

CHƯƠNG 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ BIỂU DIỄN

1.1 Định nghĩa đồ thị

Khái niệm đồ thị

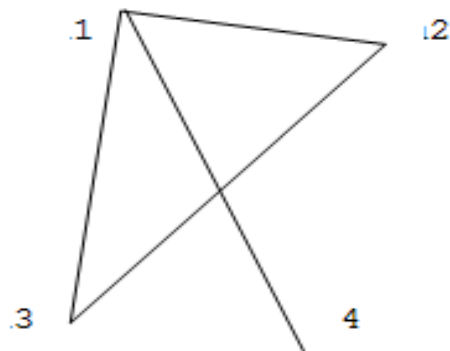
- Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó, ký hiệu $G = (V, E)$, trong đó V là tập hợp các đỉnh (Vertex), E là tập hợp các cạnh (Edge).
- Các đỉnh được biểu diễn bởi các điểm và đánh số từ 1 đến n .
- Các cạnh được biểu diễn bởi các đoạn thẳng hoặc cung nối các đỉnh và đánh số từ 1 đến m .
- Nếu các cạnh không kể hướng \Rightarrow đồ thị vô hướng.
- Nếu các cạnh có hướng \Rightarrow đồ thị có hướng.

Mô hình đồ thị trong thực tế

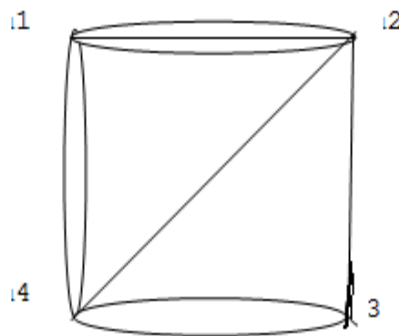
- Mạng lưới giao thông đường bộ, mạng thông tin,
- Sơ đồ tổ chức của cơ quan,

1) Đồ thị vô hướng

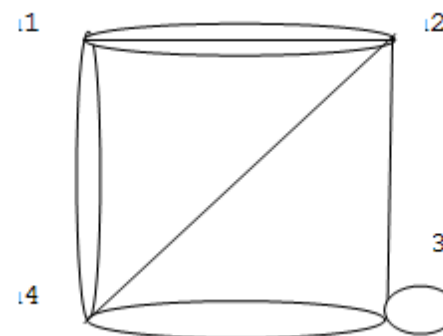
- Đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gồm $V \neq \emptyset$ các đỉnh và một tập E các cạnh là những cặp không thứ tự của các đỉnh phân biệt.
- Đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gồm tập đỉnh $V \neq \emptyset$, tập cạnh E và hàm f từ E tới tập $\{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Hai cạnh e_1 và e_2 gọi là song song hay cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.
- Giả đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gồm tập đỉnh $V \neq \emptyset$, tập cạnh E và hàm f từ E tới tập $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$. Một cạnh gọi là một khuyên nếu $f(e) = (u, u)$.



Hình 1. Đơn đồ thị vô hướng



Hình 2. Đa đồ thị vô hướng



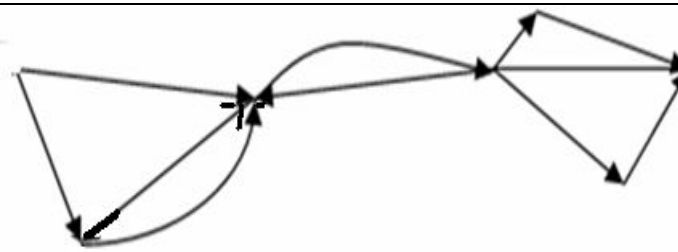
Hình 3. Giả đồ thị vô hướng

2) Đồ thị có hướng

- Đơn đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm $V \neq \emptyset$ các đỉnh và một tập E các cung (cạnh) là các cặp có thứ tự của các đỉnh phân biệt.
- Đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm tập đỉnh $V \neq \emptyset$, tập cung (cạnh) E và hàm f từ E tới $\{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$. e_1 và e_2 gọi là song song hay cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.



Hình 4. Đơn đồ thị có hướng

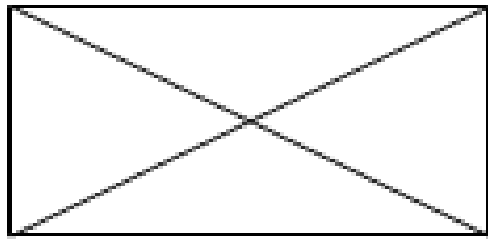


Hình 5. Đa đồ thị có hướng

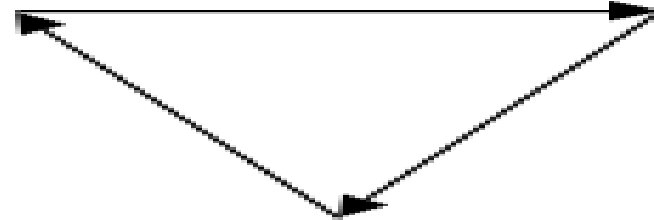
1.2 Những thuật ngữ cơ bản

- Hai đỉnh u và $v \in$ đồ thị vô hướng G gọi là *liền kề* (láng giềng) nếu (u, v) là một cạnh của G . Nếu $e = (u, v) \Rightarrow e$ gọi là *cạnh liên thuộc* với u và v ; hay *cạnh nối* u và v . Các đỉnh u và v gọi là các *điểm đầu mút* của cạnh (u, v) .
- *Bậc* của $v \in$ đồ thị G vô hướng là $\deg(v) =$ số các cạnh liên thuộc với v , riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần:
 - Nếu G có m cạnh $\Rightarrow 2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$. Trong G số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.
 - *Đỉnh cô lập* là đỉnh không nối với bất kỳ đỉnh nào.
 - *Đỉnh treo* là đỉnh có bậc bằng 1.

- G là đồ thị có hướng, (u,v) là cạnh $\in G \Rightarrow u$ gọi là nối tới v , v gọi là được nối từ u . Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối của cạnh (u,v) . Đỉnh đầu và cuối của khuyên là trùng nhau.
- Bậc- vào của $v \in G$ có hướng là $\deg^-(v)$ = số cạnh có đỉnh cuối là v . Bậc- ra là $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v :
 - $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng m cạnh $\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = m$.
- G là đồ thị có hướng. Nếu bỏ qua hướng \Rightarrow nhận được đồ thị vô hướng nền. Đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng nền của nó có cùng số cạnh.
- Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là *đồ thị đầy đủ*, nếu mỗi cặp đỉnh đều có cạnh nối giữa chúng.
- Đồ thị *có hướng* $G = (V, E)$ gọi là *đồ thị đầy đủ*, nếu mỗi cặp đỉnh đều có cung nối giữa chúng (chiều của cung có thể tùy ý).



Hình 6. Đồ thị vô hướng đầy đủ



Hình 7. Đồ thị có hướng đầy đủ

- Đồ thị G là đồ thị có trọng số \Leftrightarrow mỗi cạnh được gán một con số (nguyên hoặc thực) gọi là trọng số ứng với cạnh đó.
- G là đồ thị phân đôi (hai phía) \Leftrightarrow tập các đỉnh V là hợp hai tập con \neq rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh $\in V_1$ với một đỉnh $\in V_2$.
- $K_{m,n}$ gọi là đồ thị *phân đôi đầy đủ* \Leftrightarrow tập đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 có m đỉnh và V_2 có n đỉnh sao cho có một cạnh giữa 2 đỉnh nếu và chỉ nếu một đỉnh thuộc V_1 và đỉnh thứ hai thuộc V_2 .
- Đường đi độ dài n từ u tới $v \in G$ là dãy các đỉnh x_0, x_1, \dots, x_n , $x_0 = u$, $x_n = v$ và $(x_{i-1}, x_i) \in E$
- Đường đi gọi là chu trình nếu bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, tức là $u = v$.
- Đường đi hoặc chu trình gọi là đơn nếu không chứa một cạnh quá một lần.
- Đường đi gọi là đường đi sơ cấp nếu đi qua các đỉnh không quá một lần, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối.
- Đường đi sơ cấp có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau được gọi là chu trình *sơ cấp*.

1.3 Phân loại đồ thị

1) Đồ thị chu trình (vòng):

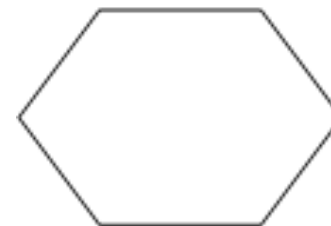
- Các mạng LAN hay viễn thông có cấu trúc vòng Ring (tròn)



C_3



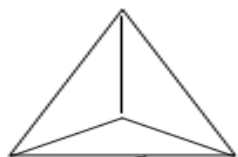
C_4



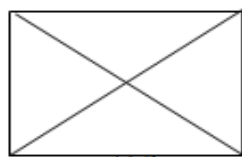
C_5

2) Đồ thị hình bánh xe:

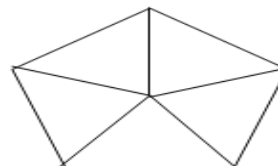
- Mạng LAN có dạng hình bánh xe



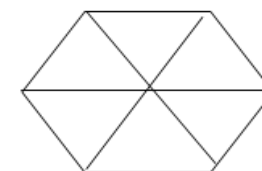
W_3



W_4



W_5



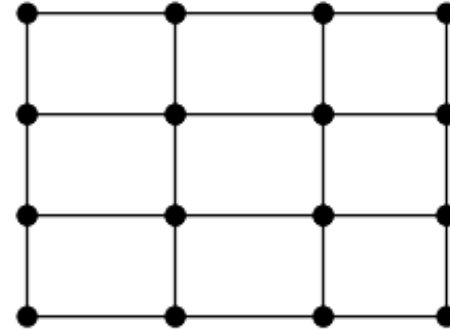
W_6

3) Đồ thị khối n chiều:

- Đồ thị khối 1 chiều, 2 chiều kết nối các bộ vi xử lý



Mạng kiểu đường thẳng



Mạng kiểu lưới

4) Đồ thị con

- Đồ thị $H = (W, F)$ gọi là đồ thị con của đồ thị $G = (V, E) \Leftrightarrow W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.
- Nếu bỏ bớt một số cạnh hoặc một số đỉnh và các cạnh liên thuộc với chúng nhận được đồ thị con H của G .
- Hợp của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị đơn có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$. Ký hiệu hợp của các đồ thị là $G_1 \cup G_2$.

5) Đồ thị đầy đủ

$G = (V, E)$ đầy đủ \Leftrightarrow Hai đỉnh bất kỳ của G đều có cạnh nối.

6) Đồ thị hai phía

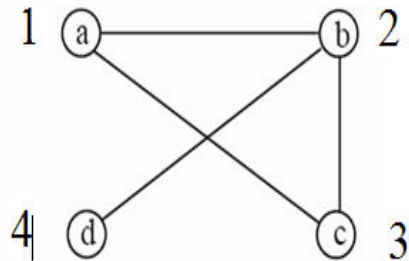
$G = (V, E)$ là đồ thị hai phía $\Leftrightarrow V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ và $V_1 \cap V_2 = \emptyset$; còn E chỉ có các cạnh nối giữa các đỉnh $x \in V_1$ và $y \in V_2$.

1.4 Biểu diễn đồ thị

1. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề:

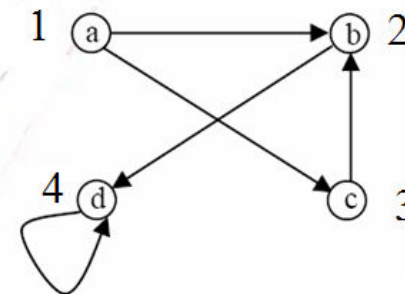
- Đánh số các đỉnh của đồ thị từ 1 đến n
- Ma trận kề A là ma trận vuông cấp n với:
 - $A[i, j] = 1$ nếu có cạnh nối i với j,
 - $A[i, j] = 0$ nếu không có cạnh nối i với j.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 8. Ma trận kề của đồ thị vô hướng

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 9. Ma trận kề của đồ thị có hướng

Ghi chú: Ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng.

Tập dữ liệu vào đối với ma trận trọng số thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa số n
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số là các trọng số.

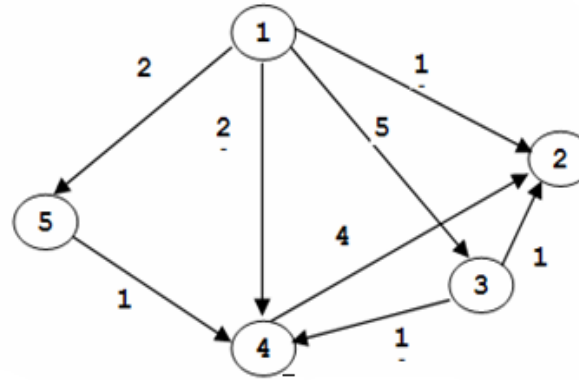
2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận trọng số

Đánh số các đỉnh của đồ thị từ 1 đến n

- Ma trận trọng số A là ma trận vuông cấp n với:

- $A[i, j] = c_{ij}$ nếu có cạnh nối i với j ,
- $A[i, j] = c$ đặc biệt nếu không có cạnh nối i với j .

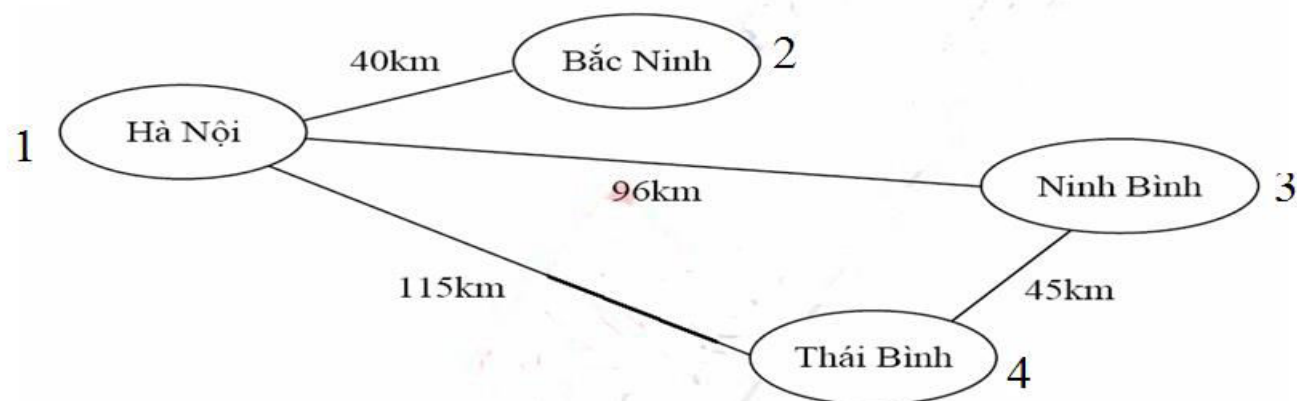
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 10. Ma trận trọng số của đồ thị có hướng với $c = 0$

Ghi chú: Tập dữ liệu vào đối với ma trận trọng số thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa số n
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số là các trọng số.



Hình 11. Mô hình đồ thị của hệ thống giao thông giữa các tỉnh

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 40 & 115 & 96 \\ 40 & \infty & \infty & \infty \\ 115 & \infty & \infty & 45 \\ 96 & \infty & 45 & \infty \end{bmatrix}$$

Ma trận trọng số của đồ thị vô hướng tương ứng với $c = \infty$

Ghi chú: Ma trận trọng số của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng.

Tập dữ liệu vào đối với ma trận trọng số thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa số n
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa n số là các trọng số.

3. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh

Đánh số các đỉnh của đồ thị từ 1 đến n , các cạnh từ 1 đến m .

- Liệt kê m cạnh, mỗi cạnh liệt kê đỉnh đầu i và đỉnh cuối j , $1 \leq i, j \leq n$.
- Đồ thị có trọng số, mỗi cạnh liệt kê đỉnh đầu i và đỉnh cuối j , $1 \leq i, j \leq n$ và trọng số c_{ij}

Danh sách cạnh của đồ thị hình 9:

4 5
1 2
1 3
2 4
3 2
4 4

Danh sách cạnh của đồ thị hình 11:

4 4
1 2 40
1 3 96
1 4 115
3 4 45

Ghi chú: Tập dữ liệu vào đối với danh sách cạnh thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa hai số n, m
- m dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa 2 hoặc 3 số là đỉnh đầu đỉnh cuối và trọng số.

4. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

Đánh số các đỉnh của đồ thị từ 1 đến n.

Liệt kê các đỉnh kề với mỗi đỉnh i, $1 \leq i \leq n$.

<u>Danh sách kề của đồ thị hình 8:</u>	<u>Danh sách kề của đồ thị hình 9:</u>
4	4
2 3	2 3
1 3 4	4
1 2	2
2	4

Ghi chú: Tập dữ liệu vào đối với danh sách kề thường có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa số n
- n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa các đỉnh kề với đỉnh i, $1 \leq i \leq n$

5. Ma trận liên thuộc

- $G = (V, E)$ $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.
- Các ma trận liên thuộc cũng có thể được dùng để biểu diễn các cạnh bội và khuyên. Các cạnh bội được biểu diễn trong ma trận liên thuộc bằng cách dùng các cột có các phần tử giống hệt nhau vì các cạnh này được nối với cùng một cặp các đỉnh.
- Đánh số các đỉnh từ 1 đến n , đánh số các cạnh từ 1 đến m .
- Ma trận liên thuộc cấp $m \times n$ của đồ thị G là $M = [m_{ij}]$, trong đó $m_{ij} = 1$ nếu cạnh e_j liên thuộc với đỉnh v_i và $= 0$ nếu cạnh e_j không liên thuộc với đỉnh v_i .