1 Matrics - Ma Trận

1.1 Determinant - Định Thức

1.1.1 Hoán Vị

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Hoán vị ma trận A tức là sắp xếp các phần tử của ma trận A theo thức tự khác nhau.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Nghịch Thế

Là số cặp số mà ở đó số trước lớn hơn số sau. Ký hiệu là N.
Từ dãy số$A = \{3, 4, 5, 2, 1\}$. Ta có các cặp số nghịch thế sau:
(3,2); (3,1); (4,2); (4,2); (5,2); (5,2); (2,1)
$\Rightarrow N = 7$

1.1.3 Ma Trận Vuông Cấp n

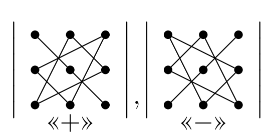
Giả sử ma trận A là ma trận vuông cấp 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Giả sử ma trận B là ma trận vuông cấp 3

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Theo công thức đồ thị sau:



Ta có $|B| = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$
Có thể bấm máy tính để tính nhanh với những ma trận có cấp $n \geq 4$.

1.1.4 Định Thức Con và Phần Bù Đại Số

Định thức con $|M_{ij}|$ là định thức thu được bằng cách bỏ đi hàng i và cột j của ma trận. Sau đó sử dụng phương pháp phần bù đại số để tính định thức |A|. Giả sử cho ma trận A như sau:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Để thực hiện phương pháp phần bù đại số, ta có chọn triển khai theo hàng hoặc cột bất kỳ, nhưng tối ưu nhất là triển khai ở nơi có chứa nhiều số 0 nhất.
Từ ma trận trên, ta chọn hàng 2 hoặc/và cột 4. Mục tiêu là đưa về định thức cấp 3

Bước 1 Xác định hàng 2 và cột 4.

Bước 2 Chọn 1 số ở mỗi hàng và cột. VD: (-)3 ở hàng 2 và (+)-1 ở cột 4.

Bước 3 Loại bỏ hàng và cột đi qua 3 (hàng 2, cột 1) và -1(hàng 4, cột 4).

Từ 3 bước trên ta tính được định thức của A:

$$|A| = (-1) \times (-3) \times \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times (10 + 1 - 6 - 5) = 0$$

1.1.5 Tính Chất Định Thức

TC1 $|AB| = |A| \times |B|$

TC2 $|A^T| = |A|$

TC3 Nếu đổi chỗ 2 hàng hoặc 2 cột thì định thức đổi dấu

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}$$

TC4 Nếu định thức có 1 hàng/cột = 0 => định thức = 0.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

TC5 Nếu định thức có 2 hàng/cột tỉ lệ thì định thức = 0

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 0$$

TC6 Nếu nhân 1 hàng với K khác 0 thì định thức mới gấp K lần định thức cũ.

Nếu A là ma trận vuông cấp n $\Rightarrow |KA| = K^n \times |A|$

Rút nhân tử chung của 1 hàng/cột ra ngoài định thức.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

TC7 Cộng 1 hàng/cột tổ hợp tuyến tính các hàng/cột $\neq$ thì định thức không đổi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{h_3 := h_3 - h_1 - h_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

TC8 Tách định thức

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1.1.6 Phép Biến Đổi Sơ Cấp

Tính định thức bằng phép biến đổi sơ cấp (BDSC):

- Đổi chỗ 2 hàng/cột.
- Nhân 1 hàng/cột với $K \neq 0$.
- Cộng vào 1 hàng/cột tổ hợp tuyến tính hàng/cột $\neq$

Mục tiêu: Đưa định thức về định thức tam giác (có nhiều số 0)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 3 & -9 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[h_3 := h_3 - 3h_1 | h_4 := h_4 - 2h_1]{h_2 := h_2 - h1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 11 & -5 & -16 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_4 := h_4 - 11h_2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{h_4 := h_4 - 6h_3} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 109 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 1 \times 1 \times 1 \times 109 = 109$$