

# **Amplitudes de espalhamento em teorias com derivadas de ordem superior**

---

Relatório de atividades anual de Mestrado.

---

Projeto sob fomento da CAPES

Pesquisador Responsável: Gabriel Santos Menezes  
Aluno: Vicente Viater Figueira

Vigência: 01/03/2025 a 01/03/2027

Período Coberto pelo Relatório: 01/03/2025 a 01/12/2025

## 1. RESUMO DO PROJETO PROPOSTO

Este plano de atividades se propõe a realizar um estudo de amplitudes de espalhamento na chamada teoria ( $DF$ )<sup>2</sup> e, utilizando-se do método da cópia dupla, estender esses resultados para o caso da super-gravidade conforme do tipo Berkovits-Witten. Estes estudos também preveem uma maior compreensão do método da unitariedade generalizada para o caso de partículas instáveis. Além disso, também nos permitiria uma abordagem sistemática no estudo do comportamento a altas energias das amplitudes de espalhamento em gravidade quadrática.

## 2. REALIZAÇÕES NO PERÍODO

As realizações durante o período de Março até Dezembro estão organizadas na tabela 1.

TABELA 1. Resumo das Realizações do Período.

Data	Categoria	Descrição
Mar-Jul 2025	Disciplinas Cursadas	Teoria de Cordas. Tópicos Avançados em Relatividade Geral.
Mar-Jul 2025	Revisão Bibliográfica	Estudo do formalismo <i>on-shell</i> [1, 2], bem como dos métodos e teorias utilizadas em [3–5].
Jul 2025	Participação em Evento	XV Escola do CBPF.
Ago-Dec 2025	Cálculos	Cálculos preliminares com a teoria teste proposta em [4].
Nov-Dec 2025	Escrita	Redação de capítulos preliminares sobre métodos <i>on-shell</i> e unitariedade generalizada.
Out 2025	Participação em Evento	XLVIII CPLF. Agorá II.
Dez 2025	Participação em Evento	QCD Meets Gravity School. QCD Meets Gravity Conference.

Vale ressaltar que ambas as disciplinas cursadas foram concluídas com conceito A. Nos eventos XLVIII CPLF e QCD Meets Gravity School foram apresentados um pôster de título “*2+1 Dimensional Gravity as a Gauge Theory*”, enquanto no evento Agorá II foi apresentado um *short talk* de título “*2+1 Gravity as a Gauge Theory*”.

O restante desta seção retrata os métodos e técnicas estudadas, tanto como os cálculos preliminares realizados e excertos da dissertação escritos.

**2.1. Métodos *On-Shell*.** O principal ponto da abordagem relativamente moderna de métodos on-shell para o cálculo de amplitudes em teorias de campo é utilizar-se de uma informação subutilizada em Teoria Quântica de Campos (TQC) usual, transformações pelo *Little-Group*. É de conhecimento geral que a álgebra de Poincaré —  $ISO^+(1, 3)$  — admite dois invariantes de Casimir, a massa quadrada  $-P^\mu P_\mu$  e o spin  $W^\mu W_\mu$ , para estados fisicamente aceitáveis é necessário  $-P^\mu P_\mu \geq 0$ , o que gera dois casos possíveis,

$$\begin{cases} -P^\mu P_\mu &= 0 \\ -P^\mu P_\mu &> 0 \end{cases}.$$

Podemos sempre relacionar momentos específicos via transformações de Lorentz de momentos referência, a escolha mais adequada para cada um dos casos acima é,

$$\begin{cases} -k^2 = 0 & \Rightarrow k_0 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa > 0 \\ -k^2 = m^2 > 0 & \Rightarrow k_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m > 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, dado  $p^2 = 0$  ( $p^2 = -m^2$ ), existe sempre uma transformação  $L(p)$  tal que  $p = L(p)k_0$  ( $p = L(p)k_m$ ). O fato mais interessante dessa relação é que a escolha de  $L(p)$  não é única, pois existem transformações — do grupo de Poincaré — não triviais que preservam  $k_0$  ( $k_m$ ), estas transformações são os elementos do chamado *Little-Group*. É trivial determiná-las, para  $k_0$  são rotações nas componentes 1 e 2, isto é,  $SO(2)^1$  que devido à estarmos lidando com uma teoria quântica necessita de ser elevado para seu *double cover*,  $U(1)$ . Para  $k_m$  são rotações nas três componentes espaciais,  $SO(3)$ , que novamente precisa ser elevado ao *double cover*,  $SU(2)$ . O ponto desta discussão é: Em TQC, como estamos interessados em utilizar o momento, essas transformações que preservam os momentos  $k_0, k_m$  são objetos subutilizados, uma vez que são totalmente irrelevantes. Outro modo de pensar é do ponto de vista de teoria de grupos, os representativos  $k_0, k_m$  das classes de momentos sem massa e massivos não são objetos que se transformam em uma representação irreduzível do grupo de Poincaré, pois possuem um subespaço invariante — o *Little-Group* —, logo, é possível decompor ainda mais os representativos das classes de momento. Para entender como isso pode ser realizado temos de recorrer novamente a teoria de grupos. Primeiramente, nosso grupo de interesse é o grupo de Poincaré, a parte não homogênea já é realizada trivialmente, pois estamos trabalhando em autoestados de momento, logo, precisamos tornar nossa atenção apenas para a parte homogênea, isto é, o grupo de Lorentz. Note que, devido à querermos analisar a teoria quântica, é necessário voltar-nos-mos à seu *double-cover*,

$$SO^+(1, 3) \xrightarrow{\text{double cover}} SL(2, \mathbb{C}).$$

Infelizmente,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  por si não é adequado para obter-se representações irreduzíveis. O método mais fácil é complexificar a álgebra, e utilizar-se do isomorfismo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ , útil,

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

O último isomorfismo deixa claro que todas as representações de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  estão em um mapa um-para-um com as representações de  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Estas por sua vez são muito bem conhecidas, são representadas por dois meio-inteiros  $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ ,  $(m, n)$ . Sabemos que um vetor é a representação

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1},$$

disto é claro que a representação de vetor não é irreduzível, ela é o produto das representações irreduzíveis  $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ . Como podemos obter a decomposição de um vetor em suas partes irreduzíveis? Isso pode ser derivado por teoria de representações também, analisando,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1).$$

A existência da representação escalar,  $(0, 0)$ , neste produto de representações é um indicativo da existência de um invariante do grupo com três índices. Indexando a representação de mão esquerda  $(\frac{1}{2}, 0)$  por  $a$  e a de

---

<sup>1</sup>Na realidade o subgrupo de Poincaré que preserva  $k_0$  é  $ISO(2)$ , porém, as transformações geradas pela parte não homogênea desse grupo correspondem à números quânticos contínuos. Até o presente momento, as partículas sem massas conhecidas apresentam apenas números quânticos discretos — helicidade —, e nenhum número quântico contínuo, logo, somos levados a crer que estas se transformam trivialmente sobre a ação da parte não homogênea, de modo que possamos ignorá-la.

mão direita  $(0, \frac{1}{2})$  por  $\dot{a}$ , o invariante do grupo que prevemos a existência é

$$\Lambda^\alpha{}_\beta L(\Lambda)_a{}^b R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \sigma^\beta{}_{\dot{b}\dot{b}} = \sigma^\alpha{}_{a\dot{a}},$$

onde  $\Lambda, L(\Lambda), R(\Lambda)$  são transformações do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  nas representações vetorial, mão esquerda e mão direita. Diretamente dessa relação de invariância é possível calcular explicitamente o tensor  $\sigma^\alpha{}_{a\dot{a}}$ , a parte de um fator multiplicativo. Seus valores são bem conhecidos,

$$\sigma^\alpha{}_{a\dot{a}} = (\mathbb{1}_{a\dot{a}} \quad \boldsymbol{\sigma}_{a\dot{a}}),$$

no qual  $\boldsymbol{\sigma}$  são as matrizes de Pauli. Há mais quantidades invariantes que podem serem obtidas, outra que será de grande importância para nós é,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0),$$

implica a existência de um objeto invariante,

$$L(\Lambda)_a{}^c L(\Lambda)_b{}^d \epsilon_{cd} = \epsilon_{ab},$$

também existe um associado à representação de mão direita,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (0, 1),$$

que implica em,

$$R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} R^{-1}(\Lambda)_{\dot{b}}{}^{\dot{d}} \epsilon_{\dot{c}\dot{d}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}},$$

aparte de fatores multiplicativos podemos escolher os valores como,

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daqui existem várias relações algébricas que serão muito úteis, vamos apenas enunciá-las,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}\dot{a}} &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \epsilon^{ab} \sigma^\mu{}_{ab} = (\mathbb{1} \quad -\boldsymbol{\sigma}) \\ \eta_{\mu\nu} \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} &= -2\epsilon_{ab} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} &= \text{Tr} [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] = -2\eta^{\mu\nu} \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu &= -2\eta^{\mu\nu} \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu &= -2\eta^{\mu\nu} \end{aligned}$$

O ponto dessas construções é, dado um momento  $p^\mu$ , é possível construir o seguinte objeto  $p_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} = p_{a\dot{a}}$ . Como  $\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}$  é um invariante do grupo, o objeto  $p_{a\dot{a}}$  se transforma corretamente na representação  $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2})$ . Caso  $p^2 = 0$ , e utilizando-se das relações acima,

$$\begin{aligned} p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 0 \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} &= 0 \\ \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}} p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $p_\mu p^\mu = 0 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0$ , isto é, dos 4 elementos da matriz  $p_{a\dot{a}}$ , apenas dois são independentes. Em outras palavras, esta matrix é completamente determinada apenas por um vetor de duas componentes  $p_a$ , fazendo com que  $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$ <sup>2</sup>. Devido à  $p^\mu$  possuir componentes reais, isso implica em  $p_{\dot{a}} = (p_a)^*$ .

---

<sup>2</sup>O fator de  $-$  aqui está relacionado com  $p^0 > 0$ , para mostrar sua necessidade é preciso realizar uma demonstração mais cuidadosa.

Representamos  $p_a = |p]$  e  $p_{\dot{a}} = \langle p|$ , assim  $p = -|p]\langle p|$ . Igualmente, podemos definir  $p^a = \epsilon^{ab}p_b = [p|, p^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}p_{\dot{b}} = |p\rangle$ , de tal forma que:

$$\forall p, q | p^2 = q^2 = 0, \quad \epsilon^{ab}p_a q_b = [pq], \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}p^{\dot{a}} q^{\dot{b}} = \langle pq\rangle.$$

Claramente, dado  $p^2 = 0$ , a escolha de  $|p]$  — que fixa todos os outros símbolos, se o momento for real — não é única. Podemos sempre fazer a transformação  $|p], \langle p| \rightarrow t|p], t^{-1}\langle p|$  que preserva  $p^\mu$ . Este é o *Little-Group*. Como afirmamos anteriormente, para partículas sem massa deveria ser o grupo  $U(1)$ , que é consistente com um fator multiplicativo  $t$ . De fato então fomos bem sucedidos, conseguimos compactar a informação contida em um momento sem massa em um objeto  $|p]$  que se transforma não trivialmente sobre o *Little-Group*, portanto, se utilizar-mos como blocos de construção  $|p]$ , etc... ao invés de  $p^\mu$ , podemos obter restrições não triviais sobre objetos em TQC ao impor condições sobre como devem se comportar sobre uma transformação destas.

Este procedimento é excelente para momentos não massivos, porém, não é satisfatório para momentos massivos, note que, se  $p^2 = -m^2$ ,

$$\begin{aligned} p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{a\dot{a}} \sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 2m^2 \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} &= 2m^2 \\ \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}} p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 2m^2 \end{aligned}$$

Desta forma,  $p^2 = -m^2 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = m^2$ , portanto, as linhas e colunas desta matrix são linearmente independentes, e não é possível decompor-la na forma  $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$ , o melhor que é possível de ser realizado é decompor-la em termo de dois vetores  $p_a^I$ ,  $I = 1, 2$ , tal que,  $p_{a\dot{a}} = -p_a^I p_{I\dot{a}}$ . Novamente, é facilmente observável que esta decomposição não é única, e está definida aparte de uma transformação  $p_a^I, p_{K\dot{a}} \rightarrow W_J^K, W^{-1}_L p_{L\dot{a}}$ , como  $p^\mu$  é real,  $p_{I\dot{a}} = (p_a^I)^*$ , isso impõe a restrição em  $W$  de,  $W^{T*} = W^{-1}$ , ou seja, essa ambiguidade corresponde a uma transformação de  $SU(2)$ , em concordância com o *Little-Group*. Utilizamos também uma notação muito similar à das partículas sem massa,  $p_a^I = |p^I]$ , etc...

**2.2. Unitariedade em TQC.** Unitariedade em TQC se refere a unitariedade da matrix  $S$ . Como revisão, a matrix  $S$  é a amplitude de transição entre um estado *in*,  $\Psi_\alpha^+$ , para um estado *out*,  $\Psi_\beta^-$ ,

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+),$$

aqui  $\alpha$  e  $\beta$  são índices que condensam toda a informação contida em seu respectivo estado do espaço de Hilbert. É assumido que tanto os estados *in*, quanto os *out*, sejam uma base completa do espaço de Hilbert, de forma que se a matrix  $S$  é um mapa entre essas duas bases, é necessário ela ser um mapa unitário, e de fato, manipulando formalmente essa expressão,

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_\beta^-, \Psi_\gamma^+)^* (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = \int d\beta (\Psi_\gamma^+, \Psi_\beta^-) (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^+) = \delta_{\gamma\alpha}$$

Há fortes consequências dessa propriedade, a principal é chamada por motivos históricos de **Teorema Óptico**, primeiro, é necessário expandir,

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

nessa forma, a condição de unitariedade implica,

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma\alpha} &= \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\delta_{\beta\gamma} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \mathcal{A}_{\beta\gamma})^* (\delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}) \\ \delta_{\gamma\alpha} &= \delta_{\gamma\alpha} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\gamma) \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\gamma - p_\alpha) \mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^8 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ 0 &= -i\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i\mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

A maior utilidade deste resultado é do ponto de vista de teoria de perturbação, certamente calculamos uma amplitude de espalhamento  $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$  em uma determinada ordem  $\mathcal{O}(g^n)$  do parâmetro de acoplamento, porém, o resultado acima promove uma relação entre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}^2$ , ou seja, há relações entre amplitudes em diferentes ordens na expansão do parâmetro de acoplamento. A versão mais famosa deste resultado é para  $\alpha = \gamma$ ,

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{\alpha\alpha}^* - i\mathcal{A}_{\alpha\alpha} &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ 2\Im[\mathcal{A}_{\alpha\alpha}] &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned}$$

Trabalhando do ponto de vista de teoria de perturbação, podemos calcular a parte imaginária da contribuição de 1-loop de  $\mathcal{A}_{\alpha\alpha}$  apenas sabendo a contribuição de nível árvore para  $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ . Parte deste fato está relacionado ao teorema de Sokhotski–Plemelj,

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} = i\pi\delta(p^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{p^2 + m^2}.$$

Que nos confirma que o propagador apenas possui parte imaginária para uma partícula *on-shell*, porém, para diagramas a nível árvore não é cinematicamente permitido de uma partícula virtual interna ao diagrama entrar *on-shell*, o que é compatível com o senso comum de contribuições à nível árvore serem polinômios de propagadores e numeradores cinemáticos, que certamente não possuem parte imaginária para partículas *off-shell*. Agora, para contribuições de *loop*, partículas virtuais internas podem ficarem *on-shell*, e portanto, os diagramas podem possuírem parte imaginária.

Como exemplo tomemos a teoria  $g\phi^3$ ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(-\square + m^2)\phi + \frac{1}{3!}g\phi^3,$$

A contribuição de 1-loop para o processo  $1 \rightarrow 1$  é,

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \circlearrowleft \xrightarrow{p} \text{---} = \frac{1}{2}(ig)^2 \frac{1}{i^2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2 - i\epsilon} \\ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} &= -i\frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left( i\pi\delta(\ell^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \right) \left( i\pi\delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right) \\ \Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}}] &= -\frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left( -\pi^2\delta(\ell^2 + m^2)\delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right) \end{aligned}$$

A parte dependente do valor principal resultará em zero, e portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Im} \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta((\ell - p)^2 + m^2) \\
\text{Im} \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta(q^2 + m^2) \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\text{Im} \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_q} (\delta(\ell^0 - \omega_\ell) + \delta(\ell^0 + \omega_\ell)) (\delta(q^0 - \omega_q) + \delta(q^0 + \omega_q)) \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\text{Im} \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_q} (\delta(\omega_q + \omega_\ell - p^0) + \delta(\omega_q - \omega_\ell - p^0) + \delta(-\omega_q + \omega_\ell - p^0)) \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \ell - \mathbf{p}) \\
\text{Im} \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] &= \frac{1}{8} (2\pi)^4 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_q} \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\text{Im} \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] &= \frac{1}{8} (2\pi)^4 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_q} \delta^{(4)}(q + \ell - p) |\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}}|^2, \quad \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}} = g
\end{aligned}$$

Neste *toy-model* podemos apreciar claramente a parte imaginária da amplitude  $1 \rightarrow 1$  a  $1\text{-loop}$  ser expressável em termos da amplitude nível árvore  $1 \rightarrow 2$ . A integral que aparece,

$$\int d\beta = \frac{1}{4} \int \frac{d^3 \ell d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_q},$$

nada é além da medida Lorentz invariante do espaço de fase. Há uma maneira diagramática de obter essa igualdade entre a parte imaginária e produtos de amplitudes em menor ordem, elas vão pelo nome de **regras de corte de Cutkosky**, o procedimento é simples, escrevemos um diagrama de Feynman de  $n\text{-loops}$  que contribua para o processo em análise, disto, *cortamos* propagadores deste diagrama de forma a separar o diagrama inicial em dois diagramas de ordem menor. O procedimento de *cortar* um propagador corresponde a substituir  $(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$  por  $i\pi\theta(p^0)\delta(p^2 + m^2)$ , diagramaticamente, representamos um propagador cortado por uma linha perpendicular passando por seu propagador, ao fim, multiplicamos as duas amplitudes restantes, com a da direita sendo conjugada, ao fim, integramos sobre o espaço de fase Lorentz invariante. Note que neste processo obtemos duas amplitudes *on-shell*. Como exemplo,

$$\text{Im} \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{2} \frac{p}{\text{---}} \overset{\ell}{\underset{\text{---}}{\text{---}}} \frac{p}{\text{---}} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(q + \ell - p) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}}(p; \ell, q) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree*}}(p; \ell, q)$$

Claramente, para esse exemplo simples, há apenas uma única maneira de se *cortar* o diagrama de  $1\text{-loop}$  em duas partes de menor ordem. Porém, para um número de pernas externas maior, ou maior número de *loops*, é necessário somar sobre todas as maneiras de se separar as amplitudes. Este conceito de unitariedade possui algumas limitações, primeiro, é possível apenas determinar a parte imaginária das amplitudes via amplitudes de ordem inferior, segundo, somente conseguimos aplicar este resultado para um espalhamento da forma  $\alpha \rightarrow \alpha$ , que é longe de ser a forma de espalhamento mais geral. Contudo, é possível obter um resultado mais geral, para isto, temos que relembrar a definição de estados *in/out*. Dado um hamiltoniano  $H = H_0 + V$ , e sendo  $\Phi_\alpha$  autoestado de  $H_0$  com autovalor  $E_\alpha$ , definimos  $\Psi_\alpha^\pm$  autoestado de  $H$  com autovalor  $E_\alpha$  por

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm, \quad \epsilon > 0.$$

Note a imposição  $\epsilon > 0$ , e portanto, a troca  $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$  corresponde a:  $\Psi_\alpha^- \leftrightarrow \Psi_\alpha^+$ . Assim, podemos retornar a expressão,

$$S_{\alpha\gamma}^* = (\Psi_\alpha^-, \Psi_\gamma^+)^* = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^-) = (\Psi_\gamma^-, \Psi_\alpha^+) \Big|_{\epsilon < 0} = S_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

portanto,

$$\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* = \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

utilizando esse resultado podemos concluir,

$$\begin{aligned} -i(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^*) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\left(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon > 0} - \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0}\right) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

O lado esquerdo desta igualdade deve ser entendido como sendo o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , claramente, se  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  fosse uma função contínua em  $\epsilon$ , o resultado seria zero, e como o lado direito da igualdade é não necessariamente zero, podemos apenas concluir que: Em geral  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  é descontínuo em  $\epsilon$ , porém, como  $\epsilon$  contribui para a amplitude somente dentro do propagador  $-i(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ , e é acompanhado por um fator de  $i$ , concluímos que genericamente as amplitudes, vistas como funções dos invariantes cinemáticos, possuem um *branch cut* num subconjunto do eixo real, quando interpretarmos os momentos podendo tomar valores em números complexos.

Seja uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica em todo plano, exceto por possíveis polos e um *branch cut* no eixo real, naturalmente isso significa que,

$$\exists s \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [f(s - i\epsilon) - f(s + i\epsilon)] = \text{Disc}[f],$$

no qual já definimos o que chamamos de descontinuidade de uma função. Assim,

$$-i\text{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}] = \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}.$$

Agora, se supormos que  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  é uma amplitude de nível árvore, claramente as sub-amplitudes  $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$  devem ser também de nível árvore, do contrário, seriam contribuições de ordem superior para  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ . Assim, necessariamente  $\Phi_\beta$  é um estado de uma única partícula, portanto,  $d\beta$  é a medida invariante de Lorentz do espaço de fase de uma única partícula,

$$\begin{aligned} -i\text{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\text{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_\mathbf{q}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\text{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \frac{1}{2\omega_\mathbf{q}} \delta(q^0 - p_\alpha^0) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\ -i\text{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \theta(p_\alpha^0) \delta((q^0)^2 - (p_\alpha^0)^2) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\ \text{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(p_\alpha^0) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Note que  $p_\alpha^2 + m_\beta^2 = 0$  é impossível de ser satisfeita para diagramas nível árvore, pois, isso força  $m_\beta^2 > \sum_\alpha m_\alpha^2$ , e caso exista tal estado em nossa teoria, este não é estável, logo, não é possível de estar em um espalhamento de estados assintóticos. Claramente, essa expressão somente toma sentido se estamos dispostos a interpretar  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  como função dos momentos externos, e admitirmos estes a poderem tomar valores complexos. Nesse ponto

de vista, olhemos para as amplitudes como funções de cada momento das partículas iniciais e finais:  $p_{\alpha_i}, p_{\gamma_j}$ , e estudemos sua extensão no plano complexo definida por,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha\}, \{p_\gamma\}) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha + k_\alpha z\}, \{p_\gamma + k_\gamma z\}) = \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(z),$$

no qual  $z \in \mathbb{C}$  e  $k_{\alpha_i}, k_{\gamma_j}$  são momentos arbitrários satisfazendo:

$$k_\alpha = k_\gamma, \quad k_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_j} = k_{\alpha_i} \cdot k_{\gamma_j} = k_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_j} = 0, \quad p_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_i} = p_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_i} = 0.$$

Desta forma temos que  $\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(0) = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ , olhemos para expressão anterior quando sujeita a esta extensão complexa,

$$\begin{aligned} \text{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} 2\pi i \theta(\tilde{p}_\alpha^0) \delta(\tilde{p}_\alpha^2 + m_\beta^2) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \text{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} 2\pi i \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2p_\alpha \cdot k_\alpha z) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \text{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} \frac{2\pi i}{2|p_\alpha \cdot k_\alpha|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta\left(z + \frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha}\right) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}, \quad z_\beta = -\frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha} \\ \text{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} |z_\beta| \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \frac{1}{z} \text{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Sabemos que as amplitudes  $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$  são de nível árvore, portanto, pelo argumento anterior, não possuem singularidades em  $z = z_\beta$ , assim, podemos integrar a expressão anterior em um intervalo simplesmente conexo fechado qualquer que contenha  $z_\beta$  e não passe por  $z = 0$ . Chamemos este intervalo de  $I_\beta$ ,

$$\begin{aligned} \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \text{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \int_{I_\beta} dz \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \text{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}, \end{aligned}$$

agora, utilizando a definição de descontinuidade, e sabendo que a descontinuidade de  $z$  é zero neste domínio, podemos deformar o contorno  $I_\beta$  para duas versões, uma passando por baixo da reta real, e outra por cima da reta real com orientação oposta, e devido à descontinuidade é possível unir estes contornos formando uma curva fechada no sentido anti-horário circundando o ponto  $z_\beta$ , chamemos este contorno de  $C_\beta$ ,

$$\oint_{C_\beta} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}.$$

Podemos então agora deformar o contorno  $C_\beta$  em outros dois, um circundando o ponto  $z = 0$  no sentido horário, e outro no sentido anti-horário circundando  $z = \infty$ , assim,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\ -\text{Res}_{z=0} \left[ \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] - \text{Res}_{z=\infty} \left[ \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\ \mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} - \text{Res}_{z=\infty} \left[ \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] \\ \mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}, \end{aligned}$$

finalmente, sempre podemos tomar  $z_\beta < 0$ , pois,  $m_\beta^2 > -p_\alpha^2$  e o sinal de  $k_\alpha$  é fixado por se fazer  $\theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta)$ , assim,

$$(2.1) \quad \mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \sum_{\beta} \frac{1}{p_\alpha^2 + m_\beta^2} \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}.$$

Esta forma da condição de unitariedade é também conhecida como **relações de recursão à nível árvore**. Escolhas específicas de  $k_\alpha, k_\gamma$  caracterizam diferentes métodos de recursão, os principais métodos são BCFW — Britto, Cachazo, Feng e Witten — e CSW — Cachazo, Svrcek e Witten —. Esses métodos de recursão, unidos com a simplicidade do formalismo de amplitudes *on-shell*, providenciam uma abordagem robusta e — comparativamente ao método usual — simples para se obter amplitudes de  $n \geq 4$  pontos à nível árvore. Claramente, essas relações somente facilitam a obtenção de amplitudes se o requisito

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = 0,$$

for satisfeita. Esta condição é altamente não trivial e não é válida para várias teorias, porém, para teorias do tipo Yang-Mills foi-se provado que é de fato verdadeira.

**2.3. Unitariedade generalizada.** No item anterior, demos uma breve descrição de como a unitariedade da matrix  $S$  — que nos permite calcular a descontinuidade de uma amplitude partindo de amplitudes de menor ordem —, suplementada por hipóteses adicionais da estrutura analítica, nos permite de obter a amplitude completa, à nível árvore, partindo de amplitudes de menor ordem. Vamos agora descrever como esse método de unitariedade pode ser estendido para **unitariedade generalizada**, que nos permite obter amplitudes de *loop* partindo de amplitudes de menor ordem. Claro que isso só é possível suplementando com condições da estrutura analítica.

Para isso, começamos partindo de uma amplitude  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^L$  de *L-loops*. Sabemos da estrutura das regras de Feynman que tal amplitude pode ser escrita como,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^L = \sum_a \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4 \ell_n}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a},$$

no qual  $a$  indexa diferentes topologias que contribuem para este processo, e chamamos o objeto  $\mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a}$  de integrando da amplitude. Ainda mais, o integrando possui forma bem definida, provindas das regras de Feynman,

$$\mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a} = \frac{1}{S_a} \frac{n_a c_a}{\prod_{\beta_a} (p_{\beta_a}^2 + m_\beta^2)},$$

$n_a$  engloba toda a dependência cinemática do numerador,  $c_a$  são fatores puramente numéricos dependentes dos acoplamentos e dos grupos de calibre, e  $S_a$  são apenas fatores de simetria. O caso ideal seria se a soma sobre topologias comutasse com a integral dos momentos de *loop*, e pudéssemos definir o seguinte objeto,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^L = \sum_a \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4 \ell_n}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a} \stackrel{?}{=} \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4 \ell_n}{(2\pi)^4} \sum_a \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a} \stackrel{?}{=} \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4 \ell_n}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^L,$$

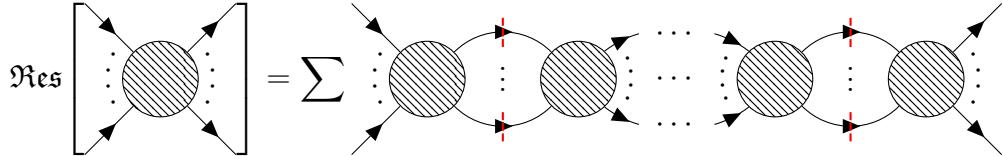
a obstrução para se fazer isso é que não existe uma maneira de se definir globalmente como os momentos de loop são definidos no objeto  $\mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a}$ . Existem teorias em que isso sim é possível, porém, no caso geral não é verdade. Assim como mostramos no conceito de unitariedade da matrix S, a amplitude completa á nível árvore pode ser reconstruída em sua totalidade sabendo apenas o valor de seu resíduo em,

$$(p_\alpha^2 + m_\beta^2) \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{p_\alpha^2 = -m_\beta^2} = \text{Res}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}] = \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{p_\alpha^2 = -m_\beta^2},$$

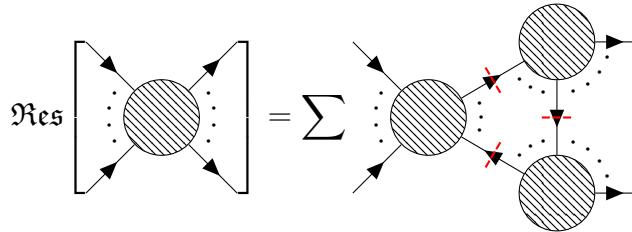
com o mesmo espírito, propomos que o integrando de amplitudes de *loops* possa ser reconstruído fazendo a igualdade de seus resíduos em **cortes** com o produto de amplitudes de menor ordem. Por exemplo, a unitariedade por si é capaz de nos garantir,

$$(\ell_i^2 + m_{\beta_1}^2)((p_\alpha - \ell_i)^2 + m_{\beta_2}^2) \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^L \Big|_{\ell_i^2 = -m_{\beta_1}^2, (p_\alpha - \ell_i)^2 = -m_{\beta_2}^2} = \sum_{n=0}^L \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta\gamma}^{L-n*} \mathcal{I}_{\beta\alpha}^n \Big|_{\ell_i^2 = -m_{\beta_1}^2, (p_\alpha - \ell_i)^2 = -m_{\beta_2}^2},$$

contudo, ela somente nos é capaz de nos dizer algo sobre **cortes** verticais do diagrama, isto é, **cortes** da forma,



Apesar desta topologia de resíduos nos proporcionar muita informação sobre a amplitude, para  $L \geq 1$ , essa informação apenas não é suficiente para conseguirmos reconstruir a amplitude, pois, há outros resíduos possíveis de serem tomados que não são levados em conta na aplicação da unitariedade convencional. Um exemplo é,



que corresponderia à,

$$(\ell^2 + m_{\beta_3}^2)((p_{\gamma_1} - \ell)^2 + m_{\beta_1}^2)((p_{\gamma_2} - \ell)^2 + m_{\beta_2}^2) \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^L \Big|_{\text{Cuts}} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^{L-n} \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \mathcal{I}_{\{\beta_2, \beta_3\}\gamma_2}^{L-n-m*} \mathcal{I}_{\{\beta_1, \beta_2\}\gamma_1}^{m*} \mathcal{I}_{\{\beta_1, \beta_2\}\alpha}^n \Big|_{\text{Cuts}, \gamma=\gamma_1 \cup \gamma_2}$$

o grande problema com esse tipo de corte é: nos assumimos que os estados iniciais e finais em integrandos  $\mathcal{I}_{\beta\alpha}^L$  são tais que satisfazem  $p_\alpha^0, p_\beta^0 > 0$ , porém, neste caso é fácil de se mostrar que não é possível de se satisfazer essa condição para a solução dos cortes, assim, as amplitudes que aparecem nos resíduos dos cortes não possuem de fato uma relação rígida de partículas iniciais e finais, por conta do sinal da componente temporal do momento não ser positivo — podendo ser complexo —. Então, se estamos interessados em obter o máximo de informação sobre amplitudes de ordens superiores partindo de ordens inferiores, é necessário obtermos um

formalismo que trate partículas externas de maneira uniforme, isto é, um formalismo que seja indiferente de  $p^0 > 0$  e trate igualmente partículas internas e externas.

Para isso, ao invés de utilizarmos como amplitude  $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ , que diferencia os estados iniciais  $\alpha$  dos finais  $\beta$ , vamos fazer  $p_{\alpha_i} \rightarrow -p_{\alpha_i}$ , de modo que a conservação de momento passa a ser  $\sum_i^n p_i = 0$ . A amplitude  $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$  vista como função dos momentos  $p_{\beta_i}, -p_{\alpha_j}$  para  $n$  partículas externas será denominada  $\mathcal{A}_n(1^{h_1}, \dots, n^{h_n})$ , no qual  $i$  refere-se ao momento da  $i$ -ésima partícula e  $h_i$  à helicidade/spin da  $i$ -ésima partícula. Nota-se a uniformidade do tratamento de partículas iniciais e finais, a única diferença é que partículas com  $p_i^0 > 0$  devem serem interpretadas como finais e partículas com  $p_i^0 < 0$  como iniciais. De certa forma, podemos interpretar essa nova função das variáveis cinemáticas como sendo uma abreviação de todas as amplitudes possíveis de  $n$  pontos, isto é,

$$\mathcal{A}_n(1^{h_1}, \dots, n^{h_n}) = \sum_{\alpha, \beta} \prod_{i \in \alpha, j \in \beta} \theta(-p_{\alpha_i}^0 > 0) \theta(p_{\beta_j}^0 > 0) \mathcal{A}_{\beta\alpha},$$

devido às funções de Heaviside presentes, produtos dessas amplitudes fatorizam, e portanto, podemos utilizar do resultado da (2.1) e obter uma expressão ainda mais geral,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \sum_{I, m} \frac{1}{P_I^2 + m_\beta^2} \tilde{\mathcal{A}}_{n-m+2} \tilde{\mathcal{A}}_m \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_n \\ (P_I^2 + m_\beta^2) \mathcal{A}_n &\Big|_{P_I^2 = -m_\beta^2} = \text{Res}[\mathcal{A}_n] = \sum_{m=3}^{n-1} \tilde{\mathcal{A}}_{n-m+2} \tilde{\mathcal{A}}_m \Big|_{P_I^2 = -m_\beta^2} \end{aligned}$$

É claro, para teorias nas quais o termo de borda é zero. Assim, podemos utilizar este formalismo para calcular cortes do tipo triângulo mostrados anteriormente, devido a não ser necessário se preocupar sobre o sinal dos momentos. Escrevemos então analogamente,

$$\mathcal{A}_n^L = \int \prod_{j=1}^L \frac{d^4 \ell_j}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_n^L,$$

e agora nos voltamos sobre a construibilidade do integrando por meio de cortes. Bem, termos não construíveis são analíticos em  $\mathbb{C}/\infty$  e estão relacionados com *tadpoles*, por hora iremos ignorar estes.

Comecemos com um exemplo à 1-loop, neste caso há apenas uma única integral de uma única variável de momento de loop,  $\ell$ . Assim, como este possui apenas 4 componentes, podemos ao máximo realizar um corte quádruplo, sendo qualquer outro número superior de cortes zero. Assim, olhemos para a maior ordem de corte,

$$(\ell^2 + m_1^2)((\ell - P_I)^2 + m_2^2)((\ell - P_J)^2 + m_3^2)((\ell - P_K)^2 + m_4^2) \mathcal{I}_n^1 \Big|_{\text{Cuts}} = \sum_{k, l, m, p}^{k+l+m+p=n} \mathcal{A}_{k+2} \mathcal{A}_{l+2} \mathcal{A}_{m+2} \mathcal{A}_{p+2},$$

as escolhas de  $P_{I,J,K}$  ditam as topologias que aparecerão do lado direito, porém, note que o lado direito não possui nenhuma menção à variável de integração  $\ell$ , assim,

$$\mathcal{I}_n^1 \supseteq \sum_{m_i} \sum_{k, l, m, p}^{k+l+m+p=n} \mathcal{A}_{k+2} \mathcal{A}_{l+2} \mathcal{A}_{m+2} \mathcal{A}_{p+2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m_1^2)((\ell - P_I)^2 + m_2^2)((\ell - P_J)^2 + m_3^2)((\ell - P_K)^2 + m_4^2)},$$

isto é um exemplo de reconstrução, em geral, podemos fatorizar  $\mathcal{I}_n^L$  em uma base de integrais escalares com coeficientes que englobam dependências cinemáticas, vetores de polarizações e elementos de álgebras. Claro, obtemos aqui somente um dos termos de  $\mathcal{I}_n^1$ , é possível que haja contribuições com menor número de polos, e

para obter estas seria necessário tomar mais resíduos. Vamos demonstrar como isso pode ser feito na teoria teste,  $g\phi^3$ ,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{4 \text{ Cuts}} = \ell + 2 \begin{array}{c} \text{Diagram of a 4-particle cut with 4 cuts, top row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{bottom row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \ell - 3 - 4 \end{array} = \mathcal{A}_3(2, \ell, -\ell - 2) \mathcal{A}_3(-\ell, \ell - 3, 3) \mathcal{A}_3(4, 3 - \ell, \ell - 3 - 4) \mathcal{A}_3(1, \ell + 2, 3 + 4 - \ell)$$

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{4 \text{ Cuts}} = g^4,$$

que implica,

$$\mathcal{I}_4^1 \supseteq g^4 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell + 2)^2 + m^2)((\ell - 3)^2 + m^2)((\ell - 3 - 4)^2 + m^2)}.$$

Obviamente esse resultado é somente para uma única contribuição de topologia no corte de 4 partículas, há mais outras cinco contribuições que podem ser obtidas por permutação das pernas externas. Procedemos para o corte de 3 partículas,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = \ell + 2 \begin{array}{c} \text{Diagram of a 3-particle cut with 3 cuts, top row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{bottom row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \ell - 3 - 4 \end{array} = \mathcal{A}_3(2, \ell, -\ell - 2) \mathcal{A}_3(1, \ell + 2, 3 + 4 - \ell) \mathcal{A}_4(-\ell, \ell - 3 - 4, 3, 4)$$

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = g^4 \left[ \frac{1}{m^2 + (3+4)^2} + \frac{1}{m^2 + (3-\ell)^2} + \frac{1}{m^2 + (4-\ell)^2} \right],$$

Certamente esta é apenas uma contribuição de outras duas, note que os dois últimos termos correspondem ao mesmo resíduo da expressão com 4 polos, portanto apenas o primeiro termo nos diz algo não trivial sobre a parcela com 3 polos,

$$\mathcal{I}_3^1 \supseteq \frac{g^4}{m^2 + (3+4)^2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell + 2)^2 + m^2)((\ell - 3 - 4)^2 + m^2)}.$$

O corte duplo é,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{2 \text{ Cuts}} = \begin{array}{c} \text{Diagram of a 2-particle cut with 2 cuts, top row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{bottom row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \ell - 3 - 4 \end{array} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_4(1, 2, \ell, -\ell - 2) \mathcal{A}_4(-\ell, \ell - 3 - 4, 3, 4)$$

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = \frac{1}{2} g^4 \left[ \frac{1}{m^2 + (1+2)^2} + \frac{1}{m^2 + (1+\ell)^2} + \frac{1}{m^2 + (2+\ell)^2} \right] \left[ \frac{1}{m^2 + (3+4)^2} + \frac{1}{m^2 + (3-\ell)^2} + \frac{1}{m^2 + (4-\ell)^2} \right]$$

realizando a mesma análise anterior, existe apenas um termo ligado a contribuição de 2 polos,

$$\mathcal{I}_3^1 \supseteq \frac{g^4}{2(m^2 + (3+4)^2)(m^2 + (1+2)^2)} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell - 3 - 4)^2 + m^2)}.$$

Nós poderíamos ir ainda mais além e tentar calcular o corte simples,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{1 \text{ Cut}} = \begin{array}{c} \text{Diagram of a 1-particle cut with 1 cut, top row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{bottom row: } \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ 12 \end{array} = \mathcal{A}_6(1, 2, 3, 4, \ell, -\ell),$$

porém, este tipo de corte não está bem definido em TQC no geral, principalmente devido a divergências no limite colinear de amplitudes, contudo, não há problema nisto, cortes como esses iriam apenas contribuir para *tadpoles*, os quais após renormalização devem ser zero, portanto não iremos nos preocupar. Note que para o caso desta teoria teste é sim possível obter o integrando  $\mathcal{I}_4^1$  completo partindo da unitariedade generalizada.

**2.4. Comportamento no UV.** Ao introduzir diagramas de *loops*, naturalmente estes introduzem **divergências**, porém, felizmente, atualmente está bem consolidado tanto conceitualmente, quanto algorítmicamente, procedimentos para “dar cabo” à esses “problemas”. Teorias nas quais é possível de se controlar as divergências, **sem** perder o caráter preditivo da teoria, são ditas **renormalizáveis**, no caso contrário, **não-renormalizáveis**. Como exemplo de diagrama divergente podemos voltar à nossa teoria teste,

$$\text{Diagrama com loop} = i \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell - p)^2 + m^2)} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda d\ell \frac{1}{\ell} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \ln[\Lambda],$$

obviamente, essa análise da divergência é apenas pictórica e altamente ingênua. “Sabemos” que deve haver divergências na região de integração  $\ell \rightarrow \infty$ , o grande problema em analisar essa região é a métrica indefinida do espaço de Minkowski que força  $\ell \rightarrow \infty \not\Rightarrow \ell^2 \rightarrow \infty$ , tome como exemplo a região  $\ell^\mu = (\Lambda \ 0 \ 0 \ \Lambda)$ , que respeita  $\ell \rightarrow \infty$ , mas,  $\ell^2 \equiv 0$ . A análise é ainda mais dificultada quanto maior o número de loops presentes no diagrama.

A “única” maneira de se analisar fielmente o comportamento no UV é realizar uma rotação de Wick para o espaço euclidiano. Isto é, tomando em conta a prescrição de  $i\epsilon$ , rotacionamos o contorno da integral de  $d\ell^0$  para o eixo imaginário, desviando dos polos, assim,  $\ell^2 \rightarrow -\ell^2 < 0$ , onde agora  $\ell^2$  é definido com a métrica euclidiana. Neste caso, o limite  $\ell \rightarrow \infty \Rightarrow \ell^2 \rightarrow \infty$  faz sentido. Há apenas uma obstrução para este procedimento, que pode ser vista no exemplo de integral divergente que dêmos: em geral o integrando não é uma função somente de  $\ell^2$ , mas também depende de contrações com momentos externos da forma  $(\ell - p)^2$ , portanto, é necessário realizar uma reparametrização antes de aplicar a rotação de Wick. Esses procedimentos não são em sua totalidade difíceis, porém, para grande número de *loops* e pernas externas, se tornam demasiado longas as contas, além de que esta análise é para somente um diagrama. Para topologias que permitem vários diagramas se torna impraticável a análise, além de ser obscuro a presença ou não de cancelamentos entre contribuições de diagramas. Este é o principal ponto que estamos interessados em analisar, em [3] foi de fato mostrado que cancelamentos entre certos diagramas divergentes ocorrem, gerando amplitudes que não possuem algumas das divergências esperadas por análise “ingênua” de *power-counting*.

Conforme mencionamos, é impraticável realizar uma análise de divergência para um número de pernas externas e *loops* arbitrário, ao menos utilizando-se o método usual. O algorítmico utilizado em [3] para se mostrar os cancelamentos foi de analisar a existência ou não de determinados polos no infinito de **cortes** de diagramas. O motivo dos cortes é: cortes eliminam parte da liberdade dos momentos de *loop*, assim, com uma escolha esperta de cortes podemos restringir a região dos momentos de *loop* para uma região do espaço de integração na qual o limite  $\ell \rightarrow \infty$  faça sentido. Nossa teoria teste é muito simples para esperarmos qualquer tipo de cancelamento em cortes, porém, ela servirá como uma arena de aprendizagem das técnicas necessárias para se realizar o cálculo em teorias mais complexas.

## 2.5. Teorias com derivadas superiores.

## 2.6. Comportamento de amplitudes na teoria teste.

### 3. PLANO DE ATIVIDADES

O plano de atividades para o próximo ano está descrito na tabela 2,

TABELA 2. Plano de atividades.

Data	Categoria	Descrição
Mar-Jul 2025	Disciplinas Cursadas	Teoria de Cordas. Tópicos Avançados em Relatividade Geral.
Mar-Jul 2025	Revisão Bibliográfica	Estudo do formalismo <i>on-shell</i> [1, 2], bem como dos métodos e teorias utilizadas em [3–5].
Jul 2025	Participação em Evento	XV Escola do CBPF.
Ago-Dez 2025	Cálculos	Cálculos preliminares com a teoria teste proposta em [4].
Nov-Dez 2025	Escrita	Redação de capítulos preliminares sobre métodos <i>on-shell</i> e unitariedade generalizada.
Out 2025	Participação em Evento	XLVIII CPLF. Agorá II.
Dez 2025	Participação em Evento	QCD Meets Gravity School. QCD Meets Gravity Conference.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Nima Arkani-Hamed, Tzu-Chen Huang e Yu-tin Huang. *Scattering Amplitudes For All Masses and Spins*. 31 de out. de 2021. DOI: 10.48550/arXiv.1709.04891. arXiv: 1709.04891 [hep-th]. Pré-publicado.
- [2] Henriette Elvang e Yu-tin Huang. *Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*. 1<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 5 de fev. de 2015. ISBN: 978-1-107-70662-0 978-1-107-06925-1 978-1-009-77336-2. DOI: 10.1017/CBO9781107706620.
- [3] Enrico Herrmann e Jaroslav Trnka. “UV Cancelations in Gravity Loop Integrands”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2019.2 (fev. de 2019), p. 84. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP02(2019)084. arXiv: 1808.10446 [hep-th].
- [4] Henrik Johansson, Gustav Mogull e Fei Teng. “Unraveling Conformal Gravity Amplitudes”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2018.9 (set. de 2018), p. 80. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP09(2018)080. arXiv: 1806.05124 [hep-th].
- [5] Henrik Johansson e Josh Nohle. *Conformal Gravity from Gauge Theory*. 10 de jul. de 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1707.02965. arXiv: 1707.02965 [hep-th]. Pré-publicado.
- [6] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. 1<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 15 de dez. de 2013. ISBN: 978-1-108-98503-1 978-1-107-03473-0. DOI: 10.1017/9781139540940.
- [7] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN: 978-0-511-81391-7. DOI: 10.1017/CBO9780511813917.
- [8] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Volume 1, Foundations*. 1<sup>a</sup> ed. Cambridge University Press, 30 de jun. de 1995. ISBN: 978-0-521-67053-1 978-0-521-55001-7 978-1-139-64416-7. DOI: 10.1017/CBO9781139644167.