

Amplitudes de espalhamento em teorias com derivadas de ordem superior

Relatório de atividades anual de Mestrado.

Projeto sob fomento da CAPES

Pesquisador Responsável: Gabriel Santos Menezes
Aluno: Vicente Viater Figueira

Vigência: 01/03/2025 a 01/03/2027

Período Coberto pelo Relatório: 01/03/2025 a 01/12/2025

São Paulo, 29 de novembro de 2025

1. RESUMO DO PROJETO PROPOSTO

Este plano de atividades se propõe a realizar um estudo de amplitudes de espalhamento na chamada teoria (DF)² e, utilizando-se do método da cópia dupla, estender esses resultados para o caso da super- gravidade conforme do tipo Berkovits-Witten. Estes estudos também preveem uma maior compreensão do método da unitariedade generalizada para o caso de partículas instáveis. Além disso, também nos permitiria uma abordagem sistemática no estudo do comportamento a altas energias das amplitudes de espalhamento em gravidade quadrática

2. REALIZAÇÕES NO PERÍODO

Disciplinas feitas no primeiro semestre: Teoria de Cordas, Tópicos Avançados em Relatividade Geral
Eventos participados: CBPF, CPLF e II Agorá Meeting

2.1. Métodos *On-Shell*. O principal ponto da abordagem relativamente moderna de métodos on-shell para o cálculo de amplitudes em teorias de campo é utilizar-se de uma informação subutilizada em Teoria Quântica de Campos (TQC) usual, transformações pelo *Little-Group*. É de conhecimento geral que a álgebra de Poincaré — $ISO^+(1, 3)$ — admite dois invariantes de Casimir, a massa quadrada $-P^\mu P_\mu$ e o spin $W^\mu W_\mu$, para estados fisicamente aceitáveis é necessário $-P^\mu P_\mu \geq 0$, o que gera dois casos possíveis,

$$\begin{cases} -P^\mu P_\mu = 0 \\ -P^\mu P_\mu > 0 \end{cases}.$$

Podemos sempre relacionar momentos específicos via transformações de Lorentz de momentos referência, a escolha mais adequada para cada um dos casos acima é,

$$\begin{cases} -k^2 = 0 & \Rightarrow k_0 = (\kappa \ 0 \ 0 \ \kappa), \quad \kappa > 0 \\ -k^2 = m^2 > 0 & \Rightarrow k_m = (m \ 0 \ 0 \ 0), \quad m > 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, dado $p^2 = 0$ ($p^2 = -m^2$), existe sempre uma transformação $L(p)$ tal que $p = L(p)k_0$ ($p = L(p)k_m$). O fato mais interessante dessa relação é que a escolha de $L(p)$ não é única, pois existem transformações — do grupo de Poincaré — não triviais que preservam k_0 (k_m), estas transformações são os elementos do chamado *Little-Group*. É trivial determiná-las, para k_0 são rotações nas componentes 1 e 2, isto é, $SO(2)$ ¹ que devido à estarmos lidando com uma teoria quântica necessita de ser elevado para seu *double cover*, $U(1)$. Para k_m são rotações nas três componentes espaciais, $SO(3)$, que novamente precisa ser elevado ao *double cover*, $SU(2)$. O ponto desta discussão é: Em TQC, como estamos interessados em utilizar o momento, essas transformações que preservam os momentos k_0, k_m são objetos subutilizados, uma vez que são totalmente irrelevantes. Outro modo de pensar é do ponto de vista de teoria de grupos, os representativos k_0, k_m das classes de momentos sem massa e massivos não são objetos que se transformam em uma representação irreduzível do grupo de Poincaré, pois possuem um subespaço invariante — o *Little-Group* —, logo, é possível decompor ainda mais os representativos das classes de momento. Para entender como isso pode ser realizado temos de recorrer novamente a teoria de grupos. Primeiramente, nosso grupo de interesse é o grupo de Poincaré, a parte não homogênea já é realizada trivialmente, pois estamos trabalhando em autoestados de momento, logo, precisamos tornar nossa atenção apenas para a parte homogênea, isto é, o grupo de Lorentz. Note que, devido à querermos analisar a teoria quântica, é necessário voltar-nos-mos à seu *double-cover*,

$$SO^+(1, 3) \xrightarrow{\text{double cover}} SL(2, \mathbb{C}).$$

¹Na realidade o subgrupo de Poincaré que preserva k_0 é $ISO(2)$, porém, as transformações geradas pela parte não homogênea desse grupo correspondem à números quânticos contínuos. Até o presente momento, as partículas sem massas conhecidas apresentam apenas números quânticos discretos — helicidade —, e nenhum número quântico contínuo, logo, somos levados a crer que estas se transformam trivialmente sobre a ação da parte não homogênea, de modo que possamos ignorá-la.

Infelizmente, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ por si não é adequado para obter-se representações irreduutíveis. O método mais fácil é complexificar a álgebra, e utilizar-se do isomorfismo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$, útil,

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

O último isomorfismo deixa claro que todas as representações de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ estão em um mapa um-para-um com as representações de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Estas por sua vez são muito bem conhecidas, são representadas por dois meio-inteiros $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, (m, n) . Sabemos que um vetor é a representação

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1},$$

disto é claro que a representação de vetor não é irreduutível, ela é o produto das representações irreduutíveis $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$. Como podemos obter a decomposição de um vetor em suas partes irreduutíveis? Isso pode ser derivado por teoria de representações também, analisando,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1).$$

A existência da representação escalar, $(0, 0)$, neste produto de representações é um indicativo da existência de um invariante do grupo com três índices. Indexando a representação de mão esquerda $(\frac{1}{2}, 0)$ por a e a de mão direita $(0, \frac{1}{2})$ por \dot{a} , o invariante do grupo que prevemos a existência é

$$\Lambda^\alpha{}_\beta L(\Lambda)_a{}^b R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \sigma_{b\dot{b}}^\beta = \sigma_{a\dot{a}}^\alpha,$$

onde $\Lambda, L(\Lambda), R(\Lambda)$ são transformações do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ nas representações vetorial, mão esquerda e mão direita. Diretamente dessa relação de invariância é possível calcular explicitamente o tensor $\sigma_{a\dot{a}}^\alpha$, a parte de um fator multiplicativo. Seus valores são bem conhecidos,

$$\sigma_{a\dot{a}}^\alpha = (\mathbb{1}_{a\dot{a}} \quad \boldsymbol{\sigma}_{a\dot{a}}),$$

no qual $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Há mais quantidades invariantes que podem serem obtidas, outra que será de grande importância para nós é,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0),$$

implica a existência de um objeto invariante,

$$L(\Lambda)_a{}^c L(\Lambda)_b{}^d \epsilon_{cd} = \epsilon_{ab},$$

também existe um associado à representação de mão direita,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (0, 1),$$

que implica em,

$$R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} R^{-1}(\Lambda)_b{}^{\dot{d}} \epsilon_{\dot{c}\dot{d}} = \epsilon_{\dot{a}b},$$

aparte de fatores multiplicativos podemos escolher os valores como,

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2

Daqui existem várias relações algébricas que serão muito úteis, vamos apenas enunciá-las,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}\dot{a}} &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \epsilon^{ab} \sigma^\mu_{ab} = (\mathbb{1} \quad -\boldsymbol{\sigma}) \\ \eta_{\mu\nu} \sigma^\mu_{a\dot{a}} \sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2\epsilon_{ab} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{a\dot{a}} \sigma^\nu_{b\dot{b}} &= \text{Tr} [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] = -2\eta^{\mu\nu} \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu &= -2\eta^{\mu\nu} \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu &= -2\eta^{\mu\nu}\end{aligned}$$

O ponto dessas construções é, dado um momento p^μ , é possível construir o seguinte objeto $p_\mu \sigma^\mu_{a\dot{a}} = p_{a\dot{a}}$. Como $\sigma^\mu_{a\dot{a}}$ é um invariante do grupo, o objeto $p_{a\dot{a}}$ se transforma corretamente na representação $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2})$. Caso $p^2 = 0$, e utilizando-se das relações acima,

$$\begin{aligned}p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{a\dot{a}} \sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 0 \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} &= 0 \\ \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}} p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0\end{aligned}$$

Logo, $p_\mu p^\mu = 0 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0$, isto é, dos 4 elementos da matriz $p_{a\dot{a}}$, apenas dois são independentes. Em outras palavras, esta matrix é completamente determinada apenas por um vetor de duas componentes p_a , fazendo com que $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$ ². Devido à p^μ possuir componentes reais, isso implica em $p_{\dot{a}} = (p_a)^*$. Representamos $p_a = |p|$ e $p_{\dot{a}} = \langle p |$, assim $p = -|p|\langle p |$. Igualmente, podemos definir $p^a = \epsilon^{ab} p_b = [p]$, $p^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{\dot{b}} = |p\rangle$, de tal forma que:

$$\forall p, q | p^2 = q^2 = 0, \quad \epsilon^{ab} p_a q_b = [pq], \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} p^{\dot{a}} q^{\dot{b}} = \langle pq \rangle.$$

Claramente, dado $p^2 = 0$, a escolha de $|p|$ — que fixa todos os outros símbolos, se o momento for real — não é única. Podemos sempre fazer a transformação $|p|, \langle p | \rightarrow t|p|, t^{-1}\langle p |$ que preserva p^μ . Este é o *Little-Group*. Como afirmamos anteriormente, para partículas sem massa deveria ser o grupo $U(1)$, que é consistente com um fator multiplicativo t . De fato então fomos bem sucedidos, conseguimos compactar a informação contida em um momento sem massa em um objeto $|p|$ que se transforma não trivialmente sobre o *Little-Group*, portanto, se utilizar-mos como blocos de construção $|p|$, etc... ao invés de p^μ , podemos obter restrições não triviais sobre objetos em TQC ao impor condições sobre como devem se comportar sobre uma transformação destas.

Este procedimento é excelente para momentos não massivos, porém, não é satisfatório para momentos massivos, note que, se $p^2 = -m^2$,

$$\begin{aligned}p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{a\dot{a}} \sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 2m^2 \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} &= 2m^2 \\ \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}} p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 2m^2\end{aligned}$$

Desta forma, $p^2 = -m^2 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = m^2$, portanto, as linhas e colunas desta matrix são linearmente independentes, e não é possível decompô-la na forma $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$, o melhor que é possível de ser realizado é decompô-la em termo de dois vetores p_a^I , $I = 1, 2$, tal que, $p_{a\dot{a}} = -p_a^I p_{I\dot{a}}$. Novamente, é facilmente observável que esta decomposição não é única, e está definida aparte de uma transformação $p_a^I, p_{K\dot{a}} \rightarrow W^I{}_J, W^{-1}{}_K p_{L\dot{a}}$, como p^μ é real, $p_{I\dot{a}} = (p_a^I)^*$, isso impõe a restrição em W de, $W^{\text{T}*} = W^{-1}$, ou seja, essa ambiguidade corresponde a uma transformação de $SU(2)$, em concordância com o *Little-Group*. Utilizamos também uma notação muito similar à das partículas sem massa, $p_a^I = |p^I|$, etc...

²O fator de $-$ aqui está relacionado com $p^0 > 0$, para mostrar sua necessidade é preciso realizar uma demonstração mais cuidadosa.

2.2. Unitariedade em TQC. Unitariedade em TQC se refere a unitariedade da matrix S . Como revisão, a matrix S é a amplitude de transição entre um estado *in*, Ψ_α^+ , para um estado *out*, Ψ_β^- ,

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+),$$

aqui α e β são índices que condensam toda a informação contida em seu respectivo estado do espaço de Hilbert. É assumido que tanto os estados *in*, quanto os *out*, sejam uma base completa do espaço de Hilbert, de forma que se a matrix S é um mapa entre essas duas bases, é necessário ela ser um mapa unitário, e de fato, manipulando formalmente essa expressão,

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_\beta^-, \Psi_\gamma^+)^* (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = \int d\beta (\Psi_\gamma^+, \Psi_\beta^-) (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^+) = \delta_{\gamma\alpha}$$

Há fortes consequências dessa propriedade, a principal é chamada por motivos históricos de **Teorema Óptico**, primeiro, é necessário expandir,

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

nessa forma, a condição de unitariedade implica,

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma\alpha} &= \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\delta_{\beta\gamma} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \mathcal{A}_{\beta\gamma})^* (\delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}) \\ \delta_{\gamma\alpha} &= \delta_{\gamma\alpha} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\gamma) \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\gamma - p_\alpha) \mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^8 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ 0 &= -i\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i\mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

A maior utilidade deste resultado é do ponto de vista de teoria de perturbação, certamente calculamos uma amplitude de espalhamento $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ em uma determinada ordem $\mathcal{O}(g^n)$ do parâmetro de acoplamento, porém, o resultado acima promove uma relação entre \mathcal{A} e \mathcal{A}^2 , ou seja, há relações entre amplitudes em diferentes ordens na expansão do parâmetro de acoplamento. A versão mais famosa deste resultado é para $\alpha = \gamma$,

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{\alpha\alpha}^* - i\mathcal{A}_{\alpha\alpha} &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ 2\Im[\mathcal{A}_{\alpha\alpha}] &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned}$$

Trabalhando do ponto de vista de teoria de perturbação, podemos calcular a parte imaginária da contribuição de 1-loop de $\mathcal{A}_{\alpha\alpha}$ apenas sabendo a contribuição de nível árvore para $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$. Parte deste fato está relacionado ao teorema de Sokhotski–Plemelj,

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} = i\pi\delta(p^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{p^2 + m^2}.$$

Que nos confirma que o propagador apenas possui parte imaginária para uma partícula *on-shell*, porém, para diagramas a nível árvore não é cinematicamente permitido de uma partícula virtual interna ao diagrama entrar *on-shell*, o que é compatível com o senso comum de contribuições à nível árvore serem polinômios de propagadores e numeradores cinemáticos, que certamente não possuem parte imaginária para partículas *off-shell*. Agora, para contribuições de *loop*, partículas virtuais internas podem ficarem *on-shell*, e portanto, os diagramas podem possuir parte imaginária.

Como exemplo tomemos a teoria $g\phi^3$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(-\square + m^2)\phi + \frac{1}{3!}g\phi^3,$$

A contribuição de 1–loop para o processo $1 \rightarrow 1$ é,

$$i\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} = \frac{p}{\text{---}} \xrightarrow{\quad} \text{---} \xrightarrow{\quad p \quad} = \frac{1}{2}(ig)^2 \frac{1}{i^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2 - i\epsilon}$$

$$\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} = -i \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left(i\pi \delta(\ell^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \right) \left(i\pi \delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right)$$

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = -\frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left(-\pi^2 \delta(\ell^2 + m^2) \delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right)$$

A parte dependente do valor principal resultará em zero, e portanto,

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta((\ell - p)^2 + m^2)$$

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta(q^2 + m^2) \delta^{(4)}(q + \ell - p)$$

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_q} (\delta(\ell^0 - \omega_\ell) + \delta(\ell^0 + \omega_\ell)) (\delta(q^0 - \omega_q) + \delta(q^0 + \omega_q)) \delta^{(4)}(q + \ell - p)$$

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{2} \pi^2 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_q} (\delta(\omega_q + \omega_\ell - p^0) + \delta(\omega_q - \omega_\ell - p^0) + \delta(-\omega_q + \omega_\ell - p^0)) \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \ell - \mathbf{p})$$

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{8} (2\pi)^4 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_q} \delta^{(4)}(q + \ell - p)$$

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{8} (2\pi)^4 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_q} \delta^{(4)}(q + \ell - p) |\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}}|^2, \quad \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}} = g$$

Neste *toy-model* podemos apreciar claramente a parte imaginária da amplitude $1 \rightarrow 1$ a 1–loop ser expressável em termos da amplitude nível árvore $1 \rightarrow 2$. A integral que aparece,

$$\int d\beta = \frac{1}{4} \int \frac{d^3 \ell d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_q},$$

nada é além da medida Lorentz invariante do espaço de fase. Há uma maneira diagramática de obter essa igualdade entre a parte imaginária e produtos de amplitudes em menor ordem, elas vão pelo nome de **regras de corte de Cutkosky**, o procedimento é simples, escrevemos um diagrama de Feynman de n–loops que contribua para o processo em análise, disto, *cortamos* propagadores deste diagrama de forma a separar o diagrama inicial em dois diagramas de ordem menor. O procedimento de *cortar* um propagador corresponde a substituir $(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ por $i\pi\theta(p^0)\delta(p^2 + m^2)$, diagramaticamente, representamos um propagador cortado por uma linha perpendicular passando por seu propagador, ao fim, multiplicamos as duas amplitudes restantes, com a da direita sendo conjugada, ao fim, integramos sobre o espaço de fase Lorentz invariante. Note que

neste processo obtemos duas amplitudes *on-shell*. Como exemplo,

$$\Im \left[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{\text{1-loop}} \right] = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow[p]{\ell} \text{---} \xrightarrow[p]{q} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(q + \ell - p) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}}(p; \ell, q) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree*}}(p; \ell, q)$$

Claramente, para esse exemplo simples, há apenas uma única maneira de se *cortar* o diagrama de *1-loop* em duas partes de menor ordem. Porém, para um número de pernas externas maior, ou maior número de *loops*, é necessário somar sobre todas as maneiras de se separar as amplitudes. Este conceito de unitariedade possui algumas limitações, primeiro, é possível apenas determinar a parte imaginária das amplitudes via amplitudes de ordem inferior, segundo, somente conseguimos aplicar este resultado para um espalhamento da forma $\alpha \rightarrow \alpha$, que é longe de ser a forma de espalhamento mais geral. Contudo, é possível obter um resultado mais geral, para isto, temos que relembrar a definição de estados *in/out*. Dado um hamiltoniano $H = H_0 + V$, e sendo Φ_α autoestado de H_0 com autovalor E_α , definimos Ψ_α^\pm autoestado de H com autovalor E_α por

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm, \quad \epsilon > 0.$$

Note a imposição $\epsilon > 0$, e portanto, a troca $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$ corresponde a: $\Psi_\alpha^- \leftrightarrow \Psi_\alpha^+$. Assim, podemos retornar a expressão,

$$S_{\alpha\gamma}^* = (\Psi_\alpha^-, \Psi_\gamma^+)^* = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^-) = (\Psi_\gamma^-, \Psi_\alpha^+) \Big|_{\epsilon < 0} = S_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

portanto,

$$\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* = \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

utilizando esse resultado podemos concluir,

$$\begin{aligned} -i(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^*) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\left(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon > 0} - \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0}\right) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

O lado esquerdo desta igualdade deve ser entendido como sendo o limite $\epsilon \rightarrow 0$, claramente, se $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ fosse uma função contínua em ϵ , o resultado seria zero, e como o lado direito da igualdade é não necessariamente zero, podemos apenas concluir que: Em geral $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ é descontínuo em ϵ , porém, como ϵ contribui para a amplitude somente dentro do propagador $-i(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$, e é acompanhado por um fator de i , concluímos que genericamente as amplitudes, vistas como funções dos invariantes cinemáticos, possuem um *branch cut* num subconjunto do eixo real, quando interpretarmos os momentos podendo tomar valores em números complexos.

Seja uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em todo plano, exceto por possíveis polos e um *branch cut* no eixo real, naturalmente isso significa que,

$$\exists s \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [f(s - i\epsilon) - f(s + i\epsilon)] = \mathfrak{Disc}[f],$$

no qual já definimos o que chamamos de descontinuidade de uma função. Assim,

$$-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}] = \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}.$$

Agora, se supormos que $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ é uma amplitude de nível árvore, claramente as sub-amplitudes $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$ devem ser também de nível árvore, do contrário, seriam contribuições de ordem superior para $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$. Assim,

necessariamente Φ_β é um estado de uma única partícula, portanto, $d\beta$ é a medida invariante de Lorentz do espaço de fase de uma única partícula,

$$\begin{aligned}
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \frac{1}{2\omega_{\mathbf{q}}} \delta(q^0 - p_\alpha^0) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\
-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \theta(p_\alpha^0) \delta((q^0)^2 - (p_\alpha^0)^2) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\
\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(p_\alpha^0) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Note que $p_\alpha^2 + m_\beta^2 = 0$ é impossível de ser satisfeita para diagramas nível árvore, pois, isso força $m_\beta^2 > \sum_\alpha m_\alpha^2$, e caso exista tal estado em nossa teoria, este não é estável, logo, não é possível de estar em um espalhamento de estados assintóticos. Claramente, essa expressão somente toma total sentido se estamos dispostos a interpretar $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ como função dos momentos externos, e admitirmos estes a poderem tomar valores complexos. Nesse ponto de vista, olhemos para as amplitudes como funções de cada momento das partículas iniciais e finais: $p_{\alpha_i}, p_{\gamma_j}$, e estudemos sua extensão no plano complexo definida por,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha\}, \{p_\gamma\}) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha + k_\alpha z\}, \{p_\gamma + k_\gamma z\}) = \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(z),$$

no qual $z \in \mathbb{C}$ e $k_{\alpha_i}, k_{\gamma_j}$ são momentos arbitrários satisfazendo:

$$k_\alpha = k_\gamma, \quad k_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_j} = k_{\alpha_i} \cdot k_{\gamma_j} = k_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_j} = 0, \quad p_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_i} = p_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_i} = 0.$$

Desta forma temos que $\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(0) = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}$, olhemos para expressão anterior quando sujeita a esta extensão complexa,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(\tilde{p}_\alpha^0) \delta(\tilde{p}_\alpha^2 + m_\beta^2) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2p_\alpha \cdot k_\alpha z) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta \frac{2\pi i}{2|p_\alpha \cdot k_\alpha|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta\left(z + \frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha}\right) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}, \quad z_\beta = -\frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha} \\
\mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta |z_\beta| \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\
\frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Sabemos que as amplitudes $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$ são de nível árvore, portanto, pelo argumento anterior, não possuem singularidades em $z = z_\beta$, assim, podemos integrar a expressão anterior em um intervalo simplesmente conexo

fechado qualquer que contenha z_β e não passe por $z = 0$. Chamemos este intervalo de I_β ,

$$\begin{aligned} \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \int_{I_\beta} dz \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}, \end{aligned}$$

agora, utilizando a definição de descontinuidade, e sabendo que a descontinuidade de z é zero neste domínio, podemos deformar o contorno I_β para duas versões, uma passando por baixo da reta real, e outra por cima da reta real com orientação oposta, e devido à descontinuidade é possível unir estes contornos formando uma curva fechada no sentido anti-horário circundando o ponto z_β , chamemos este contorno de C_β ,

$$\oint_{C_\beta} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}.$$

Podemos então agora deformar o contorno C_β em outros dois, um circundando o ponto $z = 0$ no sentido horário, e outro no sentido anti-horário circundando $z = \infty$, assim,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\ -\text{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] - \text{Res}_{z=\infty} \left[\frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\ \mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} - \text{Res}_{z=\infty} \left[\frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] \\ \mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}, \end{aligned}$$

finalmente, sempre podemos tomar $z_\beta < 0$, pois, $m_\beta^2 > -p_\alpha^2$ e o sinal de k_α é fixado por se fazer $\theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta)$, assim,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \sum_{\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}.$$

Esta forma da condição de unitariedade é também conhecida como **relações de recursão à nível árvore**. Escolhas específicas de k_α, k_γ caracterizam diferentes métodos de recursão, os principais métodos são BCFW — Britto, Cachazo, Feng e Witten — e CSW — Cachazo, Svrcek e Witten —. Esses métodos de recursão, unidos com a simplicidade do formalismo de amplitudes *on-shell*, providenciam uma abordagem robusta e — comparativamente ao método usual — simples para se obter amplitudes de $n \geq 4$ pontos à nível árvore. Claramente, essas relações somente facilitam a obtenção de amplitudes se o requisito

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = 0,$$

for satisfeito. Esta condição é altamente não trivial e não é válida para várias teorias, porém, para teorias do tipo Yang-Mills foi-se provado que é de fato verdadeira.