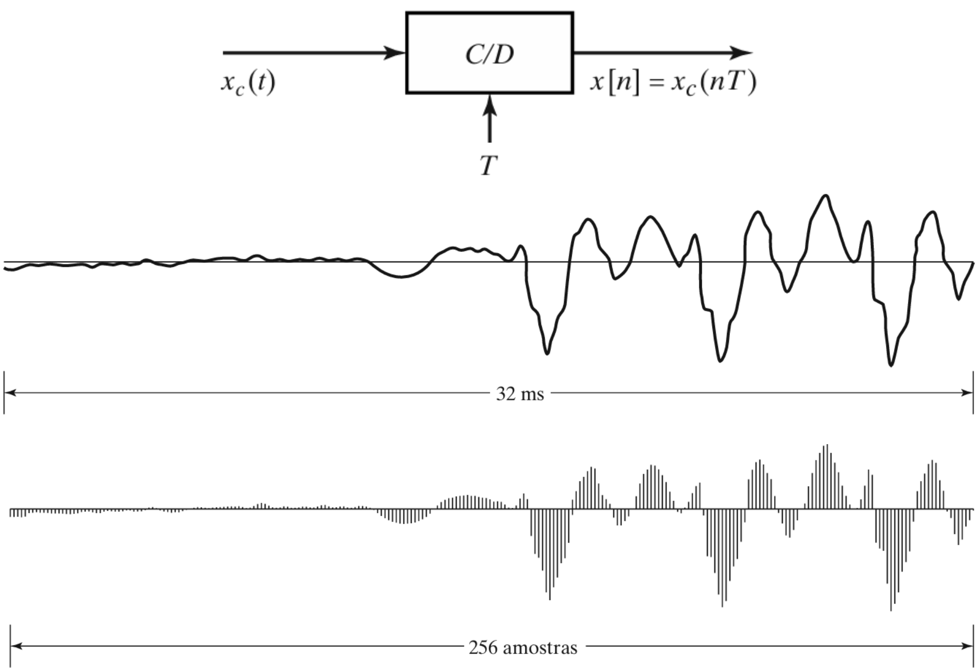
Amostragem

Representação da amostragem no domínio do tempo

As representações discretas dos sinais mais comumente decorrem da representação da amostragem de sinais de tempo contínuo, obtida por meio da amostragem periódica; isto é, uma sequência de amostras, $x[n]$, é obtida a partir de um sinal de tempo contínuo $x_c(t)$, de acordo com a relação

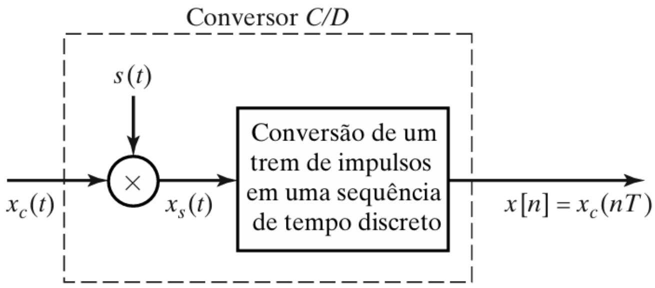
$$x[n] = x_c(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

em que T é o período de amostragem e seu inverso, $f_s = 1/T$, é a frequência de amostragem, em amostras por segundo. A figura a seguir ilustra esse processo em blocos.



De modo geral, a operação de amostragem não é reversível, isto é, não é possível reconstruir a entrada $x_c(t)$ do amostrador a partir das amostras $x[n]$ da sua saída, uma vez que diferentes sinais de tempo contínuo podem reproduzir a mesma sequência de amostras. A ambiguidade inerente na amostragem é uma questão fundamental no processamento de sinais. Porém, é possível remover a ambiguidade ao restringir o conteúdo em frequência dos sinais que passam pelo amostrador.

A figura a seguir ilustra os dois estágios do processo de amostragem. Os estágios consistem no modulador do trem de impulsos, seguido pela conversão do trem de impulsos ponderados em uma sequência de tempo discreto.



O trem de impulsos periódico é

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

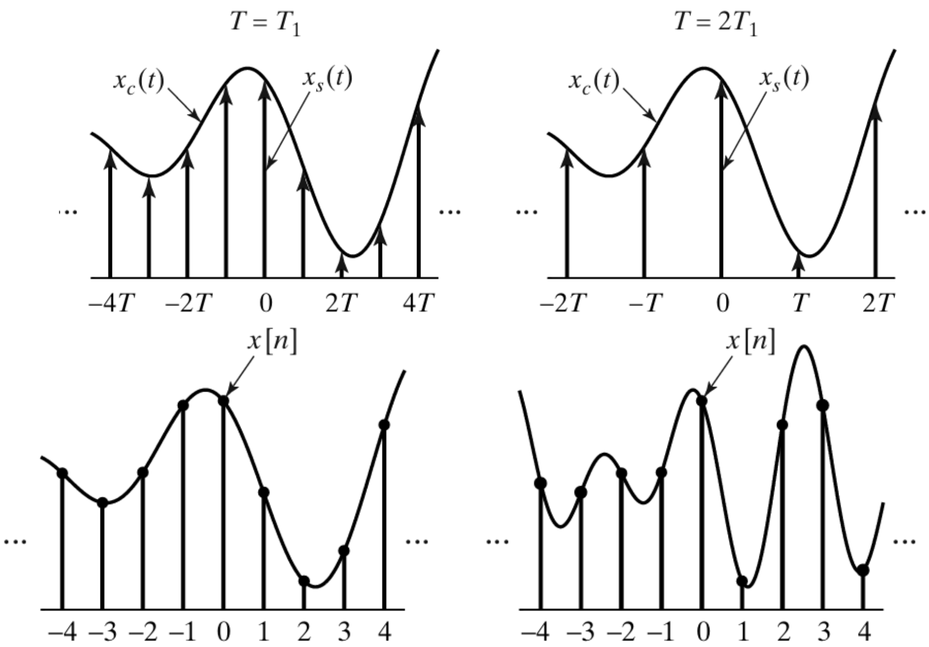
sendo $\delta(t)$ a função impulso unitário. O produto de $s(t)$ e $x_c(t)$ é, portanto,

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT)$$

Usando a propriedade da função impulso de tempo contínuo, temos a representação matemática da amostragem do domínio do tempo:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

Na figura a seguir é mostrado um sinal de tempo contínuo $x_c(t)$ e os resultados da sua amostragem com trem de impulsos para duas taxas de amostragem diferentes.



Representação da amostragem no domínio da frequência

A transformada de Fourier do trem de impulsos periódico $s(t)$ é o trem de impulsos periódico

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

sendo Ω_s a frequência de amostragem em radianos por segundos. A operação de produto que temos no tempo equivale a convolução na frequência. Portanto, temos:

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) * S(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega) * \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

Usando a propriedade da convolução com a função impulso, temos representação da amostragem no dominio da frequência:

$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s)$$

Outro caminho para obtenção da representação da amostragem no domínio da frequência é considerar que o trem de impulso $\delta(t)$ é um sinal periódico de período T, portanto pode ser descrito por uma série trigonométrica de Fourier:

$$\delta(t) = \frac{1}{T}[1 + 2\cos\omega_s t + 2\cos 2\omega_s t + 2\cos 3\omega_s t + \cdots]$$

Dessa forma, temos:

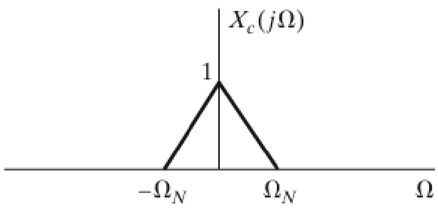
$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)\delta(t) \\ &= \frac{1}{T}[x(t) + 2x(t)\cos\omega_s t + 2x(t)\cos 2\omega_s t + 2x(t)\cos 3\omega_s t + \cdots] \end{aligned}$$

Agora aplicando a propriedade da linearidade e da modulação, temos:

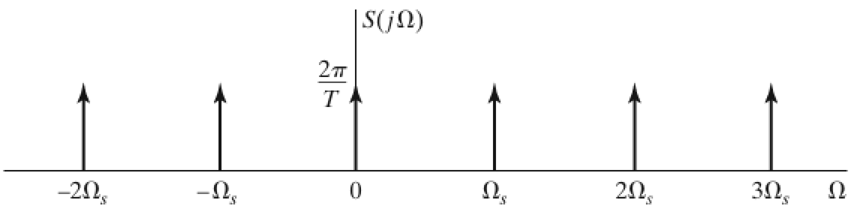
$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s)$$

Nas equações anteriores para o sinal amostrado no domínio da frequência podemos observar que as equações consistem de réplicas repetidas periodicamente da transformada de Fourier de $x_c(t)$. Essas réplicas são deslocadas por múltiplos inteiros da frequência de amostragem.

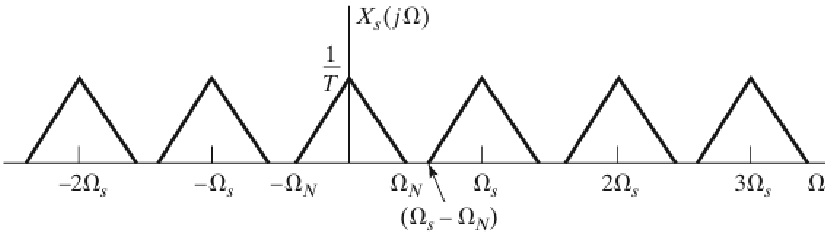
Agora vamos considerar que um sinal a ser amostrado é limitado em frequência como mostra a figura a seguir.



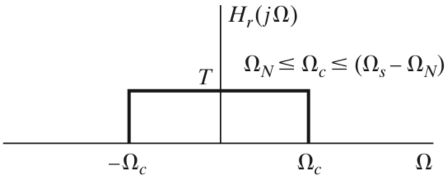
E seja convolvido na frequência com o seguinte trem de impulsos:



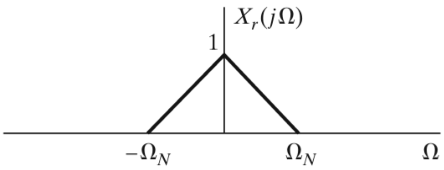
Resultando em



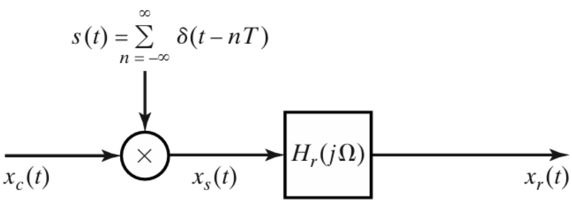
É evidente que, quando $\Omega_s \geq 2\Omega_N$ as réplicas de $X_c(\Omega)$ não se sobrepõem. Consequentemente, $x_c(t)$ pode ser recuperado a partir de $x_s(t)$ com um filtro passa-baixas ideal com a resposta em frequência representada na figura a seguir:



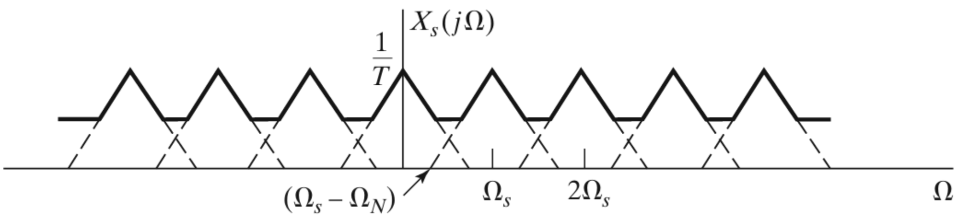
O que resulta no sinal recuperado ter o mesmo espectro do sinal original



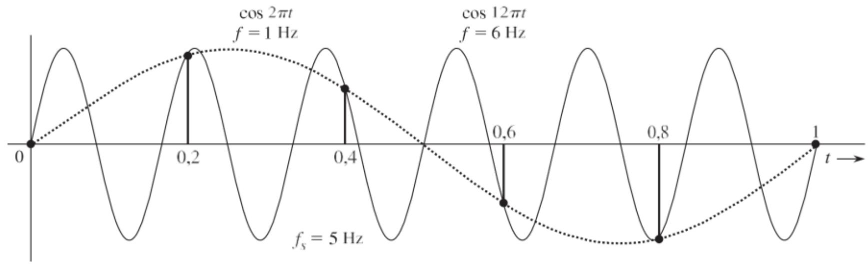
A figura a seguir representa o processo descrito acima.



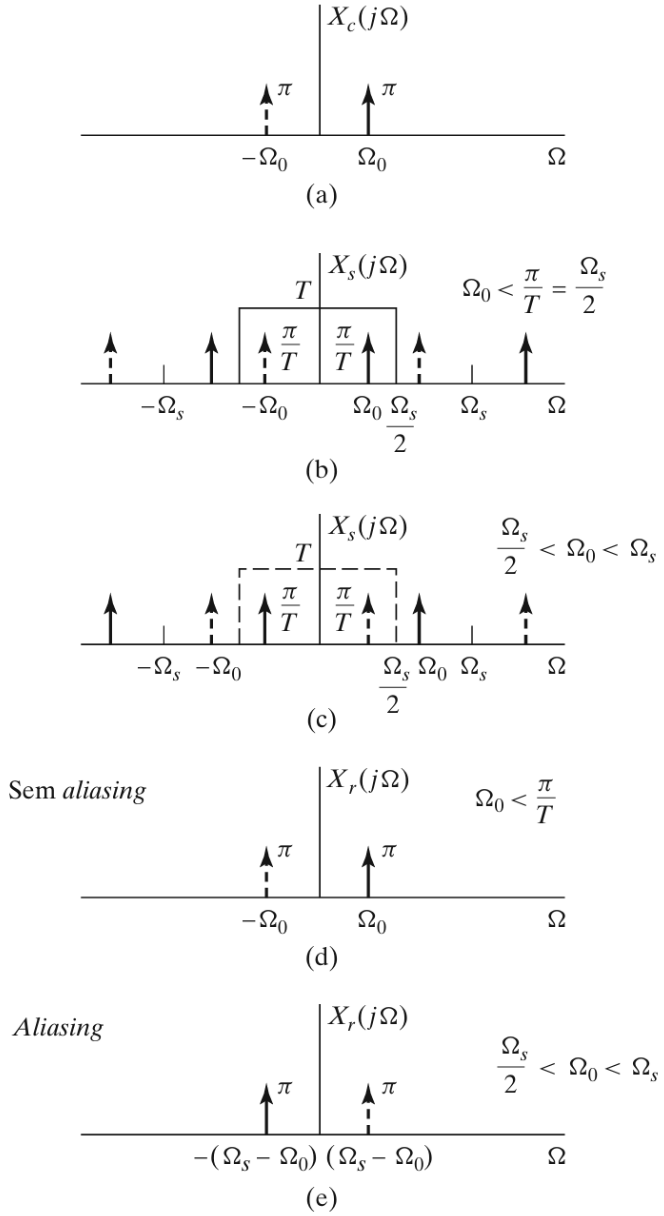
Se a desigualdade $\Omega_s < 2\Omega_N$ as réplicas de $X_c(\Omega)$ se sobrepõem, de modo que não é mais recuperável pela filtragem passa-baixas. Nesse caso, a saída reconstruída $x_r(t)$ apresenta uma distorção chamada de distorção de *aliasing* ou, apenas, *aliasing*. A figura a seguir mostra o espectro do sinal amotrado com superposição.



Na figura a seguir ilustra-se o *aliasing* no domínio do tempo para o caso simples de um sinal cosseno



Na figura a seguir ilustra-se o *aliasing* no domínio da frequência para o caso simples de um sinal cosseno



Essa discussão é a base para o teorema da amostragem de *Nyquist*. Se quisermos reconstruir $x_c(t)$, não deve existir sobreposição entre ciclos sucessivos. Para isso, precisamos que

$$f_s > 2f_N$$

A menor taxa de amostragem, $f_s = 2f_N$, necessária para recuperar $x_c(t)$ de suas amostras é chamada de taxa de *Nyquist*.

Agora vamos expressar $X(e^{j\omega})$, a transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) da sequência $x[n]$, em termos de $Xs(\Omega)$ e $X_c(\Omega)$. Para isso, consideraremos uma expressão alternativa para $Xs(\Omega)$. Aplicando a transformada de Fourier de tempo contínuo em

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

Temos

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega nT}$$

Como

$$x[n] = x_c(nT)$$

E

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Decorre que

$$X_s(\Omega) = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T}$$

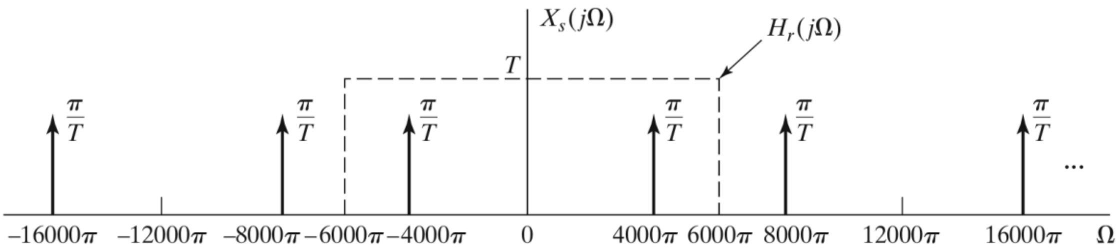
A mudança de escala de frequência ou a normalização na transformação de $X_s(\Omega)$ para $X\left(e^{j\omega}\right)$ é um resultado direto da normalização do tempo na transformação de $x_s(t)$ para $x[n]$. Especificamente, $x_s(t)$ mantém um espaçamento entre amostras igual ao período de amostragem T. Comparando, o "espaçamento" dos valores da sequência $x[n]$ é sempre unitário; isto é, o eixo do tempo é normalizado por um fator T. De modo correspondente, no domínio de frequência, o eixo de frequência é normalizado por $fs = 1/T$.

Exemplo 01: Amostragem e reconstrução de um sinal senoidal

Se amostrarmos o sinal de tempo contínuo $x_c(t) = cos(4000\pi t)$ com período de amostragem $T = 1/6000$, obtemos $x[n] = x_c(nT) = cos(4000\pi nT) = cos(\omega_0 n)$, sen do $\omega_0 = 4000\pi T = 2\pi/3$. Nesse caso, $\Omega_s = 2\pi/T = 12000\pi$, e a maior frequência do sinal é $\Omega_0 = 4000\pi$, de modo que as condições do teorema da amostragem de Nyquist são satisfeitas e não ocorre *aliasing*. A transformada de Fourier de $x_c(t)$ é

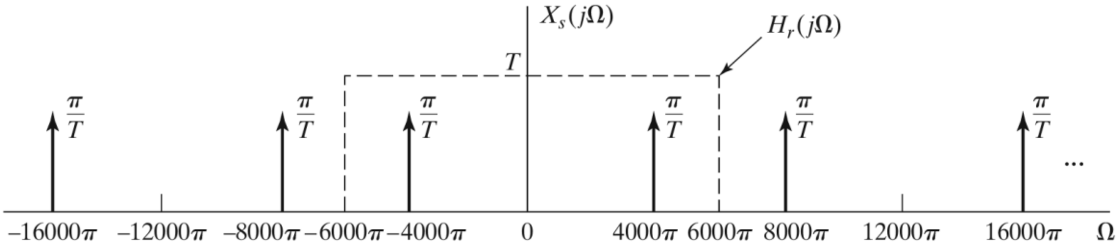
$$X_c(\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$

A figura a seguir mostra o espectro do sinal amostrado

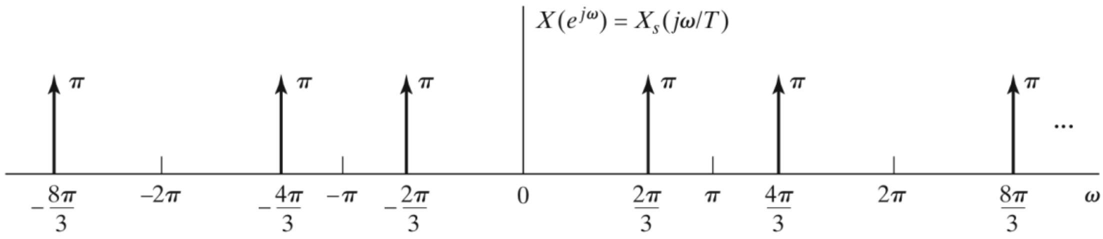


Exemplo 02: *Aliasing* na amostragem de um sinal senoidal

Agora, suponha que o sinal de tempo contínuo seja $x_c(t) = cos(16000\pi t)$, que o período de amostragem seja $T = 1/6000$. Esse período de amostragem não satisfaz o critério de Nyquist, pois $\Omega_s = 2\pi/T = 12000\pi < 2\Omega_0 = 32000\pi$. Consequentemente, esperamos observar $aliasing$. O espectro do sinal amostrado é idêntico ao do exemplo anterior



Em ambos os casos a transformada de Fourier de tempo discreto apresenta o seguinte espectro



Portanto, são sinais distintos de tempo contínuo gerando o mesmo sinal de tempo discreto.

Exemplo 03

Considere a sequência no tempo discreto

$$x[n] = sen\left(\frac{6\pi}{4}n\right)$$

Assumindo que a frequência de amostragem é $f_s = 40\ kHz$, encontre dois sinais no tempo discreto que possam ter gerado essa sequência.

$$x_c(t) = sen(\Omega_c t) = sen(2\pi f_c t)$$

$$x[n] = x_c(nT) = sen(2\pi f_c nT)$$

$$= sen\left(2\pi f_c n\left(\frac{1}{f_s}\right)\right)$$

$$= sen\left(2\pi\frac{f_c}{f_s}n\right) = sen\left(2\pi\frac{f_c}{f_s}n + 2k\pi n\right)$$

$$= sen\left(2\pi\left(\frac{f_c}{f_s} + k\right)n\right)$$

$$sen\left(2\pi\left(\frac{f_c}{f_s}+k\right)n\right) = sen\left(\frac{6\pi}{4}n\right)$$

$$2\pi\left(\frac{f_c}{f_s}+k\right) = \frac{6\pi}{4}$$

Para $k = 0$, temos $f_c = 30kHz$

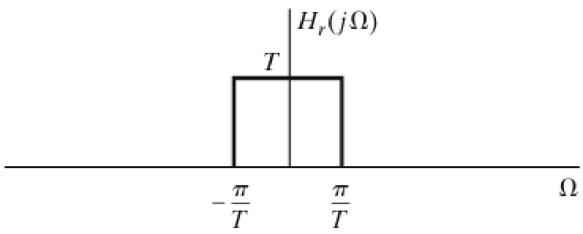
Para $k = -1$, temos $f_c = 70kHz$

Reconstrução de um sinal de banda limitada a partir de suas amostras

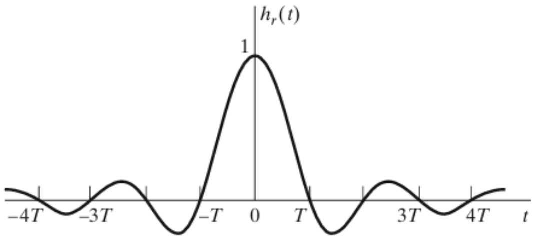
Dada uma sequência de amostras, $x[n]$, podemos formar um trem de impulsos

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

Se esse trem de impulsos for a entrada de um filtro de tempo contínuo passa-baixas ideal com resposta em frequência $H_r(\Omega)$



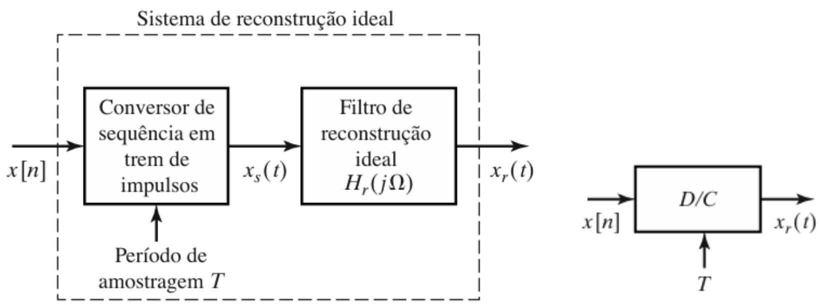
Sendo assim, sua resposta ao impulso $h_r(t) = \frac{sen(\pi t/T)}{\pi t/T}$



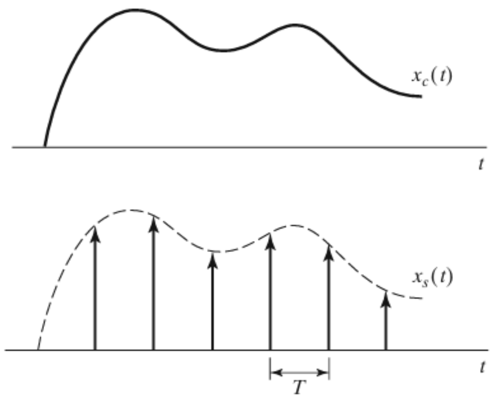
Então a saída do filtro será

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{sen[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

Uma representação por diagrama de blocos desse processo de reconstrução de sinal é mostrada na figura a seguir.

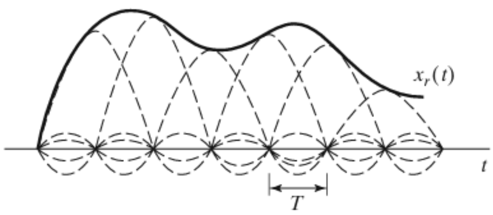


Na figura a seguir, mostram-se um sinal de tempo contínuo $x_c(t)$ e o trem de impulsos modulado correspondente.



Na figura a seguir mostram-se várias das parcelas

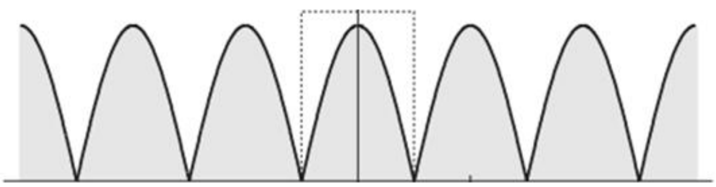
$$x[n]\frac{sen[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$



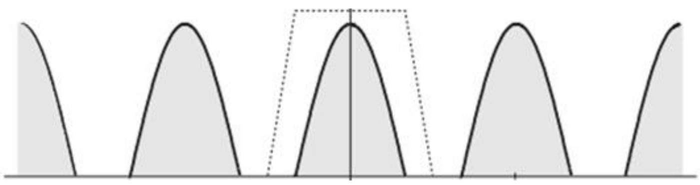
O processo de reconstrução de um sinal de tempo contínuo a partir de suas amostras também é chamado de **interpolação**. Como vimos anterioremente um sinal $x_c(t)$ limitado em faixa a B Hz pode ser exatamente reconstruído (interpolado) de suas amostras se a frequência de amostragem f_s exceder $2B$ Hz ou o intervalo de amostragem T for menor do que $1/2B$. Essa reconstrução é feita passando o sinal amostrado através de um filtro passa-baixas ideal de ganho T e com largura de faixa de qualquer valor entre B e $f_s - B$ Hz. Do ponto de vista prático, uma boa escolha é o valor médio $f_s/2 = 1/2T$ Hz. Esse valor permite pequenos desvios nas características do filtro ideal em qualquer lado da frequência de corte.

Dificuldades Práticas na Reconstrução do Sinal

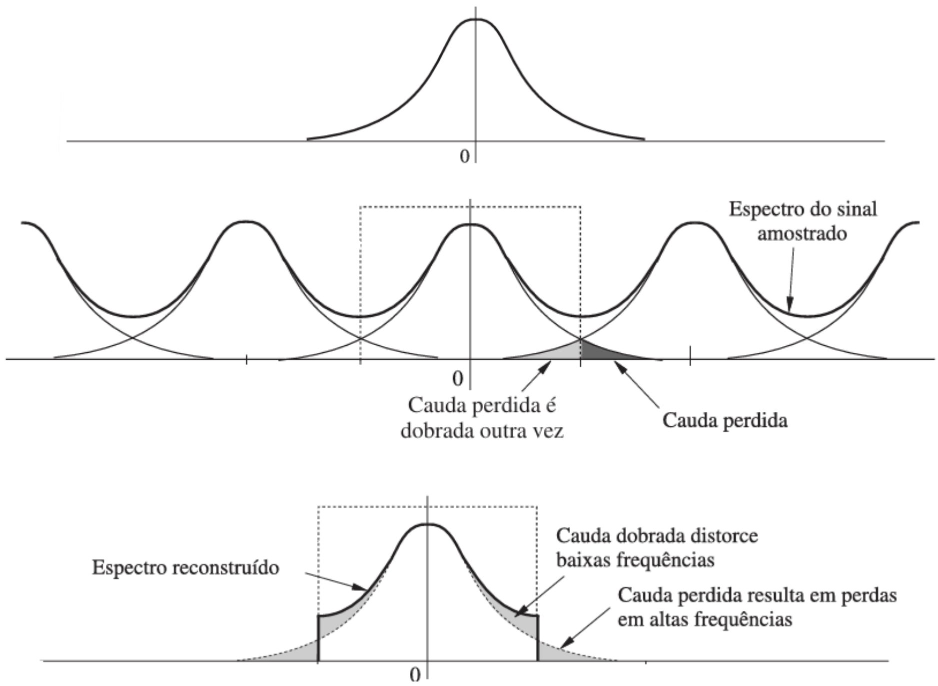
Considere o procedimento de reconstrução do sinal ilustrado na Figura a seguir. Se o sinal é amostrado na taxa de *Nyquist* f_S = 2*B* Hz, não há qualquer espaçamento entre ciclos sucessivos. Para recuperar o sinal, precisamos passar o sinal amostrado através de um filtro passa-baixas ideal. Como visto, tal filtro é não realizável, podendo ser aproximado apenas com um atraso de tempo infinito. Em outras palavras, não podemos recuperar o sinal a partir de suas amostras com atraso de tempo infinito.



Uma solução prática para esse problema é amostrar o sinal a uma taxa superior a taxa de *Nyquist* (f_S > 2*B*). Podemos, agora, recuperar usando um filtro passa-baixas com uma característica de corte gradual. Mas mesmo neste caso, se o espectro indesejado deve ser suprimido, o ganho do filtro deve ser zero além de alguma frequência. Nunca se tem ganho zero na banda de rejeição, portanto é impossível realizar até mesmo esse filtro. Tudo isso significa que é impossível recuperar exatamente, na prática, um sinal *x*(*t*) limitado em faixa a partir de suas amostras, mesmo se a taxa de amostragem for maior do que a taxa de Nyquist. **Entretanto, quando a taxa de amostragem aumenta, o sinal recuperado se aproxima mais do sinal desejado.**



Existe outra dificuldade prática fundamental na reconstrução de um sinal a partir de suas amostras. O teorema da amostragem foi provado considerando que o sinal é limitado em faixa. ***Todos os sinais práticos são limitados no tempo***, ou seja, eles são de duração ou largura finita. Se um sinal é limitado no tempo, ele não pode ser limitado em faixa, e vice versa (mas ele pode ser simultaneamente não limitado no tempo e não limitado em faixa). Claramente, todos os sinais práticos, os quais são necessariamente limitados no tempo, são não limitados em faixa.



Devemos, portanto, eliminar as altas frequências usando um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte $f_S/2$ Hz. Esse filtro é chamado de *filtro antialiasing*. Um filtro *antialiasing* essencialmente limita em faixa o sinal a $f_S/2$ Hz. Dessa forma, perdemos apenas as componentes acima da frequência do dobramento $f_S/2$ Hz. Essas componentes suprimidas não podem reaparecer para corromper as componentes de frequência abaixo da frequência de corte.

Referências:

LATHI, B.P. Sinais e Sistemas Lineares, 2ª. Edição, Bookman, 2007.

OPPENHEIM, A.V, SCHAFER, R.W. Processamento em tempo discreto de sinais, 3a. Edição, Pearson, 2013.