

Bài tập lần 1

Tài liệu của Sivaji y' 2.2

$$(iii) \begin{cases} x u_x + u_y = 1 \\ u(0, y) = e^y \end{cases}$$

$$a(x, y) = x, b = 1, c = 1$$

- Phương trình đặc trưng $\frac{dx}{x} = dy = du$

$$\rightarrow \ln|x| = y + C \rightarrow \ln|x| - y = C$$

Đặt $\begin{cases} s = \ln|x| - y \\ t = x \end{cases} \quad (x \neq 0)$

$$\rightarrow \begin{cases} u_x = v_s s_x + v_t t_x = \frac{v_s}{x} + v_t \\ u_y = v_s s_y + v_t t_y = -v_s \end{cases}$$

$$\rightarrow x u_x + u_y = v_s + x v_t - v_s = x v_t = 1$$

$$\rightarrow v_t = \frac{1}{x} = \frac{1}{t}$$

$$\rightarrow v(t, s) = \ln|t| + f(s) \Rightarrow \ln|x| + f(\ln|x| - y)$$

$$\rightarrow u(x, y) = \ln|x| + f(\ln|x| - y)$$

Thử lại $u_x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} f', u_y = -f'$

$$\rightarrow x u_x + u_y = 1$$

Và điều kiện Cauchy $u(0, y) = e^y \Rightarrow x = C$ (không tìm được)

\rightarrow Vô nghiệm

Sách của Muhammad Naksirat P37 Problem 21 (b)

(b) $y u_x - x u_y = 0$

$a(x, y) = y, b(x, y) = -x, c = 0$

Phương trình đặc trưng $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$

$\Rightarrow x dx = -y dy$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$

$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} = C$

Đặt $\begin{cases} s = x^2 + y^2 / 2 \\ t = x \end{cases}$

$\Rightarrow u(x, y) = v(t, s)$

$u_x = v_t t_x + v_s s_x = v_t + x v_s$

$u_y = v_t t_y + v_s s_y = y v_s$

$\Rightarrow y u_x - x u_y = y v_t + x y v_s - x y v_s = y v_t = 0$

Khi với $y \neq 0 \Rightarrow v_t = 0$

$\Rightarrow v = g(s) = g\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$

\Rightarrow Nghiệm tổng quát

$u(x, y) = g\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$

Thử lại $u_x = x g', u_y = y g'$

$\Rightarrow y u_x - x u_y = 0$