

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT3365**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **5**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$yu_x(x, y) - 2xu_y(x, y) = x^2yu, x > 0, y > 0.$$

- (a) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho. Vẽ các đường đặc trưng.
- (b) Tìm a, b để phương trình đang xét có nghiệm thỏa mãn $u(x, y) = ae^{x^3/3} + bx$ trên $2x^2 + y^2 = 1$. Khi đó, với mỗi cặp a, b hãy viết ra hai nghiệm và kiểm tra lại chúng.

Câu 2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 9u_{xx}(x, t) & \text{khi } 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(0, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{khi } 0 < x < \infty, \\ u_t(x, 0) = \chi_{[3,4]}(x) & \text{khi } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

trong đó $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$

- (a) Thác triển lễ các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên. Tính $u(9, t), t > 0$.
- (b) Vẽ đồ thị $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 1, 4/3, 2$.

Câu 3. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 4u_{xx}(x, t) - u(x, t) & \text{khi } 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Tìm các số α, β để hàm $v(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x, t)$ thỏa mãn phương trình $v_t(x, t) = 4v_{xx}(x, t)$. Khi đó hàm v thỏa mãn bài toán nào?
- (b) Giải bài toán biên-ban đầu đã cho.