Cálculo vetorial integral
Unidade 1/4

Prof. Carlyle Câmara Santos Júnior

Instituto Federal de Santa Catarina – Campus São José
Engenharia de Telecomunicações
Eletromagnetismo (EMG129005) – 5ª Fase

carlyle.camara@ifsc.edu.br

2 de abril de 2025

Roteiro

Observações gerais

Conteúdos e objetivos da aula [1]

- Conteúdos:
  1. Integral de linha.
  2. Integral de superfície.
  3. Integral de volume.
- Objetivo:
  1. Adquirir proficiência para calcular integrais de linha, de superfície e de volume para resolver problemas básicos no estudo do eletromagnetismo.

Integrais de linha

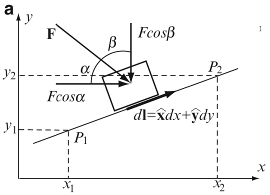
Considerações iniciais [1]

- Frequentemente, precisamos integrar funções vetoriais.
- Por exemplo, para calcular o trabalho realizado por uma força, precisamos integrá-la ao longo de um certo caminho.
- Embora a força seja uma função vetorial, bem como o caminho, o resultado dessa integração é uma grandeza escalar (trabalho).
- Além disso, também trataremos de integrais de superfície e integrais de volume.
- A única diferença para as operações realizadas no cálculo está no tratamento do integrando e na sua interpretação física.

Integrais de linha [1]

- Analisemos o problema de calcular o trabalho realizado por uma força, conforme a imagem abaixo.
- Supomos que a força varie com o espaço e que ela seja aplicada em uma direção arbitrária.
- Para realizar essa operação, separamos a força em duas componentes:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y)\cos\alpha\, dx + \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)\cos\beta\, dy. \tag{1}$$



Integrais de linha [1]

- Agora, notamos que

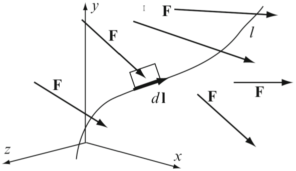
$$F(x,y)\cos\alpha = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{x}},\; F(x,y)\cos\beta = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{y}}. \tag{2}$$

- Com isso, podemos reescrever o trabalho assim:

$$W = \int_{x_1}^{x_2}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{x}}dx + \int_{y_1}^{y_2}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{y}}dy. \tag{3}$$

- Lembramos que, no plano x-y, o diferencial de comprimento se escreve como $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}$, portanto

$$W = \int_{P_1}^{P_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}. \tag{4}$$



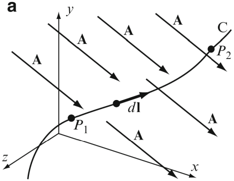
Integrais de linha [1]

- Para um campo vetorial **A** qualquer e para um caminho arbitrário C, definimos a integral de linha de **A** ao longo de C da seguinte maneira:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C |\mathbf{A}||d\mathbf{l}| \cos \theta_{\mathbf{A},d\mathbf{l}}. \tag{5}$$

- Caso a integral de linha seja especificada em termos de dois pontos, então reescrevemos a Eq. (5) deste modo:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} |\mathbf{A}||d\mathbf{l}| \cos \theta_{\mathbf{A},d\mathbf{l}}. \tag{6}$$

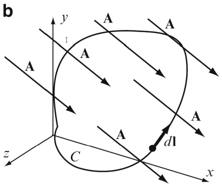


Integrais de linha fechada [1]

- Um caso particular muito importante é a integral de linha de um campo vetorial $\mathbf{A}$ ao longo de um caminho fechado:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C |\mathbf{A}||d\mathbf{l}| \cos\theta_{\mathbf{A},d\mathbf{l}}. \tag{7}$$

- Chamamos essa integral de **circulação** de **A** ao longo de C.
- A depender do campo vetorial, a circulação pode ser zero ou diferente de zero.

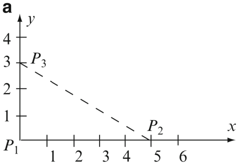


Campos conservativos vs não conservativos [1]

- Definimos dois tipos de campos vetoriais, de acordo com a sua circulação:
  1. Quando a circulação de um campo vetorial é nula para **qualquer** caminho fechado, dizemos que ele é conservativo (ou restaurativo).
  2. Quando a circulação de um campo vetorial é diferente de zero para **algum** caminho fechado, dizemos que ele é não conservativo (ou não restaurativo).
- No caso de um campo conservativo, o trabalho realizado por uma força ao longo de qualquer caminho fechado é nulo, ou seja, só depende dos pontos inicial e final.
- No caso de um campo não conservativo, o trabalho realizado por uma força ao longo de um caminho fechado depende da trajetória escolhida.

Exemplo 1.4.1 – Enunciado [1]

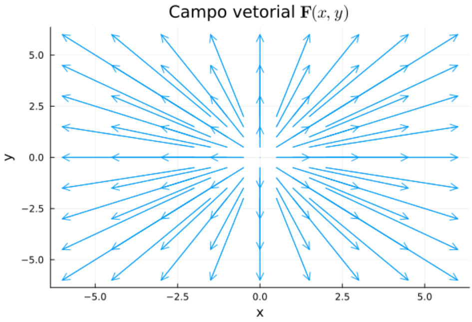
- Considere um campo vetorial definido por $\mathbf{F} = 2x\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}}$.
  (a) Trace um rascunho do campo vetorial no plano x-y.
  (b) Suponha que **F** represente uma força e calcule o trabalho realizado ao longo do caminho pontilhado entre os pontos $P_2(5{,}0)$ e $P_3(0{,}3)$.
  (c) Verifique se o trabalho depende do caminho entre os pontos P_2 e P_3.



Exemplo 1.4.1 – Solução [1]

(a) Na origem, o campo vetorial é nulo.

- Em qualquer outro ponto, o vetor possui componentes nas direções x e y.
- A magnitude depende da localização do campo, isto é, os vetores têm diferentes comprimentos para diferentes pontos.



Exemplo 1.4.1 – Solução (cont.) [1]

(b) Do ponto P_2 para P_3, o elemento de caminho vale $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}$, portanto a integração é dada por

$$\int_{P_2}^{P_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_2}^{P_3} (2x\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}) = \int_{P_2}^{P_3} (2xdx + 2ydy).$$

- Notamos que cada parcela do integrando depende de uma única variável, logo podemos separar a integração em duas partes (uma para x e outra para y):

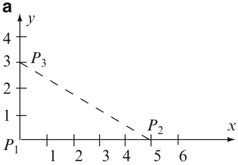
$$\int_{P_2}^{P_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_5^0 2xdx + \int_0^3 2ydy = -16 \text{ J}.$$

- Como o trabalho é negativo, isso significa que a energia potencial diminui, ou seja, o trabalho é realizado pelo campo.

Exemplo 1.4.1 – Solução (cont.) [1]

(c) Calculemos a integral de linha de P_2 até P_3 através de outro caminho.

- Especificamente, consideremos o caminho de P_2 a P_1 e, depois, de P_1 a P_3.
- Em cada um desses trechos, temos integrais separadas.



Exemplo 1.4.1 – Solução (cont.) [1]

- No caminho de P_2 até P_1, o diferencial de caminho vale $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}}$, consequentemente

$$\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_2}^{P_1} (2x\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{x}}) = \int_5^0 2x dx = -25 \text{ J}.$$

- No caminho de P_1 até P_3, o diferencial de caminho vale $d\mathbf{l} = dy\hat{\mathbf{y}}$ e, portanto,

$$\int_{P_1}^{P_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_3} (2x\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}}) \cdot (dy\hat{\mathbf{y}}) = \int_0^3 2y dy = 9 \text{ J}.$$

- Ao somar os dois resultados, obtemos o mesmo trabalho de antes.
- Isso significa que, no caminho fechado em questão, o trabalho realizado é nulo.
- Contudo, não sabemos ainda se o campo é conservativo, porque precisamos verificar se a integral de linha é nula para todos os caminhos.

Exemplo 1.4.2 – Enunciado [1]

- Considere um campo vetorial definido por $\mathbf{A} = xy\hat{\mathbf{x}} + (3x^2 + y)\hat{\mathbf{y}}$. Calcule a circulação desse campo vetorial ao longo do círculo unitário centrado na origem.

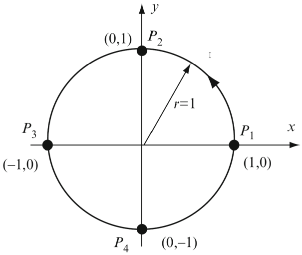
Exemplo 1.4.2 – Solução [1]

- Segmentamos o caminho de integração em quatro trechos: P_1 para P_2; P_2 para P_3; P_3 para P_4; e P_4 para P_1.
- No plano x-y, o diferencial de caminho vale $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}$, portanto o produto escalar no integrando é dado por

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = [xy\hat{\mathbf{x}} + (3x^2 + y)\hat{\mathbf{y}}] \cdot (dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}) = xydx + (3x^2 + y)dy.$$

- Com isso, calculamos a circulação assim:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C [xydx + (3x^2 + y)dy].$$



Exemplo 1.4.2 – Solução (cont.) [1]

- Para calcular a integral, queremos reescrever o integrando de modo que cada parcela dependa de uma só variável.
- Para tanto, usamos a equação do círculo unitário:

$$x = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}},\ y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

- Com as devidas substituições, temos:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \{x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx + [3(1 - y^2) + y] dy\}$$

- Agora, cada parcela do integrando depende de uma única variável.
- Na sequência, separamos a integral fechada em quatro segmentos:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_2}^{P_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_3}^{P_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_4}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Exemplo 1.4.2 – Solução (cont.) [1]

- Avaliamos cada integral separadamente:

$$
\begin{aligned}
\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{P_1}^{P_2} [x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + (3-3y^2+y)dy] \\
&= \int_{1}^{0} x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_{0}^{1} (3-3y^2+y)dy = \frac{13}{6}; \\
\int_{P_2}^{P_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{0}^{-1} x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_{1}^{0} (3-3y^2+y)dy = -\frac{13}{6}; \\
\int_{P_3}^{P_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{-1}^{0} x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_{0}^{-1} (3-3y^2+y)dy = -\frac{11}{6}; \\
\int_{P_4}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{0}^{1} x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_{-1}^{0} (3-3y^2+y)dy = \frac{11}{6};
\end{aligned}
$$

- Ao somar os quatro resultados acima, obtemos a circulação requerida:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Exercício 1.4.2 – Enunciado [1]

- Resolva o Exemplo 1.4.2 no sistema de coordenadas cilíndricas.

Exemplo 1.4.3 – Enunciado [1]

- Considere uma força definida por $\mathbf{F} = (2x - y)\hat{\mathbf{x}} + (x + y + z)\hat{\mathbf{y}} + (2z - x)\hat{\mathbf{z}}$ N. Calcule o trabalho necessário para mover uma partícula ao longo do círculo de 1 m de raio, com centro na origem. A trajetória se localiza no plano x-y, isto é, $z = 0$.

Exemplo 1.4.3 – Solução [1]

- Para simplificar os cálculos, transformaremos o problema para o sistema de coordenadas cilíndricas.
- Além disso, notamos que, no plano x-y, temos $z = 0$, logo

$$\mathbf{F}\Big|_{z=0} = (2x - y)\hat{\mathbf{x}} + (x + y)\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{z}} \text{ N}.$$

- Assim, a integral de caminho fechado é dada por

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_C [(2x - y)\hat{\mathbf{x}} + (x + y)\hat{\mathbf{y}} - x\hat{\mathbf{z}}] \cdot (dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}) \\ &= \oint_C [(2x - y)dx + (x + y)dy].\end{aligned}$$

- Para fazer a conversão para coordenadas cilíndricas, consideramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\phi = \cos\phi \Rightarrow dx = -\sin\phi d\phi; \\ y &= r\sin\phi = \sin\phi \Rightarrow dy = \cos\phi d\phi.\end{aligned}$$

Exemplo 1.4.3 – Solução (cont.) [1]

- Com essas substituições, calculamos assim a circulação do campo $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} [(2\cos\phi - \sin\phi)(-\sin\phi d\phi) + (\cos\phi + \sin\phi)\cos\phi d\phi] \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos\phi \sin\phi) d\phi \\
&= 2\pi \text{ J}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4.3 – Solução (cont.) [1]

- Com essas substituições, calculamos assim a circulação do campo $\mathbf{F}$:

$$
\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} [(2\cos\phi - \sin\phi)(-\sin\phi d\phi) + (\cos\phi + \sin\phi)\cos\phi d\phi] \\
&= \int_0^{2\pi} (1 - \cos\phi \sin\phi) d\phi \\
&= 2\pi \text{ J}.
\end{aligned}
$$

- Como a circulação é diferente de zero ao longo do círculo unitário centrado na origem, concluímos que o campo é não conservativo.

Exemplo 1.4.3 – Solução (cont.) [1]

- Com essas substituições, calculamos assim a circulação do campo $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} [(2\cos\phi - \sin\phi)(-\sin\phi d\phi) + (\cos\phi + \sin\phi)\cos\phi d\phi] \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos\phi\sin\phi) d\phi \\ &= 2\pi \text{ J}.\end{aligned}$$

- Como a circulação é diferente de zero ao longo do círculo unitário centrado na origem, concluímos que o campo é não conservativo.
- Em outras palavras, o trabalho realizado para deslocar a partícula de 0 até π é diferente do trabalho para deslocar a mesma partícula de 0 até $-\pi$.

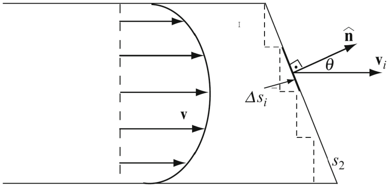
Integrais de superfície

Integrais de superfície [1]

- Consideremos o problema de calcular a taxa de fluxo (massa por unidade de tempo) de um fluido de velocidade variável (viscoso) através de uma superfície arbitrária, caso conheçamos o perfil da velocidade.
- Para tanto, precisamos calcular a seguinte integral:

$$Q = \iint_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds_2, \tag{8}$$

  em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície e ρ é a densidade de massa do fluido
- Assim, notamos que o que importa é a componente normal da velocidade do fluido.

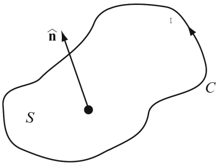


Integrais de superfície [1]

- Para um campo vetorial **A** e para uma superfície arbitrária S, definimos a integral de superfície de **A** em S da seguinte maneira:

$$Q = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \tag{9}$$

  em que $\hat{\mathbf{n}} ds = d\mathbf{s}$.
- A integral de superfície corresponde a um valor escalar.
- No contexto do eletromagnetismo, ela é chamada de fluxo.

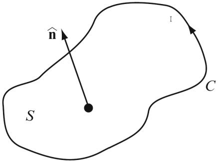


Integrais de superfície [1]

- Para um campo vetorial **A** e para uma superfície arbitrária S, definimos a integral de superfície de **A** em S da seguinte maneira:

$$Q = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \tag{9}$$

  em que $\hat{\mathbf{n}} ds = d\mathbf{s}$.
- A integral de superfície corresponde a um valor escalar.
- No contexto do eletromagnetismo, ela é chamada de fluxo.
- Para definir a direção positiva do vetor unitário, temos:
  1. Se a superfície for fechada, a direção positiva é aquela que aponta para fora do volume;
  2. Se a superfície for aberta, então consideramos a regra da mão de direita com base na orientação do contorno que envolve a superfície.



Integrais de superfície fechada [1]

- Para uma superfície fechada S, usamos uma notação especial para definir a integral de superfície fechada:

$$Q = \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \tag{10}$$

- A integral de superfície fechada define o fluxo total que passa através de uma dada superfície.

Exemplo 1.4.4 – Enunciado [1]

- Dado o vetor $\mathbf{A} = 2xz\hat{\mathbf{x}} + 2xz\hat{\mathbf{y}} - yz\hat{\mathbf{z}}$, calcule a sua integral de superfície fechada ao longo da superfície de um cubo, o qual ocupa a região definida por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

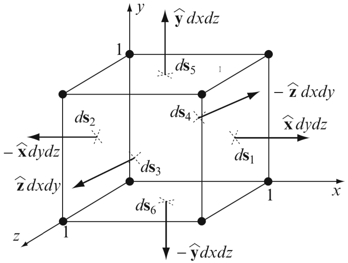
Exemplo 1.4.4 – Solução [1]

- Conforme a figura abaixo, temos seis elementos diferenciais de superfície:

$$d\mathbf{s}_1 = dydz\hat{\mathbf{x}},\ d\mathbf{s}_2 = -dydz\hat{\mathbf{x}}$$
$$d\mathbf{s}_3 = dxdy\hat{\mathbf{z}},\ d\mathbf{s}_4 = -dxdy\hat{\mathbf{z}}$$
$$d\mathbf{s}_5 = dxdz\hat{\mathbf{y}},\ d\mathbf{s}_6 = -dxdz\hat{\mathbf{y}}.$$

- Com isso, dividimos a integral de superfície em seis partes:

$$\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}_2 + \cdots + \iint_{S_6} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}_6.$$



Exemplo 1.4.4 – Solução (cont.) [1]

- Calculamos cada integral separadamente.
- No lado 1, temos

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1 = \iint_{S_1} (2xz\hat{\mathbf{x}} + 2xz\hat{\mathbf{y}} - yz\hat{\mathbf{z}}) \cdot (dydz\hat{\mathbf{x}})$$
$$= \iint_{S_1} 2xz\, dydz$$

- Para resolver essa integral, usamos o fato de que $x = 1$ no lado 1:

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1 = \int_0^1 \int_0^1 2z\, dzdy = 1.$$

- No lado 2, temos $d\mathbf{s}_2 = -d\mathbf{s}_1$ e $x = 0$:

$$\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_2 = -\iint_{S_2} 2xz\, dydz = 0.$$

Exemplo 1.4.4 – Solução (cont.) [1]

- No lado 3, observamos que $z = 1$, portanto

$$\iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_3 = \iint_{S_3} (2xz\hat{\mathbf{x}} + 2xz\hat{\mathbf{y}} - yz\hat{\mathbf{z}}) \cdot (dxdy\hat{\mathbf{z}})$$
$$= -\iint_{S_3} yz\,dxdy = -\int_0^1 \int_0^1 y\,dydx = -\frac{1}{2}$$

- No lado 4, temos $d\mathbf{s}_4 = -d\mathbf{s}_3$ e $z = 0$:

$$\iint_{S_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_4 = \iint_{S_4} yz\,dxdy = 0.$$

Exemplo 1.4.4 – Solução (cont.) [1]

- No lado 5, observamos que $y = 1$, portanto

$$\iint_{S_5} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_5 = \iint_{S_5} (2xz\hat{\mathbf{x}} + 2xz\hat{\mathbf{y}} - yz\hat{\mathbf{z}}) \cdot (dxdz\hat{\mathbf{y}})$$
$$= \iint_{S_5} 2xz\,dxdz = \int_0^1 \int_0^1 2xz\,dxdz = \frac{1}{2}$$

- No lado 6, temos $d\mathbf{s}_6 = -d\mathbf{s}_5$ e $y = 0$:

$$\iint_{S_6} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_6 = -\iint_{S_6} 2xz\,dxdz = -\frac{1}{2}.$$

- Ao somar as seis integrais, chegamos a este resultado:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 1.4.5 – Enunciado [1]

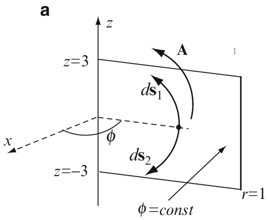
- Um vetor é dado em coordenadas cilíndricas por $\mathbf{A} = 5r\hat{\phi}$. Calcule o seu fluxo através da uma superfície definida por por $0 \leq r \leq 1$, $-3 \leq z \leq 3$ e ϕ constante.

Exemplo 1.4.5 – Solução [1]

- O fluxo a ser calculado corresponde à seguinte integral:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

- Conforme a figura abaixo, a superfície S se localiza no plano r-z e é perpendicular à direção ϕ.
- Assim, o diferencial de superfície é $d\mathbf{s}_1 = drdz\hat{\phi}$ ou $d\mathbf{s}_2 = -drdz\hat{\phi}$.



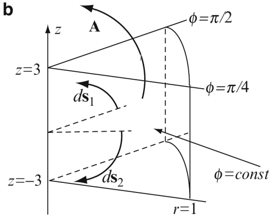
Exemplo 1.4.5 – Solução (cont.) [1]

- Para que o fluxo seja positivo, consideramos $d\mathbf{s}_1 = drdz\hat{\phi}$.
- Assim, o fluxo é calculado da seguinte maneira:

$$\Phi = \iint_{S_1} (5r\hat{\phi}) \cdot (drdz\hat{\phi}) = \iint_{S_1} 5rdrdz$$
$$= \int_0^1 \int_{-3}^3 5rdzdr = 15.$$

Exercício 1.4.5 – Enunciado [1]

- Considere a superfície mostrada na figura abaixo e calcule a integral de superfície fechada do campo vetorial $\mathbf{A} = 5r\hat{\phi}$[1].



[1] $\Phi = 0$.

Integrais de volume

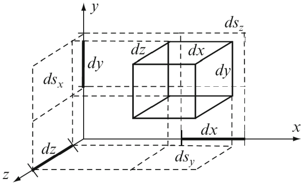
Tipos de integrais de volume

- Consideramos dois tipos de integrais de volume.
- No primeiro caso, temos a seguinte definição:

$$W = \iiint_V w \, dv, \tag{11}$$

em que w é uma função escalar que representa uma densidade volumétrica e dv é um elemento infinitesimal de volume.

- O resultado é uma quantidade escalar.
- Por exemplo, se w é uma densidade de energia, então W corresponde à energia total armazenada no volume V.
- No sistema de coordenadas cartesianas, $dv = dxdydz$.



Tipos de integrais de volume

- O segundo tipo de integral de volume é dado pela equação

$$\mathbf{P} = \iiint_V \mathbf{p}\, dv, \tag{12}$$

- O resultado é uma quantidade vetorial e a integral precisa ser calculada para cada coordenada separadamente.
- No sistema de coordenadas cartesianas, temos

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{x}} \iiint_V p_x\, dv + \hat{\mathbf{y}} \iiint_V p_y\, dv + \hat{\mathbf{z}} \iiint_V p_z\, dv. \tag{13}$$

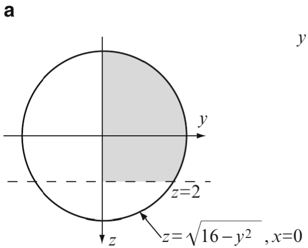
Exemplo 1.4.6 – Enunciado [1]

- Este exemplo aborda integrais de volume escalares.
  (a) Calcule o volume de uma seção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, a qual é delimitada por cortes dos planos $y = 0$, $z = 2$, $x = 1$ e $x = -1$.
  (b) Calcule o volume da seção da mesma esfera que é delimitada por cortes dos planos $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$, $\phi = 0$ e $\phi = \pi/3$.

Exemplo 1.4.6 – Solução [1]

(a) Para calcular a integral, precisamos dos limites de integração, os quais obtemos a partir das figuras a seguir.

- Com base nisso, fazemos estas considerações:
    - Os limites de integração em z são $z_1 = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e $z_2 = 2$;
    - Os limites de integração em y são $y_1 = 0$ e $y_2 = \sqrt{16 - x^2}$;
    - Os limites de integração em x são $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.



Exemplo 1.4.6 – Solução (cont.) [1]

- Utilizamos o sistema de coordenadas cartesianas porque os planos de corte são paralelos a seus eixos.
- Assim, temos $dv = dxdydz$ e

$$
\begin{aligned}
v = \iiint_V dv &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{2} dzdydx \\
&= 2\sqrt{15} + 32 \operatorname{arcsen}(0{,}25) + \pi \left(8 - \frac{1}{6}\right) \approx 40{,}44.
\end{aligned}
$$

- Portanto, se as dimensões forem dadas em m, então o volume será de 40,44 m^3.

Exemplo 1.4.6 – Solução (cont.) [1]

(b) Agora, consideramos o sistema de coordenadas esféricas, pois os planos de corte são paralelos a seus eixos.

- Assim, temos $dv = R^2 \operatorname{sen}\theta\, dR d\theta d\phi$.
- Os limites de integração são $0 \leq R \leq 4$, $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$ e $0 \leq \phi \leq \pi/3$, portanto

$$v = \iiint_V dv = \int_0^4 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_0^{\pi/3} R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\phi d\theta dR \approx 8{,}177.$$

- Portanto, se as dimensões forem dadas em m, então o volume será de 8,177 m^3.

Exemplo 1.4.7 – Enunciado [1]

- Considere uma função vetorial dada em coordenadas cilíndricas por $\mathbf{A} = r\,\hat{\mathbf{r}} + 3\,\hat{\mathbf{z}}$, o que pode representar uma distribuição de densidade de força ou de momento linear em um volume V. Calcule a contribuição total dessa função vetorial em um cilindro de raio a e altura b, centrado no eixo z e acima do plano x-y.

Exemplo 1.4.7 – Solução [1]

- Chamamos a contribuição total da função vetorial de $\mathbf{F}$ e a calculamos por meio de uma integral de volume:

$$\mathbf{F} = \iiint_V \mathbf{A}\, dv = \iiint_V (r\,\hat{\mathbf{r}} + 3\,\hat{\mathbf{z}})\, dv = \iiint_V r\,\hat{\mathbf{r}}\, dv + 3\hat{\mathbf{z}} \iiint_V dv.$$

- Notamos que o vetor unitário $\hat{\mathbf{z}}$ é constante e pode ser retirado do sinal de integral.
- No entanto, o vetor unitário $\hat{\mathbf{r}}$ depende de ϕ e precisa antes ser convertido para coordenadas cartesianas.
- Para tanto, lembramos que $\hat{\mathbf{r}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{y}}$

Exemplo 1.4.7 – Solução [1]

- Com base em tais informações, temos:

$$\mathbf{F} = \iiint_V r(\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{y}})\,dv + 3\hat{\mathbf{z}}\iiint_V dv$$
$$= \hat{\mathbf{x}}\iiint_V r\cos\phi\,dv + \hat{\mathbf{y}}\iiint_V r\operatorname{sen}\phi\,dv + 3\hat{\mathbf{z}}\iiint_V dv.$$

- Além disso, consideramos que, em coordenadas cilíndricas, temos $dv = r\,drd\phi dz$:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\iiint_V r\cos\phi(r\,drd\phi dz) + \hat{\mathbf{y}}\iiint_V r\operatorname{sen}\phi(r\,drd\phi dz)$$
$$+ 3\hat{\mathbf{z}}\iiint_V r\,drd\phi dz$$
$$= \hat{\mathbf{x}}\iiint_V r^2\cos\phi\,drd\phi dz + \hat{\mathbf{y}}\iiint_V r^2\operatorname{sen}\phi\,drd\phi dz$$
$$+ 3\hat{\mathbf{z}}\iiint_V r\,drd\phi dz = 3\pi a^2 b\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Síntese

Considerações finais

- Uma integral de linha produz uma grandeza escalar.
- A integral de linha, no caso em que o campo vetorial é uma força, representa o trabalho realizado para produzir movimento.
- A integral de linha em um caminho fechado é a circulação de um campo vetorial.
- Uma integral de superfície se relaciona ao conceito de fluxo de um campo vetorial.
- Para determinar o vetor unitário de uma superfície fechada, usamos a regra da mão direita.
- As integrais de volume se aplicam tanto a campos escalares quanto a campos vetoriais.

Referências

Referências I

[1] IDA, Nathan. *Engineering Electromagnetics*. 3. ed. Suíça: Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-052-178-988-2.