ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI	ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ II
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN	NĂM HỌC 2020-2021
———-	——oOo——-

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306** Số tín chỉ: **3** Đề số: **4**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 1** Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **60 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$(x^2-1)u_{xx}(x,y) - 2xu_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + 2xu_x(x,y) - u_y(x,y) = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

(c) Tìm nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn các điều kiện

$$u(x,0) = u_y(x,0) = 2x.$$

Kiểm tra lại nghiệm vừa tìm được.

Câu 2. Xét bài toán biên cho phương trình Poisson:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = xy, -1 < x,y < 1,$$

với điều kiện biên Neumann

$$\begin{cases} u_x(-1,y) = u_x(1,y) = 0 & \text{khi } -1 \le y \le 1, \\ u_y(x,-1) = x + a, u_y(x,1) = 1 & \text{khi } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

(a) Chứng minh nếu $u(x,y)$ là nghiệm của bài toán trên ta có đẳng thức sau:

$$\iint_{[-1,1]^2} \Delta u(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} (u_y(x,1) - u_y(x,-1))dx.$$

Từ đó tìm a để bài toán đang xét vô nghiệm.

(b) Với a để bài toán đang xét có nghiệm, hãy giải bài toán đã cho.

Câu 3. Cho u là hàm điều hòa trong toàn mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để có hằng số $C > 0$ sao cho

$$|u(x,y)| \le C(1 + |x| + |y|), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

là tồn tại các hằng số p, q, r sao cho

$$u(x,y) = r + px + qy, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Thang điểm. Câu 1: 3đ+1đ+2đ. Câu 2: 2đ+4.5đ. Câu 3: 1đ+1.5đ.