



Préceptorat Échelles d'Espace et de Temps

La synchronisation d'oscillateurs

Flore MEKKI-BERRADA
Vincent VERCAMER

juin 2011

Introduction

Lorsque l'on observe des populations d'oscillateurs non linéaires couplés entre eux et ayant chacune leur propre fréquence, il arrive que celles-ci se synchronisent spontanément à une fréquence commune. C'est ce que l'on appelle la synchronisation collective d'oscillateurs. La synchronisation d'oscillations est un phénomène que l'on retrouve fréquemment dans la vie courante. Par exemple en biologie, on retrouve ce phénomène chez les cellules cardiaques : celles-ci synchronisent leurs battements pour faire fonctionner le cœur ; dans les réseaux de neurones, permettant ainsi la transmission des messages nerveux ; ou bien encore chez les grillons et les lucioles chez qui on observe une synchronisation collective des crissemments et respectivement des émissions lumineuses. En physique, on peut citer les réseaux de jonctions Josephson. Enfin, citons quelques exemples de la vie courante, comme la marche au pas, la synchronisation des applaudissements d'une foule ou encore la synchronisation de métronomes.

Le phénomène de synchronisation collective est étudiée depuis les années 1960. Le pionnier dans le domaine est A.T. Winfree. Celui-ci qui fit une étude mathématique des populations d'oscillateurs et montra qu'il existait une analogie avec les modèles de transition de phase thermodynamique. Y. Kuramoto développa par la suite un modèle basé sur la théorie du champ moyen et trouva une solution exacte du problème des oscillateurs couplés. Enfin, Crawford ...??? ben je sais pas ce qu'il a fichu celui-là.

Nous avons ici souhaité reprendre la théorie de Kuramoto afin de comprendre les analogies existantes avec le modèle d'Ising. Nous avons ainsi cherché à faire des simulations afin de retrouver les résultats de Kuramoto.

Table des matières

1	Le modèle de Kuramoto	4
1.1	Approche théorique	4
1.2	Analogies avec le modèle d'Ising	5
2	Simulation avec l'approximation champ moyen	6
2.1	Simulation	6
2.2	Evolution de la cohérence avec le temps	7
2.3	Influence du coefficient de couplage K	8
2.3.1	Evolution de la cohérence en régime stationnaire avec le coefficient de couplage K	8
2.3.2	Détermination du coefficient α du modèle d'Ising	8
2.3.3	Influence de la forme de la distribution des fréquences propre des oscillateurs	8
3	Influence de la distribution initiale des pulsations	9
3.1	distribution gaussienne	9
3.2	distribution de Cauchy décalée	9
3.3	distribution "chapeau"	9
4	Influence du nombre d'oscillateurs	10
	Bibliographie	11

Chapitre 1

Le modèle de Kuramoto

en considérant chaque oscillateur est couplé au rythme collectif, généré par l'ensemble des oscillateurs

1.1 Approche théorique

Dans cette partie, nous allons utiliser l'approximation champ moyen afin de résoudre plus simplement le problème

Considérons une importante population de N oscillateurs semblables (d'amplitude égale à 1 mais dont la phase θ et la pulsation propre ω diffèrent), couplés entre eux, et mettons-nous dans le cas où le couplage $\Gamma_{ij}(\theta)$, entre deux oscillateurs i et j , est faible. La phase de l'oscillateur i , notée θ_i , suit alors l'expression :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) \quad (1.1)$$

Dans le cas où le couplage ne dépend que de la différence de phase entre les oscillateurs, et en supposant que cette dépendance est sinusoïdale, on a alors :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1.2)$$

K est appelé coefficient de couplage.

On intuite que lorsque la distribution des pulsations propres des oscillateurs est large, les oscillateurs vont se comporter de façon incohérente et garderont chacun leur propre fréquence. En revanche, lorsque cette distribution sera suffisamment étroite pour que le couplage ait de l'influence, une partie des oscillateurs va se synchroniser.

Notons $g(\omega)$ la distribution des pulsations propres des oscillateurs. Supposons que g est unimodale et symétrique par rapport à la pulsation moyenne Ω des oscillateurs prise nulle par changement de variable. On a alors $g(-\omega) = g(\omega)$.

Nous allons à présent utiliser une représentation géométrique pour visualiser l'évolution des phases des oscillateurs. Chaque oscillateur est caractérisé par sa phase θ_i . On représentera chaque oscillateur par un point se déplaçant sur le cercle trigonométrique avec sa propre phase θ_i (cf. figure 1.1).

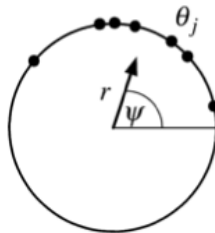


FIG. 1.1: Interprétation géométrique du paramètre d'ordre complexe

On peut alors définir le paramètre d'ordre complexe de module r et de phase ψ tel que :

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (1.3)$$

Plus les oscillateurs oscilleront de façon cohérente, plus la population se comportera comme un unique oscillateur, et plus r sera proche de 1 ; en revanche, plus les oscillateurs oscilleront de façon incohérente, plus ils seront dispersés aléatoirement sur le cercle trigonométrique, et plus r tendra vers 0. Ainsi, r représente la cohérence de phase de la population d'oscillateurs. ψ représente quant à lui la phase moyenne des oscillateurs. $re^{i\psi}$ est le paramètre d'ordre du système

En multipliant le paramètre d'ordre par $e^{-i\theta_i}$, puis en ne gardant que la partie imaginaire de l'expression ainsi obtenue, on trouve que :

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1.4)$$

En réinjectant ce résultat dans l'équation 1.2, on obtient alors :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i) \quad (1.5)$$

On fait apparaître ici l'approximation champ moyen. En effet, la phase θ_i de l'oscillateur i ne dépend plus de la phase des autres oscillateurs θ_j , mais de la cohérence de phase r et de la phase moyenne ψ . Ainsi, un oscillateur ne ressent pas les autres oscillateurs indépendamment les uns des autres, mais ressentira le champ moyen créé par tous les oscillateurs du groupe.

1.2 Analogies avec le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising permet de modéliser des problèmes où N corps ont deux états accessibles (dans le cas du réseau de spin : les états "spin up" et "spin down") et où les interactions locales vont avoir des effets collectifs. Dans notre cas, nous sommes en présence d'oscillateurs qui ont pour états accessibles les états "blocked" et "drifting". L'état "blocked" correspond aux oscillateurs synchronisés et l'état "drifting" aux oscillateurs non synchronisés.

Dans le modèle d'Ising appliqué au ferromagnétisme, on considère le paramètre d'ordre m , qui n'est autre que le module de l'aimantation globale du réseau de spins. Dans notre cas, le paramètre d'ordre réel est r , le module de la somme des signaux des oscillateurs.

L'ensemble des analogies entre le modèle d'Ising et le modèle de Kuramoto sont répertoriés dans le tableau ???.

	modèle de Kuramoto	modèle d'Ising
corps	oscillateurs	spins
paramètre d'ordre	r	m
point critique	K_c	T_c
exposant critique β	0.5	0.5

TABEAU 1.1: Analogies entre le modèle de Kuramoto et le modèle d'Ising

Chapitre 2

Simulation avec l'approximation champ moyen

2.1 Simulation

Nous avons effectué une simulation du modèle de Kuramoto en langage C. Dans cette simulation, l'approximation champ moyen a été utilisée. Ainsi, la distribution des pulsations propres des oscillateurs a été générée aléatoirement. Dans un premier temps, la fonction de distribution g a été assimilée à une fonction de Cauchy (lorentzienne). Nous avons ensuite étudié l'influence d'un changement de distribution. Nous verrons dans la partie 3 l'influence de la distribution g sur les résultats.

Le programme que nous avons fait fonctionne de la façon suivante : On commence par définir les pulsations propres ω_i des oscillateurs. Pour cela, on les choisit aléatoirement suivant la fonction de distribution g , choisie de Cauchy dans un premier temps.

Ensuite, pour différentes valeurs du coefficient de couplage K , nous avons cherché à simuler l'évolution temporelle des paramètres r et ψ de l'approximation champ moyen. Pour s'affranchir de l'influence des valeurs initiales des phases des oscillateurs sur r et ψ , un moyennage sur plusieurs réalisations a été fait. Ainsi, pour chaque valeur de K , la phase initiale θ_i des oscillateurs a été redéterminée aléatoirement, entre 0 et 2π .

Nous remarquerons ici que simuler sur plusieurs réalisations ne revient pas à rajouter des oscillateurs, car le champ moyen généré n'est alors pas le même. Augmenter le nombre de réalisations nous permettra donc seulement de moyenniser nos résultats, et non de regarder le comportement à grand nombre d'oscillateurs.

r et ψ ont ensuite été calculés à partir des phases des oscillateurs par la relation (1.4) en utilisant la fonction *meanField*, puis la valeur des phases des oscillateurs au pas de temps suivant a été déterminé par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4. En répétant ce processus, les évolutions temporelles des θ_i , de r et de ψ ont été déterminées.

Une fois que cela est fait, il suffit alors de déterminer pour chaque valeur de K la valeur asymptotique de r . Pour cela, nous avons effectué, pour chaque réalisation, la moyenne des valeurs de r sur toute la période temporelle de la simulation dans le cas où $K \leq K_c$, et une moyenne des valeurs de r pour tous les r supérieurs à 90% de r_{max} , dans le cas où $K \geq K_c$. Nous avons ensuite calculé la moyenne des valeurs ainsi obtenues, et notées r_∞ , sur les réalisations.

Différents histogrammes ont été tracés : le premier représente la distribution des ω_i de la simulation, le deuxième représente la distribution initiale des θ_i et le troisième représente la distribution finale des θ_i . Dans le cas où l'on s'intéresse à plusieurs valeurs de K et à un moyennage sur plusieurs réalisations, seuls les histogrammes correspondant à la dernière valeur de K et à la première réalisation ont été affichés. Ces histogrammes nous permettent de voir de façon ostensible la synchronisation des oscillateurs.

Enfin, la fonction *logarithme* nous a permis de calculer le logarithme de r_∞ et de $\frac{K-K_c}{K}$. Le tracé de $\log(r_\infty)$ en fonction de $\log(\frac{K-K_c}{K})$ pour $K \geq K_c$ nous permet de vérifier l'approximation champ moyen et d'en déduire par régression linéaire la valeur de l'exposant β .

Dans la suite, les différentes simulations ont été réalisées avec 300 oscillateurs, en prenant pour les courbes temporelles 10000 points avec un espacement temporel $\delta T = 0.1$. La distribution des ω_i a

été choisie de Cauchy, centrée sur 0 ($\Omega = 0$) et d'écart-type $\sigma = 0.1$.

2.2 Evolution de la cohérence avec le temps

Voici le résultat de la simulation obtenu pour 4 réalisations et pour $K = 1$:

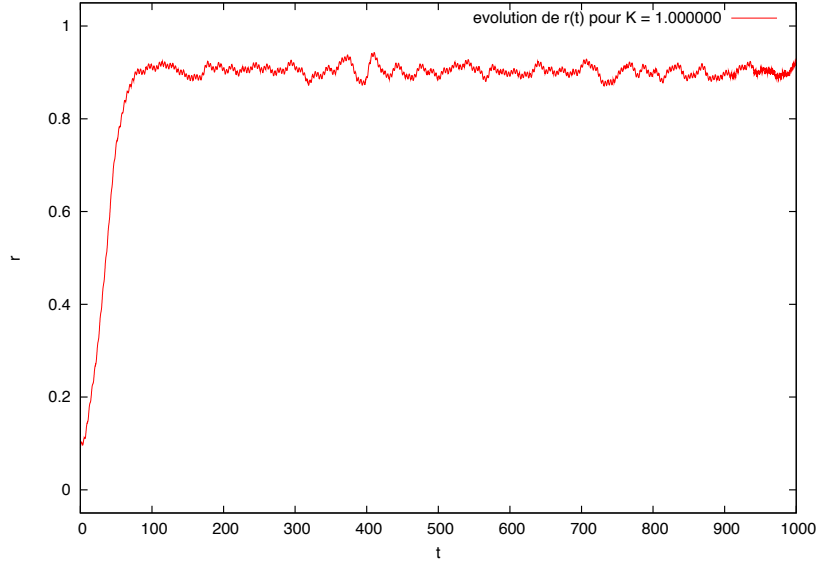


FIG. 2.1: Évolution temporelle de la cohérence

La simulation permet de visualiser l'évolution temporelle de r pour différentes valeurs de K . On observe sur la figure 2.1 l'existence d'une valeur seuil pour K . En effet, pour des K inférieurs à K_c , le couplage est trop faible et les oscillateurs se comportent comme s'ils n'étaient pas couplés. Les phases sont distribuées de façon uniforme sur le cercle trigonométrique, et ce, quelle que soit la condition initiale. On obtient alors une cohérence de phase faible, mais présentant des variations assez importantes. En revanche, pour des K supérieurs à K_c , l'état incohérent devient instable et on observe une augmentation brutale de r jusqu'à atteindre une valeur de saturation r_∞ , inférieure à 1. Cela montre bien qu'une partie du groupe d'oscillateurs s'est synchronisée tandis que le reste du groupe est resté incohérent. La population d'oscillateurs s'est scindée en deux groupes : d'un côté, les oscillateurs ayant une pulsation proche de la pulsation moyenne vont voir leur pulsation se bloquer à Ω , et vont tourner avec une même phase ψ ; de l'autre côté, les oscillateurs dont la pulsation se retrouve dans la queue de la distribution vont garder une pulsation proche de leur pulsation propre. Lorsque ces deux groupes sont identifiables, on se situe dans un état partiellement synchronisé.

Des histogrammes représentant la distribution en phase des oscillateurs ont été tracés, toujours pour $K = 1$, en début et en fin de simulation. Voici ce que l'on obtient :

On remarque sur ces deux histogrammes que les oscillateurs ont initialement une phase distribuée de façon uniforme entre 0 et 2π , puis qu'ils se synchronisent au fur et à mesure avec la phase moyenne générée par l'ensemble des oscillateurs. Comme on le voit sur les figures 2.2 et 2.3, les oscillateurs ayant une phase éloignée de la phase moyenne vont voir leur phase se rapprocher de ψ avec le temps. Ceci est bien la marque de la synchronisation des oscillateurs. Cependant, certains oscillateurs, même aux temps longs, comme sur la figure 2.3, ne se sont pas synchronisés. On peut donc distinguer deux classes d'oscillateurs : ceux qui se synchronisent, et ceux qui ne se synchronisent pas.

En conclusion, on retrouve bien les résultats attendus sur l'évolution temporelle de la cohérence des oscillateurs, ainsi que sur leur synchronisation.

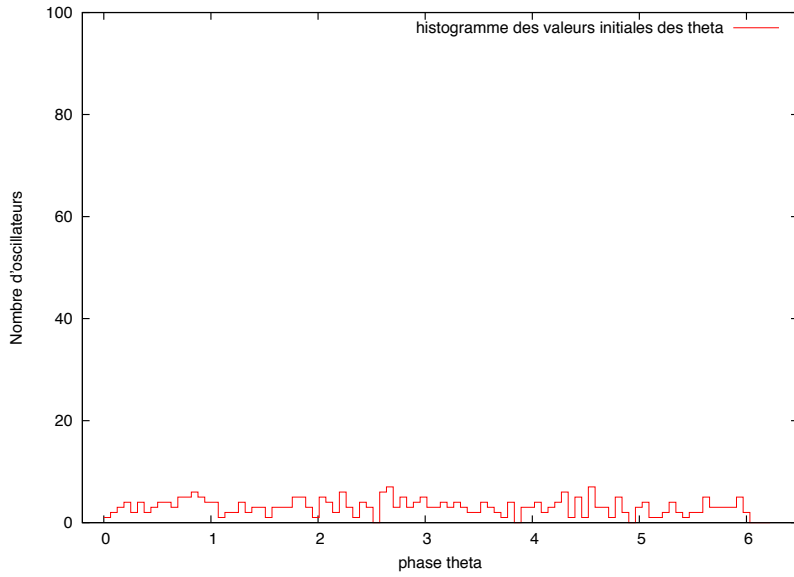


FIG. 2.2: Distribution initiale des phases des oscillateurs

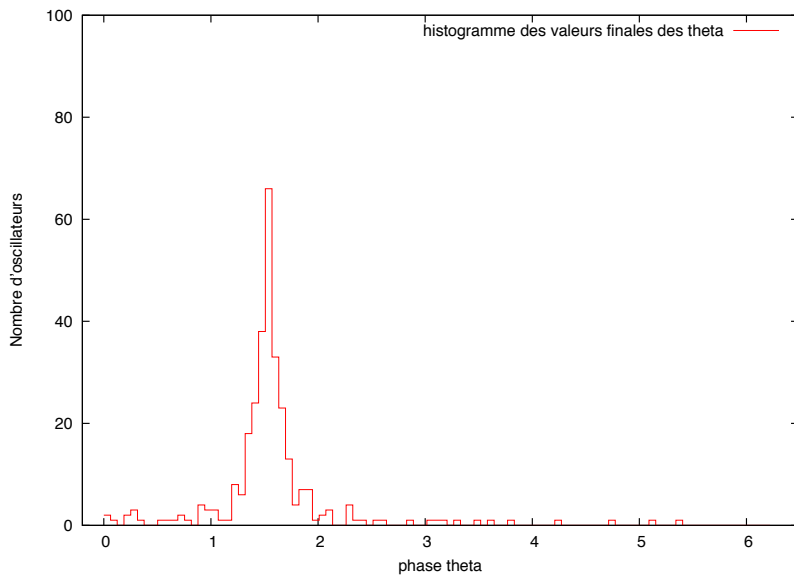


FIG. 2.3: Distribution finale des phases des oscillateurs

2.3 Influence du coefficient de couplage K

2.3.1 Evolution de la cohérence en régime stationnaire avec le coefficient de couplage K

2.3.2 Détermination du coefficient alpha du modèle d'Ising

2.3.3 Influence de la forme de la distribution des fréquences propre des oscillateurs

[1]

Chapitre 3

Influence de la distribution initiale des pulsations

3.1 distribution gaussienne

3.2 distribution de Cauchy décalée

3.3 distribution “chapeau”

Chapitre 4

Influence du nombre d'oscillateurs

A partir de quel nombre d'oscillateurs obtient-on des graphes potables ?

Bibliographie

- [1] J. D. CRAWFORD, « Scaling and singularities in the entrainment of globally coupled oscillators », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 4341–4344, May 1995.

Table des figures

1.1	Interprétation géométrique du paramètre d'ordre complexe	4
2.1	Évolution temporelle de la cohérence	7
2.2	Distribution initiale des phases des oscillateurs	8
2.3	Distribution finale des phases des oscillateurs	8