2021 全国硕士研究生入学统一考试

数　学　(三)

(科目代码:303)

一、选择题(1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 连续且取极大值　　(B) 连续且取极小值.

(C) 可导且导数为零　　(D) 可导且导数不为零

(3) 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有两个零点,则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是(　　).

(A) $(e,+\infty)$　　(B) $(0,e)$

(C) $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

(4) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$(　　).

(A) $dx+dy$　　(B) $dx-dy$

(C) dy　　(D) $-dy$

(5) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为(　　).

(A) 2,0　　(B) 1,1　　(C) 2,1　　(D) 1,2

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 表示任意常数,则线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{X}=$(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$

(7) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若存在下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

(8) 设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是(　　).

(A) 若 $P(A\mid B)=P(A)$，则 $P(A\mid\overline{B})=P(A)$

(B) 若 $P(A\mid B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}\mid\overline{B})>P(\overline{A})$

(C) 若 $P(A\mid B)>P(A\mid\overline{B})$，则 $P(A\mid B)>P(A)$

(D) 若 $P(A\mid A\cup B)>P(\overline{A}\mid A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$

(9) 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则(　　).

(A) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$　　(B) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$　　(D) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(10) 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=\dfrac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值 1,3,2,2,1,3,1,2 可得 θ 的最大似然估计值为(　　).

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{3}{8}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{5}{8}$

二、填空题(11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在题中的横线上.)

(11) 若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$________.

(12) $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$________.

(13) 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(14) 差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为 $y_t=$________.

(15) 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

(16) 甲，乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一个球，令 X，Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为________.

三、解答题(17 ～ 22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)（本题满分 10 分）

已知$\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在，求 a 的值.

(18)（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

(19)（本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\,dx\,dy$.

(20)（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 的满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

（Ⅰ）求 $y_n(x)$；

（Ⅱ）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(21)（本题满分 12 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

（Ⅰ）求 X 的概率密度；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度；

（Ⅲ）求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.