

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT3365**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **6**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x, t) + (3 - u^2(x, t))u_x(x, t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < 0, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = 2$ khi $x < 0$, và $u(0, t) = 3$ khi $t > 0$.

- (a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x, t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.
- (b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x, t)$. Vẽ đồ thị của $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

Câu 2. Xét phương trình cấp 2 sau:

$$\tan^2 x u_{xx}(x, y) + 2y \tan x u_{xy}(x, y) + y^2 u_{yy}(x, y) + \tan^3 x u_x(x, y) = \tan^3 x,$$

với $0 < x < \pi/2, y > 0$.

- (a) Xác định loại và chuyển phương trình đã cho về dạng chính tắc.
- (b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- (c) Tìm a, b để phương trình đã cho có nghiệm $u(x, y)$ thỏa mãn $u(x, 0) = ax + b \sin x$. Khi đó hãy viết ra hai nghiệm và kiểm tra lại chúng.

Câu 3. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + \sin(x) & \text{khi } 0 < x < 2\pi, t > 0, \\ u_x(0, t) = 1, u(2\pi, t) = 1 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin(x) - x, u_t(x, 0) = \cos^3(x/4) & \text{khi } 0 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng bài toán trên có tối đa một nghiệm.
- (b) Tìm $v(x)$ thỏa mãn $v''(x) + \sin(x) = 0$ và $v'(0) = 1, v(2\pi) = 1$. Khi đó $w = u - v$ thỏa mãn bài toán nào. Xác định miền phụ thuộc của điểm $(\pi/2, \pi/2)$. Từ đó tính $u(\pi/2, \pi/2)$.
- (c) Giải bài toán biên-ban đầu đã cho.