

Amplitudes de espalhamento em teorias com derivadas de ordem superior

Relatório de atividades anual de Mestrado.

Projeto sob fomento da CAPES

Pesquisador Responsável: Gabriel Santos Menezes

Aluno: Vicente Viater Figueira

Vigência: 01/03/2025 a 01/03/2027

Período Coberto pelo Relatório: 21/02/2025 a 05/12/2025

1. RESUMO DO PROJETO PROPOSTO

Este plano de atividades se propõe a realizar um estudo de amplitudes de espalhamento na chamada teoria $(DF)^2$ e, utilizando-se do método da cópia dupla, estender esses resultados para o caso da super-gravidade conforme do tipo Berkovits-Witten. Estes estudos também preveem uma maior compreensão do método da unitariedade generalizada para o caso de partículas instáveis. Além disso, também nos permitiria uma abordagem sistemática no estudo do comportamento a altas energias das amplitudes de espalhamento em gravidade quadrática.

2. REALIZAÇÕES NO PERÍODO

As realizações durante o período de Março até Dezembro estão organizadas na tabela 1.

TABELA 1. Resumo das Realizações do Período.

Data	Categoria	Descrição
Fev-Jul 2025	Disciplinas Cursadas	Teoria de Cordas. Tópicos Avançados em Relatividade Geral.
Fev-Jul 2025	Revisão Bibliográfica	Estudo do formalismo <i>on-shell</i> [2, 12], bem como dos métodos e teorias utilizadas em [14, 16, 17].
Jul 2025	Participação em Evento	XV Escola do CBPF.
Ago-Dez 2025	Cálculos	Cálculos preliminares com a teoria teste proposta em [16].
Nov-Dez 2025	Escrita	Redação de capítulos preliminares sobre métodos <i>on-shell</i> e unitariedade generalizada.
Out 2025	Participação em Evento	XLVIII CPLF. Agorá II.
Dez 2025	Participação em Evento	QCD Meets Gravity School. QCD Meets Gravity Conference.

Vale ressaltar que ambas as disciplinas cursadas foram concluídas com conceito A. Nos eventos XLVIII CPLF e QCD Meets Gravity School foram apresentados um pôster de título “*2+1 Dimensional Gravity as a Gauge Theory*”, enquanto no evento Agora II foi apresentado um *short talk* de título “*2+1 Gravity as a Gauge Theory*”.

O restante desta secção retrata os métodos e técnicas estudadas, tanto como os cálculos preliminares realizados e excertos da dissertação escritos.

2.1. Métodos *On-Shell*. O principal ponto da abordagem relativamente moderna de métodos on-shell para o cálculo de amplitudes em teorias de campo é utilizar-se de uma informação subutilizada em Teoria Quântica de Campos (TQC) usual, transformações pelo *Little-Group*. É de conhecimento geral que a álgebra de Poincaré — $ISO^+(1, 3)$ — admite dois invariantes de Casimir, a massa quadrada $-P^\mu P_\mu$ e o spin $W^\mu W_\mu$, para estados fisicamente aceitáveis é necessário $-P^\mu P_\mu \geq 0$, o que gera dois casos possíveis,

$$\begin{cases} -P^\mu P_\mu = 0 \\ -P^\mu P_\mu > 0 \end{cases}.$$

Podemos sempre relacionar momentos específicos via transformações de Lorentz de momentos referência, a escolha mais adequada para cada um dos casos acima é,

$$\begin{cases} -k^2 = 0 & \Rightarrow k_0 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa > 0 \\ -k^2 = m^2 > 0 & \Rightarrow k_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m > 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, dado $p^2 = 0$ ($p^2 = -m^2$), existe sempre uma transformação $L(p)$ tal que $p = L(p)k_0$ ($p = L(p)k_m$). O fato mais interessante dessa relação é que a escolha de $L(p)$ não é única, pois existem transformações — do grupo de Poincaré — não triviais que preservam k_0 (k_m), estas transformações são os elementos do chamado *Little-Group*. É trivial determiná-las, para k_0 são rotações nas componentes 1 e 2, isto é, $SO(2)^1$ que devido à estarmos lidando com uma teoria quântica necessita de ser elevado para seu *double cover*, $U(1)$. Para k_m são rotações nas três componentes espaciais, $SO(3)$, que novamente precisa ser elevado ao *double cover*, $SU(2)$. O ponto desta discussão é: Em TQC, como estamos interessados em utilizar o momento, essas transformações que preservam os momentos k_0, k_m são objetos subutilizados, uma vez que são totalmente irrelevantes. Outro modo de pensar é do ponto de vista de teoria de grupos, os representativos k_0, k_m das classes de momentos sem massa e massivos não são objetos que se transformam em uma representação irredutível do grupo de Poincaré, pois possuem um subespaço invariante — o *Little-Group* —, logo, é possível decompor ainda mais os representativos das classes de momento. Para entender como isso pode ser realizado temos de recorrer novamente a teoria de grupos. Primeiramente, nosso grupo de interesse é o grupo de Poincaré, a parte não homogênea já é realizada trivialmente, pois estamos trabalhando em autoestados de momento, logo, precisamos tornar nossa atenção apenas para a parte homogênea, isto é, o grupo de Lorentz. Note que, devido à querermos analisar a teoria quântica, é necessário voltar-no-mos à seu *double-cover*,

$$SO^+(1, 3) \xrightarrow{\text{double cover}} SL(2, \mathbb{C}).$$

Infelizmente, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ por si não é adequado para obter-se representações irredutíveis. O método mais fácil é complexificar a álgebra, e utilizar-se do isomorfismo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$, útil,

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\hookrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

O último isomorfismo deixa claro que todas as representações de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ estão em um mapa um-para-um com as representações de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$. Estas por sua vez são muito bem conhecidas, são representadas por dois meio-inteiros $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, (m, n) . Sabemos que um vetor é a representação

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{1},$$

disto é claro que a representação de vetor não é irredutível, ela é o produto das representações irredutíveis $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Como podemos obter a decomposição de um vetor em suas partes irredutíveis? Isso pode ser derivado por teoria de representações também, analisando,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (1, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 1).$$

A existência da representação escalar, $(0, 0)$, neste produto de representações é um indicativo da existência de um invariante do grupo com três índices. Indexando a representação de mão esquerda $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ por $_a$ e a de

¹Na realidade o subgrupo de Poincaré que preserva k_0 é $ISO(2)$, porém, as transformações geradas pela parte não homogênea desse grupo correspondem à números quânticos contínuos. Até o presente momento, as partículas sem massas conhecidas apresentam apenas números quânticos discretos — helicidade —, e nenhum número quântico contínuo, logo, somos levados a crer que estas se transformam trivialmente sobre a ação da parte não homogênea, de modo que possamos ignorá-la.

mão direita $(0, \frac{1}{2})$ por \dot{a} , o invariante do grupo que prevemos a existência é

$$\Lambda^\alpha{}_\beta L(\Lambda)_a{}^b R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \sigma^\beta{}_{b\dot{b}} = \sigma^\alpha{}_{a\dot{a}},$$

onde $\Lambda, L(\Lambda), R(\Lambda)$ são transformações do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ nas representações vetorial, mão esquerda e mão direita. Diretamente dessa relação de invariância é possível calcular explicitamente o tensor $\sigma^\alpha{}_{a\dot{a}}$, a parte de um fator multiplicativo. Seus valores são bem conhecidos,

$$\sigma^\alpha{}_{a\dot{a}} = (\mathbb{1}_{a\dot{a}} \quad \boldsymbol{\sigma}_{a\dot{a}}),$$

no qual $\boldsymbol{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Há mais quantidades invariantes que podem serem obtidas, outra que será de grande importância para nós é,

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (0, 0) \oplus (1, 0),$$

implica a existência de um objeto invariante,

$$L(\Lambda)_a{}^c L(\Lambda)_b{}^d \epsilon_{cd} = \epsilon_{ab},$$

também existe um associado à representação de mão direita,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, 0) \oplus (0, 1),$$

que implica em,

$$R^{-1}(\Lambda)_{\dot{a}}{}^c R^{-1}(\Lambda)_{\dot{b}}{}^d \epsilon_{\dot{c}\dot{d}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}},$$

aparte de fatores multiplicativos podemos escolher os valores como,

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daqui existem várias relações algébricas que serão muito úteis, vamos apenas enunciá-las,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} &= \epsilon^{\dot{a}b} \epsilon^{ab} \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} = (\mathbb{1} \quad -\boldsymbol{\sigma}) \\ \eta_{\mu\nu} \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} &= -2\epsilon_{ab} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}b} \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} &= \text{Tr}[\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] = -2\eta^{\mu\nu} \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu &= -2\eta^{\mu\nu} \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu &= -2\eta^{\mu\nu} \end{aligned}$$

O ponto dessas construções é, dado um momento p^μ , é possível construir o seguinte objeto $p_\mu \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} = p_{a\dot{a}}$. Como $\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}$ é um invariante do grupo, o objeto $p_{a\dot{a}}$ se transforma corretamente na representação $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2})$. Caso $p^2 = 0$, e utilizando-se das relações acima,

$$p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}b} \sigma^\mu{}_{a\dot{a}} \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} = -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$$

$$\epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}b} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} = 0$$

$$\epsilon^{\dot{a}b} (p_{1\dot{a}} p_{2b} - p_{2\dot{a}} p_{1b}) = 2\epsilon^{\dot{a}b} p_{1\dot{a}} p_{2b} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0$$

Logo, $p_\mu p^\mu = 0 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 0$, isto é, dos 4 elementos da matriz $p_{a\dot{a}}$, apenas dois são independentes. Em outras palavras, esta matrix é completamente determinada apenas por um vetor de duas componentes p_a , fazendo com que $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}^2$. Devido à p^μ possuir componentes reais, isso implica em $p_{\dot{a}} = (p_a)^*$.

²O fator de $-$ aqui está relacionado com $p^0 > 0$, para mostrar sua necessidade é preciso realizar uma demonstração mais cuidadosa.

Representamos $p_a = |p\rangle$ e $p_{\dot{a}} = \langle p|$, assim $p = -|p\rangle\langle p|$. Igualmente, podemos definir $p^a = \epsilon^{ab}p_b = |p|$, $p^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}p_{\dot{b}} = \langle p|$, de tal forma que:

$$\forall p, q |p^2 = q^2 = 0, \quad \epsilon^{ab}p_a q_b = [pq], \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}p^{\dot{a}}q^{\dot{b}} = \langle pq \rangle.$$

Claramente, dado $p^2 = 0$, a escolha de $|p\rangle$ — que fixa todos os outros símbolos, se o momento for real — não é única. Podemos sempre fazer a transformação $|p\rangle, \langle p| \rightarrow t|p\rangle, t^{-1}\langle p|$ que preserva p^μ . Este é o *Little-Group*. Como afirmamos anteriormente, para partículas sem massa deveria ser o grupo $U(1)$, que é consistente com um fator multiplicativo t . De fato então fomos bem sucedidos, conseguimos compactar a informação contida em um momento sem massa em um objeto $|p\rangle$ que se transforma não trivialmente sobre o *Little-Group*, portanto, se utilizar-mos como blocos de construção $|p\rangle$, etc... ao invés de p^μ , podemos obter restrições não triviais sobre objetos em TQC ao impor condições sobre como devem se comportar sobre uma transformação destas.

Este procedimento é excelente para momentos não massivos, porém, não é satisfatório para momentos massivos, note que, se $p^2 = -m^2$,

$$\begin{aligned} p_\mu p_\nu \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \sigma^\mu_{a\dot{a}} \sigma^\nu_{b\dot{b}} &= -2p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = 2m^2 \\ \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{a\dot{a}} p_{b\dot{b}} &= 2m^2 \\ \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} - p_{2\dot{a}} p_{1\dot{b}}) &= 2\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} p_{1\dot{a}} p_{2\dot{b}} = 2\text{Det}[p_{a\dot{a}}] = 2m^2 \end{aligned}$$

Desta forma, $p^2 = -m^2 \Rightarrow \text{Det}[p_{a\dot{a}}] = m^2$, portanto, as linhas e colunas desta matrix são linearmente independentes, e não é possível decompô-la na forma $p_{a\dot{a}} = -p_a p_{\dot{a}}$, o melhor que é possível de ser realizado é decompô-la em termo de dois vetores p_a^I , $I = 1, 2$, tal que, $p_{a\dot{a}} = -p_a^I p_{I\dot{a}}$. Novamente, é facilmente observável que esta decomposição não é única, e está definida aparte de uma transformação $p_a^I, p_{K\dot{a}} \rightarrow W^I_J, W^{-1L}_K p_{L\dot{a}}$, como p^μ é real, $p_{I\dot{a}} = (p_a^I)^*$, isso impõe a restrição em W de, $W^{T*} = W^{-1}$, ou seja, essa ambiguidade corresponde a uma transformação de $SU(2)$, em concordância com o *Little-Group*. Utilizamos também uma notação muito similar à das partículas sem massa, $p_a^I = |p^I\rangle$, etc...

2.2. Unitariedade em TQC. Unitariedade em TQC se refere a unitariedade da matrix S . Como revisão, a matrix S é a amplitude de transição entre um estado *in*, Ψ_α^+ , para um estado *out*, Ψ_β^- ,

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+),$$

aqui α e β são índices que condensam toda a informação contida em seu respectivo estado do espaço de Hilbert. É assumido que tanto os estados *in*, quanto os *out*, sejam uma base completa do espaço de Hilbert, de forma que se a matrix S é um mapa entre essas duas bases, é necessário ela ser um mapa unitário, e de fato, manipulando formalmente essa expressão,

$$\int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\Psi_\beta^-, \Psi_\gamma^+)^* (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = \int d\beta (\Psi_\gamma^+, \Psi_\beta^-) (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^+) = \delta_{\gamma\alpha}$$

Há fortes consequências dessa propriedades, a principal é chamada por motivos históricos de **Teorema Óptico**, primeiro, é necessário expandir,

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

nessa forma, a condição de unitariedade implica,

$$\delta_{\gamma\alpha} = \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\beta\alpha} = \int d\beta (\delta_{\beta\gamma} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \mathcal{A}_{\beta\gamma})^* (\delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha})$$

$$\delta_{\gamma\alpha} = \delta_{\gamma\alpha} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\gamma) \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\gamma - p_\alpha) \mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^8 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\gamma) \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

$$0 = -i\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* + i\mathcal{A}_{\gamma\alpha} + (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

A maior utilidade deste resultado é do ponto de vista de teoria de perturbação, certamente calculamos uma amplitude de espalhamento $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ em uma determinada ordem $\mathcal{O}(g^n)$ do parâmetro de acoplamento, porém, o resultado acima promove uma relação entre \mathcal{A} e \mathcal{A}^2 , ou seja, há relações entre amplitudes em diferentes ordens na expansão do parâmetro de acoplamento. A versão mais famosa deste resultado é para $\alpha = \gamma$,

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{\alpha\alpha}^* - i\mathcal{A}_{\alpha\alpha} &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\alpha}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ 2\Im[\mathcal{A}_{\alpha\alpha}] &= (2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 \end{aligned}$$

Trabalhando do ponto de vista de teoria de perturbação, podemos calcular a parte imaginária da contribuição de 1-loop de $\mathcal{A}_{\alpha\alpha}$ apenas sabendo a contribuição de nível árvore para $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$. Parte deste fato está relacionado ao teorema de Sokhotski–Plemelj,

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} = i\pi\delta(p^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{p^2 + m^2}.$$

Que nos confirma que o propagador apenas possui parte imaginária para uma partícula *on-shell*, porém, para diagramas a nível árvore não é cinematicamente permitido de uma partícula virtual interna ao diagrama entrar *on-shell*, o que é compatível com o senso comum de contribuições à nível árvore serem polinômios de propagadores e numeradores cinemáticos, que certamente não possuem parte imaginária para partículas *off-shell*. Agora, para contribuições de *loop*, partículas virtuais internas podem ficarem *on-shell*, e portanto, os diagramas podem possuírem parte imaginária.

Como exemplo tomemos a teoria $g\phi^3$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(-\square + m^2)\phi + \frac{1}{3!}g\phi^3,$$

A contribuição de 1-loop para o processo $1 \rightarrow 1$ é,

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} &= \text{diagram} = \frac{1}{2}(ig)^2 \frac{1}{i^2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2 - i\epsilon} \\ \mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}} &= -i\frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left(i\pi\delta(\ell^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \right) \left(i\pi\delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right) \\ \Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] &= -\frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left(-\pi^2\delta(\ell^2 + m^2)\delta((\ell - p)^2 + m^2) + \text{P.V.} \frac{1}{\ell^2 + m^2} \text{P.V.} \frac{1}{(\ell - p)^2 + m^2} \right) \end{aligned}$$

A parte dependente do valor principal resultará em zero, e portanto,

$$\begin{aligned}
\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] &= \frac{1}{2}\pi^2 g^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta((\ell - p)^2 + m^2) \\
\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] &= \frac{1}{2}\pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4} \delta(\ell^2 + m^2) \delta(q^2 + m^2) \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] &= \frac{1}{2}\pi^2 g^2 \int \frac{d^4 q d^4 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} (\delta(\ell^0 - \omega_\ell) + \delta(\ell^0 + \omega_\ell)) (\delta(q^0 - \omega_{\mathbf{q}}) + \delta(q^0 + \omega_{\mathbf{q}})) \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] &= \frac{1}{2}\pi^2 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^4 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} (\delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_\ell - p^0) + \delta(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_\ell - p^0) + \delta(-\omega_{\mathbf{q}} + \omega_\ell - p^0)) \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \ell - \mathbf{p}) \\
\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] &= \frac{1}{8}(2\pi)^4 g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} \delta^{(4)}(q + \ell - p) \\
\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] &= \frac{1}{8}(2\pi)^4 \int \frac{d^3 \mathbf{q} d^3 \ell}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}} \delta^{(4)}(q + \ell - p) |\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}}|^2, \quad \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}} = g
\end{aligned}$$

Neste *toy-model* podemos apreciar claramente a parte imaginária da amplitude $1 \rightarrow 1$ a 1-loop ser expressável em termos da amplitude nível árvore $1 \rightarrow 2$. A integral que aparece,

$$\int d\beta = \frac{1}{4} \int \frac{d^3 \ell d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^6 2\omega_\ell 2\omega_{\mathbf{q}}},$$

nada é além da medida Lorentz invariante do espaço de fase. Há uma maneira diagramática de obter essa igualdade entre a parte imaginária e produtos de amplitudes em menor ordem, elas vão pelo nome de **regras de corte de Cutkosky**, o procedimento é simples, escrevemos um diagrama de Feynman de $n\text{-loops}$ que contribua para o processo em análise, disto, *cortamos* propagadores deste diagrama de forma a separar o diagrama inicial em dois diagramas de ordem menor. O procedimento de *cortar* um propagador corresponde a substituir $(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ por $i\pi\theta(p^0)\delta(p^2 + m^2)$, diagramaticamente, representamos um propagador cortado por uma linha perpendicular passando por seu propagador, ao fim, multiplicamos as duas amplitudes restantes, com a da direita sendo conjugada, ao fim, integramos sobre o espaço de fase Lorentz invariante. Note que neste processo obtemos duas amplitudes *on-shell*. Como exemplo,

$$\Im[\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1}^{1\text{-loop}}] = \frac{1}{2} \text{---} \overset{p}{\curvearrowright} \text{---} = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \int d\beta \delta^{(4)}(q + \ell - p) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}}(p; \ell, q) \mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}^{\text{tree}*}(p; \ell, q)$$

Claramente, para esse exemplo simples, há apenas uma única maneira de se *cortar* o diagrama de 1-loop em duas partes de menor ordem. Porém, para um número de pernas externas maior, ou maior número de *loops*, é necessário somar sobre todas as maneiras de se separar as amplitudes. Este conceito de unitariedade possui algumas limitações, primeiro, é possível apenas determinar a parte imaginária das amplitudes via amplitudes de ordem inferior, segundo, somente conseguimos aplicar este resultado para um espalhamento da forma $\alpha \rightarrow \alpha$, que é longe de ser a forma de espalhamento mais geral. Contudo, é possível obter um resultado mais geral, para isto, temos que relembrar a definição de estados *in/out*. Dado um hamiltoniano $H = H_0 + V$, e sendo Φ_α autoestado de H_0 com autovalor E_α , definimos Ψ_α^\pm autoestado de H com autovalor E_α por

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V \Psi_\alpha^\pm, \quad \epsilon > 0.$$

Note a imposição $\epsilon > 0$, e portanto, a troca $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$ corresponde a: $\Psi_\alpha^- \leftrightarrow \Psi_\alpha^+$. Assim, podemos retornar a expressão,

$$S_{\alpha\gamma}^* = (\Psi_\alpha^-, \Psi_\gamma^+)^* = (\Psi_\gamma^+, \Psi_\alpha^-) = (\Psi_\gamma^-, \Psi_\alpha^+) \Big|_{\epsilon < 0} = S_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

portanto,

$$\mathcal{A}_{\alpha\gamma}^* = \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0},$$

utilizando esse resultado podemos concluir,

$$\begin{aligned} -i(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha\gamma}^*) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\left(\mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon > 0} - \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{\epsilon < 0}\right) &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

O lado esquerdo desta igualdade deve ser entendido como sendo o limite $\epsilon \rightarrow 0$, claramente, se $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ fosse uma função contínua em ϵ , o resultado seria zero, e como o lado direito da igualdade é não necessariamente zero, podemos apenas concluir que: Em geral $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ é descontínuo em ϵ , porém, como ϵ contribui para a amplitude somente dentro do propagador $-i(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$, e é acompanhado por um fator de i , concluímos que genericamente as amplitudes, vistas como funções dos invariantes cinemáticos, possuem um *branch cut* num subconjunto do eixo real, quando interpretamos os momentos podendo tomar valores em números complexos.

Seja uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em todo plano, exceto por possíveis polos e um *branch cut* no eixo real, naturalmente isso significa que,

$$\exists s \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [f(s - i\epsilon) - f(s + i\epsilon)] = \mathfrak{Disc}[f],$$

no qual já definimos o que chamamos de descontinuidade de uma função. Assim,

$$-i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}] = \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}.$$

Agora, se supormos que $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ é uma amplitude de nível árvore, claramente as sub-amplitudes $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$ devem ser também de nível árvore, do contrário, seriam contribuições de ordem superior para $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$. Assim, necessariamente Φ_β é um estado de uma única partícula, portanto, $d\beta$ é a medida invariante de Lorentz do espaço de fase de uma única partícula,

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \int d\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_\alpha) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \\ -i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \frac{1}{2\omega_{\mathbf{q}}} \delta(q^0 - p_\alpha^0) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\ -i\mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi \theta(p_\alpha^0) \delta\left((q^0)^2 - (p_\alpha^0)^2\right) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_\alpha=\mathbf{p}_\gamma} \\ \mathfrak{Disc}[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^{\text{Tree}}] &= \sum_\beta 2\pi i \theta(p_\alpha^0) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2) \mathcal{A}_{\beta\gamma}^* \mathcal{A}_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Note que $p_\alpha^2 + m_\beta^2 = 0$ é impossível de ser satisfeito para diagramas nível árvore, pois, isso força $m_\beta^2 > \sum_\alpha m_\alpha^2$, e caso exista tal estado em nossa teoria, este não é estável, logo, não é possível de estar em um espalhamento de estados assintóticos. Claramente, essa expressão somente toma total sentido se estamos dispostos a interpretar $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}$ como função dos momentos externos, e admitirmos estes a poderem tomar valores complexos. Nesse ponto

de vista, olhemos para as amplitudes como funções de cada momento das partículas iniciais e finais: $p_{\alpha_i}, p_{\gamma_j}$, e estudemos sua extensão no plano complexo definida por,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha\}, \{p_\gamma\}) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(\{p_\alpha + k_\alpha z\}, \{p_\gamma + k_\gamma z\}) = \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(z),$$

no qual $z \in \mathbb{C}$ e $k_{\alpha_i}, k_{\gamma_j}$ são momentos arbitrários satisfazendo:

$$k_\alpha = k_\gamma, \quad k_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_j} = k_{\alpha_i} \cdot k_{\gamma_j} = k_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_j} = 0, \quad p_{\alpha_i} \cdot k_{\alpha_i} = p_{\gamma_i} \cdot k_{\gamma_i} = 0.$$

Desta forma temos que $\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}(0) = \mathcal{A}_{\gamma\alpha}$, olhemos para expressão anterior quando sujeita a esta extensão complexa,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} 2\pi i \theta(\tilde{p}_\alpha^0) \delta(\tilde{p}_\alpha^2 + m_\beta^2) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} 2\pi i \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta(p_\alpha^2 + m_\beta^2 + 2p_\alpha \cdot k_\alpha z) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} \frac{2\pi i}{2|p_\alpha \cdot k_\alpha|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z) \delta\left(z + \frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha}\right) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}, \quad z_\beta = -\frac{p_\alpha^2 + m_\beta^2}{2p_\alpha \cdot k_\alpha} \\ \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} |z_\beta| \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Sabemos que as amplitudes $\mathcal{A}_{\beta\gamma}, \mathcal{A}_{\beta\alpha}$ são de nível árvore, portanto, pelo argumento anterior, não possuem singularidades em $z = z_\beta$, assim, podemos integrar a expressão anterior em um intervalo simplesmente conexo fechado qualquer que contenha z_β e não passe por $z = 0$. Chamemos este intervalo de I_β ,

$$\begin{aligned} \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \int_{I_\beta} dz \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \delta(z - z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \\ \int_{I_\beta} dz \frac{1}{z} \mathfrak{Disc}[\tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}] &= \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}, \end{aligned}$$

agora, utilizando a definição de descontinuidade, e sabendo que a descontinuidade de z é zero neste domínio, podemos deformar o contorno I_β para duas versões, uma passando por baixo da reta real, e outra por cima da reta real com orientação oposta, e devido à descontinuidade é possível unir estes contornos formando uma curva fechada no sentido anti-horário circundando o ponto z_β , chamemos este contorno de C_β ,

$$\oint_{C_\beta} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = \sum_{\beta} \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{2\pi i}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta}.$$

Podemos então agora deformar o contorno C_β em outros dois, um circundando o ponto $z = 0$ no sentido horário, e outro no sentido anti-horário circundando $z = \infty$, assim,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} dz \frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} &= \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\
-\Re\text{es}_{z=0} \left[\frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] - \Re\text{es}_{z=\infty} \left[\frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] &= \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} \\
\mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} - \Re\text{es}_{z=\infty} \left[\frac{1}{z} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} \right] \\
\mathcal{A}_{\gamma\alpha} &= - \sum_\beta \frac{|z_\beta|}{z_\beta} \frac{1}{|p_\alpha^2 + m_\beta^2|} \theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta) \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha},
\end{aligned}$$

finalmente, sempre podemos tomar $z_\beta < 0$, pois, $m_\beta^2 > -p_\alpha^2$ e o sinal de k_α é fixado por se fazer $\theta(p_\alpha^0 + k_\alpha^0 z_\beta)$, assim,

$$(2.1) \quad \mathcal{A}_{\gamma\alpha} = \sum_\beta \frac{1}{p_\alpha^2 + m_\beta^2} \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha}.$$

Esta forma da condição de unitariedade é também conhecida como **relações de recursão à nível árvore**. Escolhas específicas de k_α, k_γ caracterizam diferentes métodos de recursão, os principais métodos são BCFW — Britto, Cachazo, Feng e Witten — e CSW — Cachazo, Svrcek e Witten —. Esses métodos de recursão, unidos com a simplicidade do formalismo de amplitudes *on-shell*, providenciam uma abordagem robusta e — comparativamente ao método usual — simples para se obter amplitudes de $n \geq 4$ pontos à nível árvore. Claramente, essas relações somente facilitam a obtenção de amplitudes se o requisito

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_{\gamma\alpha} = 0,$$

for satisfeito. Esta condição é altamente não trivial e não é válida para várias teorias, porém, para teorias do tipo Yang-Mills foi-se provado que é de fato verdadeira.

2.3. Unitariedade generalizada. No item anterior, demos uma breve descrição de como a unitariedade da matrix S — que nos permite calcular a descontinuidade de uma amplitude partindo de amplitudes de menor ordem —, suplementada por hipóteses adicionais da estrutura analítica, nos permite de obter a amplitude completa, à nível árvore, partindo de amplitudes de menor ordem. Vamos agora descrever como esse método de unitariedade pode ser estendido para **unitariedade generalizada**, que nos permite obter amplitudes de *loop* partindo de amplitudes de menor ordem. Claro que isso só é possível suplementando com condições da estrutura analítica.

Para isso, começamos partindo de uma amplitude $\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^L$ de L -loops. Sabemos da estrutura das regras de Feynman que tal amplitude pode ser escrita como,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^L = \sum_a \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4 \ell_n}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a},$$

no qual a indexa diferentes topologias que contribuem para este processo, e chamamos o objeto $\mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a}$ de integrando da amplitude. Ainda mais, o integrando possui forma bem definida, provindas das regras de Feynman,

$$\mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a} = \frac{1}{S_a} \frac{n_a c_a}{\prod_{\beta_a} (p_{\beta_a}^2 + m_{\beta_a}^2)},$$

n_a engloba toda a dependência cinemática do numerador, c_a são fatores puramente numéricos dependentes dos acoplamentos e dos grupos de calibre, e S_a são apenas fatores de simetria. O caso ideal seria se a soma sobre topologias comutasse com a integral dos momentos de *loop*, e pudéssemos definir o seguinte objeto,

$$\mathcal{A}_{\gamma\alpha}^L = \sum_a \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4\ell_n}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a} \stackrel{?}{=} \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4\ell_n}{(2\pi)^4} \sum_a \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a} \stackrel{?}{=} \int \prod_{n=0}^L \frac{d^4\ell_n}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^L,$$

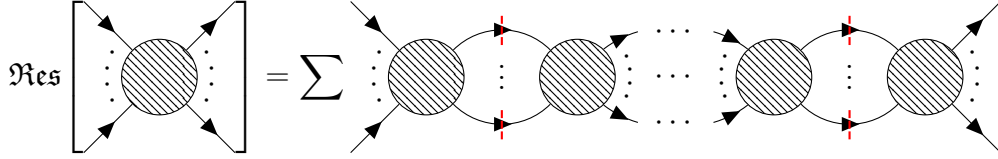
a obstrução para se fazer isso é que não existe uma maneira de se definir globalmente como os momentos de loop são definidos no objeto $\mathcal{I}_{\gamma\alpha}^{L,a}$. Existem teorias em que isso sim é possível, porém, no caso geral não é verdade. Assim como mostramos no conceito de unitariedade da matrix S, a amplitude completa á nível árvore pode ser reconstruída em sua totalidade sabendo apenas o valor de seu resíduo em,

$$(p_\alpha^2 + m_\beta^2) \mathcal{A}_{\gamma\alpha} \Big|_{p_\alpha^2 = -m_\beta^2} = \Re s[\mathcal{A}_{\gamma\alpha}] = \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\gamma}^* \tilde{\mathcal{A}}_{\beta\alpha} \Big|_{p_\alpha^2 = -m_\beta^2},$$

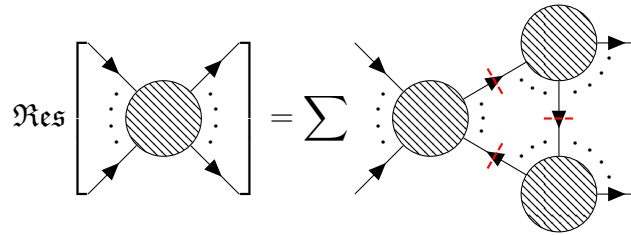
com o mesmo espírito, propomos que o integrando de amplitudes de *loops* possa ser reconstruído fazendo a igualdade de seus resíduos em **cortes** com o produto de amplitudes de menor ordem. Por exemplo, a unitariedade por si é capaz de nos garantir,

$$(\ell_i^2 + m_{\beta_1}^2)((p_\alpha - \ell_i)^2 + m_{\beta_2}^2) \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^L \Big|_{\ell_i^2 = -m_{\beta_1}^2, (p_\alpha - \ell_i)^2 = -m_{\beta_2}^2} = \sum_{n=0}^L \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta\gamma}^{L-n*} \mathcal{I}_{\beta\alpha}^n \Big|_{\ell_i^2 = -m_{\beta_1}^2, (p_\alpha - \ell_i)^2 = -m_{\beta_2}^2},$$

contudo, ela somente nos é capaz de nos dizer algo sobre **cortes** verticais do diagrama, isto é, **cortes** da forma,



Apesar desta topologia de resíduos nos proporcionar muita informação sobre a amplitude, para $L \geq 1$, essa informação apenas não é suficiente para conseguirmos reconstruir a amplitude, pois, há outros resíduos possíveis de serem tomados que não são levados em conta na aplicação da unitariedade convencional. Um exemplo é,



que corresponderia à,

$$(\ell^2 + m_{\beta_3}^2)((p_{\gamma_1} - \ell)^2 + m_{\beta_1}^2)((p_{\gamma_2} - \ell)^2 + m_{\beta_2}^2) \mathcal{I}_{\gamma\alpha}^L \Big|_{\text{Cuts}} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^{L-n} \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} \mathcal{I}_{\{\beta_2, \beta_3\} \gamma_2}^{L-n-m*} \mathcal{I}_{\{\beta_1, \beta_2\} \gamma_1}^{m*} \mathcal{I}_{\{\beta_1, \beta_2\} \alpha}^n \Big|_{\text{Cuts}, \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2}$$

o grande problema com esse tipo de corte é: nos assumimos que os estados iniciais e finais em integrandos $\mathcal{I}_{\beta\alpha}^L$ são tais que satisfazem $p_\alpha^0, p_\beta^0 > 0$, porém, neste caso é fácil de se mostrar que não é possível de se satisfazer essa condição para a solução dos cortes, assim, as amplitudes que aparecem nos resíduos dos cortes não possuem de fato uma relação rígida de partículas iniciais e finais, por conta do sinal da componente temporal do momento não ser positivo — podendo ser complexo —. Então, se estamos interessados em obter o máximo de informação sobre amplitudes de ordens superiores partindo de ordens inferiores, é necessário obtermos um

formalismo que trate partículas externas de maneira uniforme, isto é, um formalismo que seja indiferente de $p^0 > 0$ e trate igualmente partículas internas e externas.

Para isso, ao invés de utilizarmos como amplitude $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$, que diferencia os estados iniciais α dos finais β , vamos fazer $p_{\alpha_i} \rightarrow -p_{\alpha_i}$, de modo que a conservação de momento passa a ser $\sum_i^n p_i = 0$. A amplitude $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ vista como função dos momentos $p_{\beta_i}, -p_{\alpha_j}$ para n partículas externas será denominada $\mathcal{A}_n(1^{h_1}, \dots, n^{h_n})$, no qual i refere-se ao momento da i -ésima partícula e h_i à helicidade/spin da i -ésima partícula. Nota-se a uniformidade do tratamento de partículas iniciais e finais, a única diferença é que partículas com $p_i^0 > 0$ devem ser interpretadas como finais e partículas com $p_i^0 < 0$ como iniciais. De certa forma, podemos interpretar essa nova função das variáveis cinemáticas como sendo uma abreviação de todas as amplitudes possíveis de n pontos, isto é,

$$\mathcal{A}_n(1^{h_1}, \dots, n^{h_n}) = \sum_{\alpha, \beta} \prod_{i \in \alpha, j \in \beta} \theta(-p_{\alpha_i}^0 > 0) \theta(p_{\beta_j}^0 > 0) \mathcal{A}_{\beta\alpha},$$

devido às funções de Heaviside presentes, produtos dessas amplitudes fatorizam, e portanto, podemos utilizar do resultado da (2.1) e obter uma expressão ainda mais geral,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \sum_{I, m} \frac{1}{P_I^2 + m_\beta^2} \tilde{\mathcal{A}}_{n-m+2} \tilde{\mathcal{A}}_m \Big|_{z=z_\beta} + \lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{A}}_n \\ (P_I^2 + m_I^2) \mathcal{A}_n \Big|_{P_I^2 = -m_\beta^2} &= \Re s[\mathcal{A}_n] = \sum_{m=3}^{n-1} \tilde{\mathcal{A}}_{n-m+2} \tilde{\mathcal{A}}_m \Big|_{P_I^2 = -m_I^2} \end{aligned}$$

É claro, para teorias nas quais o termo de borda é zero. Assim, podemos utilizar este formalismo para calcular cortes do tipo triângulo mostrados anteriormente, devido a não ser necessário se preocupar sobre o sinal dos momentos. Escrevemos então analogamente,

$$\mathcal{A}_n^L = \int \prod_{j=1}^L \frac{d^4 \ell_j}{(2\pi)^4} \mathcal{I}_n^L,$$

e agora nos voltamos sobre a construíbilidade do integrando por meio de cortes. Bem, termos não construíveis são analíticos em \mathbb{C}/∞ e estão relacionados com *tadpoles*, por hora iremos ignorar estes.

Começemos com um exemplo à 1-*loop*, neste caso há apenas uma única integral de uma única variável de momento de *loop*, ℓ . Assim, como este possui apenas 4 componentes, podemos ao máximo realizar um corte quádruplo, sendo qualquer outro número superior de cortes zero. Assim, olhemos para a maior ordem de corte,

$$(\ell^2 + m_1^2)((\ell - P_I)^2 + m_2^2)((\ell - P_J)^2 + m_3^2)((\ell - P_K)^2 + m_4^2) \mathcal{I}_n^1 \Big|_{\text{Cuts}} = \sum_{k, l, m, p}^{k+l+m+p=n} \mathcal{A}_{k+2} \mathcal{A}_{l+2} \mathcal{A}_{m+2} \mathcal{A}_{p+2},$$

as escolhas de $P_{I,J,K}$ ditam as topologias que aparecerão do lado direito, porém, note que o lado direito não possui nenhuma menção à variável de integração ℓ , assim,

$$\mathcal{I}_n^1 \supseteq \sum_{m_i} \sum_{k, l, m, p}^{k+l+m+p=n} \mathcal{A}_{k+2} \mathcal{A}_{l+2} \mathcal{A}_{m+2} \mathcal{A}_{p+2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m_1^2)((\ell - P_I)^2 + m_2^2)((\ell - P_J)^2 + m_3^2)((\ell - P_K)^2 + m_4^2)},$$

isto é um exemplo de reconstrução, em geral, podemos fatorizar \mathcal{I}_n^L em uma base de integrais escalares com coeficientes que englobam dependências cinemáticas, vetores de polarizações e elementos de álgebras. Claro, obtemos aqui somente um dos termos de \mathcal{I}_n^1 , é possível que haja contribuições com menor número de polos, e

para obter estas seria necessário tomar mais resíduos. Vamos demonstrar como isso pode ser feito na teoria teste, $g\phi^3$,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{4 \text{ Cuts}} = \ell + 2 \uparrow \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \xrightarrow{\ell} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \xleftarrow{\ell-3} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \ell - 3 = \mathcal{A}_3(2, \ell, -\ell - 2) \mathcal{A}_3(-\ell, \ell - 3, 3) \mathcal{A}_3(4, 3 - \ell, \ell - 3 - 4) \mathcal{A}_3(1, \ell + 2, 3 + 4 - \ell)$$

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{4 \text{ Cuts}} = g^4,$$

que implica,

$$\mathcal{I}_4^1 \supseteq g^4 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell + 2)^2 + m^2)((\ell - 3)^2 + m^2)((\ell - 3 - 4)^2 + m^2)}.$$

Obviamente esse resulta é somente para uma única contribuição de topologia no corte de 4 partículas, há mais outras cinco contribuições que podem ser obtidas por permutação das pernas externas. Procedemos para o corte de 3 partículas,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = \ell + 2 \uparrow \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \xrightarrow{\ell} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \xleftarrow{\ell-3} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \ell - 3 - 4 = \mathcal{A}_3(2, \ell, -\ell - 2) \mathcal{A}_3(1, \ell + 2, 3 + 4 - \ell) \mathcal{A}_4(-\ell, \ell - 3 - 4, 3, 4)$$

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = g^4 \left[\frac{1}{m^2 + (3 + 4)^2} + \frac{1}{m^2 + (3 - \ell)^2} + \frac{1}{m^2 + (4 - \ell)^2} \right],$$

Certamente esta é apenas uma contribuição de outras duas, note que os dois últimos termos correspondem ao mesmo resíduo da expressão com 4 polos, portanto apenas o primeiro termo nos diz algo não trivial sobre a parcela com 3 polos,

$$\mathcal{I}_3^1 \supseteq \frac{g^4}{m^2 + (3 + 4)^2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell + 2)^2 + m^2)((\ell - 3 - 4)^2 + m^2)}.$$

O corte duplo é,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{2 \text{ Cuts}} = \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \xrightarrow{\ell} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \xleftarrow{\ell-3} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \ell - 3 - 4 = \frac{1}{2} \mathcal{A}_4(1, 2, \ell, -\ell - 2) \mathcal{A}_4(-\ell, \ell - 3 - 4, 3, 4)$$

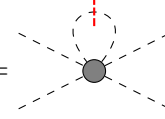
$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = \frac{1}{2} g^4 \left[\frac{1}{m^2 + (1 + 2)^2} + \frac{1}{m^2 + (1 + \ell)^2} + \frac{1}{m^2 + (2 + \ell)^2} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{m^2 + (3 + 4)^2} + \frac{1}{m^2 + (3 - \ell)^2} + \frac{1}{m^2 + (4 - \ell)^2} \right],$$

realizando a mesma análise anterior, existe apenas um termo ligado a contribuição de 2 polos,


$$\mathcal{I}_3^1 \supseteq \frac{g^4}{2(m^2 + (3 + 4)^2)(m^2 + (1 + 2)^2)} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell - 3 - 4)^2 + m^2)}.$$

Nós poderíamos ir ainda mais além e tentar calcular o corte simples,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{1 \text{ Cuts}} = \text{diagrama} = \mathcal{A}_6(1, 2, 3, 4, \ell, -\ell),$$


porém, este tipo de corte não está bem definido em TQC no geral, principalmente devido a divergências no limite colinear de amplitudes, contudo, não há problema nisto, cortes como esses iriam apenas contribuir para *tadpoles*, os quais após renormalização devem ser zero, portanto não iremos nos preocupar. Note que para o caso desta teoria teste é sim possível obter o integrando \mathcal{I}_4^1 completo partindo da unitariedade generalizada.

2.4. Comportamento no UV. Ao introduzir diagramas de *loops*, naturalmente estes introduzem **divergências**, porém, felizmente, atualmente está bem consolidado tanto conceitualmente, quanto algoritmicamente, procedimentos para “dar cabo” à esses “problemas”. Teorias nas quais é possível de se controlar as divergências, **sem** perder o caráter preditivo da teoria, são ditas **renormalizáveis**, no caso contrário, **não-renormalizáveis**. Como exemplo de diagrama divergente podemos voltar à nossa teoria teste,

$$\text{diagrama} = i \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 + m^2)((\ell - p)^2 + m^2)} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda d\ell \frac{1}{\ell} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \ln[\Lambda],$$


obviamente, essa análise da divergência é apenas pictórica e altamente ingênua. “Sabemos” que deve haver divergências na região de integração $\ell \rightarrow \infty$, o grande problema em analisar essa região é a métrica indefinida do espaço de Minkowski que força $\ell \rightarrow \infty \not\Rightarrow \ell^2 \rightarrow \infty$, tome como exemplo a região $\ell^\mu = (\Lambda \ 0 \ 0 \ \Lambda)$, que respeita $\ell \rightarrow \infty$, mas, $\ell^2 \equiv 0$. A análise é ainda mais dificultada quanto maior o número de loops presentes no diagrama.

A “única” maneira de se analisar fielmente o comportamento no UV é realizar uma rotação de Wick para o espaço euclidiano. Isto é, tomando em conta a prescrição de $i\epsilon$, rotacionamos o contorno da integral de $d\ell^0$ para o eixo imaginário, desviando dos polos, assim, $\ell^2 \rightarrow -\ell^2 < 0$, onde agora ℓ^2 é definido com a métrica euclidiana. Neste caso, o limite $\ell \rightarrow \infty \Rightarrow \ell^2 \rightarrow \infty$ faz sentido. Há apenas uma obstrução para este procedimento, que pode ser vista no exemplo de integral divergente que demos: em geral o integrando não é uma função somente de ℓ^2 , mas também depende de contrações com momentos externos da forma $(\ell - p)^2$, portanto, é necessário realizar uma reparametrização antes de aplicar a rotação de Wick. Esses procedimentos não são em sua totalidade difíceis, porém, para grande número de *loops* e pernas externas, se tornam demasiado longas as contas, além de que esta análise é para somente um diagrama. Para topologias que permitem vários diagramas se torna impraticável a análise, além de ser obscuro a presença ou não de cancelamentos entre contribuições de diagramas. Este é o principal ponto que estamos interessados em analisar, em [14] foi de fato mostrado que cancelamentos entre certos diagramas divergentes ocorrem, gerando amplitudes que não possuem algumas das divergências esperadas por análise “ingênua” de *power-counting*.

Conforme mencionamos, é impraticável realizar uma análise de divergência para um número de pernas externas e *loops* arbitrário, ao menos utilizando-se o método usual. O algoritmo utilizado em [14] para se mostrar os cancelamentos foi de analisar a existência ou não de determinados polos no infinito de **cortes** de diagramas. O motivo dos cortes é: cortes eliminam parte da liberdade dos momentos de *loop*, assim, com uma escolha esperta de cortes podemos restringir a região dos momentos de *loop* para uma região do espaço de integração na qual o limite $\ell \rightarrow \infty$ faça sentido. Nossa teoria teste é muito simples para esperarmos qualquer tipo de cancelamento em cortes, porém, ela servirá como uma arena de aprendizagem das técnicas necessárias para se realizar o cálculo em teorias mais complexas.

2.5. Teorias com derivadas superiores. As teoria usuais estudadas em TQC possuem termo cinético em seu lagrangiano com no máximo duas derivadas, isso é devido à ser responsável por gerar um propagador da forma $(p^2 + m^2)^{-1}$, o que é compatível com argumentos gerais da estrutura de polos físicos da matrix S [20, 21, 26]. Um propagador com polos diferentes dos previstos por argumentos gerais necessariamente seria

um indicativo da teoria em questão não respeitar alguma das hipóteses, como: unitariedade, causalidade e localidade. Ainda, dependendo dos coeficientes é possível a aparição de fantasmas — Relacionados com a instabilidade de Ostrogradsky — ou modos taquiônicos, porém, estudos recentes [4–11] mostram que os fantasmas presentes nestes tipos de teorias adquirem uma parte imaginária em sua auto-energia, assim, desacoplando do espectro assintótico de forma a manter a unitariedade.

Independentemente disto, é sabido que a Relatividade Geral,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

quando linearizada e interpretada como uma TQC, não é renormalizável. Uma análise cuidadosa sobre as formas de divergências que surgem [1, 3, 13, 15, 18, 19, 22–25], sugere que a princípio seria possível de se obter uma teoria linearizada de gravidade quantizável e perturbativamente renormalizável caso, além do termo de Einstein-Hilbert, adicionássemos termos quárticos em derivadas,

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \right].$$

Devido a existência do invariante topológico de Gauss-Bonnet em 4 dimensões,

$$\mathbb{Z} \ni \text{G.B.} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x [R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2],$$

apenas dois de α, β, γ são independentes, escolhemos α, β como independentes, podemos ainda remover β em prol de introduzir um termo dependente do tensor de Weyl, assim,

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} R + \alpha R^2 + \beta W_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu\nu\rho\sigma} \right].$$

Uma classe especial de teorias são aquelas nas quais $\alpha = 0$, pois, o termo dependente do tensor de Weyl quadrado é classicamente invariante por transformações conformes, assim, não gera nenhuma contribuição para a matrix S, desta forma, a teoria definida por essa ação possui as mesmas amplitudes a nível árvore geradas por GR usual. Visto que essa teoria possui derivadas superiores, gostaríamos de compreender melhor a forma das amplitudes de *loops* desta teoria. Para isso, começamos a análise deste tipo de teorias utilizando uma teoria teste conforme proposta em [16].

2.6. Comportamento de amplitudes na teoria teste. A teoria teste com que iniciaremos nossos estudos é dada pelo lagrangiano,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\square\phi + \frac{g}{2}\phi^2 \right)^2 - \frac{m^2}{2} \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{g}{3!}\phi^3 \right),$$

note a forma sugestiva em que escrevemos, o lagrangiano usual de uma teoria ϕ^3 gera como equações de movimento $\square\phi + \frac{g}{2}\phi^2 = 0$, ou seja, o primeiro termo é apenas a equação de movimento do segundo termo ao quadrado, assim, as amplitudes geradas a nível árvore por esse lagrangiano são idênticas às geradas por uma teoria usual de ϕ^3 . É interessante analisar a dependência dessa teoria com as dimensões do espaço tempo, em D dimensões temos: $[\phi] = \frac{D}{2} - 2, [m] = 1, [g] = 4 - \frac{1}{2}D$, porém, se estamos interessados em analisar espalhamentos na teoria quântica a dimensão do campo $[\phi]$ é “fixa”, o requisito vem da dimensão dos operadores de criação e aniquilação,

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^{(D-1)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad \phi(x) = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^D 2\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}} e^{ik \cdot x} + \text{h.c.},$$

que fixa $[a_{\mathbf{k}}] = 1 - \frac{D}{2}$ e $[\phi] = \frac{D}{2} - 1$, obviamente ambas as condições são inconsistentes. A solução é que deveríamos utilizar de $\frac{1}{m}\phi$ ao invés de ϕ , porém, isso somente irá adicionar fatores de m^2 nas amplitudes, que podemos retirar se quisermos. Conforme a análise dimensional, uma escolha sensata seria $D = 6$ — escolha usual para teorias ϕ^3 — na qual o acoplamento $m^2 g \phi^3$ possui dimensão zero, porém há um acoplamento de

$g^2\phi^4$, que possuiria dimensão de massa negativa, indicando um caráter não renormalizável, assim, seguiremos em $D = 4$, por esse motivo e por nos proporcionar o poderoso método *on-shell*. As regras de Feynman geradas por essa teoria são,

- $\phi \text{-----} \phi = -i(m^2p^2 + p^4)^{-1}$
- $\phi_1 \text{-----} \begin{array}{c} \phi_2 \\ \diagup \\ \diagdown \\ \phi_3 \end{array} = ig(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2)$
- $\phi_2 \text{-----} \begin{array}{c} \phi_1 \\ \text{+} \\ \phi_3 \end{array} \text{-----} \phi_4 = -3ig^2$

Note a estrutura não usual do propagador devido a termos de derivadas superiores, claramente há dois polos,

$$\frac{1}{i} \frac{1}{m^2p^2 + p^4} = \frac{1}{im^2} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{im^2} \frac{1}{p^2 + m^2},$$

o polo massivo também possui um sinal contrário do polo sem massa, isso é um indício da presença de um fantasma e de possível quebra de unitariedade. Conforme mencionamos anteriormente, com correções de loops este polo massivo se torna complexo, desacoplando o estado do espectro físico; além disso, todas as amplitudes físicas — estados externos sem massa — a nível árvore são completamente iguais a de uma teoria ϕ^3 normal, apenas com a diferença das amplitudes possuírem um fator multiplicativo de m^2 adicional[16], também, amplitudes com apenas uma perna externa massiva a nível árvore são identicamente nulas [16].

Vamos calcular agora os cortes da função de quatro pontos a um *loop* para analisar a presença ou não de cancelamentos — o que significaria que as divergências possuem um comportamento mais ameno do que esperado por *power-counting* —, em $D = 4$ um corte quádruplo não possui nenhuma informação sobre possíveis cancelamentos, assim, começamos por um corte triplo, isto é,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & \bullet & 2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \text{+} & \\ & \diagup & \diagdown \\ 4 & \bullet & 1 \end{array} \end{array}$$

Para isto necessitamos saber sobre as funções de quatro pontos com até duas pernas externas massivas, estas são dadas por,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & \\ & \diagup & \diagdown \\ 1 & & 4 \end{array} \end{array} = -ig^2m^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right), \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & \\ & \diagup & \diagdown \\ 1 & & 4 \end{array} \end{array} = ig^2m^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right)$$

além de resolver os dois possíveis cortes,

$$\begin{cases} \ell^2 = (\ell + 4)^2 = (\ell + 3 + 4)^2 = 0 \\ \ell^2 = (\ell + 4)^2 = (\ell + 3 + 4)^2 = -m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_0 = |4]\langle 4| + z|3]\langle 4| \\ \ell_m = |4]\langle 4| + z|3]\langle 4| + \frac{m^2|4]\langle 3|}{z\langle 43]\langle 43]} \end{cases}$$

Ambos cortes capturam o limite $\ell \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow \infty$, e de fato $\ell_0 \sim \ell_m$ no mesmo. Assim, podemos calcular o valor do corte neste limite,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} &= \begin{array}{c} 3 \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \quad 1 \end{array}^2 = \frac{(igm^2)^2(-ig^2m^2)}{(im^2)^3} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2\ell_0 \cdot 1} + \frac{1}{2\ell_0 \cdot 2} \right) + \frac{(-igm^2)^2(ig^2m^2)}{(-im^2)^3} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2\ell_m \cdot 1} + \frac{1}{2\ell_m \cdot 2} \right) \\ &= -g^4 \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{2\ell_0 \cdot 1} + \frac{1}{2\ell_0 \cdot 2} + \frac{1}{2\ell_m \cdot 1} + \frac{1}{2\ell_m \cdot 2} \right) \end{aligned}$$

O termo $\frac{2}{s}$ representa que não existem cancelamentos, isto é, o termo com 3 polos é presente neste integrando. Este é o comportamento esperado por *power-counting* e não é necessariamente um problema, visto que essa contribuição de 3 polos no integrando de um *loop* não gera divergências. Analisamos também o corte duplo, que supostamente demonstraria o melhor comportamento possível, porém, novamente há um polo duplo sem cancelamento conforme dita argumentos de *power-counting*,

$$\mathcal{I}_4^1 \Big|_{3 \text{ Cuts}} = \begin{array}{c} 3 \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \quad 1 \end{array}^2 = g^4 \frac{2}{s^2} + \mathcal{O}(z^{-1})$$

O próximo passo é analisar cortes de maior número de *loops*, começando pela topologia:

$$\mathcal{I}_4^2 \Big|_{5 \text{ Cuts}} = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad 1 \end{array}^4$$

Para isto é necessário resolver 5 topologias diferentes de cortes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_1^2 = \ell_2^2 = (3 - \ell_1)^2 = (3 - \ell_1 - \ell_2)^2 = (3 + 4 - \ell_1 - \ell_2)^2 = 0 \\ \ell_1^2 = \ell_2^2 = (3 - \ell_1)^2 = -m^2, \quad (3 - \ell_1 - \ell_2)^2 = (3 + 4 - \ell_1 - \ell_2)^2 = 0 \\ \ell_1^2 = \ell_2^2 = 0, \quad (3 - \ell_1)^2 = (3 - \ell_1 - \ell_2)^2 = (3 + 4 - \ell_1 - \ell_2)^2 = -m^2 \\ \ell_1^2 = 0, \quad \ell_2^2 = (3 - \ell_1)^2 = (3 - \ell_1 - \ell_2)^2 = (3 + 4 - \ell_1 - \ell_2)^2 = -m^2 \\ \ell_1^2 = \ell_2^2 = (3 - \ell_1)^2 = (3 - \ell_1 - \ell_2)^2 = (3 + 4 - \ell_1 - \ell_2)^2 = -m^2 \end{array} \right.$$

o que foi realizado, e somando-se as contribuições não foi encontrado nenhum cancelamento que gerasse disparidade com a análise de *power-counting*. Acreditamos que este modelo escalar seja simplório demais para demonstrar qualquer tipo de cancelamento, principalmente devido ausência de numeradores nas regras de feynman, assim, iremos continuar a análise em um modelo mais intrincado, outra teoria proposta em [16], que possui propriedades semelhantes à nosso modelo escalar e à gravitação quadrática, a teoria $(DF)^2$ mínima,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} D_\mu F^{\mu\nu} D_\rho F^\rho{}_\nu - \frac{m^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

3. PLANO DE ATIVIDADES

O plano de atividades para o próximo ano está descrito na tabela 2,

TABELA 2. Plano de atividades.

Data	Categoria	Descrição
Jan–Mar 2025	Cálculos	Cálculo das amplitudes a nível árvore da teoria $(DF)^2$.
Fev–Mai 2025	Cálculos	Obtenção dos cortes de amplitudes de <i>loop</i> na teoria $(DF)^2$.
Mar–Jul 2025	Atividades Acadêmicas	Ministrar monitorias na disciplinas de TQC I.
Mai–Dez 2025	Escrita	Escrita contínua da dissertação.
Jul–Dez 2025	Cálculos	Expandir resultados para extensões de $(DF)^2$ e para teorias de gravitação por cópia dupla.

REFERÊNCIAS

- [1] I. Antoniadis e E. T. Tomboulis. “Gauge Invariance and Unitarity in Higher-Derivative Quantum Gravity”. Em: *Physical Review D* 33.10 (mai. de 1986), pp. 2756–2779. DOI: 10.1103/PhysRevD.33.2756.
- [2] Nima Arkani-Hamed, Tzu-Chen Huang e Yu-tin Huang. *Scattering Amplitudes For All Masses and Spins*. Out. de 2021. DOI: 10.48550/arXiv.1709.04891. arXiv: 1709.04891 [hep-th].
- [3] Zvi Bern et al. “Two-Loop Renormalization of Quantum Gravity Simplified”. Em: *Physical Review D* 95.4 (fev. de 2017), p. 046013. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.046013.
- [4] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. “Causality and Gravity”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2021.11 (nov. de 2021), p. 10. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP11(2021)010. arXiv: 2106.05912 [hep-th].
- [5] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. “Gauge Assisted Quadratic Gravity: A Framework for UV Complete Quantum Gravity”. Em: *Physical Review D* 97.12 (jun. de 2018), p. 126005. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.126005. arXiv: 1804.04980 [hep-th].
- [6] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. “Massive Poles in Lee-Wick Quantum Field Theory”. Em: *Physical Review D* 99.6 (mar. de 2019), p. 065017. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.065017. arXiv: 1812.03603 [hep-th].
- [7] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. *On Quadratic Gravity*. Dez. de 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2112.01974. arXiv: 2112.01974 [hep-th].
- [8] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. “Quantum Causality and the Arrows of Time and Thermodynamics”. Em: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 115 (nov. de 2020), p. 103812. ISSN: 01466410. DOI: 10.1016/j.ppnp.2020.103812. arXiv: 2003.09047 [quant-ph].
- [9] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. “The Arrow of Causality and Quantum Gravity”. Em: *Physical Review Letters* 123.17 (out. de 2019), p. 171601. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.171601. arXiv: 1908.04170 [hep-th].
- [10] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. “The Ostrogradsky Instability Can Be Overcome by Quantum Physics”. Em: *Physical Review D* 104.4 (ago. de 2021), p. 045010. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.045010. arXiv: 2105.00898 [hep-th].
- [11] John F. Donoghue e Gabriel Menezes. “Unitarity, Stability and Loops of Unstable Ghosts”. Em: *Physical Review D* 100.10 (nov. de 2019), p. 105006. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.105006. arXiv: 1908.02416 [hep-th].

- [12] Henriette Elvang e Yu-tin Huang. *Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*. 1^a ed. Cambridge University Press, fev. de 2015. ISBN: 978-1-107-70662-0 978-1-107-06925-1 978-1-009-77336-2. DOI: 10.1017/CB09781107706620.
- [13] Marc H. Goroff, Augusto Sagnotti e Augusto Sagnotti. “Quantum Gravity at Two Loops”. Em: *Physics Letters B* 160.1 (out. de 1985), pp. 81–86. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/0370-2693(85)91470-4.
- [14] Enrico Herrmann e Jaroslav Trnka. “UV Cancellations in Gravity Loop Integrands”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2019.2 (fev. de 2019), p. 84. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP02(2019)084. arXiv: 1808.10446 [hep-th].
- [15] Bob Holdom e Jing Ren. “A QCD Analogy for Quantum Gravity”. Em: *Physical Review D* 93.12 (jun. de 2016), p. 124030. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.124030. arXiv: 1512.05305 [hep-th].
- [16] Henrik Johansson, Gustav Mogull e Fei Teng. “Unraveling Conformal Gravity Amplitudes”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2018.9 (set. de 2018), p. 80. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP09(2018)080. arXiv: 1806.05124 [hep-th].
- [17] Henrik Johansson e Josh Nohle. *Conformal Gravity from Gauge Theory*. Jul. de 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1707.02965. arXiv: 1707.02965 [hep-th].
- [18] Philip D. Mannheim. “Making the Case for Conformal Gravity”. Em: *Foundations of Physics* 42.3 (mar. de 2012), pp. 388–420. ISSN: 0015-9018, 1572-9516. DOI: 10.1007/s10701-011-9608-6. arXiv: 1101.2186 [hep-th].
- [19] Alberto Salvio e Alessandro Strumia. “Agravity”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2014.6 (jun. de 2014), p. 80. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP06(2014)080. arXiv: 1403.4226 [hep-ph].
- [20] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. 1^a ed. Cambridge University Press, dez. de 2013. ISBN: 978-1-108-98503-1 978-1-107-03473-0. DOI: 10.1017/9781139540940.
- [21] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN: 978-0-511-81391-7. DOI: 10.1017/CB09780511813917.
- [22] K. S. Stelle. “Renormalization of Higher-Derivative Quantum Gravity”. Em: *Physical Review D* 16.4 (ago. de 1977), pp. 953–969. DOI: 10.1103/PhysRevD.16.953.
- [23] G. 't Hooft e M. Veltman. “One-Loop Divergencies in the Theory of Gravitation”. Em: *Euclidean Quantum Gravity*. WORLD SCIENTIFIC, mai. de 1993, pp. 3–28. ISBN: 978-981-02-0515-7 978-981-4539-39-5. DOI: 10.1142/9789814539395_0001.
- [24] E. T. Tomboulis. “Renormalization and Unitarity in Higher Derivative and Nonlocal Gravity Theories”. Em: *Modern Physics Letters A* 30.03n04 (fev. de 2015), p. 1540005. ISSN: 0217-7323. DOI: 10.1142/S0217732315400052.
- [25] Anton E. M. van de Ven. “Two-Loop Quantum Gravity”. Em: *Nuclear Physics B* 378.1 (jul. de 1992), pp. 309–366. ISSN: 0550-3213. DOI: 10.1016/0550-3213(92)90011-Y.
- [26] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Volume 1, Foundations*. 1^a ed. Cambridge University Press, jun. de 1995. ISBN: 978-0-521-67053-1 978-0-521-55001-7 978-1-139-64416-7. DOI: 10.1017/CB09781139644167.