Álgebra vetorial

Unidade 1/4

Prof. Carlyle Câmara Santos Júnior

Instituto Federal de Santa Catarina – Campus São José
Engenharia de Telecomunicações
Eletromagnetismo (EMG129005) – 5ª Fase

carlyle.camara@ifsc.edu.br

26 de março de 2025

Roteiro

Observações gerais

Conteúdos e objetivos da aula [2]

- Conteúdo:
  1. Álgebra vetorial.
- Objetivo:
  1. Realizar, com proficiência, as operações matemáticas básicas que envolvam grandezas vetoriais no contexto do eletromagnetismo aplicado.

Conceitos básicos

Considerações iniciais [2]

- A álgebra vetorial é a álgebra dos vetores, ou seja, trata-se de um conjunto de regras matemáticas que nos permite realizar operações úteis no estudo do eletromagnetismo.
- Inicialmente, consideraremos exemplos tirados de outras áreas, tais como a física elementar e as nossas experiências do dia a dia.
- A álgebra vetorial trabalha com apenas dois tipos de grandezas: escalares e vetores.
- Além disso, usaremos só quatro operações para os vetores: adição, escalonamento, produto escalar e produto vetorial.
- Uma das grandes vantagens da álgebra vetorial é a sua notação compacta.

Escalares [2]

- Dizemos uma quantidade é **escalar** se, para uma dada posição no espaço e um dado instante no tempo, basta um único número para defini-la.
- Por exemplo, a massa de um corpo e a altitude de uma montanha são exemplos de escalares[1].
- No âmbito do eletromagnetismo, exemplos de quantidades escalares são trabalho, energia, potencial elétrico.
- Fontes escalares também são importantes, como, por exemplo, cargas ou distribuições de cargas elétricas, que são as fontes dos campos elétricos.

[1] Em particular, são grandezas escalares estáticas, pois são independentes do tempo.

Vetores [2]

- Dizemos que uma quantidade é um **vetor** se, para uma dada posição no espaço e um dado instante no tempo, precisamos de dois números: uma magnitude e uma direção.
- Na mecânica, o deslocamento, a velocidade, a aceleração e a força são exemplos de vetores.
- Para perceber a importância da definição de um vetor, podemos considerar a situação de alguém que navega no mar, de modo que é necessário conhecer a intensidade e a direção do vento.
- Para escrever um vetor, usamos a fonte em negrito, como **E** e **H**, ou inserimos uma seta sobre a grandeza, como $\overrightarrow{E}$ e $\overrightarrow{H}$.

Magnitude e direção de vetores [2]

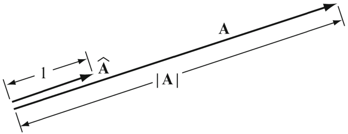
- A magnitude de um vetor é uma quantidade escalar que indicamos desta maneira:

$$A = |\mathbf{A}|. \tag{1}$$

- Para indicar a direção de um vetor, adotamos o conceito de vetor unitário:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{A}. \tag{2}$$

- Na figura a seguir, mostramos um vetor qualquer, juntamente com o seu vetor unitário e a sua magnitude.



Componentes de vetores [2]

- Consideremos o caso do vetor **v** mostrado na figura abaixo:

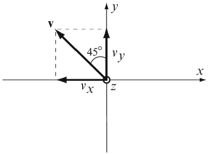
$$\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{x}} v_x + \hat{\mathbf{y}} v_y = -\hat{\mathbf{x}} v \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{\mathbf{y}} v \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3}$$

- Notamos que esse vetor possui componentes nas direções x e y.
- Para a sua magnitude, v, temos:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{4}$$

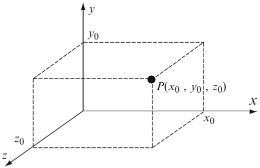
- Quanto à sua direção, calculamos este vetor unitário:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\hat{\mathbf{x}} \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{5}$$



Componentes de vetores [2]

- Genericamente, indicamos um ponto no sistema de coordenadas cartesianas por $P(x_0, y_0, z_0)$.



Componentes de vetores [2]

- Para um vetor **A** que liga dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ quaisquer, temos

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z, \tag{6}$$

em que as componentes A_x, A_y e A_z são dadas por

$$A_x = x_2 - x_1,\ A_y = y_2 - y_1,\ A_z = z_2 - z_1. \tag{7}$$

- Para a sua magnitude, A, temos:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{8}$$

- Quanto à sua direção, calculamos este vetor unitário:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \hat{\mathbf{x}}\frac{x_2 - x_1}{A} + \hat{\mathbf{y}}\frac{y_2 - y_1}{A} + \hat{\mathbf{z}}\frac{z_2 - z_1}{A}. \tag{9}$$

Exemplo 1.2.1 – Enunciado [2]

- Dado o vetor $\mathbf{A} = -5\hat{\mathbf{x}} - (3x + 2)\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$, calcule:
  (a) As componentes escalares do vetor nas direções x, y e z.
  (b) A magnitude do vetor.
  (c) O vetor unitário na direção de $\mathbf{A}$.

Exemplo 1.2.1 – Solução [2]

(a) As componentes A_x, A_y e A_z são expressas assim:

$$A_x = -5,\ A_y = -(3x + 2),\ A_z = 1.$$

(b) Para a sua magnitude, A, temos:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{9x^2 + 12x + 30}.$$

- Quanto à sua direção, calculamos este vetor unitário:

$$\hat{\mathbf{A}} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{5}{\sqrt{9x^2 + 12x + 30}} - \hat{\mathbf{y}}\frac{3x + 2}{\sqrt{9x^2 + 12x + 30}} + \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{\sqrt{9x^2 + 12x + 30}}.$$

Exercício 1.2.1 – Enunciado [2]

- Uma aeronave decola com um ângulo de 60° e uma velocidade de 180 km/h na direção nordeste-sudoeste. Com base em um sistema de coordenadas em que o semieixo x positivo corresponde ao leste, o semieixo y positivo é o norte e o semieixo z positivo coincide com a direção para acima, determine[2]:
  (a) O vetor velocidade da aeronave.
  (b) A sua direção no espaço.
  (c) A sua velocidade no solo, ou seja, a velocidade da sombra da aeronave no chão.

[2] (a) $\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{x}}17{,}678 - \hat{\mathbf{y}}17{,}678 + \hat{\mathbf{z}}43{,}3$ [m/s]; (b) $\hat{\mathbf{v}} = -\hat{\mathbf{x}}\sqrt{2}/4 - \hat{\mathbf{y}}\sqrt{2}/4 + \hat{\mathbf{z}}\sqrt{3}/2$ [m/s]; $\mathbf{v}_g = -\hat{\mathbf{x}}17{,}678 - \hat{\mathbf{y}}17{,}678$ [m/s].

Adição de vetores [1]

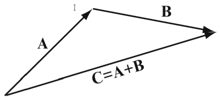
- A soma de vetores é possivelmente a operação mais usada.
- Dados dois vetores $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$, definimos a soma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ como

$$\mathbf{C} = C_x\hat{\mathbf{x}} + C_y\hat{\mathbf{y}} + C_z\hat{\mathbf{z}} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}. \tag{10}$$

Adição de vetores [1]

- A soma de vetores é possivelmente a operação mais usada.
- Dados dois vetores $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$, definimos a soma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ como

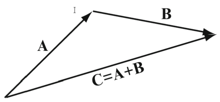
$$\mathbf{C} = C_x\hat{\mathbf{x}} + C_y\hat{\mathbf{y}} + C_z\hat{\mathbf{z}} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}. \tag{10}$$

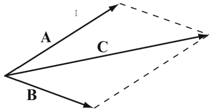


Adição de vetores [1]

- A soma de vetores é possivelmente a operação mais usada.
- Dados dois vetores $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$, definimos a soma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ como

$$\mathbf{C} = C_x\hat{\mathbf{x}} + C_y\hat{\mathbf{y}} + C_z\hat{\mathbf{z}} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}. \tag{10}$$

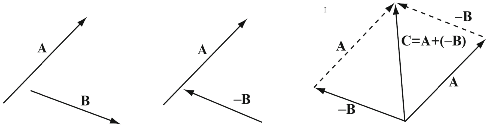




Subtração de vetores [2]

- Definimos a subtração de vetores como um caso particular da soma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = A\hat{\mathbf{A}} + B(-\hat{\mathbf{B}}). \tag{11}$$



Exemplo 1.2.2 – Enunciado [2]

- Dois vetores **A** e **B** representam os vetores de velocidade de duas aeronaves, com $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = 4\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{z}}$. Calcule:
  (a) A soma dos dois vetores.
  (b) As diferenças $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, as quais representam, respectivamente, a velocidade relativa de **A** em relação a **B** e de **B** em relação a **A**.

Exemplo 1.2.2 – Solução [2]

(a) Para a soma entre os dois vetores, temos:

$$\mathbf{C} = 5\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}.$$

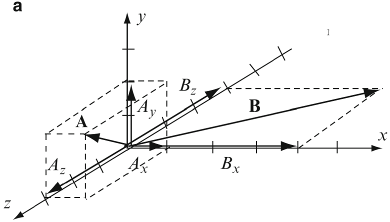
Exemplo 1.2.2 – Solução [2]

(a) Para a soma entre os dois vetores, temos:

$$\mathbf{C} = 5\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}.$$

- Na figura à esquerda, exibimos a decomposição de **A** e **B** em componentes.

a

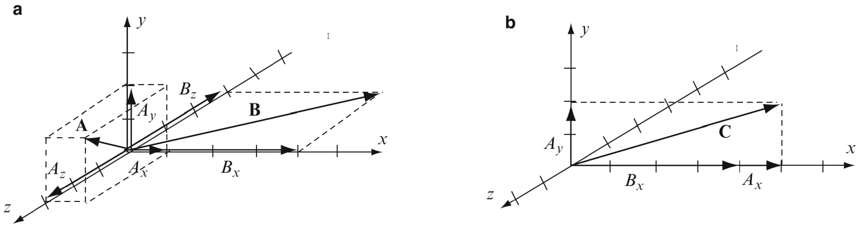


Exemplo 1.2.2 – Solução [2]

(a) Para a soma entre os dois vetores, temos:

$$\mathbf{C} = 5\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}.$$

- Na figura à esquerda, exibimos a decomposição de **A** e **B** em componentes.
- Na figura à direita, apresentamos o processo de adição entre os dois vetores dados.



Exemplo 1.2.2 – Solução [2]

(b) Representamos a diferença $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ por $\mathbf{D}$, de tal modo que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{A} - \mathbf{B} \\
&= -3\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 6\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned}
$$

- Por outro lado, indicamos a diferença $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ por $\mathbf{E}$, o que nos leva ao seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{B} - \mathbf{A} \\
&= 3\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} - 6\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned}
$$

Exercício 1.2.2 – Enunciado [2]

- Dados três vetores $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{B} = 4\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{C} = -4\hat{\mathbf{x}}$, calcule[3]:
  (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$.
  (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} - 2\mathbf{C}$.
  (c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}$.
  (d) O vetor unitário na direção de $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}$.

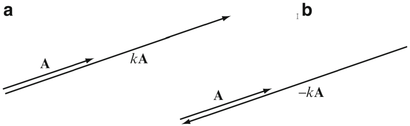
[3](a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{z}}$; (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} - 2\mathbf{C} = 13\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{z}}$; (c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C} = \hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}}$; (d) $-0{,}8538\hat{\mathbf{x}} + 0{,}4657\hat{\mathbf{y}} - 0{,}2328\hat{\mathbf{z}}$.

Escalonamento [2]

- Podemos escalonar um vetor **A** ao multiplicar a sua magnitude por um escalar k:

$$k\mathbf{A} = k(A\hat{\mathbf{A}}) = (kA)\hat{\mathbf{A}}. \tag{12}$$

- Se o número k for positivo, então o escalonamento equivale a "esticar" ou reduzir o vetor **A** sem alterar a sua direção.
- Em contrapartida, se o número k for negativo, então o escalonamento multiplica a magnitude do vetor por $|k|$ e inverte a sua direção, conforme mostrado na figura abaixo.



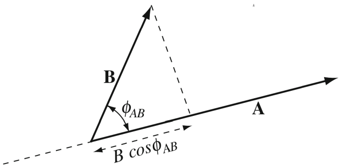
Produtos de vetores

Produto escalar [2]

- O produto escalar recebe esse nome porque se trata de uma multiplicação entre vetores que resulta em um escalar.
- Denotamos o produto escalar entre **A** e **B** por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e o definimos assim:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} := AB \cos \phi_{AB}, \tag{13}$$

  em que ϕ_{AB} é o menor ângulo entre os vetores, conforme imagem a seguir.
- Podemos interpretar o produto escalar como a multiplicação entre a magnitude de **A** e a magnitude da projeção de **B** na direção de **A** ou vice-versa.



Produto escalar [2]

- No sistema de coordenadas cartesianas, calculamos o produto escalar a partir das componentes dos dois vetores:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{14}$$

- Assim, não é necessário determinar o menor ângulo entre os dois vetores.
- Em particular, verificamos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2. \tag{15}$$

- O produto escalar cumpre algumas propriedades, entre as quais destacamos estas:
  1. O produto escalar entre dois vetores perpendiculares entre si é nulo, porque, nesse caso, $\phi_{AB} = \pi/2$ rad (90°).
  2. O módulo do produto escalar é menor do que ou igual ao produto entre as magnitudes dos dois vetores: $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leq AB$.

Exemplo 1.2.3 – Enunciado [2]

- Calcule a projeção de um vetor genérico **A** sobre outro vetor genérico **B**, bem como a componente vetorial de **A** na direção de **B**.

Exemplo 1.2.3 – Solução [2]

- A projeção do vetor **A** sobre o vetor **B** é $A\cos\phi_{AB}$, ou seja,

$$A\cos\phi_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{B} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}.$$

- Essa projeção é a magnitude da componente vetorial de **A** na direção de **B**.
- Além disso, a sua direção é dada pelo vetor unitário na direção de **B**, o qual vale

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}.$$

Exemplo 1.2.3 – Solução (cont.) [2]

- Portanto, esta é a componente vetorial de **A** na direção de **B**:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A_B} &= A\cos\phi_{AB}\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{B^2}\mathbf{B} \\
&= \frac{(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)B_x}{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)B_y}{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\hat{\mathbf{y}} \\
&+ \frac{(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)B_z}{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned}
$$

Exercício 1.2.3 – Enunciado [2]

- Aplique o resultado do Exemplo 1.2.3 aos vetores $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$.

Exemplo 1.2.4 – Enunciado [2]

- Dados dois vetores $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$, calcule o menor ângulo entre eles.

Exemplo 1.2.4 – Solução [2]

- Com base na Eq. (13), sabemos que

$$\cos\phi_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \Rightarrow \phi_{AB} = \operatorname{arccos}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right).$$

- Assim, encontramos primeiramente as magnitudes dos dois vetores:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = 3\sqrt{3};$$
$$B = |\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = 3\sqrt{3}.$$

- Agora, obtemos o produto escalar:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 23.$$

- Por fim, encontramos o ângulo ϕ_{AB}:

$$\cos\phi_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = 0{,}85185 \Rightarrow \phi_{AB} = \operatorname{arccos}(0{,}85185) = 31°35'.$$

Exercício 1.2.4 – Enunciado [2]

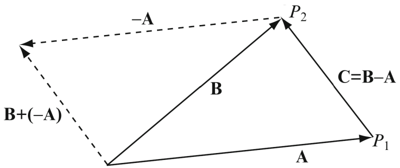
- Dados dois vetores $\mathbf{A} = -3\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}$, calcule o menor ângulo entre eles.

Exemplo 1.2.5 – Enunciado [2]

- Considere, mais uma vez, os dois vetores do Exemplo 1.2.4, conforme mostra a figura abaixo.
  (a) Demonstre a chamada lei dos cossenos, isto é, mostre que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é calculada pela fórmula

$$d = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\phi_{AB}}.$$

  (b) Encontre essa distância para os dois vetores em questão.



Exemplo 1.2.5 – Solução [2]

(a) De início, consideramos o vetor $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, que está orientado do ponto P_1 até o ponto P_2.

- A distância procurada é a magnitude desse vetor, C, que calculamos a partir do produto escalar:

$$C^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$$
$$\Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\phi_{AB}}.$$

(b) Para os dois vetores do Exemplo 1.2.4, $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$, já constatamos que $A = 3\sqrt{3}$, $B = 3\sqrt{3}$ e $\cos\phi_{AB} = 0{,}85185$, logo

$$d = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\phi_{AB}} = 2{,}828.$$

Exercício 1.2.5 – Enunciado [2]

- Um avião voa a uma velocidade $\mathbf{v} = 100\hat{\mathbf{x}} + 500\hat{\mathbf{y}} + 200\hat{\mathbf{z}}$. Determine a velocidade desse avião na direção do vetor $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ [4].

[4] $\mathbf{v_A} = (800/3)\hat{\mathbf{x}} + (800/3)\hat{\mathbf{y}} + (800/3)\hat{\mathbf{z}}$.

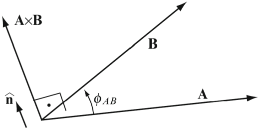
Produto vetorial [2]

- O produto vetorial recebe esse nome porque se trata de uma multiplicação entre vetores que resulta em um vetor.
- Denotamos o produto vetorial entre **A** e **B** por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e o definimos assim:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} := |AB \operatorname{sen} \phi_{AB}|\hat{\mathbf{n}}, \tag{16}$$

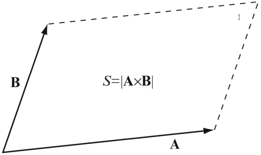
em que ϕ_{AB} é o menor ângulo entre os vetores e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal ao plano formado pelos vetores **A** e **B**, conforme imagem a seguir.

- Para identificar o vetor unitário, usamos a regra da mão direita.



Produto vetorial [2]

- Interpretamos a magnitude do produto vetorial como a área do paralelogramo formado pelos dois vetores e por linhas paralelas a eles, como ilustra a figura abaixo.
- O produto vetorial cumpre algumas propriedades, entre as quais destacamos estas:
  1. O produto vetorial não é comutativo, posto que
  $$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \tag{17}$$
  2. O produto vetorial entre dois vetores paralelos é sempre nulo, pois, nesse caso, $\operatorname{sen} \phi_{AB} = 0$.



Produto vetorial [2]

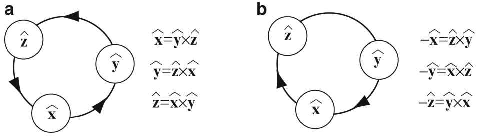
- No sistema de coordenadas cartesianas, calculamos o produto vetorial a partir das componentes dos dois vetores:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{z}}. \tag{18}$$

- Podemos expressar esse resultado como um determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{19}$$

- Ressaltamos que existe uma relação cíclica entre os produtos dos vetores unitários no sistema de coordenadas cartesianas, como ilustra a figura abaixo.



Exemplo 1.2.6 – Enunciado [2]

- Este exemplo apresenta a aplicação do produto vetorial para a determinação de um vetor normal a um plano.
  (a) Encontre um vetor normal ao plano que contenha os pontos $P_1(0{,}1{,}0)$, $P_2(1{,}0{,}1)$ e $P_3(0{,}0{,}1)$.
  (b) Encontre o vetor unitário correspondente.

Exemplo 1.2.6 – Solução [2]

(a) Como o produto vetorial entre dois vetores é normal a ambos, basta que encontremos dois vetores localizados no plano em questão.

- Para encontrar dois vetores no plano, usamos dois pares de pontos:
  1. Definimos o vetor $\mathbf{A}$ como o vetor que aponta de P_1 para P_2:

$$\mathbf{A} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}.$$

  2. Definimos o vetor $\mathbf{B}$ como o vetor que aponta de P_1 para P_3:

$$\mathbf{B} = (x_3 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_3 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_3 - z_1)\hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}.$$

- O produto vetorial, $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, é normal ao plano:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}.$$

Exemplo 1.2.6 – Solução (cont.) [2]

(b) Para encontrar o vetor unitário normal ao plano, podemos aplicar a Eq. (2) ou a definição de produto vetorial, a Eq. (16):

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|AB \operatorname{sen} \phi_{AB}|}.$$

- Utilizamos o produto escalar para obter o ângulo ϕ_{AB}:

$$\begin{aligned}\phi_{AB} &= \arccos\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\right) = 35°16'\end{aligned}$$

- Com isso, resolvemos a questão:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} &= \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|AB \operatorname{sen} \phi_{AB}|} \\ &= \frac{-\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}}{|\sqrt{6} \operatorname{sen}(35°16')|} = -0{,}7071\hat{\mathbf{y}} - 0{,}7071\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.6 – Solução (cont.) [2]

(b) Notamos que esse resultado é idêntico ao que encontramos por meio da Eq. (2):

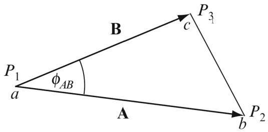
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}$$
$$= \frac{-\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}} = -0{,}7071\hat{\mathbf{y}} - 0{,}7071\hat{\mathbf{z}}.$$

Exercício 1.2.6 – Enunciado [2]

- O vetor $\mathbf{C} = 17\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} - 11\hat{\mathbf{z}}$ é perpendicular ao plano que contém os vetores $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = 3\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$. Demonstre que o produto vetorial entre **C** e **A** (ou entre **C** e **B**) também pertence ao plano de **A** e **B**.

Exemplo 1.2.7 – Enunciado [2]

- Calcule a área de um triângulo cujos vértices sejam três pontos genéricos, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ e $P_3(x_3,y_3,z_3)$.



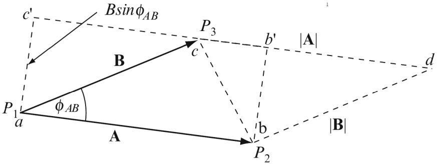
Exemplo 1.2.7 – Solução [2]

- Notamos que a área do triângulo abc vale metade da área do paralelogramo abcd, portanto

$$S_{abc} = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{2},$$

em que o vetor **A** aponta de P_1 para P_2 e o vetor **B** aponta de P_1 para P_3:

$$\mathbf{A} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}};$$
$$\mathbf{B} = (x_3 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_3 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_3 - z_1)\hat{\mathbf{z}}.$$



Exemplo 1.2.7 – Solução (cont.) [2]

- Através do determinante, encontramos a área do triângulo

$$
\begin{aligned}
S_{abc} &= \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right\|
\end{aligned}
$$

Exercício 1.2.7 – Enunciado [2]

- Calcule a área do triângulo cujos vértices sejam os três pontos $P_1(1,3,0)$, $P_2(1,2,1)$ e $P_3(3,5,2)$[5].

[5] $\sqrt{6} \approx 2{,}4495$ m^2.

Exemplo 1.2.8 – Enunciado [2]

- Em coordenadas cartesianas, a equação geral de um plano é $ax + by + cz + d = 0$, a qual pode ser obtida a partir da expressão $f(x,y,z) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} = 0$, em que $\mathbf{n}$ é um vetor normal ao plano e $\mathbf{C}$ é um vetor qualquer pertencente ao plano.
  (a) Dados três pontos $P_1(1,0,2)$, $P_2(3,1,-2)$ e $P_3(2,3,2)$, determine a equação do plano que os contenha.
  (b) Demonstre que a equação do plano pode ser escrita como

$$f(x,y,z) = n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0,$$

em que n_x, n_y e n_z são as componentes escalares de um vetor unitário normal ao plano e (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de um ponto do plano.

Exemplo 1.2.8 – Solução [2]

(a) A partir dos três pontos dados, definimos dois vetores, um deles (**A**) aponta de P_1 para P_2 e o outro (**B**), de P_1 para P_3:

$$\mathbf{A} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}};$$
$$\mathbf{B} = (x_3 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_3 - y_1)\hat{\mathbf{y}} + (z_3 - z_1)\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}}.$$

- Achamos um vetor normal ao plano através do produto vetorial:

$$\mathbf{n} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 12\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}.$$

- Para definir o vetor **C**, consideramos um ponto qualquer $P_q(x, y, z)$ e um dos três pontos dados (P_1, por exemplo):

$$\mathbf{C} = (x - 1)\hat{\mathbf{x}} + (y - 0)\hat{\mathbf{y}} + (z - 2)\hat{\mathbf{z}}.$$

Exemplo 1.2.8 – Solução (cont.) [2]

- Ao reunir as informações precedentes, escrevemos a equação do plano assim:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \mathbf{n}\cdot\mathbf{C} = 0 \\ &= (12\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}})\cdot[(x-1)\hat{\mathbf{x}} + (y-0)\hat{\mathbf{y}} + (z-2)\hat{\mathbf{z}}] = 0 \\ &= 12x - 4y + 5z - 22 = 0. \end{aligned}$$

(b) De início, calculamos o vetor unitário normal ao plano:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{12}{\sqrt{185}}\hat{\mathbf{x}} - \frac{4}{\sqrt{185}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{5}{\sqrt{185}}\hat{\mathbf{z}}.$$

- Para o ponto (x_0,y_0,z_0), podemos usar, por exemplo, P_3, de modo que a equação do plano se torna

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{12}{\sqrt{185}}(x-2) - \frac{4}{\sqrt{185}}(y-3) + \frac{5}{\sqrt{185}}(z-2) = 0 \\ &= 12x - 4y + 5z - 22 = 0, \end{aligned}$$

o que é um resultado idêntico ao da letra a.

Exercício 1.2.8 – Enunciado [2]

- Encontre um vetor unitário que seja normal a ambos os vetores $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} - 5\hat{\mathbf{y}}$[6].

[6]Por exemplo, $\hat{\mathbf{n}} = (-5\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - 8\hat{\mathbf{z}})/(3\sqrt{10})$.

Produtos múltiplos [2]

- Definimos o produto vetorial triplo da seguinte maneira:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \tag{20}$$

- Ressaltamos que o produto vetorial triplo não é associativo, ou seja,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}. \tag{21}$$

- Definimos o produto escalar triplo assim:

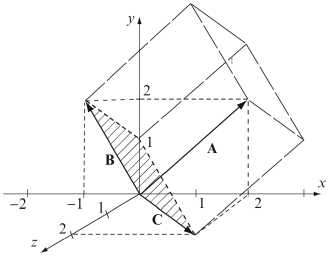
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \tag{22}$$

- O produto escalar triplo representa o volume definido pelo três vetores.
- Para calculá-lo, podemos usar o determinante de uma matriz:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Exemplo 1.2.9 – Enunciado [2]

- Determine o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{B} = -2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{z}}$.



Exemplo 1.2.9 – Solução [2]

- Calculamos o volume de um paralelepípedo por meio do produtto escalar triplo entre os três vetores conhecidos:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16\ [\mathrm{m}^3].$$

Exercício 1.2.9 – Enunciado [2]

- Através do cálculo direto do produto escalar triplo, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, demonstre que a relação dada na Eq. (23) está correta.

Exemplo 1.2.10 – Enunciado [2]

- Considere, mais uma vez, os três vetores do Exemplo 1.2.9.
  (a) Calcule o produto vetorial triplo $\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$.
  (b) Demonstre que o vetor resultante pertence ao plano formado por $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$.

Exemplo 1.2.10 – Solução [2]

(a) Encontramos o produto vetorial triplo a partir da Eq. (20), com a troca de posições entre **A** e **B**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}).$$

- Os produtos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ se exprimem deste modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= -2, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= 0. \end{aligned}$$

- Portanto, verificamos o seguinte resultado para o produto vetorial triplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{A}(-2) - 0 = -4\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.10 – Solução (cont.) [2]

(b) A forma mais fácil de demonstrar que o vetor **D** está no plano formado por **A** e **C** é comprovar que o produto escalar triplo $\mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$ é nulo.

- Em outras palavras, devemos verificar que o paralelepípedo definido pelos vetores **D**, **A** e **C** possui volume nulo, o que só ocorre se os três vetores forem coplanares.
- Assim, calculamos o determinante correspondente:

$$\mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

o que constata que, de fato, o vetor **D** está no plano formado por **A** e **C**.

Exercício 1.2.10 – Enunciado [2]

- Através do cálculo direto do produto vetorial triplo, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, demonstre que a relação dada na Eq. (20) está correta.

Síntese

Considerações finais

- Uma grandeza escalar que aquela que necessita de um único número para ser bem determinada.
- Por outro lado, uma grandeza vetorial requer dois números para ser bem definida (uma magnitude e uma direção).
- Para vetores, estabelecemos quatro operações: adição, escalonamento, produto escalar e produto vetorial.
- Para realizar a soma entre dois vetores, só precisamos adicionar as coordenadas correspondentes.
- Podemos interpretar o produto escalar como a multiplicação entre a magnitude de $\mathbf{A}$ e a magnitude da projeção de $\mathbf{B}$ na direção de $\mathbf{A}$ ou vice-versa.
- Interpretamos a magnitude do produto vetorial como a área do paralelogramo formado pelos dois vetores e por linhas paralelas a eles.
- O produto escalar triplo representa o volume definido pelo três vetores envolvidos nessa operação.

Referências

Referências I

[1] FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert P.; SANDS, Matthew. *The Feynman Lectures on Physics, Volume II: Mainly Electromagnetism and Matter*. 12.ed. Nova Iorque: Basic Books, 2010. ISBN: 978-0-465-07998-8.

[2] IDA, Nathan. *Engineering Electromagnetics*. 3. ed. Suíça: Springer International Publishing, 2015. ISBN: 978-052-178-988-2.