SuSy

Vicente V. Figueira

IF-USP

12 de dezembro de 2024

Sumário

Sumário

Perspectiva Histórica

- 1964 — $SU(3)$ proposto por Gell-Mann e Ne'eman
- Simetria $SU(6)$ aproximada no modelo não relativístico de quarks
- Tentativas de extender $SU(3)$ para sabores e spin

Todas as tentativas de obter análogo à $SU(6)$ para $SU(3)$ falham. Por quê?

- Interesse crescente sobre propriedades da matrix S
- 1967 — Coleman e Mandula catalogam todas as simetrias da matrix S

Hipóteses utilizadas por Coleman e Mandula no seu Teorema:

1. Mecânica Quântica + Simetria de Poincaré
2. Geradores levam 1PS $\rightarrow$ 1PS
3. Ação sobre MPS como soma direta de 1PS
4. Para uma dada escala de energia, o número de partículas com massa menor que esta é finito
5. Reações $2 \rightarrow 2$ acontecem para quase todas energias
6. Amplitudes de $2 \rightarrow 2$ são analíticas para quase todos ângulos e energias

Qual a Álgebra de Lie mais geral dos geradores de simetria que satisfazem as hipóteses?

O resultado do Teorema é: A Álgebra de Lie mais geral dos geradores de simetria é,

$$\mathfrak{iso}^+(3,1) \oplus \mathfrak{g}$$

No qual $\mathfrak{g}$ é uma soma direta de Álgebras de Lie compactas e semi-simples,

$$\begin{aligned}
\left[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\right] &= \mathrm{i}\left(g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} + g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu}\right) \\
[P^\alpha, M^{\mu\nu}] &= \mathrm{i}(g^{\alpha\nu}P^\mu - g^{\alpha\mu}P^\nu) \\
[P^\alpha, P^\mu] &= [P^\alpha, Q^A] = \left[M^{\alpha\beta}, Q^A\right] = 0 \\
[Q^A, Q^B] &= \mathrm{i}f^{AB}{}_C Q^C
\end{aligned}$$

Simetrias internas, Q^A, não podem transformar por uma representação não trivial de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

- 1971 — Gervais e Sakita descobrem uma simetria entre Bósons e Férmions na Teoria de Cordas
- 1974 — Wess e Zumino constroem vários modelos com esta simetria em 4 dimensões,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + \mathrm{i}\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \\
\delta\phi &= \sqrt{2}\epsilon\psi \\
\delta\psi &= -\mathrm{i}\sqrt{2}\sigma^\mu \epsilon^\dagger \partial_\mu \phi
\end{aligned}
$$

Como conciliar isto com o Teorema de Coleman-Mandula?

Isto de fato é uma brecha no Teorema, devido a teoria conter férmions,

$$\left[\phi(t,\mathbf{x}), \partial_0\phi^\dagger(t,\mathbf{y})\right] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$
$$\left\{\psi_a(t,\mathbf{x}), \psi^\dagger_{\dot{b}}(t,\mathbf{y})\right\} = \sigma^0_{a\dot{b}}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Além de comutadores, é necessário o uso de anti-comutadores. O erro então está nas hipóteses do teorema, uma vez que Álgebras de Lie não possuem estrutura adequada para estes, é necessário o uso de **Álgebras de Lie Graduadas**.

- 1975 — Haag, Lopuszanski e Sohnius estendem o Teorema de Coleman-Mandula para Álgebras de Lie Graduadas

Resultado do Teorema: Os únicos tipos de geradores de simetrias, não internas, que podem extender a Álgebra de Poincaré são os que pertencem as representações $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ de $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, e possuem estatística fermiônica.

Sumário

Álgebras de Lie Graduadas

- Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$
- Cada elemento $T^A \in \mathfrak{g}$ possui um peso $\eta\big(T^A\big) = \eta_A = 0, 1$
- Produto de elementos tem peso,

$$\eta\big(T^A \cdots T^Z\big) = \sum \eta_i \pmod 2$$

- Operação bilinear,

$$\big[T^A, T^B\big] = T^A T^B - (-)^{\eta_A \eta_B} T^B T^A = \mathrm{i} f^{AB}{}_C T^C$$

- Operadores fermiônicos recebem peso 1 e operadores bosônicos recebem peso 0.

Super-Poincaré

O resultado do Teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius é de que a Álgebra ($\mathbb{Z}_2$-Graduada) mais geral é a de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\left[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\right] &= \mathrm{i}\Big(g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} + g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu}\Big)\\
[P^{\alpha}, M^{\mu\nu}] &= \mathrm{i}(g^{\alpha\nu}P^{\mu} - g^{\alpha\mu}P^{\nu})\\
[P^{\alpha}, P^{\mu}] &= 0
\end{aligned}$$

Estendida por uma quantidade arbitrária, $\mathcal{N}$, de geradores das representações $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$,

$$Q_a^A,\ Q_b^B; \quad A, B = 1, \cdots, \mathcal{N}$$

Covariância por Lorentz fixa,

$$\left[Q_a^A, M^{\mu\nu}\right] = \sigma^{\mu\nu}{}_a{}^b Q_b^A$$
$$\left[Q^{\dagger A\dot{a}}, M^{\mu\nu}\right] = \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{a}}{}_{\dot{b}} Q^{\dagger A\dot{b}}$$

Utilizando também identidades de Jacobi, o Teorema diz que sempre podemos diagonalizar a Álgebra como,

$$\left[Q_a^A, Q_{\dot{b}}^{\dagger B}\right] = -2\delta^{AB}\sigma_{\mu a\dot{b}} P^\mu$$
$$\left[Q_a^A, Q_b^B\right] = Z^{AB}\epsilon_{ab}$$
$$\left[Q_a, P^\mu\right] = 0$$

Z^{AB} são cargas centrais da Álgebra.

Consequências

- A energia é sempre positiva

$$\bar{\sigma}^{0\dot{b}a}\left[Q_a^A, Q_{\dot{b}}^{\dagger A}\right] = -2\bar{\sigma}^{0\dot{b}a}\sigma_{\mu a\dot{b}}P^\mu$$
$$\left[Q_1^A, Q_{\dot{1}}^{\dagger A}\right] + \left[Q_2^A, Q_{\dot{2}}^{\dagger A}\right] = 4P^0$$

$$P^0 = \frac{1}{4}\left(Q_1^A Q_{\dot{1}}^{\dagger A} + Q_2^A Q_{\dot{2}}^{\dagger A} + Q_{\dot{1}}^{\dagger A} Q_1^A + Q_{\dot{2}}^{\dagger A} Q_2^A\right)$$
$$\left(\Psi, P^0\Psi\right) = \frac{1}{4}\left(\Psi, Q_1^A Q_{\dot{1}}^{\dagger A}\Psi\right) + \cdots$$
$$\left(\Psi, P^0\Psi\right) = \frac{1}{4}\left\|Q_{\dot{1}}^{\dagger A}\Psi\right\|^2 + \cdots \geq 0$$

- Super-Simetria relaciona partículas de mesma massa,

$$\left[Q_a^A, P^\mu\right] = 0 \rightarrow \left[Q_a^A, P^\mu P_\mu\right] = 0$$

- Super-Simetria relaciona partículas de mesma massa,

$$\left[Q_a^A, P^\mu\right] = 0 \to \left[Q_a^A, P^\mu P_\mu\right] = 0$$

- Mas de spin diferente,

$$\left[Q_1^A, M^{12}\right] = \left[Q_1^A, J^3\right] = \sigma^{12}{}_1{}^b Q_b^A = \frac{1}{2} Q_1^A, \quad \left[Q_2^A, J^3\right] = -\frac{1}{2} Q_2^A$$
$$\left[Q_{\dot{1}}^{\dagger A}, J^3\right] = -\frac{1}{2} Q_{\dot{1}}^{\dagger A}, \quad \left[Q_{\dot{2}}^{\dagger A}, J^3\right] = \frac{1}{2} Q_{\dot{2}}^{\dagger A}$$

- Q_1^A e $Q_{\dot{2}}^{\dagger A}$ diminuem o spin em $\frac{1}{2}$, enquanto Q_2^A e $Q_{\dot{1}}^{\dagger A}$ aumentam o spin em $\frac{1}{2}$.

Representações Massivas N=1

No referencial $P^\mu = \begin{pmatrix} m & \mathbf{0} \end{pmatrix}$,

$$
\begin{aligned}
\left[Q_a, Q_{\dot{b}}\right] &= -2\sigma_{\mu a\dot{b}} P^\mu = 2m\delta_{a\dot{b}} \\
\left[Q_a, Q_{\dot{b}}\right] &= 0
\end{aligned}
$$

Mesma álgebra de dois osciladores harmônicos fermiônicos desacoplados! Dado um vácuo Cliffordiano $|\Omega\rangle$ — é aniquilado por Q_a — de spin j,

$$
\begin{gathered}
|\Omega\rangle \to Q^\dagger_{\dot{2}} |\Omega\rangle, Q^\dagger_{\dot{1}} |\Omega\rangle \to Q^\dagger_{\dot{1}} Q^\dagger_{\dot{2}} |\Omega\rangle \\
j \to \left(j - \frac{1}{2}\right) \oplus \left(j + \frac{1}{2}\right) \to j
\end{gathered}
$$

- Multipleto Chiral Massivo $(j = 0)$,

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega\rangle \\ Q^{\dagger}_{\dot{1}} Q^{\dagger}_{\dot{2}} |\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } 0 \to \phi, \phi^{\dagger} \qquad \left.\begin{array}{l} Q^{\dagger}_{\dot{1}} |\Omega\rangle \\ Q^{\dagger}_{\dot{2}} |\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \to \chi_a, \chi^{\dagger}_{\dot{b}}$$

- Multipleto Vetorial Massivo $\left(j = \frac{1}{2}\right)$,

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega\rangle \\ Q^{\dagger}_{\dot{1}} Q^{\dagger}_{\dot{2}} |\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \to \chi_a, \chi^{\dagger}_{\dot{b}}, \xi_a, \xi^{\dagger}_{\dot{b}} \qquad \left.\begin{array}{l} Q^{\dagger}_{\dot{1}} |\Omega\rangle \\ Q^{\dagger}_{\dot{2}} |\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } 1, 0 \to A^{\mu}, \phi$$

Representações não Massivas N=1

No referencial $P^\mu = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \left[Q_a, Q_{\dot{b}}\right] &= -2\sigma_{\mu a\dot{b}} P^\mu = 4E\delta_{a\dot{b}}\delta_{a2} \\ \left[Q_a, Q_{\dot{b}}\right] &= 0 \end{aligned}$$

Álgebra de um oscilador harmônico fermiônico. Dado um vácuo Cliffordiano $|\Omega\rangle$ de helicidade h,

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\rightarrow Q^\dagger_{\dot{2}} |\Omega\rangle \\ j &\rightarrow j - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Multipleto Chiral $\left(h = \frac{1}{2}\right)$,

$$|\Omega\rangle \Big\} \, \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi^{\dagger}_{\dot{a}} \qquad\qquad Q^{\dagger}_{\dot{2}} \, |\Omega\rangle \Big\} \, \text{Spin } 0 \rightarrow \phi$$

- Multipleto Chiral $\left(h = \frac{1}{2}\right)$,

$$|\Omega\rangle \Big\} \, \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi^{\dagger}_{\dot{a}} \qquad\qquad Q^{\dagger}_{\dot{2}} \, |\Omega\rangle \Big\} \, \text{Spin } 0 \rightarrow \phi$$

Não é possível construir uma teoria Unitária e Lorentz covariante. É necessário impor CPT

$$\mathsf{CPT} \, |h\rangle \rightarrow |-h\rangle$$

- Multipleto Chiral $\left(h = \frac{1}{2}\right)$,

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega\rangle \\ \mathsf{CPT}\,|\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a, \chi^{\dagger}_{\dot{a}} \qquad \left.\begin{array}{l} Q^{\dagger}_{\dot{2}}\,|\Omega\rangle \\ \mathsf{CPT} Q^{\dagger}_{\dot{2}}\,|\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } 0 \rightarrow \phi, \phi^{\dagger}$$

- Multipleto Vetorial $(h = 1)$,

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega\rangle \\ \mathsf{CPT}\,|\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } 1 \rightarrow A^{\mu} \qquad \left.\begin{array}{l} Q^{\dagger}_{\dot{2}}\,|\Omega\rangle \\ \mathsf{CPT} Q^{\dagger}_{\dot{2}}\,|\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a, \chi^{\dagger}_{\dot{a}}$$

- Multipleto Gravitacional $(h = 2)$,

$$\left.\begin{array}{l} |\Omega\rangle \\ \mathsf{CPT}\,|\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } 2 \rightarrow A^{\mu} \qquad \left.\begin{array}{l} Q^{\dagger}_{\dot{2}}\,|\Omega\rangle \\ \mathsf{CPT} Q^{\dagger}_{\dot{2}}\,|\Omega\rangle \end{array}\right\} \text{Spin } \frac{3}{2} \rightarrow \chi^{\mu}_a, \chi^{\dagger\mu}_{\dot{a}}$$

- Todos os multipletos possuem valores iguais de d.o.f de bósons e férmions. Coincidência?

- Todos os multipletos possuem valores iguais de d.o.f de bósons e férmions. Coincidência? Não.

$$\mathbb{Q} = Q_1 + Q_{\dot{2}}^{\dagger} \rightarrow \left[\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^{\dagger}\right] = 4H$$

$$\text{se } H \neq 0 \Rightarrow |\Omega\rangle\, , \mathbb{Q}^{\dagger}\, |\Omega\rangle$$

Se $H = 0$, não há nada que nos previna de ter números arbitrários de estados bosônicos e fermiônicos,

- Índice de Witten,

$$\mathrm{Tr}\left[(-1)^F\right] = n_{B,E=0} - n_{F,E=0}$$

- SSUSYB é possível $\Leftrightarrow \mathrm{Tr}\left[(-1)^F\right] = 0$

Sumário

Super-Espaço

- O espaço de Minkowski pode ser definido como,

$$\mathbb{R}^{3,1} = ISO^{+}(3,1)/SO^{+}(3,1)$$
$$g(\omega, a) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - \mathrm{i}a_{\mu}P^{\mu}\right)$$

Super-Espaço

- O espaço de Minkowski pode ser definido como,

$$\mathbb{R}^{3,1} = ISO^{+}(3,1)/SO^{+}(3,1)$$
$$g(\omega, a) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - \mathrm{i}a_{\mu}P^{\mu}\right)$$

- Definimos o Super-Espaço como,

$$\text{Super-Espaço} = \text{Super-Poincaré}/SO^{+}(3,1)$$
$$g\left(\omega, a, \theta, \theta^{\dagger}\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - \mathrm{i}a_{\mu}P^{\mu} - \mathrm{i}\theta Q - \mathrm{i}\theta^{\dagger}Q^{\dagger}\right)$$

- Um Super-Campo é uma função de $x, \theta, \theta^\dagger$ nos complexos,

$$\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right)$$

- Um Super-Campo é uma função de $x, \theta, \theta^\dagger$ nos complexos,

$$\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right)$$

- P^μ gera translações em x^μ,

$$\left[\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right), P^\mu\right] = -\mathrm{i}\partial^\mu \Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right)$$

- Um Super-Campo é uma função de $x, \theta, \theta^\dagger$ nos complexos,

$$\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right)$$

- P^μ gera translações em x^μ,

$$\left[\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right), P^\mu\right] = -\mathrm{i}\partial^\mu \Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right)$$

- Q_a gera translações em θ_a?

$$\left[\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right), Q_a\right] = -\mathrm{i}\mathcal{Q}_a \Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right); \quad \mathcal{Q}_a \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial \theta^a}$$

A representação da Álgebra no Super-Espaço é feita por,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_a &= \partial_a + \mathrm{i}\sigma^{\mu}_{a\dot{b}}\theta^{\dagger\dot{b}}\partial_\mu \\
\mathcal{Q}^{\dagger}_{\dot{a}} &= -\partial^{\dagger}_{\dot{a}} - \mathrm{i}\theta^{b}\sigma^{\mu}_{b\dot{a}}\partial_\mu \\
[\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b] &= 0 \\
\left[\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}^{\dagger}_{\dot{b}}\right] &= -2\mathrm{i}\sigma^{\mu}_{a\dot{b}}\partial_\mu
\end{aligned}
$$

Logo, a ação de uma transformação, infinitesimal, Super-Simétrica sobre um Super-Campo é,

$$
\Phi \to \Phi + \epsilon\mathcal{Q}\Phi + \epsilon^{\dagger}\mathcal{Q}^{\dagger}\Phi
$$

Para obter uma Ação Super-Simétrica fazemos um análogo, dado uma combinação real de Super-Campos, $K = K^\dagger$, integramos por todo o Super-Espaço,

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, K\Big(x, \theta, \theta^\dagger\Big)$$

Esta combinação é manifestamente hermitiana, Lorentz invariante e,

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, \delta K = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger \Big(\epsilon \mathcal{Q} K + \epsilon^\dagger \mathcal{Q}^\dagger K\Big) = 0$$

Invariante Super-Simetricamente!

Super-Campo Geral

Devido à natureza Grassmanniana de $\theta, \theta^\dagger$, o Super-Campo mais geral é,

$$\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right) = \phi(x) + \theta\psi(x) + \theta^\dagger\chi^\dagger(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger N(x) \\ + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\xi(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x)$$

Já apresenta todas as representações de nosso interesse! Porém até demais, como restringir?

Super-Campo Chiral

Utilizando de nossa virtude da visão além do alcance, introduzimos,

$$\mathcal{D}_a = \partial_a - \mathrm{i}\sigma^{\mu}_{a\dot{b}}\theta^{\dagger\dot{b}}\partial_\mu, \quad \mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}} = -\partial_{\dot{a}} + \mathrm{i}\theta^{b}\sigma^{\mu}_{b\dot{a}}\partial_\mu$$

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] = 0, \quad \left[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_{\dot{b}}\right] = 2\mathrm{i}\sigma^{\mu}_{a\dot{b}}\partial_\mu$$

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{Q}_b] = \left[\mathcal{D}_a, \mathcal{Q}^{\dagger}_{\dot{b}}\right] = 0$$

Podemos então impor,

- Chiral $\mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}\Phi = 0$
- Anti-Chiral $\mathcal{D}_a\Phi = 0$

- $\mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}\Phi = 0$

Pode ser facilmente resolvida nas variáveis,

$$y^{\mu} = x^{\mu} - \mathrm{i}\theta^{b}\sigma^{\mu}_{b\dot{c}}\theta^{\dagger\dot{c}}$$
$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}\theta_{b} = 0, \quad \mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}y^{\mu} = 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Phi\left(x,\theta,\theta^{\dagger}\right) &= \Phi(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)\\ &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) - \mathrm{i}\theta\sigma^{\mu}\theta^{\dagger}\partial_{\mu}\phi(x)\\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\theta\theta\theta^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^{\dagger}\theta^{\dagger}\partial^{2}\phi(x)\end{aligned}$$

- $\mathcal{D}_a \Phi^\dagger = 0$

De fato, é apenas o conjugado de um chiral, pois,

$$y^{\dagger\mu} = x^\mu + \mathrm{i}\theta^b \sigma^\mu_{b\dot{c}} \theta^{\dagger\dot{c}}$$
$$\mathcal{D}_a \theta^\dagger_b = 0, \quad \mathcal{D}_a y^{\dagger\mu} = 0$$

Portanto,

$$\Phi^\dagger\left(x, \theta, \theta^\dagger\right) = \phi^\dagger(x) + \sqrt{2}\theta^\dagger\psi^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger F^\dagger(x) + \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu\phi^\dagger(x) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\psi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\theta + \frac{1}{4}\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\theta\partial^2\phi^\dagger(x)$$

Que são muito próximos ao Multipleto Chiral!

Modelo de Wess-Zumino

A combinação $\Phi^\dagger\Phi$ é real. Logo, podemos definir uma teoria como,

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, \Phi^\dagger\Phi$$

A integral Grassmanniana seleciona o termo com coeficiente $\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$, um rápido cálculo retorna,

$$\Phi^\dagger\Phi \supset \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger \left[F^\dagger F - \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right]$$
$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[F^\dagger F - \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right]$$

E interações?

Interações do tipo Yukawa não são geradas por termos como $f\left(\Phi^\dagger \Phi\right)$. Vimos que,

$$\Phi\left(x, \theta, \theta^\dagger\right) = \Phi(y, \theta)$$

Podemos então introduzir um termo na ação como,

$$S = \int \mathrm{d}^4 y \, \mathrm{d}^2\theta \, \Phi(y, \theta)$$

Este termo é manifestamente Poincaré invariante, basta confirmar que seja Super-Simetricamente invariante,

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4 y \, \mathrm{d}^2\theta \left(\epsilon\partial\Phi + \mathrm{i}\epsilon\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu\Phi - \epsilon^\dagger\partial^\dagger\Phi - \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\epsilon^\dagger\partial_\mu\Phi\right)$$
$$\delta S = 0$$

O mesmo continua valendo para qualquer função holomorfa, só precisamos garantir que seja real,

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^2\theta\, W(\Phi) + \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^2\theta^\dagger\, W^\dagger\left(\Phi^\dagger\right)$$

$$W(\Phi) = W\left(\phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta^2 F\right)$$

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2}\frac{\partial W}{\partial \phi}\theta\psi + \theta^2\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}F - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\psi\psi\right)$$

A integral Grassmanniana seleciona o termo com $\theta\theta$ ou $\theta^\dagger\theta^\dagger$. Por questões de renormalizabilidade, a função mais geral que podemos tomar é,

$$W(\Phi) = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{6}\Phi^3$$

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[\int \mathrm{d}^2\theta \, \mathrm{d}^2\theta^\dagger \, \Phi^\dagger\Phi + \int \mathrm{d}^2\theta \, W(\Phi) + \int \mathrm{d}^2\theta^\dagger \, W^\dagger\left(\Phi^\dagger\right)\right]$$

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[-\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + F^\dagger F \right.$$
$$\left. + \left(F\frac{\partial W}{\partial\phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\psi\psi + \text{h.c.}\right)\right]$$

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[-\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \left\|\frac{\partial W}{\partial\phi}\right\|^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\psi\psi + \text{h.c.}\right)\right]$$

Super-Campo Vetorial

Outra condição que poderíamos impor é,

$$V = V^\dagger$$

Que resulta em,

$$\begin{aligned} V = {} & C(x) + \theta\chi(x) + \theta^\dagger\chi(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger M^\dagger(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x) \end{aligned}$$

Como realizar uma transformação de Gauge?

Super-Campo Vetorial

Outra condição que poderíamos impor é,

$$V = V^\dagger$$

Que resulta em,

$$\begin{aligned} V = {} & C(x) + \theta\chi(x) + \theta^\dagger\chi(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger M^\dagger(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x) \end{aligned}$$

Como realizar uma transformação de Gauge? Se Ξ é Chiral,

$$\mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right)$$

É real/vetorial.

Seja,

$$\Xi = B(x) + \theta\xi(x) + \theta\theta G(x) - \mathrm{i}\theta\sigma^{\mu}\theta^{\dagger}\partial_{\mu}B(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\theta\theta\theta^{\dagger}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\xi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^{\dagger}\theta^{\dagger}\partial^{2}B(x)$$

Um rápido cálculo retorna,

$$\mathrm{i}\left(\Xi^{\dagger} - \Xi\right) \supset -2\theta\sigma^{\mu}\theta^{\dagger}\partial_{\mu}\mathrm{Re}B(x)$$

E Principalmente,

$$V \to V + \mathrm{i}\left(\Xi^{\dagger} - \Xi\right) \Rightarrow v_{\mu} \to v_{\mu} - 2\partial_{\mu}\mathrm{Re}B$$

Definimos então como transformação de Gauge.

Por uma escolha conveniente de $B(x), \xi(x)$ e $G(x)$ é sempre possível escolher o **Gauge de Wess-Zumino**,

$$V = \theta\sigma^{\mu}\theta^{\dagger}v_{\mu}(x) + \theta\theta\theta^{\dagger}\lambda^{\dagger}(x) + \theta^{\dagger}\theta^{\dagger}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^{\dagger}\theta^{\dagger}D(x)$$

- Como escrever um termo cinético?

Por uma escolha conveniente de $B(x), \xi(x)$ e $G(x)$ é sempre possível escolher o **Gauge de Wess-Zumino**,

$$V = \theta\sigma^{\mu}\theta^{\dagger}v_{\mu}(x) + \theta\theta\theta^{\dagger}\lambda^{\dagger}(x) + \theta^{\dagger}\theta^{\dagger}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^{\dagger}\theta^{\dagger}D(x)$$

- Como escrever um termo cinético?

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}\mathcal{D}_{b}V \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}\mathcal{D}_{b}\Big(V + \mathrm{i}\Big(\Xi^{\dagger} - \Xi\Big)\Big) \stackrel{?}{=} \mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}\mathcal{D}_{b}V$$

Por uma escolha conveniente de $B(x), \xi(x)$ e $G(x)$ é sempre possível escolher o **Gauge de Wess-Zumino**,

$$V = \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x)$$

- Como escrever um termo cinético?

$$\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}_b V \to \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}_b\Big(V + \mathrm{i}\big(\Xi^\dagger - \Xi\big)\Big) \overset{?}{=} \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}_b V$$

$$\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V \to \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b\Big(V + \mathrm{i}\big(\Xi^\dagger - \Xi\big)\Big) \overset{!}{=} \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V$$

Definimos o Super-Campo,

$$W_a = \frac{1}{4}\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V$$

Que é de fato Chiral!

$$\mathcal{D}^\dagger_{\dot{b}} W_a = 0$$

Podemos utilizar da mesma expansão em y, θ feita anteriormente para Campos Chirais,

$$W_a = \lambda_a(y) + \theta_a D(y) - \sigma^{\mu\nu}{}_a{}^b \theta_b F_{\mu\nu}(y) + \mathrm{i}\theta\theta\sigma^\mu_{a\dot{b}}\partial_\mu\lambda^{\dagger\dot{b}}(y)$$

Finalmente podemos obter uma quantidade Lorentz invariante Chiral,

$$W^a W_a \supset \theta\theta \left[2\mathrm{i}\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \lambda^\dagger - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2} \star F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + D^2 \right]$$

Utilizando do mesmo método para obtenção de interações para Super-Campos chirais,

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \left[\int \mathrm{d}^2\theta \, \frac{1}{4} W^a W_a + \int \mathrm{d}^2\theta^\dagger \, \frac{1}{4} W^\dagger_{\dot{a}} W^{\dagger\dot{a}} \right]$$

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^2 \right]$$

Calibrando uma Teoria Chiral

Sabemos que devemos alterar o termo cinético canônico,

$$\Phi^\dagger \Phi$$

Para ser invariante por uma transformação de calibre,

$$\begin{aligned} \Phi &\to \exp\left(-2\mathrm{i}g\Xi\right)\Phi \\ \Phi^\dagger &\to \Phi^\dagger \exp\left(2\mathrm{i}g\Xi^\dagger\right) \\ V &\to V + \mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right) \end{aligned}$$

Como a transformação em V é linear, e Ξ está dentro da exponencial,

$$\Phi^\dagger \exp\left(-2gV\right)\Phi$$

É uma opção para termo cinético invariante por calibre. No gauge de Wess-Zumino,

$$\begin{aligned}
V &= \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x) \\
V^2 &= -\frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger v^\mu v_\mu \\
V^3 &= 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\exp\left(-2gV\right) = 1 - 2g\theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu - 2g\theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger - 2g\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda \\
- \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\left(gD + g^2 v^\mu v_\mu\right)
\end{aligned}$$

Como a integral Grassmanniana seleciona apenas os termos com $\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$. Com um pouco de algebra obtemos,

$$\Phi^\dagger \exp(-2gV)\Phi \supset \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger \Big[-D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + F^\dagger F + \sqrt{2}g\psi^\dagger\lambda^\dagger\phi + \sqrt{2}g\phi^\dagger\lambda\psi - g\phi^\dagger\phi D\Big]$$

Aparecimento natural da derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}g v_\mu$$

Sumário

- Teoremas de não-renormalização
- Teorias com $\mathcal{N} > 1$
- Super-Conforme

Muito Obrigado!