



Préceptorat Échelles d'Espace et de Temps

La synchronisation d'oscillateurs

Flore MEKKI-BERRADA
Vincent VERCAMER

juin 2011

Table des matières

1	Le modèle de Kuramoto	4
1.1	Approche théorique	4
1.1.1	Modèle de Kuramoto	4
1.1.2	Mise en évidence de deux types de comportement	5
1.1.3	Détermination théorique des paramètres critiques du modèle	5
1.2	Analogies avec le modèle d'Ising	7
2	Simulation avec l'approximation champ moyen	8
2.1	Simulation	8
2.2	Évolution de la cohérence avec le temps	9
2.3	Temps caractéristique de stabilisation	11
2.4	Influence du coefficient de couplage K	11
2.4.1	Évolution de la cohérence en régime stationnaire avec le coefficient de couplage K	11
2.4.2	Détermination de l'exposant critique β du modèle de Kuramoto	12
3	Influence de la distribution initiale des pulsations	14
3.1	Distribution gaussienne	14
3.2	Distribution de Cauchy décalée	16
3.3	Distribution <i>chapeau</i>	17
4	Influence du nombre d'oscillateurs	19
4.1	Influence sur l'écart entre simulation et théorie	19
4.2	Influence sur la valeur simulée de β	19
	Bibliographie	21

Introduction

Lorsque l'on observe des populations d'oscillateurs non linéaires couplés entre eux, chaque population ayant sa propre fréquence, il arrive que celles-ci se synchronisent spontanément à une fréquence commune. C'est ce que l'on appelle la synchronisation collective d'oscillateurs. La synchronisation d'oscillateurs est un phénomène que l'on retrouve fréquemment en science. Par exemple en biologie, on retrouve ce phénomène dans le comportement des cellules cardiaques : celles-ci synchronisent leurs battements pour faire fonctionner le cœur ; dans les réseaux de neurones, permettant ainsi la transmission des messages nerveux ; ou bien encore chez les grillons et les lucioles chez qui on observe une synchronisation collective des crisements et respectivement des émissions lumineuses. En physique, des phénomènes de synchronisation ont été mis en évidence dans les réseaux de jonctions Josephson [1]. Enfin, citons quelques exemples de la vie courante, comme la marche au pas, la synchronisation des applaudissements d'une foule ou encore la synchronisation de métronomes.

Le phénomène de synchronisation collective a commencé à être étudié dès les années 1960. A.T. Winfree fut pionnier dans ce domaine. Celui-ci fit une étude mathématique des populations d'oscillateurs et montra qu'il existait une analogie avec les modèles de transition de phase thermodynamique. Y. Kuramoto [2] développa par la suite un modèle basé sur la théorie du champ moyen et trouva une solution exacte au problème des oscillateurs couplés. Enfin, Crawford reprit les travaux de Y. Kuramoto, et chercha à résoudre plusieurs problèmes, notamment celui concernant la stabilité des solutions du modèle [2][3].

Nous avons ici souhaité reprendre la théorie de Kuramoto afin de comprendre les analogies existantes avec le modèle d'Ising. Cela nous a amené à faire des simulations qui nous ont permis de comprendre comment se synchronisaient les oscillateurs.

Chapitre 1

Le modèle de Kuramoto

Dans cette partie, nous allons utiliser l'approximation champ moyen. Ceci nous permettra de résoudre plus simplement le problème

1.1 Approche théorique

1.1.1 Modèle de Kuramoto

Considérons une importante population de N oscillateurs semblables (d'amplitude égale à 1 mais dont les phases θ_i et les pulsations propres ω_i diffèrent), couplés entre eux, et mettons-nous dans le cas où le couplage $\Gamma_{ij}(\theta)$, entre deux oscillateurs i et j , est faible et ne dépend que de la phase. La phase de l'oscillateur i , notée θ_i , suit alors l'expression :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta) \quad (1.1)$$

Dans le cas où le couplage ne dépend que de la différence de phase entre les oscillateurs, et en supposant que cette dépendance est sinusoïdale, on a alors :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1.2)$$

K est appelé coefficient de couplage.

On intuite que lorsque la distribution des pulsations propres des oscillateurs est large, les oscillateurs vont se comporter de façon incohérente et garderont chacun leur propre fréquence. En revanche, lorsque cette distribution sera suffisamment étroite pour que le couplage ait de l'influence, une partie des oscillateurs va se synchroniser.

Notons $g(\omega)$ la distribution des pulsations propres des oscillateurs. Supposons que g est unimodale et symétrique par rapport à la pulsation moyenne Ω des oscillateurs, prise nulle par changement de variable. On a alors $g(-\omega) = g(\omega)$.

Nous allons à présent utiliser une représentation géométrique pour visualiser l'évolution des phases des oscillateurs. Chaque oscillateur est caractérisé par sa phase θ_i . On représentera chaque oscillateur par un point se déplaçant sur le cercle trigonométrique avec sa propre phase θ_i (cf. figure 1.1).

On peut alors définir le paramètre d'ordre complexe de module r et de phase ψ de la façon suivante :

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (1.3)$$

Plus les oscillateurs oscilleront de façon cohérente, plus la population se comportera comme un unique oscillateur, et plus r sera proche de 1 ; en revanche, plus les oscillateurs oscilleront de façon incohérente, plus ils seront dispersés aléatoirement sur le cercle trigonométrique, et plus r tendra vers 0. Ainsi,

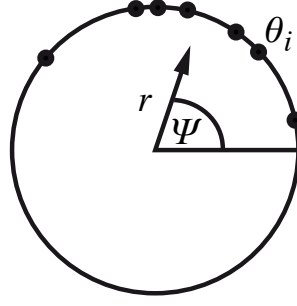


FIGURE 1.1 – Interprétation géométrique du paramètre d'ordre complexe

r représente la cohérence de phase de la population d'oscillateurs. ψ représente quant à lui la phase moyenne des oscillateurs.

En multipliant le paramètre d'ordre par $e^{-i\theta_i}$, puis en ne gardant que la partie imaginaire de l'expression ainsi obtenue, on trouve que :

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1.4)$$

En réinjectant ce résultat dans l'équation 1.2, on obtient alors :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\psi - \theta_i) \quad (1.5)$$

On fait apparaître ici l'approximation champ moyen. En effet, la phase θ_i de l'oscillateur i ne dépend plus de la phase des autres oscillateurs θ_j , mais de la cohérence de phase r et de la phase moyenne ψ . Ainsi, un oscillateur ne ressentira pas les autres oscillateurs indépendamment les uns des autres, mais ressentira le champ moyen créé par tous les oscillateurs du groupe.

Nous détaillerons dans la partie 1.2 les analogies existant entre le modèle de Kuramoto et le modèle d'Ising.

1.1.2 Mise en évidence de deux types de comportement

Dans cette partie, nous allons chercher les solutions stationnaires du problème. On va donc prendre $r(t)$ constant et $\psi(t)$ tournant à une pulsation Ω . En se mettant dans le référentiel tournant à la pulsation Ω , on peut alors se ramener au cas où $\psi = 0$, et l'équation 1.5 devient alors :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i) \quad (1.6)$$

L'équation 1.6 met en évidence deux types de comportements à long terme des oscillateurs. En effet, si la pulsation de l'oscillateur i vérifie $|\omega_i| \leq Kr_\infty$, alors l'équation 1.6 admet un point fixe stable défini par :

$$\omega_i = Kr_\infty \sin(\theta_i) \quad (1.7)$$

Ce type d'oscillateur sera qualifié de "locked", ou *oscillateur bloqué*, dans la suite du rapport.

En revanche, si la pulsation de l'oscillateur i ne vérifie pas cette relation, on a alors : $|\omega_i| > Kr_\infty$, et on n'aura pas de point fixe stable. L'oscillateur va voir sa pulsation dériver. Ce type d'oscillateur sera qualifié de "drifting", ou *oscillateur à la dérive*.

1.1.3 Détermination théorique des paramètres critiques du modèle

Pour déterminer les paramètres critiques du modèle, nous allons introduire $\rho(\theta, \omega)$, la densité de probabilité donnant la fraction d'oscillateurs dont la pulsation est ω et dont la phase est comprise entre θ et $\theta + d\theta$. L'équation de conservation du nombre d'oscillateurs s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial \theta} = 0 \quad (1.8)$$

Comme on est dans l'hypothèse du régime stationnaire, on a $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, ce qui entraîne que ρ est proportionnel à l'inverse de la vitesse $|\dot{\theta}|$.

Comme de plus, on sait que $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$, on en déduit que :

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2 - (Kr_{\infty})^2}}{|\omega - Kr_{\infty} \sin(\theta)|} \quad (1.9)$$

Décomposons maintenant les signaux des oscillateurs en fonction de leur type. En prenant $\psi = 0$, on obtient :

$$\langle e^{i\theta} \rangle = r_{\infty} = \langle e^{i\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{i\theta} \rangle_{drift} \quad (1.10)$$

Considérons tout d'abord la contribution des oscillateurs bloqués. Ceux-ci vont atteindre en régime stationnaire une phase vérifiant $\sin(\theta) = \frac{\omega}{Kr_{\infty}}$. Comme la distribution g des pulsations propres des oscillateurs est symétriques, en considérant qu'on a un grand nombre d'oscillateurs, on a donc $\langle \sin(\theta) \rangle_{lock} = 0$. On obtient alors après calculs :

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{lock} = \int_{-Kr_{\infty}}^{Kr_{\infty}} e^{i\theta} g(\omega) d\omega = Kr_{\infty} \int_{-Kr_{\infty}}^{Kr_{\infty}} \cos^2(\theta) g(Kr_{\infty} \sin \theta) d\theta \quad (1.11)$$

Considérons maintenant la contribution des oscillateurs à la dérive. On a :

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{drift} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr_{\infty}} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (1.12)$$

Or cette intégrale est nulle du fait des symétries de g et de ρ .

On obtient donc finalement l'équation suivante :

$$r_{\infty} = Kr_{\infty} \int_{-Kr_{\infty}}^{Kr_{\infty}} \cos^2(\theta) g(Kr_{\infty} \sin \theta) d\theta \quad (1.13)$$

Cette équation a deux solutions. La première est la solution nulle $r_{\infty} = 0$, et l'autre vérifie l'équation :

$$1 = K \int_{-Kr_{\infty}}^{Kr_{\infty}} \cos^2(\theta) g(Kr_{\infty} \sin \theta) d\theta \quad (1.14)$$

Par continuité des solutions, on doit retrouver l'égalité de ces deux solutions pour un coefficient de couplage critique noté K_c , lorsqu'on fait tendre r_{∞} vers 0 dans l'équation 1.14. Cette égalité nous permet après calculs d'en déduire que :

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (1.15)$$

En résolvant l'équation 1.14, Kuramoto en déduit que juste au-dessus du point critique, on a une amplitude de bifurcation suivant une loi en racine carrée :

$$r_{\infty} = \sqrt{\frac{k}{\alpha}} \quad (1.16)$$

$$\text{avec } k = \frac{K - K_c}{K} \quad (1.17)$$

$$\text{et } \alpha = \frac{-\pi K_c^3 g''(0)}{16} \quad (1.18)$$

Pour une distribution des pulsations propres g ayant une forme de lorentzienne de paramètre γ , Kuramoto a intégré l'équation 1.14, trouvant ainsi une solution exacte au problème :

$$r_{\infty} = \sqrt{\frac{K - K_c}{K}} \quad (1.19)$$

1.2 Analogies avec le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising permet de modéliser des problèmes où N corps ont deux états accessibles (dans le cas du réseau de spin : les états "spin up" et "spin down") et où les interactions locales vont avoir des effets collectifs. Dans notre cas, nous sommes en présence d'oscillateurs qui ont pour états accessibles les états "locked" et "drifting".

Dans le modèle d'Ising appliqué au ferromagnétisme, on considère le paramètre d'ordre m , qui n'est autre que le module de l'aimantation globale du réseau de spins. Ce paramètre est dépendant de la température T du système. Dans notre cas, le paramètre d'ordre réel est r , le module de la somme des signaux des oscillateurs. Celui-ci est dépendant du coefficient de couplage K .

On remarque cependant une différence entre les deux modèles : dans le modèle d'Ising appliqué au ferromagnétisme, on introduit l'écart de température réduit

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (1.20)$$

et le modèle nous permet d'arriver à l'équation :

$$m = t^\beta \quad \text{avec} \quad \beta = 0.5 \quad (1.21)$$

β étant appelé *exposant critique*.

En revanche, dans le modèle de Kuramoto, il faut poser :

$$k = \frac{K - K_c}{K} \quad (1.22)$$

pour pouvoir retomber sur :

$$r = k^\beta \quad \text{avec} \quad \beta = 0.5 \quad (1.23)$$

Notons tout de même que l'on garde la dépendance en racine carrée.

Enfin, nous verrons dans la partie 2.3 que le temps caractéristique du problème diverge au voisinage du point critique, ce qui n'est pas le cas dans le modèle d'Ising. En effet, dans le modèle de Kuramoto, on a une bifurcation ; le temps caractéristique, temps au bout duquel le système se stabilise, diverge en $K = K_c$ et décroît exponentiellement lorsque $K \geq K_c$ (cf figure 2.6). Dans le modèle d'Ising, on observe en revanche un ralentissement critique, et non une divergence.

L'ensemble des analogies entre le modèle d'Ising et le modèle de Kuramoto ont été répertoriées dans le tableau 1.1.

	modèle de Kuramoto	modèle d'Ising
corps	oscillateurs	spins
paramètre d'ordre	r	m
écart au point critique	k	t
exposant critique β	0.5	0.5
temps caractéristique	divergence	ralentissement

TABLEAU 1.1 – Analogies et différences entre le modèle de Kuramoto et le modèle d'Ising

Chapitre 2

Simulation avec l'approximation champ moyen

2.1 Simulation

Nous avons effectué une simulation du modèle de Kuramoto en langage C. L'avantage du C par rapport à Matlab est la puissance de calcul disponible et les temps de calcul réduits, qui permettent de réaliser de lourdes simulations beaucoup plus rapidement. La *GSL (GNU Scientific Library)* est une bibliothèque libres contenant plus de 1000 fonctions mathématiques, nous l'avons utilisé car les fonctions sont fiables et déjà optimisées. Dans cette simulation, l'approximation champ moyen a été utilisée. Ainsi, la distribution des pulsations propres des oscillateurs a été générée aléatoirement. Dans un premier temps, la fonction de distribution g a été assimilée à une fonction de Cauchy (lorentzienne, cf. figure 2.1). Nous verrons dans le chapitre 3 l'influence de la distribution g sur les résultats.

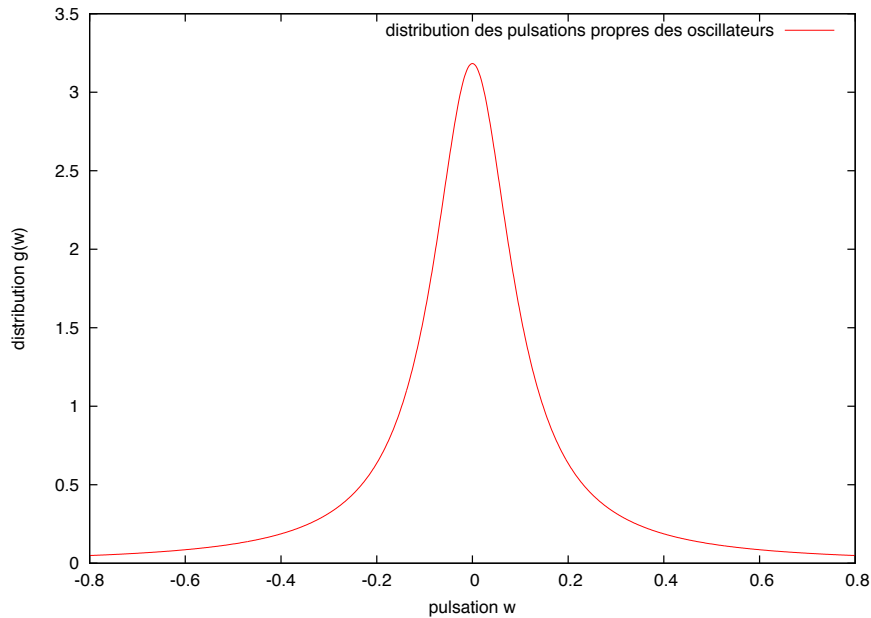
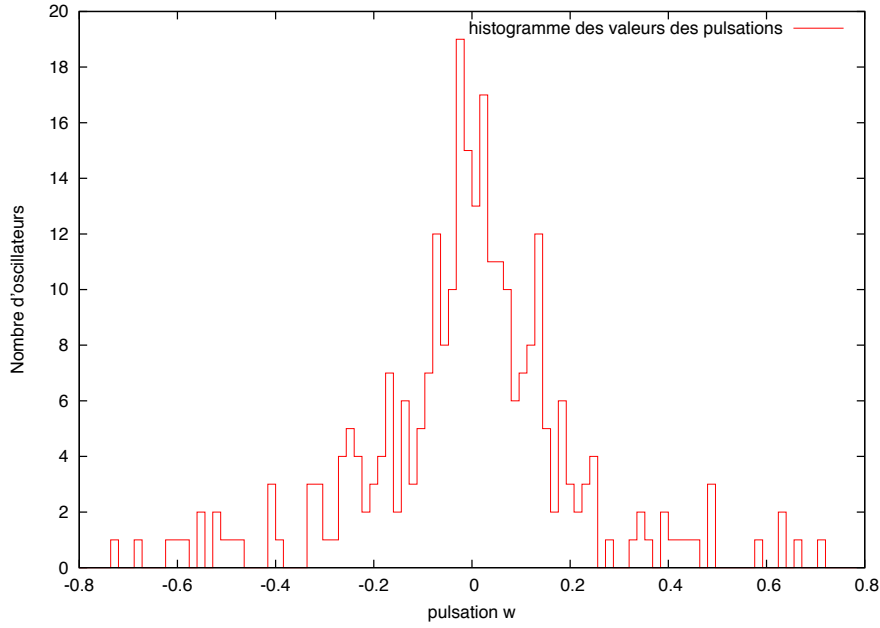


FIGURE 2.1 – distribution de Cauchy

Le programme que nous avons fait fonctionne de la façon suivante : on commence par définir les pulsations propres ω_i des oscillateurs. Pour cela, on les choisit aléatoirement suivant la fonction de distribution g .

Ensuite, pour différentes valeurs du coefficient de couplage K , nous avons cherché à simuler l'évolution temporelle des paramètres r et ψ de l'approximation champ moyen. Pour s'affranchir de l'influence des valeurs initiales des phases des oscillateurs sur r et ψ , un moyennage sur plusieurs réalisations a été fait. Ainsi, pour chaque valeur de K , la phase initiale θ_i des oscillateurs a été redéterminée aléatoirement,


 FIGURE 2.2 – Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs

entre 0 et 2π .

Nous remarquerons ici que faire une simulation sur plusieurs réalisations ne revient pas à augmenter le nombre d'oscillateurs, car le champ moyen généré n'est pas le même suivant le nombre d'oscillateurs. Augmenter le nombre de réalisations nous permettra donc seulement de moyenner nos résultats, et non de regarder le comportement à grand nombre d'oscillateurs.

r et ψ ont ensuite été calculés à partir des phases des oscillateurs par la relation 1.4 en utilisant l'approximation de champ moyen ; puis la valeur des phases des oscillateurs au pas de temps suivant a été déterminé par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4. En réitérant ce processus, les évolutions temporelles des θ_i , de r et de ψ ont été déterminées.

Une fois que cela est fait, il suffit alors de déterminer pour chaque valeur de K la valeur asymptotique de r . Pour cela, nous avons calculé pour chaque réalisation la moyenne des valeurs de r sur toute la période temporelle de la simulation, dans le cas où $K \leq K_c$, et nous avons calculé la moyenne des valeurs de r sur tous les r supérieurs à 90% de r_{max} , dans le cas où $K \geq K_c$. Nous avons ensuite déterminé la moyenne des valeurs ainsi obtenues avec les différentes réalisations ; nous avons noté cette moyenne r_∞ .

Pour chaque simulation, deux histogrammes ont été tracés : le premier correspond à la distribution initiale des θ_i et le deuxième à la distribution finale des θ_i . Dans le cas où l'on s'intéresse à plusieurs valeurs de K et à un moyennage sur plusieurs réalisations, seuls les histogrammes correspondant à la dernière valeur de K et à la première réalisation ont été affichés. Ces histogrammes nous permettent de voir de façon ostensible la synchronisation des oscillateurs.

Enfin, nous avons calculé le logarithme de r_∞ et de $k = \frac{K-K_c}{K}$. Le tracé de $\log(r_\infty)$ en fonction de $\log(\frac{K-K_c}{K})$ pour $K \geq K_c$ nous permet de vérifier l'approximation champ moyen et d'en déduire par régression linéaire la valeur de l'exposant β .

Dans la suite, les différentes simulations dont les résultats sont présentés ont été réalisées avec 300 oscillateurs, en prenant pour les courbes temporelles 10000 points avec un espacement temporel de $\Delta T = 0.1$. La distribution des ω_i a été choisie de Cauchy, centrée sur 0 ($\Omega = 0$) et d'écart-type $\sigma = 0.1$.

2.2 Évolution de la cohérence avec le temps

La simulation permet de visualiser l'évolution temporelle de r pour différentes valeurs de K . Le résultat de la simulation obtenu pour 10 réalisations et pour 300 oscillateurs est présenté figure 2.3.

On observe sur la figure 2.3 l'existence d'une valeur seuil pour $K = 0.2$. En effet, pour des K inférieurs à cette valeur critique K_c , le couplage est trop faible et les oscillateurs se comportent comme

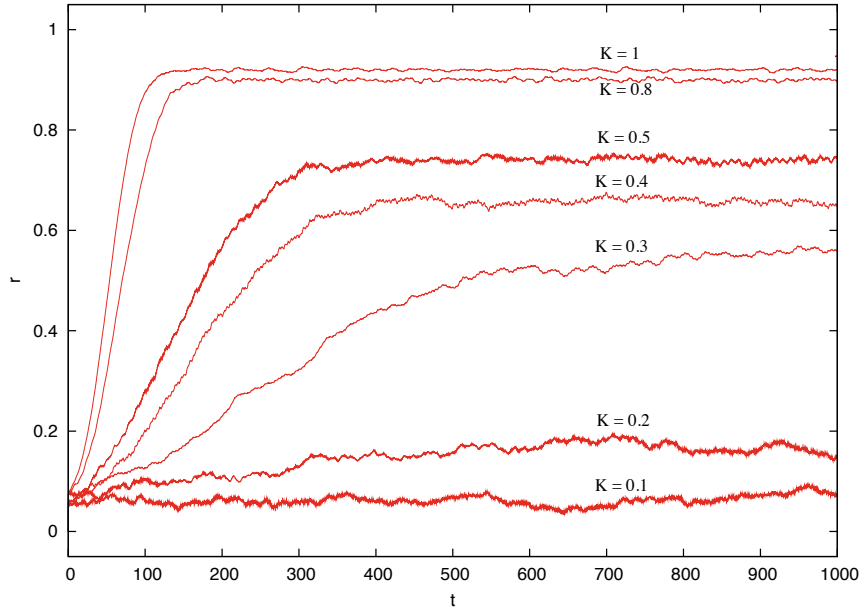


FIGURE 2.3 – évolution temporelle de la cohérence pour 300 oscillateurs avec un moyennage sur 10 réalisations

s'ils n'étaient pas couplés. Les phases sont distribuées de façon uniforme sur le cercle trigonométrique, et ce, quelle que soit la condition initiale. On obtient alors une cohérence de phase faible, mais présentant des variations assez importantes. En revanche, pour des K supérieurs à K_c , l'état incohérent devient instable et on observe une augmentation brutale de r jusqu'à atteindre une valeur de saturation r_∞ , inférieure à 1. Cela montre bien qu'une partie du groupe d'oscillateurs s'est synchronisée tandis que le reste du groupe est resté incohérent. La population d'oscillateurs s'est scindée en deux groupes : d'un côté, les oscillateurs ayant une pulsation proche de la pulsation moyenne vont voir leur pulsation se bloquer à Ω , et vont tourner avec une même phase ψ ; de l'autre côté, les oscillateurs dont la pulsation se retrouve dans la queue de la distribution vont garder une pulsation proche de leur pulsation propre. Lorsque ces deux groupes sont identifiables, on se situe dans un état partiellement synchronisé.

Des histogrammes représentant la distribution en phase des oscillateurs ont également été tracés, pour $K = 1$, en début et en fin de simulation (cf figures 2.4 et 2.5).

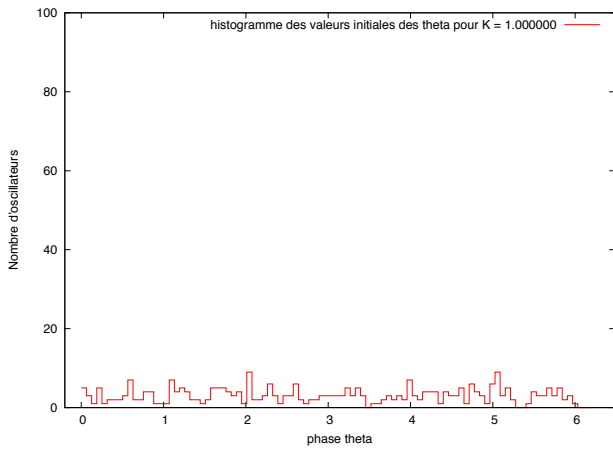


FIGURE 2.4 – histogramme des valeurs initiales des theta

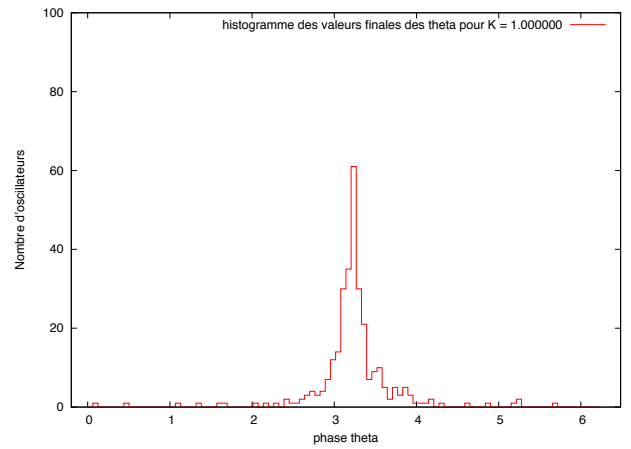


FIGURE 2.5 – histogramme des valeurs finales des theta

On remarque sur ces deux histogrammes que les oscillateurs ont initialement une phase distribuée de façon uniforme entre 0 et 2π , puis qu'ils se synchronisent au fur et à mesure avec la phase moyenne

générée par l'ensemble des oscillateurs. Comme on le voit sur ces deux histogrammes, les oscillateurs ayant une phase éloignée de la phase moyenne vont voir leur phase se rapprocher de ψ avec le temps. Ceci est bien la marque d'une synchronisation des oscillateurs. Cependant, certains oscillateurs, même aux temps longs, comme sur la figure 2.5, ne se sont pas synchronisés. On peut donc distinguer deux classes d'oscillateurs : ceux qui se synchronisent (oscillateurs bloqués), et ceux qui ne se synchronisent pas (oscillateurs à la dérive).

En conclusion, on retrouve bien les résultats attendus sur l'évolution temporelle de la cohérence des oscillateurs, ainsi que sur leur synchronisation. Il serait possible d'approfondir cette étude en regardant la facilité d'un oscillateur à se synchroniser en fonction de l'écart de sa pulsation propre à la pulsation moyenne des oscillateurs.

2.3 Temps caractéristique de stabilisation

Regardons maintenant l'évolution du temps caractéristique de stabilisation T_c en fonction de K . Ce temps caractéristique est défini ici comme le temps au bout duquel la cohérence r atteint 90% de sa valeur maximale. Cette définition n'a de sens que pour des coefficients de couplage supérieurs à K_c . Pour des coefficients de couplage proches de K_c , on s'attend à avoir des temps caractéristiques très importants, vu l'évolution observée sur la figure 2.3. Et pour des valeurs croissantes de K , on s'attend à une diminution de T_c .

Le résultat obtenu pour un moyennage sur 4 réalisations de r et pour des valeurs de K comprises entre 0 et 2 est présenté figure 2.6.

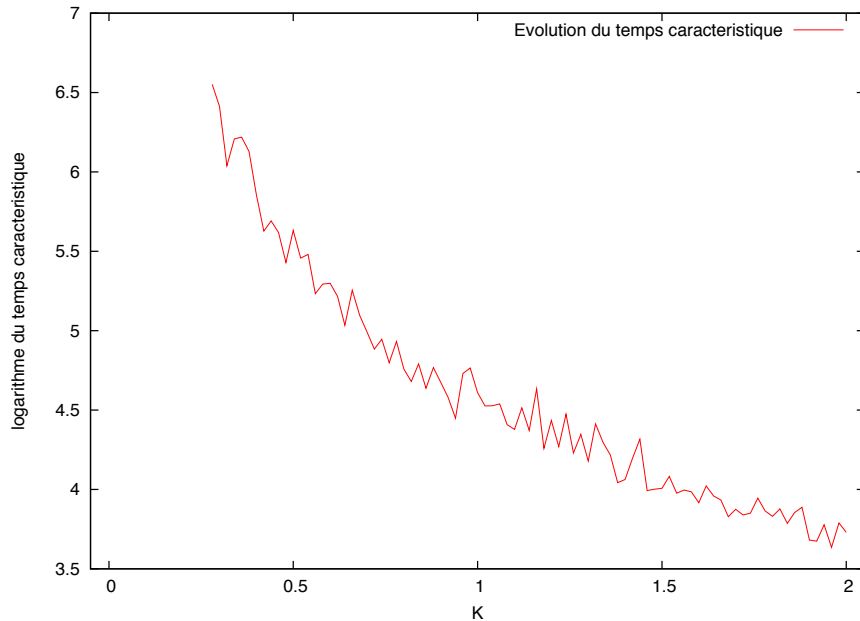


FIGURE 2.6 – Évolution du temps caractéristique de stabilisation en fonction de K

On observe sur cette figure une divergence du temps caractéristique de stabilisation au voisinage du point critique. Au-delà du point critique K_c , le temps caractéristique T_c semble décroître exponentiellement avec K . Ainsi, pour des valeurs de K proches de K_c , on veillera à prendre des temps de simulation suffisamment longs pour laisser le temps au système de se bloquer partiellement.

2.4 Influence du coefficient de couplage K

2.4.1 Évolution de la cohérence en régime stationnaire avec le coefficient de couplage K

En traçant la cohérence stabilisée r_∞ en fonction de K , on obtient alors la figure 2.7. On peut distinguer trois régimes différents que nous repèrerons par rapport à $K_c = 0.2$:

- Pour $K > K_c$, une fois le régime transitoire terminé, la cohérence se stabilise autour d'une valeur stable.
- Pour $K < K_c$, la cohérence est quasi nulle, seul le bruit dû au mouvement des oscillateurs *drifting* fait que cette cohérence est légèrement positive.
- Pour $K \simeq K_c$, la cohérence est instable, le système passe de l'état *drifting* à l'état *locked* et réciproquement de façon aléatoire.

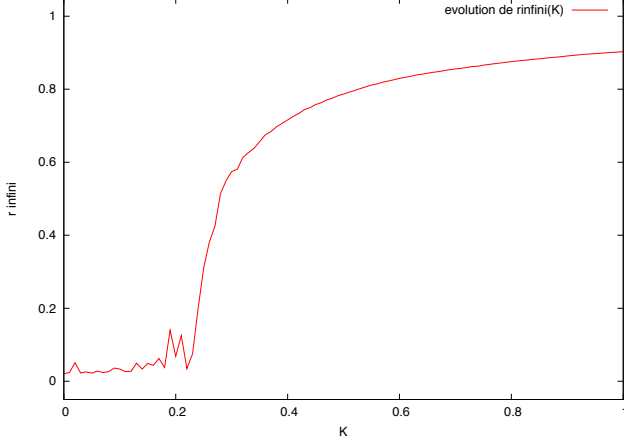


FIGURE 2.7 – évolution du rayon infini en fonction de la constante de couplage K (1 réalisation, 2000 oscillateurs, 101 valeurs de K)

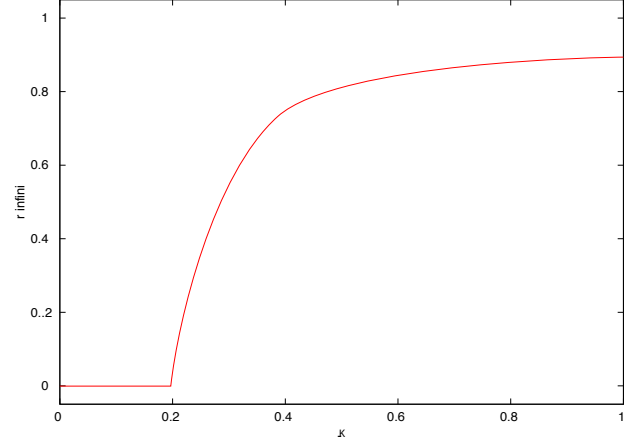


FIGURE 2.8 – évolution du rayon infini en fonction de la constante de couplage K (nombre infini d'oscillateurs)

Comme expliqué par Crawford [3], lorsque le nombre d'oscillateurs tend vers l'infini, l'état intermédiaire, $K \simeq K_c$, tend à disparaître et la courbe r_∞ en fonction de K ressemble à celle de la figure 2.8.

Dans la suite, nous noterons Δr l'écart relatif de cohérence entre la simulation et la théorie. On a :

$$\Delta r = \frac{r_{th} - r_\infty}{r_{th}} \quad (2.1)$$

où

$$r_{th} = \sqrt{k} \quad (2.2)$$

Nous verrons dans la partie 4.1 l'influence du nombre d'oscillateurs N sur l'écart relatif Δr .

2.4.2 Détermination de l'exposant critique β du modèle de Kuramoto

Afin de déterminer la valeur de l'exposant critique β , nous avons tracé $\log(r_\infty)$ en fonction de $\log(k)$, avec $k = \frac{K-K_c}{K}$. Nous avons vu précédemment que le temps caractéristique de stabilisation augmentait exponentiellement lorsque l'on s'approchait du point critique. C'est pourquoi nous avons augmenté le temps de simulation en effectuant la simulation sur 50000 points de mesures. Le résultat de la simulation pour 300 oscillateurs, avec un moyennage sur 4 réalisations et pour 1001 valeurs de K comprises entre 0 et 1 est présenté figure 2.9

Une régression linéaire a été ajoutée grâce à la fonction `gsl_fit_linear` de la librairie GSL. Celle-ci est également représentée sur la figure 2.9. Cette régression linéaire a pour équation :

$$y = ak + b \quad (2.3)$$

Or l'équation 1.16 relie a et b à α et β de la façon suivante :

$$a = \beta \quad (2.4)$$

$$b = -\frac{1}{2} \log \alpha \quad (2.5)$$

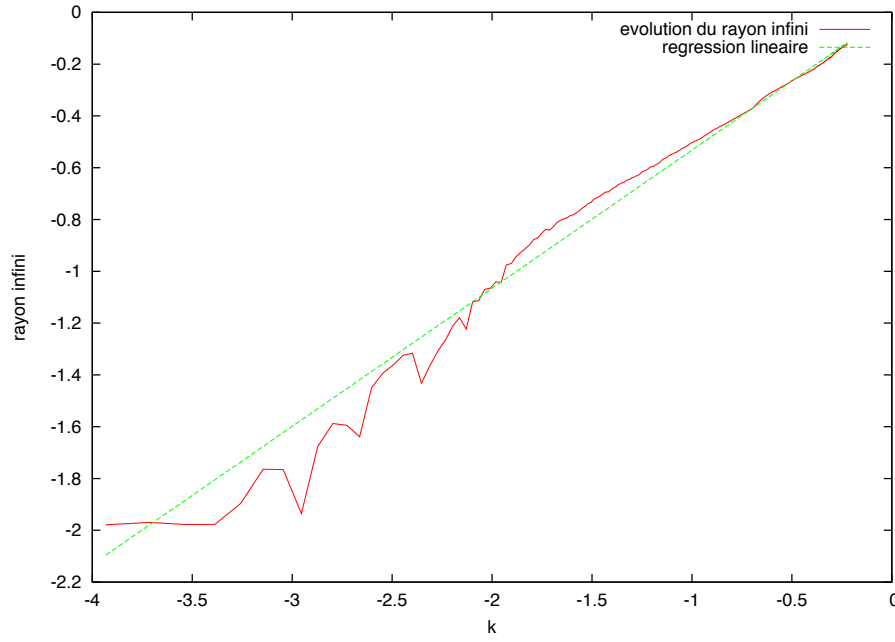


FIGURE 2.9 – Représentation logarithmique de l'évolution de r_∞ en fonction de k au-delà du seuil critique, avec sa régression linéaire

Ainsi, nous pouvons déduire de la simulation :

$$\alpha = 1.080261 \quad (2.6)$$

et

$$\beta = 0.457096 \quad (2.7)$$

le coefficient de corrélation étant de 0.998509.

Or d'après ce qu'on a vu dans la partie 1.1, on a :

$$\alpha_{théorique} = 1 \quad (2.8)$$

et

$$\beta_{théorique} = 0.5 \quad (2.9)$$

Ainsi, le résultat trouvé par la simulation est assez proche de la théorie, lorsque l'on regarde le comportement de 300 oscillateurs sur 4 réalisations.

Nous verrons dans la partie 4 qu'une augmentation du nombre d'oscillateurs a pour conséquence un rapprochement du paramètre α et de l'exposant critique β vers les valeurs théoriques attendues.

Chapitre 3

Influence de la distribution initiale des pulsations

Dans cette partie, nous avons cherché à connaître l'influence de la distribution initiale des oscillateurs sur leur comportement. Ainsi, nous avons testé 3 types de distributions : la distribution gaussienne, la distribution de Cauchy décalée et une distribution *chapeau*.

3.1 Distribution gaussienne

La distribution gaussienne a été réalisée en utilisant la fonction `gsl_ran_gaussian` de la librairie GSL. La distribution obtenue est présentée figure 3.1.

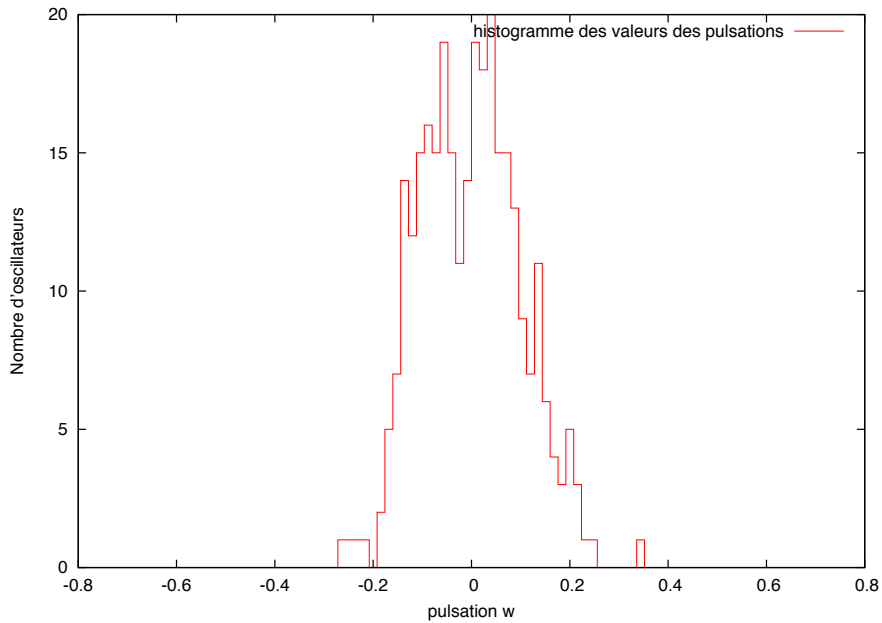


FIGURE 3.1 – Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs, pour une distribution gaussienne d'écart-type 0.1

L'évolution de la cohérence que l'on obtient en fonction du coefficient de couplage K pour 300 oscillateurs avec un moyennage sur 4 réalisations est présentée figure 3.2.

On est en théorie censé obtenir $K_c = 0.2$. On observe sur la courbe un décollement de la cohérence un peu avant $K = 0.2$. Le modèle de Kuramoto semble assez bien marcher pour cet autre type de distribution centré en 0 et dont la dérivée seconde en 0 est négative. Si l'on trace maintenant $\log(r_\infty)$ en fonction de $\log(k)$, on obtient la figure ??.

La régression linéaire de la courbe logarithmique $r_\infty = f(\log k)$ (cf. figure 3.6) est présentée figure

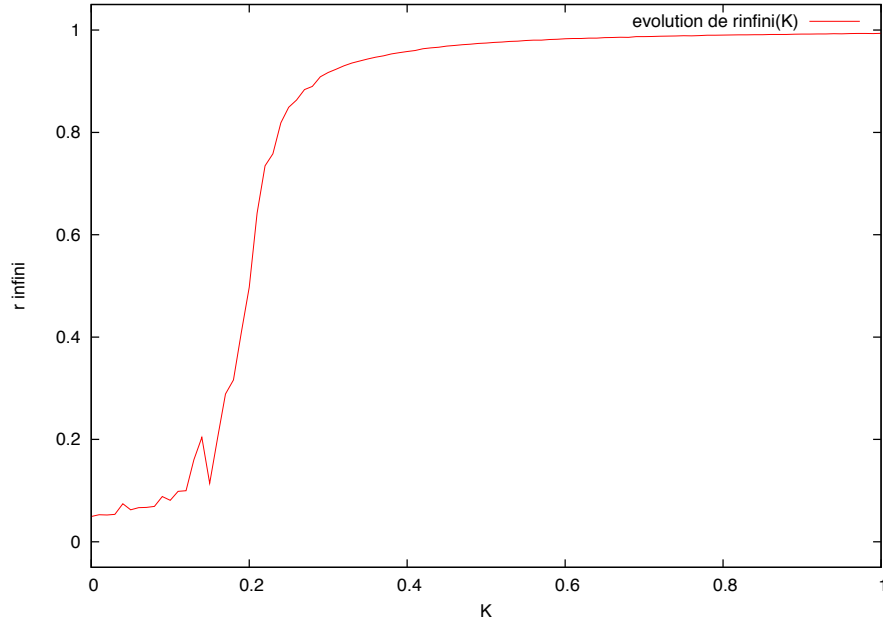


FIGURE 3.2 – Évolution de la cohérence stabilisée r_∞ en fonction de K , pour 300 oscillateurs, pour une distribution gaussienne d'écart-type 0.1

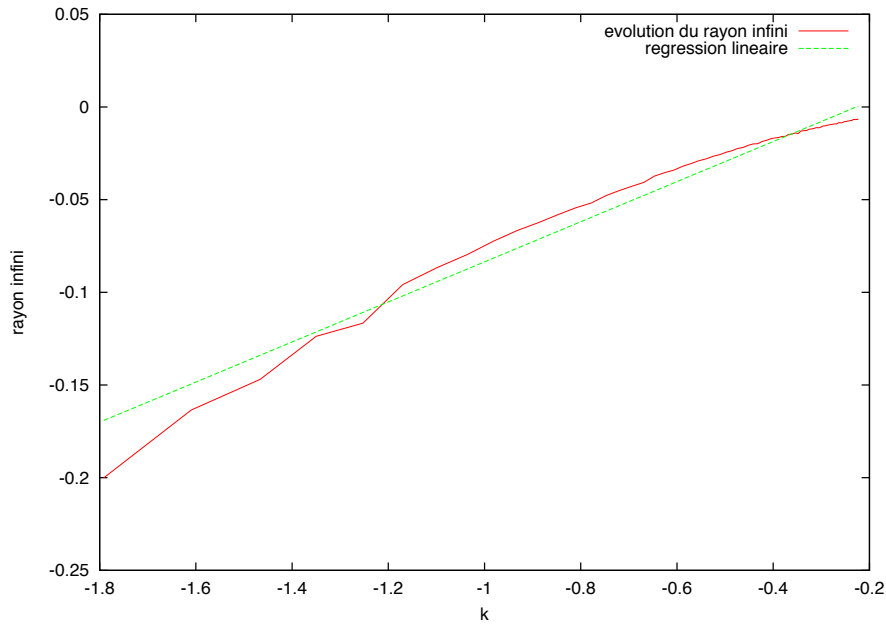


FIGURE 3.3 – Représentation logarithmique de l'évolution de r_∞ en fonction de k au-delà du seuil critique, avec régression linéaire, pour 300 oscillateurs, pour une distribution gaussienne d'écart-type 0.1

3.3.

$$\beta = 0.108145 \quad (3.1)$$

avec un coefficient de corrélation de 0.984344, et

$$\alpha = 0.892864 \quad (3.2)$$

Ainsi, il suffit de changer de distribution pour que l'on ne retrouve plus l'exposant critique prédit par la théorie.

3.2 Distribution de Cauchy décalée

Décaler la fonction de distribution revient à modifier Ω . Ainsi, on ne s'attend à aucun changement de comportement, du moment qu'on repasse bien dans le bon référentiel. Regardons si l'on peut vérifier cela.

La distribution de Cauchy décalée a été réalisée en ajoutant une constante valant 0.2 à toutes les pulsations initiales. Voici la distribution obtenue :

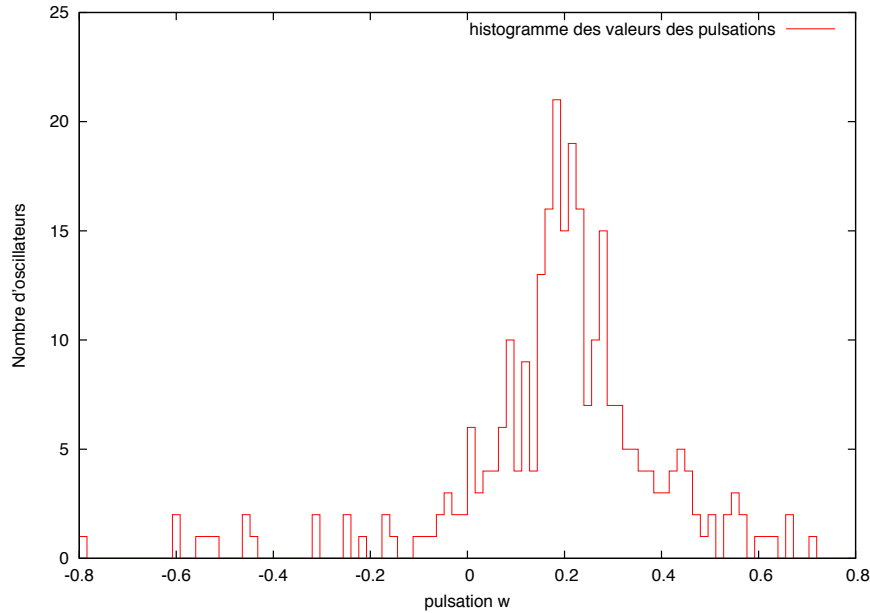


FIGURE 3.4 – Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs, pour une distribution de Cauchy décalée de 0.2

Voici l'évolution de la cohérence que l'on obtient en fonction du coefficient de couplage K pour 300 oscillateurs avec un moyennage sur 4 réalisations :

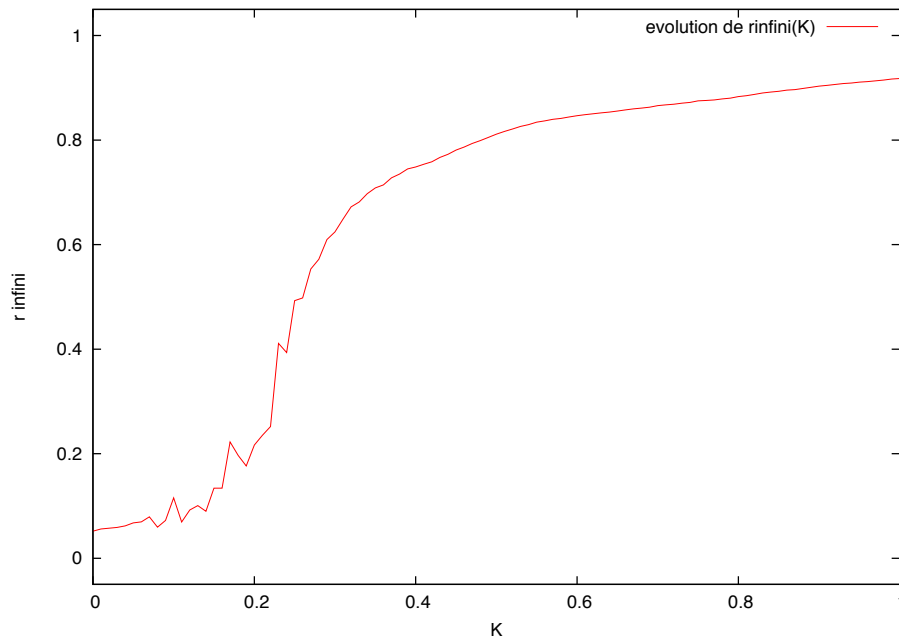


FIGURE 3.5 – Évolution de la cohérence stabilisée r_∞ en fonction de K , pour 300 oscillateurs, pour une distribution de Cauchy décalée de 0.2

On est ici dans le cas où $g''(0)$ est négatif. On a en théorie $K_c = 0.2$ si on se met dans le référentiel

où la distribution est centrée en 0, or on voit sur la courbe un décollement de la cohérence dès $K = 0.2$. On retrouve donc bien les résultats obtenus sans translation de la distribution des pulsations propres.

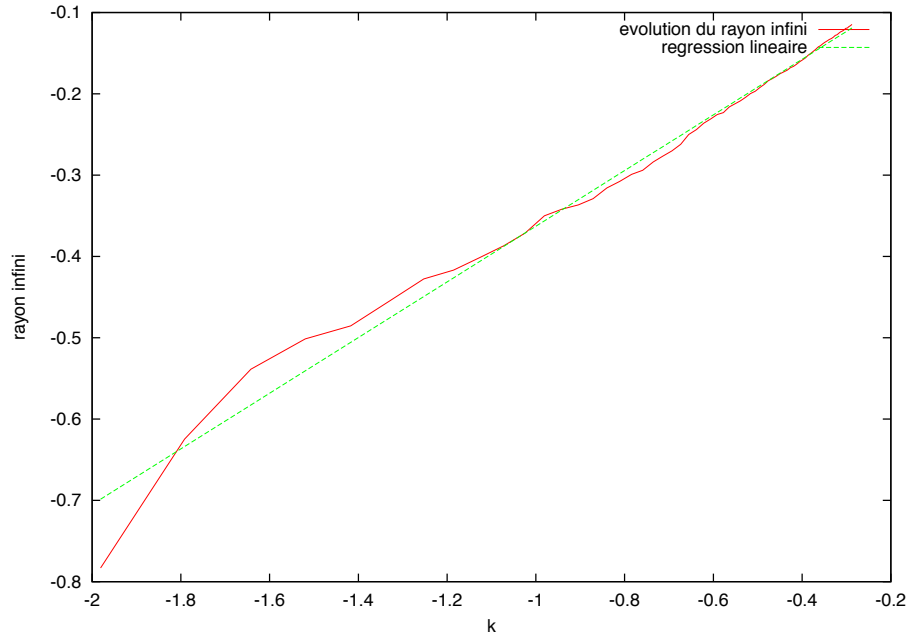


FIGURE 3.6 – Représentation logarithmique de l'évolution de r_∞ en fonction de k au-delà du seuil critique, avec sa régression linéaire, pour une distribution de Cauchy décalée de 0.2

3.3 Distribution *chapeau*

La distribution *chapeau* a été réalisée en sommant deux distributions de Cauchy décalée de 0.2 de part et d'autre de 0. Cela a été plus précisément effectué en ajoutant une constante valant 0.2 à la moitié des pulsations initiales et en retranchant 0.2 à l'autre moitié. La distribution obtenue est présentée figure 3.7.

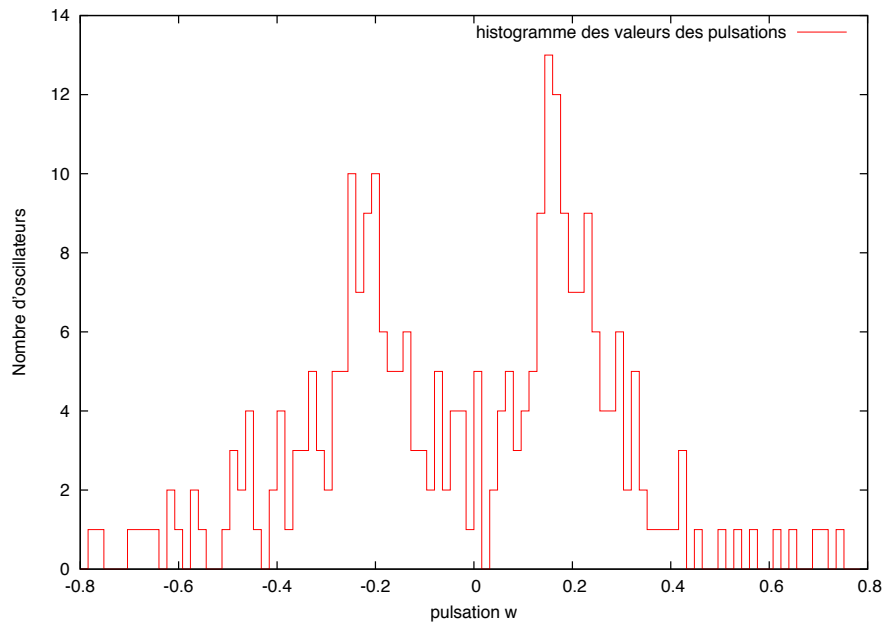


FIGURE 3.7 – Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs, pour une distribution *chapeau*

L'évolution de la cohérence que l'on obtient en fonction du coefficient de couplage K pour 300 oscillateurs avec un moyennage sur 4 réalisations est présentée figure 3.8.

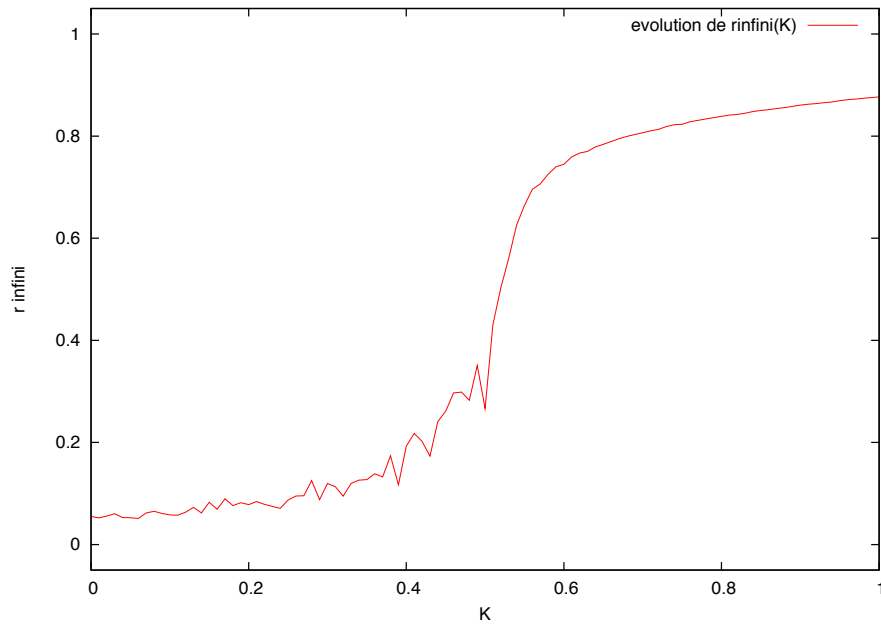


FIGURE 3.8 – Évolution de la cohérence stabilisée r_∞ en fonction de K , pour 300 oscillateurs, pour une distribution *chapeau*

On s'est donc mis ici dans le cas où $g''(0)$ est positif, avec une fonction g centrée sur 0. On a théoriquement $K_c = 1.0$, or on voit sur la courbe un décollement de la cohérence vers $K = 0.5$. Le modèle de Kuramoto ne s'applique donc pas dans le cas où la distribution a une dérivée seconde positive en 0.

Chapitre 4

Influence du nombre d'oscillateurs

4.1 Influence sur l'écart entre simulation et théorie

On s'attend à ce que Δr diminue lorsque l'on augmente le nombre d'oscillateurs. Or c'est bien ce que l'on trouve avec notre simulation (cf. figure 4.1) pour des valeurs de N allant de 50 à 2000 et un moyennage des résultats sur 10 réalisations.

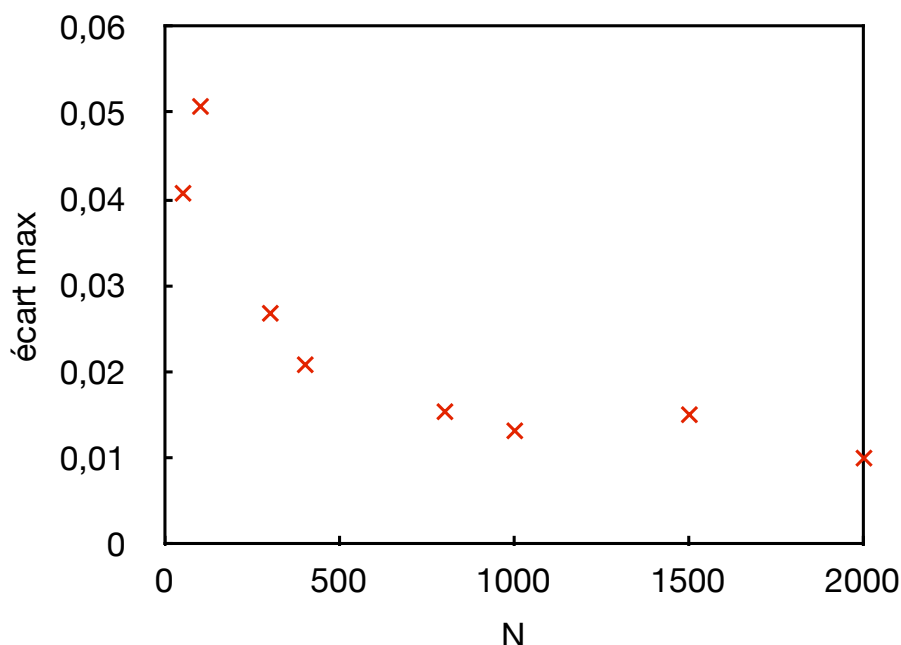


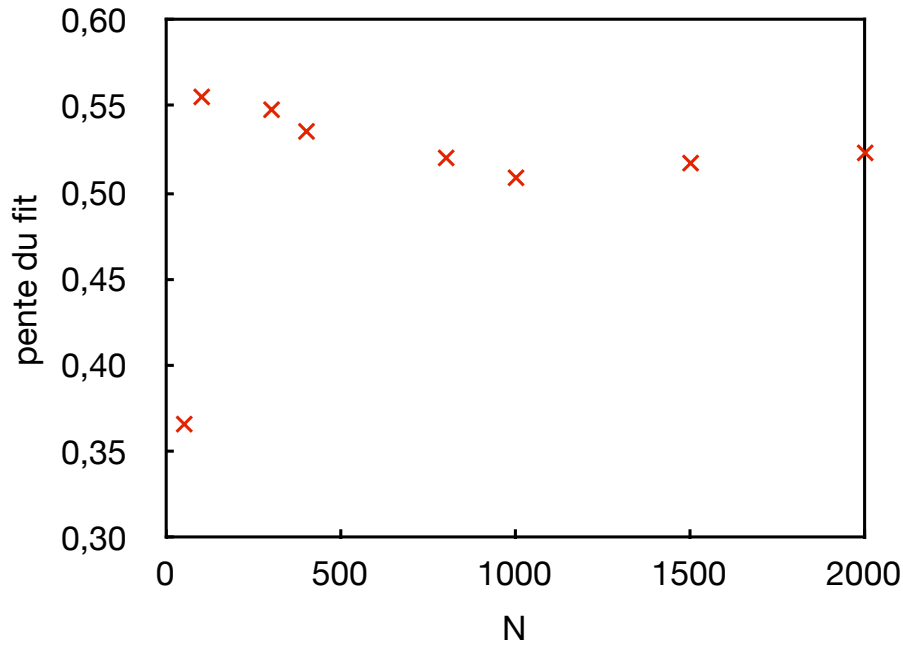
FIGURE 4.1 – Évolution de l'écart maximal entre simulation et théorie en fonction du nombre d'oscillateurs

En effet, on constate une diminution presque exponentielle de Δr en fonction de N . On remarque de plus que pour un nombre d'oscillateurs supérieur à 500, on n'observe plus de différence significative de l'écart relatif.

4.2 Influence sur la valeur simulée de β

Comme l'approche théorique repose sur un raisonnement avec un grand nombre d'oscillateurs, on s'attend à ce que la simulation se rapproche de la théorie, et donc que la valeur simulée de β se rapproche de 0.5. Pour le vérifier, nous avons fait des simulations pour différents nombres d'oscillateurs (cf. figure 4.2).

Sur la simulation, on observe, comme attendu, une diminution de l'écart entre le β simulé et le β théorique. Plus N est important, plus on se rapproche en effet de la théorie, faite pour un nombre infini d'oscillateurs.

FIGURE 4.2 – Évolution de l'exposant critique β en fonction du nombre d'oscillateurs

Pour conclure sur cette partie, on remarque que la simulation approche suffisamment les résultats théoriques attendus dès que l'on passe au-delà de quelques centaines d'oscillateurs.

Conclusion

Après avoir étudié la théorie de Kuramoto, fait des simulations avec l'approche champ moyen qui permet de réduire considérablement le nombre de calculs, et fait varier les différents paramètres de la simulation afin de regarder par exemple l'influence du nombre d'oscillateurs sur la synchronisation ; nous pouvons remarquer que les simulations permettent de reproduire les comportements observés dans la nature comme par exemple le clignotement synchrone des lucioles.

Pour aller plus loin dans la simulation, il serait possible de suivre l'évolution des oscillateurs en fonction de leur fréquence et regarder le temps passé dans l'état *locked* ou *drifting* en fonction de l'écart à la pulsation moyenne. Il serait aussi possible de réaliser une animation, pour illustrer le phénomène, en représentant les oscillateurs par les pixels d'une matrice carrée oscillants entre 0 (noir) et 1 (blanc) et se synchronisant pour qu'au final toute la matrice oscille en phase entre le blanc et le noir.

Bibliographie

- [1] K. WIESENFELD, P. COLET et S. H. STROGATZ, « Synchronisation transitions in a disordered josephson series array », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, p. 404–407, Jan 1996.
- [2] S. H. STROGATZ, « From kuramoto to crawford : exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators », *Physica D*, vol. 143, p. 1–20, 2000.
- [3] J. D. CRAWFORD, « Scaling and singularities in the entrainment of globally coupled oscillators », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 4341–4344, May 1995.

Table des figures

1.1	Interprétation géométrique du paramètre d'ordre complexe	5
2.1	distribution de Cauchy	8
2.2	Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs	9
2.3	évolution temporelle de la cohérence pour 300 oscillateurs avec un moyennage sur 10 réalisations	10
2.4	histogramme des valeurs initiales des theta	10
2.5	histogramme des valeurs finales des theta	10
2.6	Évolution du temps caractéristique de stabilisation en fonction de K	11
2.7	évolution du rayon infini en fonction de la constante de couplage K (1 réalisation, 2000 oscillateurs, 101 valeurs de K)	12
2.8	évolution du rayon infini en fonction de la constante de couplage K (nombre infini d'oscillateurs)	12
2.9	Représentation logarithmique de l'évolution de r_∞ en fonction de k au-delà du seuil critique, avec sa régression linéaire	13
3.1	Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs, pour une distribution gaussienne d'écart-type 0.1	14
3.2	Évolution de la cohérence stabilisée r_∞ en fonction de K , pour 300 oscillateurs, pour une distribution gaussienne d'écart-type 0.1	15
3.3	Représentation logarithmique de l'évolution de r_∞ en fonction de k au-delà du seuil critique, avec régression linéaire, pour 300 oscillateurs, pour une distribution gaussienne d'écart-type 0.1	15
3.4	Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs, pour une distribution de Cauchy décalée de 0.2	16
3.5	Évolution de la cohérence stabilisée r_∞ en fonction de K , pour 300 oscillateurs, pour une distribution de Cauchy décalée de 0.2	16
3.6	Représentation logarithmique de l'évolution de r_∞ en fonction de k au-delà du seuil critique, avec sa régression linéaire, pour une distribution de Cauchy décalée de 0.2	17
3.7	Histogramme des pulsations ω_i pour 300 oscillateurs, pour une distribution <i>chapeau</i>	17
3.8	Évolution de la cohérence stabilisée r_∞ en fonction de K , pour 300 oscillateurs, pour une distribution <i>chapeau</i>	18
4.1	Évolution de l'écart maximal entre simulation et théorie en fonction du nombre d'oscillateurs	19
4.2	Évolution de l'exposant critique β en fonction du nombre d'oscillateurs	20