

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **3**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 3**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x, t) + (1 - 2u(x, t))u_x(x, t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < 0, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = 2, x < 0$, và $u(0, t) = 1, t > 0$.

- (a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng chân không. Giải nghiệm $u(x, t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.
- (b) Vẽ thêm các đường đặc trưng ở vùng chân không, từ đó xác định nghiệm $u(x, t)$ ở vùng chân không. Vẽ đồ thị của $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

Câu 2. Xét phương trình cấp 2 sau:

$$xu_{xx}(x, y) + (y - 2x^2/y)u_{xy}(x, y) - 2xu_{yy}(x, y) = 0, x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

- (a) Xác định loại và chuyển phương trình đã cho về dạng chính tắc.
- (b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- (c) Tìm nghiệm $u(x, y)$ của phương trình đã cho thỏa mãn

$$u(x, 0) = x, \text{ khi } 1 \leq x \leq 2, u(x, y) = x^2 \text{ khi } x^2 + y^2/2 = 1, y > 0.$$

Câu 3. Giải bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 2u_{xx}(x, t) + e^{-t} \cos(\pi x) & \text{khi } 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = \cos^2(\pi x) & \text{khi } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Thang điểm. Câu 1: 2.5đ+1.5đ. Câu 2: 3đ+1.5đ+1.5đ. Câu 3: 4đ.