CHƯƠNG I: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

I. TẬP HỢP R^N VÀ HÀM NHIỀU BIẾN

1. R^n và các tập con

Với n là một số nguyên dương, ký hiệu R^n được dùng để chỉ tập hợp tất cả các bộ n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và ta thường gọi R^n là không gian (thực) n chiều. Khi bộ số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được đặt tên là P thì ta viết là:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Và gọi nó là một điểm trong không gian R^n.

Cho 2 điểm $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ trong R^n, khoảng cách giữa hai điểm P và Q, ký hiệu là d(P, Q) được định nghĩa bởi:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Khoảng cách này thỏa bất đẳng thức tam giác sau đây:

$$d(P, Q) \le d(P, R) + d(R, Q)$$

với 3 điểm P, Q, R tùy ý.

Điểm $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ còn được viết gọn dưới dạng $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, khoảng cách giữa x và y còn được viết bởi:

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Cho $P \in R^n$ và r là số thực dương, tập hợp $B(P, r) = \{Q \in R^n \mid d(P, Q) < r\}$ được gọi là hình cầu mở tâm P bán kính r, hay là lân cận bán kính r của P.

Tập hợp E trong R^n được gọi là bị chặn nếu có r > 0 sao cho $E \subset B(O, r)$, với O là điểm O(0, 0, …, 0).

2. Hàm nhiều biến

Cho n là một số nguyên với $n \ge 2$. Một phép tương ứng $f: R^n \to R$ được gọi là một hàm n biến. Tập hợp các điểm $P \in R^n$ mà f(P) xác định được gọi là miền xác định của f. Ta ký hiệu miền xác định của f là D(f).

Ví dụ:

1) Hàm $f: R^2 \to R$

$(x, y) \to f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

Là một hàm 2 biến có miền xác định là tập hợp tất cả các điểm P(x, y) sao cho $4 - x^2 - y^2 > 0$. Vậy D(f)=B(0, 2), hình cầu mở tâm O bán kính 2 trong R^2.

2) $g: R^3 \to R$ với $g(x, y, z) = x^2 + (y+z)/2$ là một hàm 3 biến có miền xác định là $D(g) = R^3$.

Ta chỉ có thể biểu diễn hình học, bằng vẽ đồ thị, cho hàm 2 biến z = f(x, y). Đồ thị của hàm 2 biến này là tập hợp các điểm trong không gian R^3 sau đây:

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D(f)\}$$

Đây là một mặt cong trong không gian 3 chiều với hệ tọa độ Descartes Oxyz.

Ví dụ: đồ thị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là nửa trên của mặt cầu tâm O bán kính 1 trong không gian 3 chiều Oxyz.

II. GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC

1. Định nghĩa giới hạn

Cho hàm n biến $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên một lân cận bán kính r của một điểm $P \in R^n$ và có thể không xác định tại P. Ta nói $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiến về $L \in R$ (hay có giới hạn là L). Khi $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dần đến P nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$0 < d(P, M) < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \varepsilon.$$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{M \to P} f(M) = L$$

Trong trường hợp hàm 2 biến z = f (x, y) thì giới hạn có thể được viết là:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Hay có thể viết:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L$$

Tương tự như đối với hàm một biến, ta cũng có các định nghĩa giới hạn vô cùng và giới hạn ở vô tận như sau:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty, +\infty, hay -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to x\\ y\to y_0}} f(x,y) = L, +\infty, -\infty, hay \infty$$

Ví dụ:

1). $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} (x^2+2y) = 3$

2). $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = +\infty$

3). $\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

4). $\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2+2x) = +\infty$

2. Sự liên tục

Định nghĩa: hàm số z = f (x_1, x_2, …, x_n) được gọi là liên tục tại điểm $P \in D(f)$ khi:

$$\lim_{M\to P} f(M) = f(P)$$

Ví dụ: hàm f(x, y) = $\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$ liên tục tại mọi điểm (x_o, y_o) khác (0, 0).

Tương tự như hàm một biến liên tục trên một đoạn $[a,b] \in R$, ta cũng có tính chất đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên 1 miền đóng và bị chặn.

III. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm riêng

Để đơn giản cho việc trình bày, ở đây ta sẽ xét các đạo hàm riêng của hàm 2 biến. Đối với hàm n biến thì hoàn toàn tương tự.

Định nghĩa: cho hàm 2 biến z = f (x, y). Đạo hàm riêng theo biến x tại điểm (x_o, y_o) là giới hạn (nếu có) sau đây:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x, y_o) - f(x_o, y_o)}{x - x_o}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

và đạo hàm riêng theo biến x được ký hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ hay vắn tắt là $f'_x(x_o, y_o)$. Ta còn có thể ký hiệu đạo hàm riêng này bởi $z'_x(x_o, y_o)$ hay $\frac{\partial z}{\partial x}(x_o, y_o)$.

Đạo hàm riêng theo biến y của hàm x = f (x, y) tại (x_o, y_o) được định nghĩa tương tự bởi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{y \to y_o} \frac{f(x_o, y) - f(x_o, y_o)}{y - y_o}$$

Nhận xét: dể thấy rằng $f'_x(x_o, y_o) = \frac{df(x, y_o)}{dx}\Big|_{x = x_o}$

Từ đó ta có thể tính dạo hàm riêng theo biến x tại (x_o, y_o) bằng cách coi $y = y_o$ là hằng số và tính đạo hàm của hàm một biến $f(x, y_o)$ tại $x = x_o$. Tương tự, để tính đạo hàm riêng theo biến y tại (x_o, y_o) ta tính đạo hàm của hàm một biến $f(x, y_o)$ tại $y = y_o$ (xem $x = x_o$ là hằng số).

Ví dụ:

1). Cho $z = x^2y$. Tính z'_x và z'_y

Xem y như hằng số và tính đạo hàm theo biến x ta có $z'_x = 2xy$.

Tương tự, xem x như hằng số và tính đạo hàm theo biến y ta vó: $x'_y = x^2$.

2) $z = \ln\left(tg\frac{y}{x}\right)$. Tính z'_x, z'_y và $z'_x(4, \pi)$. Xem *y* như hằng số, ta có:

$$z'_x = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(tg\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(1 + tg^2\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)'_x$$

$$= \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow z'_x(4,\pi) = \frac{-\pi}{4^2 tg\frac{\pi}{4}}\left(1+tg^2\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}$$

Xem *x* như hằng số, ta có:

$$z'_y = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(tg\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x.tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)$$

2. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đạo hàm riêng z'_x và z'_y của hàm $z = f(x,y)$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp 1. Đạo hàm riêng cấp 2 của một hàm là đạo hàm riêng (cấp 1) của đạo hàm riêng cấp 1 của hàm đó. Hàm 2 biến $z = f(x, y)$ có bốn đạo hàm riêng cấp 2 sau đây:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

Đạo hàm riêng cấp 2 này còn được ký hiệu bằng các cách khác nhau như sau: $z''_{xx}, z''_{x^2}, f''_{xx}, f''_{x^2}, f''_{11}$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Đạo hàm riêng cấp 2 này còn được ký hiệu bởi: $z''_{yy}, z''_{y^2}, f''_{yy}, f''_{y^2}, f''_{22}$

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

Đạo hàm riêng cấp 2 này còn được ký hiệu bởi: $z''_{xy}, f''_{xy}, f''_{12}$

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

còn được ký hiệu là $z''_{yx}, f''_{yx}, f''_{21}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có định nghĩa và ký hiệu cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn. Chẳng hạn, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ hay $z'''_{xxx} = (z''_{xx})'_x$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$ hay $z'''_{xy^2} = (z''_{y^2})'_x$, và hai đạo hàm riêng cấp 3 này còn được viết là $z^{(3)}_{x^3}, z^{(3)}_{xy^2}$.

Ví dụ:

1) $z = x^4 + y^4 - 2x^3y^3$. Ta có:

$z'_x = 4x^3 - 4xy^3$

$z'_y = 4y^3 - 6x^2y^2$

$z''_{xx} = 12x^2 - 4y^3$

$z''_{yy} = 12y^2 - 12x^2y$

$z''_{xy} = -12y^2$

$z''_{yx} = -12\,y^2$

$z'''_{x^3} = 24x$

$z^{(4)}_{x^3y} = 0$

2) Xét hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{if} \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if} \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta có, với $(x, y) \neq (0, 0)$ thì

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2},$$

và tại $(0, 0)$ thì $f(0, 0) = 0$.

Do đó $f'_x(x,y) = y\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$ tại $(x, y) \neq (0, 0)$

và $f_x'(0,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$

suy ra $f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \dfrac{f_x'(0,y) - f_x'(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} -\dfrac{y}{y} = -1.$

Hoàn toàn tương tự, ta tính được:

$$f_y'(x,y) = -x\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2)}\right)$$ tại (x, y) ≠ (0, 0)

và $f_y'(0,0) = 0,$

$$f''_{yx}(0,0) = 1.$$

Qua ví dụ trên ta thấy các đạo hàm riêng theo cùng các biến nhưng khác thứ tự không phải bao giờ cũng bằng nhau. Tuy nhiên định lý sau đây cho ta điều kiện để các đạo hàm riêng z''_{xy} và z''_{yx} bằng nhau.

Định lý: Nếu $f(x, y)$ có các đạo hàm f''_{xy} và f''_{xy} trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

chú ý rằng định lý trên cũng mở rộng được ra cho các đạo hàm cấp cao hơn và nhiều biến hơn.

3. Vi phân toàn phần

Định nghĩa:

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

theo các số gia Δx, Δy của các biến x, y tại (x_0, y_0) có thể được viết dưới dạng

$$\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y,$$

trong đó A, B là các hằng số (không phụ thuộc Δx, Δy) và $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Biểu thức $A\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân của hàm số f tại (x_0, y_0), ký hiệu là $df(x_0, y_0)$.

Định lý:

(i) Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì f có đạo hàm riêng cấp 1 tại đó và

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$$

(ii) Nếu $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trên 1 lân cận của (x_0, y_0) và f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

Chú ý rằng khi xét các trường hợp đặc biệt $f(x, y) = x$ và $g(x, y) = y$ ta có vi phân: $dx = \Delta x$ và $dy = \Delta y$. Do đó công thức vi phân cấp 1 của $f(x, y)$ còn được viết dưới dạng

$$df = f'_x.dx + f'_y.dy$$

và còn được gọi là vi phân toàn phần của hàm $f(x, y)$.

Ví dụ: Với $z = arctg\frac{y}{x}$, ta có:

$$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2}.\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2+y^2}.\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

vậy $dz = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$

Tính chất: Tương tự như đối với hàm một biến ta có các tính chất sau đây của vi phân:

$$d(f + g) = df + dg$$

$$d(f.g) = g.df + f.dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g.df - f.dg}{g^2}$$ (với $g \neq 0$).

Ứng dụng vi phân để tính gần đúng:

Giả sử $z = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0). Khi đó, theo định nghĩa của vi phân ta có thể tính gần đúng $f(x, y)$ bởi:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0).(y-y_0)$$

với (x, y) gần (x_0, y_0).

Ví dụ: Tính gần đúng $A = \sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$

Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, ta tính gần đúng

$A = f(1{,}02; 1{,}97)$ như sau:

$$f(1{,}02; 1{,}97) \approx f(1, 2) + f'_x(1, 2).(1{,}02 - 1) + f'_y(1, 2).(1{,}97 - 2)$$

với $f(1, 2) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3$

$$f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \Rightarrow f'_x(1{,}2) = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \Rightarrow f'_y(1{,}2) = 2$$

Suy ra $A \approx 3 + \frac{1}{2}.0{,}02 - 2.0{,}03 = 2{,}95$

4. Vi phân cấp cao

Cho hàm 2 biến $z = f(x, y)$.

Bản thân $df(x, y) = f'_x(x, y).dx + f'_y(x, y).dy$ cũng là một hàm theo 2 biến x, y nên ta có thể xét vi phân của nó. Nếu df(x, y) có vi phân thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp 2 của f(x, y), ký hiệu là $d^2f\,(x, y)$ hay vắn tắt là d^2f. Vậy:

$d^2f = d(df)$

Tổng quát, vi phân cấp n (nếu có) của f được định nghĩa bởi:

$$d^nz = d(d^{n-1}f)$$

Công thức vi phân cấp 2 của z=f(x, y):

$$d^n z = d(dz) = d(z'_x.dx + z'_y.dy)$$

$$= (z''_{xx}dx + z''_{yx}dy)dx + (z''_{xy}dx + z''_{yy}dy)dy$$

$$= z''_{xx}dx^2 + (z''_{xy} + z''_{yx})dxdy + z''_{yy}dy^2$$

Giả thiết thêm rằng, các đạo hàm hỗn hợp liên tục thì ta có:

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

và do đó:

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

hay ta có:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Người ta dùng ký hiệu luỹ thừa một cách hình thức để viết lại công thức vi phân cấp 2 dưới dạng:

$$d^2z = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^2 z$$

Tương tự, công thức vi phân cấp n của z = f(x, y) có thể được viết dưới dạng:

$$d^nz = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^n z$$

và công thức này cũng đúng cho trường hợp nhiều biến hơn.

IV. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Trường hợp một biến độc lập

Giả sử z = f(x, y) và x, y lại là các hàm theo t: x = x(t), y = y(t). Vậy z(t) = f(x(t), y(t)) là hàm 1 biến theo t. Đạo hàm của z(t) theo biến t được tính theo công thức sau đây:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Ví dụ:

Tính $\frac{dz}{dt}$ nếu $z = e^{2x+3y}$, trong đó x=cost, y=sint.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = 2e^{2x+3y}.(-\sin t) + 3e^{2x+3y}(\cos t)$$
$$= 2e^{2x+3y}.(-2\sin t + 3\cos t) = 2e^{2\cos t+3\sin t}.(-2\sin t + 3\cos t)$$

Tính $\frac{dz}{dt}$ nếu $z = e^{2x+3y}$ trong đó y=cosx

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = e^{y} + xe^{y}(-\sin x)$$
$$= e^{y}.(1 - x\sin x) = e^{\cos x}.(1 - x\sin x)$$

2. Trường hợp nhiều biến độc lập

Giả sử z = f(x,y) và x, y lại là các hàm theo các biến s, t. Khi đó để tính các đạo hàm riêng theo s và t của hàm hợp f (x(s,t), y(s,t)) ta cũng có các công thức tương tự như đối với hàm một biến sau đây:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ví dụ:

Tìm $\frac{\partial z}{\partial u}$ và $\frac{\partial z}{\partial v}$ nếu z = f(x,y) trong đó x = u.v và y = $\frac{u}{v}$

Ta có $\frac{\partial x}{\partial u} = v$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = u$ và $\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$.

Do đó

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = v.\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = u.\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{u}{v^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

Cho z = f(x,y,t), trong đó x = x(t), y = y(t).

Tính đạo hàm của hàm hợp:

z(t) = f (x(t), y(t), t).

Ta có:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

V. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

1. Hàm ẩn một biến

Giả sử có một hệ thức giữa hai biến x, y dạng

F(x,y) = 0

trong đó F(x,y) là hàm 2 biến xác định trong một lân cận mở D của (x_0, y_0) và F(x_0, y_0) = 0. Giả thiết rằng s là số dương và $\forall x \in (x_0 - s, x_0 + s), \exists$ y duy nhất sao cho (x, y) $\in$ D và F(x, y) = 0.

Như vậy ta có hàm số y = y(x) xác định trên khoảng (x_0 – s, x_0 + s) và thỏa F(x, y(x)) = 0 $\forall x \in (x_0 - s, x_0 + s)$. Hàm số y = y(x) này được gọi là hàm ẩn theo biến x xác định bởi phương trình F(x,y) = 0.

Trong toán học người ta gọi các định lý hàm ẩn là các định lý khẳng định sự tồn tại của hàm ẩn và đạo hàm của nó. Dưới đây là định lý cơ bản cho hàm ẩn một biến.

Định lý: Giả sử hàm F(x,y) thỏa 2 điều kiện sau:

(i) F liên tục trong hình tròn mở B(P, ε) tâm P(x_0, y_0) bán kính ε, với F(x_0, y_0) = 0;

(ii) Tồn tại các đạo hàm riêng liên tục $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ trong B(P, ε) và $\frac{\partial F}{\partial y}$ (x_0, y_0) ≠ 0.

Khi đó có ε>0 sao cho phương trình F(x,y) = 0 xác định một hàm ẩn y(x) khả vi liên tục trong (x_0 – s, x_0 + s) và

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'x}{F'y}.$$

Nhận xét: Nếu thừa nhận sự tồn tại của hàm ẩn và đạo hàm của nó thì công thức đạo hàm của hàm ẩn trong định lý trên có thể suy ra dễ dàng từ công thức đạo hàm của hàm hợp:

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = F'_x + F'_y \,.\, y'$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{F'x}{F'y}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm ẩn $\frac{dx}{dy}$ tại điểm $(1, \pi)$

nếu $x.y - e^x.\sin y = \pi$.

Coi y là hàm theo x, lấy đạo hàm phương trình trên ta được

$$y + x.y' - e^x\sin y - e^x \cos y.\, y' = 0$$

Tại $(x,y) = (1, \pi)$ ta có:

$$\pi + y' + e.y' = 0$$

Suy ra $y'(1) = \frac{-\pi}{1+e}$

Ghi chú: Để tính đạo hàm cấp 2 y'' của hàm ẩn, từ hệ thức

$$0 = F'x + F'y \,.\, y'$$

ta có thể tiếp tục lấy đạo hàm thì được:

$$0 = F''_{xx} + F''_{xy}.y' + (F''_{yx} + F''_{yy}.\, y').y' + F'_y.y''.$$

Từ đây sẽ rút ra y''.

2. Hàm ẩn 2 biến

Tương tự như trường hợp hàm ẩn 1 biến, với một số giả thiết thì phương trình

$F(x,y) = 0$

sẽ xác định một hàm ẩn $z = z(x,y)$ theo 2 biến x, y.

Định lý : Giả sử hàm $F(x,y,z)$ thỏa các điều kiện

(i). F liên tục trong hình cầu mở $B(P_0, \varepsilon)$ tâm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ bán kính ε và $F(x_0,y_0,z_0) = 0$;

(ii) Tồn tại các đạo hàm riêng liên tục F'_x, F'_y, F'_z trong $B(P_0, \varepsilon)$ và $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại $\delta>0$ sao cho phương trình $F(x,y,z) = 0$ xác định một hàm ẩn trong lân cận $B((x_0,y_0), s)$ của điểm (x_0, y_0). Hơn nữa hàm ẩn $z = z(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận này là:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'x}{F'z} \text{ ; 9; } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'y}{F'z}$$

Ghi chú: Định lý này có thể được mở rộng cho trường hợp hàm ẩn nhiều biến hơn $z = z(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định bởi phương trình:

$F(x_1,x_2,\ldots,x_n, z) = 0$

Ví dụ:

Cho hàm ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi phương trình $e^z = x + y + z$

Tính z_x', z_x'' và z_{xy}''.

Đạo hàm phương trình theo biến x ta được:

$$1 + z_x' = e^z . z_x' \Rightarrow z_x' = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{x+y+z-1}$$

Tiếp tục lấy đạo hàm theo x và theo y thì được:

$z_{xx}'' = e^z . (z_x')^2 + e^z . z_{xx}''$;

$z_{xy}'' = e^z . z_y' . z_x' + e^z . z_{xy}''$

Suy ra:

$$z_{xx}'' = \frac{e^z}{(1-e^z)^3} = \frac{x+y+z}{(1-x-y-z)^3}$$

$$z_{xy}'' = \frac{e^z \cdot z'_y \cdot z'_x}{1-e^z}$$

Tính z_y' tương tự như việc tính z_x', ta có:

$$z_y' = \frac{1}{e^z - 1}$$

Do đó

$$z_{xy}'' = \frac{e^z}{(1-e^z)^3} = \frac{x+y+z}{(1-x-y-z)^3}$$

VI. CỰC TRỊ

1.Định nghĩa và □iều kiện cần

Xét hàm z = f(x,y). Điểm $P_0(x,y)$ được gọi là điểm cực đại (địa phương) của hàm f(x,y) khi có $\delta>0$ sao cho $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ với mọi $(x,y) \in B(P_0,\delta)$.

Trường hợp ta có

$F(x,y) < f(x_0,y_0)\ \forall\ (x,y) \in B(P_0, \delta) \setminus \{P_0\}$thì ta nói P_0 là điểm cực đại (địa phương) chặt của hàm f(x,y).

Khái niệm cực tiểu (địa phương) được định nghĩa hoàn toàn tương tự. Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương.

✔ **Định lý: (Fermat)**

Nếu hàm f(x,y) đạt cực trị địa phương tại (x_0,y_0) và có các đạo hàm riêng tại đó thì $f_x'(x_0,y_0) = f_y'(x_0,y_0) = 0$.

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng của f đều bằng 0 được gọi là điểm dừng của hàm. Chú ý rằng định lý trên chỉ cho ta điều kiện cần để có cực trị, nên điểm dừng chưa chắc là điểm cực trị. Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để có cực trị.

✔ **Định lý (□iều kiện □ủ):**

Giả sử z = f(x,y) nhận (x_0, y_0) là một điểm dừng, và f(x,y) có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của (x_0, y_0). Đặt

$A = f_{xx}''(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0,y_0)$, và $\Delta = B^2 - A.C$

Khi đó ta có:

(i). Nếu $\Delta > 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0,y_0).

(ii). Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số đạt cực trị chặt tại (x_0,y_0).

Hơn nữa ta có:

(x_0,y_0) là điểm cực đại khi $A < 0$;

(x_0,y_0) là điểm cực tiểu khi $A > 0$.

(iii). Nếu $\Delta = 0$ thì chưa kết luận được là hàm số f(x,y) có đạt cực trị tại (x_0,y_0) hay không.

Từ định lý trên ta có thể tìm cực trị của hàm z = f(x,y) theo các bước sau đây:

- Bước 1: Tính các đạo hàm riêng

- Bước 2: Tìm các điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 0 \\ f_y'(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Bước 3: Ứng với mỗi điểm dừng (x_0,y_0), đặt

$A = f_{xx}''(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0,y_0)$,

$\Delta = B^2 - AC$

Xét dấu của Δ và của A để kết luận.

Lưu ý: Để có kết luận đầy đủ về cực trị ta còn phải xét riêng trường hợp điểm dừng mà tại đó $\Delta = 0$ và xét các điểm mà tại đó không tồn tại đạo hàm riêng cấp 1 hay cấp 2.

Ví dụ:

1) Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Ta có $z_x' = 3x^2 + 3y^2 - 15$,

$z_y' = 6xy - 12$

$z_{xx}'' = 6x$, $z_{xx}'' = 6y$, $z_{yy}'' = 6x$

Để tìm điểm dừng, ta giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 4 nghiệm, cho ta 4 điểm dừng:

$M_1(1, 2)$; $M_2(2, 1)$; $M_3(-1, -2)$; $M_4(-2, -1)$.

Tại $M_1(1, 2)$:

$A = z_{xx}''(1, 2) = 6$

$B = z_{xy}''(1, 2) = 12 \Rightarrow \Delta = B^2 - AC > 0$

$C = z_{yy}''(1, 2) = 6$

Hàm số không đạt cực trị tại $M_1(1, 2)$.

Tại $M_2(2,1)$:

$A = z_{xx}''(2, 1) = 12$

$B = z_{xy}''(2, 1) = 6 \Rightarrow \Delta = B^2 - AC < 0$

$C = z_{yy}''(2, 1) = 12$ $A > 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại $M_2(2, 1)$, với $z_{min} = z(2, 1) = -28$

Tại $M_3(-1, -2)$:

$A = z_{xx}''(-1, -2) = -6$

$B = z_{xy}''(-1, -2) = -12 \Rightarrow \Delta = B^2 - AC > 0$

$C = z_{yy}''(-1, -2) = -6$

Hàm số không đạt cực trị tại $M_3(-1, -2)$.

Tại $M_4(-2, -1)$:

$$\begin{aligned} A &= z''_{xx}(-2,-1) = -12 \\ B &= z''_{xy}(-2,-1) = -6 \\ C &= z''_{yy}(-2,-1) = -12 \end{aligned} \quad 9; \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC < 0 \\ &A < 0 \end{aligned}$$

Hàm số đạt cực đại tại $M_4(-2, -1)$ với $z_{max} = z(-2,-1) = 28$

2) Khảo sát cực trị của hàm $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Ta có:

$$z'_x = 4x^3 - 2x - 2y$$
$$z'_y = 4y^3 - 2x - 2y$$

Giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 3 nghiệm ⇒ 3 điểm dừng:

P1(0, 0); P2(-1, -1); P3(1,1)

Tính các đạo hàm cấp 2:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2$$
$$z''_{xy} = -2$$
$$z''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại P1(0, 0):

$$A = z''_{xx}(0,0) = -2$$
$$B = z''_{xy}(0,0) = -2$$
$$C = z''_{yy}(0,0) = -2$$ 9; $\Rightarrow \Delta = B^2 - AC = 0$

Ta chưa có kết luận về cực trị tại P_1 mà phải khảo sát trực tiếp. Ta có z(0, 0) = 0, với $x = y = \frac{1}{n}$ thì

$$z\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{z}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0$$ (n nguyên dương)

Với $x = \frac{1}{n}, y = -\frac{1}{n}$ thì $z\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{z}{n^4} > 0$. Điều này cho thấy rằng trong mọi lân cận của P_1 hàm số đều có giá trị dương và có giá trị âm. Vậy $P_1(0, 0)$ không phải là điểm cực trị

Tại $P_2(-1, -1)$ và $P_3(1, 1)$ ta có A = 10, B = -2, C = 10, $\Delta = B^2 - AC = -96$. Suy ra tại P2 và P3 hàm số đạt cực tiểu chặt với:

$z_{min} = z(P_2) = z(P_3) = -2$

VII. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

1. Định nghĩa

Xét hàm số $z = f(x, y)$, với điều kiện ràng buộc: $\varphi(x, y) = 0$ (*)

Ta nói:

- $f(x, y)$ đạt cực đại chặt tại (x_0, y_0) với điều kiện (*)
nếu (x_0, y_0) thỏa (*) và với mọi (x, y) thỏa (*) khá gần (x_0,y_0) ta có $f(x, y) < f(x_0, y_0)$

- $f(x, y)$ đạt cực tiểu chặt tại (x_0, y_0) với điều kiện (*)
nếu (x_0, y_0) thỏa (*) và với mọi (x, y) thỏa (*) khá gần (x_0,y_0) ta có $f(x, y) > f(x_0, y_0)$

- $f(x, y)$ đạt cực trị chặt tại (x_0, y_0) với điều kiện (*)
nếu $f(x, y)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu tại (x_0,y_0) với điều kiện (*)

2. Phương pháp nhân tử Lagrange

Định lý: (điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Giả sử:

Các hàm $f(x, y)$ và $\varphi(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một lân cận của điểm (x_0,y_0) với $\varphi(x_0, y_0) = 0$

$\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$ hay $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó, nếu $f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0,y_0) với điều kiện $\varphi(x_0,y_0)=0$ thì tồn tại số thực λ sao cho:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Hàm số $L(x,y,\lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x,y)$ được gọi là hàm Lagrange. Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ của cực trị có điều kiện.

Định lý: (□iều kiện □ủ của cực trị có □iều kiện)

Giả sử f (x, y) và φ (x,y) có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của (x_0,y_0) với φ $(x_0,y_0) = 0$, và (x_0,y_0,λ) là điểm dừng của hàm Lagrange. Khi đó ta có:

- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda) = L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda)dxdy$ $L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda)dy^2$ xác định dương trong một miền theo dx, dy thỏa ràng buộc: $d\varphi(x_0,y_0) = \varphi'_x(x_0,y_0dx) + \varphi'_y(x_0,y_0)dy$ và $dx^2+dy^{2\neq}$ 0, thì hàm f (x, y) đạt cực tiểu chặt tại (x_0,y_0) với điều kiện φ $(x_0,y_0) = 0$.

- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ xác định âm trong 1 miền theo dx, dy thỏa ràng buộc như trên thì f (x, y) đạt cực đại chặt tại (x_0,y_0) với điều kiện φ $(x_0,y_0) = 0$.

- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ không xác định dấu trong miền nói trên thì không có cực trị có điều kiện tại (x_0,y_0).

Từ định lý trên ta có thể tìm cực trị có điều kiện theo phương pháp nhân tử Lagrange như sau:

- Bước 1: Lập hàm Lagrange

  $L = f(x, y) + \lambda\varphi(x,y)$ $(\lambda \in R)$

- Bước 2: Tính

$$L'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x$$
$$L'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y$$

  và giải hệ phương trình sau đây để tìm các điểm dừng (x_0,y_0) cùng với giá trị λ_0 tương ứng.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Bước 3: Tính vi phân cấp 2 của L = L(x,y)

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2$$

  và tính ràng buộc:

$$d\varphi(x,y) = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0 \quad (**)$$

Với mỗi điểm dừng (x_0,y_0) và $\lambda = \lambda_0$ tìm được trong bước 2, xét $A = d^2L(x_0,y_0)$ (phụ thuộc dx và dy).

Nếu A > 0 với mọi dx, dy không đồng thời bằng 0 thỏa ràng buộc (**) thì hàm số đạt cực tiểu có điều kiện tại (x_0,y_0).

Nếu A < 0 với mọi dx, dy không đồng thời bằng 0 thỏa ràng buộc (**) thì hàm số đạt cực đại có điều kiện tại (x_0,y_0).

Nếu dấu của A không xác định xét theo dx và dy không đồng thời bằng 0 thỏa ràng buộc (**) thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0,y_0).

Ví dụ:

Tìm cực trị của hàm $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $x + y = 4$

Lập hàm Lagrange:

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda (x + y - 4)$$

Ta có: $L'_x = 2x + \lambda, L'_y = 2y + \lambda$

Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ:

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ta có một điểm dừng M(2,2) ứng với $\lambda = -4$.

Tính đạo hàm riêng cấp 2 của L(x,y):

$$L''_{xx} = 2,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 2$$

$$\Rightarrow d^2L = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Vậy $d^2L > 0$ tại M(2,2) nên hàm số đạt cực tiểu (có điều kiện) tại đó với $z_{min} = z(2,2) = 8$.

Lưu ý: Trong trường hợp từ hệ thức

$$\varphi(x,y) = 0$$

ta có thể tính được 1 biến thiên theo biến kia, chẳng hạn có thể tính $y = \psi(x)$ thì bằng cách thay thế $y = \psi(x)$ vào z ta có thể xem z như hàm theo 1 biến x:

$$z = z(x, \psi(x))$$

Khi đó có thể tìm cực trị của z như hàm theo 1 biến.

Xét lại ví dụ trên, ta thấy:

$$x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x$$

Suy ra $z = x^2 + y^2 = x^2 + (4-x)^2$.

Xem z là hàm 1 biến ta có:

$$z'(x) = 2x - 2(4 - x) = 4x - 8$$

$$z'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Lập bảng biến thiên, ta có:

X	$-\infty$	2	$+\infty$
Z'(x)	-	0	+
Z		8	

Vậy $z = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu (với điều kiện x + y = 4) tại M(2,2) với $z_{min} = 8$

VIII. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Cho $\mathcal{D} \subset \Re^2$. Điểm $P(x,y) \in \mathcal{D}$ được gọi là một điểm trong của $\mathcal{D}$ khi tồn tại một hình cầu mở $B(P, \varepsilon)$ đều chứa điểm thuộc $\mathcal{D}$ và điểm không thuộc $\mathcal{D}$. Tập hợp các điểm biên của $\mathcal{D}$ được gọi là biên của $\mathcal{D}$. Miền $\mathcal{D}$ được gọi là miền đóng khi $\mathcal{D}$ chứa mọi điểm biên của nó.

Ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y)$ trên một miền đóng và bị chặn $\mathcal{D}$ như sau:

- Bước 1: Tính $f'x$ và $f'y$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

để tìm các điểm dừng ở phần trong của $\mathcal{D}$

- Bước 2: Tìm các điểm tại đó không có đạo hàm riêng

- Bước 3: Tìm giá trị lớn nhất của f (x,y) trên biên của $\mathcal{D}$ (liên quan đến cực trị có điều kiện)

- Bước 4: So sánh các giá trị của hàm số tại các điểm tìm được ở bước 1, bước 2 với giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên (ở bước 3) để rút ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

trên miền $\mathcal{D}$ giới hạn bỡi: $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$

Ta có: $\begin{matrix} z'_x = 2x - y + 1 \\ z'_y = 2y - x + 1 \end{matrix}$

Giải hệ: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = -1$

Ta tìm được 1 điểm dừng $M(-1,-1) \in \mathcal{D}$, với $z(-1,-1) = -1$

Biên của miền $\mathcal{D}$ gồm 3 đoạn thẳng OA, OB và AB.

Trên biên OA ta có:

$x = 0, -3 < y < 0$

$z = y^2$

$z' = 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ một điểm cực trị trên OA là $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ với $z\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Tương tự,

trên OB có cực trị tại $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ với $z\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$

trên AB có cực trị tại $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ với $z\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Tại các điểm O, A và B ta có:

z(0,0) = 0; z(0,-3) = 6; z(-3,0) = 6

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên của $\mathcal{D}$ lần lượt là 6 và $-\frac{3}{4}$

So sánh các giá trị z=-1, z=6 với $z=-\frac{3}{4}$ ta suy ra giá trị lớn nhất của z là 6 tại A(0, -3) và B(-3, 0); gái trị nhỏ nhất của z là –1 tại M(-1, -1).

BÀI TẬP CHƯƠNG 01

1-Tìm miền xác định của hàm số:

a) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

b) $z=\ln(x^2+y^2)$

c) $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$

d) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$

2-Tính đạo hàm riêng của hàm số:

e) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

f) $z=arctg\frac{y}{x}$

g) $z=x^y$

h) $z=(1+xy)^y$

a) Tính các đạo hàm riêng tại $(\frac{\pi}{3},4)$ của hàm:

$$f(x,y)=\sin(x\sqrt{y})$$

b) Tính các đạo hàm riêng tại (0, 0) của hàm:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y} & \text{neáu } x \neq y \\ 0 & \text{neáu } x = y \end{cases}$$

3-Tính vi phân toàn phần của hàm số:

i) $z = tg(3x - y) + 6^{x+y}$

j) $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$

4- Tìm vi phân cấp 2 của hàm số

k) $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$

l) $z = \ln(x + y$

m) $z = \sqrt{2xy + y^2}$

n) $z = e^x \ln y + \sin y . \ln x$

5-Cho f(t) là hàm một biến khả vi. Đặt z = f(x^2-y^2). Chứng tỏ rằng hàm z thoả mãn phương trình sau:

$$y.\frac{\partial z}{\partial y} + x.\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Chứng minh:

a) $x.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$ với $z = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ với $z = \ln(x^2 + y^2)$

6- Tìm cực trị của hàm số:

o) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

p) $z = x^3 y^2 (1 - x - y)$

q) $z = -2x^3 + 6y + 6y + 3y.(2x - y) - 1$

r) $z = 2y^3 + 3x(x - 2y) - 6(x + y) - 3$

s) $z = (x-1)^2 + 2y^2$

t) $z = 2x^3 + 6x(y-1) - 3(y+10) + 2$

7-Tìm cực trị có điều kiện:

a) $z = xy$ với điều kiện $3x + 2y - 5 = 0$

b) $z = x + y^2$ với điều kiện $x + y = 1$

8- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

c) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong tam giác giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x - y = 3$

d) $z = xy + x + y$ trong hình giới hạn bởi các đường $x = 1, x = 2, y = 3$ và trục hoành

e) $z = 5xy - 3x - 2y$ trong hình giới hạn bởi các đường $3x + 5y = 40$

9-Tìm đạo hàm của hàm hợp

f) $\frac{dz}{dx}$ với $z = arctg(\frac{u}{v})$ trong đó $u = \sin x$ và $v = \cos 2x$

g) $\frac{dz}{ds}$ và $\frac{dz}{dt}$ với $z = \sin(2^x + y^2)$ trong đó $x = \sin(s + 2t)$ và $y = \ln(st)$

10-Tính gần đúng:

h) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,981})$

i) $\sin(\pi.(0,01).(1.05) + \ln(1.05))$

11-Tính đạo hàm y’ của hàm ẩn y=y(x) xác định bởi các phương trình:

j) $x^3y - y^3x = 1$

k) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$

12-Cho hàm ẩn z = z(x, y) xác định bởi phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Tính $\frac{dz}{dx}$ và $\frac{dz}{dy}$