2022年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题

一、选择题(本题共10小题,每小题5分,共50分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$ 是非零无穷小量,则以下的命题中,

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,

真命题的序号为(　　)

(A)①③.　　(B)①④.　　(C)①③④.　　(D)②③④.

(2) 已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \frac{(-1)^n}{n}(n = 1,2,\cdots)$,则 $\{a_n\}$(　　)

(A) 有最大值,有最小值.　　(B) 有最大值,没有最小值.

(C) 没有最大值,有最小值.　　(D) 没有最大值,没有最小值.

(3) 已知 $f(t)$ 连续,令 $F(x,y) = \int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$,则(　　)

(A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(4) 若 $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$,$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$,$I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$,则(　　)

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.　　(B) $I_2 < I_1 < I_3$.

(C) $I_1 < I_3 < I_2$.　　(D) $I_3 < I_2 < I_1$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是(　　)

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda Q}$.

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解的情况为(　　)

(A) 无解.　　(B) 有解.

(C) 有无穷多解或无解.　　(D) 有唯一解或无解.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,\lambda)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价,则 λ 的取值范围是(　　)

(A) $\{0,1\}$.　　(B) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-2\}$.

(C) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.　　(D) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1\}$.

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,4)$,随机变量 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$,且 X,Y 不相关,则 $D(X-3Y+1)=($　　$)$

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 10.

(9) 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布,且 X_1 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于(　　)

(A) $\frac{1}{8}$.　　(B) $\frac{1}{6}$.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

(10) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件 $\{\max\{X,Y\}=2\}$ 与事件 $\{\min\{X,Y\}=1\}$ 相互独立,则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=($　　$)$

(A) -0.6.　　(B) -0.36.　　(C) 0.　　(D) 0.48.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分,把答案填在题中横线上.)

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$ ______.

(12) $\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=$ ______.

(13) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}$,则 $f'''(2\pi)=$ ______.

(14) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)\mathrm{d}y=$ ______.

(15) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行,再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列,得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ______.

(16) 设 A,B,C 为随机事件,且 A 与 B 互不相容,A 与 C 互不相容,B 与 C 相互独立,$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=$ ______.

三、解答题(本题共6小题,共70分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分10分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} y = 2 + \sqrt{x}$ 的满足条件 $y(1) = 3$ 的解,求曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

(18)(本题满分12分)

设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定,生产函数 $Q = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$,该产品的销售单价 P 与产量 Q 的关系为 $P = 1\,160 - 1.5Q$. 若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为6和8,求利润最大时的产量.

(19)(本题满分12分)

已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid y - 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$,计算 $I = \iint\limits_D \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)（本题满分 12 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

(21)（本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

（Ⅰ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（Ⅱ）证明 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

(22)（本题满分 12 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本,且两样本相互独立,其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数. 利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$,求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$,并求 $D(\hat{\theta})$.