2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$ (　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0, \\ x\ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的(　　)

(A) 可导点,极值点.　　(B) 不可导点,极值点.

(C) 可导点,非极值点.　　(D) 不可导点,非极值点.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$.　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.

(4) 设函数 $Q(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$. 如果对上半平面($y > 0$)内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$,那么函数 $P(x,y)$ 可取为(　　)

(A)$y - \dfrac{x^2}{y^3}$.　　(B) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^3}$.　　(C) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$.　　(D)$x - \dfrac{1}{y}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}| = 4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为(　　)

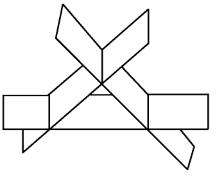
(A)$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.　　(B)$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C)$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.　　(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(6) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}$, 则(　　)



(A)$r(\boldsymbol{A}) = 2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

(B)$r(\boldsymbol{A}) = 2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.

(C)$r(\boldsymbol{A}) = 1$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.

(D)$r(\boldsymbol{A}) = 1$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1$.

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是(　　)

(A)$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.　　(B)$P(AB) = P(A)P(B)$.

(C)$P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$.　　(D)$P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ (　　)

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关.　　(B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关.　　(D) 与 μ, σ^2 都无关.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设函数$f(u)$可导, $z=f(\sin y-\sin x)+xy$, 则$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$______.

09 - 14 题扫我听课

(10) 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$______.

(11) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在$(0,+\infty)$内的和函数 $S(x)=$______.

(12) 设 Σ 设为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧, 则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为______.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(Ⅰ) 求 $y(x)$;

(Ⅱ) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

15 - 17 题扫我听课

(16) (本题满分 10 分)

设 a, b 为实数, 函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点$(3,4)$处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(Ⅰ) 求 a, b;

(Ⅱ) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$ 的面积.

(17)（本题满分 10 分）

求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(18)（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx(n=0,1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

18 - 19 题扫我听课

(19)（本题满分 10 分）

设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^T$ 在这个基下的坐标为 $(b,c,1)^T$.

（Ⅰ）求 a,b,c；

（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

20 - 23 题扫我听课

(21)（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

（Ⅰ）求 x,y；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度；

（Ⅱ）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（Ⅲ）X 与 Z 是否相互独立？

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）求 σ^2 的最大似然估计量.

2019 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)B.　(3)D.　(4)D.　(5)C.　(6)A.　(7)C.　(8)A.

二、填空题

(9)$\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.　(10) $\sqrt{3e^x-2}$.　(11) $\cos\sqrt{x}$.　(12) $\dfrac{32}{3}$.　(13) $k(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$.　(14) $\dfrac{2}{3}$.

三、解答题

(15)(Ⅰ)$y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

(Ⅱ)凹区间为$(-\sqrt{3},0)$ 和$(\sqrt{3},+\infty)$,凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$ 和$(0,\sqrt{3})$,拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$,$(0,0)$ 和$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

(16)(Ⅰ)$a=-1,b=-1$;(Ⅱ)$\dfrac{13\pi}{3}$.

(17) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{\pi}-1}$.

(18)(Ⅰ) 证明略;(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

(19) Ω 的形心坐标为$\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

(20)(Ⅰ)$a=3,b=2,c=-2$;

(Ⅱ)证明略,过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -\dfrac{1}{2} & 0 & 1\\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(21)(Ⅰ)$x=3,y=-2$;

(Ⅱ)满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)Z 的概率密度为$f_Z(z)=\begin{cases}pe^z, & z\leqslant 0,\\ (1-p)e^{-z}, & z>0;\end{cases}$

(Ⅱ)当 $p=\dfrac{1}{2}$时,X 与 Z 不相关;

(Ⅲ)X 与 Z 不相互独立.

(23)(Ⅰ)$A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$;

(Ⅱ)σ^2的最大似然估计量为$\widehat{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$.

2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2) 过点 $(1,0,0)$,$(0,1,0)$,且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为(　　)

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$.　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$.　　(D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$(　　)

(A) $\sin 1+\cos 1$.　　(B) $2\sin 1+\cos 1$.

(C) $2\sin 1+2\cos 1$.　　(D) $2\sin 1+3\cos 1$.

(4) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$,则(　　)

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,且 $\int_0^2 f(x)dx=0.6$,则 $P\{X<0\}=$(　　)

(A) 0.2.　　(B) 0.3.　　(C) 0.4.　　(D) 0.5.

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,据此样本检验假设:$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$,则(　　)

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(D) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 若$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$,则 $k=$ ______.

(10) 设函数$f(x)$具有2阶连续导数.若曲线$y=f(x)$过点$(0,0)$且与曲线$y=2^x$在点$(1,2)$处相切,则$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$ ______.

(11) 设$\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$,则$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$ ______.

(12) 设L为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线,则$\oint_L xy\mathrm{d}s=$ ______.

(13) 设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$有两个不同特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{A}$的线性无关的特征向量,且满足$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则$|\boldsymbol{A}|=$ ______.

(14) 设随机事件A与B相互独立,A与C相互独立,$BC=\varnothing$.若$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$,$P(AC\mid AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$,则$P(C)=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分$\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(17)(本题满分 10 分)

设Σ是曲面$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$的前侧,计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

已知微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$是$\mathbf{R}$上的连续函数.

(Ⅰ)若$f(x)=x$,求方程的通解;

(Ⅱ)若$f(x)$是周期为T的函数,证明:方程存在唯一的以T为周期的解.

(19)（本题满分 10 分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(20)（本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数.

（Ⅰ）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

（Ⅱ）求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

(21)（本题满分 11 分）

已知a是常数，且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求a；

（Ⅱ）求满足$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布. 令$Z=XY$.

（Ⅰ）求$\mathrm{Cov}(X,Z)$；

（Ⅱ）求Z的概率分布.

(23)（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本. 记σ的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$.

（Ⅰ）求$\hat{\sigma}$；

（Ⅱ）求$E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$.

2018 年真题参考答案

一、选择题

(1)D.　(2)B.　(3)B.　(4)C.　(5)A.　(6)A.　(7)A.　(8)D.

二、填空题

(9) -2.　(10) $2\ln 2-2$.　(11) $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ 或 $(1,0,-1)$.　(12) $-\frac{\pi}{3}$.　(13) -1.　(14) $\frac{1}{4}$.

三、解答题

(15) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{2}-\dfrac{1}{6}(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$,其中 C 为任意常数.

(16) 三个图形的面积之和存在最小值,最小值为 $\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

(17) $\dfrac{14\pi}{45}$.

(18) (Ⅰ) $y=x-1+C\mathrm{e}^{-x}$,其中 C 为任意常数.

(Ⅱ) 证明略.

(19) 证明略. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(20) (Ⅰ) 当 $a\neq 2$ 时, $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$;当 $a=2$ 时, $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

(Ⅱ) 当 $a\neq 2$ 时, f 的规范形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$;当 $a=2$ 时, f 的规范形为 $f=z_1^2+z_2^2$.

(21) (Ⅰ) $a=2$.

(Ⅱ) 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数,且 $k_2\neq k_3$.

(22) (Ⅰ) $\mathrm{Cov}(X,Z)=\lambda$.

(Ⅱ) Z 的分布律为 $P\{Z=i\}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lambda^i\mathrm{e}^{-\lambda}}{i!}, & i>0,\\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & i=0,\\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lambda^{-i}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(-i)!}, & i<0.\end{cases}$

(23) (Ⅰ) σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$.

(Ⅱ) $E(\hat{\sigma})=\sigma$, $D(\hat{\sigma})=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

2017 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.　　(C) $ab=0$.　　(D) $ab=2$.

(2) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则(　　)

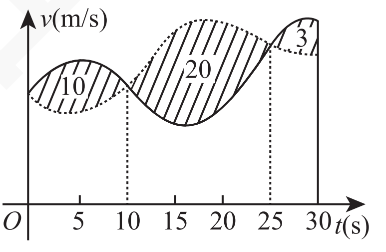
(A) $f(1)>f(-1)$.　　(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$.　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$.

(3) 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为(　　)

(A) 12.　　(B) 6.　　(C) 4.　　(D) 2.

(4) 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m)处,图中,实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次是 10,20,3.计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则(　　)



(A) $t_0=10$.

(B) $15<t_0<20$.

(C) $t_0=25$.

(D) $t_0>25$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7) 设 A,B 为随机事件.若 $0<P(A)<1$,$0<P(B)<1$,则 $P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})$ 的充分必要条件是(　　)

(A) $P(B\mid A)>P(B\mid\overline{A})$.　　(B) $P(B\mid A)<P(B\mid\overline{A})$.

(C) $P(\overline{B}\mid A)>P(B\mid\overline{A})$.　　(D) $P(\overline{B}\mid A)<P(B\mid\overline{A})$.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则下列结论中不正确的是(　　)

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.）

（9）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$______.

（10）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$______.

（11）若曲线积分 $\int_L \dfrac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$______.

（12）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$______.

（13）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为________.

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $E(X)=$______.

三、解答题（本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=0}$.

（16）（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：

（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C.

（Ⅰ）求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

（Ⅱ）求 S 的质量 M.

（20）（本题满分 11 分）

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

（Ⅰ）证明 $r(\boldsymbol{A})=2$；

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{Y\leqslant E(Y)\}$;

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|\ (i=1,2,\cdots,n)$. 利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ)求 Z_1 的概率密度;

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量.

2017 年真题参考答案

一、选择题

(1) A.　(2) C.　(3) D.　(4) C.　(5) A.　(6) B.　(7) A.　(8) B.

二、填空题

(9) 0.　(10) $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$.　(11) -1.　(12) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.　(13) 2.　(14) 2.

三、解答题

(15) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = f_1'(1,1)$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = f_{11}''(1,1) + f_1'(1,1) - f_2'(1,1)$.

(16) $\dfrac{1}{4}$.

(17) 极大值为 $y(1)=1$，极小值为 $y(-1)=0$.

(18) 证明略.

(19) (Ⅰ) $\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=0; \end{cases}$

(Ⅱ) 64.

(20) (Ⅰ) 证明略；

(Ⅱ) $\boldsymbol{x} = c(1,2,-1)^{\mathrm{T}} + (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$c$ 为任意常数.

(21) $a=2$, $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

(22) (Ⅰ) $\dfrac{4}{9}$；

(Ⅱ) $f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0<z<1, \\ z-2, & 2<z<3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(23) (Ⅰ) $f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0, \\ 0, & z\leqslant 0; \end{cases}$

(Ⅱ) $\hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\overline{Z}$，其中 $\overline{Z} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$；

(Ⅲ) $\hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i^2}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛,则(　　)

(A)$a<1$ 且 $b>1$.　　(B)$a>1$ 且 $b>1$.

(C)$a<1$ 且 $a+b>1$.　　(D)$a>1$ 且 $a+b>1$.

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　)

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(3)若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$,$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解,则 $q(x)=$(　　)

(A)$3x(1+x^2)$.　　(B)$-3x(1+x^2)$.　　(C)$\frac{x}{1+x^2}$.　　(D)$-\frac{x}{1+x^2}$.

(4)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n},n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则(　　)

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　(B)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C)$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.　　(D)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是(　　)

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为(　　)

(A)单叶双曲面.　　(B)双叶双曲面.　　(C)椭球面.　　(D)柱面.

(7)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,记 $p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$,则(　　)

(A)p 随着 μ 的增加而增加.　　(B)p 随着 σ 的增加而增加.

(C)p 随着 μ 的增加而减少.　　(D)p 随着 σ 的增加而减少.

(8)随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3,且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$,将试验 E 独立重复做 2 次,X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数,Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数,则 X 与 Y 的相关系数为(　　)

(A)$-\frac{1}{2}$.　　(B)$-\frac{1}{3}$.　　(C)$\frac{1}{3}$.　　(D)$\frac{1}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$______.

(10) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$______.

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微,$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定,则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$______.

(12) 设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$,且 $f'''(0)=1$,则 $a=$______.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$______.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,样本均值 $\overline{X}=9.5$,参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8,则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$,计算二重积分 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$,其中 $0<k<1$.

(Ⅰ)证明:反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(Ⅱ)若 $y(0)=1,y'(0)=1$,求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$,且 $f(0,y)=y+1$,L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$,并求 $I(t)$ 的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成,Σ 为 Ω 整个表面的外侧,计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 证明:

(Ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$. 当 a 为何值时,方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时,求解此方程.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布,令
$U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(Ⅰ)写出 (X,Y) 的概率密度;

(Ⅱ)问 U 与 X 是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数,X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本,令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(Ⅰ)求 T 的概率密度;

(Ⅱ)确定 a,使得 aT 为 θ 的无偏估计.

2016 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)D.　(3)A.　(4)D.　(5)C.　(6)B.　(7)B.　(8)A.

二、填空题

(9) $\frac{1}{2}$.　(10) $\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$.　(11) $-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.　(12) $\frac{1}{2}$.　(13) $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$.

(14) $(8.2,10.8)$.

三、解答题

(15) $5\pi+\frac{32}{3}$.

(16)(Ⅰ)证明略;(Ⅱ) $\frac{3}{k}$.

(17) $I(t)=\mathrm{e}^{2-t}+t$;$I(t)$的最小值为3.

(18) $\frac{1}{2}$.

(19)证明略.

(20)当 $a=-2$ 时,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解;

当 $a=1$ 时,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-c_1&-c_2\\c_1&c_2\end{pmatrix}$,　c_1,c_2 为任意常数;

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$.

(21)(Ⅰ) $\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$.

(22)(Ⅰ) $f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x},\\0, & \text{其它}.\end{cases}$;(Ⅱ)$U$ 与 X 不相互独立;

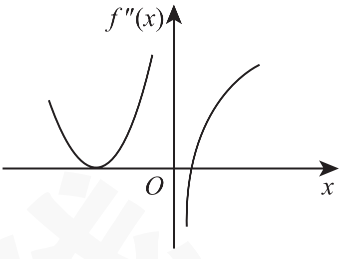
(Ⅲ) $F(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0<z\leqslant 1,\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}z^2+3z-1, & 1<z\leqslant 2,\\ 1, & z>2.\end{cases}$

(23)(Ⅰ) $f_T(t)=\begin{cases}\frac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\0, & \text{其他};\end{cases}$(Ⅱ) $a=\frac{10}{9}$.

2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　)



(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.

(2)设 $y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\dfrac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解,则(　　)

(A)$a=-3,b=2,c=-1$.　　(B)$a=3,b=2,c=-1$.

(C)$a=-3,b=2,c=1$.　　(D)$a=3,b=2,c=1$.

(3)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的(　　)

(A)收敛点,收敛点.　　(B)收敛点,发散点.

(C)发散点,收敛点.　　(D)发散点,发散点.

(4)设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\,dx\,dy=$(　　)

(A)$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$.　　(B)$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$.

(C)$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$.　　(D)$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr$.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$.　　(B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$.　　(D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为(　　)

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　　(B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　(D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7)若 A,B 为任意两个随机事件,则(　　)

(A)$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　　(B)$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C)$P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　　(D)$P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8) 设随机变量 X,Y 不相关，且 $E(X)=2,E(Y)=1,D(X)=3$，则 $E[X(X+Y-2)]=$ (　　)

(A) -3.　　(B) 3.　　(C) -5.　　(D) 5.

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ______.

(10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$ ______.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ______.

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dxdydz$

$=$ ______.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$ ______.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 值.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x)$,$v(x)$可导,利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(Ⅱ)设函数 $u_1(x)$,$u_2(x)$,$\cdots$,$u_n(x)$可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出$f(x)$的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$,终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$,计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(Ⅱ)当 k 为何值时,存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同,并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

2015 年真题参考答案

一、选择题

(1) C.　(2) A.　(3) B.　(4) B.　(5) D.　(6) A.　(7) C.　(8) D.

二、填空题

(9) $-\frac{1}{2}$.　(10) $\frac{\pi^2}{4}$.　(11) $-\mathrm{d}x$.　(12) $\frac{1}{4}$.　(13) $2^{n+1}-2$.　(14) $\frac{1}{2}$.

三、解答题

(15) $a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$.

(16) $f(x)=\frac{8}{4-x}, x\in I$.

(17) 3.

(18) (Ⅰ) 证明略;

(Ⅱ) $f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)\cdots u_{n-1}(x)u_n'(x)$.

(19) $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

(20) (Ⅰ) 证明略;

(Ⅱ) 当 $k=0$ 时,存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同,满足上述条件的所有 $\boldsymbol{\xi}=c\boldsymbol{\alpha}_1-c\boldsymbol{\alpha}_3$, c 为任意非零常数.

(21) (Ⅰ) $a=4, b=5$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

(22) (Ⅰ) Y 的概率分布为 $P\{Y=k\}=\frac{1}{64}(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}, k=2,3,\cdots$;

(Ⅱ) $E(Y)=16$.

(23) (Ⅰ) $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$,其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$;

(Ⅱ) $\hat{\theta}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$.

2014 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A)$y=x+\sin x$.　　(B)$y=x^2+\sin x$.　　(C)$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　　(D)$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

(2)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上(　　)

(A)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$.　　(B)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(C)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant g(x)$.　　(D)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant g(x)$.

(3)设 $f(x,y)$ 是连续函数,则 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$(　　)

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(4)若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$,则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$(　　)

(A)$2\sin x$.　　(B)$2\cos x$.　　(C)$2\pi\sin x$.　　(D)$2\pi\cos x$.

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}=$(　　)

(A)$(ad-bc)^2$.　　(B)$-(ad-bc)^2$.　　(C)$a^2d^2-b^2c^2$.　　(D)$b^2c^2-a^2d^2$.

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　)

(A)必要非充分条件.　　(B)充分非必要条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分也非必要条件.

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(B-A)=$(　　)

(A)0.1.　　(B)0.2.　　(C)0.3.　　(D)0.4.

(8)设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在,X_1 与 X_2 概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$,随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\dfrac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$,随机变量 $Y_2=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$,则(　　)

(A)$E(Y_1)>E(Y_2)$,$D(Y_1)>D(Y_2)$.　　(B)$E(Y_1)=E(Y_2)$,$D(Y_1)=D(Y_2)$.

(C)$E(Y_1)=E(Y_2)$,$D(Y_1)<D(Y_2)$.　　(D)$E(Y_1)=E(Y_2)$,$D(Y_1)>D(Y_2)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点$(1,0,1)$处的切平面方程为______.

(10)设$f(x)$是周期为 4 的可导奇函数,且$f'(x)=2(x-1)$,$x\in[0,2]$,则$f(7)=$______.

(11)微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$______.

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$______.

(13)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是______.

(14)设总体 X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计,则 $c=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定,求$f(x)$的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数$f(u)$具有二阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若$f(0)=0$,$f'(0)=0$,求$f(u)$的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧,计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$,$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$,$\cos a_n-a_n=\cos b_n$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(Ⅱ)证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量 $\widehat{\theta}_n$;

(Ⅲ)是否存在实数 a,使得对任何 $\varepsilon>0$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\widehat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?

2014 年真题参考答案

一、选择题

(1) C.　(2) D.　(3) D.　(4) A.　(5) B.　(6) A.　(7) B.　(8) D.

二、填空题

(9) $2x-y-z-1=0$.　(10) 1.　(11) xe^{2x+1}.　(12) π.　(13) $[-2,2]$.　(14) $\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15) $\frac{1}{2}$.

(16) 极小值为 $f(1)=-2$.

(17) $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

(18) -4π.

(19) 证明略.

(20) (Ⅰ) $(-1,2,3,1)^{T}$;

(Ⅱ) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, c_1,c_2,c_3 为任意常数.

(21) 证明略.

(22) (Ⅰ) $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ \frac{3}{4}y, & 0\leqslant y<1, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}y, & 1\leqslant y<2, \\ 1, & y\geqslant 2. \end{cases}$;

(Ⅱ) $\frac{3}{4}$.

(23) (Ⅰ) $E(X)=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$, $E(X^2)=\theta$;

(Ⅱ) $\widehat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$;

(Ⅲ) 存在实数 $a=\theta$, 使得对任何 $\varepsilon>0$, 都有 $\lim_{n\to\infty}P\{|\widehat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$.

2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq 0$,则(　　)

(A)$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B)$k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C)$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D)$k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

(2)曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为(　　)

(A)$x-y+z=-2$.　　(B)$x+y+z=0$.

(C)$x-2y+z=-3$.　　(D)$x-y-z=0$.

(3)设$f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$,$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$,则$S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$(　　)

(A)$\dfrac{3}{4}$.　　(B)$\dfrac{1}{4}$.　　(C)$-\dfrac{1}{4}$.　　(D)$-\dfrac{3}{4}$.

(4)设 $L_1:x^2+y^2=1$,$L_2:x^2+y^2=2$,$L_3:x^2+2y^2=2$,$L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. 记 $I_i=\oint_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y\,(i=1,2,3,4)$,则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$(　　)

(A)I_1.　　(B)I_2.　　(C)I_3.　　(D)I_4.

(5)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(　　)

(A)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D)矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6)矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为(　　)

(A)$a=0,b=2$.　　(B)$a=0$,b 为任意常数.

(C)$a=2,b=0$.　　(D)$a=2$,b 为任意常数.

(7)设 X_1,X_2,X_3 是随机变量,且 $X_1\sim N(0,1)$,$X_2\sim N(0,2^2)$,$X_3\sim N(5,3^2)$,$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}$ $(i=1,2,3)$,则(　　)

(A)$p_1>p_2>p_3$.　　(B)$p_2>p_1>p_3$.

(C)$p_3>p_1>p_2$.　　(D)$p_1>p_3>p_2$.

(8)设随机变量 $X\sim t(n)$,$Y\sim F(1,n)$,给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$,常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$,则 $P\{Y>c^2\}=$(　　)

(A)α.　　(B)$1-\alpha$.　　(C)2α.　　(D)$1-2\alpha$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=$______.

(10)已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^{x}-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解,则该方程的通解为 $y=$______.

(11)设 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ (t 为参数),则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$______.

(12) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$______.

(13)设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

(14)设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布,a 为常数且大于零,则 $P\{Y\leqslant a+1 \mid Y>a\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$,其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

(16)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0 (n\geqslant 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ)证明 $S''(x)-S(x)=0$;

(Ⅱ)求 $S(x)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点,将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ,Σ 与平面 $z=0$,$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(Ⅰ)求曲面 Σ 的方程;

(Ⅱ)求 Ω 的形心坐标.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅰ)求 Y 的分布函数;

(Ⅱ)求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

2013 年真题参考答案

一、选择题

(1) D.　(2) A.　(3) C.　(4) D.　(5) B.　(6) B.　(7) A.　(8) C.

二、填空题

(9) 1.　(10) $C_1 e^{3x}+C_2 e^{x}-xe^{2x}$.　(11) $\sqrt{2}$.　(12) $\ln 2$.　(13) -1.　(14) $1-e^{-1}$.

三、解答题

(15) $-4\ln 2+8-2\pi$.

(16)(Ⅰ)证明略；

(Ⅱ) $S(x)=2e^{x}+e^{-x}$.

(17) $f(x,y)$ 有唯一极值点 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 且为极小值点，极小值为 $f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=-e^{-\frac{1}{3}}$

(18) 证明略.

(19)(Ⅰ) $x^2+y^2=2z^2-2z+1$；

(Ⅱ) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{7}{5}\right)$.

(20) 当 $a=-1,b=0$ 时，所有矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为 $\begin{pmatrix} c_1+c_2+1 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

(21) 证明略.

(22)(Ⅰ) $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<1, \\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2, \\ 1, & y\geqslant 2; \end{cases}$

(Ⅱ) $\frac{8}{27}$.

(23)(Ⅰ) $\hat{\theta}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；

(Ⅱ) $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$.

2012 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2)设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$(　　)

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B)$(-1)^n(n-1)!$.

(C)$(-1)^{n-1}n!$.　　(D)$(-1)^n n!$.

(3)如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是(　　)

(A)若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(B)若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(C)若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D)若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(4)设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\,(k=1,2,3)$,则有(　　)

(A)$I_1<I_2<I_3$.　　(B)$I_3<I_2<I_1$.　　(C)$I_2<I_3<I_1$.　　(D)$I_2<I_1<I_3$.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为(　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布,则 $P\{X<Y\}=$(　　)

(A)$\frac{1}{5}$.　　(B)$\frac{1}{3}$.　　(C)$\frac{2}{3}$.　　(D)$\frac{4}{5}$.

(8)将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段,则两段长度的相关系数为(　　)

(A)1.　　(B)$\frac{1}{2}$.　　(C)$-\frac{1}{2}$.　　(D)-1.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$,则 $f(x)=$______.

(10)$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$______.

(11)$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$______.

(12)设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$,则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\,dS=$______.

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为______.

(14)设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(AB\mid\overline{C})=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\frac{x^2}{2}\quad(-1<x<1)$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}(0\leqslant t<\frac{\pi}{2})$,其中函数 $f(t)$ 具有连续导数,且 $f(0)=0$, $f'(t)>0\ (0<t<\frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1,求函数 $f(t)$ 的表达式,并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19)(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$,再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段,计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$,其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(Ⅰ)求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$;

(Ⅱ)设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本,求 σ^2 的最大似然估计量 $\widehat{\sigma^2}$;

(Ⅲ)证明 $\widehat{\sigma^2}$ 为 σ^2 的无偏估计量.

2012 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)A.　(3)B.　(4)D.　(5)C.　(6)B.　(7)A.　(8)D.

二、填空题

(9)e^x.　(10)$\frac{\pi}{2}$.　(11)$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.　(12)$\frac{\sqrt{3}}{12}$.　(13)2.　(14)$\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15)证明略.

(16)极大值为 $e^{-\frac{1}{2}}$,极小值为 $-e^{-\frac{1}{2}}$.

(17)收敛域为$(-1,1)$,和函数为 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & -1<x<1,\text{且 } x\neq 0,\\ 3, & x=0.\end{cases}$

(18)$f(t)=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t,0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$;面积为$\frac{\pi}{4}$.

(19)$I=\frac{\pi}{2}-4$.

(20)(Ⅰ)$|\boldsymbol{A}|=1-a^4$;

(Ⅱ)$a=-1$,通解为 $x=c(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$,其中 c 为任意常数.

(21)(Ⅰ)$a=-1$;

(Ⅱ)$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,二次型 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_2^2+6y_3^2$.

(22)(Ⅰ)$P\{X=2Y\}=\frac{1}{4}$;

(Ⅱ)$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=-\frac{2}{3}$.

(23)(Ⅰ)$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\,\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},-\infty<z<+\infty$;

(Ⅱ)$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$;

(Ⅲ)证明略.

2011 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　)

(A)$(1,0)$.　　(B)$(2,0)$.　　(C)$(3,0)$.　　(D)$(4,0)$.

(2)设数列$\{a_n\}$单调减少,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为(　　)

(A)$(-1,1]$.　　(B)$[-1,1)$.　　(C)$[0,2)$.　　(D)$(0,2]$.

(3)设函数$f(x)$具有二阶连续导数,且$f(x)>0$,$f'(0)=0$,则函数$z=f(x)\ln f(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A)$f(0)>1,f''(0)>0$.　　(B)$f(0)>1,f''(0)<0$.

(C)$f(0)<1,f''(0)>0$.　　(D)$f(0)<1,f''(0)<0$.

(4)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$,$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$,$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为(　　)

(A)$I<J<K$.　　(B)$I<K<J$.　　(C)$J<I<K$.　　(D)$K<J<I$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$(　　)

(A)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B)$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为(　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(7)设 $F_1(x)$与 $F_2(x)$为两个分布函数,其相应的概率密度$f_1(x)$与$f_2(x)$是连续函数,则必为概率密度的是(　　)

(A)$f_1(x)f_2(x)$.　　(B)$2f_2(x)F_1(x)$.

(C)$f_1(x)F_2(x)$.　　(D)$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $E(X)$与 $E(Y)$存在,记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$,则 $E(UV)=$(　　)

(A)$E(U)\cdot E(V)$.　　(B)$E(X)\cdot E(Y)$.

(C)$E(U)\cdot E(Y)$.　　(D)$E(X)\cdot E(V)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$的弧长 $s=$______.

(10)微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$______.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ______.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$ ______.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$ ______.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ______.

三、解答题（本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)（本题满分 10 分）

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明:对任意的正整数 n,都有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$成立;

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数,且$f(1,y)=0$, $f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,计算二重积分$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知,$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(Ⅰ)求参数 σ^2 的最大似然估计$\widehat{\sigma^2}$;

(Ⅱ)计算 $E(\widehat{\sigma^2})$ 和 $D(\widehat{\sigma^2})$.

2011 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)C.　(3)A.　(4)B.　(5)D.　(6)D.　(7)D.　(8)B.

二、填空题

(9)$\ln(\sqrt{2}+1)$.　(10)$e^{-x}\sin x$.　(11)4.　(12)π.　(13)1.　(14)$\mu\sigma^2+\mu^3$.

三、解答题

(15)$e^{-\frac{1}{2}}$.

(16)$f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$.

(17)当 $k\leqslant 1$ 时,原方程有 1 个实根;当 $k>1$ 时,原方程有 3 个不同的实根.

(18)证明略.

(19)a.

(20)(Ⅰ)$a=5$;

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21)(Ⅰ)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,0$,对应的特征向量依次为 $c_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}},c_2(1,0,1)^{\mathrm{T}},c_3(0,1,0)^{\mathrm{T}}$,其中 c_1,c_2,c_3 均为任意非零常数;

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

(22)(Ⅰ)

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

;

(Ⅱ)

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

;

(Ⅲ)0.

(23)(Ⅰ)$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$;

(Ⅱ)$E(\widehat{\sigma^2})=\sigma^2,D(\widehat{\sigma^2})=\frac{2\sigma^4}{n}$.

2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=(\qquad)$

(A)1. (B)e. (C)e^{a-b}. (D)e^{b-a}.

(2)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ (　　)

(A)x. (B)z. (C)$-x$. (D)$-z$.

(3)设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性(　　)

(A)仅与 m 的取值有关.
(B)仅与 n 的取值有关.
(C)与 m,n 的取值都有关.
(D)与 m,n 的取值都无关.

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=(\qquad)$

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.
(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.
(C) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.
(D) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则(　　)

(A)秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.
(B)秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.
(C)秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.
(D)秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.
(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.
(D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=(\qquad)$

(A)0. (B)$\dfrac{1}{2}$. (C)$\dfrac{1}{2}-e^{-1}$. (D)$1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度,若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0, \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases} \quad (a>0,b>0)$$

为概率密度,则 a,b 应满足(　　)

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.　　(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u, \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ______.

(10) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$ ______.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\ (x\in[-1,1])$,起点是 $(-1,0)$,终点为 $(1,0)$,则曲线积分 $\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$ ______.

(12) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$,则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ______.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$. 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间的维数为 2,则 $a=$ ______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!},k=0,1,2,\cdots$,则 $E(X^2)=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C,并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$,其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

(Ⅰ)求 λ,a;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

,

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数($i=1,2,3$). 试求常数 a_1,a_2,a_3,使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

2010 年真题参考答案

一、选择题

(1)C.　(2)B.　(3)D.　(4)D.　(5)A.　(6)D.　(7)C.　(8)A.

二、填空题

(9)0.　(10)-4π.　(11)0.　(12)$\frac{2}{3}$.　(13)6.　(14)2.

三、解答题

(15)$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-(x^2+2x)\mathrm{e}^x$.

(16)$f(x)$的单调增加区间为$(-1,0)$和$(1,+\infty)$(或者写为$[-1,0]$和$[1,+\infty)$);

$f(x)$的单调减少区间为$(-\infty,-1)$和$(0,1)$(或者写为$(-\infty,-1]$和$[0,1]$);

$f(x)$的极小值为$f(\pm1)=0$,极大值为$f(0)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(17)(Ⅰ)$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$;(Ⅱ)0.

(18)收敛域为$[-1,1]$;和函数为$x\arctan x(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(19)点 P 的轨迹 C 为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ y=2z,\end{cases}$或者$\begin{cases}x^2+\frac{3}{4}y^2=1,\\ y=2z;\end{cases}$曲面积分为 $I=2\pi$.

(20)(Ⅰ)$\lambda=-1,a=-2$;

(Ⅱ)$\boldsymbol{x}=c(1,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}$,其中 c 为任意常数.

(21)(Ⅰ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

(Ⅱ)证明略.

(22)$A=\frac{1}{\pi}$;$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2},-\infty<y<+\infty$.

(23)$a_1=0,a_2=a_3=\frac{1}{n}$;$D(T)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}$.

2009 年全国硕士研究生招生考试试题

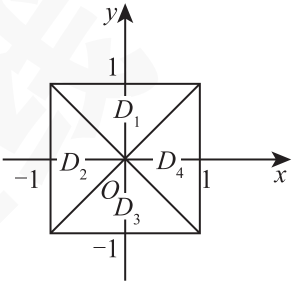
一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量,则(　　)

(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

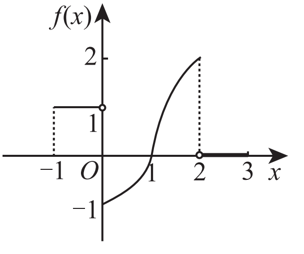
(C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

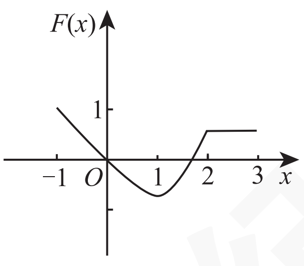
(2)如图,正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$,$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$(　　)



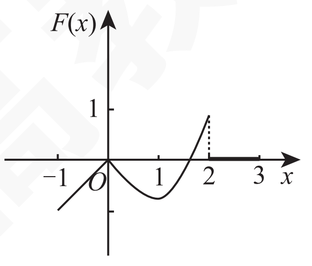
(A)I_1.　　(B)I_2.　　(C)I_3.　　(D)I_4.

(3)设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如右图所示,则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)

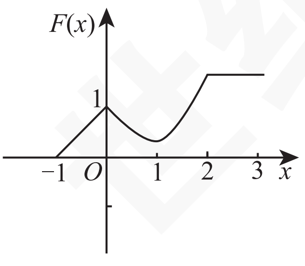




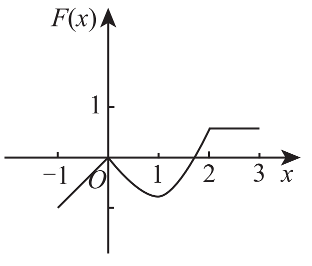
(A)



(B)



(C)



(D)

(4)设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,则(　　)

(A)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛.　　(B)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 发散.

(C)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛.　　(D)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 发散.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基,则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(6)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,若 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数,则 $E(X)=$(　　)

(A)0.　(B)0.3.　(C)0.7.　(D)1.

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$z=f(x,xy)$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______.

(10)若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$,则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$______.

(11)已知曲线 $L:y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$,则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$______.

(12)设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______.

(13)若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为______.

(14)设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差,若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ)求 S_1 及 S_2 的方程;

(Ⅱ)求 S_1 与 S_2 之间的立体的体积.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次,每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求 $P\{X=1\mid Z=0\}$;

(Ⅱ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0,\\0, & 其他,\end{cases}$ 其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求参数 λ 的矩估计量;

(Ⅱ)求参数 λ 的最大似然估计量.

2009 年真题参考答案

一、选择题

(1) A.　(2) A.　(3) D.　(4) C.　(5) A.　(6) B.　(7) C.　(8) B.

二、填空题

(9) $xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$.　(10) $-xe^x+x+2$.　(11) $\frac{13}{6}$.　(12) $\frac{4}{15}\pi$.　(13) 2.　(14) -1.

三、解答题

(15) 极小值 $f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

(16) $S_1=\frac{1}{2}, S_2=1-\ln 2$.

(17) (Ⅰ) 椭球面 S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$，圆锥面 S_2 的方程为 $y^2+z^2=\frac{1}{4}(x-4)^2$；

(Ⅱ) $V=\pi$.

(18) 证明略.

(19) $I=4\pi$.

(20) (Ⅰ) $\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+c\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$，或 $\boldsymbol{\xi}_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c,c\right)^{\mathrm{T}}$，$c$ 为任意常数.

$\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}+c_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+c_2(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，或 $\boldsymbol{\xi}_3=\left(-\frac{1}{2}-c_1,c_1,c_2\right)^{\mathrm{T}}$，$c_1,c_2$ 为任意常数.

(Ⅱ) 证明略.

(21) (Ⅰ) $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$；(Ⅱ) $a=2$.

(22) (Ⅰ) $P\{X=1\mid Z=0\}=\frac{4}{9}$；

(Ⅱ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

(23) (Ⅰ) λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$；(Ⅱ) λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$.