TEORIAS DE CAMPOS SUPER-SIMÉTRICAS

VICENTE V. FIGUEIRA

1. Introdução

Em 1967 Coleman e Mandula [1] catalogaram todas as simetrias da matrix S, o resultado impressionante obtido foi de que não é possível extender a álgebra de Poincaré[1], $\mathfrak{iso}^+(3,1)$, de uma maneira não trivial, isto é, uma vez que a teoria é feita satisfazer a simetria de Poincaré,

$$\begin{aligned} \left[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}\right] &= \mathrm{i}\left(g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} + g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu}\right) \\ \left[P^{\alpha}, M^{\mu\nu}\right] &= \mathrm{i}(g^{\alpha\nu}P^{\mu} - g^{\alpha\mu}P^{\nu}) \\ \left[P^{\alpha}, P^{\mu}\right] &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Quaisquer que sejam as outras simetrias da teoria, são restringidas à comutar com os elementos da álgebra de Poincaré, além de pertencerem necessariamente uma soma direta de álgebras de Lie compactas e semi-simples, e possíveis somas diretas de álgebras de $\mathfrak{u}(1)$,

$$\begin{aligned} \left[Q^A, P^\mu\right] &= \left[Q^A, M^{\mu\nu}\right] = 0 \\ \left[Q^A, Q^B\right] &= \mathrm{i}f^{AB}{}_C\, Q^C \end{aligned}$$

Certamente implicando que geradores adicionais de simetrias não de Poincaré, são proibidos de possuírem índices vetoriais. Porém há uma brecha neste teorema, foram apenas consideradas representações de $\mathcal{L}_+^\uparrow$, e não de seu *double cover*, $SL(2,\mathbb{C})$. Assim Coleman e Mandula não levaram em conta índices spinoriais, e certamente, também não levaram em conta a necessidade de incluir anti-comutadores, devido ao teorema da Spin-Estatística. A inclusão dos índices spinoriais no teorema não demanda muito mais trabalho, porém, a inclusão de anti-comutadores sim, pois a estrutura matemática de Álgebras de Lie não é suficiente para acomodar ambos comutadores e anti-comutadores, assim, é necessário a introdução do conceito de **Álgebras de Lie Graduadas**, o qual descreveremos brevemente. Uma **Super-Álgebra de Lie** ou **Álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$-Graduada**[2] $\mathfrak{g}$ é,

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$,
- Cada elemento $T^A \in \mathfrak{g}$ possui peso, ou graduação, $\eta\left(T^A\right) = \eta_A = 0, 1$
- Produtos de elementos tem peso,
$$\eta\left(T^A \cdots T^Z\right) = \sum \eta_i \pmod 2$$
- Operação bilinear fechada na Álgebra,
$$\left[T^A, T^B\right] = T^A T^B - (-1)^{\eta_A\eta_B} T^B T^A = \mathrm{i}f^{AB}{}_C\, T^C$$
- Identidade de Jacobi
$$(-1)^{\eta_C\eta_A}\left[\left[T^A, T^B\right], T^C\right] + (-1)^{\eta_A\eta_B}\left[\left[T^B, T^C\right], T^A\right] + (-1)^{\eta_B\eta_C}\left[\left[T^C, T^A\right], T^B\right] = 0$$

Com a escolha natural de graduação 0 para operadores bosônicos e graduação 1 para operadores fermiônicos, obtemos com naturalidade tanto comutadores quanto anti-comutadores da mesma operação bilinear $[\cdot,\cdot]$. A extensão do Teorema de Coleman-Mandula para Álgebras de Lie $\mathbb{Z}_2$-Graduadas utilizando-se também de representações com índices spinoriais foi feita por Haag-Łopuszański-Sohnius [2], que concluíram que é possível de se extender a Álgebra de Poincaré de maneira não trivial, desde que nisto sejam utilizados geradores fermiônicos pertencendo as representações $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

2. Álgebra de Super-Poincaré

Conforme mencionado, o Teorema provado por Haag-Łopuszański-Sohnius nos garante que a Álgebra de Poincaré 1.1, somente pode ser estendida de maneira não trivial se os geradores adicionais forem fermiônicos com índices de mão esquerda e direita. A princípio podemos ter uma quantidade arbitrária $\mathcal{N}$ linearmente independente[3] destes,

$$Q_a^A, Q_{\dot{a}}^{\dagger A}; \quad A, B = 1, \cdots, \mathcal{N}; \quad a = 1, 2; \quad \dot{a} = \dot{1}, \dot{2}$$

Date: 6 de janeiro de 2025.

[1] Toda vez que mencionado álgebra(grupo) de Poincaré — A não ser que explicitamente dito o contrário —, nos referimos à(ao) álgebra(grupo) inomogêneo(a) próprio(a) ortócrono(a) de Lorentz.

[2] O fato da álgebra ser $\mathbb{Z}_2$-Graduada deve-se a estarmos em um espaço-tempo $3+1$ dimensional, o qual só admite bósons e férmions, isto é retratado de modo a haver apenas dois valores diferentes para pesos. Um espaço-tempo $2+1$, por exemplo, possui outros tipos de partículas, ânions.

[3] Esta hipótese está aqui por motivos profiláticos, se por acaso uma quantidade destes geradores não fosse linearmente independente poderíamos eliminar-los para obter uma coleção menor com independência linear. Também é necessária a hipótese que estes não aniquilem ao menos um estado físico do espaço de Hilbert, do contrário são apenas operadores nulos.

E com a seguinte graduação,

$$\eta(Q_a^A) = \eta\left(Q_{\dot{a}}^{\dagger A}\right) = 1, \quad \eta(P^\mu) = \eta(M^{\mu\nu}) = 0$$

O restante do conteúdo do Teorema fixa unicamente qual são as relações de comutação. Não iremos aqui derivar na íntegra todas as relações, mas comentar brevemente como covariância por Lorentz, unido das Identidades de Jacobi, são suficientes para se fixar todas as relações de comutação. A mais trivial é a das Super-Cargas com os geradores de momento angular e boost, pois como as Super-Cargas carregam índices spinoriais, suas leis de transformação por Lorentz são fixas por sua representação do grupo. Assim,

$$\left[Q_a^A, M^{\mu\nu}\right] = \sigma^{\mu\nu}{}_a{}^b Q_b^A, \quad \left[Q^{\dagger A\dot{a}}, M^{\mu\nu}\right] = \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{a}}{}_{\dot{b}} Q^{\dagger A\dot{b}} \tag{2.1}$$

Outra maneira de entender por que não é possível alterar estas relações é devido ao lado direito do comutador possuir graduação fermiônica, logo, deve apenas conter uma quantidade ímpar de $Q_a^A, Q_{\dot{a}}^{\dagger A}$, mas, como estes pertencem a álgebra, é obrigatório do lado direto do comutador ser linear nestes, assim, o único outro termo que poderia ser incluso no lado direito da primeira relação de comutação[4] seria,

$$C^{\mu\nu}{}_a{}^{\dot{b}} Q_{\dot{b}}^{\dagger A}$$

Isto iria requerer a existência de uma quantidade invariante $C^{\mu\nu}{}_a{}^{\dot{b}}$, mas pela decomposição de representações,

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2},0\right) \otimes \left(0,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \oplus \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

podemos observar que não há nenhuma decomposição na representação escalar, $(0,0)$, portanto este objeto invariante não existe e as relações de comutação são fixadas como mencionado. A próxima relação de comutação é de Q_a^A com P^μ, a única combinação linear nos geradores, Lorentz covariante e com graduação correta é,

$$\left[Q_a^A, P^\mu\right] = \sigma^\mu_{a\dot{b}} Z^A{}_B Q^{\dagger B\dot{b}}$$

Para determinar $Z^A{}_B$ usamos das Identidades de Jacobi,

$$\begin{aligned}
\left[\left[Q_a^A, P^\mu\right], P^\nu\right] + \left[\left[P^\nu, Q_a^A\right], P^\mu\right] + \left[\left[P^\mu, P^\nu\right], Q_a^A\right] &= 0 \\
\sigma^\mu_{a\dot{b}} Z^A{}_B \left[Q^{\dagger B\dot{b}}, P^\nu\right] - \sigma^\nu_{a\dot{b}} Z^A{}_B \left[Q^{\dagger B\dot{b}}, P^\mu\right] &= 0 \\
\sigma^\mu_{a\dot{b}} \bar{\sigma}^{\nu\dot{b}c} Z^A{}_B Z^{*B}{}_C Q_c^C - \sigma^\nu_{a\dot{b}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{b}c} Z^A{}_B Z^{*B}{}_C Q_c^C &= 0 \\
Z^A{}_B Z^{*B}{}_C \sigma^{\mu\nu} Q^C &= 0
\end{aligned}$$

O único modo de se garantir que isto é verdade para todos μ, ν, Q^C é tomando $Z^A{}_B = 0$,

$$\left[Q_a^A, P^\mu\right] = 0 \tag{2.2}$$

A próxima relação de comutação que analisaremos é de Q_a^A e Q_b^B, a forma mais geral do comutador é,

$$\left[Q_a^A, Q_b^B\right] = Z^{AB}\epsilon_{ab} + \sigma^{\mu\nu}{}_{ab} M_{\mu\nu} X^{AB}$$

Aplicando a Identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned}
\left[\left[Q_a^A, Q_b^B\right], P^\mu\right] + \left[\left[P^\mu, Q_a^A\right], Q_b^B\right] - \left[\left[Q_b^B, P^\mu\right], Q_a^A\right] &= 0 \\
\epsilon_{ab}\left[Z^{AB}, P^\mu\right] + \sigma^{\alpha\beta}{}_{ab} X^{AB} [M_{\alpha\beta}, P^\mu] &= 0
\end{aligned}$$

Aqui necessariamente Z^{AB} deve ser proporcional a identidade, pois tem graduação zero e nenhum índice de Lorentz, não é possível construir tal objeto utilizando-se apenas de combinação lineares dos geradores, assim nossa condição é de que o segundo comutador deve ser zero! Condição que só pode ser satisfeita se $X^{AB} = 0$, uma vez que $\left[M^{\alpha\beta}, P^\mu\right] \neq 0$. Assim[5],

$$\left[Q_a^A, Q_b^B\right] = Z^{AB}\epsilon_{ab} \tag{2.3}$$

A última relação que nos resta analisar é de Q_a^A com $Q_{\dot{b}}^{\dagger B}$, a combinação mais geral é[6],

$$\left[Q_a^A, Q_{\dot{b}}^{\dagger B}\right] = -2X^{AB}\sigma_{\mu a\dot{b}} P^\mu$$

Claramente aqui X^{AB} é manifestamente hermitiano, iremos mostrar que é também positivo-definido. Para isto temos que invocar condições sobre os geradores das Super-Simetrias, que são linearmente independentes, e que exista ao menos um estado não aniquilado por estes, assim, considere,

$$\mathbb{Q} = y_A w^a Q_a^A$$

Certamente então, para algum estado Ψ que não é aniquilado por $\mathbb{Q}$,

$$0 < \left(\Psi, \left[\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^\dagger\right]\Psi\right) = -w^a y_A y_B^* w^{*\dot{b}} 2X^{AB} \sigma_{\mu a\dot{b}} (\Psi, P^\mu \Psi)$$

---

[4]Para a segunda relação de comutação basta tomar o adjunto da primeira. $Q_{\dot{a}}^{\dagger A} = \left(Q_a^A\right)^\dagger$.

[5]Conforme mencionado, Z^{AB} são proporcionais a identidade, isto é, são cargas centrais.

[6]O fator de 2 é meramente convencional.

Isto é, a quantidade $y_A X^{AB} y^*_B$ é não nula para todos y_A, ou seja, ou X^{AB} é positivo-definido, ou é negativo-definido. Para decidir entre estas duas possibilidades, tomemos o caso de um estado físico com $P^\mu \Psi = -m g^{\mu 0}\Psi$,

$$\begin{aligned}
&0 < 2 y_A X^{AB} y^*_B w^a w^{*\dot b} \sigma_{\mu a \dot b} m g^{\mu 0} (\Psi, \Psi)\\
&0 < 2 y_A X^{AB} y^*_B w^a w^{*\dot b} \sigma^0_{a \dot b}\\
&0 < 2 y_A X^{AB} y^*_B \|\mathbf{w}\|^2
\end{aligned}$$

Isto é, se desejamos ter estados de energia positiva é necessário que X^{AB} seja positivo-definido[7]. Sabendo disto e da hipótese que todos os Q^A_a são linearmente independentes, a matriz X^{AB} será não degenerada, assim, podemos, fazendo uma mudança de variáveis dos Q^A_a, diagonalizá-la de forma a obter,

$$\left[Q^A_a, Q^{\dagger B}_{\dot b}\right] = -2\delta^{AB}\sigma_{\mu a \dot b} P^\mu \tag{2.4}$$

As relações de comutação obtidas, eqs. (1.1) a (2.4), constituem a **Álgebra de Super-Poincaré**, e são o principal resultado do Teorema de Haag-Łopuszański-Sohnius.

3. Consequências de Super-Poincaré

Vamos discutir aqui alguns aspectos não triviais de teorias que satisfazem a Álgebra de Super-Poincaré.

3.1. **Positividade da Energia.** Na verdade isto não é uma consequência, e sim uma hipótese na derivação da relação de comutação da eq. (2.4), porém, mostraremos aqui de uma maneira mais clara como podemos obter este fato[8].

$$\begin{aligned}
\left[Q^A_a, Q^{\dagger A}_{\dot b}\right] &= -2\delta^{AA}\sigma_{\mu a \dot b} P^\mu, \text{ contração com } \bar\sigma^{\dot b a}_0\\
\bar\sigma^{0\dot b a}\left[Q^A_a, Q^{\dagger A}_{\dot b}\right] &= -2\bar\sigma^{0\dot b a}\sigma_{\mu a \dot b} P^\mu, \text{ Tr}\left[\bar\sigma^\nu \sigma_\mu\right] = -2 g^\nu{}_\mu\\
\bar\sigma^{0\dot b a}\left[Q^A_a, Q^{\dagger A}_{\dot b}\right] &= 4P^0, \ \bar\sigma^{0\dot b a} = \delta^{a1}\delta^{\dot b \dot 1} + \delta^{a2}\delta^{\dot b \dot 2}\\
P^0 &= \frac{1}{4}\left(Q^A_1 Q^{\dagger A}_{\dot 1} + Q^{\dagger A}_{\dot 1} Q_1 + Q_2 Q^{\dagger A}_{\dot 2} + Q^{\dagger A}_{\dot 2} Q_2\right)
\end{aligned}$$

Tomemos agora um estado arbitrário Ψ do espaço de Hilbert,

$$\begin{aligned}
\left(\Psi, P^0\Psi\right) &= \frac{1}{4}\left[\left(\Psi, Q^A_1 Q^{\dagger A}_{\dot 1}\Psi\right) + \left(\Psi, Q^{\dagger A}_{\dot 1} Q^A_1\Psi\right) + \left(\Psi, Q^A_2 Q^{\dagger A}_{\dot 2}\Psi\right) + \left(\Psi, Q^{\dagger A}_{\dot 2} Q^A_2\Psi\right)\right]\\
\left(\Psi, P^0\Psi\right) &= \frac{1}{4}\left[\left\|Q^{\dagger A}_{\dot 1}\Psi\right\|^2 + \left\|Q^A_1\Psi\right\|^2 + \left\|Q^{\dagger A}_{\dot 2}\Psi\right\|^2 + \left\|Q^A_2\Psi\right\|^2\right] \geq 0
\end{aligned}$$

Isto por sí já é uma propriedade desejável de qualquer teoria física, e certamente impõe restrições fortes sobre o tipo de espectro de partículas. Por exemplo, uma teoria livre com apenas férmions possui energia do vácuo sendo menos infinito[9].

3.2. **Índice de Witten.** A positividade da energia deduzida no item anterior nos leva a crer que há de fato alguma relação entre o número de estados bosônicos e estados fermiônicos em uma teoria que respeita a Álgebra de Super-Poincaré. Um modo de verificar isto é utilizando-se do **Operador de Número Fermiônico**, F, que retorna 0 quando atua num estado com estatística bosônica, e retorna 1 quando atua em um estado com estatística fermiônica,

$$\mathsf{F}\Psi_{\text{Boson}} = 0, \quad \mathsf{F}\Psi_{\text{Fermion}} = \Psi_{\text{Fermion}}$$

Com o qual definimos o **Operador de Estatística**, $(-1)^{\mathsf{F}}$,

$$(-1)^{\mathsf{F}}\Psi_{\text{Boson}} = \Psi_{\text{Boson}}, \quad (-1)^{\mathsf{F}}\Psi_{\text{Fermion}} = -\Psi_{\text{Fermion}}$$

Como queremos saber a relação entre o número de estados bosônicos e fermiônicos vamos calcular,

$$\text{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right]$$

[7]Do ponto de vista da Álgebra não há nada que impeça de ter X^{AB} negativo-definido, isto faria com que o operador momento *físico* fosse na verdade $-P^\mu$.

[8]Aqui os índices ^{A} não estão sendo somados.

[9]Estamos aqui nos referindo ao Hamiltoniano sem o ordenamento normal, vale lembrar que a prescrição de ordenamento normal é arbitrária.

Para realizar esse cálculo vamos escolher uma base do espaço de Hilbert que diagonaliza o operador de momentum, Ψ^n_q, no qual $P^\mu \Psi^n_q = q^\mu \Psi^n_q$, e n simboliza quaisquer outros números quânticos da base. Assim podemos escrever[10,11],

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}} P^0\right] = \sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0\geq 0} \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} P^0 \Psi^n_q\right) &= \operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}} \frac{1}{4}\bar{\sigma}^{0\dot{b}a}\left[Q^A_a, Q^{\dagger A}_{\dot{b}}\right]\right] \\
\sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0\geq 0} \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} q^0 \Psi^n_q\right) &= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\left(Q^A_1 Q^{\dagger A}_{\dot{1}} + Q^{\dagger A}_{\dot{1}} Q_1 + Q_2 Q^{\dagger A}_{\dot{2}} + Q^{\dagger A}_{\dot{2}} Q_2\right)\right] \\
\sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0\geq 0} q^0 \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_q\right) &= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\left[-Q^A_1 (-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{1}} + (-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{1}} Q_1 - Q_2 (-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{2}} + (-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{2}} Q_2)\right]
\end{aligned}$$

Aqui nos usamos o fato de que, $\left[(-1)^F, Q^A_a\right] = \left[(-1)^F, Q^\dagger_{\dot{b}}\right] = 0$, isso é verdade necessariamente por causa que as super-cargas mudam a graduação de um estado quando atuam neste. Utilizando agora da propriedade cíclica do traço,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}} P^0\right] = \sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0\geq 0} q^0 \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_q\right) &= \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\left[-(-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{1}} Q^A_1 + (-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{1}} Q_1 - (-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{2}} Q_2 + (-1)^{\mathsf{F}} Q^{\dagger A}_{\dot{2}} Q_2)\right] \\
\sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0\geq 0} q^0 \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_q\right) &= 0
\end{aligned}$$

Bem, para o caso de $q^0 = 0 \to q^\mu = 0$ — que nada mais nada menos é o estado de vácuo — a contribuição para a igualdade é trivial, logo a restrição que obtemos é,

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0> 0} q^0 \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_q\right) = 0$$

Como necessariamente $q^0 > 0$, o único modo da igualdade ser satisfeita é se,

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_q\right) = 0, \quad \forall q,\ q^2 \leq 0,\ q^0 > 0$$

Este é um resultado impressionante, a interpretação é de que para um dado momentum não nulo existem o mesmo número de graus de liberdade bosônico e fermiônico, ou seja, teorias super-simétricas possuem o mesmo número de partículas bosônicas e fermiônicas. Somos fortemente tentados a concluir que, $\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] = 0$, porém isso não é necessariamente verdade. Note que[12],

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] &= \sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0\geq 0} \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_q\right) \\
\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] &= \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_{\text{vac}}, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_{\text{vac}}\right) + \sum\!\!\!\!\!\!\int_{q^2\leq 0,\ q^0> 0} \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_q, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_q\right) \\
\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] &= \sum\!\!\!\!\!\!\int_{n} \left(\Psi^n_{\text{vac}}, (-1)^{\mathsf{F}} \Psi^n_{\text{vac}}\right) = \#(\text{vácuos bosônicos}) - \#(\text{vácuos fermiônicos}) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

A quantidade definida na eq. (3.1) é chamada de **Índice de Witten**[7], e ela nos diz que a única possibilidade de não ter um pareamento de um para um de estados bosônicos e fermiônicos é no vácuo. Além disso, vale mencionar que o Índice de Witten é um *invariante topológico* da teoria analisada, isto quer dizer, ele é invariante por mudança de parâmetros na lagrangiana. Uma das principais utilidades é na *Quebra espontânea de Super-Simetria*, quando o vácuo da teoria não é super-simétrico. Por exemplo, uma teoria com $\operatorname{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] > 0$, possui ao menos um vácuo bosônico que não possui parceiro fermiônico, assim,

$$Q^A_a \Psi^n_{\text{vac}} = Q^{\dagger B}_{\dot{b}} \Psi^n_{\text{vac}} = 0$$

[10] Aqui o símbolo $\sum\!\!\!\!\!\!\int_{n}$ é meramente uma soma formal sobre quaisquer que sejam os índices n, e qualquer que seja seu espectro, discreto ou contínuo.

[11] Estamos usando de que o espaço de Hilbert físico na base de momentum respeita as condições $P^0 \geq 0$, derivada anteriormente, e também a condição $P_\mu P^\mu \leq 0$, positividade da massa.

[12] Ao colocar um índice n no estado de vácuo Ψ^n_{vac} estamos levando em conta possíveis degenerescências do vácuo.

necessariamente, pois não há um vácuo fermiônico disponível para estar no lado direito da igualdade[13]— uma vez que não há um número igual de vácuos bosônicos e fermiônicos —, e assim o vácuo é super-simétrico. O caso de maior interesse físico[14] é $\mathrm{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] = 0$, neste caso, todos os vácuos bosônicos possuem parceiros fermiônicos, então é em princípio **possível**, mas não necessário, que

$$Q_a^A \Psi^n_{\text{vac bosônico}} \propto \Psi^m_{\text{vac fermiônico}}$$

De forma que o vácuo não seja super-simétrico[15].

4. Construção de Ações Super-Simétricas

A construção de teorias que respeitem super-simetria é um trabalho não trivial, a princípio, se estivermos interessados em uma teoria livre, poderíamos obter uma teoria super-simétrica apenas incluindo o mesmo número de graus de liberdade fermiônico e bosônico, porém, é difícil de obter qual é a exata transformação entre os campos bosônicos e fermiônicos que corresponde a transformação de super-simetria, ou então, analogamente, obter uma corrente fermiônica conservada. Mesmo se em posse da virtude de visão além do alcance todos esses passos forem corretamente concluídos, obtemos uma teoria super-simétrica, mas esta não será **manifestamente** super-simétrica. Vamos aqui adotar o formalismo do **Super-Espaço**, no qual a super-simetria da Ação é manifesta, e a inclusão de interações nas teorias é direta. Infelizmente este formalismo funciona apenas para super-simetria mínima, $\mathcal{N} = 1$, para a construção de ações super-simétricas com $\mathcal{N} = 2, 4, 8$ é necessário utilizar-se de outros métodos[16], portanto vamos nos limitar a analisar a super-simetria mínima.

4.1. **Formalismo de Super-Espaço.** Sabemos que o gerador das translações no espaço-tempo é o momentum P^μ, isto é, uma translação pode ser vista como um elemento do grupo de Poincaré da forma

$$g(a) = \exp\left(-\mathrm{i}a_\mu P^\mu\right)$$

Vamos fazer um análogo para a Álgebra[17] de Super-Poincaré, como esta contém os geradores $Q_a, Q^\dagger_{\dot{b}}$, necessariamente temos que o grupo[18] de Super-Poincaré — Aquele gerado pela Álgebra de Super-Poincaré —, terá elementos da forma[19],

$$g\big(\theta, \theta^\dagger\big) = \exp\left(-\mathrm{i}\theta Q - \mathrm{i}\theta^\dagger Q^\dagger\right)$$

A ideia do formalismo de Super-Espaço é considerar que este elemento do grupo de Super-Poincaré simboliza uma *translação* nos parâmetros $\theta^{(\dagger)}$, assim, consideramos como pontos do Super-Espaço o conjunto de valores $\big(x, \theta, \theta^\dagger\big)$. Outro modo mais formal de definir o Super-Espaço é como espaço quociente de um grupo com um sub-grupo normal, no caso de Minkowski,

$$\mathbb{R}^{3,1} = ISO^+(3,1)/SO^+(3,1)$$

Podemos definir analogamente também para o Super-Espaço[20],

$$\text{Super-Espaço} = ISO^+(3,1|1)/SO^+(3,1)$$

Isto é apenas um modo mais matemático de dizer que, assim como o espaço de Minkowski é gerado pelo conjunto de todas as translações, o Super-Espaço é gerado pelo conjunto de todas as *translações* da forma,

$$g\big(x, \theta, \theta^\dagger\big) = \exp\left(-\mathrm{i}x_\mu P^\mu - \mathrm{i}\theta Q - \mathrm{i}\theta^\dagger Q^\dagger\right)$$

O principal motivo de se formular a teoria no Super-Espaço é, assim como existe uma representação infinito-dimensional para P^μ no espaço de Minkowski, $-\mathrm{i}\partial^\mu$, iremos obter uma representação infinito-dimensional para $Q^{(\dagger)}$ em formato de operador diferencial sobre o Super-Espaço, isso facilita a obtenção das transformações super-simétricas nos campos da teoria.

---

[13]Note que a situação $\mathrm{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] > 0$ possibilita a existência de inúmeros vácuos, porém, assim como é feito na análise de quebra espontânea de simetrias globais, alterações dos parâmetros da lagrangiana promovem certos vácuos — ou combinações lineares deles — a estados de partículas sem massa, no nosso caso, para $\mathrm{Tr}\left[(-1)^{\mathsf{F}}\right] > 0$, esta promoção de *vácuos falsos* para estados de partículas é feita sempre em pares, uma bosônica e outra fermiônica, até restarem apenas *vácuos verdadeiros* bosônicos, nesta descrição de não quebra espontânea de super-simetria está claro o motivo de $Q_a^A \Psi^n_{\text{vac}} = Q^{\dagger B}_{\dot{b}} \Psi^n_{\text{vac}} = 0$. Uma vez que todos os *vácuos falsos* foram promovidos para estados de partículas ao se variar os parâmetros da lagrangiana, não resta nenhum *vácuo verdadeiro* fermiônico para entrar no lado direito da igualdade.

[14]Até agora não há nenhuma evidência experimental da existência dos parceiros super-simétricos dos integrantes do Modelo Padrão, logo, ou a super-simetria é quebrada espontâneamente, ou é quebrada explicitamente. Nem por isso a super-simetria deixa de ser um assunto interessante a ser estudado, teorias super-simétricas fornecem uma grande gama de *toy models* que extraem ao máximo os limites do que é possível uma Teoria Quântica de Campos fazer. Quanto a anomalia da super-simetria, não é possível haver anomalia de super-simetria, pois do contrário, seria necessário modificar a relação de comutação da eq. (2.2), o que já foi mostrado que é impossível, devido as identidades de Jacobi.

[15]Na presença de quebra espontânea de super-simetria, ao contrário de quebra espontânea de simetrias globais, temos a presença de um *férmion* de Nambu-Goldstone. Neste caso, como uma das direções do potencial é plana — a direção do férmion sem massa que sinaliza a quebra espontânea de super-simetria —, e a outra direção é não plana, possuímos uma disparidade nas energias dos estados, isto é, a energia do estado de vácuo é positiva não nula, do contrário da energia do vácuo super-simétrico que é zero. De fato, a energia do estado de vácuo tem o papel de parâmetro de ordem da quebra espontânea de super-simetria.

[16]É possível construir o espectro de teorias com super-simetria estendida, $\mathcal{N} > 1$, como produtos diretos de multipletos de super-simetria simples.

[17]Sabemos na verdade que estamos lidando com uma Álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduada, ou, Super-Álgebra de Lie. Mas não iremos nos preocupar em explicitar estes nomes.

[18]Super-Grupo, mas não iremos nos preocupar com isso.

[19]Devido a estatística fermiônica dos geradores $Q^{(\dagger)}$ é necessário que $\theta^{(\dagger)}$ sejam variáveis grassmanianas.

[20]Em geral, o grupo de Super-Poincaré é denotado como $ISO^+(3,1|\mathcal{N})$.

4.2. **Super-Campos.** Definimos como **Super-Campo** uma função sobre o Super-Espaço que toma valores em $\mathbb{C}$, o exemplo mais simples de tal função é a de um escalar,

$$\Phi\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big)$$

A princípio poderíamos escolher qualquer tipo de representação por Lorentz para um Super-Campo, mas, como veremos, a não ser que estejamos interessados em construir teorias com partículas de spin $\frac{3}{2}$ ou 2, a representação escalar é suficiente. Assim como foi mencionado anteriormente, conhecemos a representação de P^{μ} nos Super-Campos,

$$\left[\Phi\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big), P^{\mu}\right] = -\mathrm{i}\partial^{\mu}\Phi\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big)$$

O que torna crível a existência de um operador diferencial $\mathcal{Q}_a$ tal que,

$$\left[\Phi\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big), Q_a\right] = -\mathrm{i}\mathcal{Q}_a\Phi\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big)$$

A tentativa mais direta é a de $\mathcal{Q}_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} = \partial_a$ e $\mathcal{Q}^{\dagger}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial\theta^{\dagger\dot{a}}} = -\partial^{\dagger}_{\dot{a}}$[21]. Isto não funciona, pois a eq. (2.4) não é respeitada. Para fazer estes operadores uma representação da álgebra será necessário a inclusão de derivadas em x^{μ}. A inclusão que de fato é representação da álgebra é,

$$\mathcal{Q}_a = \partial_a + \mathrm{i}\sigma_{\mu a\dot{c}}\theta^{\dagger\dot{c}}\partial^{\mu}, \quad \mathcal{Q}^{\dagger}_{\dot{b}} = -\partial^{\dagger}_{\dot{b}} - \mathrm{i}\theta^{c}\sigma_{\mu c\dot{b}}\partial^{\mu} \to \left[\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}^{\dagger}_{\dot{b}}\right] = -2\mathrm{i}\sigma_{\mu a\dot{b}}\partial^{\mu}$$

A qual pode ser verificada de respeitar todas as relações de comutação e identidades de Jacobi. A vantagem de ter esta representação é que dada uma transformação infinitesimal super-simétrica, sabemos que os campos vao se transformar como,

$$\Phi \to \Phi + \epsilon\mathcal{Q}\Phi + \epsilon^{\dagger}\mathcal{Q}^{\dagger}\Phi$$

Sabemos então checar se uma determinada ação possui super-simetria.

Nossa abordagem para a construção de uma Ação Super-Simétrica é similar a construção de Ações invariantes por Poincaré. Tomamos uma função escalar e real, Lagrangiana, e integramos por todo o espaço de Minkowski, similarmente, iremos partir de um Super-Campo escalar e real, e integrá-lo por todo o Super-Espaço,

$$K^{\dagger}\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big) = K\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big) \to S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^{\dagger}\, K\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big)$$

Dessa forma, segue naturalmente que a Ação obtida é Super-Simetricamente invariante, pois,

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^{\dagger}\, \big(\epsilon\mathcal{Q}K + \epsilon^{\dagger}\mathcal{Q}^{\dagger}K\big)$$

Como os $\mathcal{Q}^{(\dagger)}$ são operadores diferenciais nas variáveis que estão sendo integradas sobre, a variação da Ação é um mero termo de borda, para o qual com devidas condições de contorno é zero. Portanto desde que obtemos um Super-Campo real e escalar teremos uma possível Ação, porém, assim como as super-cargas não preservam o spin, eq. (2.1), um Super-Campo não descreve uma partícula de spin definido, de fato, um Super-Campo não descreve **uma** partícula[22], mas sim uma coleção de partículas de spin diferente e de mesma massa[23]. Isso pode ser visto se utilizar-mos das propriedades das variáveis grassmanianas[24] para expandir o Super-Campo como,

$$\Phi\big(x, \theta, \theta^{\dagger}\big) = \phi(x) + \theta\psi(x) + \theta^{\dagger}\chi^{\dagger}(x) + \theta\theta M(x) + \theta^{\dagger}\theta^{\dagger}N(x) + \theta\sigma^{\mu}\theta^{\dagger}v_{\mu}(x) + \theta\theta\theta^{\dagger}\lambda^{\dagger}(x) + \theta^{\dagger}\theta^{\dagger}\theta\xi(x) + \theta\theta\theta^{\dagger}\theta^{\dagger}D(x)$$

Um único Super-Campo possui 4 escalares complexos, 2 férmions de mão esquerda, 2 férmions de mão direita e um vetor complexo. Gostaríamos de reduzir esta quantidade de campos, logo, precisamos aplicar alguma restrição sobre estes, mas, de forma a não destruir a Super-Simetria. Um método manifesto de aplicar restrições é introduzindo uma *derivada super-covariante*[25], $\mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}$, tal que,

$$\left[\mathcal{D}_a, \mathcal{Q}_b\right] = \left[\mathcal{D}_a, \mathcal{Q}^{\dagger}_{\dot{b}}\right] = 0$$

Pelas formas das relações de comutação esperamos que $\mathcal{D}_a$ seja similar a $\mathcal{Q}_a$, e de fato, a escolha,

$$\mathcal{D}_a = \partial_a - \mathrm{i}\sigma_{\mu a\dot{c}}\theta^{\dagger\dot{c}}\partial^{\mu}, \quad \mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{b}} = -\partial^{\dagger}_{\dot{b}} + \mathrm{i}\theta^{c}\sigma_{\mu c\dot{b}}\partial^{\mu} \to \left[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{b}}\right] = 2\mathrm{i}\sigma_{\mu a\dot{b}}\partial^{\mu}$$

é a correta a ser tomada. Assim podemos impor uma condição como,

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\dot{a}}\Phi = 0, \quad \text{ou, } \mathcal{D}_a\Phi^{\dagger} = 0$$

E devido aos motivos mencionados anteriormente, essas condições continuam valendo após uma transformação super-simétrica. Super-Campos satisfazendo essas respectivas condições são denominados de **Chirais** e **Anti-Chirais**[26], o motivo desses nomes será explicado posteriormente. Vamos então obter o que estas restrições impõem sobre o Super-Campo.

---

[21] O sinal de menos aqui é devido as variáveis serem grassmanianas.

[22] No sentido usual, uma partícula está associada a um auto-estado do operador massa $P_{\mu}P^{\mu}$ e do operador spin $W_{\mu}W^{\mu}$, $W_{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\mu\alpha\beta}P^{\nu}M^{\alpha\beta}$. Poderíamos definir uma super-partícula como descrita por um Super-Campo, mas o quanto desta definição é útil pode ser questionada, uma vez que o que é mensurável são o spin e a massa.

[23] Segue da eq. (2.2), $[Q_a, P^{\mu}] = 0 \to [Q_a, P^{\mu}P_{\mu}] = 0$.

[24] $\theta^{(\dagger)}_a\theta^{(\dagger)}_b = -\theta^{(\dagger)}_b\theta^{(\dagger)}_a$. Por completude vamos também relembrar a notação de $\theta\theta = \theta^a\theta_a$, $\theta^{\dagger}\theta^{\dagger} = \theta^{\dagger}_{\dot{a}}\theta^{\dagger\dot{a}}$

[25] O porque de se não aplicar uma condição como $\partial_{\mu}\Phi = 0$ é porque, apesar de diminuir o número de graus de liberdade total, esta restrição não elimina explicitamente um dos campos da decomposição. Por exemplo, para eliminar completamente N, D, ξ poderíamos multiplicar Φ por $\theta^{\dagger\dot{a}}$, porém, isto não é invariante super-simetricamente. É necessário obter um operador diferencial nos $\theta, \theta^{\dagger}$ que mantenha a Super-Simetria.

[26] Sempre vamos denotar um Super-Campo Chiral por uma letra grega maiúscula e um Anti-Chiral por uma letra grega maiúscula com †.

4.2.1. *Super-Campo Chiral.* Notemos primeiramente que,

$$\mathcal{D}^\dagger_{\dot a}\theta_b = -\partial^\dagger_{\dot a}\theta_b + \mathrm{i}\theta^c\sigma_{\mu c\dot a}\partial^\mu\theta_b = 0$$
$$\mathcal{D}^\dagger_{\dot a}x_\nu = -\partial^\dagger_{\dot a}x_\nu + \mathrm{i}\theta^c\sigma_{\mu c\dot a}\partial^\mu x_\nu = \mathrm{i}\theta^c\sigma_{\nu c\dot a}$$
$$\mathcal{D}^\dagger_{\dot a}\theta^{\dagger\dot b} = -\partial^\dagger_{\dot a}\theta^{\dagger\dot b} + \mathrm{i}\theta^c\sigma_{\mu c\dot a}\partial^\mu\theta^{\dagger\dot b} = -\delta_{\dot a}{}^{\dot b}$$

Logo, se definirmos $y_\nu = x_\nu - \mathrm{i}\theta\sigma_\nu\theta^\dagger$,

$$\mathcal{D}^\dagger_{\dot a}y_\nu = \mathcal{D}^\dagger_{\dot a}x_\nu + \mathrm{i}\theta^c\sigma_{\nu c\dot b}\mathcal{D}^\dagger_{\dot a}\theta^{\dagger\dot b} = \mathrm{i}\theta^c\sigma_{\nu c\dot a} - \mathrm{i}\theta^c\sigma_{\nu c\dot a} = 0$$

Portanto, qualquer função que dependa apenas de y,θ é naturalmente um Super-Campo Chiral, assim, podemos expandir naturalmente primeiro em θ, para somente ao final expandir em $\theta^\dagger$,

$$\begin{aligned}\Phi(y,\theta) &= \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)\\ &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) - \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu\phi(x) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\theta\theta\theta^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial^2\phi(x)\end{aligned} \tag{4.1}$$

Com sucesso conseguimos eliminar graus de liberdade! Obtemos 2 campos complexos escalares e um campo fermiônico de mão esquerda[27]. Porém, este campo não é real, e a restrição de ser real e ser Chiral resulta em um campo trivial $\Phi = 0$, logo, não é possível construir uma ação real somente com campos chirais.

4.2.2. *Super-Campo Anti-Chiral.* Seguindo o mesmo raciocínio anterior, podemos calcular,

$$\mathcal{D}_a y^\dagger_\nu = 0, \quad \mathcal{D}_a\theta^{\dagger\dot b} = 0$$

O que indica novamente que qualquer função de somente $y^\dagger,\theta^\dagger$ é naturalmente um Super-Campo Anti-Chiral, porém, note que,

$$[\Phi(y,\theta)]^\dagger = \Phi^\dagger\big(y^\dagger,\theta^\dagger\big)$$

Isto é, todo Super-Campo Anti-Chiral é o conjugado de um Super-Campo Chiral! Assim,

$$\Phi^\dagger\big(y^\dagger,\theta^\dagger\big) = \phi^\dagger(x) + \sqrt{2}\theta^\dagger\psi^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger F^\dagger(x) + \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu\phi^\dagger(x) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\psi^\dagger(x)\bar\sigma^\mu\theta + \frac{1}{4}\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\theta\partial^2\phi^\dagger(x) \tag{4.2}$$

Análogo ao multipleto chiral, o multipleto anti-chiral possui 2 campos escalares complexos e um campo fermiônico de mão direita. O fato de todo multipleto anti-chiral ser o conjugado de um chiral nos fornece naturalmente um termo para a Ação,

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^2\theta\,\mathrm{d}^2\theta^\dagger\;\Phi^\dagger\Phi$$

A integral grassmaniana é trivial, pois ela apenas seleciona o termo com coeficiente $\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$, vamos obtê-lo[28]:

$$\Phi^\dagger\Phi \supset \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\frac{1}{4}\phi^\dagger\partial^2\phi + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\frac{1}{4}\phi\partial^2\phi^\dagger - \mathrm{i}\theta^\dagger\psi^\dagger\theta\theta\theta^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi + \mathrm{i}\theta\psi\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\psi^\dagger\bar\sigma^\mu\theta + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger F^\dagger F + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi$$
$$\Phi^\dagger\Phi \supset \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\big[F^\dagger F - \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi\big]$$

Assim nossa Ação manifestamente Super-Simétrica é,

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\big[F^\dagger F - \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi\big]$$

Onde claramente podemos ver a presença de F como um campo auxiliar, isto é, está presente somente para garantir a igualdade de graus de liberdade entre bosons e férmions off-shell — 4 graus de liberdade bosônicos e 4 fermiônicos — devido a não possuir termos cinéticos, on-shell apenas ϕ contribui e ψ e $\psi^\dagger$ deixam de ser independentes — 2 graus de liberdade bosônicos e 2 fermiônicos —. Fora este fato, a teoria obtida aqui é incrivelmente simples, uma teoria livre de duas partículas, uma bosônica e outra fermiônica. Gostaríamos de introduzir interações, a princípio renormalizáveis, porém, como $\Phi^\dagger\Phi$ já possui dimensão de massa[29] 2, e $\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^2\theta\,\mathrm{d}^2\theta^\dagger$ apenas possui dimensão de massa 2, portanto não é possível introduzir termos da forma $\big(\Phi^\dagger\Phi\big)^n$. O método para obter uma interação é utilizar-se da propriedade de um campo Chiral, $\Phi\big(x,\theta,\theta^\dagger\big) = \Phi(y,\theta)$, para integrar apenas em metade do Super-Espaço de forma como se y fosse a coordenada do espaço-tempo, isto é,

$$\int \mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^2\theta\,\Phi(y,\theta)$$

[27]Esta é a razão deste Super-Campo ser chamado de Chiral, pois ele contêm um campo fermiônico de mão esquerda, naturalmente, o Super-Campo Anti-Chiral irá possuir um campo fermiônico de mão direita. Esta é a menor coleção de campos com a qual é possível se construir uma teoria Super-Simétrica não trivial, é necessário haver o mesmo número de graus de liberdade on-shell fermiônicos e bosônicos, embora não seja necessário que os números de graus de liberdade off-shell sejam iguais, esta é a única maneira de se obter uma lagrangiana manifestamente Super-Simétrica. Este será o papel desempenhado pelo campo $F(x)$, como será visto a seguir.

[28]Utilizando-se de identidades de Fierz e desprezando derivadas totais.

[29]Sabemos que $[P^\mu] = +1, [M^{\mu\nu}] = 0$ e com a eq. (2.2) podemos inferir que $\big[Q^{(\dagger)}\big] = +\frac{1}{2}$, assim $\big[\theta^{(\dagger)}\big] = -\frac{1}{2}$.

Podemos ir além, como qualquer função *holomorfa* de um campo (Anti-)Chiral é ainda um campo (Anti-)Chiral, podemos introduzir uma interação como um termo[30],

$$S_{\text{int}} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, W(\Phi(x,\theta)) + \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, W^\dagger\big(\Phi^\dagger(x,\theta^\dagger)\big)$$

Sobre se este termo quebra ou não explicitamente a Super-Simetria, podemos calcular,

$$\delta S_{\text{int}} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta \left\{\epsilon \mathcal{Q} W + \epsilon^\dagger \mathcal{Q}^\dagger W\right\} + \text{h.c.} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta \left\{\epsilon^a \partial_a W - \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\epsilon^\dagger \partial_\mu W\right\} + \text{h.c} = 0$$

A igualdade a zero é garantida pois todos os termos da variação da Ação são termos de borda, que são desprezados. Assim, obtermos um termo de interação Super-Simétrico, se requeremos que sejam renormalizáveis, ao menos por *power-counting*, o *Super-Potencial* mais geral é,

$$W(\Phi) = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\Phi^3$$

O qual podemos ainda expandir em θ,

$$W(\Phi) = W\Big(\phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F\Big)$$

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2}\frac{\partial W}{\partial \phi}\theta\psi + \theta\theta\bigg(\frac{\partial W}{\partial \phi}F - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2}\psi\psi\bigg)$$

Obtemos assim então o famoso modelo de Wess-Zumino! Vamos explicitar os termos da ação,

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}^4x \left[\int \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, \Phi^\dagger\Phi + \int \mathrm{d}^2\theta\, W(\Phi) + \int \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, W^\dagger\big(\Phi^\dagger\big)\right] \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left[-\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + F^\dagger F + F\frac{\partial W}{\partial\phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\psi\psi + F^\dagger\frac{\partial W^\dagger}{\partial\phi^\dagger} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial{\phi^\dagger}^2}\psi^\dagger\psi^\dagger\right] \end{aligned}$$

As equações de movimento para F são triviais e podem ser resolvidas para obter,

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[-\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \left\|\frac{\partial W}{\partial\phi}\right\|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\psi\psi - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial{\phi^\dagger}^2}\psi^\dagger\psi^\dagger\right]$$

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[-\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \left\|m\phi + \frac{\lambda}{2}\phi^2\right\|^2 - \frac{1}{2}(m+\lambda\phi)\psi\psi - \frac{1}{2}\big(m^\dagger + \lambda^\dagger\phi^\dagger\big)\psi^\dagger\psi^\dagger\right]$$

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[-\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + m^\dagger m\phi^\dagger\phi + \frac{m^\dagger\lambda}{2}\phi^\dagger\phi^2 + \frac{m\lambda^\dagger}{2}\phi{\phi^\dagger}^2 + \frac{\lambda^\dagger\lambda}{4}\big(\phi^\dagger\phi\big)^2 - \frac{1}{2}(m+\lambda\phi)\psi\psi - \frac{1}{2}\big(m^\dagger + \lambda^\dagger\phi^\dagger\big)\psi^\dagger\psi^\dagger\right]$$

Agora podemos apreciar a beleza do formalismo de Super-Campos, onde todos esses termos estão contidos em $\Phi^\dagger\Phi$, e também podemos apreciar a não trivialidade dos termos de interação. Se desejamos construir uma teoria Super-Simétrica, não é possível escolher a belo prazer os termos de interação, há restrições não triviais sobre estes imposta pela Super-Simetria, assim, tentar construir um modelo interagente Super-Simétrico sem o formalismo de Super-Campos é uma tarefa de dificuldade colossal. Note que, a princípio apenas a nível árvore, o férmion e o bóson possuem massas iguais, $\|m\|$, isto é requerido pelo Índice de Witten, e portanto é válido não perturbativamente também.

Ao final, temos uma teoria, digamos, estritamente de matéria, como oposto a radiação, ou então, a portadores de força. Se a Super-Simetria tem algum valor à ser estudado, é necessário que esta consiga acomodar uma descrição de uma teoria de calibre, vamos então aproveitar este gancho para apresentar outra possível restrição nos Super-Campos, uma que aparenta ser mais simples, mas que como veremos, dará origem a campos vetoriais de calibre.

4.2.3. *Super-Campos Reais/Vetoriais.* A restrição imposta para um Super-Campos Real é, ser Real,

$$V\big(x,\theta,\theta^\dagger\big) = V^\dagger\big(x,\theta,\theta^\dagger\big)$$

Vamos obter qual restrição isso implica utilizando a expansão usual geral,

$$V\big(x,\theta,\theta^\dagger\big) = C(x) + \theta\chi(x) + \theta^\dagger\psi^\dagger(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger N(x) + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\xi(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x)$$

$$V^\dagger\big(x,\theta,\theta^\dagger\big) = C^\dagger(x) + \theta^\dagger\chi^\dagger(x) + \theta\psi(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger M^\dagger(x) + \theta\theta N^\dagger(x) + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \theta\theta\theta^\dagger\xi^\dagger(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D^\dagger(x)$$

Portanto as restrições são,

$$C(x) = C^\dagger(x), \quad \psi(x) = \chi(x), \quad N(x) = M^\dagger(x), \quad v_\mu(x) = v_\mu^\dagger(x), \quad \xi(x) = \lambda(x), \quad D(x) = D^\dagger(x)$$

Isto é,

$$V\big(x,\theta,\theta^\dagger\big) = C(x) + \theta\psi(x) + \theta^\dagger\psi^\dagger(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger M^\dagger(x) + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x)$$

O conteúdo do multipleto real/vetorial é portanto, 2 campos reais escalares, 1 campo complexo escalar, 2 férmions de Weyl e um campo real vetorial. A presença de um campo vetorial sinaliza a possibilidade de descrever bósons de calibre, assim como veremos, parte dos escalares está associado a campos auxiliares, enquanto parte está associado a liberdade de calibre, o mesmo vale para os 2 férmions.

[30] $W(\Phi)$ aqui é uma função holomorfa qualquer, para garantir a realidade da ação é necessário adicionar o termo conjugado.

Perceba que, é possível construir um campo real/vetorial apenas em posse de um campo chiral Ξ, pois a combinação $\mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right)$ é real! Assim, sendo

$$\Xi = B + \theta\xi + \theta\theta G - \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu B - \frac{\mathrm{i}}{2}\theta\theta\theta^\dagger\bar{\sigma}\partial_\mu\xi + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial^2 B$$

$$\mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right) = 2\mathrm{Im}B + \mathrm{i}\theta^\dagger\xi^\dagger - \mathrm{i}\theta\xi + \mathrm{i}\theta^\dagger\theta^\dagger G^\dagger - \mathrm{i}\theta\theta G - 2\mathrm{Re}\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu B - \frac{1}{2}\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta - \frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\frac{1}{2}\mathrm{Im}\partial^2 B$$

Logo é sim possível definir uma transformação de calibre por, $V \to V + \mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right)$, que, além de outras mudanças, tem o efeito de, $v_\mu \to v_\mu - 2\mathrm{Re}\partial_\mu B$. Como a transformação de calibre que estamos interessados envolve apenas a parte real do campo B, podemos utilizar dos restantes graus de liberdade para escolher um calibre que elimine a mencionada anteriormente liberdade de calibre contida nos campos escalar e de Weyl do Super-Campo Vetorial. Uma das escolhas mais úteis é o chamado **Calibre de Wess-Zumino**, caracterizado pela escolha de,

$$\mathrm{Im}B = -\frac{1}{2}C, \quad \xi = -\mathrm{i}\psi, \quad G = -\mathrm{i}M$$

No qual temos,

$$V\left(x,\theta,\theta^\dagger\right) = \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\left(\lambda^\dagger(x) - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x)\right) + \theta^\dagger\theta^\dagger\left(\lambda(x) - \frac{1}{2}\partial_\mu\xi^\dagger(x)\bar{\sigma}^\mu\right)\theta + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\left(D(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\partial^2 B(x)\right)$$

Renomeando as variáveis podemos reescrever como,

$$V\left(x,\theta,\theta^\dagger\right) = \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\frac{1}{2}D(x)$$

Aqui é claro os papeis de λ como o super-parceiro de v_μ, e de D como o campo auxiliar. Necessitamos portanto agora de escrever um termo cinético, porém, não é suficiente de ser qualquer termo cinético, uma vez que este precisa ser invariante por uma transformação de calibre, aqui entra em jogo a importância da definição de um Super-Campo (Anti-)Chiral, note que $\partial_\mu V$ não tem nenhuma chance de ser invariante por calibre, porém, algo como $\mathcal{D}_a V$ tem a possibilidade de ser invariante, pois, $\mathcal{D}_a\Xi^\dagger = 0 = \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\Xi$. Contudo, como as derivadas super-covariantes não anti-comutam, $\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}_b V$ não é invariante por calibre, mas analisemos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V \to \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b\left\{V + \mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right)\right\} &= \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V - \mathrm{i}\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b\Xi \\
&= \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V - \mathrm{i}\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\left[-\mathcal{D}_b\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}} + 2\mathrm{i}\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\sigma^\mu_{b\dot{c}}\partial_\mu\right]\Xi \\
&= \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V + \mathrm{i}\left[\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}_b + 2\mathrm{i}\sigma^\mu_{b\dot{a}}\partial_\mu\right]\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\Xi \\
\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V \to \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b\left\{V + \mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right)\right\} &= \mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}}\mathcal{D}_b V
\end{aligned}$$

De fato é invariante! Portanto este pode ser um possível componente do termo cinético, para conferir exatamente qual é o conteúdo deste campo vamos fazer alguns truques, primeiramente, este novo campo é Chiral! Isto é devido as derivadas super-covariantes serem anti-comutativas,

$$W_a = \mathcal{D}^\dagger_{\dot{b}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{b}}\mathcal{D}_a V \to \mathcal{D}^\dagger_{\dot{c}}W_a = 0$$

Para usar-se so fato de W_a ser Chiral, vamos substituir já em V, $x = y + \mathrm{i}\theta\sigma\theta^\dagger$, expandir e usar identidades de Fierz,

$$V = \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu\left(y + \mathrm{i}\theta\sigma\theta^\dagger\right) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger\left(y + \theta\sigma\theta^\dagger\right) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(y + \mathrm{i}\theta\sigma\theta) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\frac{1}{2}D\left(y + \theta\sigma\theta^\dagger\right)$$

$$V = \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(y) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(y) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(y) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\frac{1}{2}[D(y) - \mathrm{i}\partial^\mu v_\mu(y)]$$

$$\mathcal{D}_a V = \theta^\dagger\theta^\dagger\left[\lambda_a(y) + \theta_a(D(y) - \mathrm{i}\partial^\mu v_\mu(y)) - \mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_a\partial_\mu v_\nu(y) + \mathrm{i}\theta\theta\left(\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger\right)_a\right] + \cdots$$

Mantemos aqui apenas os termos com $\theta^\dagger\theta^\dagger$, pois, assim como foi visto no começo da seção 4.2.1, $\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}$ atua em funções de $y, \theta, \theta^\dagger$ como $-\partial^\dagger_{\dot{a}}$, logo, $\mathcal{D}^\dagger_{\dot{a}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{a}} = \partial^\dagger_{\dot{a}}\partial^{\dagger\dot{a}}$, portanto apenas contribuem para W_a os termos com $\theta^\dagger\theta^\dagger$. Assim[31],

$$\begin{aligned}
W_a &= \mathcal{D}^\dagger_{\dot{b}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{b}}\mathcal{D}_a V \\
W_a &= \mathcal{D}^\dagger_{\dot{b}}\mathcal{D}^{\dagger\dot{b}}\left\{\theta^\dagger\theta^\dagger\left[\lambda_a(y) + \theta_a(D(y) - \mathrm{i}\partial^\mu v_\mu(y)) - \mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_a\partial_\mu v_\nu(y) + \mathrm{i}\theta\theta\left(\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger\right)_a\right] + \cdots\right\} \\
W_a &= \lambda_a(y) + \theta_a(D(y) - \mathrm{i}\partial^\mu v_\mu(y)) - \mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_a\partial_\mu v_\nu(y) + \mathrm{i}\theta\theta\left(\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger\right)_a \\
W_a &= \lambda_a(y) + \theta_a D(y) - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_a F_{\mu\nu}(y) + \mathrm{i}\theta\theta\left(\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger\right)_a
\end{aligned}$$

Exatamente o que precisávamos, note o aparecimento do termo cinético padrão, $F_{\mu\nu}$. Para construir um termo válido para ação, como W_a é Chiral, necessitamos de integrar somente pela metade do Super-Espaço, assim como já fizemos anteriormente, portanto,

[31] Aqui utilizamos algumas igualdades dos geradores da algebra de momentum angular, $\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = -g^{\mu\nu} - 2\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}$. Também aqui tomamos a definição usual de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$.

esperamos que a seguinte ação gere um termo válido cinético[32],

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \frac{1}{4} W^a W_a + \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, \frac{1}{4} W^\dagger_{\dot{a}} W^{\dagger\dot{a}}$$

Vamos então obter os termos da ação, começamos notando que só precisamos dos termos com $\theta\theta$ em $W^a W_a$[33],

$$\begin{aligned}
W^a W_a &\supset \theta\theta \Big[D^2 + 2\mathrm{i}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right] F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \Big] \\
W^a W_a &\supset \theta\theta \Big[D^2 + 2\mathrm{i}\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2} \star F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \Big] \\
W^\dagger_{\dot{a}} W^{\dagger\dot{a}} &\supset \theta^\dagger\theta^\dagger \Big[D^2 - 2\mathrm{i}\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\lambda^\dagger - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2} \star F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \Big]
\end{aligned}$$

Portanto a Ação é,

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial^\mu\lambda + \frac{1}{2} D^2 \right]$$

No qual temos a ação cinética padrão de um bóson de calibre de $\mathfrak{u}(1)$, mais o seu parceiro super-simétrico e um campo auxiliar. Finalmente, precisamos construir como introduzir interações providas pelo multipleto vetorial em um multipleto de matéria, isto é, (Anti-)Chiral. Sabemos que em teorias de calibre, o acoplamento entre os portadores de forças e os integrantes da matéria é descrito por uma modificação no termo cinético dos campos de matéria, portanto, devemos buscar uma modificação em $\Phi^\dagger\Phi$ que possua invariância de calibre sobre[34]

$$\Phi \to \exp(-2\mathrm{i}g\Xi)\Phi, \quad \Phi^\dagger \to \Phi \exp\left(2\mathrm{i}g\Xi^\dagger\right), \quad V \to V + \mathrm{i}\left(\Xi^\dagger - \Xi\right)$$

Como a transformação é linear em V e exponencial em $\Phi^{(\dagger)}$, existe apenas uma função em que a multiplicação se torna linear, e esta é a exponencial, portanto, a variação do termo cinético mais simples que podemos escrever é,

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\theta^\dagger\, \Phi^\dagger \exp(-2gV)\Phi$$

Onde é claro, g é o parâmetro de acoplamento adimensional. Tudo isto esta bem definido por que de fato V é adimensional, apesar de v_μ e λ possuírem dimensões de massa usuais. Vamos obter que tipo de interações são geradas por este termo cinético, basta expandir em potências a exponencial e utilizar-se das propriedades das quantidades grassmanianas[35],

$$\begin{aligned}
V &= \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D \\
V^2 &= -\frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger v^\mu v_\mu \\
V^3 &= 0 \\
\exp(-2gV) &= 1 - 2g\theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu - 2g\theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger - 2g\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda - \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\left(gD + g^2 v_\mu v^\mu\right)
\end{aligned}$$

Assim, como a integral grassmaniana seleciona apenas os termos com $\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$, o que resta é calcular as contribuições para este tipo de termo. O que é um trabalho direto, porém demorado, vamos apenas citar a forma final sendo,

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left[-D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi + \mathrm{i}\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + F^\dagger F + \sqrt{2}g\psi^\dagger\lambda^\dagger\phi + \sqrt{2}g\phi^\dagger\lambda\psi - g\phi^\dagger\phi D \right]$$

Nota-se aqui o aparecimento da derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gv_\mu$ a qual atua igualmente nas partes bosônicas e fermiônicas do multipleto chiral. Como o campo auxiliar não possui termo cinético ele não é modificado. Algo de interessante a se notar é, além da interação com o portador de força bosônico via derivada covariante, há termos de interação não triviais com o portador de força fermiônico. A extensão para teorias de calibre não abelianas pode ser feita, basta-se tomar índices de grupo em V e Ξ contraídos com os seus respectivos geradores, para se manter a super-simetria, algo que deve ser respeitado é: Todos os integrantes de um mesmo multipleto devem possuir as mesmas cargas e as mesmas transformações com relação a simetrias internas, portanto, assim como um bóson vetorial de calibre deve necessariamente se transformar na representação adjunta do grupo de calibre, seu super-parceiro fermiônico deve-se transformar na mesma representação, a adjunta. Muitos outros tópicos aqui poderiam ser abordados, como a existência de propriedades de não renormalização do super-potencial, teorias com Super-Simetria estendida e até um dos tópicos que conferem à Super-Simetria um interesse mor, a calibração da Super-Simetria, isto é fazer da Super-Simetria uma simetria local, isto por sí é um tópico extremamente complexo, porém de altíssima beleza, uma vez que se a atuação de Q_a é local, assim é a da eq. (2.4), isto é, translações são locais. Portanto necessariamente uma teoria de Super-Simetria local é uma teoria de Gravitação.

---

[32]Aqui já adicionamos o termo conjugado para garantir a realidade da Ação, e, introduzimos o fator de $\frac{1}{4}$ para garantir que os campos estejam normalizados canonicamente.

[33]Novamente usamos as identidades de Fierz, $\theta^a\theta^b = -\frac{1}{2}\theta\theta\epsilon^{ab}$, e também a relação, $\operatorname{Tr}\left[\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$. Aqui ocorre a aparição do dual, $\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$.

[34]Aqui estamos utilizando o parâmetro de acoplamento g na forma *física*, isto é, na forma em que tem mais utilidade para teoria de perturbação e espalhamento. Mas, poderíamos usar em uma outra forma, a *holomorfa*, na qual substituímos $gV \to V$, e o parâmetro de acoplamento aparece apenas em $S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \frac{1}{4g^2} W^a W_a + \text{h.c.}$, esta forma é mais útil para análises de efeitos não perturbativos.

[35]Usamos $\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\theta\sigma^\nu\theta^\dagger = -\frac{1}{2}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger g^{\mu\nu}$.

Referências

[1] Sidney Coleman e Jeffrey Mandula. “All Possible Symmetries of the S Matrix”. Em: *Phys. Rev.* 159 (5 1967), pp. 1251–1256. DOI: 10.1103/PhysRev.159.1251. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.159.1251.

[2] Rudolf Haag, Jan T. Łopuszański e Martin Sohnius. “All possible generators of supersymmetries of the S-matrix”. Em: *Nuclear Physics B* 88.2 (1975), pp. 257–274. ISSN: 0550-3213. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(75)90279-5. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321375902795.

[3] H.J.W. Müller-Kirsten e A. Wiedemann. *Introduction to Supersymmetry*. G - Reference,Information and Interdisciplinary Subjects Series. World Scientific, 2010. ISBN: 9789814293426. URL: https://books.google.com.br/books?id=65DkngEACAAJ.

[4] M. Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 9781139462761. URL: https://books.google.com.br/books?id=5OepxIG42B4C.

[5] David Tong. *Supersymmetric Field Theory*. 2022. URL: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/susy.html (acesso em 10/12/2024).

[6] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Volume 3, Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2005. ISBN: 9781139643436. URL: https://books.google.com.br/books?id=QMkgAwAAQBAJ.

[7] Edward Witten. “Constraints on supersymmetry breaking”. Em: *Nuclear Physics B* 202.2 (1982), pp. 253–316. ISSN: 0550-3213. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(82)90071-2. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382900712.