

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT3365**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **1**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$(1 + y^2)u_x(x, y) + u_y(x, y) + yu = y, x > 0, y > 0.$$

- (a) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho. Vẽ các đường đặc trưng.
- (b) Tìm nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(x, 0) = 1, x > 0$. Xác định miền nghiệm xác định duy nhất.
- (c) Xác định hàm $h(y), y \in [0, 3]$, để nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn

$$u(0, y) = h(y) \text{ khi } 0 \leq y \leq 3, \text{ và } u(x, 3) = 0 \text{ khi } 0 \leq x \leq 12.$$

Câu 2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t) & \text{khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \chi_{[-1, 1]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) = \chi_{[4, 5]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

trong đó $\chi_{[a, b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$

- (a) Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.
- (b) Vẽ đồ thị $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 3/4, 1, 3/2$.

Câu 3. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + x + e^{-t} \cos(\pi x/2) & \text{khi } 0 < x < 1, t > 0, \\ u_x(0, t) = 1, u(1, t) = 1/3 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = -x^3/6 + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng bài toán đang xét có tối đa một nghiệm.
- (b) Tìm hàm $v(x)$ thỏa mãn $v''(x) + x = 0$ và $v'(0) = 1, v(1) = 1/3$. Khi đó hàm $w = u - v$ thỏa mãn bài toán nào?
- (c) Giải bài toán biên-ban đầu đã cho.