Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Amplitudes de espalhamento em teorias com derivadas de ordem superior

Relatório de atividades anual de Mestrado.

Projeto sob fomento da CAPES

Pesquisador Responsável: Gabriel Santos Menezes
Aluno: Vicente Viater Figueira

Vigência: 01/03/2025 a 01/03/2027
Período Coberto pelo Relatório: 01/03/2025 a 01/12/2025

São Paulo, 25 de novembro de 2025

1. Resumo do projeto proposto

Este plano de atividades se propõe a realizar um estudo de amplitudes de espalhamento na chamada teoria $(DF)^2$ e, utilizando-se do método da cópia dupla, estender esses resultados para o caso da super- gravidade conforme do tipo Berkovits-Witten. Estes estudos também preveem uma maior compreensão do método da unitariedade generalizada para o caso de partículas instáveis. Além disso, também nos permitiria uma abordagem sistemática no estudo do comportamento a altas energias das amplitudes de espalhamento em gravidade quadrática

2. Realizações no Período

Disciplinas feitas no primeiro semestre: Teoria de Cordas, Tópicos Avançados em Relatividade Geral
Eventos participados: CBPF, CPLF e II Agorá Meeting

2.1. Métodos *On-Shell*. O principal ponto da abordagem relativamente moderna de métodos on-shell para o cálculo de amplitudes em teorias de campo é utilizar-se de uma informação subutilizada em Teoria Quântica de Campos (TQC) usual, transformações pelo *Little-Group*. É de conhecimento geral que a álgebra de Poincaré — $ISO^+(1,3)$ — admite dois invariantes de Casimir, a massa quadrada $-P^\mu P_\mu$ e o spin $W^\mu W_\mu$, para estados fisicamente aceitáveis é necessário $-P^\mu P_\mu \geq 0$, o que gera dois casos possíveis,

$$\begin{cases} -P^\mu P_\mu & = 0 \\ -P^\mu P_\mu & > 0 \end{cases}.$$

Podemos sempre relacionar momentos específicos via transformações de Lorentz de momentos referência, a escolha mais adequada para cada um dos casos acima é,

$$\begin{cases} -k^2 = 0 & \Rightarrow k_0 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa > 0 \\ -k^2 = m^2 > 0 & \Rightarrow k_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m > 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, dado $p^2 = 0$ ($p^2 = -m^2$), existe sempre uma transformação $L(p)$ tal que $p = L(p)k_0$ ($p = L(p)k_m$). O fato mais interessante dessa relação é que a escolha de $L(p)$ não é única, pois existem transformações — do grupo de Poincaré — não triviais que preservam k_0 (k_m), estas transformações são os elementos do chamado *Little-Group*. É trivial determiná-las, para k_0 são rotações nas componentes 1 e 2, isto é, $SO(2)$[1] que devido à estarmos lidando com uma teoria quântica necessita de ser elevado para seu *double cover*, $U(1)$. Para k_m são rotações nas três componentes espaciais, $SO(3)$, que novamente precisa ser elevado ao *double cover*, $SU(2)$. O ponto desta discussão é: Em TQC, como estamos interessados em utilizar o momento, essas transformações que preservam os momentos k_0, k_m são objetos subutilizados, uma vez que são totalmente irrelevantes. Outro modo de pensar é do ponto de vista de teoria de grupos, os representativos k_0, k_m das classes de momentos sem massa e massivos não são objetos que se transformam em uma representação irredutível do grupo de Poincaré, pois possuem um subespaço invariante — o *Little-Group* —, logo, é possível decompor ainda mais os representativos das classes de momento. Para entender como isso pode ser realizado temos de recorrer novamente a teoria de grupos. Primeiramente, nosso grupo de interesse é o grupo de Poincaré, a parte não homogênea já é realizada trivialmente, pois estamos trabalhando em autoestados de momento, logo, precisamos tornar nossa atenção apenas para a parte homogênea, isto é, o grupo de Lorentz. Note que, devido à querermos analisar a teoria quântica, é necessário voltar-no-mos à seu *double-cover*,

$$SO^+(1,3) \xRightarrow{\textit{double cover}} SL(2,\mathbb{C}).$$

[1]Na realidade o subgrupo de Poincaré que preserva k_0 é $ISO(2)$, porém, as transformações geradas pela parte não homogênea desse grupo correspondem à números quânticos contínuos. Até o presente momento, as partículas sem massas conhecidas apresentam apenas números quânticos discretos — helicidade —, e nenhum número quântico contínuo, logo, somos levados a crer que estas se transformam trivialmente sobre a ação da parte não homogênea, de modo que possamos ignorá-la.

Infelizmente, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ por sí não é adequado para obter-se representações irredutíveis. O método mais fácil é complexificar a álgebra, e utilizar-se do isomorfismo $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$, útil,

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\\ \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}\\ \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

O último isomorfismo deixa claro que todas as representações de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ estão em um mapa um-para-um com as representações de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Estas por sua vez são muito bem conhecidas, são representadas por dois meio-inteiros $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, (m, n). Sabemos que um vetor é a representação

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1},$$

disto é claro que a representação de vetor não é irredutível, ela é o produto das representações irredutíveis $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Como podemos obter a decomposição de um vetor em suas partes irredutíveis? Isso pode ser derivado por teoria de representações também, analisando,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0,0) \oplus (1,0) \oplus (0,1) \oplus (1,1).$$

A existência da representação escalar, $(0, 0)$, neste produto de representações é um indicativo da existência de um invariante do grupo com três índices. Indexando a representação de mão esquerda $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ por $_a$ e a de mão direita $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ por $^{\dot{a}}$, o invariante do grupo que prevemos a existência é

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} L(\Lambda)_a{}^b R^{-1}(\Lambda)^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} \sigma^{\beta}{}_{b\dot{b}} = \sigma^{\alpha}{}_{a\dot{a}},$$

onde $\Lambda, L(\Lambda), R(\Lambda)$ são transformações do grupo $SL(2,\mathbb{C})$ nas representações vetorial, mão esquerda e mão direita. Diretamente dessa relação de invariância é possível calcular explicitamente o tensor $\sigma^{\alpha}{}_{a\dot{a}}$, a parte de um fator multiplicativo. Seus valores são bem conhecidos,

$$\sigma^{\alpha}{}_{a\dot{a}} = \begin{pmatrix}\mathbb{1}_{a\dot{a}} & \boldsymbol{\sigma}_{a\dot{a}}\end{pmatrix},$$

no qual $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Há mais quantidades invariantes que podem serem obtidas, outra que será de grande importância para nós é,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0,0) \oplus (1,0),$$

implica a existência de um objeto invariante,

$$L(\Lambda)_a{}^c L(\Lambda)_b{}^d \epsilon_{cd} = \epsilon_{ab},$$

também existe um associado à representação de mão direita,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0,0) \oplus (0,1),$$

que implica em,

$$R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{c}} R^{-1}(\Lambda)_{\dot{b}}{}^{\dot{d}} \epsilon_{\dot{c}\dot{d}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}},$$

aparte de fatores multiplicativos podemos escolher os valores como,

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Daqui existem várias relações algébricas que serão muito úteis, vamos apenas enunciá-las,

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} &= \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\epsilon^{ab}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix}\mathbb{1} & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \\
\eta_{\mu\nu}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} &= -2\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \\
\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} &= \mathrm{Tr}\left[\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\right] = -2\eta^{\mu\nu} \\
\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu} &= -2\eta^{\mu\nu} \\
\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu} &= -2\eta^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

O ponto dessas construções é, dado um momento p^{μ}, é possível construir o seguinte objeto $p_{\mu}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}} = p_{a\dot{a}}$. Como $\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}$ é um invariante do grupo, o objeto $p_{a\dot{a}}$ se transforma corretamente na representação $\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Caso $p^2=0$, e utilizando-se das relações acima,

$$\begin{aligned}
p_{\mu}p_{\nu}\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} &= -2p_{\mu}p_{\nu}\eta^{\mu\nu} = 0 \\
\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}p_{a\dot{a}}p_{b\dot{b}} &= 0 \\
\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}(p_{1\dot{a}}p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}}p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}p_{1\dot{a}}p_{2\dot{b}} = 2\mathrm{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0
\end{aligned}$$

Logo, $p_{\mu}p^{\mu} = 0 \Rightarrow \mathrm{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0$, isto é, dos 4 elementos da matriz $p_{a\dot{a}}$, apenas dois são independentes. Em outras palavras, esta matrix é completamente determinada apenas por um vetor de duas componentes p_a, fazendo com que $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$[2]. Devido à p^{μ} possuir componentes reais, isso implica em $p_{\dot{a}} = (p_a)^*$. Representamos $p_a = |p]$ e $p_{\dot{a}} = \langle p|$, assim $p = -|p]\langle p|$. Igualmente, podemos definir $p^a = \epsilon^{ab}p_b = [p|, p^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}p_{\dot{b}} = |p\rangle$, de tal forma que:

$$\forall p, q | p^2 = q^2 = 0, \quad \epsilon^{ab}p_a q_b = [pq], \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}p^{\dot{a}}q^{\dot{b}} = \langle pq\rangle.$$

Claramente, dado $p^2=0$, a escolha de $|p]$ — que fixa todos os outros símbolos, se o momento for real — não é única. Podemos sempre fazer a transformação $|p], \langle p| \to t|p], t^{-1}\langle p|$ que preserva p^{μ}. Este é o *Little-Group*. Como afirmamos anteriormente, para partículas sem massa deveria ser o grupo $U(1)$, que é consistente com um fator multiplicativo t. De fato então fomos bem sucedidos, conseguimos compactar a informação contida em um momento sem massa em um objeto $|p]$ que se transforma não trivialmente sobre o *Little-Group*, portanto, se utilizar-mos como blocos de construção $|p]$, etc... ao invés de p^{μ}, podemos obter restrições não triviais sobre objetos em TQC ao impor condições sobre como devem se comportar sobre uma transformação destas.

Este procedimento é excelente para momentos não massivos, porém, não é satisfatório para momentos massivos, note que, se $p^2 = -m^2$,

$$\begin{aligned}
p_{\mu}p_{\nu}\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} &= -2p_{\mu}p_{\nu}\eta^{\mu\nu} = 2m^2 \\
\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}p_{a\dot{a}}p_{b\dot{b}} &= 2m^2 \\
\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}(p_{1\dot{a}}p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}}p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}p_{1\dot{a}}p_{2\dot{b}} = 2\mathrm{Det}[p_{a\dot{a}}] = 2m^2
\end{aligned}$$

Desta forma, $p^2 = -m^2 \Rightarrow \mathrm{Det}[p_{a\dot{a}}] = m^2$, portanto, as linhas e colunas desta matrix são linearmente independentes, e não é possível decompô-la na forma $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$, o melhor que é possível de ser realizado é decompô-la em termo de dois vetores $p^I_a,\ I = 1,2$, tal que, $p_{a\dot{a}} = -p^I_a p_{I\dot{a}}$. Novamente, é facilmente observável que esta decomposição não é única, e está definida aparte de uma transformação $p^I_a, p_{K\dot{a}} \to W^I{}_J, W^{-1L}{}_K\, p_{L\dot{a}}$, como p^{μ} é real, $p_{I\dot{a}} = \left(p^I_a\right)^*$, isso impõe a restrição em W de, $W^{\mathrm{T}*} = W^{-1}$, ou seja, essa ambiguidade corresponde a uma transformação de $SU(2)$, em concordância com o *Little-Group*. Utilizamos também uma notação muito similar à das partículas sem massa, $p^I_a = |p^I]$, etc...

[2]O fator de $-$ aqui está relacionado com $p^0 > 0$, para mostrar sua necessidade é preciso realizar uma demonstração mais cuidadosa.

2.2. **Unitariedade em TQC.** Unitariedade em TQC se refere a unitariedade da matrix S. Como revisão, a matrix S é a amplitude de transição entre um estado *in*, Ψ^+_α, para um estado *out*, Ψ^-_β,

$$S_{\beta\alpha} = \big(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha\big),$$

aqui α e β são índices que condensam toda a informação contida em seu respectivo estado do espaço de Hilbert. É assumido que tanto os estados *in*, quanto os *out*, sejam uma base completa do espaço de Hilbert, de forma que se a matrix S é um mapa entre essas duas bases, é necessário ela ser um mapa unitário, e de fato, manipulando formalmente essa expressão,

$$\int \mathrm{d}\beta\, S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} = \int \mathrm{d}\beta\, \big(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\gamma\big)^* \big(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha\big) = \int \mathrm{d}\beta\, \big(\Psi^+_\gamma, \Psi^-_\beta\big)\big(\Psi^-_\beta, \Psi^+_\alpha\big) = \big(\Psi^+_\gamma, \Psi^+_\alpha\big) = \delta_{\gamma\alpha}$$

Há fortes consequências dessa propriedades, a principal é chamada por motivos históricos de **Teorema Óptico**, primeiro, é necessário expandir,

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + \mathrm{i}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

nessa forma, a condição de unitariedade implica,

$$\begin{aligned}
\delta_{\gamma\alpha} &= \int \mathrm{d}\beta\, S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} = \int \mathrm{d}\beta\, \big(\delta_{\beta\gamma} + \mathrm{i}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma)\mathcal{A}_{\beta\gamma}\big)^* \big(\delta_{\beta\alpha} + \mathrm{i}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}_{\beta\alpha}\big) \\
\delta_{\gamma\alpha} &= \delta_{\gamma\alpha} - \mathrm{i}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\alpha - p_\gamma)\mathcal{A}^*_{\alpha\gamma} + \mathrm{i}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\gamma - p_\alpha)\mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^8 \int \mathrm{d}\beta\, \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma)\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}^*_{\beta\gamma}\mathcal{A}_{\beta\alpha} \\
0 &= -\mathrm{i}\mathcal{A}^*_{\alpha\gamma} + \mathrm{i}\mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^4 \int \mathrm{d}\beta\, \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}^*_{\beta\gamma}\mathcal{A}_{\beta\alpha}
\end{aligned}$$

A maior utilidade deste resultado é do ponto de vista de teoria de perturbação, certamente calculamos uma amplitude de espalhamento $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ em uma determinada ordem $\mathcal{O}(g^n)$ do parâmetro de acoplamento, porém, o resultado acima promove uma relação entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^2$, ou seja, há relações entre amplitudes em diferentes ordens na expansão do parâmetro de acoplamento. A versão mais famosa deste resultado é para $\alpha = \gamma$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{A}^*_{\alpha\alpha} - \mathrm{i}\mathcal{A}_{\alpha\alpha} &= (2\pi)^4 \int \mathrm{d}\beta\, \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}^*_{\beta\alpha}\mathcal{A}_{\beta\alpha} \\
2\mathfrak{Im}[\mathcal{A}_{\alpha\alpha}] &= (2\pi)^4 \int \mathrm{d}\beta\, \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)|\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2
\end{aligned}$$

Trabalhando do ponto de vista de teoria de perturbação, podemos calcular a parte imaginária da contribuição de 1–*loop* de $\mathcal{A}_{\alpha\alpha}$ apenas sabendo a contribuição de nível arvore para $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$. Parte deste fato está relacionado ao teorema de Sokhotski–Plemelj,

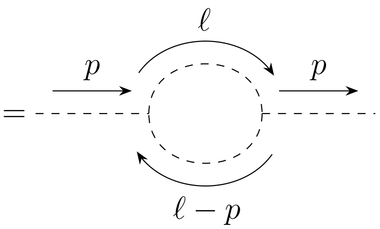
$$\frac{1}{p^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon} = \mathrm{i}\pi\delta\big(p^2 + m^2\big) + \mathrm{P.V.}\frac{1}{p^2 + m^2}.$$

Que nos confirma que o propagador apenas possui parte imaginária para uma partícula *on-shell*, porém, para diagramas a nível árvore não é cinematicamente permitido de uma partícula virtual interna ao diagrama entrar *on-shell*, o que é compatível com o senso comum de contribuições à nível árvore serem polinômios de propagadores e numeradores cinemáticos, que certamente não possuem parte imaginária para partículas *off-shell*. Agora, para contribuições de *loop*, partículas virtuais internas podem ficarem *on-shell*, e portanto, os diagramas podem possuírem parte imaginária.

Como exemplo tomemos a teoria $g\phi^3$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi\big(-\Box + m^2\big)\phi + \frac{1}{3!}g\phi^3,$$

A contribuição de 1–*loop* para o processo $1 \to 1$ é,

$$\mathrm{i}\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1} =$$


$$= \frac{1}{2}(\mathrm{i}g)^2\frac{1}{\mathrm{i}^2}\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{1}{\ell^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\frac{1}{(\ell-p)^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}$$

$$\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1} = -\mathrm{i}\frac{1}{2}g^2\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\left(\mathrm{i}\pi\delta\big(\ell^2+m^2\big)+\text{P.V.}\frac{1}{\ell^2+m^2}\right)\left(\mathrm{i}\pi\delta\big((\ell-p)^2+m^2\big)+\text{P.V.}\frac{1}{(\ell-p)^2+m^2}\right)$$

$$\mathfrak{Im}\Big[\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1}\Big] = -\frac{1}{2}g^2\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\left(-\pi^2\delta\big(\ell^2+m^2\big)\delta\big((\ell-p)^2+m^2\big)+\text{P.V.}\frac{1}{\ell^2+m^2}\text{P.V.}\frac{1}{(\ell-p)^2+m^2}\right)$$

A parte dependente do valor principal resultará em zero, e portanto,

$$\mathfrak{Im}\Big[\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1}\Big] = \frac{1}{2}\pi^2g^2\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\delta\big(\ell^2+m^2\big)\delta\big((\ell-p)^2+m^2\big)$$

$$\mathfrak{Im}\Big[\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1}\Big] = \frac{1}{2}\pi^2g^2\int\frac{\mathrm{d}^4q\,\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\delta\big(\ell^2+m^2\big)\delta\big(q^2+m^2\big)\delta^{(4)}(q+\ell-p)$$

$$\mathfrak{Im}\Big[\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1}\Big] = \frac{1}{2}\pi^2g^2\int\frac{\mathrm{d}^4q\,\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4 2\omega_{\boldsymbol{\ell}}2\omega_{\mathbf{q}}}\Big(\delta\big(\ell^0-\omega_{\boldsymbol{\ell}}\big)+\delta\big(\ell^0+\omega_{\boldsymbol{\ell}}\big)\Big)\Big(\delta\big(q^0-\omega_{\mathbf{q}}\big)+\delta\big(q^0+\omega_{\mathbf{q}}\big)\Big)\delta^{(4)}(q+\ell-p)$$

$$\mathfrak{Im}\Big[\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1}\Big] = \frac{1}{2}\pi^2g^2\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{\ell}}{(2\pi)^4 2\omega_{\boldsymbol{\ell}}2\omega_{\mathbf{q}}}\Big(\delta\big(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\boldsymbol{\ell}}-p^0\big)+\delta\big(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\boldsymbol{\ell}}-p^0\big)+\delta\big(-\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\boldsymbol{\ell}}-p^0\big)\Big)\delta^{(3)}(\mathbf{q}+\boldsymbol{\ell}-\mathbf{p})$$

$$\mathfrak{Im}\Big[\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1}\Big] = \frac{1}{8}(2\pi)^4g^2\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{\ell}}{(2\pi)^6 2\omega_{\boldsymbol{\ell}}2\omega_{\mathbf{q}}}\delta^{(4)}(q+\ell-p)$$

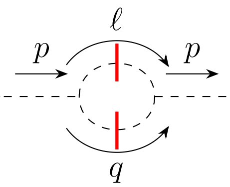
$$\mathfrak{Im}\Big[\mathcal{A}^{\text{1–loop}}_{1\to 1}\Big] = \frac{1}{8}(2\pi)^4\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{\ell}}{(2\pi)^6 2\omega_{\boldsymbol{\ell}}2\omega_{\mathbf{q}}}\delta^{(4)}(q+\ell-p)\big|\mathcal{A}^{\text{tree}}_{1\to 2}\big|^2, \quad \mathcal{A}^{\text{tree}}_{1\to 2} = g$$

Neste *toy-model* podemos apreciar claramente a parte imaginária da amplitude $1 \to 1$ a 1–*loop* ser expressável em termos da amplitude nível árvore $1 \to 2$. A integral que aparece,

$$\int \mathrm{d}\beta = \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\ell}\,\mathrm{d}^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6 2\omega_{\boldsymbol{\ell}}2\omega_{\mathbf{q}}},$$

nada é além da medida Lorentz invariante do espaço de fase. Há uma maneira diagramática de obter essa igualdade entre a parte imaginária e produtos de amplitudes em menor ordem, elas vão pelo nome de **regras de corte de Cutkosky**, o procedimento é simples, escrevemos um diagrama de Feynman de n–*loops* que contribua para o processo em análise, disto, *cortamos* propagadores deste diagrama de forma a separar o diagrama inicial em dois diagramas de ordem menor. O procedimento de *cortar* um propagador corresponde a substituir $(p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}$ por $\mathrm{i}\pi\theta(p^0)\delta(p^2+m^2)$, diagramaticamente, representamos um propagador cortado por uma linha perpendicular passando por seu propagador, ao fim, multiplicamos as duas amplitudes restantes, com a da direita sendo conjugada, ao fim, integramos sobre o espaço de fase Lorentz invariante. Note que neste processo obtemos duas amplitudes *on-shell*. Como exemplo,

$$\mathfrak{Im}\left[\mathcal{A}^{1\text{-loop}}_{1\to 1}\right] = \frac{1}{2}$$



$$= \frac{1}{2}(2\pi)^4 \int \mathrm{d}\beta\, \delta^{(4)}(q+\ell-p)\mathcal{A}^{\text{tree}}_{1\to 2}(p;\ell,q)\mathcal{A}^{\text{tree}*}_{1\to 2}(p;\ell,q)$$

Claramente, para esse exemplo simples, há apenas uma única maneira de se *cortar* o diagrama de 1–*loop* em duas partes de menor ordem. Porém, para um número de pernas externas maior, ou maior número de *loops*, é necessário somar sobre todas as maneiras de se separar as amplitudes. Este conceito de unitariedade possui algumas limitações, primeiro, é possível apenas determinar a parte imaginária das amplitudes via amplitudes de ordem inferior, segundo, somente conseguimos aplicar este resultado para um espalhamento da forma $\alpha \to \alpha$, que é longe de ser a forma de espalhamento mais geral. Contudo, é possível obter um resultado mais geral, para isto, temos que relembrar a definição de estados *in/out*. Dado um hamiltoniano $H = H_0 + V$, e sendo Φ_α autoestado de H_0 com autovalor E_α, definimos $\Psi^\pm_\alpha$ autoestado de H com autovalor E_α por

$$\Psi^\pm_\alpha = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm \mathrm{i}\epsilon)^{-1} V \Psi^\pm_\alpha, \quad \epsilon > 0.$$

Note a imposição $\epsilon > 0$, e portanto, a troca $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$ corresponde a: $\Psi^-_\alpha \leftrightarrow \Psi^+_\alpha$. Assim, podemos retornar a expressão,

$$S^*_{\alpha\gamma} = \left(\Psi^-_\alpha, \Psi^+_\gamma\right)^* = \left(\Psi^+_\gamma, \Psi^-_\alpha\right) = \left(\Psi^-_\gamma, \Psi^+_\alpha\right)\Big|_{\epsilon<0} = S_{\gamma\alpha}\Big|_{\epsilon<0},$$

portanto,

$$\mathcal{A}^*_{\alpha\gamma} = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}\Big|_{\epsilon<0},$$

utilizando esse resultado podemos concluir,

$$-\mathrm{i}\left(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} - \mathcal{A}^*_{\alpha\gamma}\right) = \int \mathrm{d}\beta\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}^*_{\beta\gamma}\mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

$$-\mathrm{i}\left(\mathcal{A}_{\gamma\alpha}\Big|_{\epsilon>0} - \mathcal{A}_{\gamma\alpha}\Big|_{\epsilon<0}\right) = \int \mathrm{d}\beta\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}^*_{\beta\gamma}\mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

O lado esquerdo desta igualdade deve ser entendido como sendo o limite $\epsilon \to 0$, claramente, se $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ fosse uma função contínua em ϵ, o resultado seria zero, e como o lado direito da igualdade é não necessariamente zero, podemos apenas concluir que: Em geral $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ é descontínuo em ϵ, porém, como ϵ contribui para a amplitude somente dentro do propagador $-\mathrm{i}(p^2 + m^2 - \mathrm{i}\epsilon)^{-1}$, e é acompanhado por um fator de i, concluímos que genericamente as amplitudes, vistas como funções dos invariantes cinemáticos, possuem um *branch cut* num subconjunto do eixo real, quando interpretamos os momentos podendo tomar valores em números complexos.

Seja uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica em todo plano, exceto por possíveis polos e um *branch cut* no eixo real, naturalmente isso significa que,

$$\exists s \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[f(s - \mathrm{i}\epsilon) - f(s + \mathrm{i}\epsilon)\right] = 2\mathrm{i}\mathfrak{Disc}_s[f],$$

no qual já definimos o que chamamos de descontinuidade de uma função. Assim,

$$2\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}] = \int \mathrm{d}\beta\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha)\mathcal{A}^*_{\beta\gamma}\mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

Este conceito de unitariedade é possível de ser estendido para o que chamamos de **unitariedade generalizada**. Enquanto a noção usual de unitariedade relaciona a parte imaginária de uma contribuição de ordem superior com contribuições de ordens inferiores — O que pode ser pensado como relacionando a estrutura de polos de amplitudes de ordem inferiores com a estrutura de *branch-cuts* de amplitudes de ordem superiores —, conceitualmente, conforme mencionamos brevemente anteriormente, efeito de *loops* geram uma estrutura analítica de *branch-cuts* não trivial devido a possibilidade de partículas internas estarem *on-shell*. A proposta da unitariedade generalizada é utilizar o conceito de partículas internas entrando *on-shell* alterarem a estrutura analítica da amplitude, e usar isto para recuperar não somente a parte imaginária da amplitude, mas de fato reconstruir a amplitude como um todo[3].

O exemplo mais básico de unitariedade generalizada é encontrado nas relações de recursão a nível árvore. Seja $\mathcal{A}_n$ uma amplitude de $n > 3$ pontos, para nossa teoria exemplo há propagadores internos nessa amplitude, porém, cinematicamente nenhum destes pode entrar *on-shell*, o motivo reside em os momentos externos das partículas serem reais. Mas, se admitirmos momentos complexos, é sim possível cinematicamente para propagadores internos estarem *on-shell*

3. Plano de Atividades

[3]Há condições para que isso seja possível.

Referências

[1] Enrico Herrmann e Jaroslav Trnka. "UV cancellations in gravity loop integrands". Em: *Journal of High Energy Physics* 2019.2 (fev. de 2019). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep02(2019)084. URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02(2019)084.