Definice. *Množinový rozklad* množiny M je množina $\{B_1, \dots, B_k\}$, jejíž prvky jsou neprázdné, navzájem disjunktní množiny, jejichž sjednocením je M. Množiny B_i se nazývají *bloky rozkladu*.

1. Kombinatorickou úvahou, tj. ne přímým výpočtem, ale nějakým nápadem, dokažte následující rovnosti:

   a) $\binom{n}{k}2^{n-k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k}$.

   b) $\binom{n}{k} = \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k}$, pro $0 \leq k < n$.

   c) Nechť $B_{n,k}$ značí počet množinových rozkladů množiny $[n]$ s k bloky. Ukažte, že $B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + k \cdot B_{n-1,k}$.

2. Na turnaji v trojkovém mariáši (což je hra pro tři hráče) bylo 32 účastníků. Dvanáct z nich sehrálo pět partií, dvacet z nich sehrálo šest partií. Kolik tam bylo sehráno partií?

3. Na jiném turnaji v trojkovém mariáši bylo 15 účastníků a každá dvojice účastníků se tam právě dvakrát sešla u společné partie. Kolik tam bylo sehráno partií? Plyne ze zadání, že každý hráč sehrál stejný počet partií? Pokud ano, kolik partií sehrál každý hráč?

4. Na vysoké škole si každý student zapsal aspoň 10% ze všech nabízených předmětů. Dokažte, že existuje předmět, na němž je zapsáno aspoň 10% všech studentů.

5. Mějme nyní 100 studentů a 10 přednášek. Každou přednášku si zapsalo nejvýše 30 studentů. Dokažte, že existují dva studenti, kteří si nezapsali žádnou společnou přednášku.

6. Nechť M je matice tvaru 10×10 obsahující čísla $1, 2, \dots, 10$, přičemž každé číslo se v ní vyskytuje 10 krát. Dokažte, že M má řádek nebo sloupec obsahující aspoň 4 různá čísla.

Diskrétní matematika – Cvičení 07 2022–11-15, 17:20

Definice. *Množinový rozklad* množiny M je množina $\{B_1, \dots, B_k\}$, jejíž prvky jsou neprázdné, navzájem disjunktní množiny, jejichž sjednocením je M. Množiny B_i se nazývají *bloky rozkladu*.

1. Kombinatorickou úvahou, tj. ne přímým výpočtem, ale nějakým nápadem, dokažte následující rovnosti:

   a) $\binom{n}{k}2^{n-k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k}$.

   b) $\binom{n}{k} = \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k}$, pro $0 \leq k < n$.

   c) Nechť $B_{n,k}$ značí počet množinových rozkladů množiny $[n]$ s k bloky. Ukažte, že $B_{n,k} = B_{n-1,k-1} + k \cdot B_{n-1,k}$.

2. Na turnaji v trojkovém mariáši (což je hra pro tři hráče) bylo 32 účastníků. Dvanáct z nich sehrálo pět partií, dvacet z nich sehrálo šest partií. Kolik tam bylo sehráno partií?

3. Na jiném turnaji v trojkovém mariáši bylo 15 účastníků a každá dvojice účastníků se tam právě dvakrát sešla u společné partie. Kolik tam bylo sehráno partií? Plyne ze zadání, že každý hráč sehrál stejný počet partií? Pokud ano, kolik partií sehrál každý hráč?

4. Na vysoké škole si každý student zapsal aspoň 10% ze všech nabízených předmětů. Dokažte, že existuje předmět, na němž je zapsáno aspoň 10% všech studentů.

5. Mějme nyní 100 studentů a 10 přednášek. Každou přednášku si zapsalo nejvýše 30 studentů. Dokažte, že existují dva studenti, kteří si nezapsali žádnou společnou přednášku.

6. Nechť M je matice tvaru 10×10 obsahující čísla $1, 2, \dots, 10$, přičemž každé číslo se v ní vyskytuje 10 krát. Dokažte, že M má řádek nebo sloupec obsahující aspoň 4 různá čísla.