

Super Riemann Surfaces

Vicente V. Figueira

IF-USP

June 22, 2025

Contents

- 1 Motivation
- 2 Álgebra de Super-Poincaré
- 3 Super-Campos
- 4 Possíveis continuidades

Sumário

- 1 Motivation
- 2 Álgebra de Super-Poincaré
- 3 Super-Campos
- 4 Possíveis continuações

Perspectiva Histórica

- 1964 — $SU(3)$ proposto por Gell-Mann e Ne'eman
- Simetria $SU(6)$ aproximada no modelo não relativístico de quarks
- Tentativas de estender $SU(3)$ para sabores e spin

Todas as tentativas de obter análogo à $SU(6)$ para $SU(3)$ falham. Por quê?

- Interesse crescente sobre propriedades da matrix S
- 1967 — Coleman e Mandula catalogam todas as simetrias da matrix S

Hipóteses utilizadas por Coleman e Mandula no seu Teorema:

- 1 Mecânica Quântica + Simetria de Poincaré
- 2 Geradores levam $1PS \rightarrow 1PS$
- 3 Ação sobre MPS como soma direta de $1PS$
- 4 Para uma dada escala de energia, o número de partículas com massa menor que esta é finito
- 5 Reações $2 \rightarrow 2$ acontecem para quase todas energias
- 6 Amplitudes de $2 \rightarrow 2$ são analíticas para quase todos ângulos e energias

Qual a Álgebra de Lie mais geral dos geradores de simetria que satisfazem as hipóteses?

O resultado do Teorema é: A Álgebra de Lie mais geral dos geradores de simetria é,

$$\mathfrak{iso}^+(3, 1) \oplus \mathfrak{g}$$

No qual \mathfrak{g} é uma soma direta de Álgebras de Lie compactas e semi-simples,

$$[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}] = i(g^{\alpha\mu} M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu} M^{\alpha\nu} + g^{\beta\nu} M^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu} M^{\beta\mu})$$

$$[P^\alpha, M^{\mu\nu}] = i(g^{\alpha\nu} P^\mu - g^{\alpha\mu} P^\nu)$$

$$[P^\alpha, P^\mu] = [P^\alpha, Q^A] = [M^{\alpha\beta}, Q^A] = 0$$

$$[Q^A, Q^B] = if^{AB}{}_C Q^C$$

Simetrias internas, Q^A , não podem transformar por uma representação não trivial de \mathcal{L}_+^\uparrow .

- 1971 — Gervais e Sakita descobrem uma simetria entre Bósons e Férmions na Teoria de Cordas
- 1974 — Wess e Zumino constroem vários modelos com esta simetria em 4 dimensões,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \\ \delta \phi &= \sqrt{2} \epsilon \psi \\ \delta \psi &= -i\sqrt{2} \sigma^\mu \epsilon^\dagger \partial_\mu \phi\end{aligned}$$

Como conciliar isto com o Teorema de Coleman-Mandula?

Isto de fato é uma brecha no Teorema, devido a teoria conter férmions,

$$\begin{aligned}\left[\phi(t, \mathbf{x}), \partial_0 \phi^\dagger(t, \mathbf{y})\right] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \left\{\psi_a(t, \mathbf{x}), \psi_b^\dagger(t, \mathbf{y})\right\} &= \sigma_{ab}^0 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\end{aligned}$$

Além de comutadores, é necessário o uso de anti-comutadores. O erro então está nas hipóteses do teorema, uma vez que Álgebras de Lie não possuem estrutura adequada para estes, é necessário o uso de **Álgebras de Lie Graduadas**.

- 1975 — Haag, Lopuszanski e Sohnius estendem o Teorema de Coleman-Mandula para Álgebras de Lie Graduadas

Resultado do Teorema: Os únicos tipos de geradores de simetrias, não internas, que podem estender a Álgebra de Poincaré são os que pertencem as representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ de \mathcal{L}_+^\uparrow , e possuem estatística fermiônica.

Sumário

- 1 Motivation
- 2 Álgebra de Super-Poincaré
- 3 Super-Campos
- 4 Possíveis continuações

Álgebras de Lie Graduadas

- Espaço Vetorial sobre \mathbb{R}
- Cada elemento $T^A \in \mathfrak{g}$ possui um peso $\eta(T^A) = \eta_A = 0, 1$
- Produto de elementos tem peso,

$$\eta(T^A \cdots T^Z) = \sum \eta_i \pmod{2}$$

- Operação bilinear,

$$[T^A, T^B] = T^A T^B - (-)^{\eta_A \eta_B} T^B T^A = i f^{AB}{}_C T^C$$

- Operadores fermiônicos recebem peso 1 e operadores bosônicos recebem peso 0.

Super-Poincaré

O resultado do Teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius é de que a Álgebra (\mathbb{Z}_2 -Graduada) mais geral é a de Poincaré,

$$\begin{aligned}[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}] &= i(g^{\alpha\mu} M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu} M^{\alpha\nu} + g^{\beta\nu} M^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu} M^{\beta\mu}) \\ [P^\alpha, M^{\mu\nu}] &= i(g^{\alpha\nu} P^\mu - g^{\alpha\mu} P^\nu) \\ [P^\alpha, P^\mu] &= 0\end{aligned}$$

Estendida por uma quantidade arbitrária, \mathcal{N} , de geradores das representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$,

$$Q_a^A, Q_b^B; \quad A, B = 1, \dots, \mathcal{N}$$

Covariância por Lorentz fixa,

$$\begin{aligned}[Q_a^A, M^{\mu\nu}] &= \sigma^{\mu\nu}{}_a{}^b Q_b^A \\ [Q^{\dagger A\dot{a}}, M^{\mu\nu}] &= \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{a}}{}_{\dot{b}} Q^{\dagger A\dot{b}}\end{aligned}$$

Utilizando também identidades de Jacobi, o Teorema diz que sempre podemos diagonalizar a Álgebra como,

$$\begin{aligned}[Q_a^A, Q_b^{\dagger B}] &= -2\delta^{AB}\sigma_{\mu a\dot{b}}P^\mu \\ [Q_a^A, Q_b^B] &= Z^{AB}\epsilon_{ab} \\ [Q_a, P^\mu] &= 0\end{aligned}$$

Z^{AB} são cargas centrais da Álgebra.

Consequências

- A energia é sempre positiva

$$\bar{\sigma}^{0\dot{b}a} \left[Q_a^A, Q_{\dot{b}}^{\dagger A} \right] = -2\bar{\sigma}^{0\dot{b}a} \sigma_{\mu a\dot{b}} P^\mu$$

$$\left[Q_1^A, Q_{\dot{1}}^{\dagger A} \right] + \left[Q_2^A, Q_{\dot{2}}^{\dagger A} \right] = 4P^0$$

$$P^0 = \frac{1}{4} \left(Q_1^A Q_{\dot{1}}^{\dagger A} + Q_2^A Q_{\dot{2}}^{\dagger A} + Q_{\dot{1}}^{\dagger A} Q_1^A + Q_{\dot{2}}^{\dagger A} Q_2^A \right)$$

$$(\Psi, P^0 \Psi) = \frac{1}{4} \left(\Psi, Q_1^A Q_{\dot{1}}^{\dagger A} \Psi \right) + \dots$$

$$(\Psi, P^0 \Psi) = \frac{1}{4} \left\| Q_{\dot{1}}^{\dagger A} \Psi \right\|^2 + \dots \geq 0$$

- Super-Simetria relaciona partículas de mesma massa,

$$[Q_a^A, P^\mu] = 0 \rightarrow [Q_a^A, P^\mu P_\mu] = 0$$

- Super-Simetria relaciona partículas de mesma massa,

$$[Q_a^A, P^\mu] = 0 \rightarrow [Q_a^A, P^\mu P_\mu] = 0$$

- Mas de spin diferente,

$$[Q_1^A, M^{12}] = [Q_1^A, J^3] = \sigma^{12}{}_1{}^b Q_b^A = \frac{1}{2} Q_1^A, \quad [Q_2^A, J^3] = -\frac{1}{2} Q_2^A$$

$$[Q_1^{\dagger A}, J^3] = -\frac{1}{2} Q_1^{\dagger A}, \quad [Q_2^{\dagger A}, J^3] = \frac{1}{2} Q_2^{\dagger A}$$

- Q_1^A e $Q_2^{\dagger A}$ diminuem o spin em $\frac{1}{2}$, enquanto Q_2^A e $Q_1^{\dagger A}$ aumentam o spin em $\frac{1}{2}$.

Representações Massivas N=1

No referencial $P^\mu = (m \quad \mathbf{0})$,

$$[Q_a, Q_{\dot{b}}] = -2\sigma_{\mu a \dot{b}} P^\mu = 2m\delta_{a \dot{b}}$$

$$[Q_a, Q_{\dot{b}}] = 0$$

Mesma álgebra de dois osciladores harmônicos fermiônicos desacoplados! Dado um vácuo Cliffordiano $|\Omega\rangle$ — é aniquilado por Q_a — de spin j ,

$$|\Omega\rangle \rightarrow Q_2^\dagger |\Omega\rangle, Q_1^\dagger |\Omega\rangle \rightarrow Q_1^\dagger Q_2^\dagger |\Omega\rangle$$

$$j \rightarrow \left(j - \frac{1}{2}\right) \oplus \left(j + \frac{1}{2}\right) \rightarrow j$$

- Multipleteo Chiral Massivo ($j = 0$),

$$\left. \begin{array}{l} |\Omega\rangle \\ Q_1^\dagger Q_2^\dagger |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } 0 \rightarrow \phi, \phi^\dagger \qquad \left. \begin{array}{l} Q_1^\dagger |\Omega\rangle \\ Q_2^\dagger |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a, \chi_b^\dagger$$

- Multipleteo Vetorial Massivo ($j = \frac{1}{2}$),

$$\left. \begin{array}{l} |\Omega\rangle \\ Q_1^\dagger Q_2^\dagger |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a, \chi_b^\dagger, \xi_a, \xi_b^\dagger \qquad \left. \begin{array}{l} Q_1^\dagger |\Omega\rangle \\ Q_2^\dagger |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } 1, 0 \rightarrow A^\mu, \phi$$

Representações não Massivas N=1

No referencial $P^\mu = (E \ 0 \ 0 \ E)$,

$$[Q_a, Q_b] = -2\sigma_{\mu ab}P^\mu = 4E\delta_{ab}$$

$$[Q_a, Q_b] = 0$$

Álgebra de um oscilador harmônico fermiônico. Dado um vácuo Cliffordiano $|\Omega\rangle$ de helicidade h ,

$$|\Omega\rangle \rightarrow Q_2^\dagger |\Omega\rangle$$

$$j \rightarrow j - \frac{1}{2}$$

- Multipleteo Chiral ($h = \frac{1}{2}$),

$$|\Omega\rangle\} \text{ Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a^\dagger$$

$$Q_2^\dagger |\Omega\rangle\} \text{ Spin } 0 \rightarrow \phi$$

- Multiplete Chiral ($h = \frac{1}{2}$),

$$|\Omega\rangle\} \text{ Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a^\dagger \qquad Q_2^\dagger |\Omega\rangle\} \text{ Spin } 0 \rightarrow \phi$$

Não é possível construir uma teoria Unitária e Lorentz covariante. É necessário impor CPT

$$\text{CPT } |h\rangle \rightarrow |-h\rangle$$

- Multipleteo Chiral ($h = \frac{1}{2}$),

$$\left. \begin{array}{c} |\Omega\rangle \\ \text{CPT } |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a, \chi_a^\dagger \quad \left. \begin{array}{c} Q_2^\dagger |\Omega\rangle \\ \text{CPT } Q_2^\dagger |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } 0 \rightarrow \phi, \phi^\dagger$$

- Multipleteo Vetorial ($h = 1$),

$$\left. \begin{array}{c} |\Omega\rangle \\ \text{CPT } |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } 1 \rightarrow A^\mu \quad \left. \begin{array}{c} Q_2^\dagger |\Omega\rangle \\ \text{CPT } Q_2^\dagger |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } \frac{1}{2} \rightarrow \chi_a, \chi_a^\dagger$$

- Multipleteo Gravitacional ($h = 2$),

$$\left. \begin{array}{c} |\Omega\rangle \\ \text{CPT } |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } 2 \rightarrow A^\mu \quad \left. \begin{array}{c} Q_2^\dagger |\Omega\rangle \\ \text{CPT } Q_2^\dagger |\Omega\rangle \end{array} \right\} \text{Spin } \frac{3}{2} \rightarrow \chi_a^\mu, \chi_a^{\dagger\mu}$$

- Todos os multipletos possuem valores iguais de d.o.f de bósons e férmions. Coincidência?

- Todos os multipletos possuem valores iguais de d.o.f de bósons e férmions. Coincidência? Não.

$$\mathbb{Q} = Q_1 + Q_2^\dagger \rightarrow [\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^\dagger] = 4H$$

$$\text{se } H \neq 0 \Rightarrow |\Omega\rangle, \mathbb{Q}^\dagger |\Omega\rangle$$

Se $H = 0$, não há nada que nos previna de ter números arbitrários de estados bosônicos e fermiônicos,

- Índice de Witten,

$$\text{Tr} \left[(-1)^F \right] = n_{B,E=0} - n_{F,E=0}$$

- SSUSYB é possível $\Leftrightarrow \text{Tr} \left[(-1)^F \right] = 0$

Sumário

- 1 Motivation
- 2 Álgebra de Super-Poincaré
- 3 Super-Campos**
- 4 Possíveis continuações

Super-Espaço

- O espaço de Minkowski pode ser definido como,

$$\mathbb{R}^{3,1} = ISO^+(3,1)/SO^+(3,1)$$
$$g(\omega, a) = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - i a_\mu P^\mu \right)$$

Super-Espaço

- O espaço de Minkowski pode ser definido como,

$$\mathbb{R}^{3,1} = ISO^+(3,1)/SO^+(3,1)$$

$$g(\omega, a) = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - i a_\mu P^\mu \right)$$

- Definimos o Super-Espaço como,

$$\text{Super-Espaço} = \text{Super-Poincaré}/SO^+(3,1)$$

$$g(\omega, a, \theta, \theta^\dagger) = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - i a_\mu P^\mu - i \theta Q - i \theta^\dagger Q^\dagger \right)$$

- Um Super-Campo é uma função de $x, \theta, \theta^\dagger$ nos complexos,

$$\Phi(x, \theta, \theta^\dagger)$$

- Um Super-Campo é uma função de $x, \theta, \theta^\dagger$ nos complexos,

$$\Phi(x, \theta, \theta^\dagger)$$

- P^μ gera translações em x^μ ,

$$\left[\Phi(x, \theta, \theta^\dagger), P^\mu \right] = -i \partial^\mu \Phi(x, \theta, \theta^\dagger)$$

- Um Super-Campo é uma função de $x, \theta, \theta^\dagger$ nos complexos,

$$\Phi(x, \theta, \theta^\dagger)$$

- P^μ gera translações em x^μ ,

$$\left[\Phi(x, \theta, \theta^\dagger), P^\mu \right] = -i \partial^\mu \Phi(x, \theta, \theta^\dagger)$$

- Q_a gera translações em θ_a ?

$$\left[\Phi(x, \theta, \theta^\dagger), Q_a \right] = -i Q_a \Phi(x, \theta, \theta^\dagger); \quad Q_a \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial \theta^a}$$

A representação da Álgebra no Super-Espaço é feita por,

$$Q_a = \partial_a + i\sigma_{ab}^{\mu} \theta^{\dagger b} \partial_{\mu}$$

$$Q_a^{\dagger} = -\partial_a^{\dagger} - i\theta^b \sigma_{ba}^{\mu} \partial_{\mu}$$

$$[Q_a, Q_b] = 0$$

$$[Q_a, Q_b^{\dagger}] = -2i\sigma_{ab}^{\mu} \partial_{\mu}$$

Logo, a ação de uma transformação, infinitesimal, Super-Simétrica sobre um Super-Campo é,

$$\Phi \rightarrow \Phi + \epsilon Q\Phi + \epsilon^{\dagger} Q^{\dagger}\Phi$$

Para obter uma Ação Super-Simétrica fazemos um análogo, dado uma combinação real de Super-Campos, $K = K^\dagger$, integramos por todo o Super-Espaço,

$$S = \int d^4x d^2\theta d^2\theta^\dagger K(x, \theta, \theta^\dagger)$$

Esta combinação é manifestamente hermitiana, Lorentz invariante e,

$$\delta S = \int d^4x d^2\theta d^2\theta^\dagger \delta K = \int d^4x d^2\theta d^2\theta^\dagger (\epsilon QK + \epsilon^\dagger Q^\dagger K) = 0$$

Invariante Super-Simetricamente!

Super-Campo Geral

Devido à natureza Grassmanniana de θ, θ^\dagger , o Super-Campo mais geral é,

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \theta^\dagger) = & \phi(x) + \theta\psi(x) + \theta^\dagger\chi^\dagger(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger N(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\xi(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x)\end{aligned}$$

Já apresenta todas as representações de nosso interesse! Porém até demais, como restringir?

Super-Campo Chiral

Utilizando de nossa virtude da visão além do alcance, introduzimos,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a &= \partial_a - i\sigma_{a\dot{b}}^\mu \theta^{\dot{b}} \partial_\mu, & \mathcal{D}_{\dot{a}}^\dagger &= -\partial_{\dot{a}} + i\theta^b \sigma_{b\dot{a}}^\mu \partial_\mu \\ [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] &= 0, & [\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_{\dot{b}}] &= 2i\sigma_{a\dot{b}}^\mu \partial_\mu \\ [\mathcal{D}_a, \mathcal{Q}_b] &= [\mathcal{D}_a, \mathcal{Q}_{\dot{b}}^\dagger] = 0\end{aligned}$$

Podemos então impor,

- Chiral $\mathcal{D}_{\dot{a}}^\dagger \Phi = 0$
- Anti-Chiral $\mathcal{D}_a \Phi = 0$

- $\mathcal{D}_a^\dagger \Phi = 0$

Pode ser facilmente resolvida nas variáveis,

$$y^\mu = x^\mu - i\theta^b \sigma_{b\dot{c}}^\mu \theta^{\dot{c}}$$

$$\mathcal{D}_a^\dagger \theta_b = 0, \quad \mathcal{D}_a^\dagger y^\mu = 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \theta^\dagger) &= \Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) - i\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu\phi(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial^2\phi(x) \end{aligned}$$

- $\mathcal{D}_a \Phi^\dagger = 0$

De fato, é apenas o conjugado de um chiral, pois,

$$y^{\dagger\mu} = x^\mu + i\theta^b \sigma_{b\dot{c}}^\mu \theta^{\dagger\dot{c}}$$

$$\mathcal{D}_a \theta_b^\dagger = 0, \quad \mathcal{D}_a y^{\dagger\mu} = 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(x, \theta, \theta^\dagger) &= \phi^\dagger(x) + \sqrt{2}\theta^\dagger \psi^\dagger(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger F^\dagger(x) + i\theta \sigma^\mu \theta^\dagger \partial_\mu \phi^\dagger(x) \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^\dagger \theta^\dagger \partial_\mu \psi^\dagger(x) \bar{\sigma}^\mu \theta + \frac{1}{4} \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \theta \partial^2 \phi^\dagger(x) \end{aligned}$$

Que são muito próximos ao Multiplete Chiral!

Modelo de Wess-Zumino

A combinação $\Phi^\dagger \Phi$ é real. Logo, podemos definir uma teoria como,

$$S = \int d^4x d^2\theta d^2\theta^\dagger \Phi^\dagger \Phi$$

A integral Grassmanniana seleciona o termo com coeficiente $\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$, um rápido cálculo retorna,

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi &\supset \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger \left[F^\dagger F - \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \right] \\ S &= \int d^4x \left[F^\dagger F - \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \right] \end{aligned}$$

E interações?

Interações do tipo Yukawa não são geradas por termos como $f(\Phi^\dagger\Phi)$.
Vimos que,

$$\Phi(x, \theta, \theta^\dagger) = \Phi(y, \theta)$$

Podemos então introduzir um termo na ação como,

$$S = \int d^4y d^2\theta \Phi(y, \theta)$$

Este termo é manifestamente Poincaré invariante, basta confirmar que seja Super-Simetricamente invariante,

$$\delta S = \int d^4y d^2\theta \left(\epsilon \partial \Phi + i \epsilon \sigma^\mu \theta^\dagger \partial_\mu \Phi - \epsilon^\dagger \partial^\dagger \Phi - i \theta \sigma^\mu \epsilon^\dagger \partial_\mu \Phi \right)$$

$$\delta S = 0$$

O mesmo continua valendo para qualquer função holomorfa, só precisamos garantir que seja real,

$$S = \int d^4x d^2\theta W(\Phi) + \int d^4x d^2\theta^\dagger W^\dagger(\Phi^\dagger)$$

$$W(\Phi) = W\left(\phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta^2 F\right)$$

$$W(\Phi) = W(\phi) + \sqrt{2}\frac{\partial W}{\partial\phi}\theta\psi + \theta^2\left(\frac{\partial W}{\partial\phi}F - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}\psi\psi\right)$$

A integral Grassmanniana seleciona o termo com $\theta\theta$ ou $\theta^\dagger\theta^\dagger$. Por questões de renormalizabilidade, a função mais geral que podemos tomar é,

$$W(\Phi) = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{6}\Phi^3$$

$$S = \int d^4x \left[\int d^2\theta d^2\theta^\dagger \Phi^\dagger \Phi + \int d^2\theta W(\Phi) + \int d^2\theta^\dagger W^\dagger(\Phi^\dagger) \right]$$

$$S = \int d^4x \left[-\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + F^\dagger F \right. \\ \left. + \left(F \frac{\partial W}{\partial \phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \psi \psi + \text{h.c.} \right) \right]$$

$$S = \int d^4x \left[-\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \left\| \frac{\partial W}{\partial \phi} \right\|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \psi \psi + \text{h.c.} \right) \right]$$

Super-Campo Vetorial

Outra condição que poderíamos impor é,

$$V = V^\dagger$$

Que resulta em,

$$\begin{aligned} V = & C(x) + \theta\chi(x) + \theta^\dagger\chi(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger M^\dagger(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x) \end{aligned}$$

Como realizar uma transformação de Gauge?

Super-Campo Vetorial

Outra condição que poderíamos impor é,

$$V = V^\dagger$$

Que resulta em,

$$\begin{aligned} V = & C(x) + \theta\chi(x) + \theta^\dagger\chi(x) + \theta\theta M(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger M^\dagger(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu(x) + \theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger D(x) \end{aligned}$$

Como realizar uma transformação de Gauge? Se Ξ é Chiral,

$$i(\Xi^\dagger - \Xi)$$

É real/vetorial.

Seja,

$$\begin{aligned}\Xi = & B(x) + \theta\xi(x) + \theta\theta G(x) - i\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu B(x) \\ & - \frac{i}{2}\theta\theta\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial^2 B(x)\end{aligned}$$

Um rápido cálculo retorna,

$$i(\Xi^\dagger - \Xi) \supset -2\theta\sigma^\mu\theta^\dagger\partial_\mu\text{Re}B(x)$$

E Principalmente,

$$V \rightarrow V + i(\Xi^\dagger - \Xi) \Rightarrow v_\mu \rightarrow v_\mu - 2\partial_\mu\text{Re}B$$

Definimos então como transformação de Gauge.

Por uma escolha conveniente de $B(x)$, $\xi(x)$ e $G(x)$ é sempre possível escolher o **Gauge de Wess-Zumino**,

$$V = \theta \sigma^\mu \theta^\dagger v_\mu(x) + \theta \theta \theta^\dagger \lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger D(x)$$

- Como escrever um termo cinético?

Por uma escolha conveniente de $B(x)$, $\xi(x)$ e $G(x)$ é sempre possível escolher o **Gauge de Wess-Zumino**,

$$V = \theta \sigma^\mu \theta^\dagger v_\mu(x) + \theta \theta \theta^\dagger \lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger D(x)$$

- Como escrever um termo cinético?

$$\mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}_b V \rightarrow \mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}_b \left(V + i \left(\Xi^\dagger - \Xi \right) \right) \stackrel{?}{=} \mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}_b V$$

Por uma escolha conveniente de $B(x)$, $\xi(x)$ e $G(x)$ é sempre possível escolher o **Gauge de Wess-Zumino**,

$$V = \theta \sigma^\mu \theta^\dagger v_\mu(x) + \theta \theta \theta^\dagger \lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger D(x)$$

- Como escrever um termo cinético?

$$\mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}_b V \rightarrow \mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}_b \left(V + i \left(\Xi^\dagger - \Xi \right) \right) \stackrel{?}{=} \mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}_b V$$

$$\mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}^{\dagger \dot{a}} \mathcal{D}_b V \rightarrow \mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}^{\dagger \dot{a}} \mathcal{D}_b \left(V + i \left(\Xi^\dagger - \Xi \right) \right) \stackrel{!}{=} \mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}^{\dagger \dot{a}} \mathcal{D}_b V$$

Definimos o Super-Campo,

$$W_a = \frac{1}{4} \mathcal{D}_a^\dagger \mathcal{D}^{\dagger \dot{a}} \mathcal{D}_b V$$

Que é de fato Chiral!

$$\mathcal{D}_b^\dagger W_a = 0$$

Podemos utilizar da mesma expansão em y, θ feita anteriormente para Campos Chirais,

$$W_a = \lambda_a(y) + \theta_a D(y) - \sigma^{\mu\nu}{}_a{}^b \theta_b F_{\mu\nu}(y) + i\theta\theta \sigma_{a\dot{b}}^\mu \partial_\mu \lambda^{\dagger\dot{b}}(y)$$

Finalmente podemos obter uma quantidade Lorentz invariante Chiral,

$$W^a W_a \supset \theta\theta \left[2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\lambda^\dagger - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\star F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D^2 \right]$$

Utilizando do mesmo método para obtenção de interações para Super-Campos chirais,

$$S = \int d^4x \left[\int d^2\theta \frac{1}{4}W^a W_a + \int d^2\theta^\dagger \frac{1}{4}W_{\dot{a}}^\dagger W^{\dagger\dot{a}} \right]$$

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\lambda^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}D^2 \right]$$

Calibrando uma Teoria Chiral

Sabemos que devemos alterar o termo cinético canônico,

$$\Phi^\dagger \Phi$$

Para ser invariante por uma transformação de calibre,

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \exp(-2ig\Xi)\Phi \\ \Phi^\dagger &\rightarrow \Phi^\dagger \exp(2ig\Xi^\dagger) \\ V &\rightarrow V + i(\Xi^\dagger - \Xi)\end{aligned}$$

Como a transformação em V é linear, e Ξ está dentro da exponencial,

$$\Phi^\dagger \exp(-2gV)\Phi$$

É uma opção para termo cinético invariante por calibre. No gauge de Wess-Zumino,

$$V = \theta \sigma^\mu \theta^\dagger v_\mu(x) + \theta \theta \theta^\dagger \lambda^\dagger(x) + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger D(x)$$

$$V^2 = -\frac{1}{2} \theta \theta \theta^\dagger \theta^\dagger v^\mu v_\mu$$

$$V^3 = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \exp(-2gV) = & 1 - 2g\theta\sigma^\mu\theta^\dagger v_\mu - 2g\theta\theta\theta^\dagger\lambda^\dagger - 2g\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\lambda \\ & - \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger(gD + g^2v^\mu v_\mu) \end{aligned}$$

Como a integral Grassmanniana seleciona apenas os termos com $\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$. Com um pouco de algebra obtemos,

$$\Phi^\dagger \exp(-2gV)\Phi \supset \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger \left[-D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + F^\dagger F + \sqrt{2}g\psi^\dagger\lambda^\dagger\phi + \sqrt{2}g\phi^\dagger\lambda\psi - g\phi^\dagger\phi D \right]$$

Aparecimento natural da derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu - igv_\mu$$

Sumário

- 1 Motivation
- 2 Álgebra de Super-Poincaré
- 3 Super-Campos
- 4 Possíveis continuações

- Teoremas de não-renormalização
- Teorias com $\mathcal{N} > 1$
- Super-Conforme

Muito Obrigado!