



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

---

## Laboratório 1 de PSD

Amostragem

---

**Curso:** Engenharia de Telecomunicações  
**Professor:** Elen Macedo Lobato

**Aluno:**  
Victor E. de L. Guerra

Data

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Análise de Casos de Amostragem e Aliasing</b>	<b>2</b>
2.1	Caso 1 – Cosseno de 30 Hz com Amostragem a 50 Hz . . . . .	2
2.2	Caso 2 – Cosseno de 40 Hz com Amostragem a 15 Hz . . . . .	5
2.3	Caso 3 – Cosseno de 10 Hz com Amostragem a 50 Hz . . . . .	8
2.4	Caso 4 – Cosseno de 20 Hz com Amostragem a 40 Hz . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Conclusão</b>	<b>14</b>

# 1 Introdução

A conversão de sinais analógicos em sinais digitais é um processo fundamental na engenharia de sistemas de processamento de sinais. A teoria da amostragem, formalizada principalmente pelo Teorema de Nyquist-Shannon, estabelece as condições necessárias para que um sinal contínuo no tempo possa ser perfeitamente reconstruído a partir de suas amostras discretas. Essa teoria fornece a base matemática para a interface entre o mundo contínuo (analógico) e o mundo discreto dos sistemas digitais, como computadores e sistemas embarcados.

Este laboratório teve como objetivo explorar, na prática, os conceitos centrais dessa teoria, com ênfase no fenômeno do aliasing, por meio da geração, amostragem e reconstrução de sinais senoidais utilizando o MATLAB. Inicialmente, foi gerado um sinal cossenoidal considerado "analógico" por estar amostrado em uma taxa muito alta. Em seguida, esse sinal foi submetido a dois processos de amostragem: um com taxa superior à taxa de Nyquist (caso de sobreamostragem) e outro com taxa inferior (caso de subamostragem).

As diferentes taxas de amostragem permitiram observar, de forma visual e analítica, os efeitos da escolha da frequência de amostragem na reconstrução do sinal original, demonstrando como o aliasing pode distorcer o conteúdo espectral do sinal. Por fim, foram utilizados gráficos no domínio do tempo e da frequência para comparar os sinais originais, amostrados e reconstruídos, reforçando a importância de seguir os critérios teóricos para evitar perdas de informação.

## 2 Análise de Casos de Amostragem e Aliasing

Nesta seção, são analisados quatro casos distintos de amostragem de sinais cossenoidais, conforme proposto na atividade prática. Para cada caso, foi avaliado se a taxa de amostragem utilizada é suficiente para reconstrução perfeita do sinal ou se ocorre aliasing. A análise inclui a observação dos sinais amostrados, os sinais reconstruídos e seus espectros no domínio da frequência.

### 2.1 Caso 1 – Cosseno de 30 Hz com Amostragem a 50 Hz

Neste primeiro caso, analisamos um sinal cossenoidal de 30 Hz amostrado a 50 Hz. Observa-se que a taxa de amostragem não satisfaz a Lei de Nyquist, que exige que  $F_s \geq 2f_{\text{máx}}$ , ou seja, a taxa de amostragem deve ser pelo menos o dobro da frequência do sinal.

Para efeito de comparação, também foi analisada a amostragem a 60 Hz, que respeita a Lei de Nyquist.

Na Figura 1, apresenta-se o sinal original, o trem de impulsos e, abaixo, o sinal amostrado a 60 Hz.

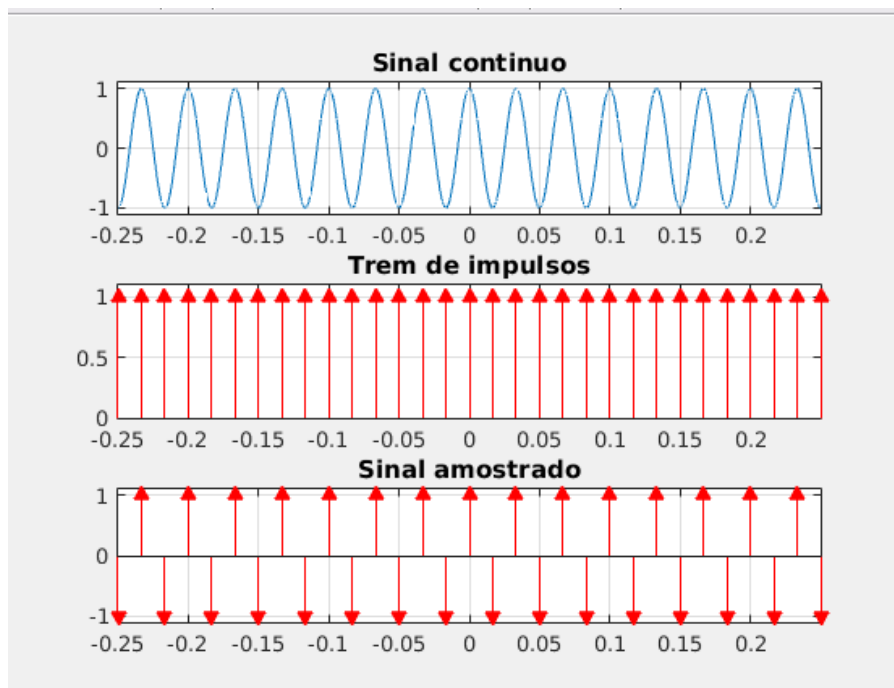


Figura 1: Sinal cosseno de 30 Hz amostrado a 60 Hz

A Figura 2 mostra o mesmo sinal amostrado a 50 Hz.

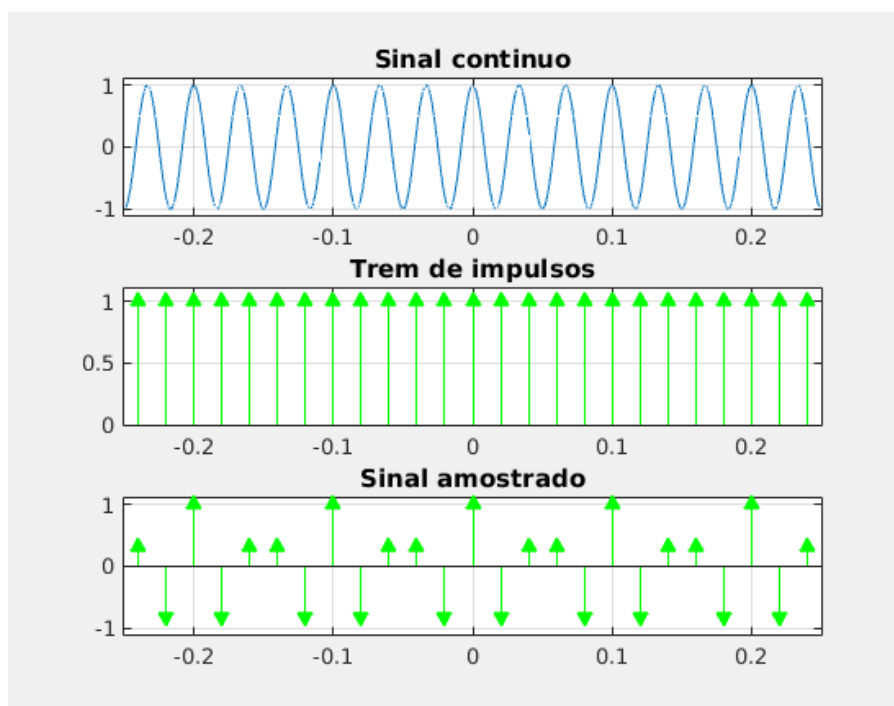


Figura 2: Sinal cosseno de 30 Hz amostrado a 50 Hz

Como a amostragem de 50 Hz não atende à condição de Nyquist, ocorre aliasing. Para determinar a frequência aparente  $F_a$ , utilizamos a equação:

$$F_a = f - mF_s, \quad \text{com} \quad -\frac{F_s}{2} \leq F_a \leq \frac{F_s}{2}$$

Substituindo  $f = 30 \text{ Hz}$  e  $F_s = 50 \text{ Hz}$ :

$$-25 \leq 30 - 50m \leq 25$$

Resolvendo para m:

$$-25 \leq 30 - 50m \implies m \leq 1.1, \quad 30 - 50m \leq 25 \implies m \geq 0.1$$

Portanto, o valor inteiro mais próximo é  $m = 1$ , e a frequência aparente é:

$$F_a = 30 - 50 \cdot 1 = -20 \text{ Hz} \implies F_a = 20 \text{ Hz (módulo)}$$

A Figura 3 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 60 Hz, enquanto a Figura 4 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 50 Hz.

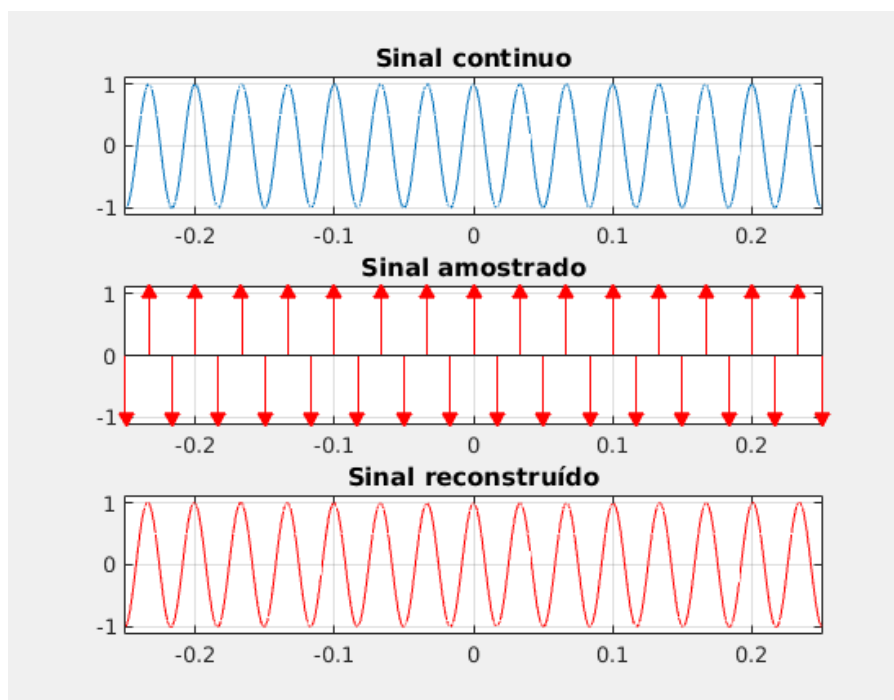


Figura 3: Sinal amostrado a 60 Hz reconstruído

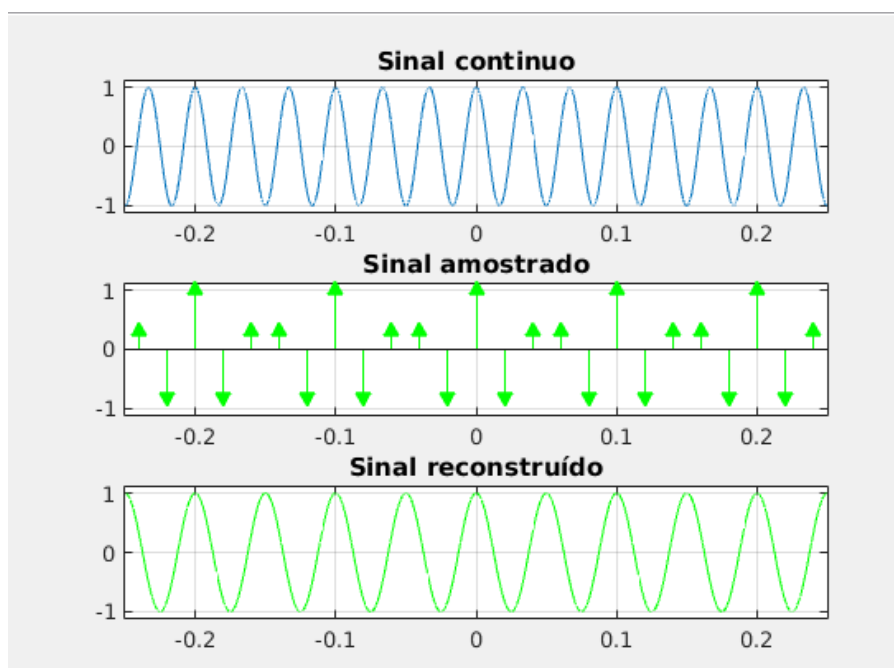


Figura 4: Sinal amostrado a 50 Hz reconstruído

Como esperado, o sinal amostrado a 60 Hz é reconstruído fielmente, enquanto o sinal amostrado a 50 Hz apresenta aliasing, reproduzindo a frequência aparente de 20 Hz.

A Figura 5 apresenta os espectros amostrais dos sinais de entrada e reconstruídos, evidenciando a diferença entre a reconstrução correta e o caso de aliasing.

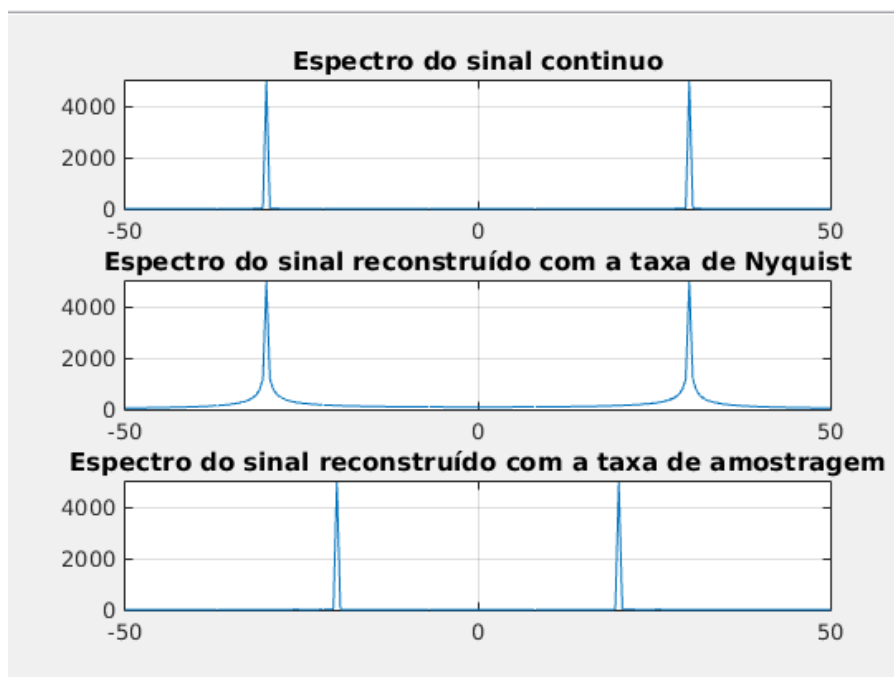


Figura 5: Espectros amostrais do sinal original e sinais reconstruídos

## 2.2 Caso 2 – Cosseno de 40 Hz com Amostragem a 15 Hz

Neste segundo caso fiz a análise de um sinal cossenoidal de 40 Hz amostrado a 15 Hz. Podemos logo de início definir que a taxa de amostragem não satisfaz a lei da amostragem, que exige que a frequência de amostragem seja, no mínimo,  $F_s \geq 2f_{\text{máx}}$

Novamente, para efeito de comparação, também foi analisada a amostragem a uma taxa de amostragem de 80 Hz, que respeita a Lei da amostragem.

Na figura 6 podemos verificar o sinal original, o trem de impulsos e, abaixo, o sinal amostrado a 80 Hz

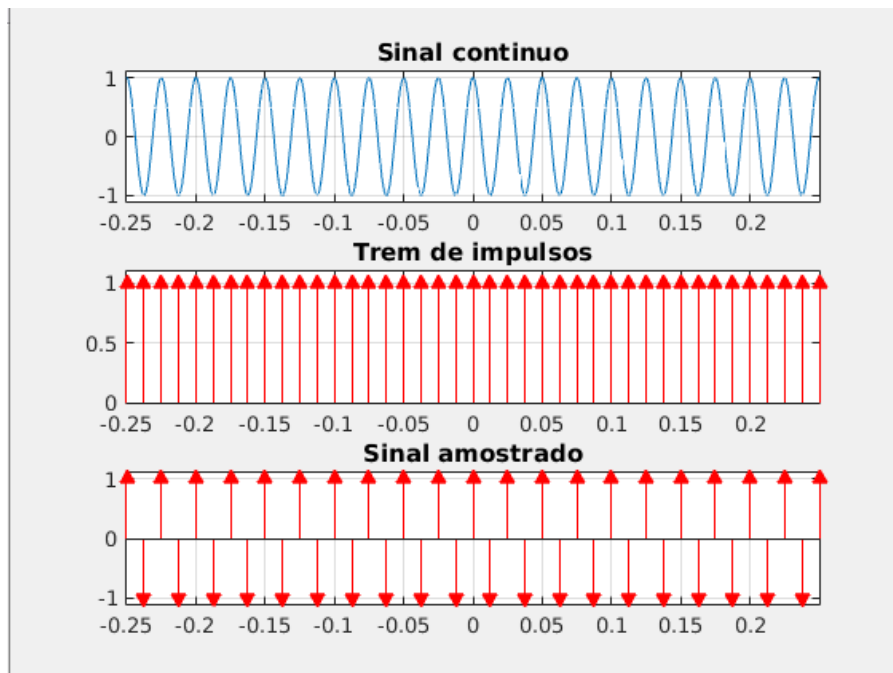


Figura 6: Sinal cosseno de 40 Hz amostrado a 80 Hz

A figura 7 mostra o mesmo sinal amostrado a 15 Hz

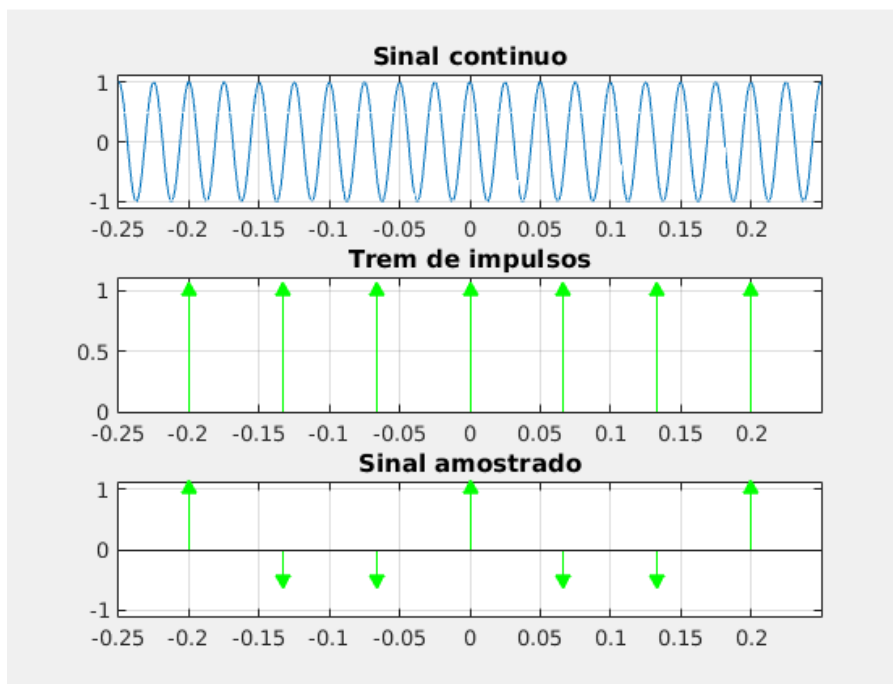


Figura 7: Sinal cosseno de 40 Hz amostrado a 15 Hz

Como a amostragem de 15 Hz não atende a condição de Nyquist, ocorre aliasing. Para determinar a frequência aparente, podemos utilizar a equação 2.1.

Substituindo  $f = 40$  Hz e  $F_s = 15$  Hz:

$$-\frac{15}{2} \leq 40 - 15m \leq \frac{15}{2} \Rightarrow -7.5 \leq 40 - 15m \leq 7.5$$

Resolvendo a desigualdade para  $m$ :

$$-7.5 \leq 40 - 15m \implies -47.5 \leq -15m \implies m \leq 3.1667$$

$$40 - 15m \leq 7.5 \implies -15m \leq -32.5 \implies m \geq 2.1667$$

Como  $m$  deve ser um número inteiro:

$$m = 3$$

Substituindo  $m$  na equação de  $F_a$ :

$$F_a = 40 - 15 \cdot 3 = 40 - 45 = -5 \text{ Hz} \implies F_a = 5 \text{ Hz (módulo)}$$

Portanto, a frequência aparente do sinal é:

$$F_a = 5 \text{ Hz}$$

Observa-se que, como  $F_s < 2f$ , ocorre *aliasing*, e o sinal amostrado apresentará essa frequência aparente.

A figura 8 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 80 Hz, enquanto a figura 9 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 15 Hz.

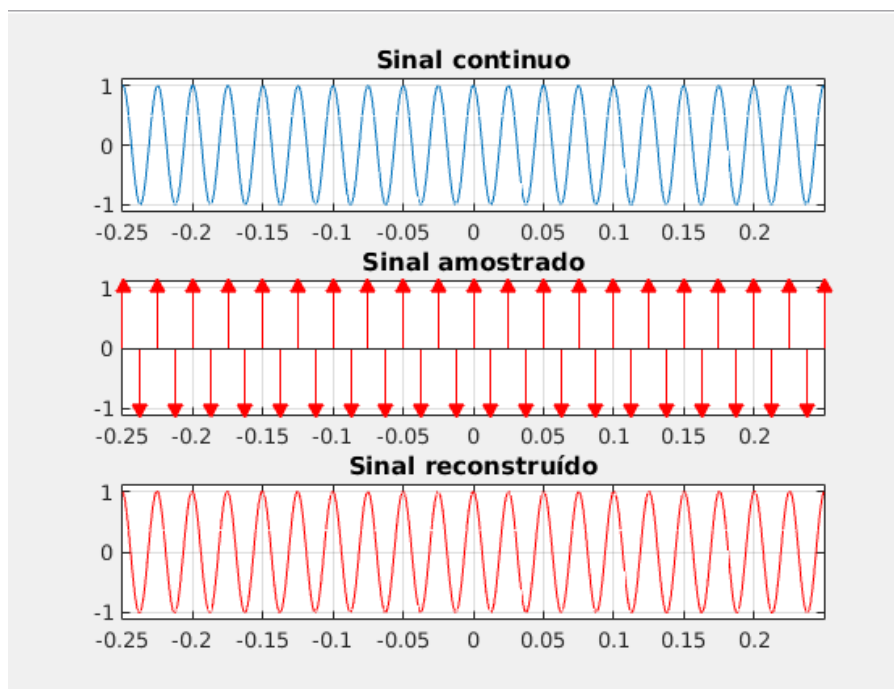


Figura 8: Reconstrução do sinal amostrado a 80Hz



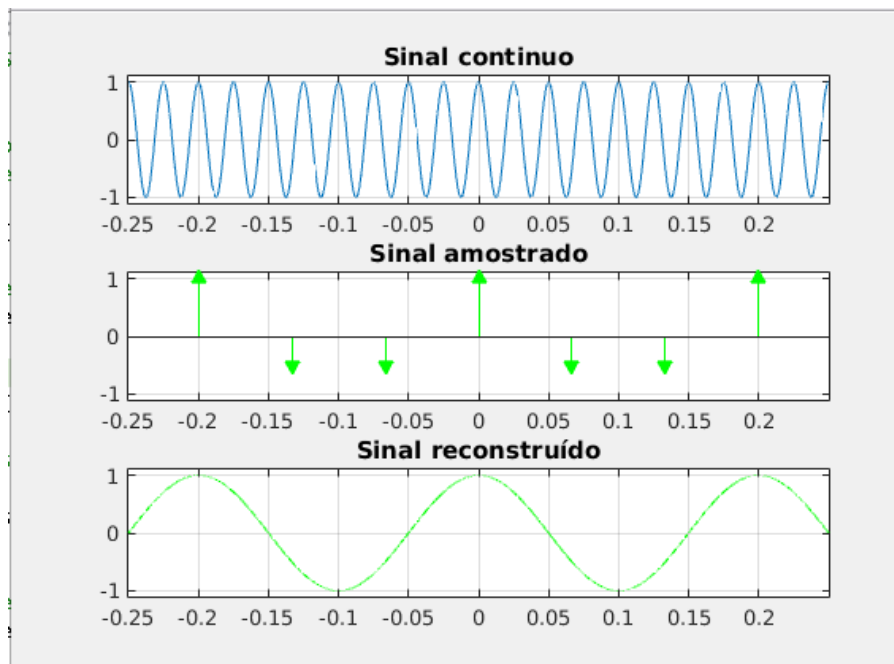


Figura 9: Reconstrução do sinal amostrado a 15Hz

Como já esperávamos, o sinal amostrado a 15 Hz apresenta aliasing, o que reproduz uma frequência aparente de 5 Hz, enquanto o sinal amostrado a 80 Hz é reconstruído fielmente.

A figura 10 apresenta os espectros amostrais dos sinais de entrada e reconstruídos, evidenciando a diferença entre a reconstrução correta e o caso com aliasing.

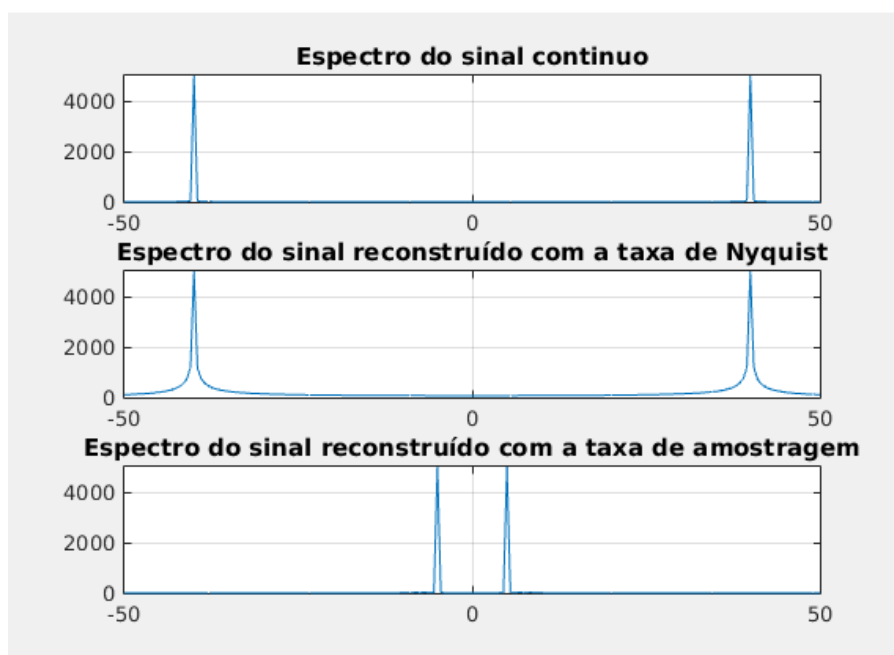


Figura 10: Espectros amostrais

### 2.3 Caso 3 – Cosseno de 10 Hz com Amostragem a 50 Hz

Neste terceiro caso, a análise foi realizado em sinal cossenoidal de 10 Hz amostrado a 50 Hz. Podemos verificar então, que neste caso, a taxa de amostragem satisfaz a lei da amostragem.

Para efeito de comparação, também foi analisada a amostragem a uma taxa de amostragem de 5

Hz, que não respeita a lei de Nyquist.

Na figura 11 podemos ver verificar o sinal original, o trem de impulsos e, abaixo, o sinal amostrado a 50 Hz.

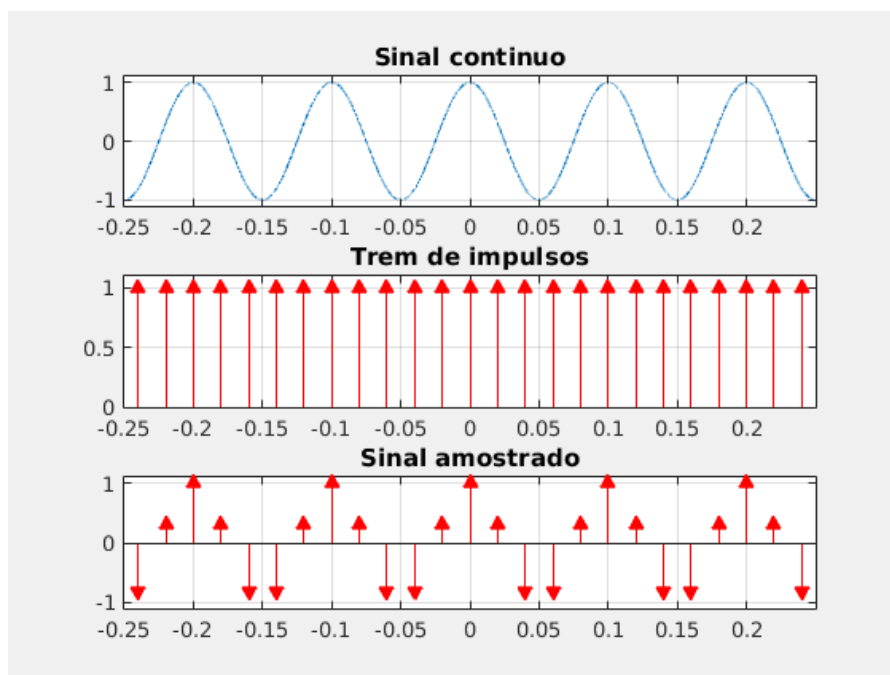


Figura 11: Sinal cosseno de 10 Hz amostrado a 50 Hz

A figura 12 mostra o mesmo sinal amostrado a 5 Hz:

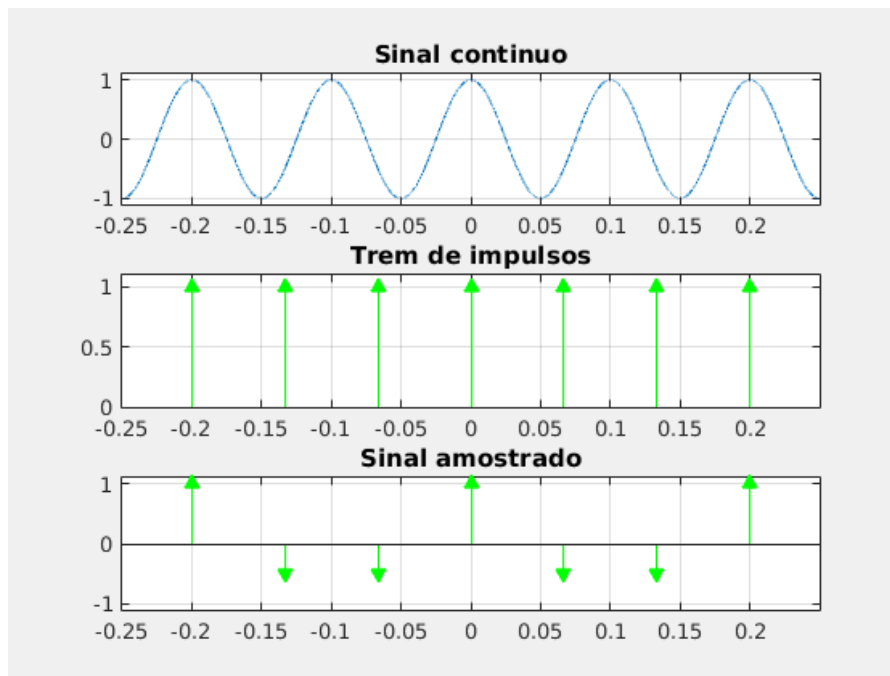


Figura 12: Sinal cosseno de 10 Hz amostrado a 5 Hz

A figura 13 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 50 Hz, enquanto a figura 14 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 5 Hz.

Podemos ver que o caso solicitado na questão nos deu uma superamostragem, o que nos faz conseguir realizar a reconstrução completa do sinal correta, enquanto o caso que fiz para comparar é uma subamostragem, gerando aliasing.

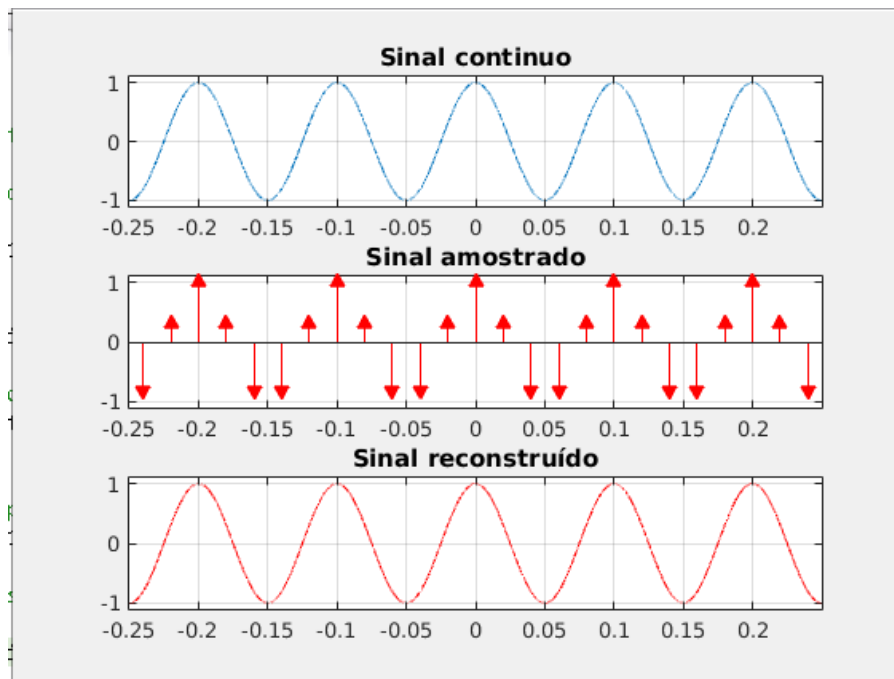


Figura 13: Reconstrução do sinal amostrado a 50 Hz

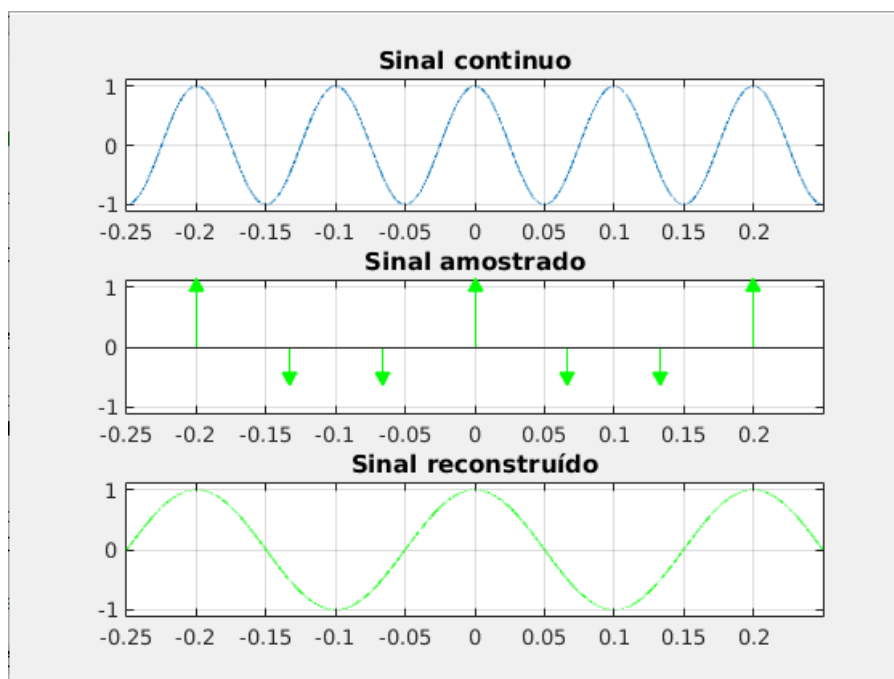


Figura 14: Reconstrução do sinal amostrado a 5 Hz

Por último, podemos analisar, na figura 15 os espectros amostrais que geramos a partir das duas análises feitas. Podemos também avaliar que temos um espectro amostral do sinal reconstruído com a taxa de Nyquist idêntico ao do sinal original, pois temos uma grande escala entre a taxa amostrada e a taxa mínima (A taxa de Nyquist).

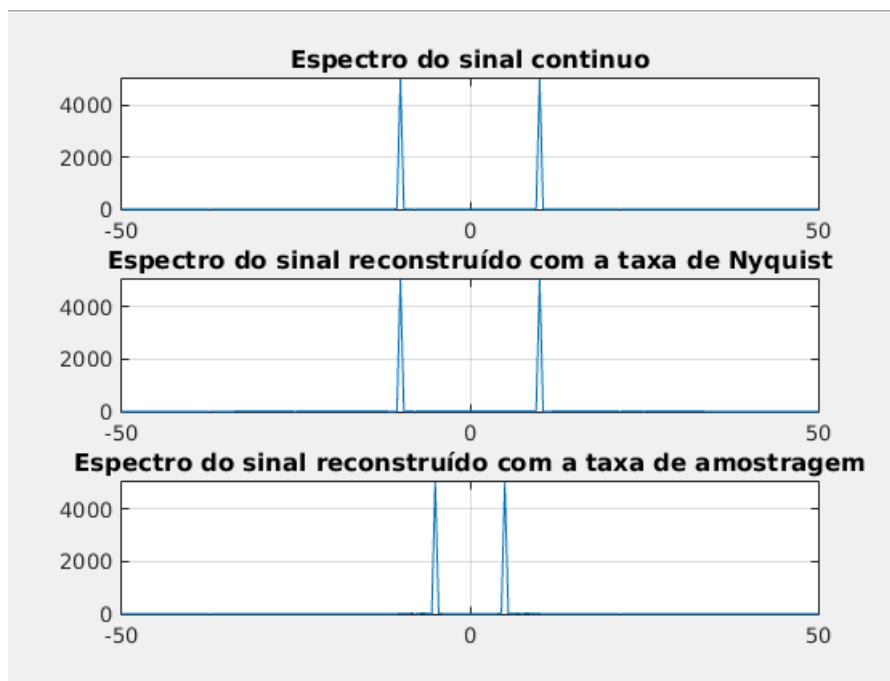


Figura 15: Espectros amostrais

## 2.4 Caso 4 – Cosseno de 20 Hz com Amostragem a 40 Hz

Neste quarto e último caso, a análise foi realizado em sinal cossenoidal de 20 Hz amostrado a 40 Hz. Podemos verificar então, que neste caso, novamente, a taxa de amostragem satisfaz a lei da amostragem.

Para efeito de comparação, também foi analisada a amostragem a uma taxa de amostragem de 10 Hz, que não respeita a lei de Nyquist.

Na figura 16 podemos ver verificar o sinal original, o trem de impulsos e, abaixo, o sinal amostrado a 40 Hz.

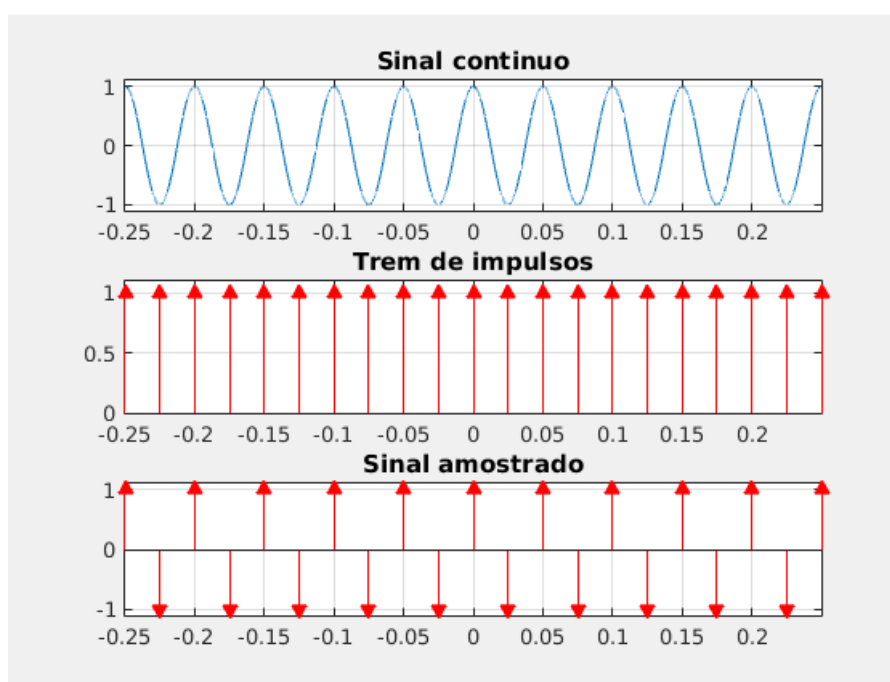


Figura 16: Sinal cosseno de 20 Hz com amostragem de 40 Hz

A figura 17 mostra o mesmo sinal amostrado a 10 Hz:

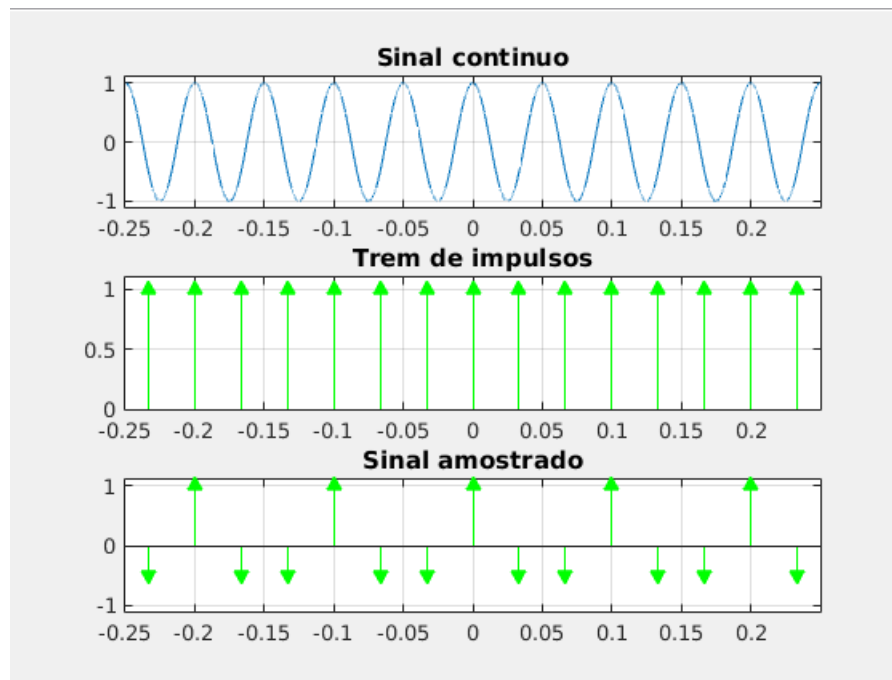


Figura 17: Sinal cosseno de 20 Hz com amostragem de 10 Hz

A figura 18 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 40 Hz, enquanto a figura 19 mostra a reconstrução do sinal amostrado a 10 Hz.

Podemos ver que o caso solicitado na questão, assim como no caso 2.3, nos deu uma superamostragem, o que nos faz conseguir realizar a reconstrução completa do sinal correta, enquanto o caso que fiz para comparar é uma subamostragem, gerando aliasing.

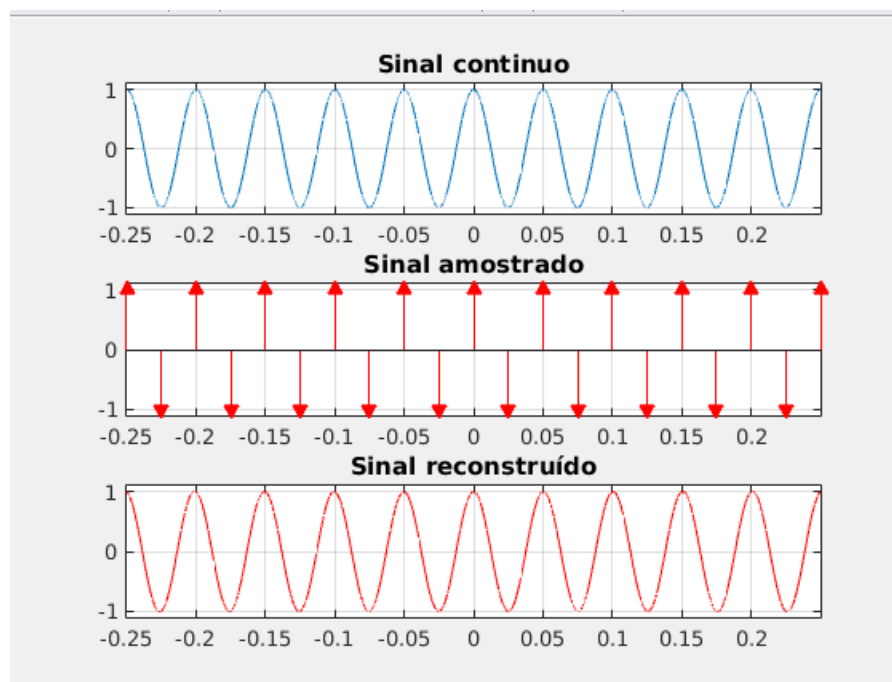


Figura 18: Reconstrução do sinal amostrado a 40 Hz

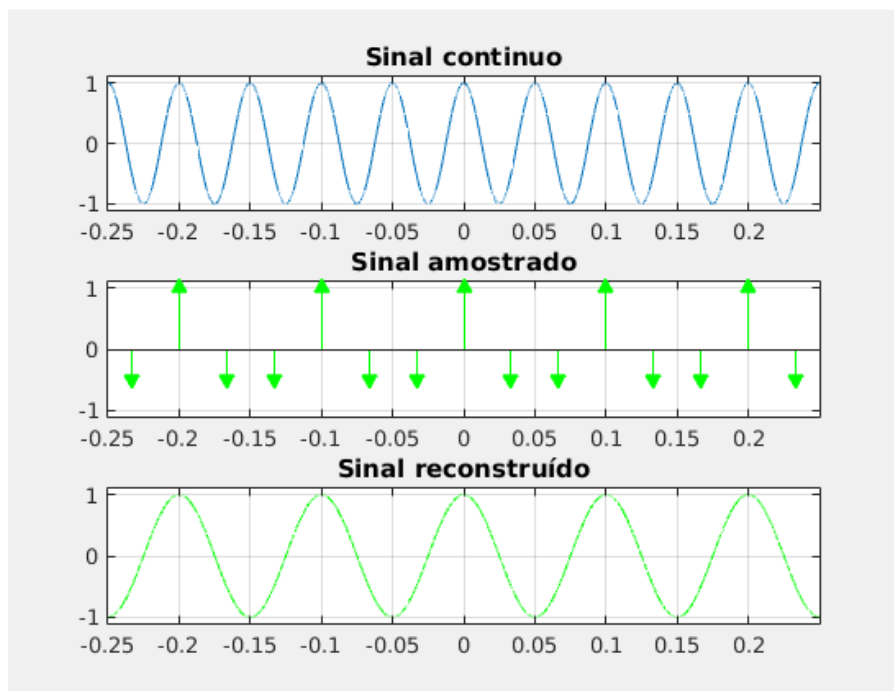


Figura 19: Reconstrução do sinal amostrado a 10 Hz

Por último, podemos analisar, na figura 20 os espectros amostrais que geramos a partir das duas análises feitas. Podemos também avaliar que temos um espectro amostral do sinal reconstruído com a taxa de Nyquist idêntico ao do sinal original, pois temos uma grande escala entre a taxa amostrada e a taxa mínima (A taxa de Nyquist).

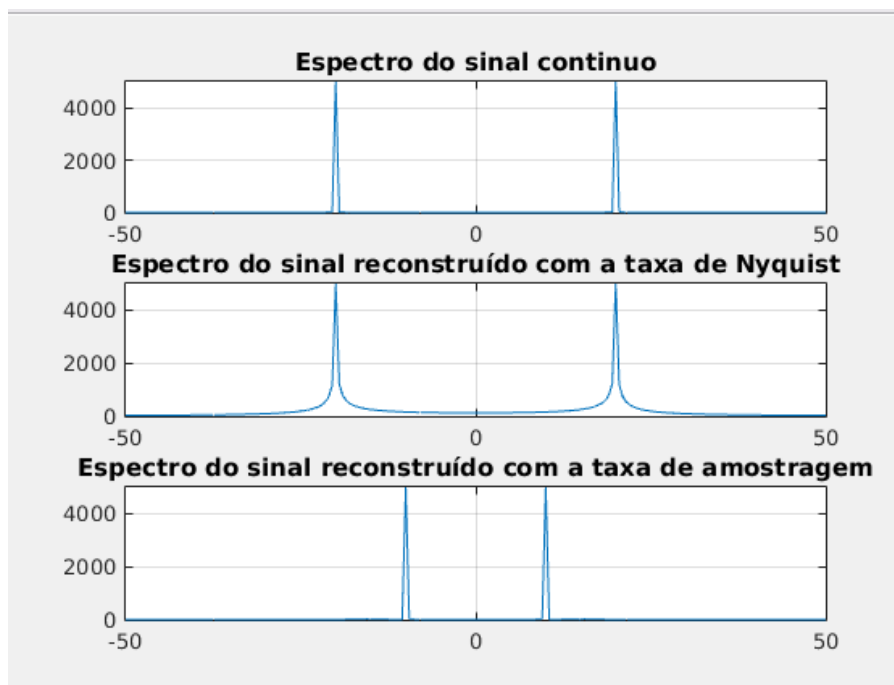


Figura 20: Espectros amostrais

### 3 Conclusão

Nesta atividade prática, analisamos quatro casos distintos de amostragem de sinais cossenoidais, observando o efeito da taxa de amostragem sobre a reconstrução dos sinais e a ocorrência de *aliasing*.

A partir dos casos estudados, podemos destacar os seguintes pontos:

- Quando a taxa de amostragem respeita a Lei de Nyquist ( $F_s \geq 2f_{\text{máx}}$ ), os sinais foram reconstruídos fielmente a partir de suas amostras, independentemente da frequência do sinal analisado.
- Em casos de subamostragem ( $F_s < 2f_{\text{máx}}$ ), observou-se a ocorrência de *aliasing*, caracterizada pela presença de uma frequência aparente diferente da frequência original do sinal. Os valores calculados para a frequência aparente ( $F_a$ ) concordaram com as observações feitas nos sinais reconstruídos e nos espectros amostrais.
- A comparação entre sinais amostrados acima e abaixo da taxa de Nyquist evidenciou claramente a importância de escolher uma taxa de amostragem adequada para garantir a integridade do sinal.
- Os espectros amostrais permitiram visualizar quantitativamente a diferença entre reconstruções corretas e casos de *aliasing*, confirmando a validade dos cálculos teóricos.

Em resumo, esta análise reforça a relevância da Lei de Nyquist na amostragem de sinais e ilustra de forma prática como a escolha inadequada da taxa de amostragem pode comprometer a reconstrução de sinais contínuos. A atividade contribuiu para consolidar a compreensão dos conceitos de *aliasing*, frequência aparente e reconstrução de sinais no domínio do tempo e da frequência.