

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT3365**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **2**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x, t) + (2 - 3u(x, t))u_x(x, t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$\text{với điều kiện Cauchy } u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < -1, \\ 1/2 & \text{khi } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x, t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.
- (b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x, t)$. Vẽ đồ thị của $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 4/3, 2$.

Câu 2. Xác định loại và chuyển về dạng chính tắc phương trình sau

$$u_{xx}(x, y) + 4 \cos x u_{xy}(x, y) + 4u_{yy}(x, y) - 2 \sin x u_y(x, y) = 0, 0 < x < \pi, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \cos(x) & \text{khi } 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0, t) = 1, u(\pi, t) = \pi & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 1 + x, u_t(x, 0) = \cos(x/2) & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng bài toán đang xét có tối đa một nghiệm.
- (b) Tìm $v(x)$ thỏa mãn $v''(x) + \cos(x) = 0$ và $v'(0) = 1, v(\pi) = \pi$. Khi đó $w = u - v$ thỏa mãn bài toán nào.
- (c) Giải bài toán biên-ban đầu đã cho.