

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **5**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 3**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$yu_x(x, y) - xu_y(x, y) = xyu, x > 0, y > 0.$$

- (a) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- (b) Tìm a, b để phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn $u(x, y) = ae^{x^2/2} + b$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Khi đó hãy viết ra hai nghiệm và kiểm tra lại chúng.

Câu 2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t) & \text{khi } 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(0, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{khi } 0 < x < \infty, \\ u_t(x, 0) = x\chi_{[1,2]}(x) & \text{khi } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

trong đó $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$

- (a) Thác triển lẻ các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.
- (b) Vẽ đồ thị $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 1/8, 1/4, 1/2$.

Câu 3. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 2u_{xx}(x, t) - 4u_x(x, t) & \text{khi } 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Tìm các số α, β để hàm $v(x, t) = e^{\alpha x + \beta t}u(x, t)$ thỏa mãn phương trình $v_t(x, t) = 2v_{xx}(x, t)$. Khi đó hàm v thỏa mãn bài toán nào?
- (b) Giải bài toán biên-ban đầu đã cho.