Sistemas de coordenadas

Unidade 1/4

Prof. Carlyle Câmara Santos Júnior

Instituto Federal de Santa Catarina – Campus São José
Engenharia de Telecomunicações
Eletromagnetismo (EMG129005) – 5ª Fase

carlyle.camara@ifsc.edu.br

19 de agosto de 2025

Roteiro

Observações gerais

Conteúdos e objetivos da aula [1]

- Conteúdo:
  1. Sistemas de coordenadas cartesianas.
  2. Sistemas de coordenadas cilíndricas.
  3. Sistemas de coordenadas esféricas.
- Objetivo:
  1. Compreender a representação de pontos do espaço em diferentes sistemas de coordenadas.
  2. Realizar a conversão de vetores entre diferentes sistemas de coordenadas.

Conceitos básicos

Definição de campos [1]

- A rigor, definimos um campo matematicamente como uma função de uma variável vetorial:
  1. Se o valor dessa função for um escalar, então o campo será escalar;
  2. Se o valor dessa função for um vetor, então o campo será vetorial.
- De maneira simplificada, podemos entender um campo como uma distribuição no espaço de qualquer grandeza.
- Um campo pode ser definido em todo o espaço ou apenas em um subconjunto dele.

Definição de campos [1]

- A rigor, definimos um campo matematicamente como uma função de uma variável vetorial:
  1. Se o valor dessa função for um escalar, então o campo será escalar;
  2. Se o valor dessa função for um vetor, então o campo será vetorial.
- De maneira simplificada, podemos entender um campo como uma distribuição no espaço de qualquer grandeza.
- Um campo pode ser definido em todo o espaço ou apenas em um subconjunto dele.
- Por exemplo, um mapa topográfico mostra a altitude de cada ponto em determinada região.

Definição de campos [1]

- A rigor, definimos um campo matematicamente como uma função de uma variável vetorial:
  1. Se o valor dessa função for um escalar, então o campo será escalar;
  2. Se o valor dessa função for um vetor, então o campo será vetorial.
- De maneira simplificada, podemos entender um campo como uma distribuição no espaço de qualquer grandeza.
- Um campo pode ser definido em todo o espaço ou apenas em um subconjunto dele.
- Por exemplo, um mapa topográfico mostra a altitude de cada ponto em determinada região.
- Se conhecermos a velocidade do vento em cada ponto no mar, então teremos um campo de velocidade.

Definição de campos [1]

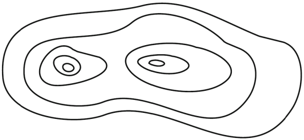
- A rigor, definimos um campo matematicamente como uma função de uma variável vetorial:
  1. Se o valor dessa função for um escalar, então o campo será escalar;
  2. Se o valor dessa função for um vetor, então o campo será vetorial.
- De maneira simplificada, podemos entender um campo como uma distribuição no espaço de qualquer grandeza.
- Um campo pode ser definido em todo o espaço ou apenas em um subconjunto dele.
- Por exemplo, um mapa topográfico mostra a altitude de cada ponto em determinada região.
- Se conhecermos a velocidade do vento em cada ponto no mar, então teremos um campo de velocidade.
- O eletromagnetismo se baseia inteiramente na relação entre os campos elétrico e magnético e como eles interagem com os materiais.

Campos escalares [1]

- Um campo escalar é uma função de uma variável vetorial que produz uma saída escalar.
- Por exemplo, dado um ponto qualquer do espaço, (x, y, z), a função de valor

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 \tag{1}$$

  define um campo escalar.
- Além disso, a temperatura, o potencial elétrico, a pressão atmosférica são campos escalares.
- Campos escalares podem ser variantes no tempo ou independentes do tempo.
- Na figura abaixo, visualizamos um mapa topográfico no qual as linhas de nível representam pontos de mesma altitude.

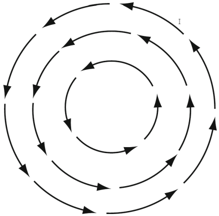


Campos vetoriais [1]

- Um campo vetorial é uma função de uma variável vetorial que produz uma saída vetorial.
- Por exemplo, dado um ponto qualquer do espaço, (x, y, z), a função de valor

$$\mathbf{F}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}} \tag{2}$$

define um campo vetorial estático.
- Podemos obter um campo vetorial a partir de um campo escalar e vice-versa.
- Na figura abaixo, visualizamos a velocidade do vento em um furacão.

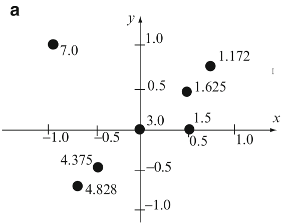


Exemplo 1.3.1 – Enunciado [1]

- Considere o campo escalar definido por $\psi(x, y, z) = x^2y - 3x + 3$. Obtenha uma representação gráfica desse campo na região $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

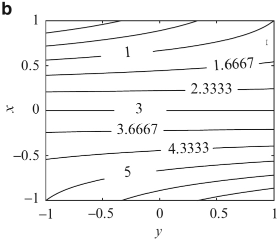
Exemplo 1.3.1 – Solução [1]

- Em uma primeira representação gráfica do campo $\psi(x, y, z) = x^2y - 3x + 3$, indicamos alguns valores da função para um certo conjunto de pares ordenas (x, y).
- Por ser mais simples, essa forma de gráfico não fornece uma visão completa da grandeza em questão.



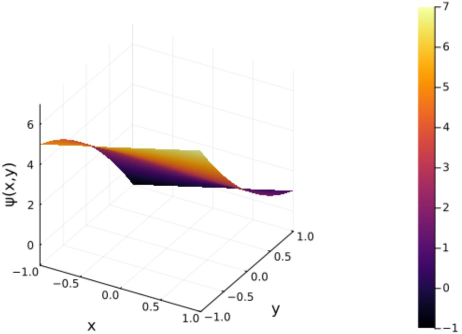
Exemplo 1.3.1 – Solução (cont.) [1]

- Outra opção de representação gráfica do campo $\psi(x, y, z) = x^2y - 3x + 3$ consiste no uso de linhas de contorno constante, em que cada linha conecta pontos com o mesmo valor da função.
- Em outras palavras, cada linha corresponde ao conjunto dos pontos para os quais $\psi(x, y, z) = c$, em que c é uma constante.
- Trata-se de um gráfico mais informativo do que a primeira alternativa.



Exemplo 1.3.1 – Solução (cont.) [1]

- Por fim, podemos obter um gráfico tridimensional ao mostrar o valor do campo acima de um plano para todos os pares ordenados (x, y).



Exercício 1.3.2 – Enunciado [1]

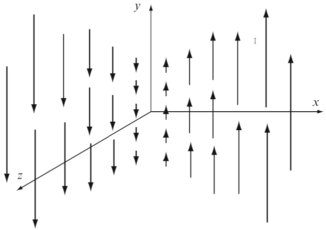
- Através de uma simulação de computador, obtenha uma representação gráfica do campo escalar $\psi(x, y, z) = xy^2 + 5x^2 - 3y - 7$ na região $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

Exemplo 1.3.2 – Enunciado [1]

- Obtenha uma representação gráfica do campo vetorial $\mathbf{A} = x\hat{\mathbf{y}}$.

Exemplo 1.3.2 – Solução [1]

- Para um campo vetorial, precisamos exibir tanto a magnitude quanto a direção do vetor para diferentes pontos no espaço.
- O comprimento de cada seta é um indicativo da magnitude do campo.
- No presente caso, a magnitude do campo é independente de y e z.
- Na figura abaixo, temos um exemplo de gráfico do campo vetorial no plano $z = 0$.



Exercício 1.3.2 – Enunciado [1]

- Considere a região definida por $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ e obtenha uma representação gráfica dos seguintes campos vetoriais
  (a) $\mathbf{A} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$.
  (b) $\mathbf{B} = x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}$.

Sistemas de coordenadas

Sistemas de coordenadas [1]

- Consideraremos três sistemas de coordenadas:
  1. Sistema de coordenadas cartesianas;
  2. Sistema de coordenadas cilíndricas;
  3. Sistema de coordenadas esféricas.
- Em determinado problema, escolhemos um sistema de coordenadas em detrimento dos outros por questão de conveniência.
- Afinal, é mais fácil, por exemplo, representar um cubo em um sistema de coordenadas cartesianas[1].
- Por outro lado, uma bola é mais facilmente representada em um sistema de coordenadas esféricas.

[1] Também chamado de sistema de coordenadas retangulares

Sistema de coordenadas cartesianas [1]

- No sistema de coordenadas cartesianas, escrevemos um vetor **A** que conecta dois pontos genéricos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ assim:

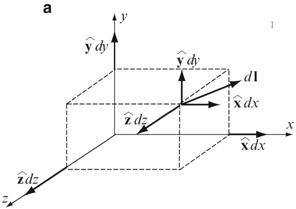
$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + A_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + A_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}, \qquad (3)$$

em que A_x, A_y e A_z são as projeções do vetor sobre os eixos x, y e z, respectivamente.

Elementos diferenciais [1]

- No sistema de coordenadas cartesianas, conforme figura à esquerda, definimos o seguinte diferencial de comprimento:

$$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}. \tag{4}$$



Elementos diferenciais [1]

- No sistema de coordenadas cartesianas, conforme figura à esquerda, definimos o seguinte diferencial de comprimento:

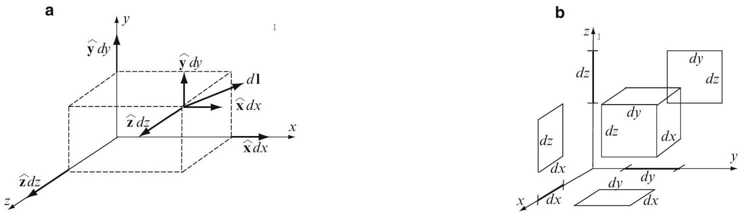
$$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}. \tag{4}$$

- Também definimos elementos diferenciais de superfície:

$$ds_x = dydz,\ ds_y = dxdz,\ ds_z = dxdy. \tag{5}$$

- Além disso, definimos um elemento diferencial de volume:

$$dv = dxdydz. \tag{6}$$



Direção de uma superfície [1]

- Um elemento diferencial de superfície é um vetor:

$$d\mathbf{s} = ds\hat{\mathbf{n}}, \tag{7}$$

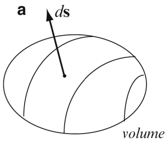
em que ds é a sua magnitude e $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal à superfície.

Direção de uma superfície [1]

- Um elemento diferencial de superfície é um vetor:

$$d\mathbf{s} = ds\hat{\mathbf{n}}, \tag{7}$$

  em que ds é a sua magnitude e $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal à superfície.
- Para superfícies fechadas, convencionamos que o vetor unitário normal positivo aponta para fora do volume.



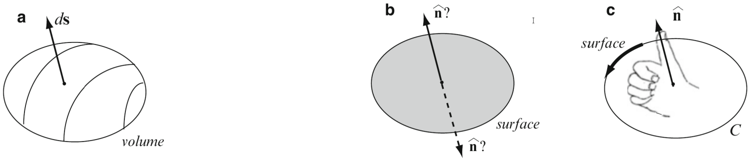
Direção de uma superfície [1]

- Um elemento diferencial de superfície é um vetor:

$$d\mathbf{s} = ds\hat{\mathbf{n}}, \tag{7}$$

em que ds é a sua magnitude e $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal à superfície.

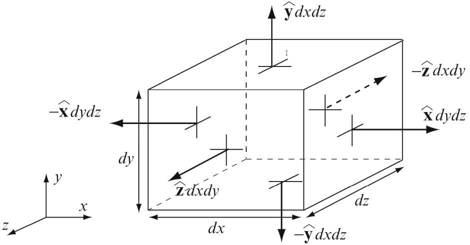
- Para superfícies fechadas, convencionamos que o vetor unitário normal positivo aponta para fora do volume.
- Para superfícies abertas, existe uma ambiguidade, a qual resolvemos a partir da regra da mão direita, de acordo com a última imagem abaixo.



Elementos de superfície em um cubo [1]

- Conforme mostra a figura abaixo, temos ao total seis elementos diferenciais de superfície em um cubo:

$$d\mathbf{s}_x = \pm dydz\hat{\mathbf{x}},\ d\mathbf{s}_y = \pm dxdz\hat{\mathbf{y}},\ d\mathbf{s}_z = \pm dxdy\hat{\mathbf{z}}. \tag{8}$$



Exemplo 1.3.3 – Enunciado [1]

- Considere três pontos no sistema de coordenadas cartesianas: $P_1(2, -3, 3)$, $P_2(1, 1, 5)$ e $P_3(3, -1{,}4)$.
  (a) Encontre os seguintes três vetores: **A**, que conecta P_1 a P_2; **B**, que conecta P_1 a P_3; e **C**, que conecta P_2 a P_3.
  (b) Calcule a componente escalar do vetor **A** na direção do vetor **B**.
  (c) Determine as componentes vetoriais do vetor **B** na direção do vetor **C**.

Exemplo 1.3.3 – Solução [1]

(a) Encontramos os três vetores **A**, **B** e **C** ao calcular as suas componentes a partir das coordenadas dos pontos nas suas extremidades:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= (1-2)\hat{\mathbf{x}} + (1+3)\hat{\mathbf{y}} + (5-3)\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{B} &= (3-2)\hat{\mathbf{x}} + (-1+3)\hat{\mathbf{y}} + (4-3)\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{C} &= (3-1)\hat{\mathbf{x}} + (-1-1)\hat{\mathbf{y}} + (4-5)\hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned}$$

(b) Para calcular a componente escalar do vetor **A** na direção do vetor **B**, consideramos o produto escalar entre **A** e o vetor unitário $\hat{\mathbf{B}}$:

$$\begin{aligned}
A_B = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{B}} &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} \\
&= \frac{(-\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.3 – Solução (cont.) [1]

(c) Determinamos as componentes vetoriais do vetor **B** na direção do vetor **C** através do produto produto escalar entre **B** e o vetor unitário $\hat{\mathbf{C}}$:

$$B_C\hat{\mathbf{C}} = (\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{C}})\hat{\mathbf{C}} = \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{C}}{C^2}$$
$$= \frac{[(\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}})\cdot(2\hat{\mathbf{x}}-2\hat{\mathbf{y}}-1\hat{\mathbf{z}})](2\hat{\mathbf{x}}-2\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{z}})}{4+4+1}$$
$$= \frac{-2\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}}{3}.$$

- Logo, as componentes vetoriais de **B** na direção do vetor **C** são $(-2/3)\hat{\mathbf{x}}$, $(2/3)\hat{\mathbf{y}}$ e $(1/3)\hat{\mathbf{z}}$.

Sistema de coordenadas cilíndricas [1]

- No sistema de coordenadas cilíndricas, escrevemos um vetor **A** que conecta dois pontos genéricos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ assim:

$$\mathbf{A}(r, \phi, z) = A_r(r, \phi, z)\hat{\mathbf{r}} + A_\phi(r, \phi, z)\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z(r, \phi, z)\hat{\mathbf{z}}, \tag{9}$$

  em que A_r, A_ϕ e A_z são as projeções do vetor sobre os eixos r, ϕ e z, respectivamente.

- O raio r varia no intervalo $[0, \infty)$ e ϕ, o chamado ângulo de azimute, pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$.

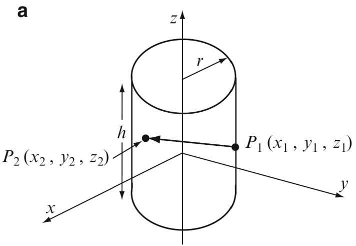
Sistema de coordenadas cilíndricas [1]

- No sistema de coordenadas cilíndricas, escrevemos um vetor **A** que conecta dois pontos genéricos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ assim:

$$\mathbf{A}(r, \phi, z) = A_r(r, \phi, z)\hat{\mathbf{r}} + A_\phi(r, \phi, z)\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z(r, \phi, z)\hat{\mathbf{z}}, \tag{9}$$

em que A_r, A_ϕ e A_z são as projeções do vetor sobre os eixos r, ϕ e z, respectivamente.

- O raio r varia no intervalo $[0, \infty)$ e ϕ, o chamado ângulo de azimute, pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$.



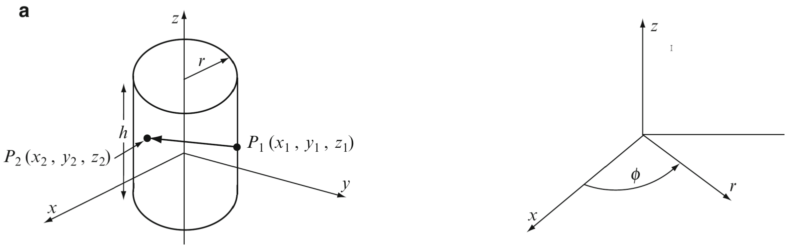
Sistema de coordenadas cilíndricas [1]

- No sistema de coordenadas cilíndricas, escrevemos um vetor **A** que conecta dois pontos genéricos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ assim:

$$\mathbf{A}(r, \phi, z) = A_r(r, \phi, z)\hat{\mathbf{r}} + A_\phi(r, \phi, z)\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z(r, \phi, z)\hat{\mathbf{z}}, \quad (9)$$

em que A_r, A_ϕ e A_z são as projeções do vetor sobre os eixos r, ϕ e z, respectivamente.

- O raio r varia no intervalo $[0, \infty)$ e ϕ, o chamado ângulo de azimute, pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$.



Elementos diferenciais [1]

- No sistema de coordenadas cilíndricas, conforme a figura abaixo, definimos o seguinte diferencial de comprimento:

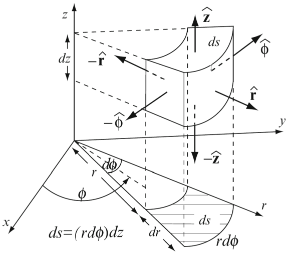
$$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}. \tag{10}$$

- Também definimos elementos diferenciais de superfície:

$$ds_r = rd\phi dz,\ ds_\phi = drdz,\ ds_z = rd\phi dr. \tag{11}$$

- Além disso, definimos um elemento diferencial de volume:

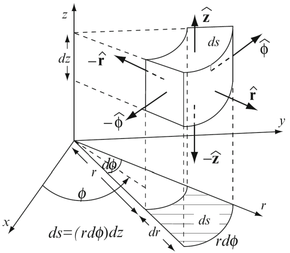
$$dv = rdrd\phi dz. \tag{12}$$



Elementos de superfície em um cilindro [1]

- Similarmente ao sistema de coordenadas cartesianas, definimos seis elementos diferenciais de superfície em termos de vetores unitários normais às superfícies do cilindro:

$$d\mathbf{s}_r = \pm r d\phi dz \hat{\mathbf{r}},\ d\mathbf{s}_\phi = \pm dr dz \hat{\phi},\ d\mathbf{s}_z = \pm r d\phi dr \hat{\mathbf{z}}. \tag{13}$$

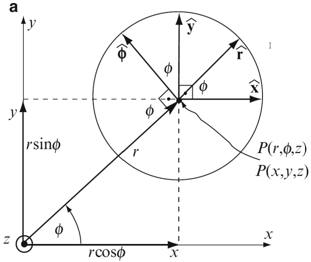


Transformações entre sistemas [1]

- Os campos são independentes do sistema de coordenadas utilizado.
- Assim, podemos fazer transformações entre o sistema de coordenadas cilíndricas e o sistema cartesiano.
- No sistema de coordenadas cartesianas, as coordenadas de um ponto qualquer são (x, y, z), enquanto o mesmo ponto é representado em coordenadas cilíndricas por (r, ϕ, z).

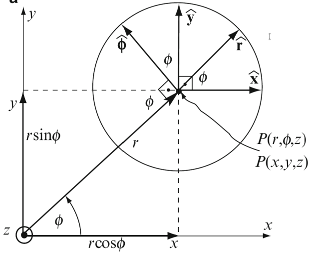
Transformações entre sistemas [1]

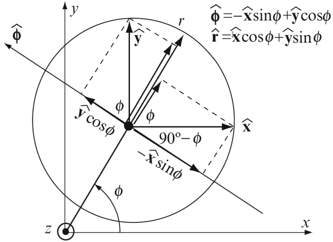
- Os campos são independentes do sistema de coordenadas utilizado.
- Assim, podemos fazer transformações entre o sistema de coordenadas cilíndricas e o sistema cartesiano.
- No sistema de coordenadas cartesianas, as coordenadas de um ponto qualquer são (x, y, z), enquanto o mesmo ponto é representado em coordenadas cilíndricas por (r, ϕ, z).



Transformações entre sistemas [1]

- Os campos são independentes do sistema de coordenadas utilizado.
- Assim, podemos fazer transformações entre o sistema de coordenadas cilíndricas e o sistema cartesiano.
- No sistema de coordenadas cartesianas, as coordenadas de um ponto qualquer são (x, y, z), enquanto o mesmo ponto é representado em coordenadas cilíndricas por (r, ϕ, z).





Transformações entre sistemas [1]

- Especificamente, temos três tipos de transformações entre sistemas de coordenadas:
  1. Transformação das coordenadas de um único ponto;
  2. Transformação dos vetores unitários;
  3. Transformação das componentes de um vetor.
- Se conhecermos as coordenadas de um ponto (r, ϕ, z), poderemos transformá-las para coordenadas cartesianas com base nas seguintes equações:

$$x = r\cos\phi,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi,\ z = z. \tag{14}$$

- Para realizar a operação inversa, isto é, converter as coordenadas cartesianas de um ponto (x, y, z) em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z), utilizamos estas relações:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), z = z. \tag{15}$$

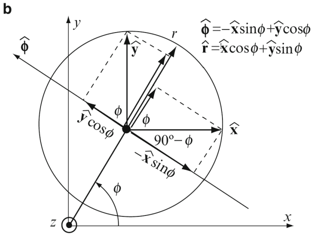
Transformações entre sistemas [1]

- Para transformar os vetores unitários do sistema cartesiano nos vetores unitários do sistema cilíndrico, levamos em conta estas equações:

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{y}},\ \hat{\phi} = -\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}},\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}. \tag{16}$$

- Para realizar a operação inversa, dispomos das relações a seguir:

$$\hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\phi\hat{\phi},\ \hat{\mathbf{y}} = \operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{r}} + \cos\phi\hat{\phi},\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}. \tag{17}$$



Transformações entre sistemas [1]

- Para transformar as componentes de um vetor de coordenadas cilíndricas para coordenadas cartesianas, aplicamos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}. \tag{18}$$

- Para realizar a operação contrária, só precisamos inverter a matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Exemplo 1.3.4 – Enunciado [1]

- Considere dois pontos no sistema de coordenadas cilíndricas: $P_1(r_1, \phi_1, z_1)$, $P_2(r_2, \phi_2, z_2)$.
  (a) Encontre o vetor que aponta de P_1 para P_2 em coordenadas cartesianas.
  (b) Determine o vetor que aponta de P_1 para P_2 em coordenadas cilíndricas.
  (c) Calcule a magnitude desse vetor.

Exemplo 1.3.4 – Solução [1]

(a) No sistema cartesiano, as coordenadas do ponto P_1 são

$$x_1 = r_1 \cos\phi_1,\ y_1 = r_1 \operatorname{sen}\phi_1,\ z_1 = z_1.$$

- Similarmente, para o ponto P_2, temos:

$$x_2 = r_2 \cos\phi_2,\ y_2 = r_2 \operatorname{sen}\phi_2,\ z_2 = z_2.$$

- Portanto, no sistema de coordenadas cartesianas, expressamos o vetor $\mathbf{A}$ assim:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}} \\ &= (r_2\cos\phi_2 - r_1\cos\phi_1)\hat{\mathbf{x}} + (r_2\operatorname{sen}\phi_2 - r_1\operatorname{sen}\phi_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.4 – Solução (cont.) [1]

(b) Para obter as componentes do vetor **A** em coordenadas cilíndricas, empregamos a Eq. (19):

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2\cos\phi_2 - r_1\cos\phi_1 \\ r_2\operatorname{sen}\phi_2 - r_1\operatorname{sen}\phi_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

- Ao realizar as devidas operações algébricas, encontramos **A**:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(r,\phi,z) &= [(r_2\cos\phi_2 - r_1\cos\phi_1)\cos\phi + (r_2\operatorname{sen}\phi_2 - r_1\operatorname{sen}\phi_1)\operatorname{sen}\phi]\hat{\mathbf{r}} \\ &+[-(r_2\cos\phi_2 - r_1\cos\phi_1)\operatorname{sen}\phi + (r_2\operatorname{sen}\phi_2 - r_1\operatorname{sen}\phi_1)\cos\phi]\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &+ (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Dependência do ângulo ϕ

Notamos que, ao contrário do que ocorre com as coordenadas no sistema cartesiano, as componentes A_r e A_ϕ do vetor em coordenadas cilíndricas não são constantes, pois dependem do ângulo ϕ, além das posições de P_1 e P_2.

Exemplo 1.3.4 – Solução (cont.) [1]

(c) Por ser mais fácil, calculamos a magnitude do vetor **A** a partir da sua representação no sistema de coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} A = |\mathbf{A}| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\ &= \sqrt{(r_2 \cos\phi_2 - r_1 \cos\phi_1)^2 + (r_2 \operatorname{sen}\phi_2 - r_1 \operatorname{sen}\phi_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

- Quando dois pontos forem dados em coordenadas cilíndricas, poderemos usar essa expressão para calcular a magnitude do vetor sem a necessidade de convertê-lo antes para coordenadas cartesianas.

Exercício 1.3.4 – Enunciado [1]

- Considere dois pontos no sistema de coordenadas cilíndricas, $P_1(4, \pi/6, -1)$, $P_2(10, \pi/4, 5)$, e calcule a magnitude do vetor que aponta de P_1 para P_2[2].

[2] $A = |\mathbf{A}| \approx 8{,}6444$.

Exemplo 1.3.5 – Enunciado [1]

- Dado o vetor em coordenadas cilíndricas $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{r}} + 3\hat{\phi} - \hat{\mathbf{z}}$, descreva-o em coordenadas cartesianas.

Exemplo 1.3.5 – Solução [1]

- Para obter as componentes do vetor em coordenadas cartesianas, utilizamos a Eq. (18):

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2\cos\phi - 3\operatorname{sen}\phi \\ 2\operatorname{sen}\phi + 3\cos\phi \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Para prosseguir na resolução, usamos as seguintes relações:

$$\cos\phi = \frac{x}{r},\ \operatorname{sen}\phi = \frac{y}{r},\ r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Com isso, temos:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{2x - 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{2y + 3x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}.$$

Exercício 1.3.5 – Enunciado [1]

- Transforme o vetor $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{x}} - 5\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ para coordenadas cilíndricas no ponto $(x = -2, y = 3, z = 1)$[3].

[3] $\mathbf{A} = 5{,}27\hat{\mathbf{r}} - 1{,}11\hat{\phi} + 3\hat{\mathbf{z}}$.

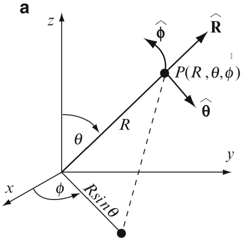
Sistema de coordenadas esféricas [1]

- No sistema de coordenadas esféricas, escrevemos um vetor **A** que conecta dois pontos genéricos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ assim:

$$\mathbf{A}(R, \theta, \phi) = A_R(R, \theta, \phi)\hat{\mathbf{R}} + A_\theta(R, \theta, \phi)\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_\phi(R, \theta, \phi)\hat{\boldsymbol{\phi}}, \qquad (20)$$

  em que A_R, A_θ e A_ϕ são as projeções do vetor sobre os eixos R, θ e ϕ, respectivamente.

- O raio R varia no intervalo $[0, \infty)$, θ se encontra no intervalo $[0, \pi]$ e ϕ pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$.



Elementos diferenciais [1]

- No sistema de coordenadas esféricas, de acordo com a figura abaixo, definimos o seguinte diferencial de comprimento:

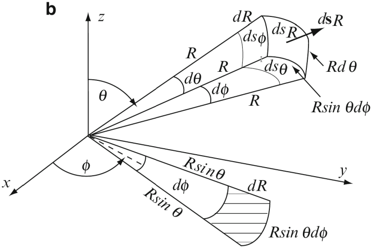
$$d\mathbf{l} = dR\hat{\mathbf{R}} + Rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + R\,\mathrm{sen}\,\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{21}$$

- Também definimos elementos diferenciais de superfície:

$$ds_R = R^2\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta d\phi,\ ds_\theta = R\,\mathrm{sen}\,\theta dRd\phi,\ ds_\phi = RdRd\theta. \tag{22}$$

- Além disso, definimos um elemento diferencial de volume:

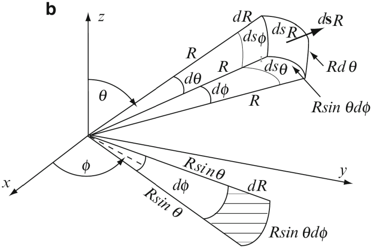
$$dv = R^2\,\mathrm{sen}\,\theta dRd\theta d\phi. \tag{23}$$



Elementos de superfície em uma esfera [1]

- Similarmente ao sistema de coordenadas cartesianas e cilíndricas, definimos seis elementos diferenciais de superfície em termos de vetores unitários normais aos planos $\theta - \phi$, $R - \phi$ e $R - \theta$:

$$d\mathbf{s}_R = \pm R^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{R}},\ d\mathbf{s}_\theta = \pm R \operatorname{sen}\theta dR d\phi \hat{\boldsymbol{\theta}},\ d\mathbf{s}_\phi = \pm R dR d\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{24}$$



Transformações entre sistemas [1]

- Se conhecermos as coordenadas de um ponto (R, θ, ϕ), poderemos transformá-las para coordenadas cartesianas com base nas seguintes equações:

$$x = R \operatorname{sen}\theta \cos\phi,\ y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi,\ z = R\cos\theta. \tag{25}$$

- Para realizar a operação inversa, isto é, converter as coordenadas cartesianas de um ponto (x, y, z) em coordenadas esféricas, utilizamos estas relações:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right),\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{26}$$

Transformações entre sistemas [1]

- Para transformar as componentes de um vetor de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas, aplicamos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}. \tag{27}$$

- Para realizar a operação contrária, só precisamos inverter a matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Transformações entre sistemas [1]

- Para transformar os vetores unitários do sistema de coordenadas esféricas nos vetores unitários do sistema cartesiano, aplicamos a Eq. (27):

$$\hat{\mathbf{R}} = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}, \tag{29}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{y}} - \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{z}}, \tag{30}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}}. \tag{31}$$

- Ressaltamos que os vetores unitários $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ não são constantes:
  1. $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dependem de θ e ϕ;
  2. $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ depende de ϕ.
- Assim, quando esses vetores unitários aparecerem dentro de um integrando, eles precisarão ser convertidos para coordenadas cartesianas a partir das equações acima.

Exemplo 1.3.6 – Enunciado [1]

- Considere dois pontos no sistema de coordenadas esféricas: $P_1(R_1, \theta_1, \phi_1)$, $P_2(R_2, \theta_2, \phi_2)$.
  (a) Encontre o vetor que aponta de P_1 para P_2 em coordenadas cartesianas.
  (b) Calcule a magnitude desse vetor.

Exemplo 1.3.6 – Solução [1]

(a) No sistema cartesiano, as coordenadas do ponto P_1 são

$$x_1 = R_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\phi_1,\ y_1 = R_1 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\phi_1,\ z_1 = R_1 \cos\theta_1.$$

- Similarmente, para o ponto P_2, temos:

$$x_2 = R_2 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\phi_2,\ y_2 = R_2 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\phi_2,\ z_2 = R_2 \cos\theta_2.$$

- Portanto, no sistema de coordenadas cartesianas, expressamos o vetor $\mathbf{A}$ assim:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}}\\ &= (R_2 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\phi_2 - R_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\phi_1)\hat{\mathbf{x}}\\ &+ (R_2 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\phi_2 - R_1 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\phi_1)\hat{\mathbf{y}}\\ &+ (R_2 \cos\theta_2 - R_1 \cos\theta_1)\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.6 – Solução (cont.) [1]

(b) Por ser mais fácil, calculamos a magnitude do vetor **A** a partir da sua representação no sistema de coordenadas cartesianas:

$$
\begin{aligned}
A = |\mathbf{A}| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\
&= \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - 2R_1R_2\cos\theta_1\cos\theta_2}
\end{aligned}
$$

- Quando dois pontos forem dados em coordenadas esféricas, poderemos usar essa expressão para calcular a magnitude do vetor sem a necessidade de convertê-lo antes para coordenadas cartesianas.

Exercício 1.3.6 – Enunciado [1]

- Considere dois pontos no sistema de coordenadas esféricas: $P_1(R_1, \theta_1, \phi_1)$, $P_2(R_2, \theta_2, \phi_2)$. Determine o vetor que aponta de P_1 para P_2 em coordenadas esféricas.

Exemplo 1.3.7 – Enunciado [1]

- Considere o vetor **A** como aquele que aponta de P_1 para P_2, em que os pontos são representados em coordenadas cartesianas por $P_1(0{,}0{,}1)$ e $P_2(2{,}1{,}3)$.
  (a) Encontre o vetor unitário na direção de **A** em coordenadas esféricas.
  (b) Encontre o vetor unitário na direção de **A** em coordenadas cilíndricas.

Exemplo 1.3.7 – Solução [1]

(a) Primeiramente, encontramos o vetor **A** em coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{A} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}.$$

- Na sequência, obtemos o seguinte vetor unitário na direção de **A**:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \frac{\mathbf{A}}{A} \\ &= \frac{2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}}{3} = \frac{2}{3}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{y}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.7 – Solução [1]

(a) Para converter o vetor unitário para coordenadas esféricas, só precisamos aplicar a Eq. (28):

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

- Assim, temos o seguinte vetor unitário na direção de **A** em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} = {} & \frac{1}{3}(2\operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + 2\cos\theta)\hat{\mathbf{R}} \\ & + \frac{1}{3}(2\cos\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi - 2\operatorname{sen}\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & - \frac{1}{3}(2\operatorname{sen}\phi - \cos\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.7 – Solução [1]

(b) Para converter o vetor unitário para coordenadas cilíndricas, só precisamos aplicar a Eq. (19):

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

- Assim, temos o seguinte vetor unitário na direção de **A** em coordenadas cilíndricas:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{3}(2\cos\phi + \operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{3}(2\operatorname{sen}\phi - \cos\phi)\hat{\phi} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{z}}.$$

Exercício 1.3.7 – Enunciado [1]

- Considere o vetor $\mathbf{A}$ como aquele que aponta de P_1 para P_2, em que o ponto P_1 é representado em coordenadas cartesianas por $P_1(2{,}2,-5)$, enquanto P_2 é dado em coordenadas cilíndricas como $P_2(3{,}\pi,-2)$[4].
  (a) Represente P_1 em coordenadas esféricas.
  (b) Calcule a magnitude do vetor $\mathbf{A}$.

[4](a) $P_1(5{,}745; 150°30'; 45°)$; (b) $|\mathbf{A}| = 6{,}164$.

Síntese

Considerações finais

- Campos escalares são funções que, a partir de um vetor, retornam uma quantidade escalar.
- Campos vetoriais são funções que, a partir de um vetor, retornam uma quantidade vetorial.
- Um sistema de coordenadas no espaço consiste em uma forma de representação de cada ponto, de maneira única.
- E escolha de um sistema de coordenadas em detrimento de outro decorre de considerações sobre a conveniência.
- Um cubo é mais facilmente representado em um sistema de coordenadas retangulares do que nos outros sistemas.
- Para cada sistema de coordenadas, definimos elementos diferenciais de comprimento, superfície e volume.
- A partir de transformações lineares, podemos converter um vetor de um sistema para outro.
- Nos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, os vetores unitários não são constantes.

Referências

Referências I

[1] IDA, Nathan. *Engineering Electromagnetics*. 3. ed. Suíça: Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-052-178-988-2.