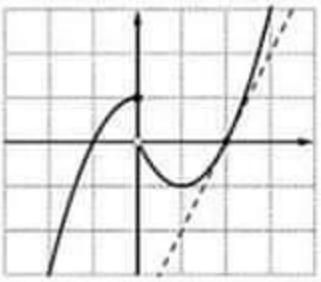
الرياضيات / ورقة عمل (1)

طلاب الثالث الثانوي العلمي

أولا: أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: الشكل المجاور يمثل C الخط البياني للتابع f ، تأمل الشكل ثم أجب عن الأسئلة التالية:



1. ما عدد المماسات الأفقية التي يقبلها الخط C.
2. اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها 2.
3. ما هي حلول المعادلة $f(x) = 0$.
4. هل $f(0)$ قيمة حدّية كبرى ، برر إجابتك.

السؤال الثاني: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين d, d' حيث:

$$d: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 : t \in \mathbb{R} \\ z = t - 4 \end{cases} \quad , \quad d': \begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

السؤال الثالث: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية $2i\bar{z} + z = 5i - 1$ بالوسيط z.

السؤال الرابع: أثبت التابع $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ اشتقاقي على مجموعة تعريفه ، ثم أوجد $f'(x)$.

ثانيا: حل التمرينات التالية:

التمرين الأول: $ABCD$ رباعي وجوه النقاط I, J, G تحقق العلاقات $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{IG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{IJ}$

والمطلوب: 1. عيّن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ لتكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta)$.

2. عين مجموعة النقاط M التي تحقق:

$$4\|2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\| = 10\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$

التمرين الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \cos 2x + 2\sin x$ والمطلوب:

1. أثبت أن f تابع دوري ويقبل 2π دوراً له.
2. ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0, 2\pi]$ ، ادرس تغيرات g ونظّم جدولاً بها.
3. ارسم الخط البياني للتابع g .

التمرين الثالث: ليكن لدينا العدد العقدي $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ والمطلوب:

1. اكتب بالشكل الجبري وبالشكل المثلثي العدد العقدي z.
2. استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{12}$.

التمرين الرابع: i) أثبت بالتدريج أن $n(n+1)(n+3)$ مضاعف للعدد 3 أياً كان العدد الطبيعي n.

ii) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r تحقق $u_1 + u_2 = 4$, $u_3 + u_4 + u_5 = -9$

احسب u_0 و r

اقلب الصفحة

المسألة الثانية:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right) \quad D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $\pm\infty$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2, x=-2$$

$$f(-2)=-2 \text{ و } f(2)=2$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(2)=2$ قيمة حدية صغرى

$f(-2)=-2$ قيمة حدية كبرى

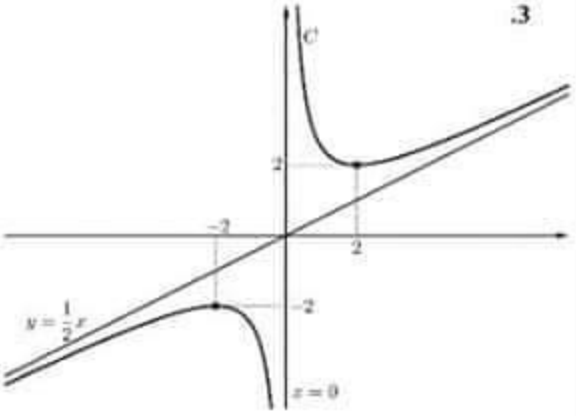
.2 $$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}\Rightarrow f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0$$

وبالتالي $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

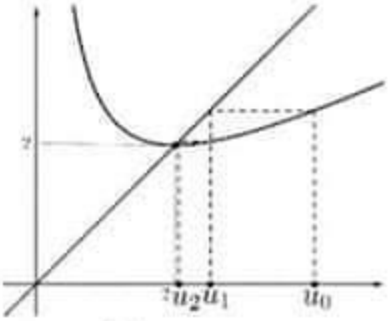
الوضع النسبي: إشارة الفرق $f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{2}{x}$ من إشارة x وبالتالي: عندما $x>0$ فإن C فوق المقارب عندما $x<0$ فإن C تحت المقارب.

.3



.4 $u_{n+1}=f(u_n) \quad , \quad u_0=4$

.a



.b $E(n): 2<u_{n+1}<u_n$

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$2<2.5<4 \Leftarrow 2<u_1<u_0$ محققة

- نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$2<u_{n+1}<u_n$ محققة

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$2<u_{n+2}<u_{n+1}$ ؟

من الفرض $2<u_{n+1}<u_n$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $[2,+\infty[$ وبالتالي:

$$f(2)<f(u_{n+1})<f(u_n)$$

$$2<u_{n+2}<u_{n+1}$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

.c لدينا $u_{n+1}<u_n$ وبالتالي المتتالية u_n متناقصة تماماً

ولدينا $2<u_n$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأدنى فهي متقاربة ونهايتها حل المعادلة $f(x)=x$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

انتهى الحل

بالتوفيق للجميع

إعداد : أيهم الشاعر

ثالثا: حل المسألتين التاليتين:

المسألة الأولى:

1. $\overrightarrow{AB}(2,2,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1,1,2)$

الشعاعين غير مرتبطين خطياً وبالتالي نبحث عن عددين a و b بحيث تحقق:

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$(-1,-3,3)=a(2,2,-2)+b(1,1,2)$$

$$2a+b=-1 \quad (1)$$

$$2a+b=-3 \quad (2)$$

$$2a+2b=-3 \quad (3)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد ان العلاقة غير محققة أياً كانت قيمة العددين a و b

وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطة خطياً ومن النقاط A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد.

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=xx'+yy'+zz'=2+2-4=0$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A ومساحته:

$$S(ABC)=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{2}$$

3. نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي P فهو يحقق:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow 2a+2b-2c=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a+b-c=0}$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow \boxed{a+b-2c=0}$$

نفرض $a=1$ فتصبح المعادلتين $\begin{matrix} b-c=-1 \\ b-2c=-1 \end{matrix}$

بالطرح نجد $c=0$ نعوض فنجد $b=-1$ ومنه:

ناظم المستوي $\vec{n}(1,-1,0)$

معادلة المستوي $ax+by+cz+d=0$

$$x-y+d=0$$

$$A\in P \quad \Rightarrow \quad d=-2$$

ومنه $P: x-y-2=0$

4. نفرض $D'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة D على المستوي P فهي تحقق: $\overrightarrow{DD'}=k\vec{n}$

$$(x-1,y+3,z-2)=k(1,-1,0)=(k,-k,0)$$

$$x=k+1$$

$\Leftarrow y=-k-3$ نعوض في معادلة المستوي P فنجد:

$$z=2$$

$k+1+k+3-2=0\Rightarrow k=-1$ وبالتالي:

$$x=-1+1=0$$

$\Leftarrow y=1-3=-2$ وبالتالي $D'(0,-2,2)$.

$$z=2$$

5. $dist(D,P)=\dfrac{|1+3-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

الطريقة الثانية: $\overrightarrow{DD'}(-1,-1,0)\Rightarrow DD'=\sqrt{2}$

6. $V=\dfrac{1}{3}S.h=\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

التمرين الثالث:

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$$

1. نفرض $z_1=1+i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$ وبالتالي:

$$r_1=\sqrt{2},\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{4}$$

$$r_2=2,\begin{cases}\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_2=\frac{\pi}{6}$$

$$|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg z=\arg z_1-\arg z_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$ الشكل المثلثي

$$z=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{3+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

وهو الشكل الجبري

2.

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

التمرين الرابع:

i) $n(n+1)(n+2)=3k$

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$0=3(0)$ محققة (الصفر مضاعف لأي عدد)

- نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$n(n+1)(n+2)=3k$ محققة

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$(n+1)(n+2)(n+3)=3k$ ؟

$$\ell_1:(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)$$
$$=3k+3(n+1)(n+2)$$
$$=3(k+(n+1)(n+2))$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيا كان العدد الطبيعي n.

ii) $u_1+u_2=4$ و $u_3+u_4+u_5=-9$

الحد العام للمتتالية $u_n=u_1+nr$ وبالتالي:

$$u_2=u_1+2r$$
$$u_3=u_1+3r$$
$$u_4=u_1+4r$$
$$u_5=u_1+5r$$

فتصبح العلاقتين:

$$u_0+r+u_0+2r=4\Rightarrow\boxed{2u_0+3r=4}(1)$$

$$u_0+3r+u_0+4r+u_0+5r=-9$$
$$\Rightarrow 3u_0+12r=-9\Rightarrow\boxed{u_0+4r=-3}(2)$$

من (2) نجد: $u_0=-4r-3$ نعوض في (1) فنجد:

$2(-4r-3)+3r=4\Rightarrow\boxed{r=-2}$ وبالتالي

$$u_0=-4(-2)-3\Rightarrow\boxed{u_0=5}$$

ثانيا: حل التمرينات التالية:

التمرين الأول:

1. من العلاقة $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ نجد $\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ وبالتالي:

$(I,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$.

من العلاقة $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ نجد $\overrightarrow{CJ}+3\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$ وبالتالي:

$(J,4)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,3)$.

من العلاقة $\overrightarrow{IG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{IJ}$ نجد $3\overrightarrow{IG}+2\overrightarrow{JG}=\vec{0}$ وبالتالي:

$(G,5)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(J,2)$.

وبالتالي:

$(G,10)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,6)$ و $(J,4)$.

وحسب الخاصة التجميعية نجد أن $(G,10)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$.

2. بما أن $(G,10)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$ وبالتالي:

$$2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=10\overrightarrow{MG}$$

نفرض G' مركز ثقل رباعي الوجوه وبالتالي فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG'}$$

ومنه يكون: $4\left\|10\overrightarrow{MG}\right\|=10\left\|4\overrightarrow{MG'}\right\|$

أي أن: $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG'}\right\|$

(بعد M عن G يساوي بعد M عن G')

وبالتالي M تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GG']$

التمرين الثاني:

$$f(x)=\cos 2x+2\sin x$$

1. $f(x+2\pi)=\cos(2x+4\pi)+2\sin(x+2x\pi)$

$$f(x+2\pi)=\cos 2x+2\sin x=f(x)$$

وبالتالي f دوري ويقبل 2π دوراً له.

2. $g(x)=\cos 2x+2\sin x \quad D_g=[0,2\pi]$

$$g(0)=\cos 0+2\sin 0=1$$

$$g(2\pi)=\cos 4\pi+2\sin 2\pi=1$$

$$g'(x)=-2\sin 2x+2\cos x$$

$$g'(x)=-4\sin x\cos x+2\cos x$$

$$g'(x)=2\cos x(-2\sin x+1)$$

$$g'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi+2\sin\frac{\pi}{2}=-1+2=1$$

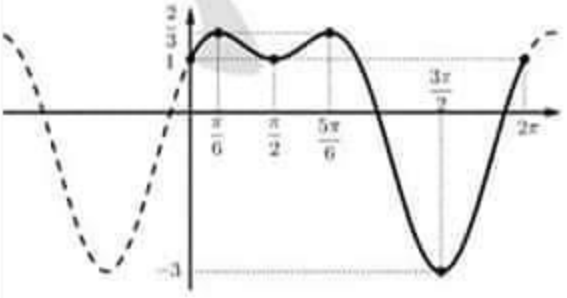
$$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos 3\pi+2\sin\frac{3\pi}{2}=-1-2=-3$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$$g\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}+2\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

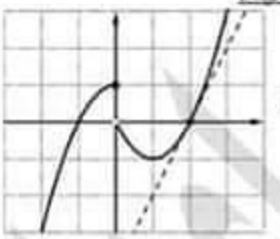
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	1

3.



الرياضيات / ورقة عمل (1)
طلاب الثالث الثانوي العلمي
سلم التصحيح

أولا: أجب عن الأسئلة التالية:



السؤال الأول:

1. عدد المماسات الأفقية (اثنان)

2. لدينا $f(2)=0$

والمماس يمر بالنقطتين $A(2,0)$ و $B(1,-2)$

ميل المماس $f'(2)=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{0+2}{2-1}=2$

وبالتالي معادلة المماس:

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=2x-4$$

3. حلول المعادلة $x\in\{-1,2\}$.

4. $f(0)=1$ قيمة حدية كبرى لأنه وجد مجال مفتوح $I=]-1,1[$ يحوي الصفر، بحيث أياً كانت x من I كانت $f(x)\le f(1)$.

السؤال الثاني:

نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم d':

نفرض $x=s$ فتكون $\begin{cases}-2y+z=5-s\\ y-3z=-2s\end{cases}$

أي أن $\begin{cases}-2y+z=5-s\\ +2y-6z=-4s\end{cases}$ بالجمع $-5z=-5s+5$

ومنه $z=s-1$

نعوض في (2) فنجد $y=s-3$ وبالتالي:

$$d':\begin{cases}x=s\\ y=s-3:s\in\mathbb{R}\\ z=s-1\end{cases}$$

الشعاعين $\overrightarrow{u_d}(2,-1,1)$ و $\overrightarrow{u_{d'}}(1,1,1)$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمين d و d' متقاطعين أو متخالفين

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين:

$$2t+1=s \quad (1)$$
$$-t-2=s-3 \quad (2)$$
$$t-4=s-1 \quad (3)$$

بجمع (2) و (3) نجد $-6=2s-4$ وبالتالي $s=-1$

نعوض في (3) فنجد $t=2$

نعوض في (1) فنجد $5=-1$ غير محققة

وبالتالي المستقيمين d و d' متخالفين.

السؤال الثالث:

$$(1)\ldots\quad 2i\bar{z}+z=5i-1$$

نوجد المرافق $(2)\ldots\quad -2iz+\bar{z}=-5i-1$

من (2) نجد: $\bar{z}=2iz-5i-1$ نعوض في (1) فنجد:

$$2i(2iz-5i-1)+z=5i-1$$
$$-4z+10-2i+z=5i-1$$
$$-3z=-11+7i$$

ومنه $\boxed{z=\dfrac{11}{3}-\dfrac{7}{3}i}$

السؤال الرابع:

التابع $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ معرف على المجال $D_f=[0,+\infty[$

واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$، ندرس قابلية الاشتقاق عند 0 :

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\sqrt{x}=0$$

وبالتالي f اشتقاقي عند الصفر فهو اشتقاقي على مجموعة تعريفه $D_f=[0,+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{x}{3\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

ثالثاً: حل المسألتين التاليتين:

المسألة الأولى: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط التالية:

$$A(2,0,-1), B(4,2,-3), C(3,1,1), D(1,-3,2)$$

1. أثبت أن النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد.
2. استنتج طبيعة المثلث ABC ، احسب مساحته.
3. اكتب معادلة المستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقاط A, B, C.
4. أوجد إحداثيات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي $\mathcal{P}$.
5. استنتج بعد D عن المستوي $\mathcal{P}$ طريقتين.
6. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

المسألة الثانية: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x})$ والمطلوب:

1. ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها ، استنتج القيم الحدية والمقارب الشاقولي.
2. أوجد معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $\pm\infty$ ، ادرس وضعه النسبي.
3. ارسم ماوجدته من مقاربات ثم ارسم C.
4. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n), u_0 = 4$ والمطلوب:
   a. مثّل هندسياً الحدود الأولى للمتتالية u_n.
   b. أثبت أن $2 < u_{n+1} < u_n$.
   c. استنتج تقارب المتتالية u_n واحسب نهايتها.

انتهت الأسئلة

بالتوفيق للجميع

إعداد : أيهم الشاعر