Лабораторная работа №4. Модель гармонических колебаний

с/б 1032186063 | НФИбд-01-18

Доборщук Владимир Владимирович

6 марта 2021

RUDN University, Moscow, Russian Federation

Цели и задачи

Цель

Изучить модель гармонических колебаний и программно реализовать процесс моделирования гармонического осциллятора.

Задачи

- изучить теорию о модели гармонических колебаний
- построить модели гармонического осцилятора (фазовый портрет и его решение) для 3 случаев:
    - без затуханий, без воздейтвия внешних сил
    - с затуханиями, без воздействия внешних сил
    - с затуханиями, с воздействием внешних сил

Ход выполнения лабораторной работы

Теоретическая справка

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Теоретическая справка

Для решения поставленной нами задачи мы будем использовать именно эту форму уравнения, предварительно перейдя к следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \dot{x} + f(t) \end{cases}$$

где $f(t)$ - функция воздействия внешних сил.

Начальные данные

Вариант 14: $(1032186063 \mod 70) + 1$

$f_{1,2}(t) = 0$

$\omega_{0_1} = \sqrt(6)$

$2\gamma_1 = 0$

$\omega_{0_2} = \sqrt(15)$

$2\gamma_2 = 5$

$f_3(t) = \cos(3,5t)$

$\omega_{0_3} = 2$

$2\gamma_2 = 2$

$x_0 = 1, y_0 = 0$

Программная реализация

Инициализация библиотек

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sin, cos
from scipy.integrate import odeint
```

Программная реализация

Для успешной реализации модели нам потребуется $f(t)$ и начальные данные коэффициентов ω_0 и 2γ. Помимо этого, объявим функции для наших систем дифференциальных уравнений (с и без воздействия внешних сил).

Программная реализация

```python
w = np.sqrt(6)
g = 0.00

def f0(t):
    value = sin(0.00*t)
    return value

def f1(t):
    value = cos(3.50*t)
    return value

def dx0(x,t):
    dx1 = x[1]
    dx2 = -w*w*x[0] - g*x[1] + f0(t)
    return [dx1, dx2]

def dx1(x,t):
    dx1 = x[1]
    dx2 = -w*w*x[0] - g*x[1] + f1(t)
```

Программная реализация

Инициализируем начальные данные:

```
t0 = 0
x0 = [1,0]
t = np.arange(t0, 45, 0.05)
```

Программная реализация

Также объявим функции для построения решения и фазового портрета гармонического осциллятора.

```
def plot_solution(res, title):
    plt.grid()
    plt.title(title)
    plt.plot(res)

def plot_portrait(res, title):
    y1 = res[:,0]
    y2 = res[:,1]

    plt.grid()
    plt.title(title)
    plt.yticks(np.arange(-2,2,0.18))
    plt.xticks(np.arange(-2,2,0.2))
    plt.ylabel('y')
    plt.xlabel('x')
    plt.plot(y1, y2)
```

Гармонический осциллятор без затухания, без воздействия внешних сил

```
x = odeint(dx0, x0, t)
plot_solution(x, 'Решение
    длягармоническогоосциллятораб еззатуханий    , f(t
    )=0')
```

Гармонический осциллятор без затухания, без воздействия внешних сил

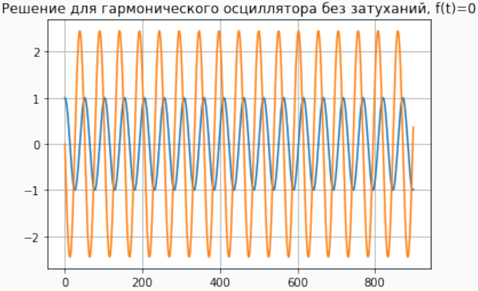

Рис. 1: Решение для ГО без затуханий, $f(t) = 0$

Гармонический осциллятор без затухания, без воздействия внешних сил

```
plot_portrait(x, 'Фазовый
    портретгармоническогоосцилляторабеззатуханий ,
    f(t)=0')
```

Гармонический осциллятор без затухания, без воздействия внешних сил

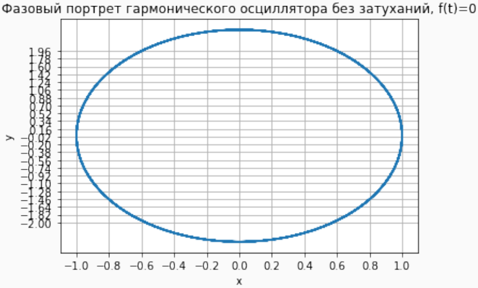

Рис. 2: Фазовый портрет для ГО без затуханий, $f(t) = 0$

Гармонический осциллятор с затуханиями, без воздействия внешних сил

```
w = np.sqrt(15)
g = 5.00

x = odeint(dx0, x0, t)
plot_solution(x, 'Решение
    длягармоническогоосциллятораcзатуханиями     , f(t
    )=0')
```

Гармонический осциллятор с затуханиями, без воздействия внешних сил

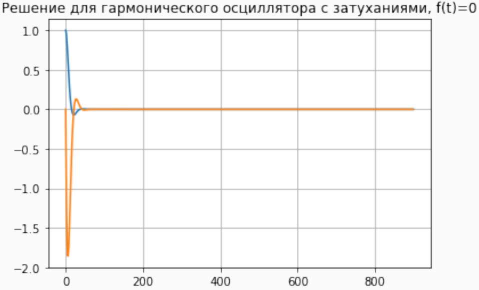

Рис. 3: Решение для ГО с затуханиями, $f(t) = 0$

Гармонический осциллятор с затуханиями, без воздействия внешних сил

```
plot_portrait(x, 'Фазовый портретгармоническогоосциллятorasзатуханиями, f(t)=0')
```

Гармонический осциллятор с затуханиями, без воздействия внешних сил

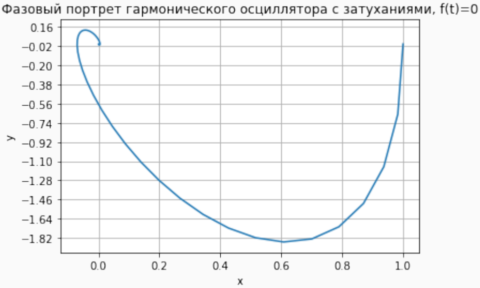

Рис. 4: Фазовый портрет для ГО с затуханиями, $f(t) = 0$

Гармонический осциллятор с затуханиями, с воздействием внешних сил

```
w = 2
g = 2.00

x = odeint(dx1, x0, t)
plot_solution(x, 'Решение длягармоническогоосциллятора сзатуханиями , f(t)=cos(3.5t)')
```

Гармонический осциллятор с затуханиями, с воздействием внешних сил

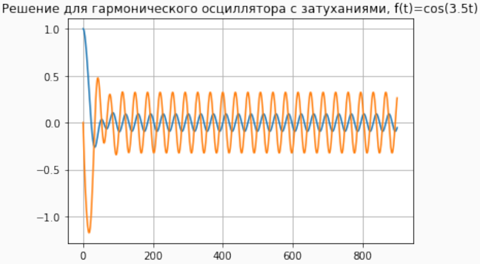

Рис. 5: Решение для ГО с затуханиями, $f(t) = \cos{(3,5t)}$

Гармонический осциллятор с затуханиями, с воздействием внешних сил

```
plot_portrait(x, 'Фазовый
    портретгармоническогоосциллясторасзатуханиями    ,
    f(t)=cos(3.5t)')
```

Гармонический осциллятор с затуханиями, с воздействием внешних сил

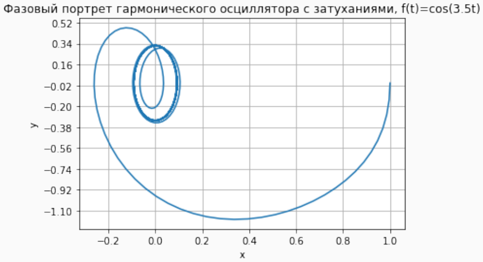

Рис. 6: Фазовый портрет для ГО с затуханиями, $f(t) = \cos(3,5t)$

Выводы

Выводы

Мы изучили теорию о модели гармонических колебаний и программно реализовали процесс моделирования гармонического осциллятора, его фазового портрета и непосредственного решения. Все задачи можно считать выполненными успешно.