2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = (\quad)$

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

(2) 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 则 k 的取值范围是(　　)

(A)$(-\infty, -4)$. (B)$(4, +\infty)$.

(C)$\{-4, 4\}$. (D)$(-4, 4)$.

(3) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$, 则 a、b、c 依次为(　　)

(A)1, 0, 1. (B)1, 0, 2. (C)2, 1, 3. (D)2, 1, 4.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量, 则 $r(\boldsymbol{A}^*) = (\quad)$

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$, 且 $|\boldsymbol{A}| = 4$, 则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为(　　)

(A)$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B)$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C)$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D)$-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是(　　)

(A)$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B)$P(AB) = P(A)P(B)$.

(C)$P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$. (D)$P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$(　　)

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right]^n =$ ______.

(10) 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为______.

(11) 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1 + t^4}\,\mathrm{d}t$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______.

(12) 以 P_A、P_B 分别表示 A、B 两个商品的价格，设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - P_A^2 - P_A P_B + 2P_B^2$，则当 $P_A = 10$，$P_B = 20$ 时，商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA} > 0) =$ ______.

(13) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，若线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $a =$ ______.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，$E(X)$ 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

15 - 17 题扫我听课

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数，函数 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$. 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(Ⅰ) 求 $y(x)$；

(Ⅱ) 设平面区域 $D = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

(18)（本题满分 10 分）

求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

18 - 19 题扫我听课

(19)（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx(n=0,1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

(20)（本题满分 11 分）

已知向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$ 与 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价，求 a 的取值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

20 - 23 题扫我听课

(21)（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

（Ⅰ）求 x,y；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度；

（Ⅱ）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（Ⅲ）X 与 Z 是否相互独立？

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）求 σ^2 的最大似然估计量.

2019 年真题参考答案

一、选择题

(1) C.　(2) D.　(3) D.　(4) B.　(5) A.　(6) C.　(7) C.　(8) A.

二、填空题

(9) e^{-1}.　(10) $(\pi, -2)$.　(11) $\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$.　(12) 0.4.　(13) 1.　(14) $\frac{2}{3}$.

三、解答题

(15) $f'(x)=\begin{cases} e^{x}(x+1), & x<0, \\ 2e^{2x\ln x}(\ln x+1), & x>0. \end{cases}$

$x=-1$ 和 $x=\frac{1}{e}$ 是 $f(x)$ 的极小值点,极小值分别为 $f(-1)=1-e^{-1}$ 和 $f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$;$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,极大值为 $f(0)=1$.

(16) $1-3f''_{11}(x+y, x-y)-f''_{22}(x+y, x-y)$.

(17) (Ⅰ) $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.　(Ⅱ) $\frac{1}{2}\pi(e^4-e)$.

(18) $\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$.

(19) (Ⅰ) 证明略.　(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

(20) 当 $a\neq -1$ 时,向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价. 当 $a=1$ 时,$\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k 为任意常数;当 $a\neq \pm 1$ 时,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21) (Ⅰ) $x=3, y=-2$.

(Ⅱ) 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(22) (Ⅰ) Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases} pe^{z}, & z\leqslant 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z>0. \end{cases}$

(Ⅱ) 当 $p=\frac{1}{2}$ 时,X 与 Z 不相关.

(Ⅲ) X 与 Z 不相互独立.

(23) (Ⅰ) $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(Ⅱ) σ^2 的最大似然估计量为 $\widehat{\sigma^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$.

2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$,则(　　)

(A) 当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(3) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,\mathrm{d}x$,则(　　)

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.

(4) 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导,其中 Q 为产量.若产量为 Q_0 时平均成本最小,则(　　)

(A) $C'(Q_0)=0$.　　(B) $C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$.　　(D) $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,且 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0.6$,则 $P\{X<0\}=$(　　)

(A) 0.2.　　(B) 0.3.　　(C) 0.4.　　(D) 0.5.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本.令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$, $S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$,则(　　)

(A) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$.　　(B) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$.

(C) $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^{*}} \sim t(n)$.　　　　(D) $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^{*}} \sim t(n-1)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是______.

(10) $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=$______.

(11) 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解为______.

(12) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$,且 $f(0)=2$,则 $f(1)=$______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的向量组.若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$,则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

(14) 随机事件 A,B,C 相互独立,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$,则 $P(AC\mid A\cup B)=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$,求 a,b.

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成.计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$.

(17)(本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(18)(本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$,求 a_n.

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \cdots)$.证明 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(20)(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + a x_3)^2$,其中 a 是参数.

(Ⅰ)求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(Ⅱ)求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

（21）（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 a；

（Ⅱ）求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布.令 $Z=XY$.

（Ⅰ）求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；

（Ⅱ）求 Z 的概率分布.

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

（Ⅰ）求 $\hat{\sigma}$；

（Ⅱ）求 $E(\hat{\sigma})$，$D(\hat{\sigma})$.

2018 年真题参考答案

一、选择题

(1) D.　(2) D.　(3) C.　(4) D.　(5) A.　(6) A.　(7) A.　(8) B.

二、填空题

(9) $y = 4x - 3$.　(10) $e^x \arcsin\sqrt{1 - e^{2x}} - \sqrt{1 - e^{2x}} + C$.　(11) $y_x = C2^x - 5$.　(12) $2e$.

(13) 2.　(14) $\frac{1}{3}$.

三、解答题

(15) $a = 1,\ b = 1$.

(16) $\frac{\sqrt{3}}{32}(\pi - 2)$.

(17) 三个图形的面积之和存在最小值，最小值为$\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

(18) $a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k 4^k}{(2k)!} - 2k - 1, & n = 2k, \\ 2k + 2, & n = 2k + 1, \end{cases}$ 其中 k 为非负整数.

(19) 证明略. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(20) (Ⅰ) 当 $a \neq 2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$；当 $a = 2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} = k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

(Ⅱ) 当 $a \neq 2$ 时，f 的规范形为 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$；当 $a = 2$ 时，f 的规范形为 $f = z_1^2 + z_2^2$.

(21) (Ⅰ) $a = 2$.

(Ⅱ) 满足 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -6k_1 + 3 & -6k_2 + 4 & -6k_3 + 4 \\ 2k_1 - 1 & 2k_2 - 1 & 2k_3 - 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数，且 $k_2 \neq k_3$.

(22) (Ⅰ) $\mathrm{Cov}(X,Z) = \lambda$.

(Ⅱ) Z 的分布律为 $P\{Z = i\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, & i > 0, \\ e^{-\lambda}, & i = 0, \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^{-i} e^{-\lambda}}{(-i)!}, & i < 0. \end{cases}$

(23) (Ⅰ) σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |X_i|}{n}$.

(Ⅱ) $E(\hat{\sigma}) = \sigma,\ D(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

2017 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.　　(C) $ab=0$.　　(D) $ab=2$.

(2) 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是(　　)

(A) $(0,0)$.　　(B) $(0,3)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(1,1)$.

(3) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则(　　)

(A) $f(1)>f(-1)$.　　(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$.　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$.

(4) 若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛,则 $k=$(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) -1.　　(D) -2.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则(　　)

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(6) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(7) 设 A,B,C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立,则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是(　　)

(A) A 与 B 相互独立.　　(B) A 与 B 互不相容.

(C) AB 与 C 相互独立.　　(D) AB 与 C 互不相容.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,则下列结论中不正确的是(　　)

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$______.

(10) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$______.

(11) 设生产某产品的平均成本为$\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$,其中产量为 Q,则边际成本为______.

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $\mathrm{d}f(x,y)=y\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$, $f(0,0)=0$,则 $f(x,y)=$______.

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的3维列向量组,则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\frac{1}{2}$,$P\{X=1\}=a$,$P\{X=3\}=b$,若 $E(X)=0$,则 $D(X)=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

(17)(本题满分 10 分)

求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

(18)(本题满分 10 分)

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间$(0,1)$内有实根,确定常数 k 的取值范围.

(19)(本题满分 10 分)

若 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$,$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ)证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

(Ⅱ)证明$(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$,并求 $S(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量X,Y相互独立,且X的概率分布为$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$的概率密度为$f(y)$

$$=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{Y\leqslant E(Y)\}$;

(Ⅱ)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度,用该天平对一物体的质量做 n 次测量,该物体的质量 μ 是已知的,设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|\ (i=1,2,\cdots,n)$,利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(Ⅰ)求 Z_1 的概率密度;

(Ⅱ)利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(Ⅲ)求 σ 的最大似然估计量.

2017 年真题参考答案

一、选择题

(1) A.　(2) D.　(3) C.　(4) C.　(5) A.　(6) B.　(7) C.　(8) B.

二、填空题

(9) $\frac{\pi^3}{2}$.　(10) $\left(C+\frac{1}{2}t\right)2^t$.　(11) $1+e^{-Q}-Qe^{-Q}$.　(12) xye^y.　(13) 2.　(14) $\frac{9}{2}$.

三、解答题

(15) $\frac{2}{3}$.

(16) $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{16}$.

(17) $\frac{1}{4}$.

(18) $\left(\frac{1}{\ln 2}-1,\frac{1}{2}\right)$.

(19) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) 证明略. $S(x)=\frac{e^{-x}}{1-x},\ x\in(-1,1)$.

(20) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $k(1,2,-1)^{T}+(1,1,1)^{T}$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解,其中 k 为任意常数.

(21) $a=2$, $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{Q}^{T}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(22) (Ⅰ) $\frac{4}{9}$.

(Ⅱ) $f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ z-2, & 2<z<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23) (Ⅰ) $f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

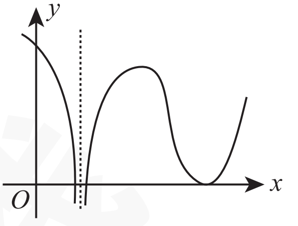
(Ⅱ) $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\overline{Z}$.

(Ⅲ) $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

2016 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则(   )



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(2) 已知函数 $f(x, y)=\dfrac{e^x}{x-y}$,则(   )

(A) $f'_x-f'_y=0$.   (B) $f'_x+f'_y=0$.   (C) $f'_x-f'_y=f$.   (D) $f'_x+f'_y=f$.

(3) 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy\ (i=1,2,3)$,其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\},\quad D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 1\},$$

则(   )

(A) $J_1<J_2<J_3$.   (B) $J_3<J_1<J_2$.   (C) $J_2<J_3<J_1$.   (D) $J_2<J_1<J_3$.

(4) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ (k 为常数)(   )

(A) 绝对收敛.   (B) 条件收敛.   (C) 发散.   (D) 收敛性与 k 有关.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是(   )

(A) $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.   (B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$ 相似.   (D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2,则(   )

(A) $a>1$.   (B) $a<-2$.   (C) $-2<a<1$.   (D) $a=1$ 或 $a=-2$.

(7) 设 A,B 为两个随机事件,且 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$,如果 $P(A\mid B)=1$,则(   )

(A) $P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$.   (B) $P(A\mid\overline{B})=0$.   (C) $P(A\cup B)=1$.   (D) $P(B\mid A)=1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(1,4)$,则 $D(XY)=$(   )

(A) 6.   (B) 8.   (C) 14.   (D) 15.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ______.

(10) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$______.

(11) 设函数$f(u,v)$可微，$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，则$\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$______.

(12) 设$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant 1,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}$，则$\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(13) 行列式$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$______.

(14) 设袋中有红、白、黑球各1个，从中有放回地取球，每次取1个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为4的概率为______.

三、解答题(本题共9小题，共94分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16)(本题满分10分)

设某商品的最大需求量为1 200件，该商品的需求函数$Q=Q(p)$，需求弹性$\eta=\frac{p}{120-p}$ $(\eta>0)$，p为单价(万元).

(Ⅰ)求需求函数的表达式；

(Ⅱ)求$p=100$万元时的边际收益，并说明其经济意义.

(17)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$,求$f'(x)$,并求$f(x)$的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$连续,且满足$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$,求$f(x)$.

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$的收敛域及和函数.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$,且方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$无解.

(Ⅰ)求a的值;

(Ⅱ)求方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 A^{99};

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$.记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布,令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(Ⅰ)写出 (X,Y) 的概率密度;

(Ⅱ)问 U 与 X 是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数,X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本,令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(Ⅰ)求 T 的概率密度;

(Ⅱ)确定 a,使得 $E(aT)=\theta$.

2016 年真题参考答案

一、选择题

(1)B. (2)D. (3)B. (4)A. (5)C. (6)C. (7)A. (8)C.

二、填空题

(9)6. (10)$\sin 1-\cos 1$. (11)$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$. (12)$\frac{1}{3}-\frac{2}{3\mathrm{e}}$.

(13)$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$. (14)$\frac{2}{9}$.

三、解答题

(15) $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

(16) (Ⅰ)$Q(p)=1\,200-10p$.

(Ⅱ)当 $p=100$ 万元时,边际收益为 80 万元. 其经济意义为:当 $p=100$ 万元,$Q=200$ 件时,销售第 201 件商品所得的收益为 80 万元.

(17) $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

(18) $f(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2}$.

(19) 和函数 $s(x)=\begin{cases}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln(1-x^2), & x\in(-1,1),\\ 2\ln 2, & x=\pm 1.\end{cases}$ 收敛域为$[-1,1]$.

(20) (Ⅰ)$a=0$. (Ⅱ)通解为 $k(0,1,-1)^{\mathrm{T}}+(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

(21) (Ⅰ)$\boldsymbol{A}^{99}=\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2$.

(22) (Ⅰ)$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1, x^2<y<\sqrt{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅱ)U 与 X 不相互独立.理由见解析.

(Ⅲ)$F(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0<z\leqslant 1,\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}z^2+3z-1, & 1<z\leqslant 2,\\ 1, & z>2.\end{cases}$

(23) (Ⅰ)$f_T(t)=\begin{cases}\frac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ (Ⅱ)当 $a=\frac{10}{9}$ 时,$E(aT)=\theta$.

2015 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设$\{x_n\}$是数列.下列命题中不正确的是(　　)

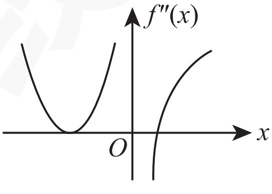
(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(2) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示,则曲线$y=f(x)$的拐点个数为(　　)



(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(3) 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$,函数$f(x,y)$在$D$上连续,则$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=$(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

(C) $2\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\,dy$.

(D) $2\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

(4) 下列级数中发散的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(5) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合$\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为(　　)

(A) $a\notin\Omega$, $d\notin\Omega$.　　(B) $a\notin\Omega$, $d\in\Omega$.

(C) $a\in\Omega$, $d\notin\Omega$.　　(D) $a\in\Omega$, $d\in\Omega$.

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.若$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为(　　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则(　　)

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C) $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　(D) $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$(　　)

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.　(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.　(D) $mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$______.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$. 若 $\varphi(1)=1$, $\varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$______.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定,则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$______.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解,且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3,则 $y(x)=$______.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$______.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,则 $P\{XY-Y<0\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$, $g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,\ y\geqslant x^2\}$.

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润最大化,厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量, p 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性($\eta > 0$).

(Ⅰ)证明定价模型为 $p = \dfrac{MC}{1 - \dfrac{1}{\eta}}$;

(Ⅱ)若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1\ 600 + Q^2$,需求函数为 $Q = 40 - p$,试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零.若对任意的 $x_0 \in I$,曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4,且 $f(0) = 2$,求 $f(x)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设函数 $u(x)$,$v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(Ⅱ)设函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$ 的求导公式.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 a, b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ)求 Y 的概率分布;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

2015 年真题参考答案

一、选择题

(1) D.　(2) C.　(3) B.　(4) C.　(5) D.　(6) A.　(7) C.　(8) B.

二、填空题

(9) $-\frac{1}{2}$.　(10) 2.　(11) $-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$.　(12) $2e^{x}+e^{-2x}$.　(13) 21.　(14) $\frac{1}{2}$.

三、解答题

(15) $a=-1,\ b=-\frac{1}{2},\ k=-\frac{1}{3}$.

(16) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$.

(17) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) 30.

(18) $f(x)=\frac{8}{4-x},\ x\in I$.

(19) 证明略.

(20) (Ⅰ) $a=0$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

(21) (Ⅰ) $a=4,\ b=5$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(22) (Ⅰ) Y 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=\frac{1}{64}(k-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2},\quad k=2,3,4,\cdots.$$

(Ⅱ) 16.

(23) (Ⅰ) $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

(Ⅱ) $\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$.

2014 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且 $a \neq 0$,则当 n 充分大时有(　　)

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.　　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$.　　(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$.　　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$.

(2) 下列曲线中有渐近线的是(　　)

(A) $y = x + \sin x$.　　(B) $y = x^2 + \sin x$.　　(C) $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$.　　(D) $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$.

(3) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.当 $x \to 0$ 时,若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量,则下列选项中错误的是(　　)

(A) $a = 0$.　　(B) $b = 1$.　　(C) $c = 0$.　　(D) $d = \dfrac{1}{6}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上(　　)

(A) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$.　　(B) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant g(x)$.　　(D) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ (　　)

(A) $(ad - bc)^2$.　　(B) $-(ad - bc)^2$.　　(C) $a^2d^2 - b^2c^2$.　　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(　　)

(A) 必要非充分条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B) = 0.5$,$P(A - B) = 0.3$,则 $P(B - A) =$ (　　)

(A) 0.1.　　(B) 0.2.　　(C) 0.3.　　(D) 0.4.

(8) 设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,则统计量 $S = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从的分布为(　　)

(A) $F(1,1)$.　　(B) $F(2,1)$.　　(C) $t(1)$.　　(D) $t(2)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$(P 为商品的价格),则该商品的边际收益为______.

(10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域,则 D 的面积为______.

(11) 设$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$,则 $a =$ ______.

(12) 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} - \mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x =$ ______.

(13) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是______.

(14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.若 $E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) = \theta^2$,则 $c =$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1\right) - t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x,y)\mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$,计算$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{x + y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数,且 $z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x.$$

若 $f(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$.证明:

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$, $x\in[a,b]$;

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$.在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 的概率分布相同,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$,$P\{X=1\}=\frac{2}{3}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求(X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

2014 年真题参考答案

一、选择题

(1) A.　(2) C.　(3) D.　(4) D.　(5) B.　(6) A.　(7) B.　(8) C.

二、填空题

(9) $20-Q$.　(10) $\frac{3}{2}-\ln 2$.　(11) $\frac{1}{2}$.　(12) $\frac{e-1}{2}$.　(13) $[-2,2]$.　(14) $\frac{2}{5n}$.

三、解答题

(15) $\frac{1}{2}$.

(16) $-\frac{3}{4}$.

(17) $f(u)=\frac{1}{16}e^{4u}-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}$.

(18) 和函数 $s(x)=\frac{3-x}{(1-x)^3}$,收敛域为$(-1,1)$.

(19) 证明略.

(20) (Ⅰ) $(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

(21) 证明略.

(22) (Ⅰ) $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ \frac{3}{4}y, & 0\leqslant y<1, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}y, & 1\leqslant y<2, \\ 1, & y\geqslant 2. \end{cases}$

(Ⅱ) $\frac{3}{4}$.

(23) (Ⅰ) (X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(Ⅱ) $\frac{4}{9}$.

2013 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小量,则下列式子中错误的是(   )

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.   (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.   (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为(   )

(A) 0.   (B) 1.   (C) 2.   (D) 3.

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分.记 $I_k = \iint\limits_{D_k} (y - x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k = 1, 2, 3, 4)$,则(   )

(A) $I_1 > 0$.   (B) $I_2 > 0$.   (C) $I_3 > 0$.   (D) $I_4 > 0$.

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列,下列选项正确的是(   )

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛,则 $a_n > a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则(   )

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为(   )

(A) $a = 0,\ b = 2$.   (B) $a = 0$,b 为任意常数.

(C) $a = 2,\ b = 0$.   (D) $a = 2$,b 为任意常数.

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量,且 $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,2^2)$, $X_3 \sim N(5,3^2)$, $p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}$ $(i = 1,2,3)$,则(   )

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.   (B) $p_2 > p_1 > p_3$.

(C) $p_3 > p_1 > p_2$.   (D) $p_1 > p_3 > p_2$.

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=$ (　　)

(A) $\frac{1}{12}$.　　(B) $\frac{1}{8}$.　　(C) $\frac{1}{6}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点(1,0)处有公共切线,则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ ______.

(10) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ______.

(11) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ______.

(12) 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ ______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$,则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______.

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,则 $E(Xe^{2X})=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小,求 n 与 a 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a\ (a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积.若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

设生产某商品的固定成本为 60 000 元,可变成本为 20 元/件,价格函数为 $p=60-\dfrac{Q}{1\ 000}$(p 是单价,单位:元;Q 是销量,单位:件).已知产销平衡,求:

(Ⅰ)该商品的边际利润;

(Ⅱ)当 $p=50$ 时的边际利润,并解释其经济意义;

(Ⅲ)使得利润最大的定价 p.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.证明:

(Ⅰ)存在 $a>0$,使得 $f(a)=1$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的 a,存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$.当 a, b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型f对应的矩阵为$2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$正交且均为单位向量,证明$f$在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设(X,Y)是二维随机变量,X的边缘概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\0, & 其他.\end{cases}$在给定$X=x$ $(0<x<1)$的条件下Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅰ)求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$;

(Ⅱ)求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$;

(Ⅲ)求$P\{X>2Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\0, & 其他,\end{cases}$$

其中θ为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本.

(Ⅰ)求θ的矩估计量;

(Ⅱ)求θ的最大似然估计量.

2013 年真题参考答案

一、选择题

(1) D. (2) C. (3) B. (4) D. (5) B. (6) B. (7) A. (8) C.

二、填空题

(9) -2. (10) $2(1-\ln 2)$. (11) $\ln 2$. (12) $(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$. (13) -1. (14) $2e^2$.

三、解答题

(15) $n=2$, $a=7$.

(16) $a=7\sqrt{7}$.

(17) $\dfrac{416}{3}$.

(18) (Ⅰ) $L'(Q)=40-\dfrac{Q}{500}$.

(Ⅱ) 当 $p=50$ 时,边际利润为 20.其经济意义为:当 $p=50$ 时,销售第 10 001 件商品时所得的利润为 20 元.

(Ⅲ) 当定价为 40 元时,利润最大.

(19) 证明略.

(20) $a=-1,b=0$ 时,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

(21) 证明略.

(22) (Ⅰ) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x,0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅱ) $f_Y(y)=\begin{cases} -9y^2\ln y, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅲ) $\dfrac{1}{8}$.

(23) (Ⅰ) $\hat{\theta}=\overline{X}$.

(Ⅱ) $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$.

2012 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$(　　)

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

(3) 设函数 $f(t)$ 连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)r\,dr=$(　　)

(A) $\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$.　　(B) $\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$.

(C) $\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$.　　(D) $\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dx$.

(4) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛,则(　　)

(A) $0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\dfrac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$.

(C) $1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2}$.　　(D) $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布,则 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=$(　　)

(A) $\dfrac{1}{4}$.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{\pi}{8}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$.

(8) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本,则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为(　　)

(A) $N(0,1)$.　　(B) $t(1)$.　　(C) $\chi^2(1)$.　　(D) $F(1,1)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ______.

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$ ______.

(11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$ ______.

(12) 由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=3$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$ ______.

(14) 设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\dfrac{1}{2}$,$P(C)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(AB|\overline{C})=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$,$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

(17)(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000(万元).设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件) 和 y(件),且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$(万元/件) 与

$6+y$(万元/件).

(Ⅰ)求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元);

(Ⅱ)当总产量为 50 件时,甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小?求最小总成本;

(Ⅲ)求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本,并解释其经济意义.

(18)(本题满分 10 分)

证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x \geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从参数为 1 的指数分布.记 $U=\max\{X,Y\}$,$V=\min\{X,Y\}$.

(Ⅰ)求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(Ⅱ)求 $E(U+V)$.

2012 年真题参考答案

一、选择题

(1)C. (2)A. (3)B. (4)D. (5)C. (6)B. (7)D. (8)B.

二、填空题

(9)$e^{-\sqrt{2}}$. (10) $\frac{1}{e}$. (11) $2dx - dy$. (12) $4\ln 2$. (13) -27. (14) $\frac{3}{4}$.

三、解答题

(15) $\frac{1}{12}$.

(16) $\frac{1}{2}$.

(17) (Ⅰ)$C(x,y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2} + 10\ 000$.

(Ⅱ)若总产量为 50 件,则当甲种产品的产量为 24 件,乙种产品的产量为 26 件时,总成本最小,最小成本为 $C(24,26) = 11\ 118$ 万元.

(Ⅲ)当总产量为 50 件且总成本最小时,甲种产品的边际成本为 32 万元. 其经济意义为:当甲、乙两种产品的产量分别为24,26件时,若甲种产品的产量再增加1件,则总成本增加32万元,即当乙种产品的产量为 26 件时,生产第 25 件甲种产品需要 32 万元.

(18) 证明略.

(19) (Ⅰ)$f(x) = e^x$.

(Ⅱ)$(0,0)$.

(20) (Ⅰ)$|\boldsymbol{A}| = 1 - a^4$.

(Ⅱ)$a = -1$ 时,方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,其通解为 $k(1,1,1,1)^T + (0,-1,0,0)^T$,其中 k 为任意常数.

(21) (Ⅰ)$a = -1$.(Ⅱ)$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 变成标准形 $f = 6y_1^2 + 2y_2^2$.

(22) (Ⅰ) $\frac{1}{4}$.

(Ⅱ) $-\frac{2}{3}$.

(23) (Ⅰ)$f_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & v \leqslant 0. \end{cases}$

(Ⅱ)2.

2011 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 已知当 $x \to 0$ 时,函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量,则(　　)

(A) $k = 1,\ c = 4$.　(B) $k = 1,\ c = -4$.　(C) $k = 3,\ c = 4$.　(D) $k = 3,\ c = -4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,且 $f(0) = 0$,则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ (　　)

(A) $-2f'(0)$.　(B) $-f'(0)$.　(C) $f'(0)$.　(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列,则下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x)\,\mathrm{d}x$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为(　　)

(A) $I < J < K$.　(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.　(D) $K < J < I$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵.记

$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A} =$ (　　)

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解,k_1, k_2 为任意常数,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为(　　)

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)$.　(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)$.

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1)$.　(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3}{2} + k_1(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) + k_2(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$为来自该总体的简单随机样本，则对于统计量$T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$和$T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有(　　)

(A) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.

(B) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

(C) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.

(D) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.）

(9) 设$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则$f'(x)=$______.

(10) 设函数$z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$______.

(11) 曲线$\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$在点$(0,0)$处的切线方程为______.

(12) 曲线$y=\sqrt{x^2-1}$，直线$x=2$及x轴所围的平面图形绕x轴旋转所成的旋转体的体积为______.

(13) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的秩为1，$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为3，则$f$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为______.

(14) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则$E(XY^2)=$______.

三、解答题（本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15) (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

(16) (本题满分 10 分)

已知函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$是$f(u,v)$的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(1,1)}$.

(17)（本题满分 10 分）

求不定积分$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(18)（本题满分 10 分）

证明方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=1$,且满足

$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D_t = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant t-x, 0 \leqslant x \leqslant t\}(0 < t \leqslant 1)$.

求 $f(x)$ 的表达式.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（21）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

（Ⅰ）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）求 $Z=XY$ 的概率分布；

（Ⅲ）求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

（23）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

（Ⅰ）求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

（Ⅱ）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

2011年真题参考答案

一、选择题

(1) C.　(2) B.　(3) A.　(4) B.　(5) D.　(6) C.　(7) D.　(8) D.

二、填空题

(9) $(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$.　(10) $(1+2\ln 2)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$.　(11) $y=-2x$.

(12) $\frac{4}{3}\pi$.　(13) $3y_1^2$.　(14) $\mu\sigma^2+\mu^3$.

三、解答题

(15) $-\frac{1}{2}$.

(16) $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f''_{11}(2,2)+f'_2(2,2)f''_{12}(1,1)$.

(17) $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C$，其中 C 为任意常数.

(18) 证明略.

(19) $f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

(20) (Ⅰ) $a=5$.

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(21) (Ⅰ) 特征值 $-1,1,0$，分别对应特征向量 $k_1(1,0,-1)^{\mathrm{T}}, k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}, k_3(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意非零常数.　(Ⅱ) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

(22) (Ⅰ) (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(Ⅱ) $Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ) 0.

(23) (Ⅰ) $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$　(Ⅱ) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2-2y}, & y\leqslant x\leqslant 2-y,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$,则 a 等于(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

(2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则(　　)

(A)$\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}$.　(B)$\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=-\frac{1}{2}$.

(C)$\lambda=\frac{2}{3}$, $\mu=\frac{1}{3}$.　(D)$\lambda=\frac{2}{3}$, $\mu=\frac{2}{3}$.

(3) 设函数$f(x)$, $g(x)$ 具有二阶导数,且 $g''(x)<0$.若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,则 $f(g(x))$ 在 x_0 处取极大值的一个充分条件是(　　)

(A) $f'(a)<0$.　(B) $f'(a)>0$.

(C) $f''(a)<0$.　(D) $f''(a)>0$.

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x$, $g(x)=x$, $h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有(　　)

(A)$g(x)<h(x)<f(x)$.　(B)$h(x)<g(x)<f(x)$.

(C)$f(x)<g(x)<h(x)$.　(D)$g(x)<f(x)<h(x)$.

(5) 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示.下列命题正确的是(　　)

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$.

(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关,则 $r\leqslant s$.

(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关,则 $r>s$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　(D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ (　　)

(A) 0.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad (a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足(　　)

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.　　(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.)

(9) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2dt$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ______.

(10) 设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2x)}}$ $(e\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为______.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ______.

(12) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ______.

(13) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ______.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $E(T)=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与$\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内存在二阶导数,且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

(Ⅰ)证明存在 $\eta\in(0,2)$,使$f(\eta)=f(0)$;

(Ⅱ)证明存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f''(\xi)=0$.

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

（Ⅰ）求 λ，a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$，求 a，$\boldsymbol{Q}$.

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\quad -\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)（本题满分 11 分）

箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1，2，3 个.现从箱中随机地取出 2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数.

（Ⅰ）求随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

2010 年真题参考答案

一、选择题

(1) C.　(2) A.　(3) B.　(4) C.　(5) A.　(6) D.　(7) C.　(8) A.

二、填空题

(9) -1.　(10) $\dfrac{\pi^2}{4}$.　(11) $p\mathrm{e}^{\frac{p^3-1}{3}}$.　(12) 3.　(13) 3.　(14) $\sigma^2+\mu^2$.

三、解答题

(15) e^{-1}.

(16) $\dfrac{14}{15}$.

(17) 最大值为 $5\sqrt{5}$，最小值为 $-5\sqrt{5}$.

(18) (Ⅰ) $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t < \int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\ (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(19) 证明略.

(20) (Ⅰ) $\lambda=-1,\ a=-2$.

(Ⅱ) $k(1,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解，其中 k 为任意常数.

(21) $a=-1,\ \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(22) $A=\dfrac{1}{\pi},\ f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2},\ y\in(-\infty,+\infty)$.

(23) (Ⅰ) 随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

(Ⅱ) $-\dfrac{4}{45}$.

2009 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量,则(　　)

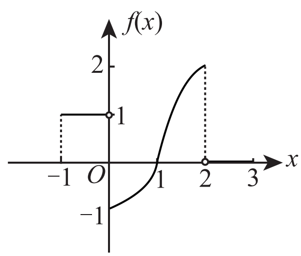
(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

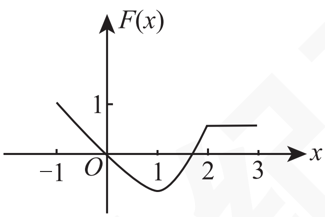
(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

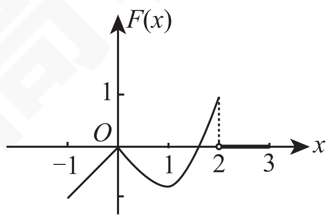
(3) 使不等式 $\int_1^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是(　　)

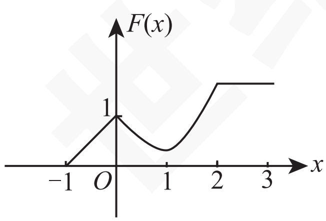
(A) $(0,1)$.　　(B) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.　　(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.　　(D) $(\pi,+\infty)$.

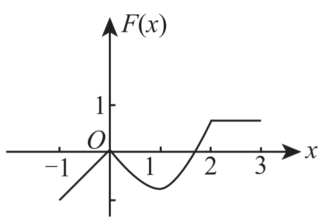
(4) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示,则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)



(A)


(B)


(C)


(D)


(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶方阵, $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵.若 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=$

$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为(　　)

(A)$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(B)$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(D)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容,则(　　)

(A)$P(\overline{A}\,\overline{B})=0$.　(B)$P(AB)=P(A)P(B)$.

(C)$P(A)=1-P(B)$.　(D)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$.记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$______.

(10) 设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$______.

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为______.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$,其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$,则当需求量为 10 000 件时,价格增加 1 元会使产品收益增加______元.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$,若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $k=$______.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.记统计量 $T=\overline{X}-S^2$,则 $E(T)=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\,(x>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,\ y\geqslant x\}$.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

设曲线 $y=f(x)$,其中 $f(x)$ 是可导函数,且 $f(x)>0$.已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍,求该曲线的方程.

(20)(本题满分 11 分)

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$;

(Ⅱ)求条件概率 $P\{X\leqslant 1\mid Y\leqslant 1\}$.

(23)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球.现有放回地从袋中取两次,每次取一个球.以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ)求 $P\{X=1\mid Z=0\}$;

(Ⅱ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

2009 年真题参考答案

一、选择题

(1) C.　(2) A.　(3) A.　(4) D.　(5) B.　(6) A.　(7) D.　(8) B.

二、填空题

(9) $\frac{3}{2}\mathrm{e}$.　(10) $2\ln 2+1$.　(11) $\frac{1}{\mathrm{e}}$.　(12) 8 000.　(13) 2.　(14) np^2.

三、解答题

(15) $f(x,y)$ 在点 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 处取得极小值 $f\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(16) $x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}-C$，其中 C 为任意常数.

(17) $-\frac{8}{3}$.

(18) 证明略.

(19) $x=\frac{1}{3\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y, x\geqslant 1$.

(20) (Ⅰ) 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=k_1(1,-1,2)^{\mathrm{T}}+(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1 为任意常数；满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_3=k_2(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^{\mathrm{T}}$，其中 k_2,k_3 为任意常数.

(Ⅱ) 证明略.

(21) (Ⅰ) $a, a-2, a+1$.

(Ⅱ) $a=2$.

(22) (Ⅰ) 当 $f_X(x)\neq 0$，即 $x>0$ 时，$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅱ) $\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$.

(23) (Ⅰ) $\frac{4}{9}$.

(Ⅱ) X 和 Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0