NOTAS DE MECÂNICA QUÂNTICA

VICENTE V. FIGUEIRA

Sumário

Date: 30 de setembro de 2023.

1. Introdução

2. Mecânica Quântica

2.1. **Conjunto Axiomático.**

3. Momento Angular

Gostaríamos de estudar como o sistema que estamos analisando é afetado por rotações das coordenadas, certamente, isso está motivado pela grande importância das rotações em sistemas clássicos. Começamos por definir o que é uma rotação, uma rotação é uma transformação das coordenadas x_i tais que o produto interno ordinário se preserva, isso é, uma rotação não afeta o módulo de vetores, apenas sua orientação. Intuitivamente segue que rotações devem serem lineares, isto é, uma rotação pode então ser representada por,

$$\begin{aligned} x' &= Rx \\ x'_i &= \sum_j R_{ij} x_j \end{aligned} \tag{3.1}$$

A condição[1] de estas preservarem o produto interno pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \\ \sum_i x_i y_i &= \sum_i \left(\sum_j R_{ij} x_j \right) \left(\sum_k R_{ik} y_k \right) \\ \sum_{j,k} \delta_{j,k} x_j y_k &= \sum_{j,k} x_j y_k \sum_i R_{ij} R_{ik} \\ \delta_{j,k} &= \sum_i R_{ij} R_{ik} \\ \mathbb{1} &= R^T R \end{aligned} \tag{3.2}$$

Essa clase de matrizes são ditas *ortogonais*, o conjunto das matrizes ortogonais N dimensionais forma a estrutura de um grupo, chamado comumente de $O(N)$, porém, note que neste grupo temos matrizes que possuem o determinante tanto positivo quanto negativo. Rotações não podem ter o determinante negativo, pois, todas as rotações dependem de parâmetros contínuos, e, podem serem levadas continuamente até a rotação trivial, que possui determinante $+1$, portanto todas devem satisfazer a condição de Det $R = +1$. Todas outras transformações em $O(N)$ com determinante negativo correspondem a rotações ordinárias compostas com inversões espaciais. Para isso, o grupo apenas de matrizes ortogonais com determinante positivo unitário é chamado de $SO(N)$.

Certamente associada a essa transformação de variáveis está ligada uma transformação no espaço de Hilbert dos estados quânticos, gostaríamos de entender como estas são descritas. Para isso, note que sempre podemos considerar rotações infinitesimais como,

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{1} + \omega + \mathcal{O}(\omega^2) \\ R_{ij} &= \delta_{ij} + \omega_{ij} + \mathcal{O}(\omega^2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

A aplicação da condição de ortogonalidade resulta em,

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= R^T R \\ \mathbb{1} &= \left(\mathbb{1} + \omega^T + \mathcal{O}(\omega^2)\right)\left(\mathbb{1} - \omega + \mathcal{O}(\omega^2)\right) \\ \mathbb{1} &= \mathbb{1} - \omega + \omega^T + \mathcal{O}(\omega^2) \\ \omega^T &= -\omega \\ \omega_{ij} &= -\omega_{ji} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ou seja, as matrizes ω são antissimétricas. O operador que atua no espaço de Hilbert deve, para rotações infinitesimais, necessariamente ser expressável como,

$$U(\mathbb{1} + \omega) = \mathbb{1} + \frac{i}{2\hbar} \sum_{i,j} \omega_{ij} M_{ij} + \mathcal{O}(\omega^2) \tag{3.5}$$

Na qual J_{ij} são operadores que podem serem tomados como sendo antissimétricos. Uma informação a mais que podemos obter é sobre a álgebra descrita pelos operadores M, que pode ser obtida notando que,

[1] J. J. Sakurai e Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics.* 3ª ed. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 9781108473224.

$$U^{-1}(R')U(\mathbb{1}+\omega)U(R') = U\Big(\mathbb{1}+{R'}^{-1}\omega R'\Big)$$

$$U^{-1}(R')\left(\mathbb{1}+\frac{i}{2\hbar}\sum_{i,j}\omega_{ij}M_{ij}+\mathcal{O}\big(\omega^2\big)\right)U(R') = \mathbb{1}+\frac{i}{2\hbar}\sum_{k,l}\sum_{i,j}{R'}_{ik}\omega_{ij}{R'}_{jl}M_{kl}+\mathcal{O}\big(\omega^2\big)$$

$$U^{-1}(R')M_{ij}U(R') = \sum_{k,l}{R'}_{ik}{R'}_{jl}M_{kl} \tag{3.6}$$

Referências.

Sakurai, J. J. e Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 3ª ed. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 9781108473224.