Curso de verão

- Integração de Caminho MQ e ME

- QM AND PI: FEYnman / Hibbs.
- PQM / Shanka.
- CMFT / Altland / Simons
- QFT of many body system / Wen
- Notas José Hoyos. CANDRADE @ if.br.usp

(i) Intro
(ii) Lim ~~class~~. semi-~~cl~~ class.
(iii) Tempo im
(iv) Spin.

MQ MC

InTeg. $\longrightarrow$ Lagrange $S = \int dt\, L \rightarrow \delta S = 0$.

Schro $\longrightarrow$ Hamilton

- Princípio da superposição (Implementação diferente).
- Define melhor o limite semi-Clássico.
- Estamos interessados no propagador $\hat{\mathcal{U}}$:

$$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i)\, |\psi(t_i)\rangle$$

Propriedades:

- $\mathcal{U}(t,t) = \mathbb{1}$
- $\mathcal{U}(t_A, t_B)\, U(t_B, t_C) = \mathcal{U}(t_A, t_C)$
- $\mathcal{U}\mathcal{U}^{+} = \mathcal{U}^{+}\mathcal{U} = \mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{U}^{+}(t_A, t_B) = \mathcal{U}(t_B, t_A)$
- ~~[illegible]~~

Exercício 1 verificar!

- Eq. Schrödinger: $\hbar i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$

$\hbar i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{U} |\psi_0\rangle) = \hat{H} \hat{U} |\psi_0\rangle \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} = \hat{H} \hat{U}$

- Se H não depende do tempo $\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U} = \hat{H} \hat{U}$

$\Rightarrow U = C_1 \exp\left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar} t\right) \Rightarrow U^{-1} = U^{\dagger} \Rightarrow U = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \Theta(t)$

- Facto que $U(t, t_0) \equiv U(t - t_0)$. é uma decorrência da simetria ~~translacional temporal~~ que dá origem à conservação de energia.

- Se H depende do tempo? : Evolução infinitesimal:

$t \rightarrow t + dt$, $U(t+dt, t) = \underbrace{U(t, t)}_{\mathbb{1}} + \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_t dt + \mathcal{O}(dt^2)$

$U(t+dt, t) = \mathbb{1} - \left.\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right|_t dt + \mathcal{O}(dt^2)$.

$U(t+dt, t) = \mathbb{1} - \frac{i\hat{H}(t)}{\hbar} dt + \mathcal{O}(dt^2) \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t)\, dt\right)$

- Propagador: função de green. $i\hbar G(x_0, t_0; x_1, t_1) \equiv \langle x_0 | \hat{U}(t_0, t_1) | x_1 \rangle$ nada mais é que U escrito na base de posição.

- $|i\hbar G(x_2, t_2; x_1, t_1)|^2$ é a probabilidade de se ter $(x_1, t_1) \rightarrow (x_2, t_2)$

- $\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle = \langle x | U(t) | \psi_0 \rangle$

$= \left(\langle x | U(t)\right) \left(\int dx_0 |x_0\rangle\langle x_0|\right) |\psi_0\rangle$

$= \int dx_0 \langle x | U(t) | x_0 \rangle \langle x_0 | \psi_0 \rangle$

$$\psi(x,t) = \int dx_0 \langle x | \mathcal{U}(t) | x_0 \rangle \langle x_0 | \psi_0 \rangle$$

$$= \int dx_0 \, i\hbar \, G(x,t;x_0,t_0) \langle x_0 | \psi_0 \rangle$$

$$= i\hbar \int dx_0 \, G(x,t;x_0,t_0) \, \psi_0(x_0,t_0)$$

- Base de autoestados de H.

$$H|\alpha\rangle = E_\alpha |\alpha\rangle . \Rightarrow i\hbar G(\alpha,t_2;\mu,t_1) = \langle \alpha | \mathcal{U}(t_2,t_1) | \mu \rangle$$

verificar

$$i\hbar G(\alpha,t_2;\mu,t_1) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} E_\alpha (t_0 - t_1) \right) \delta_{\mu\alpha}$$

- no espaço de frequências :

$$\tilde{G}(\alpha,\mu,\omega) = \int dt \exp(i\omega t) \, G(\alpha,\mu,t)$$

verificar

$$= \frac{\delta_{\mu\alpha}}{\hbar\omega - E_\mu + i0^+}$$

o formalismo fornece as autoenergias ao se calcular os polos do propagador.

- Propagador para partícula livre. $H = \dfrac{P^2}{2m}$.

$$\mathcal{U} = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} (t - t_0) \right) ; \text{ e na base } x ? \quad G(x,y,t) ?$$

$$i\hbar G(x,t;x_0,t_0) = \langle x | \mathcal{U}(t-t_0) | x_0 \rangle$$

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar} \right) \quad e \quad \mathbb{1} = \int dp \, |p\rangle\langle p| .$$

$$i\hbar G(x,t;x_0,t_0) = \langle x | \int dp \, |p\rangle\langle p| \, \mathcal{U}(t-t_0) \int dp' \, |p'\rangle\langle p' | x_0 \rangle$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{-i}{\hbar} \left(\frac{P^2}{2m}(t-t_0) - (x-x_0)p \right) \right]$$

$$i\hbar\, G(x,t;x_0,t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar(t-t_0)i}}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}\right)$$

mostrar!

$$S_{cl} = \frac{m(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}$$ ação clássica!

---

em particular: mostrar que: $\int e^{i(ax^2+bx)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}\, e^{ib^2/4a}$ e $\int e^{-(ax^2+bx)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/4a}$.

• Cálculo do propagador dentro do formalismo de integrais de ~~caminhos~~ Trajetórias.

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x,t) \qquad \therefore\ \hbar i\, G(x_f t_f; x_i, t_i) = \langle x_f | \mathcal{U}(t_f, t_i) | x_i \rangle$$

$$i\hbar\, G(x_f,t_f;x_i,t_i) = \langle x_f | \mathcal{U}(t_f, t_{N-1}) \underbrace{|x_{N-1}\rangle \langle x_{N-1}|}_{\int dx_{N-1}} \mathcal{U}(t_{N-1}, t_{N-2}) \underbrace{|x_{N-2}\rangle \cdots}_{\int dx_{N-2}}$$

$$\underbrace{\int dx_1\, |x_1\rangle\langle x_1|}\, \mathcal{U}(t_1, t_i) | x_i \rangle$$

$$\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}, \quad t_k = t_i + K\Delta t.$$

$$i\hbar\, G(x_f,t_f;x_i,t_i) = \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \langle x_f | \mathcal{U}_{t_f t_{N-1}} | x_{N-1}\rangle \cdots \langle x_1 | \mathcal{U}_{1i} | x_i \rangle$$

$$= \int dx_1 dx_2 \ldots dx_{N-1}\, \langle x_f| \exp\left(\frac{i}{\hbar} H(t_{N-1})\Delta t\right) |x_{N-1}\rangle \cdots$$

$$\langle x_1 | \exp\left(\frac{i}{\hbar} H(t_i)\Delta t\right) | x_i \rangle$$

$$= \int dx_1 \ldots dx_{N-1}\, (i\hbar)^N\, G(x_f,t_f;x_{N-1},t_{N-1}) \ldots G(x_1,t_1;x_i,t_i)$$