2022年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题

一、选择题(本题共10小题,每小题5分,共50分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$ 是非零无穷小量,则以下的命题中,

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,

真命题的序号为( )

(A)①③. (B)①④. (C)①③④. (D)②③④.

(2) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} \mathrm{d}x =$ ( )

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{2}{3}$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有二阶导数,则( )

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时,$f'(x_0) > 0$.

(B) 当 $f'(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.

(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时,$f''(x_0) > 0$.

(D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

(4) 已知 $f(t)$ 连续,令 $F(x,y) = \int_0^{x-y} (x-y-t) f(t)\,\mathrm{d}t$,则( )

(A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(5) 设 p 为常数,若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p (1-x)^{1-p}} \mathrm{d}x$ 收敛,则 p 的取值范围是( )

(A) $(-1,1)$. (B) $(-1,2)$. (C) $(-\infty,1)$. (D) $(-\infty,2)$.

(6) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$,则( )

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

(7) 若 $I_1=\int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$,则( )

(A) $I_1<I_2<I_3$. (B) $I_2<I_1<I_3$. (C) $I_1<I_3<I_2$. (D) $I_3<I_2<I_1$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是( )

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$.

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

(9) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况为( )

(A) 无解. (B) 有解.

(C) 有无穷多解或无解. (D) 有唯一解或无解.

(10) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,\lambda)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价,则 λ 的取值范围是( )

(A) $\{0,1\}$. (B) $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-2\}$.

(C) $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$. (D) $\{\lambda \mid \lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1\}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分,把答案填在题中横线上.)

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$ ______.

(12) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定,则 $y''(1)=$ ______.

(13) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=$ ______.

(14) 微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为 $y(x)=$ ______.

(15) 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$,则 L 围成的有界区域的面积为______.

(16) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行,再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列,得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ______.

三、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=2$,求 $f'(1)$.

(18)（本题满分 12 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy' - 4y = 2\ln x - 1$ 的满足条件 $y(1) = \dfrac{1}{4}$ 的解，求曲线 $y = y(x)$ $(1 \leqslant x \leqslant e)$ 的弧长.

(19)（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid y - 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$，计算 $I = \iint\limits_D \dfrac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} dx dy$.

(20)（本题满分 12 分）

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u} - \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v} = 2(u - v)e^{-(u+v)}$，且 $f(u,0) = u^2 e^{-u}$.

(Ⅰ) 记 $g(x,y) = f(x, y - x)$，求 $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

(Ⅱ) 求 $f(u,v)$ 的表达式与极值.

(21)(本题满分 12 分)

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数,证明:$f''(x)\geqslant 0$的充分必要条件是对任意不同的实数a,b,都有$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$成立.

(22)(本题满分 12 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(Ⅰ)求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形;

(Ⅱ)证明$\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.