

## **Amplitudes de espalhamento em teorias com derivadas de ordem superior**

---

Relatório de atividades anual de Mestrado.

---

Projeto sob fomento da CAPES

Pesquisador Responsável: Gabriel Santos Menezes  
Aluno: Vicente Viater Figueira

Vigência: 01/03/2025 a 01/03/2027

Período Coberto pelo Relatório: 01/03/2025 a 01/12/2025

São Paulo, 18 de novembro de 2025

## 1. RESUMO DO PROJETO PROPOSTO

Este plano de atividades se propõe a realizar um estudo de amplitudes de espalhamento na chamada teoria  $(DF)^2$  e, utilizando-se do método da cópia dupla, estender esses resultados para o caso da super- gravidade conforme do tipo Berkovits-Witten. Estes estudos também preveem uma maior compreensão do método da unitariedade generalizada para o caso de partículas instáveis. Além disso, também nos permitiria uma abordagem sistemática no estudo do comportamento a altas energias das amplitudes de espalhamento em gravidade quadrática

## 2. REALIZAÇÕES NO PERÍODO

Disciplinas feitas no primeiro semestre: Teoria de Cordas, Tópicos Avançados em Relatividade Geral  
Eventos participados: CBPF, CPLF e II Agorá Meeting

**2.1. Métodos *On-Shell*.** O principal ponto da abordagem relativamente moderna de métodos on-shell para o cálculo de amplitudes em teorias de campo é utilizar-se de uma informação subutilizada em Teoria Quântica de Campos (TQC) usual, transformações pelo *Little-Group*. É de conhecimento geral que a álgebra de Poincaré —  $ISO^+(1, 3)$  — admite dois invariantes de Casimir, a massa quadrada  $-P^\mu P_\mu$  e o spin  $W^\mu W_\mu$ , para estados fisicamente aceitáveis é necessário  $-P^\mu P_\mu \geq 0$ , o que gera dois casos possíveis,

$$\begin{cases} -P^\mu P_\mu = 0 \\ -P^\mu P_\mu > 0 \end{cases}.$$

Podemos sempre relacionar momentos específicos via transformações de Lorentz de momentos referência, a escolha mais adequada para cada um dos casos acima é,

$$\begin{cases} -k^2 = 0 & \Rightarrow k_0 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa > 0 \\ -k^2 = m^2 > 0 & \Rightarrow k_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m > 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, dado  $p^2 = 0$  ( $p^2 = -m^2$ ), existe sempre uma transformação  $L(p)$  tal que  $p = L(p)k_0$  ( $p = L(p)k_m$ ). O fato mais interessante dessa relação é que a escolha de  $L(p)$  não é única, pois existem transformações — do grupo de Poincaré — não triviais que preservam  $k_0$  ( $k_m$ ), estas transformações são os elementos do chamado *Little-Group*. É trivial determiná-las, para  $k_0$  são rotações nas componentes 1 e 2, isto é,  $SO(2)^1$  que devido à estarmos lidando com uma teoria quântica necessita de ser elevado para seu *double cover*,  $U(1)$ . Para  $k_m$  são rotações nas três componentes espaciais,  $SO(3)$ , que novamente precisa ser elevado ao *double cover*,  $SU(2)$ . O ponto desta discussão é: Em TQC, como estamos interessados em utilizar o momento, essas transformações que preservam os momentos  $k_0, k_m$  são objetos subutilizados, uma vez que são totalmente irrelevantes. Outro modo de pensar é do ponto de vista de teoria de grupos, os representativos  $k_0, k_m$  das classes de momentos sem massa e massivos não são objetos que se transformam em uma representação irredutível do grupo de Poincaré, pois possuem um subespaço invariante — o *Little-Group* —, logo, é possível decompor ainda mais os representativos das classes de momento. Para entender como isso pode ser realizado temos de recorrer novamente a teoria de grupos. Primeiramente, nosso grupo de interesse é o grupo de Poincaré, a parte não homogênea já é realizada trivialmente, pois estamos trabalhando em autoestados de momento, logo, precisamos tornar nossa atenção apenas para a parte homogênea, isto é, o grupo de Lorentz. Note que, devido à querermos analisar a teoria quântica, é necessário voltar-nos-mos à seu *double-cover*,

$$SO^+(1, 3) \xrightarrow{\text{double cover}} SL(2, \mathbb{C}).$$

---

<sup>1</sup>Na realidade o subgrupo de Poincaré que preserva  $k_0$  é  $ISO(2)$ , porém, as transformações geradas pela parte não homogênea desse grupo correspondem à números quânticos contínuos. Até o presente momento, as partículas sem massas conhecidas apresentam apenas números quânticos discretos — helicidade —, e nenhum número quântico contínuo, logo, somos levados a crer que estas se transformam trivialmente sobre a ação da parte não homogênea, de modo que possamos ignorá-la.

Infelizmente,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  por si não é adequado para obter-se representações irreduutíveis. O método mais fácil é complexificar a álgebra, e utilizar-se do isomorfismo  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ , útil,

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

O último isomorfismo deixa claro que todas as representações de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  estão em um mapa um-para-um com as representações de  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Estas por sua vez são muito bem conhecidas, são representadas por dois meio-inteiros  $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ ,  $(m, n)$ . Sabemos que um vetor é a representação

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1},$$

disto é claro que a representação de vetor não é irreduutível, ela é o produto das representações irreduutíveis  $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ . Como podemos obter a decomposição de um vetor em suas partes irreduutíveis? Isso pode ser derivado por teoria de representações também, analisando,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1).$$

A existência da representação escalar,  $(0, 0)$ , neste produto de representações é um indicativo da existência de um invariante do grupo com três índices. Indexando a representação de mão esquerda  $(\frac{1}{2}, 0)$  por  $a$  e a de mão direita  $(0, \frac{1}{2})$  por  $\dot{a}$ , o invariante do grupo que prevemos a existência é

$$\Lambda^\alpha{}_\beta L(\Lambda)_a{}^b R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \sigma_{b\dot{b}}^\beta = \sigma_{a\dot{a}}^\alpha,$$

onde  $\Lambda, L(\Lambda), R(\Lambda)$  são transformações do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  nas representações vetorial, mão esquerda e mão direita. Diretamente dessa relação de invariância é possível calcular explicitamente o tensor  $\sigma_{a\dot{a}}^\alpha$ , a parte de um fator multiplicativo. Seus valores são bem conhecidos,

$$\sigma_{a\dot{a}}^\alpha = (\mathbb{1}_{a\dot{a}} \quad \boldsymbol{\sigma}_{a\dot{a}}),$$

no qual  $\boldsymbol{\sigma}$  são as matrizes de Pauli. Há mais quantidades invariantes que podem serem obtidas, outra que será de grande importância para nós é,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0),$$

implica a existência de um objeto invariante,

$$L(\Lambda)_a{}^c L(\Lambda)_b{}^d \epsilon_{cd} = \epsilon_{ab},$$

também existe um associado à representação de mão direita,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (0, 1),$$

que implica em,

$$R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} R^{-1}(\Lambda)_b{}^{\dot{d}} \epsilon_{\dot{c}\dot{d}} = \epsilon_{\dot{a}b},$$

aparte de fatores multiplicativos podemos escolher os valores como,

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daqui existem várias relações algébricas que serão muito úteis, vamos apenas enunciá-las,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}\dot{a}} &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \epsilon^{ab} \sigma^\mu_{\dot{a}\dot{b}} = (\mathbb{1} \quad -\boldsymbol{\sigma}) \\ \eta_{\mu\nu} \sigma^\mu_{\dot{a}\dot{a}} \sigma^\nu_{\dot{b}\dot{b}} &= -2\epsilon_{ab} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{\dot{a}\dot{a}} \sigma^\nu_{\dot{b}\dot{b}} &= \text{Tr} [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] = -2\eta^{\mu\nu} \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu &= -2\eta^{\mu\nu} \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu &= -2\eta^{\mu\nu}\end{aligned}$$

O ponto dessas construções é, dado um momento  $p^\mu$ , é possível construir o seguinte objeto  $p_\mu \sigma^\mu_{\dot{a}\dot{a}} = p_{a\dot{a}}$ . Como  $\sigma^\mu_{\dot{a}\dot{a}}$  é um invariante do grupo, o objeto  $p_{a\dot{a}}$  se transforma corretamente na representação  $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2})$ . Caso  $p^2 = 0$ , e utilizando-se das relações acima,

$$\begin{aligned}p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{\dot{a}\dot{a}} \sigma^\nu_{\dot{b}\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 0 \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} &= 0 \\ \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}} p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0\end{aligned}$$

Logo,  $p_\mu p^\mu = 0 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0$ , isto é, dos 4 elementos da matriz  $p_{a\dot{a}}$ , apenas dois são independentes. Em outras palavras, esta matrix é completamente determinada apenas por um vetor de duas componentes  $p_a$ , fazendo com que  $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$ <sup>2</sup>. Devido à  $p^\mu$  possuir componentes reais, isso implica em  $p_{\dot{a}} = (p_a)^*$ . Representamos  $p_a = |p|$  e  $p_{\dot{a}} = \langle p |$ , assim  $p = -|p|\langle p |$ . Igualmente, podemos definir  $p^a = \epsilon^{ab} p_b = [p]$ ,  $p^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{\dot{b}} = |p\rangle$ , de tal forma que:

$$\forall p, q | p^2 = q^2 = 0, \quad \epsilon^{ab} p_a q_b = [pq], \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} p^{\dot{a}} q^{\dot{b}} = \langle pq \rangle.$$

Claramente, dado  $p^2 = 0$ , a escolha de  $|p|$  — que fixa todos os outros símbolos, se o momento for real — não é única. Podemos sempre fazer a transformação  $|p|, \langle p | \rightarrow t|p|, t^{-1}\langle p |$  que preserva  $p^\mu$ . Este é o *Little-Group*. Como afirmamos anteriormente, para partículas sem massa deveria ser o grupo  $U(1)$ , que é consistente com um fator multiplicativo  $t$ . De fato então fomos bem sucedidos, conseguimos compactar a informação contida em um momento sem massa em um objeto  $|p|$  que se transforma não trivialmente sobre o *Little-Group*, portanto, se utilizar-mos como blocos de construção  $|p|$ , etc... ao invés de  $p^\mu$ , podemos obter restrições não triviais sobre objetos em TQC ao impor condições sobre como devem se comportar sobre uma transformação destas.

Este procedimento é excelente para momentos não massivos, porém, não é satisfatório para momentos massivos, note que, se  $p^2 = -m^2$ ,

$$\begin{aligned}p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{\dot{a}\dot{a}} \sigma^\nu_{\dot{b}\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 2m^2 \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} &= 2m^2 \\ \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}} p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 2m^2\end{aligned}$$

Desta forma,  $p^2 = -m^2 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = m^2$ , portanto, as linhas e colunas desta matrix são linearmente independentes, e não é possível decompô-la na forma  $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$ , o melhor que é possível de ser realizado é decompô-la em termo de dois vetores  $p_a^I$ ,  $I = 1, 2$ , tal que,  $p_{a\dot{a}} = -p_a^I p_{I\dot{a}}$ . Novamente, é facilmente observável que esta decomposição não é única, e está definida aparte de uma transformação  $p_a^I, p_{K\dot{a}} \rightarrow W_I^K, W^{-1}_K p_{L\dot{a}}$ , como  $p^\mu$  é real,  $p_{I\dot{a}} = (p_a^I)^*$ , isso impõe a restrição em  $W$  de,  $W^T = W^{-1}$ , ou seja, essa ambiguidade corresponde a uma transformação de  $SU(2)$ , em concordância com o *Little-Group*. Utilizamos também uma notação muito similar à das partículas sem massa,  $p_a^I = |p^I|$ , etc...

---

<sup>2</sup>O fator de  $-$  aqui está relacionado com  $p^0 > 0$ , para mostrar sua necessidade é preciso realizar uma demonstração mais cuidadosa.

**2.2. Unitariedade em TQC.** Em teoria quântica de campos existem vários conceitos fundamentais, entre eles: Unitariedade, Localidade, Causalidade. Apesar de conceitos completamente independentes, suas aparições em TQC apresentam correlações. Estamos aqui interessados especificamente no primeiro, Unitariedade. Em mecânica quântica, o conceito de unitariedade está associado à evolução temporal e conservação de probabilidades, isto é, quando dizemos que uma determinada teoria quântica é unitária, estamos afirmando que o operador de evolução temporal  $U(t_1, t_0)$  satisfaaz  $U^\dagger(t_1, t_0)U(t_1, t_0) = \mathbb{1}$ . Isto implica na conservação de probabilidades em relação a evolução temporal,

$$\Psi(t_0) \rightarrow (\Psi(t_1), \Psi(t_1)) = (U(t_1, t_0)\Psi(t_0), U(t_1, t_0)\Psi(t_0)) = (\Psi(t_0), U^\dagger(t_1, t_0)U(t_1, t_0)\Psi(t_0)) = (\Psi(t_0), \Psi(t_0))$$

### 3. PLANO DE ATIVIDADES

## REFERÊNCIAS

- [1] Enrico Herrmann e Jaroslav Trnka. “UV cancellations in gravity loop integrands”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2019.2 (fev. de 2019). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep02(2019)084. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02\(2019\)084](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02(2019)084).