

1. Volíme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1 se středem v počátku a v horní polovině. Naše volby jsou uniformně náhodné, tedy pravděpodobnost zásahu libovolné oblasti je úměrná jejímu obsahu. Označme  $X$  a  $Y$  souřadnice vybraného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$  a spočítejte pomocí ní  $\mathbb{E}[Y]$ .
- Pro kontrolu spočítejte  $\mathbb{E}[Y]$  přímo pomocí pravidla naivního statistika.

2. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a necháme si levý kus, jehož délku označme  $Y$ . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, ve kterém klacek zlomíme a necháme si levý kus, jehož délku označíme  $X$ .

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ . Pomozte si podmíněnou hustotou  $f_{X|Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_X$ .
- Pomocí  $f_X$  spočítejte  $\mathbb{E}[X]$ .
- Spočítejte  $\mathbb{E}[X]$  pomocí vztahu  $X = Y \cdot \frac{X}{Y}$ .

3. Nechť  $X$  je náhodná veličina s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{pro } 1 < x \leq 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme  $A$  jev  $\{X \geq 2\}$ .

- Spočítejte  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\Pr[A]$ ,  $f_{X|A}$  a  $\mathbb{E}[X | A]$ .
- Označme  $Y = X^2$ . Spočítejte  $\mathbb{E}[Y]$  a  $\text{Var}[Y]$ .

4. Chceme počítat obsah kruhu smplováním. Vygenerujeme náhodný bod v jednotkovém čtverci, tj. obě souřadnice vygenerovaného bodu jsou rozdělené podle  $\mathcal{U}(0,1)$ . Nechť  $X_i$  je indikátor jevu „ $i$ -tý vygenerovaný bod je uvnitř kružnice vepsané čtverci“.

- Určete  $\mathbb{E}[X_i]$  a  $\text{Var}[X_i]$ .
- Nechť  $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ . Spočítejte  $\mathbb{E}[S_n]$  a  $\text{Var}[S_n]$ .
- Pro jaké  $n$  čekáte, že výsledek bude správný na jedno desetinné místo? Co na dvě, tři, ...?

1. Volíme uniformně náhodně bod z polokruhu o poloměru 1 se středem v počátku a v horní polovině. Naše volby jsou uniformně náhodné, tedy pravděpodobnost zásahu libovolné oblasti je úměrná jejímu obsahu. Označme  $X$  a  $Y$  souřadnice vybraného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$  a spočítejte pomocí ní  $\mathbb{E}[Y]$ .
- Pro kontrolu spočítejte  $\mathbb{E}[Y]$  přímo pomocí pravidla naivního statistika.

2. Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a necháme si levý kus, jehož délku označme  $Y$ . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, ve kterém klacek zlomíme a necháme si levý kus, jehož délku označíme  $X$ .

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ . Pomozte si podmíněnou hustotou  $f_{X|Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_X$ .
- Pomocí  $f_X$  spočítejte  $\mathbb{E}[X]$ .
- Spočítejte  $\mathbb{E}[X]$  pomocí vztahu  $X = Y \cdot \frac{X}{Y}$ .

3. Nechť  $X$  je náhodná veličina s hustotou

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{pro } 1 < x \leq 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme  $A$  jev  $\{X \geq 2\}$ .

- Spočítejte  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\Pr[A]$ ,  $f_{X|A}$  a  $\mathbb{E}[X | A]$ .
- Označme  $Y = X^2$ . Spočítejte  $\mathbb{E}[Y]$  a  $\text{Var}[Y]$ .

4. Chceme počítat obsah kruhu smplováním. Vygenerujeme náhodný bod v jednotkovém čtverci, tj. obě souřadnice vygenerovaného bodu jsou rozdělené podle  $\mathcal{U}(0,1)$ . Nechť  $X_i$  je indikátor jevu „ $i$ -tý vygenerovaný bod je uvnitř kružnice vepsané čtverci“.

- Určete  $\mathbb{E}[X_i]$  a  $\text{Var}[X_i]$ .
- Nechť  $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ . Spočítejte  $\mathbb{E}[S_n]$  a  $\text{Var}[S_n]$ .
- Pro jaké  $n$  čekáte, že výsledek bude správný na jedno desetinné místo? Co na dvě, tři, ...?