Toán rời rạc

Nguyễn Đức Nghĩa

Chương 4

BÀI TOÁN TỐI ƯU TỔ HỢP

Nội dung

- 1. Phát biểu bài toán
- 2. Duyệt toàn bộ
- 3. Thuật toán nhánh cận

Nguyễn Đức Nghĩa

1. Phát biểu bài toán

- 1.1. Bài toán tổng quát
- 1.2. Bài toán người du lịch
- 1.3. Bài toán cái túi
- 1.4. Bài toán đóng thùng

Nguyễn Đức Nghĩa

Nguyễn Đức Nghĩa

- Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng thực tế của tổ hợp, các cấu hình tổ hợp được gán cho một giá trị bằng số đánh giá giá trị sử dụng của cấu hình đối với mục đích sử dụng cụ thể nào đó. Khi đó xuất hiện bài toán: Hãy lựa chọn trong số các cấu hình tổ hợp chấp nhận được cấu hình có giá trị sử dụng tốt nhất. Các bài toán như vậy chúng ta sẽ gọi là bài toán tối ưu tổ hợp.

Phát biểu bài toán

- Díi d¹ng tæng qu¸t bµi to¸n tèi u tæ hîp cã thÓ ph¸t biÓu nh sau:

T×m cùc tiÓu (hay cùc ®¹i) cña phiÕm hµm

$$f(x) \rightarrow \min\ (\max),$$

víi ®iÒu kiÖn

$$x \in D,$$

trong ®ã *D* lµ tËp h÷u h¹n phÇn tö.

Nguyễn Đức Nghĩa

Toán rời rạc

Nguyễn Đức Nghĩa

Các thuật ngữ

- *f*(*x*) - hµm môc tiªu cña bµi to¸n,
- $x \in D$ - ph¬ng ¸n
- *D* - tËp c¸c ph¬ng ¸n cña bµi to¸n.
- Th«ng thêng tËp *D* ®îc m« t¶ nh lµ tËp c¸c cÊu h×nh tæ hîp tho¶ m·n mét sè tÝnh chÊt cho tríc nµo ®ã.
- Ph¬ng ¸n $x^* \in D$ ®em l¹i gi¸ trÞ nhá nhÊt (lín nhÊt) cho hµm môc tiªu ®îc gäi lµ ***ph¬ng ¸n tèi u***, khi ®ã gi¸ trÞ $f^* = f(x^*)$ ®îc gäi lµ ***gi¸ trÞ tèi u*** cña bµi to¸n.

Nguyễn Đức Nghĩa

1. Phát biểu bài toán

- 1.1. Bài toán tổng quát
- **1.2. Bài toán người du lịch**
- 1.3. Bài toán cái túi
- 1.4. Bài toán đóng thùng

Bµi to¸n ngêi du lÞch

(Traveling Salesman Problem – TSP)

- Mét ngêi du lÞch muèn ®i tham quan *n* thµnh phè $T_1, T_2, ..., T_n$.
- *Hành trình là cách đi xuÊt ph¸t tõ mét thµnh phè nµo ®ã ®i qua tÊt c¶ c¸c thµnh phè cßn l¹i, mçi thµnh phè ®óng mét lÇn, råi quay trë l¹i thµnh phè xuÊt ph¸t.*
- BiÕt c_{ij} lµ chi phÝ ®i tõ thµnh phè T_i ®Õn thµnh phè T_j ($i, j = 1, 2,..., n$),
- T×m hµnh tr×nh víi tæng chi phÝ lµ nhá

Sơ lược về lịch sử

- The origins of the TSP are obscure. In the 1920's, the mathematician and economist Karl Menger publicized it among his colleagues in Vienna.
- In the 1930's, the problem reappeared in the mathematical circles of Princeton.
- In the 1940's, it was studied by statisticians (Mahalanobis (1940), Jessen (1942), Gosh (1948), Marks (1948)) in connection with an agricultural application and the mathematician Merill Flood popularized it among his colleagues at the RAND Corporation. Eventually, the TSP gained notoriety as the prototype of a hard problem in combinatorial optimization: examining the tours one by one is out of the question because of their large number, and no other idea was on the horizon for a long time.
- New history with George Dantzig, Ray Fulkerson, and Selmer Johnson's 1954 breakthrough.

Nguyễn Đức Nghĩa

- Ta cã t¬ng øng 1-1 gi÷a một hµnh tr×nh

$$T_{\pi(1)} \rightarrow T_{\pi(2)} \rightarrow \ldots \rightarrow T_{\pi(n)} \rightarrow T_{\pi(1)}$$

  víi mét ho¸n vÞ $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ cña n sè tù nhiªn 1, 2,..., n.

§Æt

$$f(\pi) = c_{\pi(1),\pi(2)} + \ldots + c_{\pi(n-1),\pi(n)} + c_{\pi(n),\pi(1)}.$$

Ký hiÖu:

Π - tËp tÊt c¶ c¸c ho¸n vÞ cña n sè tù nhiªn 1, 2,..., n.

- Khi ®ã bµi to¸n ngêi du lÞch cã thÓ ph¸t biÓu díi d¹ng bµi to¸n tèi u tæ hîp sau:

$$\min \{ f(\pi) : \pi \in \Pi \}.$$

- Có thể thấy rằng tổng số hành trình của người du lịch là $n!$, trong đó chỉ có $(n-1)!$ hành trình thực sự khác nhau (bởi vì có thể xuất phát từ một thành phố bất kỳ, nên có thể cố định một thành phố nào đó là thành phố xuất phát).

1. Phát biểu bài toán

- 1.1. Bài toán tổng quát
- 1.2. Bài toán người du lịch
- **1.3. Bài toán cái túi**
- 1.4. Bài toán đóng thùng

Nguyễn Đức Nghĩa

Bài toán cái túi (Knapsack Problem)

- Một nhà thám hiểm cần đem theo một cái túi có trọng lượng không quá b.
- Có n đồ vật có thể đem theo. Đồ vật thứ j có
  - trọng lượng là a_j và
  - giá trị sử dụng là c_j ($j = 1, 2,..., n$).
- Hỏi rằng nhà thám hiểm cần đem theo các đồ vật nào để cho tổng giá trị sử dụng của các đồ vật đem theo là lớn nhất?

Nguyễn Đức Nghĩa

Phát biểu bài toán

- Mét ph¬ng ¸n ®em ®å cña nhµ th¸m hiÓm cã thÓ biÓu diÔn bëi vect¬ nhÞ ph©n ®é dµi *n*: $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, trong ®ã $x_j = 1$ nÕu ®å vËt thø *j* ®îc ®em theo vµ $x_j = 0$ nÕu tr¸i l¹i.
- Víi ph¬ng ¸n *x*, gi¸ trÞ ®å vËt ®em theo lµ

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

tæng träng lîng ®å vËt ®em theo lµ

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

Toản rời rạc

Nguyễn Đức Nghĩa

Bài toán cái túi

- Bµi to¸n c¸i tói cã thÓ ph¸t biÓu díi d¹ng bµi to¸n tèi u tæ hîp sau:

  Trong sè c¸c vect¬ nhÞ ph©n ®é dµi n tho¶ m·n ®iÒu kiÖn $g(x) \le b$, h·y t×m vect¬ x^* cho gi¸ trÞ lín nhÊt cña hµm môc tiªu $f(x)$:

$$\max \{ f(x) : x \in B^n, g(x) \le b \}.$$

1. Phát biểu bài toán

- 1.1. Bài toán tổng quát
- 1.2. Bài toán người du lịch
- 1.3. Bài toán cái túi
- **1.4. Bài toán đóng thùng**

Nguyễn Đức Nghĩa

Nguyễn Đức Nghĩa

Bµi to¸n ®ãng thïng
(*Bin Packing*)

- Có n đồ vật với trọng lượng là w_1, w_2, ..., w_n. Cần tìm cách xếp các đồ vật này vào các cái thùng có cùng dung lượng là b sao cho số thùng cần sử dụng là nhỏ nhất có thể được.

Phát biểu bài toán

- Ta cã thÓ gi¶ thiÕt lµ

$$w_i \le b,\ i = 1, 2,.., n.$$

- Do ®ã sè thïng cÇn sö dông ®Ó chøa tÊt c¶ c¸c ®å vËt lµ kh«ng qu¸ *n*. VÊn ®Ò lµ cÇn sè thïng Ýt nhÊt. Ta sÏ më s½n *n* c¸i thïng. Bµi to¸n ®Æt ra lµ h·y x¸c ®Þnh xem mçi mét trong sè *n* ®å vËt cÇn ®îc xÕp vµo c¸i thïng nµo trong sè *n* c¸i thïng ®· më ®Ó cho sè thïng chøa ®å lµ Ýt nhÊt.

Bài toán đóng thùng

- Đưa vào biến Bun

  x_{ij} = 1, nếu đồ vật i được xếp vào thùng j,

  0, nếu trái lại.

Khi đó bài toán đóng thùng có thể phát biểu dưới dạng:

$$\sum_{j=1}^{n} sign\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right) \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \le b, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Nguyễn Đức Nghĩa

2. DUYỆT TOÀN BỘ