Bài tập lần 3.

Tài liệu Sivaji : Bài 2.2 (Trang 36) ý (v)

$xu_x + (x+y)u_y = u+1, \quad u(x,0) = x^2$

(1) Kiểm tra điều kiện hoành.

Điều kiện Cauchy : $u(x,0) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = 0 \\ u_0(s) = s^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) = s \\ b(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) + y_0(s) = s + 0 = s \end{cases}$

$\Rightarrow y'_0(s)\, a(x_0(s), y_0(s)) - x'_0(s)\, b(x_0(s), y_0(s))$

$= 0'.s - s's = -s \neq 0 \Leftrightarrow s \neq 0$

(2) Tìm nghiệm và đưa ra miền xác định

Hệ phương trình đặc trưng.

$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \\ u'(t) = u(t) + 1 \end{cases}$

Điều kiện Cauchy. $\begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = 0 \\ u_0(s) = s^2 \end{cases}$

+) $x'(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = c_1 e^t$

+) $y'(t) = x(t) + y(t) \Rightarrow y'(t) = c_1 e^t + y(t)$

$\Leftrightarrow y'(t) - y(t) = c_1 e^t$

$\Leftrightarrow e^{-t}(y'(t) - y(t)) = c_1$

$\Leftrightarrow e^{-t} y(t) = c_1 t + c_2$

$\Leftrightarrow y(t) = c_1 e^t t + c_2 e^t$

+) $u'(t) = u(t) + 1 \Rightarrow e^{-t}(u'(t) - u(t)) = e^{-t}$

$\Leftrightarrow e^{-t}u(t) = -e^{-t} + C_3$

$\Leftrightarrow u(t) = C_3 e^{t} - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} \\ y(t) = C_1 t e^{t} + C_2 e^{t} \\ u(t) = C_3 e^{t} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t,s) = s e^{t} \\ y(t,s) = s t e^{t} + C_2 e^{t} = s t e^{t} \\ u(t,s) = (s^2+1) e^{t} - 1 \end{cases}$$

+) $x(t,s) = s e^{t} \Rightarrow s = e^{-t} x$

+) $y(t,s) = s t e^{t} = t x \Rightarrow t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow s = x e^{-\frac{y}{x}} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

+) $u = (s^2+1)e^{t} - 1$
$= \left(x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1\right) e^{\frac{y}{x}} - 1$

Thử lại:

$u_x = -\dfrac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}\left(x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1\right) + 2x\left(e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x} e^{-\frac{y}{x}}\right)$

$\Rightarrow x u_x = -\dfrac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}\left(x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1\right) + 2x^2\left(e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x} e^{-\frac{y}{x}}\right)$

$u_y = \dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x}\left(x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1\right) - 2x e^{-\frac{y}{x}}$

$\Rightarrow (x+y) u_y = e^{\frac{y}{x}}\left(x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1\right) - 2x^2 e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}\left(x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1\right) - 2xy e^{-\frac{y}{x}}$

$\Rightarrow x u_x + (x+y) u_y = e^{\frac{y}{x}}\left(x^2 e^{-\frac{2y}{x}} + 1\right) = u + 1$ (TM)

$u(x,0) = x^2 + 1 - 1 = x^2$ (TM ĐK (Cauchy))

Miền xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

Tài liệu Sivaji - Bài 213 - Trang 38

$$\begin{cases} uu_t + u_x = 0 \\ u(x,1) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \geq 1 \end{cases}$$

Hệ PTĐT

$$\begin{cases} t'(z) = u(z) \\ x'(z) = 1 \\ u'(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(z) = C_2 z + C_3 \\ x(z) = z + C_1 \\ u(z) = C_2 \end{cases}$$

Điều kiện Cauchy

$$u(x,1) = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x_0(s) = s \\ t_0(s) = 1 \\ u_0(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

+) $\left.\begin{array}{l} x(z) = z + C_1 \\ t_0(s) = x_0(s) = s \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = s \Rightarrow x(z,s) = z + s$

+) $\left.\begin{array}{l} u(z) = C_2 \\ u_0(s) = \dfrac{1}{s} \end{array}\right\} \Rightarrow u(z,s) = C_2 = \dfrac{1}{s}$

+) $\begin{cases} t(z) = C_2 z + C_3 = \dfrac{z}{s} + C_3 \\ t_0(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow C_3 = 1 \Rightarrow t(z,s) = \dfrac{z}{s} + 1$

→ Nghiệm tham số $\begin{cases} x(z,s) = z + s \\ t(z,s) = \dfrac{z}{s} + 1 \\ u(z,s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$

+) $x = z + s \Rightarrow s = x - z$

+) $t = \dfrac{z}{s} + 1 = \dfrac{z}{x-z} + 1 = \dfrac{x}{x-z} \Rightarrow z = x - \dfrac{x}{t}$

$\Rightarrow s = x - z = x - x + \frac{x}{t} = \frac{x}{t}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{s} = \frac{t}{x}$

Thử lại

$$\left.\begin{array}{l} u_t = \frac{1}{x} \\ u_x = \frac{-t}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow u u_t + u_x = \frac{t}{x^2} - \frac{t}{x^2} = 0 \text{ (T/M)}$$

ĐK Cauchy $u(x, 1) = \frac{1}{x}$ (T/m)

Sách của Mohamad Nikrsrat.

- Problem 2,8 (Trang 44) ý (b)

$$\begin{cases} x u_x + x u u_y = 1 & (*) \\ u|_{\{y - x = 0\}} = 1 \Leftrightarrow u(x, x) = 1 \end{cases}$$

ĐK Cauchy $u(x, x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0(s) = s \\ y_0(s) = s \\ u_0(s) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) = s \\ b(x_0(s), y_0(s)) = x_0(s) u_0(s) = s \end{cases}$$

$\Rightarrow y_0'(s)\, a(x_0(s), y_0(s)) - x_0'(s)\, b(x_0(s), y_0(s)) = s's - s's = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) không T/m đk Cauchy.

- Problem 2,28 (Trang 54)

$$\begin{cases} u_t + (1 + x^2) u_x = t \\ u(0, x) = x \end{cases}$$

Hệ PTĐT $\begin{cases} t'(z) = 1 & \Rightarrow t(z) = z + C_1 \\ x'(z) = 1 + x^2(z) & \Rightarrow x(z) = \tan(z + C_2) \\ u'(z) = t(z) \end{cases}$

$u'(z) = t(z) = z + C_1 \Rightarrow u(z) = \dfrac{z^2}{2} + C_1 z + C_3$

$\Rightarrow \begin{cases} t(z) = z + C_1 \\ x(z) = \tan(z + C_2) \\ u(z) = \dfrac{z^2}{2} + C_1 z + C_3 \end{cases}$

ĐK Cauchy $\begin{cases} t_0(s) = 0 & \Rightarrow t(z, s) = z \\ x_0(s) = s \\ u_0(s) = s \end{cases}$

+) $x_0(s) = s \Rightarrow \tan C_2 = s \Rightarrow C_2 = \arctan s$

$\Rightarrow x(z, s) = \tan(z + \arctan s)$

+) $u(z) = \dfrac{z^2}{2} + C_1 z + C_3 = \dfrac{z^2}{2} + C_3$

$u_0(s) = s \Rightarrow C_3 = s$

$\Rightarrow u_0(z, s) = \dfrac{z^2}{2} + s$

$\Rightarrow$ Nghiệm tham số $\begin{cases} x(z, s) = \tan(z + \arctan s) \\ t(z, s) = z \\ u(z, s) = \dfrac{z^2}{2} + s \end{cases}$

+) $x = \tan(z + \arctan s) \Rightarrow z + \arctan s = \arctan x$

$\Rightarrow \arctan s = \arctan x - z = \arctan x - t$

$\Rightarrow s = \tan(\arctan x - t)$

$\Rightarrow u(z, s) = \dfrac{z^2}{2} + s = \dfrac{t^2}{2} + \tan(\arctan x - t) = u(t, x)$

Thứ
Ngày . . No.

+) Thử lại

$u_t = t - [\tan^2(\arctan x - t) + 1]$

$$u_x = \frac{1 + \tan^2(\arctan x - t)}{1 + x^2}$$

$\Rightarrow u_t + (1+x^2)u_x = t$ (T/m)

ĐK Cauchy $u(0,x) = \tan(\arctan x) = x$ (T/m)

Tài liệu BT-PDE doc pdf, Trang 43-44 Bài 1. ý (a)

$u_t + uu_x = 0$ khi $x \in \mathbb{R}, t > 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Hệ pth đặc trưng

$$\begin{cases} t'(\tau) = 1 \\ x'(\tau) = u(\tau) \\ u'(\tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(\tau) = \tau + C_1 \\ u(\tau) = C_2 \\ x(\tau) = C_2\tau + C_3 \end{cases}$$

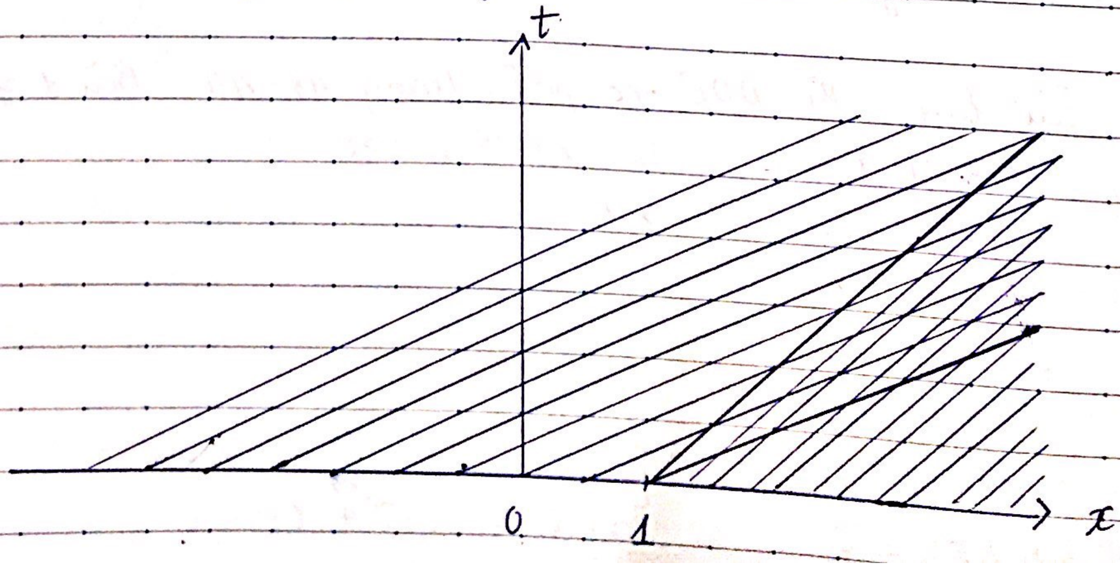
ĐK Cauchy $\begin{cases} t_0(s) = 0 \\ x_0(s) = s \\ u_0(s) = \rho_0(s) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t(\tau, s) = \tau \\ x(\tau, s) = \tau \rho_0(s) + s \\ u(\tau, s) = \rho_0(s) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x(t) = t\rho_0(s) + s$

Với $\rho_0(s) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Vẽ các đường đặc trưng



Thứ
Ngày . . No.

+). Các vùng chỉ có 1 đường đặc trưng đi qua.
Vùng 1: $\{(x,t), t>0, x > 2t+1\}$
Vùng 2: $\{(x,t), t>0, x < t+1\}$
+). Vùng sốc: $\{(x,t), t>0, t+1 < x < 2t+1\}$
Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có 1 đg đặc trưng đi qua.
Vùng 1: $\begin{cases} t>0 \\ x>2t+1 \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = 1$
Vùng 2: $\begin{cases} t>0 \\ x<t+1 \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = 2$.