Análise em Regime Estacionário Senoidal

Os circuitos acionados por fontes de tensão ou de corrente senoidais são chamados circuitos de corrente alternada (CA). Uma corrente/tensão senoidal é normalmente conhecida como corrente/tensão alternada (CA).

Estamos interessados em senoides por uma série de razões. Primeiramente, um sinal senoidal é fácil de ser gerado e transmitido, pois é a forma de tensão gerada ao redor do mundo e fornecida às residências, às fábricas, aos laboratórios e assim por diante, como também é a forma dominante do sinal nos segmentos de energia elétrica e comunicação. Além disso, por meio da análise de Fourier, qualquer sinal periódico prático pode ser representado por uma soma de senoides. Finalmente, uma senoide é fácil de ser tratada matematicamente. Por estas e outras razões, ela é uma função extremamente importante na análise de circuitos.

Uma função de alimentação senoidal produz tanto uma resposta transiente como uma resposta em regime estacionário. A resposta transiente se extingue com o tempo de modo a permanecer apenas a parcela correspondente à resposta em regime estacionário. Quando a resposta transiente se torna desprezível em relação à resposta em regime estacionário, dizemos que o circuito está operando em regime estacionário senoidal.

Senoides

Consideremos a tensão senoidal

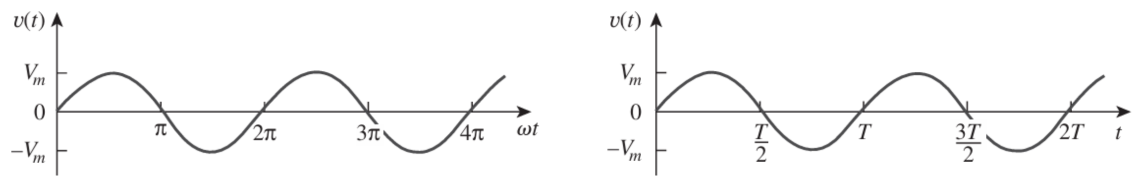
$$v(t) = V_m sen(\omega t + \emptyset)$$

em que V_m é a amplitude, ω é a frequência angular em radianos por segundo, $\emptyset$ é a fase da e $\omega t + \emptyset$ é o argumento da senoide. Na figura a seguir, podemos ver a senoide de função de t e ωt. Fica evidente que a senoide se repete a cada T segundos; portanto, T é chamado período da senoide

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

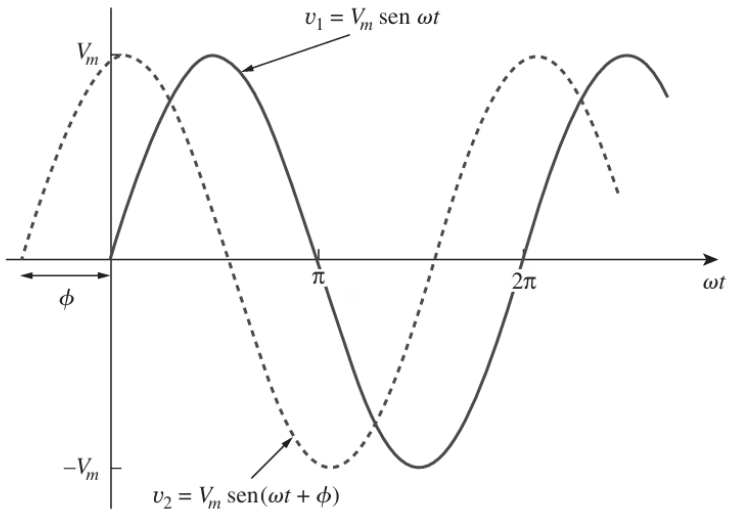
O inverso desse valor é o número de ciclos por segundo, conhecido como frequência cíclica f da senoide

$$f = \frac{1}{T}$$



Examinemos as duas senoides a seguir

$$v_1(t) = V_m sen(\omega t) \text{ e } v_2(t) = V_m sen(\omega t + \emptyset)$$



O ponto de partida de v_2 nessa figura ocorre primeiro no tempo. Consequentemente, dizemos que v_2 está avançada em relação a v_1 em f, ou que v_1 está atrasada em relação a v_2 em $\emptyset$. Se $\emptyset \neq 0$, também podemos dizer que v_1 e v_2 estão fora de fase. Se $\emptyset = 0$, então v_1 e v_2 estão em fase; elas atingem seus mínimos e máximos exatamente ao mesmo tempo.

Exemplo 01

Determine a amplitude, a fase, o período e a frequência da senoide

$$v(t) = 12\cos\,(50t + 10^{o})$$

Solução: Amplitude igual a 12, fase igual a 10^{o}, $\omega = 50$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = 0{,}1257$ s e $f = \frac{1}{T} = 7{,}958$ Hz.

Exemplo 02

Determine a amplitude, a fase, o período e a frequência da senoide

$$v(t) = 30sen\,(4\pi t - 75^{o})$$

Solução: Amplitude igual a 30, fase igual a -75^{o}, $\omega = 12{,}57$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{12{,}57} = 0{,}5$ s e $f = 2$ Hz.

Exemplo 03

Calcule o ângulo de fase entre $v_1(t) = -10\cos(\omega t + 50^o)$ e $v_2(t) = 12sen(\omega t - 10^o)$. Indique qual senoide está avançada.

Solução: $v_1(t) = -10\cos(\omega t + 50^o) = 10\cos(\omega t + 50^o).\cos(-180^o) = 10\cos(\omega t + 50^o - 180^o) = 10\cos(\omega t - 130^o)$

$$v_2(t) = 12sen(\omega t - 10^o) = 12\cos(\omega t - 10^o - 90^o) = 12\cos(\omega t - 100^o)$$

A diferença de fase entre $v_1(t)$ e $v_2(t)$ de 30^o e $v_2(t)$ está avançada em relação a $v_1(t)$ em 30º.

Exemplo 04

Determine o ângulo de fase entre $i_1(t) = -4\,\mathrm{sen}(377t + 55^o)$ e $i_2(t) = 5\cos(377t - 65^o)$. A corrente $i_1(t)$ está adiantada ou atrasada em relação a $i_2(t)$?.

Solução: $i_1(t) = -4\,\mathrm{sen}(377t + 55^o) = 4\,\mathrm{sen}(377t + 55^o)\cos(180^o) = 4\,\mathrm{sen}(377t + 55^o + 180^o) = 4\,\mathrm{sen}(377t + 235^o)$

$$i_2(t) = 5\cos(377t - 65^o) = 5\,\mathrm{sen}(377t - 65^o + 90^o) = 5\,\mathrm{sen}(377t + 25^o)$$

A diferença de fase entre $i_1(t)$ e $i_2(t)$ de 210^o e $i_1(t)$ está avançada em relação a $i_2(t)$.

Fasores

Fasor é um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senoide.

Um número complexo z pode ser escrito na forma retangular como

$$z = x + jy$$

onde $j = \sqrt{-1}$; x é a parte real de z; y é a parte imaginária de z. O número complexo z também pode ser escrito na forma polar ou exponencial, como segue

$$z = r\angle\phi = re^{j\emptyset}$$

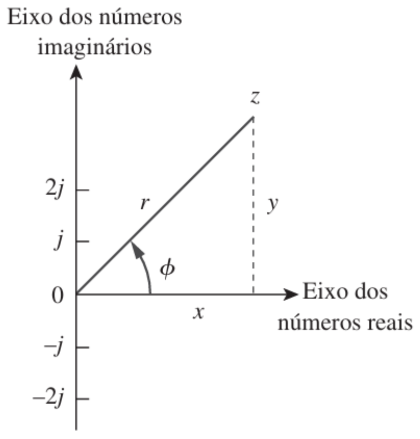
onde r é a magnitude de z e ϕ é a fase de z. Nota-se que z pode ser representado de três maneiras:

Forma retangular $z = x + jx$

Forma polar $z = r\angle\phi$

Forma exponencial $z = re^{j\emptyset}$

A relação entre a forma retangular e a forma polar é mostrada na Figura a seguir, onde o eixo x representa a parte real e o eixo y, a parte imaginária de um número complexo.



Dados x e y, podemos obter r e ϕ como segue

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\emptyset = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Por outro lado, se conhecermos r e ϕ, podemos obter x e y como

$$x = r\cos\emptyset$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\emptyset$$

Portanto, z poderia ser escrito como indicado a seguir

$$z = x + jy = \ r\angle\phi = \ r\cos\emptyset + jr\,\mathrm{sen}\,\emptyset = re^{j\emptyset}$$

A adição e a subtração de números complexos são mais bem realizadas na forma retangular; a multiplicação e a divisão são mais bem efetuadas na forma polar. Dados os números complexos

$$z = x + jy = \ r\angle\phi$$

$$z_1 = x_1 + jy_1 = \ r_1\angle\phi_1$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = \ r_2\angle\phi_2$$

As seguintes operações são importantes:

Adição: $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$

Subtração: $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2)$

Multiplicação: $z_1 z_2 = r_1 r_2\angle(\phi_1 + \phi_2)$

Divisão: $z_1/z_2 = r_1/r_2\angle(\phi_1 - \phi_2)$

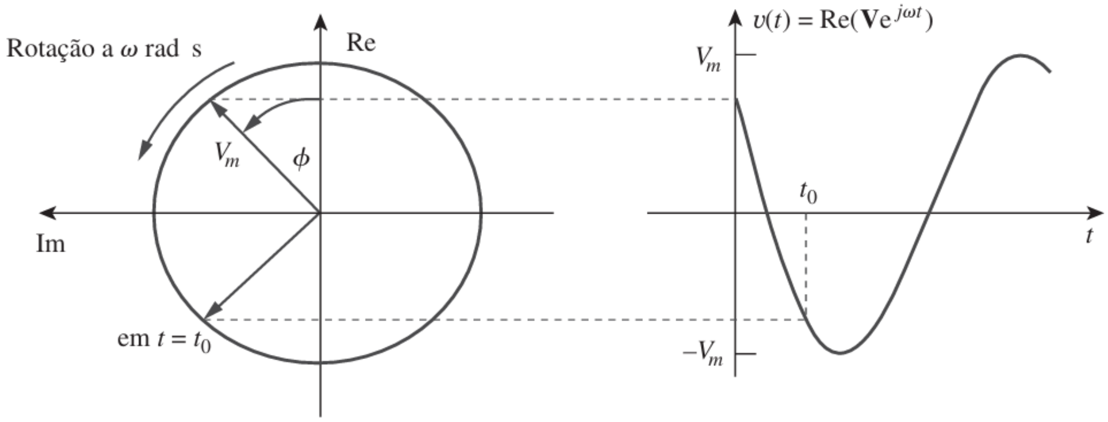
Inverso: $1/z = 1/r\angle(-\phi)$

Raiz quadrada: $\sqrt{z} = \sqrt{r}\angle(\phi/2)$

Dada a senoide $v(t) = V_m\cos(\omega\, t + \emptyset)$. Essa senoide também pode ser expressa como:

$$v(t) = \Re e\left(\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right)$$

Onde $\boldsymbol{V} = V_m e^{j\emptyset}$ é a representação fasorial da senoide $v(t)$. Uma maneira de examinar essa senoide é considerar o gráfico do seno $\boldsymbol{V}e^{j\omega} = V_m e^{j\emptyset}e^{j\omega t}$ no plano complexo. medida que o tempo cresce, esse seno gira em um círculo de raio Vm em uma velocidade angular ω no sentido anti-horário, como mostrado na Figura a seguir. Podemos considerar $v(t)$ como a projeção do seno fasorial $\boldsymbol{V}e^{j\omega t}$ no eixo real.



Representação do domínio do tempo	Representação no domínio dos fasores
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi - 90°$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta - 90°$

A derivada de $v(t) = \Re e\left(\boldsymbol{V}e^{j\omega}\right)$ é

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\Re e\left(\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right)}{dt} = \frac{d(V_m \cos(\omega\, t + \emptyset))}{dt} = -\omega V_m \operatorname{sen}(\omega\, t + \emptyset)$$
$$= -\omega V_m \operatorname{sen}(\omega\, t + \emptyset) = \omega V_m \operatorname{sen}(\omega\, t + \emptyset) \operatorname{sen}(-90^{\mathrm{o}})$$
$$= \omega V_m \cos(\omega\, t + \emptyset + 90^{\mathrm{o}})$$

A derivada de $v(t)$ é transformada para o domínio dos fasores como

$$\omega V_m e^{j(\emptyset + 90^{\mathrm{o}})} = j\omega \boldsymbol{V}$$

Ou seja,

$$\frac{dv(t)}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad j\omega \boldsymbol{V}$$

(domínio do tempo) **(domínio dos fasores)**

De forma similar, a integral de $v(t)$ é transformada para o domínio dos fasores como $\boldsymbol{V}/j\omega$

$$\int v(t)dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{V}/j\omega$$

(domínio do tempo) **(domínio dos fasores)**

Além da diferenciação e integração do tempo, outro importante emprego dos fasores é na adição de senoides de mesma frequência.

As diferenças entre $v(t)$ e devem ser enfatizadas.

1. $v(t)$ é a representação instantânea ou no domínio do tempo, enquanto $\boldsymbol{V}$ é a representação em termos de frequência ou no domínio dos fasores.
2. $v(t)$ é dependente do tempo, enquanto $\boldsymbol{V}$ não é.
3. $v(t)$ é sempre real sem nenhum termo complexo, enquanto $\boldsymbol{V}$ geralmente é complexo.

Finalmente, devemos ter em mente que a análise de fasores se aplica apenas quando a frequência é constante; e também na manipulação de dois ou mais sinais senoidais apenas se eles tiverem a mesma frequência.

Exemplo 05

Calcule os números complexos a seguir:

a) $(40\angle 50^o + 20\angle{-30^o})^{1/2}$

b) $\frac{10\angle{-30^o}+(3-4j)}{(2+4j)(3-5j)^*}$

Solução:

a) $40\angle 50^o = 40\cos 50^o + j40\,\text{sen}\,50^o = 25{,}71 + j30{,}64$

$$20\angle{-30^o} = 20\cos(-30^o) + j20\,\text{sen}(-30^o) = 17{,}32 - j10$$

$$40\angle 50^o + 20\angle{-30^o} = 43{,}03 + j20{,}64 = 47{,}72\angle 25{,}63^o$$

$$(40\angle 50^o + 20\angle{-30^o})^{1/2} = 6{,}91\angle 12{,}81^o$$

b) $10\angle - 30^o = 8{,}66 - j5$

$$(3-5j)^* = 3 + j5 = 5{,}83\angle 59{,}04^o$$

$$(2+4j) = 4{,}47\angle 63{,}43^{o}$$

$$8{,}66 - j5 + (3-4j) = 11{,}66 - 9j = 14{,}73\angle{-37{,}66^{o}}$$

$$(2+4j)(3-5j)^{*} = (4{,}47\angle{-63{,}43^{o}})\,(5{,}83\angle 59{,}04^{o}) = 26{,}06\angle 122{,}47^{o}$$

$$\begin{aligned}\frac{10\angle-30^{o}+(3-4j)}{(2+4j)(3-5j)^{*}} &= \frac{8{,}66-j5+(3-4j)}{(4{,}47\angle 63{,}43^{o})(5{,}83\angle 59{,}04^{o})}\\ &= \frac{11{,}66-9j}{(4{,}47\angle 63{,}43^{o})(5{,}83\angle 59{,}04^{o})} = \frac{14{,}73\angle{-37{,}66^{o}}}{26{,}06\angle 122{,}47^{o}}\\ &= 0{,}565\angle{-160{,}13^{o}}\end{aligned}$$

Exemplo 06

Calcule os números complexos a seguir:

a) $[(5+j2)(-1+j4) - 5\angle 60^{o}]^{*}$
b) $\frac{10+j5+3\angle 40^{o}}{-3+j4} + 10\angle 30^{o} + j5$

Solução:

a) $[(5+j2)(-1+j4) - 5\angle 60^{o}]^{*} = [(5{,}39\angle 21{,}80^{o})(4{,}12\angle 104{,}04^{o}) - 5\angle 60^{o}]^{*} = [(22{,}21\angle 125{,}84^{o}) - 5\angle 60^{o}]^{*} = [-13 + j18 - 2{,}5 - j4{,}33]^{*} = [-15{,}5 + j13{,}67]^{*} = -15{,}5 - j13{,}67$
b) $\frac{10+j5+3\angle 40^{o}}{-3+j4} + 10\angle 30^{o} + j5 = \frac{10+j5+2{,}3+j1{,}93}{-3+j4} + 8{,}66 + j5 + j5 = \frac{12{,}3+j6{,}93}{-3+j4} + 8{,}66 + j10 = \frac{14{,}12\angle 29{,}4^{o}}{5\angle 126{,}87^{o}} + 8{,}66 + j10 = 2{,}8\angle{-97{,}47^{o}} + 8{,}66 + j10 = -0{,}36 - j2{,}78 + 8{,}66 + j10 = 8{,}3 + j7{,}22$

Exemplo 07

Transforme as senoides seguintes em fasores:

a) $i = 6\cos(50t - 40^{o})$ A
b) $v = -4\,\mathrm{sen}(30t{+}50^{o})$ V

Solução:

a) $\mathbf{I} = 6\angle-40^{o}$ A
b) $v = -4\,\mathrm{sen}(30t{+}50^{o}) = 4\,\mathrm{sen}(30t{+}50^{o})\,\mathrm{sen}(-90^{o}) = 4\cos(30t{+}50^{o} + 90^{o}) = 4\cos(30t{+}140^{o})$

$\mathbf{V} = 4\angle 140^{\text{o}}$ V

Exemplo 08

Transforme as senoides seguintes em fasores:

a) $v = 7\cos(2t + 40^{\text{o}})$ V
b) $i = -4\,\text{sen}(10t{+}10^{\text{o}})$ A

Solução:

c) $\mathbf{V} = 7\angle 40^{\text{o}}$ V
d) $i = -4\,\text{sen}(10t{+}10^{\text{o}}) = 4\,\text{sen}(10t{+}10^{\text{o}})\,\text{sen}(-90^{\text{o}}) = 4\cos(10t{+}10^{\text{o}} + 90^{\text{o}}) = 4\cos(10t{+}100^{\text{o}})$
$\mathbf{I} = 4\angle 100^{\text{o}}$ A

Exemplo 09

Determine as senoides representadas pelos fasores seguintes:

a) $\mathbf{I} = -3 + j4$ A
b) $\mathbf{V} = j8e^{-j20^{\text{o}}}$ V

Solução:

a) $\mathbf{I} = -3 + j4 = 5\angle 126{,}87^{\text{o}}$

$i(t) = 5\cos(\omega t + 126{,}87^{\text{o}})$ A

b) $\mathbf{V} = j8e^{-j20^{\text{o}}} = e^{j90^{\text{o}}}8e^{-j20^{\text{o}}} = 8e^{j70^{\text{o}}}$

$v(t) = 8\cos(\omega t + 70^{\text{o}})$ A

Exemplo 10

Determine as senoides representadas pelos fasores seguintes:

a) $\mathbf{V} = -25\angle 40^{o}$ V
b) $\mathbf{I} = j(12 - j5)$ A

Solução:

a) $\mathbf{V} = -25\angle 40^{o} = 25\angle(40^{o} \pm 180^{o}) = 25\angle(220^{o}) = 25\angle(-140^{o})$

$v(t) = 25\cos(\omega t + 220^{o}) = 25\cos(\omega t + 140^{o})$ V

b) $\mathbf{I} = j(12 - j5) = e^{j90^{o}} 13e^{-j22{,}62^{o}} = e^{j90^{o}} 8e^{-j22^{o}} = 13e^{j67{,}38^{o}}$

$i(t) = 13\cos(\omega t + 67{,}38^{o})$ A

Exemplo 11

Dados $i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30^{o})$ A e $i_2(t) = 5\,\text{sen}(\omega t + 20^{o})$ A, determine sua soma.

Solução:

$$i_2(t) = 5\cos(\omega t + 20^{o} - 90^{o}) = 5\cos(\omega t - 70^{o})$$

$\mathbf{I}_1 = 4\angle 30^{o}$ e $\mathbf{I}_2 = 5\angle{-70^{o}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 &= 4\angle 30^{o} + 5\angle{-70^{o}} = (3{,}464 + j2) + (1{,}71 - j4{,}698) = 5{,}174 - j2{,}698 \\ &= 5{,}835\angle - 27{,}54^{o}\end{aligned}$$

$i(t) = 5{,}835\cos(\omega t - 27{,}54^{o})$ A

Exemplo 12

Dados $v_1(t) = -10\,\text{sen}(\omega t - 30^{o})$ V e $v_2(t) = 20\cos(\omega t + 45^{o})$ V, determine sua soma.

Solução:

$$v_1(t) = 10\,\text{sen}(\omega t - 30^{\text{o}})\,\text{sen}(-90^{\text{o}}) = 10\cos(\omega t - 30^{\text{o}} + 90^{\text{o}})$$
$$= 10\cos(\omega t + 60^{\text{o}})$$

$\mathbf{V}_1 = 10\angle 60^{\text{o}}$ e $\mathbf{V}_2 = 20\angle 45^{\text{o}}$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 10\angle 60^{\text{o}} + 20\angle 45^{\text{o}} = (5 + j8{,}66) + (14{,}14 + 14{,}14j) = 19{,}14 + j22{,}8$$
$$= 29{,}77\angle 49{,}98^{\text{o}}$$

$v(t) = 29{,}77\cos(\omega t + 49{,}98^{\text{o}})$ V

Exemplo 13

Usando o método de fasores, determine a corrente $i(t)$ em um circuito descrito pela equação diferencial

$$4i + 8\int i dt - 3\frac{di}{dt} = 50\cos(2t + 75^{\text{o}})$$

Solução:

$$4\mathbf{I} + 8\frac{\mathbf{I}}{j\omega} - 3j\omega\mathbf{I} = 50\angle 75^{\text{o}}$$

$$\mathbf{I}\left(4 + \frac{8}{j\omega} - 3j\omega\right) = 50\angle 75^{\text{o}}$$

Nesse caso $\omega = 2$

$$4 + \frac{4}{j} - 6j = 4 - j4 - 6j = 4 - j10 = 10{,}77\angle{-68{,}2^{\text{o}}}$$

$$\mathbf{I}(10{,}77\angle{-68{,}2^{\text{o}}}) = 50\angle 75^{\text{o}}$$

$$\mathbf{I} = \frac{50\angle 75^{\text{o}}}{10{,}77\angle{-68{,}2^{\text{o}}}} = 4{,}64\angle 143{,}2^{\text{o}}$$

$$i(t) = 4{,}64\cos(\omega t + 143{,}2^{\text{o}})\text{ A}$$

Exemplo 14

Determine a tensão $v(t)$ em um circuito descrito pela equação integro-diferencial a seguir

$$2\frac{dv}{dt} + 5v + 10\int vdt = 50\cos(5t - 30^o)$$

Solução:

$$2j\omega\mathbf{V} + 5\mathbf{V} + 10\frac{\mathbf{V}}{j\omega} = 50\angle{-30^o}$$

$$\mathbf{V}\left(2j\omega + 5 + \frac{10}{j\omega}\right) = 50\angle{-30^o}$$

Nesse caso $\omega = 5$

$$10j + 5 + \frac{2}{j} = 10j + 5 - j2 = 5 + j8 = 9{,}43\angle 58^o$$

$$\mathbf{V}(9{,}43\angle 58^o) = 50\angle{-30^o}$$

$$\mathbf{V} = \frac{50\angle{-30^o}}{9{,}43\angle 58^o} = 5{,}3\angle 88^o$$

$$v(t) = 5{,}3\cos(\omega t - 88^o)\ \mathrm{V}$$