

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **1**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 1**

Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **60 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$4u_{xx}(x, y) + 4u_{xy}(x, y) + u_{yy}(x, y) + u(x, y) = x, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho.
- (b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- (c) Xác định a, b để phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn $u(2y, y) = ay + b + \cos^2(y/2)$. Khi đó hãy viết ra hai nghiệm và kiểm tra lại chúng.

Câu 2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng:

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện ban đầu $u(x, 0) = \chi_{[-2, -1]}(x), u_t(x, 0) = x\chi_{[0, 1]}(x), -\infty < x < \infty$.

- (a) Xác định sóng tiến - sóng lùi.
- (b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.
- (c) Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm.

Câu 3. Xét bài toán biên cho phương trình Laplace trong quạt:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1.$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u(x, 0) = 0 \text{ khi } -1 \leq x \leq 1, \text{ và } u(x, y) = xy^2 \text{ khi } x^2 + y^2 = 1, y \geq 0.$$

- (a) Giả sử $v(x, y)$ là hàm điều hòa trong hình tròn đơn vị $\{x^2 + y^2 < 1\}$ liên tục đến tận biên và trên biên

$$v(x, y) = \begin{cases} xy^2 & \text{khi } x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, \\ -xy^2 & \text{khi } x^2 + y^2 = 1, y \leq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $v(x, y)$ lẻ theo biến y , nghĩa là $v(x, -y) = -v(x, y)$. Từ đó hãy chứng minh $v(x, y) = u(x, y)$ khi $x^2 + y^2 < 1, y > 0$. Tính $u(0, y), y > 0$.

- (b) Dùng phương pháp tách biến hãy giải $u(x, y)$.