

# **Amplitudes de espalhamento em teorias com derivadas de ordem superior**

---

Relatório de atividades anual de Mestrado.

---

Projeto sob fomento da CAPES

Pesquisador Responsável: Gabriel Santos Menezes

Aluno: Vicente Viater Figueira

Vigência: 01/03/2025 a 01/03/2027

Período Coberto pelo Relatório: 01/03/2025 a 01/12/2025

## 1. RESUMO DO PROJETO PROPOSTO

Este plano de atividades se propõe a realizar um estudo de amplitudes de espalhamento na chamada teoria  $(DF)^2$  e, utilizando-se do método da cópia dupla, estender esses resultados para o caso da super-gravidade conforme do tipo Berkovits-Witten. Estes estudos também preveem uma maior compreensão do método da unitariedade generalizada para o caso de partículas instáveis. Além disso, também nos permitiria uma abordagem sistemática no estudo do comportamento a altas energias das amplitudes de espalhamento em gravidade quadrática

## 2. REALIZAÇÕES NO PERÍODO

Disciplinas feitas no primeiro semestre: Teoria de Cordas, Tópicos Avançados em Relatividade Geral  
Eventos participados: CBPF, CPLF e II Agorá Meeting

**2.1. Métodos *On-Shell*.** O principal ponto da abordagem relativamente moderna de métodos on-shell para o cálculo de amplitudes em teorias de campo é utilizar-se de uma informação subutilizada em Teoria Quântica de Campos (TQC) usual, transformações pelo *Little-Group*. É de conhecimento geral que a álgebra de Poincaré —  $ISO^+(1, 3)$  — admite dois invariantes de Casimir, a massa quadrada  $-P^\mu P_\mu$  e o spin  $W^\mu W_\mu$ , para estados fisicamente aceitáveis é necessário  $-P^\mu P_\mu \geq 0$ , o que gera dois casos possíveis,

$$\begin{cases} -P^\mu P_\mu = 0 \\ -P^\mu P_\mu > 0 \end{cases}.$$

Podemos sempre relacionar momentos específicos via transformações de Lorentz de momentos referência, a escolha mais adequada para cada um dos casos acima é,

$$\begin{cases} -k^2 = 0 & \Rightarrow k_0 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa > 0 \\ -k^2 = m^2 > 0 & \Rightarrow k_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m > 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, dado  $p^2 = 0$  ( $p^2 = -m^2$ ), existe sempre uma transformação  $L(p)$  tal que  $p = L(p)k_0$  ( $p = L(p)k_m$ ). O fato mais interessante dessa relação é que a escolha de  $L(p)$  não é única, pois existem transformações — do grupo de Poincaré — não triviais que preservam  $k_0$  ( $k_m$ ), estas transformações são os elementos do chamado *Little-Group*. É trivial determiná-las, para  $k_0$  são rotações nas componentes 1 e 2, isto é,  $SO(2)^1$  que devido à estarmos lidando com uma teoria quântica necessita de ser elevado para seu *double cover*,  $U(1)$ . Para  $k_m$  são rotações nas três componentes espaciais,  $SO(3)$ , que novamente precisa ser elevado ao *double cover*,  $SU(2)$ . O ponto desta discussão é: Em TQC, como estamos interessados em utilizar o momento, essas transformações que preservam os momentos  $k_0, k_m$  são objetos subutilizados, uma vez que são totalmente irrelevantes. Outro modo de pensar é do ponto de vista de teoria de grupos, os representativos  $k_0, k_m$  das classes de momentos sem massa e massivos não são objetos que se transformam em uma representação irredutível do grupo de Poincaré, pois possuem um subespaço invariante — o *Little-Group* —, logo, é possível decompor ainda mais os representativos das classes de momento. Para entender como isso pode ser realizado temos de recorrer novamente a teoria de grupos. Primeiramente, nosso grupo de interesse é o grupo de Poincaré, a parte não homogênea já é realizada trivialmente, pois estamos trabalhando em autoestados de momento, logo, precisamos tornar nossa atenção apenas para a parte homogênea, isto é, o grupo de Lorentz. Note que, devido à querermos analisar a teoria quântica, é necessário voltar-nos à seu *double-cover*,

$$SO^+(1, 3) \xrightarrow{\text{double cover}} SL(2, \mathbb{C}).$$

<sup>1</sup>Na realidade o subgrupo de Poincaré que preserva  $k_0$  é  $ISO(2)$ , porém, as transformações geradas pela parte não homogênea desse grupo correspondem à números quânticos contínuos. Até o presente momento, as partículas sem massas conhecidas apresentam apenas números quânticos discretos — helicidade —, e nenhum número quântico contínuo, logo, somos levados a crer que estas se transformam trivialmente sobre a ação da parte não homogênea, de modo que possamos ignorá-la.

Infelizmente,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  por si não é adequado para obter-se representações irredutíveis. O método mais fácil é complexificar a álgebra, e utilizar-se do isomorfismo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ , útil,

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

O último isomorfismo deixa claro que todas as representações de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  estão em um mapa um-para-um com as representações de  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Estas por sua vez são muito bem conhecidas, são representadas por dois meio-inteiros  $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ ,  $(m, n)$ . Sabemos que um vetor é a representação

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1},$$

disto é claro que a representação de vetor não é irredutível, ela é o produto das representações irredutíveis  $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ . Como podemos obter a decomposição de um vetor em suas partes irredutíveis? Isso pode ser derivado por teoria de representações também, analisando,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1).$$

A existência da representação escalar,  $(0, 0)$ , neste produto de representações é um indicativo da existência de um invariante do grupo com três índices. Indexando a representação de mão esquerda  $(\frac{1}{2}, 0)$  por  $_a$  e a de mão direita  $(0, \frac{1}{2})$  por  $^{\dot{a}}$ , o invariante do grupo que prevemos a existência é

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} L(\Lambda)_a{}^b R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \sigma^{\beta}_{b\dot{b}} = \sigma^{\alpha}_{a\dot{a}},$$

onde  $\Lambda, L(\Lambda), R(\Lambda)$  são transformações do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  nas representações vetorial, mão esquerda e mão direita. Diretamente dessa relação de invariância é possível calcular explicitamente o tensor  $\sigma^{\alpha}_{a\dot{a}}$ , a parte de um fator multiplicativo. Seus valores são bem conhecidos,

$$\sigma^{\alpha}_{a\dot{a}} = (\mathbb{1}_{a\dot{a}} \quad \boldsymbol{\sigma}_{a\dot{a}}),$$

no qual  $\boldsymbol{\sigma}$  são as matrizes de Pauli. Há mais quantidades invariantes que podem serem obtidas, outra que será de grande importância para nós é,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0),$$

implica a existência de um objeto invariante,

$$L(\Lambda)_a{}^c L(\Lambda)_b{}^d \epsilon_{cd} = \epsilon_{ab},$$

também existe um associado à representação de mão direita,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (0, 1),$$

que implica em,

$$R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} R^{-1}(\Lambda)_{\dot{b}}{}^{\dot{d}} \epsilon_{\dot{c}\dot{d}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}},$$

aparte de fatores multiplicativos podemos escolher os valores como,

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daqui existem várias relações algébricas que serão muito úteis, vamos apenas enunciá-las,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} &= \epsilon^{\dot{a}b}\epsilon^{ab}\sigma^\mu_{ab} = (\mathbb{1} \quad -\sigma) \\ \eta_{\mu\nu}\sigma^\mu_{a\dot{a}}\sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \\ \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}b}\sigma^\mu_{a\dot{a}}\sigma^\nu_{b\dot{b}} &= \text{Tr}[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu] = -2\eta^{\mu\nu} \\ \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu &= -2\eta^{\mu\nu} \\ \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu &= -2\eta^{\mu\nu}\end{aligned}$$

O ponto dessas construções é, dado um momento  $p^\mu$ , é possível construir o seguinte objeto  $p_\mu\sigma^\mu_{a\dot{a}} = p_{a\dot{a}}$ . Como  $\sigma^\mu_{a\dot{a}}$  é um invariante do grupo, o objeto  $p_{a\dot{a}}$  se transforma corretamente na representação  $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2})$ . Caso  $p^2 = 0$ , e utilizando-se das relações acima,

$$\begin{aligned}p_\mu p_\nu \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}b}\sigma^\mu_{a\dot{a}}\sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 0 \\ \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}b}p_{a\dot{a}}p_{b\dot{b}} &= 0 \\ \epsilon^{\dot{a}b}(p_{1\dot{a}}p_{2b} - p_{2\dot{a}}p_{1b}) &= 2\epsilon^{\dot{a}b}p_{1\dot{a}}p_{2b} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0\end{aligned}$$

Logo,  $p_\mu p^\mu = 0 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0$ , isto é, dos 4 elementos da matriz  $p_{a\dot{a}}$ , apenas dois são independentes. Em outras palavras, esta matrix é completamente determinada apenas por um vetor de duas componentes  $p_a$ , fazendo com que  $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}^2$ . Devido à  $p^\mu$  possuir componentes reais, isso implica em  $p_{\dot{a}} = (p_a)^*$ . Representamos  $p_a = |p]$  e  $p_{\dot{a}} = \langle p|$ , assim  $p = -|p]\langle p|$ . Igualmente, podemos definir  $p^a = \epsilon^{ab}p_b = [p|, p^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}b}p_{\dot{b}} = |p\rangle$ , de tal forma que:

$$\forall p, q |p^2 = q^2 = 0, \quad \epsilon^{ab}p_a q_b = [pq], \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}p^{\dot{a}} q^{\dot{b}} = \langle pq \rangle.$$

Claramente, dado  $p^2 = 0$ , a escolha de  $|p]$  — que fixa todos os outros símbolos, se o momento for real — não é única. Podemos sempre fazer a transformação  $|p], \langle p| \rightarrow t|p], t^{-1}\langle p|$  que preserva  $p^\mu$ . Este é o *Little-Group*. Como afirmamos anteriormente, para partículas sem massa deveria ser o grupo  $U(1)$ , que é consistente com um fator multiplicativo  $t$ . De fato então fomos bem sucedidos, conseguimos compactar a informação contida em um momento sem massa em um objeto  $|p]$  que se transforma não trivialmente sobre o *Little-Group*, portanto, se utilizar-mos como blocos de construção  $|p]$ , etc... ao invés de  $p^\mu$ , podemos obter restrições não triviais sobre objetos em TQC ao impor condições sobre como devem se comportar sobre uma transformação destas.

Este procedimento é excelente para momentos não massivos, porém, não é satisfatório para momentos massivos, note que, se  $p^2 = -m^2$ ,

$$\begin{aligned}p_\mu p_\nu \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}b}\sigma^\mu_{a\dot{a}}\sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 2m^2 \\ \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}b}p_{a\dot{a}}p_{b\dot{b}} &= 2m^2 \\ \epsilon^{\dot{a}b}(p_{1\dot{a}}p_{2b} - p_{2\dot{a}}p_{1b}) &= 2\epsilon^{\dot{a}b}p_{1\dot{a}}p_{2b} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 2m^2\end{aligned}$$

Desta forma,  $p^2 = -m^2 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = m^2$ , portanto, as linhas e colunas desta matrix são linearmente independentes, e não é possível decompô-la na forma  $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$ , o melhor que é possível de ser realizado é decompô-la em termo de dois vetores  $p_a^I$ ,  $I = 1, 2$ , tal que,  $p_{a\dot{a}} = -p_a^I p_{I\dot{a}}$ . Novamente, é facilmente observável que esta decomposição não é única, e está definida aparte de uma transformação  $p_a^I, p_{K\dot{a}} \rightarrow W^I_J, W^{-1L}_K p_{L\dot{a}}$ , como  $p^\mu$  é real,  $p_{I\dot{a}} = (p_a^I)^*$ , isso impõe a restrição em  $W$  de,  $W^{T*} = W^{-1}$ , ou seja, essa ambiguidade corresponde a uma transformação de  $SU(2)$ , em concordância com o *Little-Group*. Utilizamos também uma notação muito similar à das partículas sem massa,  $p_a^I = |p^I]$ , etc...

<sup>2</sup>O fator de  $-$  aqui está relacionado com  $p^0 > 0$ , para mostrar sua necessidade é preciso realizar uma demonstração mais cuidadosa.

**2.2. Unitariedade em TQC.** Unitariedade em TQC se refere a unitariedade da matrix  $S$ . Como revisão, a matrix  $S$  é a amplitude de transição entre um estado *in*,  $\Psi_\alpha^+$ , para um estado *out*,  $\Psi_\beta^-$ ,

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+),$$

aqui  $\alpha$  e  $\beta$  são índices que condensam toda a informação contida em seu respectivo estado do espaço de Hilbert. É assumido que tanto os estados *in*, quanto os *out*, sejam uma base completa do espaço de Hilbert, de forma que se a matrix  $S$  é um mapa entre essas duas bases, é necessário ela ser um mapa unitário, e de fato, manipulando formalmente essa expressão,

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_\beta^-, \Psi_\gamma^+)^* (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = \int d\beta (\Psi_\gamma^+, \Psi_\beta^-) (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^+) = \delta_{\gamma\alpha}$$

Há fortes consequências dessa propriedades, a principal é chamada por motivos históricos de **Teorema Óptico**, primeiro, é necessário expandir,

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

nessa forma, a condição de unitariedade implica,

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma\alpha} &= \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\delta_{\beta\gamma} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \mathcal{A}_{\beta\gamma})^* (\delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}) \\ \delta_{\gamma\alpha} &= \delta_{\gamma\alpha} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\gamma) \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\gamma - p_\alpha) \mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^8 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ 0 &= -i\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i\mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

A maior utilidade deste resultado é do ponto de vista de teoria de perturbação, certamente calculamos uma amplitude de espalhamento  $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$  em uma determinada ordem  $\mathcal{O}(g^n)$  do parâmetro de acoplamento, porém, o resultado acima promove uma relação entre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}^2$ , ou seja, há relações entre amplitudes em diferentes ordens na expansão do parâmetro de acoplamento. A versão mais famosa deste resultado é para  $\alpha = \gamma$ ,

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{\alpha\alpha}^* - i\mathcal{A}_{\alpha\alpha} &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ 2\Im[\mathcal{A}_{\alpha\alpha}] &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned}$$

Trabalhando do ponto de vista de teoria de perturbação, podemos calcular a parte imaginária da contribuição de 1-*loop* de  $\mathcal{A}_{\alpha\alpha}$  apenas sabendo a contribuição de nível árvore para  $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ . Parte deste fato está relacionado ao teorema de Sokhotski–Plemelj,

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} = i\pi\delta(p^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{p^2 + m^2}.$$

Que nos confirma que o propagador apenas possui parte imaginária para uma partícula *on-shell*, porém, para diagramas a nível árvore não é cinematicamente permitido de uma partícula virtual interna ao diagrama entrar *on-shell*, o que é compatível com o senso comum de contribuições à nível árvore serem polinômios de propagadores e numeradores cinemáticos, que certamente não possuem parte imaginária para partículas *off-shell*. Agora, para contribuições de *loop*, partículas virtuais internas podem ficarem *on-shell*, e portanto, os diagramas podem possuírem parte imaginária.

Como exemplo tomemos a teoria  $g\phi^3$ ,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(-\square + m^2)\phi + \frac{1}{3!}g\phi^3,$$

A contribuição de 1-loop para o processo  $1 \rightarrow 1$  é,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = \frac{1}{2} (ig)^2 \frac{1}{i^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2 - i\epsilon} \\
\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} &= -i \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left( i\pi \delta(\ell^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \right) \left( i\pi \delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right) \\
\Im \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} \right] &= -\frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left( -\pi^2 \delta(\ell^2 + m^2) \delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right)
\end{aligned}$$

A parte dependente do valor principal resultará em zero, e portanto,

$$\begin{aligned}
\Im \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta((\ell - p)^2 + m^2) \\
\Im \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta(q^2 + m^2) \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\Im \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} (\delta(\ell^0 - \omega_\ell) + \delta(\ell^0 + \omega_\ell)) (\delta(q^0 - \omega_{\mathbf{q}}) + \delta(q^0 + \omega_{\mathbf{q}})) \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\Im \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} \right] &= \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} (\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_\ell - p^0) + \delta(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_\ell - p^0) + \delta(-\omega_{\mathbf{q}} + \omega_\ell - p^0)) \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \ell - \mathbf{p}) \\
\Im \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} \right] &= \frac{1}{8} (2\pi)^4 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\Im \left[ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} \right] &= \frac{1}{8} (2\pi)^4 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} \delta^{(4)}(q + \ell - p) \left| \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}} \right|^2, \quad \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}} = g
\end{aligned}$$

Neste *toy-model* podemos apreciar claramente a parte imaginária da amplitude  $1 \rightarrow 1$  a 1-loop ser expressável em termos da amplitude nível árvore  $1 \rightarrow 2$ . A integral que aparece,

$$\int d\beta = \frac{1}{4} \int \frac{d^3 \ell d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}},$$

nada é além da medida Lorentz invariante do espaço de fase. Há uma maneira diagramática de obter essa igualdade entre a parte imaginária e produtos de amplitudes em menor ordem, elas vão pelo nome de **regras de corte de Cutkosky**, o procedimento é simples, escrevemos um diagrama de Feynman de  $n$ -loops que contribua para o processo em análise, disto, *cortamos* propagadores deste diagrama de forma a separar o diagrama inicial em dois diagramas de ordem menor. O procedimento de *cortar* um propagador corresponde a substituir  $(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$  por  $i\pi\theta(p^0)\delta(p^2 + m^2)$ , diagramaticamente, representamos um propagador cortado por uma linha perpendicular passando por seu propagador, ao fim, multiplicamos as duas amplitudes restantes, com a da direita sendo conjugada, ao fim, integramos sobre o espaço de fase Lorentz invariante. Note que

neste processo obtemos duas amplitudes *on-shell*. Como exemplo,

$$\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] = \frac{1}{2} \frac{p}{2} \frac{\ell}{q} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(q + \ell - p) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}}(p; \ell, q) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}*}(p; \ell, q)$$

Claramente, para esse exemplo simples, há apenas uma única maneira de se *cortar* o diagrama de 1-loop em duas partes de menor ordem. Porém, para um número de pernas externas maior, ou maior número de *loops*, é necessário somar sobre todas as maneiras de se separar as amplitudes. Este conceito de unitariedade possui algumas limitações, primeiro, é possível apenas determinar a parte imaginária das amplitudes via amplitudes de ordem inferior, segundo, somente conseguimos aplicar este resultado para um espalhamento da forma  $\alpha \rightarrow \alpha$ , que é longe de ser a forma de espalhamento mais geral. Contudo, é possível obter um resultado mais geral, para isto, temos que relembrar a definição de estados *in/out*. Dado um hamiltoniano  $H = H_0 + V$ , e sendo  $\Phi_\alpha$  autoestado de  $H_0$  com autovalor  $E_\alpha$ , definimos  $\Psi_\alpha^\pm$  autoestado de  $H$  com autovalor  $E_\alpha$  por

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm, \quad \epsilon > 0.$$

Note a imposição  $\epsilon > 0$ , e portanto, a troca  $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$  corresponde a:  $\Psi_\alpha^- \leftrightarrow \Psi_\alpha^+$ . Assim, podemos retornar a expressão,

$$S_{\alpha\gamma}^* = (\Psi_\alpha^-, \Psi_\gamma^+)^* = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^-) = (\Psi_\gamma^-, \Psi_\alpha^+) \Big|_{\epsilon < 0} = S_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

portanto,

$$\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* = \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

utilizando esse resultado podemos concluir,

$$\begin{aligned} -i(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^*) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\left(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon > 0} - \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0}\right) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

O lado esquerdo desta igualdade deve ser entendido como sendo o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , claramente, se  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  fosse uma função contínua em  $\epsilon$ , o resultado seria zero, e como o lado direito da igualdade é não necessariamente zero, podemos apenas concluir que: Em geral  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  é descontínuo em  $\epsilon$ , porém, como  $\epsilon$  contribui para a amplitude somente dentro do propagador  $-i(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ , e é acompanhado por um fator de  $i$ , concluímos que genericamente as amplitudes, vistas como funções dos invariantes cinemáticos, possuem um *branch cut* num subconjunto do eixo real, quando interpretamos os momentos podendo tomar valores em números complexos.

Seja uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica em todo plano, exceto por possíveis polos e um *branch cut* no eixo real, naturalmente isso significa que,

$$\exists s \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [f(s - i\epsilon) - f(s + i\epsilon)] = \mathfrak{Disc}[f],$$

no qual já definimos o que chamamos de descontinuidade de uma função. Assim,

$$-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}] = \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}.$$

Agora, se supormos que  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  é uma amplitude de nível árvore, claramente as sub-amplitudes  $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$  devem ser também de nível árvore, do contrário, seriam contribuições de ordem superior para  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ . Assim,

necessariamente  $\Phi_\beta$  é um estado de uma única partícula, portanto,  $d\beta$  é a medida invariante de Lorentz do espaço de fase de uma única partícula,

$$\begin{aligned}
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \frac{1}{2\omega_{\mathbf{q}}} \delta(q^0 - p_\alpha^0) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \theta(p_\alpha^0) \delta\left((q^0)^2 - (p_\alpha^0)^2\right) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\
\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(p_\alpha^0) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Note que  $p_\alpha^2 + m_\beta^2 = 0$  é impossível de ser satisfeito para diagramas nível árvore, pois, isso força  $m_\beta^2 > \sum_\alpha m_\alpha^2$ , e caso exista tal estado em nossa teoria, este não é estável, logo, não é possível de estar em um espalhamento de estados assintóticos. Claramente, essa expressão somente toma total sentido se estamos dispostos a interpretar  $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$  como função dos momentos externos, e admitirmos estes a poderem tomar valores complexos. Nesse ponto de vista, olhemos para as amplitudes como funções de cada momento das partículas iniciais e finais:  $p_{\alpha_i}, p_{\gamma_j}$ , e estudemos sua extensão no plano complexo definida por,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha\}, \{p_\gamma\}) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha + k_\alpha z\}, \{p_\gamma + k_\gamma z\}) = \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(z),$$

no qual  $z \in \mathbb{C}$  e  $k_{\alpha_i}, k_{\gamma_j}$  são momentos arbitrários satisfazendo:

$$k_\alpha = k_\gamma, \quad k_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_j} = k_{\alpha_i} \cdot k_{\gamma_j} = k_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_j} = 0, \quad p_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_i} = p_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_i} = 0.$$

Desta forma temos que  $\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(0) = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ , olhemos para expressão anterior quando sujeita a esta extensão complexa,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(\tilde{p}_\alpha^0) \delta(\tilde{p}_\alpha^2 + m_\beta^2) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2p_\alpha \cdot k_\alpha z) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta \frac{2\pi i}{2|p_\alpha \cdot k_\alpha|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta\left(z + \frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha}\right) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}, \quad z_\beta = -\frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha} \\
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta |z_\beta| \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\
\frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Sabemos que as amplitudes  $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$  são de nível árvore, portanto, pelo argumento anterior, não possuem singularidades em  $z = z_\beta$ , assim, podemos integrar a expressão anterior em um intervalo simplesmente conexo



fechado qualquer que contenha  $z_\beta$  e não passe por  $z = 0$ . Chamemos este intervalo de  $I_\beta$ ,

$$\begin{aligned} \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \int_{I_\beta} dz \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}, \end{aligned}$$

agora, utilizando a definição de descontinuidade, e sabendo que a descontinuidade de  $z$  é zero neste domínio, podemos deformar o contorno  $I_\beta$  para duas versões, uma passando por baixo da reta real, e outra por cima da reta real com orientação oposta, e devido à descontinuidade é possível unir estes contornos formando uma curva fechada no sentido anti-horário circundando o ponto  $z_\beta$ , chamemos este contorno de  $C_\beta$ ,

$$\oint_{C_\beta} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}.$$

Podemos então agora deformar o contorno  $C_\beta$  em outros dois, um circundando o ponto  $z = 0$  no sentido horário, e outro no sentido anti-horário circundando  $z = \infty$ , assim,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} &= \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\ -\mathfrak{Res}_{z=0} \left[ \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] - \mathfrak{Res}_{z=\infty} \left[ \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] &= \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\ \mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} - \mathfrak{Res}_{z=\infty} \left[ \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] \\ \mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}, \end{aligned}$$

finalmente, sempre podemos tomar  $z_\beta < 0$ , pois,  $m_\beta^2 > -p_\alpha^2$  e o sinal de  $k_\alpha$  é fixado por se fazer  $\theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta)$ , assim,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \sum_\beta \frac{1}{p_\alpha^2 + m_\beta^2} \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}.$$

Esta forma da condição de unitariedade é também conhecida como **relações de recursão à nível árvore**. Escolhas específicas de  $k_\alpha, k_\gamma$  caracterizam diferentes métodos de recursão, os principais métodos são BCFW — Britto, Cachazo, Feng e Witten — e CSW — Cachazo, Svrcek e Witten —. Esses métodos de recursão, unidos com a simplicidade do formalismo de amplitudes *on-shell*, providenciam uma abordagem robusta e — comparativamente ao método usual — simples para se obter amplitudes de  $n \geq 4$  pontos à nível árvore. Claramente, essas relações somente facilitam a obtenção de amplitudes se o requisito

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = 0,$$

for satisfeito. Esta condição é altamente não trivial e não é válida para várias teorias, porém, para teorias do tipo Yang-Mills foi-se provado que é de fato verdadeira.