

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **3**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 2**

Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$\cos^4(x)u_{xx}(x, y) - 2\cos^2(x)u_{xy}(x, y) + u_{yy}(x, y) - \cos^2(x)\sin(2x)u_x(x, y) = y$$

trong dải $-\pi/2 < x < \pi/2$.

- (a) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho. Vẽ các đường đặc trưng.
- (b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- (c) Xác định các hằng số a, b, c để phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn điều kiện $u(x, y) = ay^3 + by + c$ khi $y + \tan(x) = 0$. Với mỗi bộ a, b, c tìm được, hãy đưa ra hai nghiệm và kiểm tra chúng.

Câu 2. Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền sóng:

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), x > 0, t > 0,$$

với điều kiện biên Neumann $u_x(0, t) = 0$ và điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x\chi_{[2,3]}(x), x \geq 0.$$

- (a) Xác định sóng tiến - sóng lùi.
- (b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.
- (c) Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm.

Câu 3. Xét bài toán biên cho phương trình Laplace trong hình tròn:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, B = \{x^2 + y^2 < 4\}.$$

với điều kiện biên Dirichlet

$$u(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{khi } x^2 + y^2 = 4, y > 0, \\ 0 & \text{khi } x^2 + y^2 = 4, y \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Dùng công thức Poisson tính $u(x, 0)$.
- (b) Dùng phương pháp tách biến giải bài toán đang xét.