

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: **MAT2306**

Số tín chỉ: **3**

Đề số: **3**

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT2306 2**

Ngành học: **Toán học**

Thời gian làm bài **50 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$u_{xx}(x, y) + 5u_{xy}(x, y) + 4u_{yy}(x, y) = f(x, y) \text{ trong } y > 0.$$

(a) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho.

(b) Chứng minh rằng

$$w(x, y) = \frac{1}{3} \int_0^y F(x, y, s) ds, \text{ với } F(x, y, s) = \int_{x-(y-s)}^{x-(y-s)/4} f(t, s) dt,$$

là một nghiệm riêng của phương trình đã cho. Từ đó tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

(c) Tìm nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn các điều kiện

$$u(x, 0) = u_0(x), u_y(x, 0) = u_1(x).$$

Hãy giải tường minh bài toán với $f(x, y) = y \sin(x), u_0(x) = 0, u_1(x) = 0$.

Câu 2. Xét bài toán biên cho phương trình Laplace:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1.$$

với điều kiện biên Neumann

$$\begin{cases} u_x(0, y) = u_y(x, 0) = 0 & \text{khi } 0 \leq x, y \leq 1, \\ \partial_\nu u(x, y) = x^2 + a & \text{khi } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

trong đó ν là pháp tuyến ngoài đơn vị trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Tìm a để bài toán đang xét vô nghiệm.

(b) Với a để bài toán đang xét có nghiệm, hãy giải bài toán.

Câu 3. Giải bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền nhiệt:

$$u_t = 2u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x, 0) = \cos^3(x).$$