2021年全国硕士研究生招生考试

数　学　(一)

(科目代码:301)

一、选择题(1～10小题,每小题5分,共50分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 连续且取得极大值　　(B) 连续且取得极小值

(C) 可导且导数等于零　　(D) 可导且导数不为零

(2) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$(　　).

(A) $dx+dy$　　(B) $dx-dy$　　(C) dy　　(D) $-dy$

(3) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的3次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$,则(　　).

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　(B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　(D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,则 $\int_0^1 f(x)dx=$(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

(5) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为(　　).

(A) 2,0　　(B) 1,1　　(C) 2,1　　(D) 1,2

(6) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$,若 $\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$,$\boldsymbol{\beta}_3$ 两两相交,则 l_1,l_2 依次为(　　).

(A) $\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$　　(D) $-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$

7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵,下列结论不成立的是(　　).

(A) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$　　(B) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$

(C) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$　　(D) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$

8) 设 A,B 为随机事件,且 $0<P(B)<1$,下列命题中为假命题的是(　　).

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$,则 $P(A|\overline{B})=P(A)$

(B) 若 $P(A|B)>P(A)$,则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$,则 $P(A|B)>P(A)$

(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$,则 $P(A)>P(B)$

9) 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本,

令 $\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$,则(　　).

(A) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(B) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

(C) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(D) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计,$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本,考虑假设检验问题:$H_0:\mu\leqslant 10$, $H_1:\mu>10$,$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数,若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\overline{X}\geqslant 11\}$,其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}X_i$,则 $\mu=11.5$ 时,该检验犯第二类错误的概率为(　　).

(A) $1-\Phi(0.5)$　　(B) $1-\Phi(1)$

(C) $1-\Phi(1.5)$　　(D) $1-\Phi(2)$

二、填空题(11 ～ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.请将答案写在题中的横线上.)

11) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=$ ________.

12) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t+1,\\ y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$ 所确定,则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

13) 欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的解为 $y=$ ________.

14) 设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z)\mid x^2+4y^2\leqslant 4,0\leqslant z\leqslant 2\}$ 表面的外侧,则曲面积分

$\displaystyle\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

15) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 3 阶矩阵,A_{ij} 为代数余子式,若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 2,且 $|\boldsymbol{A}|=3$,则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ________.

16) 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球,先从甲盒中任取一球,观察颜色后放入乙盒中,再从乙盒中任取一球,令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数,则 X 与 Y

的相关系数为________.

三、解答题(17 ～ 22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

(18)(本题满分 12 分)

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$,求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 12 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30,\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

(20)(本题满分 12 分)

设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域,$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 取得最大值的积分区域为 D_1.

(Ⅰ)求 $I(D_1)$ 的值;

(Ⅱ)计算 $\int\limits_{\partial D_1}\dfrac{(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y)\mathrm{d}x+(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$,其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

(21)(本题满分 12 分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;

(Ⅱ)求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 12 分)

在区间(0,2)上随机取一点,将该区间分成两段,较短一段的长度为 X,较长一段的长度为 Y,令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(Ⅰ)求 X 的概率密度;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度;

(Ⅲ)求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.