^*(s)\,ds \;=\; \int_{\pi}^{x'}\left(\tfrac{3\pi}{2} - s\right) ds.$$

  Tính tiếp:

  $$\int_{\pi}^{x'}\left(\tfrac{3\pi}{2} - s\right) ds \;=\; \left[\tfrac{3\pi}{2}\,s \;-\; \frac{s^2}{2}\right]_{\pi}^{x'} \;=\; \left(\tfrac{3\pi}{2}\,x' - \tfrac{(x')^2}{2}\right) - \left(\tfrac{3\pi}{2}\,\pi - \tfrac{\pi^2}{2}\right).$$

  Lưu ý $\frac{3\pi}{2}\,\pi - \frac{\pi^2}{2} \;=\; \pi^2$. Do đó,

  $$\int_{\pi}^{x'}\left(\tfrac{3\pi}{2} - s\right) ds \;=\; \frac{3\pi\,x'}{2} \;-\; \frac{(x')^2}{2} \;-\; \pi^2.$$

Vậy

$$F(x) \;=\; -\frac{1}{4}\Big(\frac{3\pi\, x'}{2} \;-\; \frac{(x')^2}{2} \;-\; \pi^2\Big) \;=\; \frac{(x')^2}{8} \;-\; \frac{3\pi\, x'}{8} \;+\; \frac{\pi^2}{4}.$$

$$G(x) \;=\; \frac{1}{4}\Big(\frac{3\pi\, x'}{2} \;-\; \frac{(x')^2}{2} \;-\; \pi^2\Big) \;=\; -\frac{(x')^2}{8} \;+\; \frac{3\pi\, x'}{8} \;-\; \frac{\pi^2}{4}.$$

Công thức $\boldsymbol{F(x)}$ và $\boldsymbol{G(x)}$ theo $\boldsymbol{x'}$

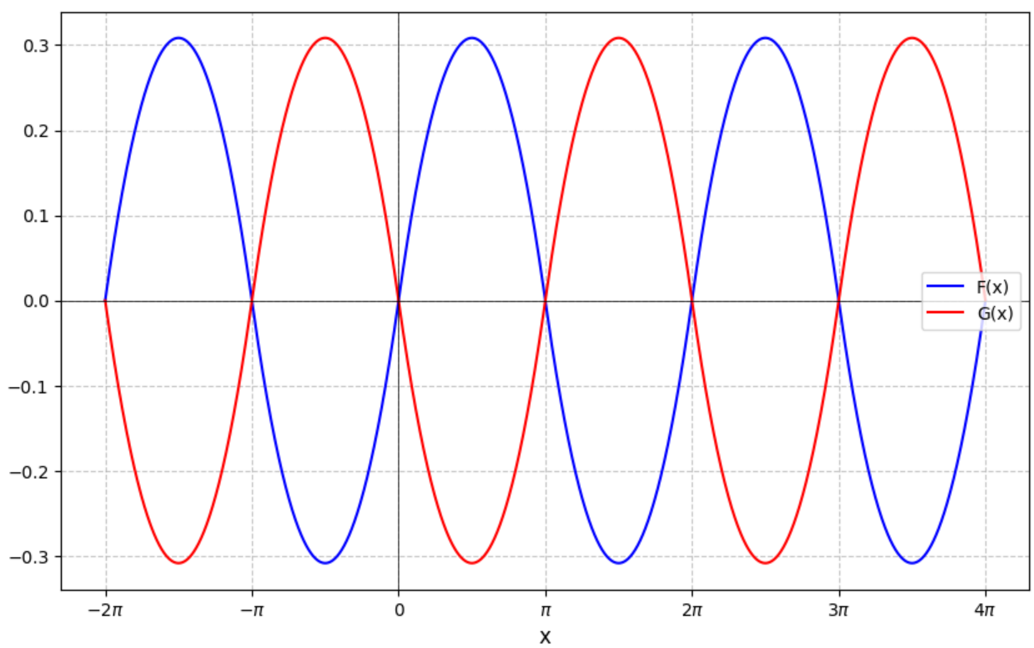
$$x' \;=\; x \mod 2\pi, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

Sóng tiến:

$$F(x) \;=\; \begin{cases} -\frac{(x')^2}{8} \;+\; \frac{\pi\, x'}{8}, & 0 \le x' < \pi, \\ \frac{(x')^2}{8} \;-\; \frac{3\pi\, x'}{8} \;+\; \frac{\pi^2}{4}, & \pi \le x' < 2\pi, \end{cases}$$

Sóng lùi:

$$G(x) \;=\; \begin{cases} \frac{(x')^2}{8} \;-\; \frac{\pi\, x'}{8}, & 0 \le x' < \pi, \\ -\frac{(x')^2}{8} \;+\; \frac{3\pi\, x'}{8} \;-\; \frac{\pi^2}{4}, & \pi \le x' < 2\pi, \end{cases}$$



4.2.2 Bước 4: Nghiệm tổng hợp của w và u

$$w(x,t) = F(x-2t) + G(x+2t)$$

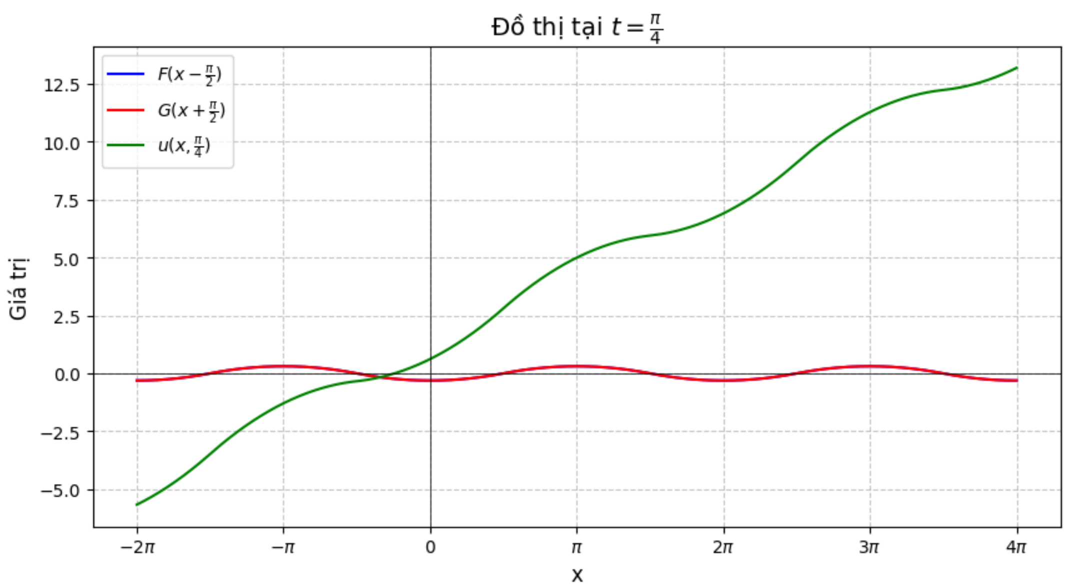
Kết hợp với $v(x,t) = x + \frac{\pi}{2}t$, ta được nghiệm u:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t) = F(x-2t) + G(x+2t) + x + \frac{\pi}{2}t$$

4.2.3 Bước 5: Đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm

- **Tại $t = \frac{\pi}{4}$:**

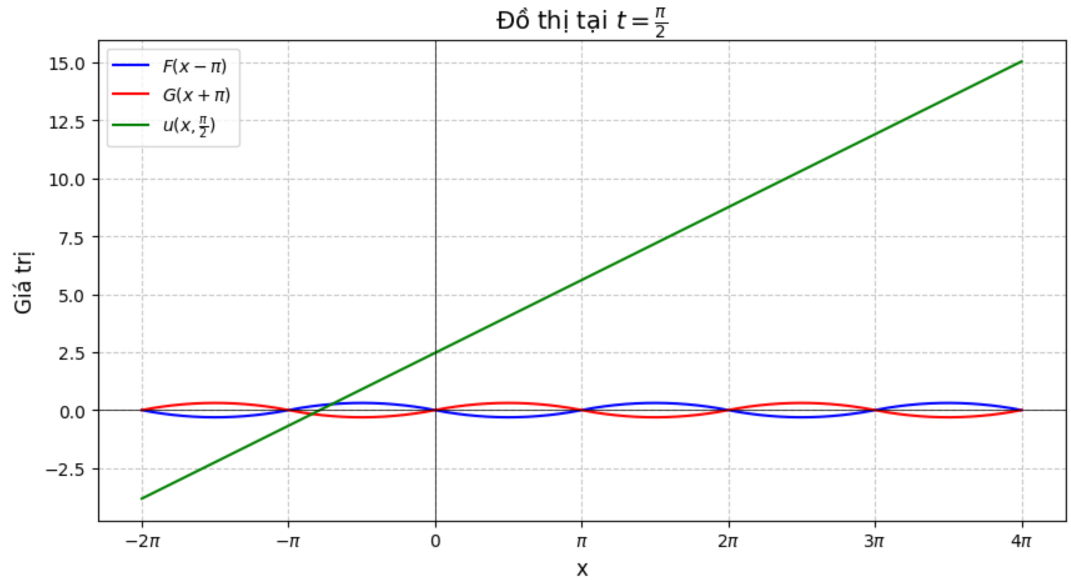
$$u\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = F(x - \frac{\pi}{2}) + G(x + \frac{\pi}{2}) + x + \frac{\pi^2}{8}$$



Tại đây sóng tiến trùng với sóng lùi.

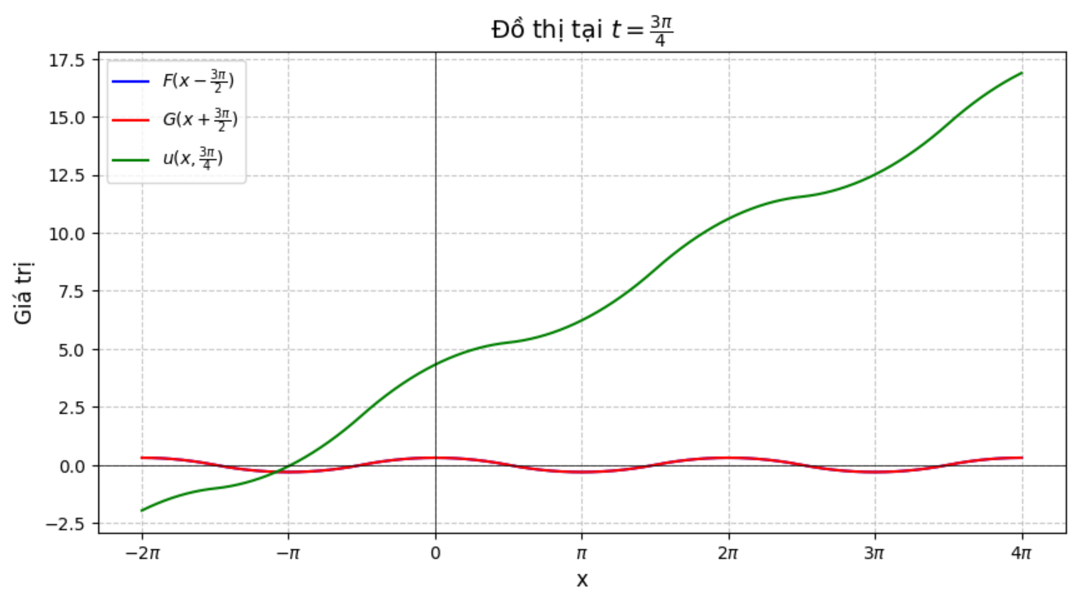
- **Tại $t = \frac{\pi}{2}$:**

$$u(x, \frac{\pi}{2}) = F(x-\pi) + G(x+\pi) + x + \frac{\pi^2}{4}$$



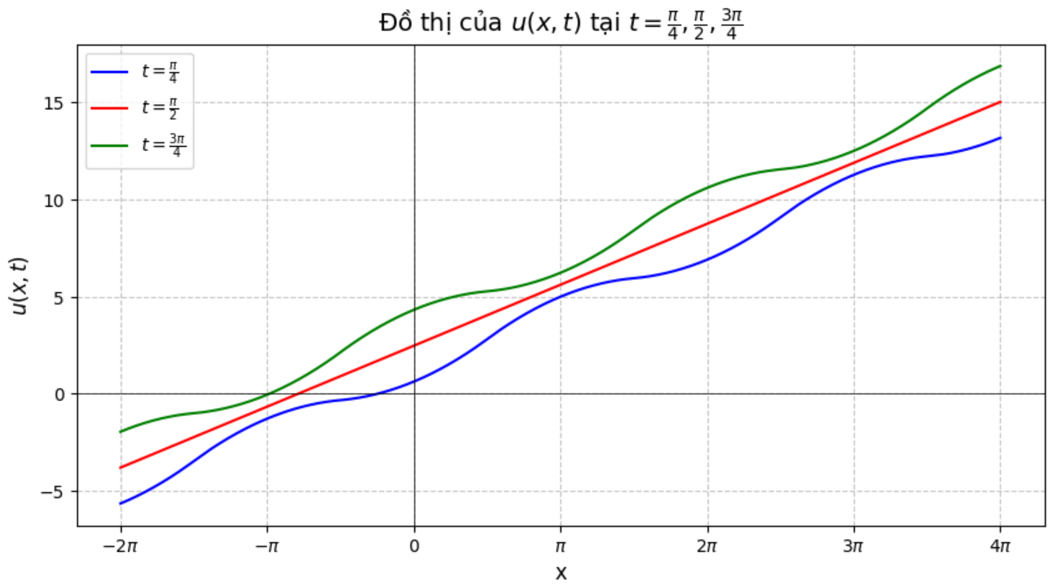
- **Tại** $t = \frac{3\pi}{4}$**:**

$$u(x, \frac{3\pi}{4}) = F\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + G\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + x + \frac{3\pi^2}{8}$$



Tại đây sóng tiến cũng trùng với sóng lùi.

Tổng hợp cả 3 thời điểm:



5 Bài 3 trang 19

Viết lại $u(x,0)$ và $u_t(x,0)$.

$u(x,0) = \begin{cases} 1, \ -1 \le x \le 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$, $u_t(x,0) = \begin{cases} x * 1 = x, \ 1 \le x \le 2 \\ x * 0 = 0, x < 1 \text{ hoặc } x > 2 \end{cases}$

$c = \sqrt{9} = 3$

a) Nghiệm của bài toán có dạng $u(x,t) = F(x-3t) + G(x+3t)$ với:

- Sóng tiến $F(x) = \dfrac{u(x,0)}{2} - \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^x u_t(s,0)ds.$
- Sóng lùi $G(x) = \dfrac{u(x,0)}{2} + \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^x u_t(s,0)ds.$

Xét tích phân $\displaystyle\int_0^x u_t(s,0)ds.$

- $x < 1$:

$$\int_0^x u_t(s,0)ds = \int_0^x 0ds = 0$$

− $1 \le x \le 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^x u_t(s,0)ds &= \int_0^1 u_t(s,0)ds + \int_1^x u_t(s,0)ds \\ &= \int_0^1 0ds + \int_1^x sds \\ &= \frac{x^2-1}{2}\end{aligned}$$

− $x > 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^x u_t(s,0)ds &= \int_0^2 u_t(s,0)ds + \int_2^x u_t(s,0)ds \\ &= \frac{2^2-1}{2} + \int_2^x 0ds \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^x u_t(s,0)ds = \begin{cases} 0,\ x < 1 \\ \dfrac{x^2-1}{2},\ 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3}{2},\ x > 2 \end{cases}$$

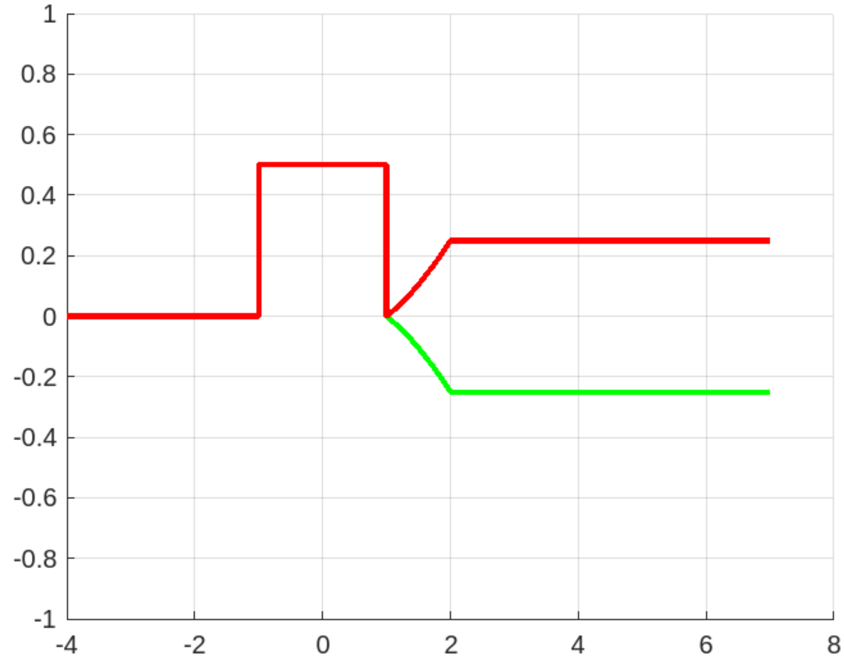
Công thức sóng tiến:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{0}{2} - \frac{1}{6} * 0 = 0,\ x < -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} * 0 = \frac{1}{2},\ -1 \le x \le 1 \\ \frac{0}{2} - \frac{1}{6} * \frac{x^2-1}{2} = -\frac{x^2-1}{12},\ 1 < x < 2 \\ \frac{0}{2} - \frac{1}{6} * \frac{3}{2} = -\frac{1}{4},\ x \ge 2 \end{cases}$$

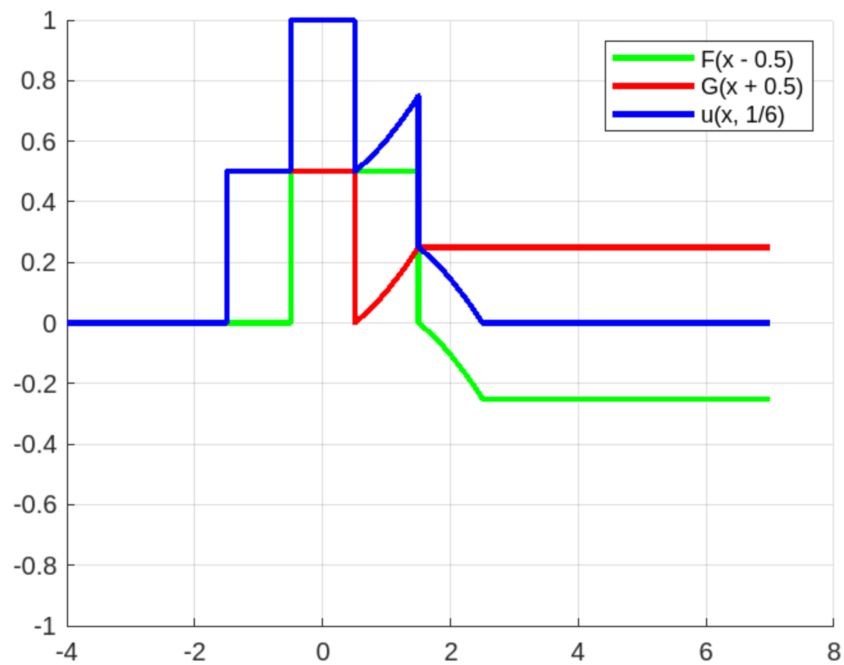
Công thức sóng lùi:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{0}{2} + \frac{1}{6} * 0 = 0,\ x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * 0 = \frac{1}{2},\ -1 \le x \le 1 \\ \frac{0}{2} + \frac{1}{6} * \frac{x^2-1}{2} = \frac{x^2-1}{12},\ 1 < x < 2 \\ \frac{0}{2} + \frac{1}{6} * \frac{3}{2} = \frac{1}{4},\ x \ge 2 \end{cases}$$

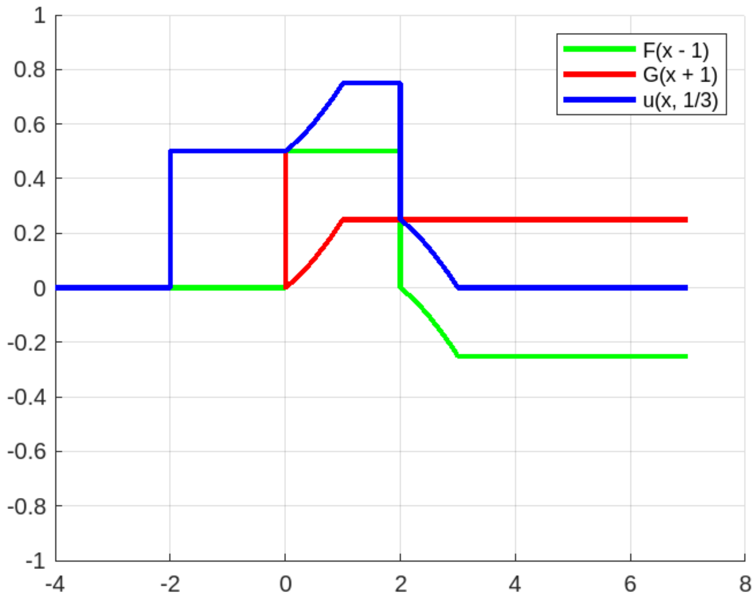
Đồ thị sóng tiến (màu xanh) và sóng lùi (màu đỏ) tại thời điểm $t = 0$:



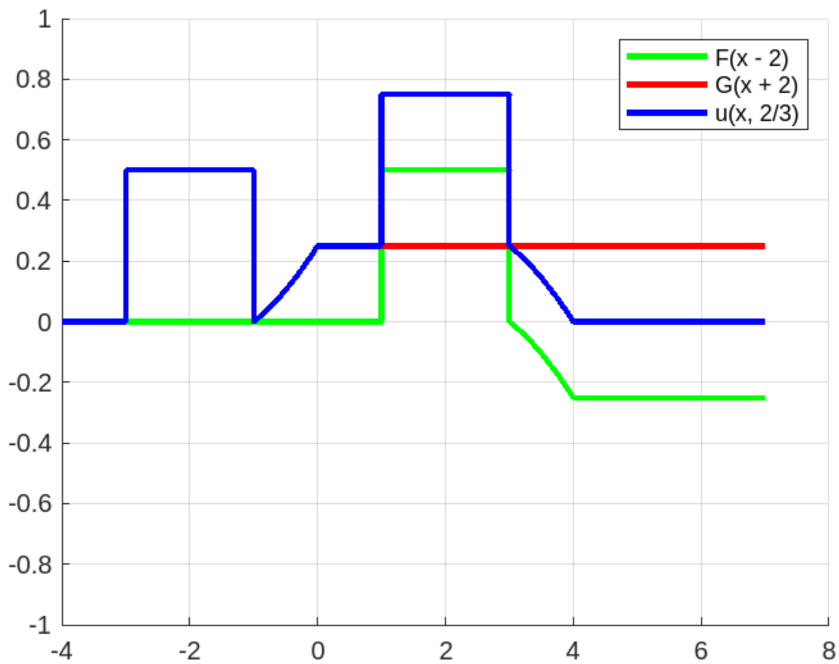
b) Tại thời điểm $t = \dfrac{1}{6}$, $u\left(x, \dfrac{1}{6}\right) = F\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + G\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$:



Tại thời điểm $t = \dfrac{1}{3}$, $u\left(x, \dfrac{1}{3}\right) = F\left(x - 1\right) + G\left(x + 1\right)$:



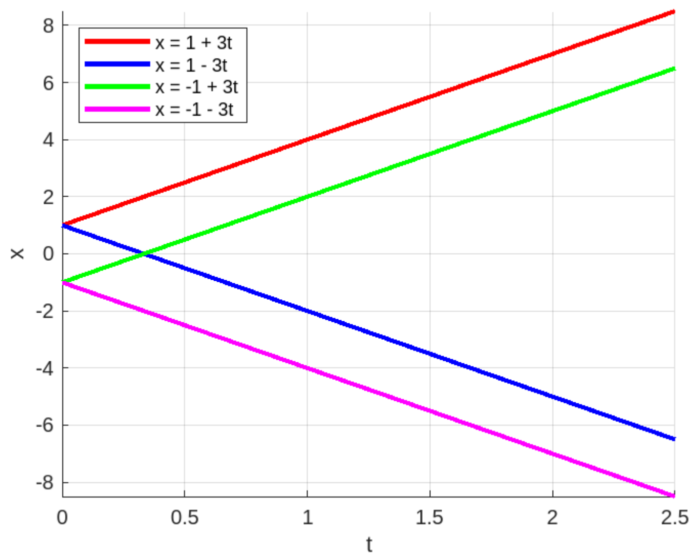
Tại thời điểm $t = \dfrac{2}{3}$, $u\left(x, \dfrac{2}{3}\right) = F\left(x - 2\right) + G\left(x + 2\right)$:



c) Từ đồ thị của sóng tiến và sóng lùi, có thể thấy tại thời điểm $t > 0$ bất kỳ:

- Sóng tiến không liên tục tại các điểm $x = -1 + 3t$, $x = 1 + 3t$.
- Sóng lùi không liên tục tại các điểm $x = -1 - 3t$, $x = 1 - 3t$.

Do đó, nghiệm $u(x, t)$ không liên tục tại 4 tia $x = \pm 1 \pm 3t$, $t > 0$.

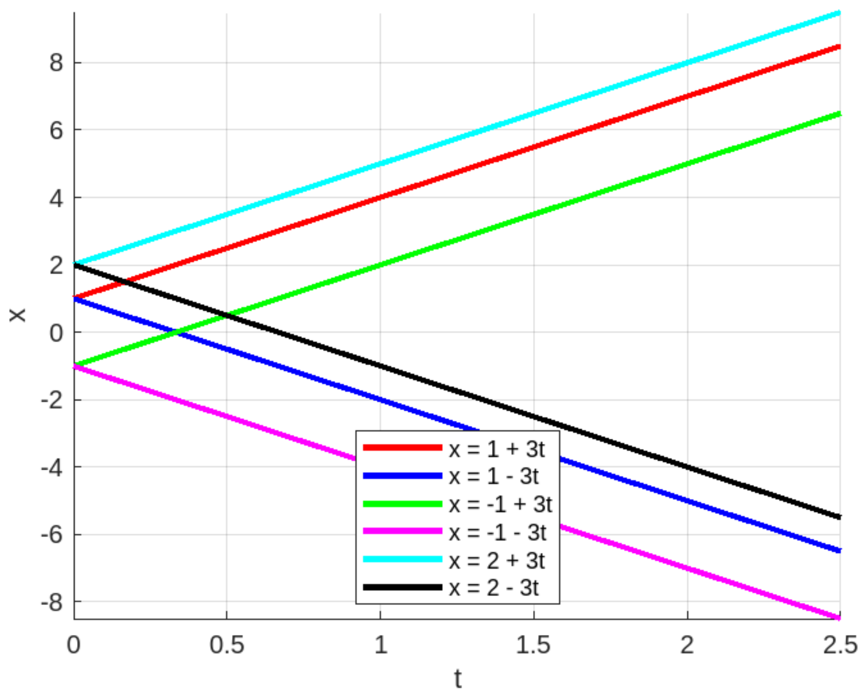


Hình 2: Tập các điểm không liên tục của nghiệm $u(x,t)$

Xét trên các điểm mà sóng tiến/sóng lùi liên tục, ta thấy tại thời điểm $t > 0$ bất kỳ:

- Sóng tiến không khả vi tại $x = 2+3t$ do $F'((2+3t)^-) = -\dfrac{2+3t}{6} < 0$ còn $F'((2+3t)^+) = 0$.
- Sóng lùi không khả vi tại $x = 2-3t$ do $G'((2-3t)^-) = \dfrac{2-3t}{6} < 0$ còn
  $G'((2-3t)^-) = 0$.
- Tại các điểm còn lại, do sóng tiến/sóng lùi đều có dạng hàm đa thức nên sóng tiến/sóng lùi khả vi vô hạn lần.

Do đó, tập điểm kỳ dị của nghiệm $u(x,t)$ ngoài 4 tia $x = \pm 1 \pm 3t$, $t > 0$ còn 2 tia nữa là $x = 2 \pm 3t$, $t > 0$.



Hình 3: Tập các điểm kỳ dị của nghiệm $u(x,t)$

6 Bài 8 trang 21

6.1 Câu a

Tốc độ lan truyền $c = 3$.

Xét hàm mở rộng:

$$\tilde{u}(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } |x| > 2, \\ -x^2 + 2x & \text{Nếu } 0 \leq x \leq 2, \\ -x^2 - 2x & \text{Nếu } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Ta có:

$$\int_0^x u_t(s,0)ds = \int_0^x 6ds = 6x$$

Sóng tiến:

$$F(x) = \frac{\tilde{u}(x,0)}{2} - \frac{1}{6} * 6x = \frac{\tilde{u}(x,0)}{2} - x$$

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{Nếu } |x| > 2, \\ \frac{-1}{2}x^2 & \text{Nếu } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{-1}{2}x^2 - 2x & \text{Nếu } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Sóng lùi:

$$G(x) = \frac{\tilde{u}(x,0)}{2} + \frac{1}{6} * 6x = \frac{\tilde{u}(x,0)}{2} + x$$

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{Nếu } |x| > 2, \\ \frac{-1}{2}x^2 + 2x & \text{Nếu } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{-1}{2}x^2 & \text{Nếu } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Vậy ta có:

$$u(x,t) = F(x-3t) + G(x+3t)$$

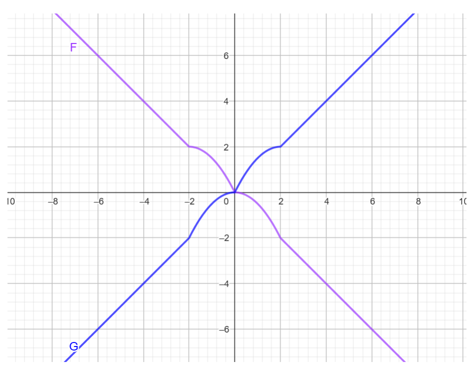
-> Ta có:

$$u(x,\frac{1}{6}) = F(x-\frac{1}{2}) + G(x+\frac{1}{2})$$

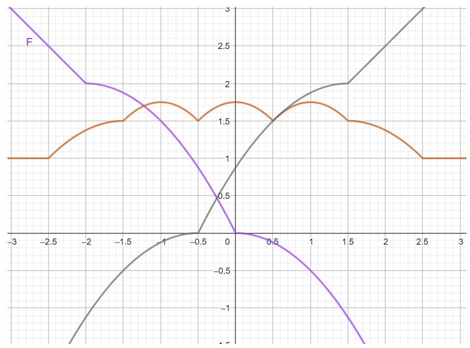
$$u(x,\frac{1}{3}) = F(x-1) + G(x+1)$$

$$u(x,\frac{2}{3}) = F(x-2) + G(x+2)$$

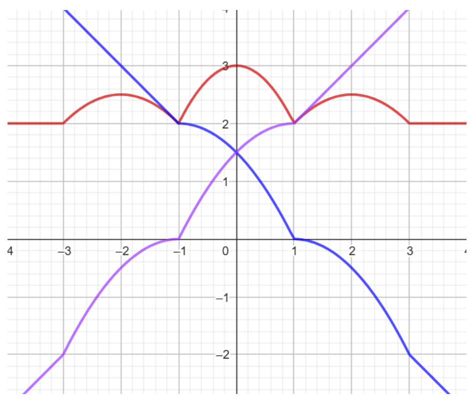
Đồ thị hàm số $F(x)$ và $G(x)$:



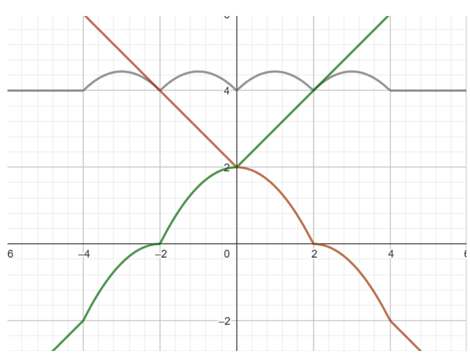
Đồ thị các hàm số $F(x-\frac{1}{2})$, $G(x+\frac{1}{2})$ và $u(x,\frac{1}{6})$:



Đồ thị các hàm số $F(x-1)$, $G(x+1)$ và $u(x, \frac{1}{3})$:



Đồ thị các hàm số $F(x-2)$, $G(x+2)$ và $u(x, \frac{2}{3})$:



6.2 Câu b

Ta có công thức của $u(x, \frac{1}{3}) = F(x-1) + G(x+1)$ Hay:

$$u(x, \frac{1}{3}) = \begin{cases} 2 & \text{Nếu } x < -3, \\ \frac{-1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} & \text{Nếu } -3 \le x \le -1, \\ 3 - x^2 & \text{Nếu } -1 \le x \le 1 \\ \frac{-1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2} & \text{Nếu } 1 \le x \le 3 \\ 2 & \text{Nếu } x > 3 \end{cases}$$

Tại điểm x = -3 ta có:

$\lim_{x \to -3^-} u'(x, \frac{1}{3}) = 0$ và $\lim_{x \to -3^+} u'(x, \frac{1}{3}) = 1$ nên $u(x, \frac{1}{3})$ không khả vi tại x = -3

Tại điểm x = -1 ta có:

$\lim_{x \to -1^-} u'(x, \frac{1}{3}) = -1$ và $\lim_{x \to -1^+} u'(x, \frac{1}{3}) = 2$ nên $u(x, \frac{1}{3})$ không khả vi tại x = -1

Tại điểm x = 1 ta có:

$\lim_{x \to 1^-} u'(x, \frac{1}{3}) = -2$ và $\lim_{x \to 1^+} u'(x, \frac{1}{3}) = 1$ nên $u(x, \frac{1}{3})$ không khả vi tại x = 1

Tại điểm x = 3 ta có:

$\lim_{x \to 3^-} u'(x, \frac{1}{3}) = -1$ và $\lim_{x \to 3^+} u'(x, \frac{1}{3}) = 0$ nên $u(x, \frac{1}{3})$ không khả vi tại x = 3

Trên các khoảng $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ và $(3, +\infty)$, $u(x, \frac{1}{3})$ là hàm khả vi liên tục, do đó tập điểm mà $u(x, \frac{1}{3})$ khả vi là:

$$(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

6.3 Câu c

Có:

$$u(x, t) = F(x - 3t) + G(x + 3t)$$

Nên:

$$u(1, t) = F(1 - 3t) + G(1 + 3t)$$

Khi t tiến về $-\infty$, tồn tại T_1 đủ nhỏ sao cho:

$(1-3t) > 2$ và $(1+3t) < -2$, khi đó $F(1-3t) = 3t-1$ và $G(1+3t) = 3t+1$, suy ra $u(1, t) = 6t$ Suy ra:

$$\lim_{x \to -\infty} u(1, t) = -\infty$$

Khi t tiến về $+\infty$, tồn tại T_2 đủ lớn sao cho:

$(1-3t) < -2$ và $(1+3t) > 2$, khi đó $F(1-3t) = 3t-1$ và $G(1+3t) = 3t+1$, suy ra $u(1, t) = 6t$ Suy ra:

$$\lim_{x \to +\infty} u(1, t) = +\infty$$

7 Bài 12 trang 22

7.1 Câu a

Ta có điều kiện biên: $u_x(0,t) = 0$

Thác triển $u(x,0)$ và $u_t(x,0)$thành hàm chẵn, ta có:

$$u(x,0) = 0 \text{ với mọi x}$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{Nếu } 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{Nếu } -2 \le x \le -1 \\ 0 & \text{Nếu ngược lại} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\int_0^x u_t(s,0)ds = \begin{cases} 1 & \text{Nếu } x > 2 \\ x-1 & \text{Nếu } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{Nếu } -1 \le x \le 1 \\ x+1 & \text{Nếu } -2 \le x \le -1 \\ -1 & \text{Nếu } x < -2 \end{cases}$$

Vậy ta có sóng tiến:

$$F(x) = \frac{-1}{4}\int_0^x u_t(s,0)ds$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{-1}{4} & \text{Nếu } x > 2 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x & \text{Nếu } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{Nếu } -1 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x & \text{Nếu } -2 \le x \le -1 \\ \frac{1}{4} & \text{Nếu } x < -2 \end{cases}$$

Sóng lùi:

$$G(x) = \frac{1}{4}\int_0^x u_t(s,0)ds$$

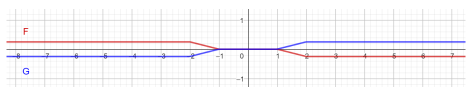
$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{Nếu } x > 2 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & \text{Nếu } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{Nếu } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x & \text{Nếu } -2 \le x \le -1 \\ \frac{-1}{4} & \text{Nếu } x < -2 \end{cases}$$

7.2 Câu b

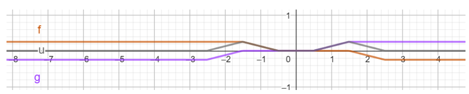
Ta có:

$$u(x, \frac{1}{4}) = F(x - \frac{1}{2}) + G(x + \frac{1}{2})$$
$$u(x, \frac{1}{2}) = F(x - 1) + G(x + 1)$$
$$u(x, 1) = F(x - 2) + G(x + 2)$$

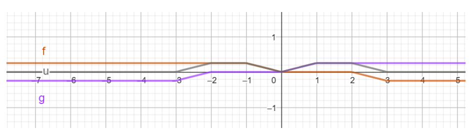
Đồ thị hàm số $F(x)$ và $G(x)$:



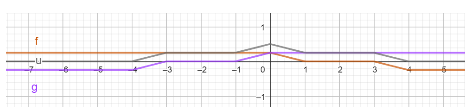
Đồ thị các hàm số $F(x - \frac{1}{2})$, $G(x + \frac{1}{2})$ và $u(x, \frac{1}{4})$:



Đồ thị các hàm số $F(x - 1)$, $G(x + 1)$ và $u(x, \frac{1}{2})$:



Đồ thị các hàm số $F(x - 2)$, $G(x + 2)$ và $u(x, 1)$:



7.3 Câu c

Hàm F liên tục tại mọi nơi nhưng không khả vi tại $x = \pm 1$ và $x = \pm 2$ Suy ra tập điểm kỳ dị của nghiệm gồm các tia:

$$\{(x, t) : x \pm 2t = 1 \text{ hoặc } x \pm 2t = 2, x > 0, t > 0\}$$

Hay:

- Các tia $x - 2t = 1$, $x - 2t = 2$ với t > 0
- Các đoạn $x + 2t = 1$, $x + 2t = 2$, x>0, t>0
- Các tia $x - 2t = -1$, $x - 2t = -2$, x > 0

8 Bài 14 trang 23

8.1 Câu a

Tốc độ lan truyền: c = 3

Nghiệm của bài toán có dạng:

$$u(x,t) = F(x-3t) + G(x+3t)$$

Từ điều kiện biên $u_x(0,t) = 0$, thác triển chẵn hàm $u(x,0)$ và $u_t(x,0)$, ta được:

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } |x| < 2 \text{ hoặc } |x| > 3 \\ x & \text{Nếu } 2 \le x \le 3 \\ -x & \text{Nếu } -3 \le x \le -2 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\int_0^x u_t(s,0)ds = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } |x| < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 & \text{Nếu } 2 \le x \le 3 \\ \frac{5}{2} & \text{Nếu } x > 3 \\ 2 - \frac{1}{2}x^2 & \text{Nếu } -3 \le x \le -2 \\ \frac{-5}{2} & \text{Nếu } x < -3 \end{cases}$$

Vậy ta có sóng tiến:

$$F(x) = -\frac{1}{6}\int_0^x u_t(s,0)ds$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } |x| < 2 \\ \frac{-1}{12}x^2 + \frac{1}{3} & \text{Nếu } 2 \le x \le 3 \\ \frac{-5}{12} & \text{Nếu } x > 3 \\ \frac{-1}{3} + \frac{1}{12}x^2 & \text{Nếu } -3 \le x \le -2 \\ \frac{5}{12} & \text{Nếu } x < -3 \end{cases}$$

Sóng lùi:

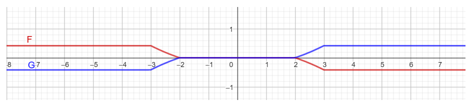
$$G(x) = \frac{1}{6}\int_0^x u_t(s,0)ds$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } |x| < 2 \\ \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3} & \text{Nếu } 2 \le x \le 3 \\ \frac{5}{12} & \text{Nếu } x > 3 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{12}x^2 & \text{Nếu } -3 \le x \le -2 \\ \frac{-5}{12} & \text{Nếu } x < -3 \end{cases}$$

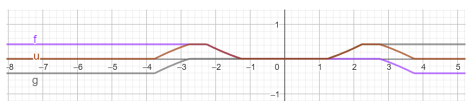
8.2 Câu b

$$u(x, \frac{1}{4}) = F(x - \frac{3}{4}) + G(x + \frac{3}{4})$$
$$u(x, \frac{1}{2}) = F(x - \frac{3}{2}) + G(x + \frac{3}{2})$$
$$u(x, 1) = F(x - 3) + G(x + 3)$$

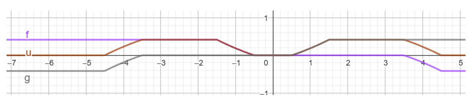
Đồ thị hàm số $F(x)$ và $G(x)$:



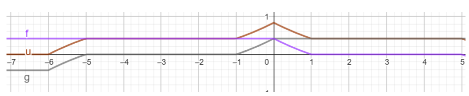
Đồ thị các hàm số $F(x - \frac{3}{4})$, $G(x + \frac{3}{4})$ và $u(x, \frac{1}{4})$:



Đồ thị các hàm số $F(x - \frac{3}{2})$, $G(x + \frac{3}{2})$ và $u(x, \frac{1}{2})$:



Đồ thị các hàm số $F(x - 3)$, $G(x + 3)$ và $u(x, 1)$:



8.3 Câu c

Hàm F liên tục tại mọi nơi nhưng không khả vi tại $x = \pm 2$ và $x = \pm 3$ Suy ra tập điểm kỳ dị của nghiệm gồm các tia:

$$\{(x, t) : x \pm 3t = 2 \text{ hoặc } x \pm 3t = 3, x > 0, t > 0\}$$

Hay:

- Các tia $x - 3t = 2$, $x - 3t = 3$ với t > 0
- Các đoạn $x + 3t = 2$, $x + 3t = 3$, x>0, t>0
- Các tia $x - 3t = -2$, $x - 3t = -3$, x > 0