Математическая физика

Курс лекций
Фроловой Елены Вениаминовны

Математическая физика

Под редакцией В. А. Кобозевой

План экзаменационных вопросов для студентов астрономического отделения математико-механического факультета СПбГУ

Санкт-Петербург 2022

§ 1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Пусть есть некоторая область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и есть функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, причем $u \in C^2(\Omega)$.

Будем обозначать частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ как u_{x_i} $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.

Запишем общий вид линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) в частных производных второго порядка:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \tag{1}$$

где первое слагаемое представляет собой старшие члены, а второе и третье — младшие члены, которые не меняют тип уравнения. Поговорим об этом подробнее.

Тип уравнения определяется матрицей коэффициентов A размера $n \times n$ с элементами a_{ij}. Не умаляя общности, можем считать, что матрица A симметрична:

$$u \in C^2 \quad \Rightarrow \quad u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если же A не является симметричной матрицей, то можно сделать замену

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2},$$

то есть всегда подразумевается, что A все-таки симметричная. Кроме этого, предположим, что A также постоянна (имеет постоянные коэффициенты). Различают следующие типы уравнений:

I. Если все собственные числа матрицы A одного знака, то уравнение *эллиптического типа.*

II. Если одно собственное число матрицы A противоположно по знаку остальным, то уравнение *гиперболического типа.*

III. Если одно собственное число матрицы A равно нулю, а все остальные одного знака, то уравнение *параболического типа.*

Если же коэффициенты матрицы A не постоянные, то типы уравнений останутся теми же, но в каждой точке уравнение будет иметь свой тип ($x \in \Omega_1 \subset \Omega$).

Пусть $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Рассмотрим

$$u_{xx} - y u_{yy} = 0.$$

Это уравнение меняет свой тип в зависимости от знака y. Запишем матрицу коэффициентов и ее собственные числа:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -y. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение имеет эллиптический тип при $y < 0$ и гиперболический при $y > 0$.

Заметим, что данная классификация не охватывает все возможные уравнения (например, в $\mathbb{R}^3$ можем иметь собственные числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$), но уравнения, описывающие физические явления, принадлежат одному из этих трех типов. Что касается $\mathbb{R}^2$, то данная классификация покрывает все возможные уравнения.

Приведем несколько примеров определения типов уравнений.

1. Уравнение Пуассона $\Delta u = f$ или уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Распишем оператор Лапласа функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

   $$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_n x_n}.$$

   Матрица коэффициентов данных уравнений

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = E_n,$$

   следовательно, уравнения имеют эллиптический тип.

2. Уравнение колебаний струны $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$.
   Здесь функция $u = u(x,t)$, где $x \in \mathbb{R}([a,b])$. Матрица коэффициентов
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}, \quad a > 0,$$
   значит, уравнение имеет гиперболический тип. Аналогичным образом тип определяется в n-мерном случае.
   Волновое уравнение $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ (оператор Лапласа берется только по пространственным переменным). Матрица коэффициентов размера $(n+1) \times (n+1)$
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a^2 \end{pmatrix},$$
   это уравнение также гиперболеческого типа.

3. Уравнение теплопроводности $u_t - a^2 u_{xx} = f$.
   Здесь функция $u = u(x,t)$, где $x \in \mathbb{R}$.
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}, \quad a > 0,$$
   следовательно, данное уравнение имеет параболический тип.

§ 2. Невырожденная замена независимых переменных

Пусть хотим заменить переменную x на y (обозначим переход как $x \to y$), тогда $\Omega \to \tilde{\Omega}$ (полагаем, что между Ω и $\tilde{\Omega}$ существует взаимнооднозначное соответствие).

Невырожденная замена[1] независимой переменной записывается таким образом:
$$u(x) = \tilde{u}(y(x)).$$

[1] Якобиан такого преобразования не равен нулю.

Запишем матрицу Якоби этого преобразования:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\det J = |J| \neq 0.$$

Что происходит с уравнением (1) при такой замене? Рассмотрим следующие частные производные

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \qquad u_{x_i x_j} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_m} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} + \dots .$$

Подставим это в уравнение (1):

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{u}_{y_k y_m} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + cu =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right) \tilde{u}_{y_k y_m} + \dots = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{a}_{km} \tilde{u}_{y_k y_m} + \dots = f,$$

где $\tilde{a}_{km} = (A \nabla y_k, \nabla y_m)$.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим

$$\left(\tilde{A}\xi, \xi\right) = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{a}_{km} \xi_k \xi_m = \sum_{k,m=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right) \xi_k \xi_m =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \xi_k \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \xi_m = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j = \left(A\tilde{\xi}, \tilde{\xi}\right),$$

причем $\tilde{\xi} = J^T \xi$, следовательно,

$$\left(AJ^T\xi, J^T\xi\right) \quad \Rightarrow \quad \left(JAJ^T\xi, \xi\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = JAJ^T.$$

По закону Сильвестра[2] количество положительных и отрицательных собственных чисел у этих матриц одинаково. Имеет место утверждение: *при не выроженной замене независимой переменной тип уравнения не меняется.*

Заметим, что любое уравнение с постоянными коэффициэнтами таким образом можно привести к уравнению с упрощенной матрицей и свести к одному из трех типов.

§ 3. Приведение линейного дифференциального уравнения второго порядка к каноническому виду методом характеристик

Уравнение (1) сводится к *уравнению характеристик*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0, \tag{2}$$

которое можно записать в виде

$$(A\nabla\omega, \nabla\omega) = 0,$$

где ω — некоторая гладкая функция в $\mathbb{R}$.

Если $\omega(x)$ — решение уравнения характеристик (2), то выражение $\omega(x) = const$ задает *характеристическую поверхность* (или *характеристику*).

Сделаем замену переменных $\Omega \to \tilde{\Omega}$, $x \to y$, такую что $u(x) = \tilde{u}(y(x))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $x, y, u \in C^2(\Omega)$. Помним, что

$$\tilde{a}_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j},$$

тогда

$$\sum_{k,m=1}^{n} \tilde{a}_{km}\tilde{\omega}_{y_k}\tilde{\omega}_{y_m} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\tilde{\omega}_{y_k}\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\tilde{\omega}_{y_m} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j}.$$

---

[2] Закон инерции квадратичных форм.

Следовательно, $\tilde{\omega}(y(x)) = \omega(x)$. Таким образом, характеристики не меняются при невырожденной замене независимой переменной.

Пусть теперь переменных две: $u = u(x, y)$. Рассмотрим общий вид уравнения

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Fu_y + Ku = f. \tag{3}$$

Составим уравнение характеристик:

$$A\omega_x^2 + 2B\omega_x\omega_y + C\omega_y^2 = 0, \tag{4}$$

его матрица коэффициентов

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Ищем собственные числа

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0.$$

По теореме Виета получаем

I. $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ эллиптический тип,

II. $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ гиперболический тип,

III. $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ параболический тип.

В области, где уравнение (3) сохраняет свой тип, его можно привести к каноническому виду *методом характеристик.*

Поскольку $\omega_y \neq 0$, поделим уравнение (4) на ω_y^2:

$$A\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right)^2 + 2B\left(\frac{\omega_x}{\omega_y}\right) + C = 0.$$

Выражение $\omega(x, y(x)) = C$ — неявно заданная функция, тогда по теореме о неявной функции ее дифференцирование приводит к формуле

$$\omega_x + \omega_y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_x}{\omega_y},$$

используя это, получаем

$$A\left(y'\right)^2 - 2By' + C = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4(B^2 - AC).$$

I. Эллиптический тип при $D<0$, то есть квадратное уравнение имеет два комплексных корня, значит, и характеристики будут комплексными (новыми переменными будут $\xi=\mathrm{Re}\omega$ и $\eta=\mathrm{Im}\omega$, то есть $\omega=\xi(x,y)\pm i\,\eta(x,y)$).

II. Гиперболический тип при $D>0$, то есть квадратное уравнение имеет два вещественных корня, следовательно, характеристики вещественные (новые переменные $\xi=\xi(x,y)$ и $\eta=\eta(x,y)$).

II. Параболический тип при $D=0$, то есть квадратное уравнение имеет одно решение, второе берется в зависимости от задачи (произвольная функция, линейно независимая с первой).

Сделаем в уравнении (3) некоторую невырожденную замену переменных: $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ так, что $u(x,y)=\tilde{u}(\xi,\eta)$. Пересчитаем производные:

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+\ldots,$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+\ldots.$$

Итак, имеем

$$\tilde{f}=A\left(u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+\ldots\right)+$$
$$+2B\left(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+\ldots\right)+$$
$$+C\left(u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+\ldots\right)=$$
$$=u_{\xi\xi}\left(A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2\right)+u_{\eta\eta}\left(A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2\right)+$$
$$+u_{\xi\eta}\left(2A\xi_x\eta_x+2C\xi_y\eta_y+2B\xi_x\eta_y+2B\xi_y\eta_x\right)+\ldots.$$

I. Если тип уравнения эллиптический, то делается замена $\xi=\mathrm{Re}\omega$, $\eta=\mathrm{Im}\omega$, где $\omega=\mathrm{Re}\omega\pm i\,\mathrm{Im}\omega=const.$ ω — решение уравнения (4), следовательно,

$$A\left(\xi_x\pm i\,\eta_x\right)^2+2B\left(\xi_x\pm i\,\eta_x\right)\left(\xi_y\pm i\,\eta_y\right)+C\left(\xi_y\pm i\,\eta_y\right)^2=0.$$

Это можно записать как

$$\left(\left(A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2\right)-\left(A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2\right)\right)\pm$$

$$\pm 2\left(A\xi_x\eta_x+C\xi_y\eta_y+B\xi_x\eta_y+B\xi_y\eta_x\right)i=0+0i.$$

Вещественная часть здесь — это разность множителей при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$, и она равна нулю, значит, эти множители равны. Мнимая часть — это множитель при $u_{\xi\eta}$, и она равна нулю, то есть нулевой и множитель. Таким образом, уравнение приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dots=0.$$

II. Если тип уравнения гиперболический, то за два вещественных решения принимаем $\xi=\omega_1(x,y)$ и $\eta=\omega_2(x,y)$. Тогда множители при $u_{\xi\xi}$ и $u_{\eta\eta}$ занулятся, так как ξ и η — решения уравнения (4). Уравнение приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta}+\dots=0.$$

Заметим, что возможен переход от одной канонической формы к другой: пусть $\alpha=(\xi+\eta)/2$, а $\beta=(\xi-\eta)/2$, тогда

$$u_\xi=\frac{1}{2}u_\alpha+\frac{1}{2}u_\beta,\qquad u_\eta=\frac{1}{2}u_\alpha-\frac{1}{2}u_\beta,$$

$$u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}u_{\alpha\alpha}-\frac{1}{4}u_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}u_{\beta\alpha}-\frac{1}{4}u_{\beta\beta}=\frac{1}{4}\left(u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}\right).$$

III. Если тип уравнения параболический, то за одно решение берем $\xi=\omega(x,y)$. Тогда множитель при $u_{\xi\xi}$ занулится, так как ξ — решение уравнения (4) (η берется линейно независимо от ξ). Кроме того, $D=4(B^2-AC)=0$, то есть $B^2=AC$, следовательно, уравнение (4) — это полный квадрат:

$$A\xi_x^2\pm\sqrt{AC}\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=\left(\sqrt{A}\xi_x\pm\sqrt{C}\xi_y\right)^2=0.$$

Пусть $A, C > 0$, тогда

$$\xi_x = \mp\sqrt{\frac{C}{A}}\xi_y = \mp\frac{\sqrt{AC}}{A}\xi_y,$$

тогда множитель при $u_{\xi\eta}$ зануляется. Приходим к каноническому виду

$$u_{\eta\eta} + \cdots = 0.$$

§ 4. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка

Пусть $u = u(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая гладкая поверхность ($\dim S = n - 1$), например, это график функции $x_n = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $\omega \in C^2$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1)

$$u\Big|_S = \varphi \in C^2 \ (C^1), \qquad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_S = \psi \in C^1 \ (C), \tag{5}$$

где $\frac{\partial u}{\partial l}$ — производная по направлению l некоторого поля, заданного на S.

Обычно в задаче (5) достаточно брать $\vec{l} \equiv \vec{n}$, где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S:

$$\vec{l} = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}, \ l_n \neq 0,$$

следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_S = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{x_j} l_j + u_{x_n}\big|_{x_n=0} l_n,$$

то есть достаточно задавать только последнее слагаемое.

Кроме того, $\vec{l}$ не берут по касательным направлениям, так как такие производные выражаются через φ. Покажем это, пусть l — касательная, тогда

$$\vec{l} = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, 0\}, \quad \text{причем } \|\vec{l}\| = 1, \quad l_i = \cos(l, x_i); \tag{6}$$

и пусть S — плоскость, такая что $x_n = 0$. Имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_S = \left.\left(\nabla u, \vec{l}\right)\right|_S = \sum_{j=1}^{n-1} u_{x_j} l_j\big|_{x_n=0} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(u|_{x_n=0}\right)_{x_j} l_j = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{x_j} l_j = \frac{\partial \varphi}{\partial l'},$$

где $\vec{l'} = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}\}$.

Распрямление поверхности в окрестности точки x^*.
Пусть поверхность S задается неявно уравнением

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \omega \in C^2,$$

и пусть точка $x^* \in S$ такая, что $\omega_{x_n}(x^*) \neq 0$ (всегда можно это предполагать при $|\nabla\omega| \neq 0$, или всегда можно перенумеровать последовательность).

Сделаем замену

$$y_k = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$y_n = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В новых переменных $S \to \tilde{S}$ так, что $y_n = 0$, $u \to \tilde{u}$, $l \to \tilde{l}$.

Рассмотрим матрицу Якоби этого преобразования в точке x^*:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \omega_{x_1} & \omega_{x_2} & \ldots & \omega_{x_{n-1}} & \omega_{x_n} \end{pmatrix},$$

$$\det J = \omega_{x_n} \neq 0.$$

Пусть L — некоторый линейный оператор, с помощью которого можно записать уравнение (1) таким образом:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x), \tag{7}$$

его уравнение характеристик:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\omega_{x_i}\omega x_j = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим уравнение (7) в новых переменных:

$$\tilde{L}\tilde{u} = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{a}_{km}(x)\tilde{u}_{x_k x_m} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(x)\tilde{u}_{x_k} + \tilde{c}(x)\tilde{u} = \tilde{f}(x). \tag{9}$$

Здесь имеем

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

следовательно,

$$\nabla_x u = J^T \nabla_y \tilde{u},$$

где ∇_x — градиент по старым переменным, а ∇_y — по новым. Значит

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\nabla_x u, \vec{l}\right) = \left(J^T \nabla_y \tilde{u}, \vec{l}\right) = \left(\nabla_y \tilde{u}, J\vec{l}\right)\Big|_{y_n=0} = \left(\nabla_y \tilde{u}, \tilde{l}\right)\Big|_{y_n=0},$$

то есть при переходе получили условие такого же типа.

Заметим, что если $\vec{l}$ не касательная к поверхности S, то и $\tilde{l}$ не касательная (переводим в плоскость). Это значит, что проекция нормали не ноль, и поскольку нормаль направлена по градиенту, то $(\vec{l}, \nabla\omega) \neq 0$ и $\tilde{l}_n \neq 0$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\nabla_y \tilde{u}, \tilde{l}\right)\Big|_{y_n=0} = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{u}_{y_j}\tilde{l}_j\Big|_{y_n=0} + \tilde{u}_{y_n}\tilde{l}_n\Big|_{y_n=0}.$$

В задаче (5) полагаем $\vec{l} = \vec{\nu}$ ($\vec{\nu}$ — нормаль), то есть

$$u\big|_S = \varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \psi.$$

Пусть дана поверхность $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$, где ω — решение уравнения характеристик (8), тогда C называется *характеристической поверхностью* для уравнения (7) (то есть для оператора L в точке x^*).

Заметим, если поверхность S такая, что $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, то из условия $\vec{\nu} \parallel \nabla\omega|_{x=x^*}$ следует $\sum_{i,j}^n a_{ij}(x^*)\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0$.

§ 5. Связь данных Коши на характеристической поверхности. Пример Адамара

Пусть выполнено распрямление поверхности ((7) $\to$ (9)). Помним, что при невырожденной замене характеристики не меняются.

Рассмотрим уравнение (9):

$$\tilde{L}\tilde{u} = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{a}_{km}(x)\tilde{u}_{x_k x_m} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(x)\tilde{u}_{x_k} + \tilde{c}(x)\tilde{u} = \tilde{f}(x),$$

где

$$\tilde{a}_{km} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}.$$

Запишем данные Коши

$$\tilde{u}|_{y_n=0} = \tilde{\varphi} \in C^2, \qquad \tilde{u}_{y_n}|_{y_n=0} = \tilde{\psi} \in C^1.$$

На плоскости $y_n = 0$ находим следующие производные:

$$\begin{array}{ll} \tilde{u}_{y_j}\Big|_{y_n=0} = \tilde{\varphi}_{y_j}, & j = 1, 2, \ldots, n-1; \\ \tilde{u}_{y_j y_i}\Big|_{y_n=0} = \tilde{\varphi}_{y_j y_i}, & j, i = 1, 2, \ldots, n-1; \\ \tilde{u}_{y_n y_j}\Big|_{y_n=0} = \tilde{\psi}_{y_j}, & j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{array}$$

Уравнение (1) сводится к уравнению $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f}$, то есть

$$\tilde{a}_{nn}\tilde{u}_{y_n y_n}|_{y_n=0} + F\left(\tilde{a}_{km}, \tilde{b}_k, \tilde{c}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}_{y_k y_m}, \ldots\right) = \tilde{f}\Big|_{y_n=0}. \qquad (10)$$

Если $\tilde{a}_{nn} = 0$, то $F(\ldots) = \tilde{f}\Big|_{y_n=0}$ — условие связи между φ и ψ, если $\tilde{a}_{nn} \neq 0$, то (10) — уравнение относительно производной. Разберемся в этом.

Если поверхность S характеристическая для оператора L в точке x^*, то для существования C^2-решения задачи Коши необходимо условия разрешимости $F(\dots) = \tilde{f}\Big|_{y_n=0}$, отсюда следует, что

$$\tilde{a}_{nn} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\frac{\partial y_n}{\partial x_j} = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x^*)\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0, \qquad y_n = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, если поверхность, на которой задаются условия Коши, характеристическая, то

1) если данные Коши (φ, ψ) на этой поверхности согласованы, то решение существует (и не одно);

2) если данные не согласованы, то решения задачи Коши нет.

Теорема Коши—Ковалевской. *Пусть поверхность не характеристическая. Если данные задачи (коэффициенты, f, φ, ψ) вещественно-аналитические функции*[3]*, то существует единственное решение задачи Коши* $\begin{cases}(1),\\(5)\end{cases}$ *в классе вещественно-аналитических функций.*

Пусть оператор L: $B_1 \to B_2$, где B_1 и B_2 — банаховы пространства[4]. Задача Коши

$$\begin{cases} Lu = F, \\ u\big|_S = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_S = \psi \end{cases} \tag{11}$$

поставлена корректно, если

1) $\forall F \in B_2 \quad \exists u \in B_1 : \quad u$ — решение (11);

[3]Функция f называется *вещественно-аналитической*, если $f \in \mathbb{R}$, и в окрестности некоторой точки f раскладывается в сходящийся степенной ряд.

[4]Пространство называется *банаховым*, если оно является полным (каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства) по норме векторным пространством.

2) $\forall F \in B_2 \quad \exists!\, u \in B_1 : \quad u$ — решение (11);

3) непрерывная зависимость решения от данных задачи:

$$\|u_1 - u_2\|_{B_1} \leq C\,\|F_1 - F_2\|_{B_2}.$$

Замечание. Поверхность, не являющаяся характеристической, называется *свободной*; на ней можно ставить задачу Коши. Но для уравнений эллиптического типа характеристических поверхностей не существует (поскольку решение уравнения характеристик комплексное), а условия Коши не ставятся из-за нарушения пункта 3).

Пример Адамара.
Пусть $u = u(x,y)$, П: $x \in \mathbb{R}, y \in [0;h]$. Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Лапласа (оно имеет эллиптический тип):

$$\begin{cases} u^k_{xx} + u^k_{yy} = 0 \quad \text{в } \Pi, \\ u\big|_{y=0} = \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\sin(kx), \\ u_y\big|_{y=0} = \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Нетрудно понять, что выражение

$$u^k(x,y) = \frac{1}{k}\sin(kx)\cosh(ky)$$

является решением задачи (12). Рассмотрим

$$\sup_{\Pi}|\varphi_k(x)| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

но

$$\sup_{\Pi}\left|u^k(x,y)\right| = \frac{1}{k}\cosh(kh) \xrightarrow[k\to\infty]{h>0} \infty.$$

То есть малое изменение начальных условий влечет большие изменения задачи Коши в любой близости от линии начальных значений. Таким образом, для данного уравнения задача Коши некорректна.

§ 6. Первая вариация. Необходимое условие экстремума

Пусть B — линейное нормированное пространство, положим, что оно полное по норме (то есть банахово), и рассмотрим *функционал*[5] $F : B \to \mathbb{R}$. Возможно, что функционал $F : D \to \mathbb{R}$, где $D \subset B$ (причем D называется *областью определения* функционала F).

Пусть функция $u \in D$, задача состоит в поиске минимума $(\min F[u])$ или максимума $(\max F[u])$ данного функционала. Заметим, что справедливо равенство $\max F = -\min(-F)$. В основном будем говорить о поиске минимума.

Функция u_0 называется *локальным минимумом* функционала F, если

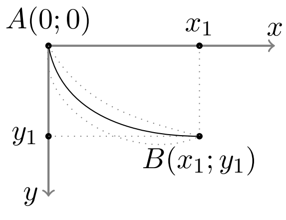
$$\exists\, \delta > 0 \; : \quad \forall\, u \in V_\delta(u_0) \cap D$$

имеет место неравенство

$$F[u_0] \leq F[u].$$

Приведем несколько примеров.

1. Задача о брахистохроне (Бернулли, 1696).
   Среди плоских кривых, соединяющих точки A и B, найти ту кривую, по которой при действии только силы тяжести (без трения) материальная точка быстрее всего попадет из точки A в точку B.



[5] Отображение, которое сопоставляет каждому элементу пространства число.

Из закона сохранения энергии известно, что

$$\frac{mv^2}{2} = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Пусть $y = y(x)$ — явно заданная траектория движения материальной точки, причем $y \in C^1([0; x_1])$, также учтем, что начало и конец пути неизменны: $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$. Нужно минимизировать время.

Пусть $T[y]$ — функционал времени, рассмотрим

$$dt = \frac{dS}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{\sqrt{2gy}},$$

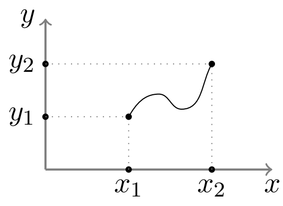
тогда

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} \, dx.$$

Можно считать, что $v = \sqrt{y}$, так как константа $\sqrt{2g}$ при поиске минимума не важна. (Искомая кривая — дуга циклоиды.)

2. Задача о распространении света в неоднородной оптической среде.

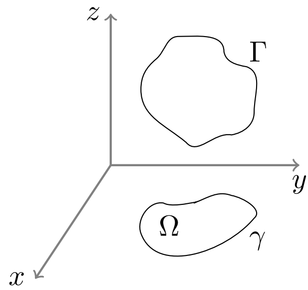
   Пусть скорость света $v = v(x, y)$, и пусть траектория распространения света задается явно: $y = y(x)$, $y \in C^1([x_1; x_2])$, начальные данные: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.



Задача состоит в поиске минимума такого функционала

$$T[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v(x, y)} \, dx.$$

3. Задача о минимальной площади поверхности, натянутой на некоторую замкнутую кривую.
   Пусть Γ — гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$, а γ — плоская замкнутая кривая. Пусть Γ: $z = \varphi(x,y)$, где $(x,y) \in \gamma$, причем $\gamma = \partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.



Рассмотрим поверхность $z = u(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$. Тогда задача состоит в поиске минимума функционала

$$S[u] = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy,$$

его область определения:

$$D(S) = \left\{ u \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y) \right\}.$$

Пусть $F : B \to \mathbb{R}$ и $B = D$. Пусть u_0 — локальный минимум функционала F (то есть $\exists\, \delta > 0 \; : \quad \|u - u_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad F[u_0] \le F[u]$). Рассмотрим

$$u = u_0 + \alpha h \in B \quad (\alpha \in \mathbb{R}, h \in B),$$

тогда при $h \neq \vec{0}$

$$\|u - u_0\| = \|u_0 + \alpha h - u_0\| = |\alpha| \cdot \|h\| < \delta,$$

это верно, если

$$|\alpha| < \frac{\delta}{\|h\|} = \alpha_0.$$

Зафиксируем u_0 и h, тогда $F[u_0+\alpha h]=\varphi(\alpha)$, где φ имеет локальный минимум при $\alpha=0$. Необходимое условие экстремума: $\varphi'(0)=0$.

Первой вариацией функционала F называется

$$\delta F(u_0,h)=\frac{d}{d\alpha}F[u_0+\alpha h]\Big|_{\alpha=0}.$$

Тогда *необходимое условие экстремума*:

$$\delta F(u_0,h)=0\quad\forall\, h\in B.$$

Кривая u, для которой выполнено необходимое условие экстремума, называется *экстремалью* (но необязательно у экстремали будет экстремум).

Сделаем несколько замечаний.

1. Если функционал зависит только от функции u (то есть $F[u]=f(u)$), то
$$\frac{d}{d\alpha}f(u+\alpha h)\Big|_{\alpha=0}=f'(u)h.$$

2. Если существует линейный по h функционал $l(u,h)$, такой что
$$F[u+h]-F[u]=l(u,h)+o(\|h\|),$$
то существует $\delta F(u,h)=l(u,h)$.
Доказательство. Рассмотрим следующее выражение
$$\frac{F[u+\alpha h]-F[u]}{\alpha}=\frac{l(u,\alpha h)+o(\|h\|)}{\alpha}=\frac{\alpha l(u,h)+o(\alpha)\|h\|}{\alpha}\xrightarrow[\alpha\to 0]{}$$
$$\xrightarrow[\alpha\to 0]{} l(u,h),\quad \text{поскольку } \frac{o(\alpha)}{\alpha}\xrightarrow[\alpha\to 0]{}0.$$
Таким образом, $\frac{1}{\alpha}(F[u+\alpha h]-F[u])\xrightarrow[\alpha\to 0]{} l(u,h)$.■

Пусть теперь $D\neq B$, то есть $F\colon D\to\mathbb{R}$, $D\subset B$. Введем M — линейное многообразие в B (такой аналог аффиного множества), и пусть

M такое, что $u = \hat{u} + \eta$, где $\eta \in M \subset B$, а $\hat{u} \in B$ — фиксированный элемент.

Запишем область определения функционала как $D = \{\hat{u}\} + M$.

Например, пусть $D = \{y \in C^1([x_1; x_2]), y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2\}$. Найдем $\hat{y}$. Допустим, этот элемент имеет вид $\hat{y} = \alpha x + \beta$, тогда из условий на y получаем

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta = y_1, \\ \alpha x_2 + \beta = y_2. \end{cases}$$

Можно прибавить непрерывно-дифференцируемые функции, которые зануляются на концах (чтобы не портить их):

$$M = \mathring{C}^1\left([x_1; x_2]\right) = \left\{\eta \in C^1\left([x_1; x_2]\right): \quad \eta(x_1) = 0, \eta(x_2) = 0\right\}.$$

Теперь понятно, что функция $u = \hat{u} + \alpha h$, где $h \in M$, $\hat{u} \in D$, является элементом множества D. То есть $\forall\, u \in D$ $u = \hat{u} + (u - \hat{u})$, $(u - \hat{u}) \in \mathring{C}^1$.

Пусть $u_0 \in D$ — локальный минимум функционала F, тогда для $u_0 \in D$, $h \in M$ верно, что $u = u_0 + \alpha h \in D$. И необходимое условие экстремума на D:

$$\delta F(u, h) = 0 \quad \forall\, u \in D.$$

§ 7. Вывод уравнения Эйлера для простейшей задачи вариационного исчисления

Рассмотрим простейший функционал

$$F[y] = \int\limits_a^b f(x, y, y')\, dx, \tag{13}$$

его область определения:

$$D = \left\{y \in C^1([a; b]), \quad y(a) = A,\, y(b) = B\right\}.$$

Заметим, что такая задача называется задачей с закрепленными концами.

Пусть существуют частные производные (первого и второго порядков) функции f по всем переменным. Вычислим первую вариацию (положим $h \in \mathring{C}^1([a;b])$).

$$\delta F(y,h) = \left.\frac{d}{d\alpha} F[y+\alpha h]\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{d}{d\alpha}\left(\int\limits_a^b f(x, y+\alpha h, y'+\alpha h')\, dx\right)\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(f_y h + f_{y'} h'\right)\, dx = \int\limits_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) h\, dx + f_{y'} h\Big|_a^b$$

В последнем переходе мы воспользовались формулой интегрирования по частям, предположив, что $\frac{d}{dx} f_{y'}$ существует. Легко заметить, что последнее слагаемое в полученном выражение равняется нулю, поскольку при подстановке верхнего и нижнего пределов получается $(h(b) - h(a))\, f_{y'}|_a^b = 0$, так как $h(a) = h(b) = 0$.

Наложим необходимое условие экстремума:

$$\forall\, h \in \mathring{C}^1([a;b]) \quad \delta F(y,h) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) h\, dx = 0.$$

Лемма 1 Лагранжа. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $g \in C(\bar\Omega)$. *Если*

$$\int\limits_\Omega g(x) h(x)\, dx = 0 \quad \forall\, h \in C^k(\bar\Omega) \ \text{и} \ \ D^\alpha h|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $D^\alpha h = \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ *— частная производная по мультииндексу* α: $|\alpha| \leq k-1$, *то*

$$g \equiv 0 \ \text{в} \ \Omega.$$

Доказательство. От противного.
Пусть существует $x^* \in \Omega : g(x^*) \neq 0$. Не умаляя общности, можем считать, что $g(x^*) > 0$. По условию $g \in C(\bar\Omega)$, следовательно, по теореме о стабилизации знака существует $\delta > 0 \colon \forall\, x \in V_\delta(x^*)$ выполняется

неравенство $g(x) > 0$. Ясно, что $\|x - x^*\| < \delta \Leftrightarrow V_\delta(x^*) \subset \Omega$, возьмем такую функцию

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} \left(\delta^2 - \|x - x^*\|^2\right)^{k+1}, & x \in V_\delta(x^*) \\ 0, & x \notin V_\delta(x^*) \end{cases}, \quad \hat{h} \in \mathring{C}^k(\bar{\Omega}),$$

она не отрицательна, следовательно,

$$\int\limits_\Omega g(x)\hat{h}(x)\,dx = \int\limits_{V_\delta(x^*)} g(x)\hat{h}(x)\,dx > 0.$$

Получили противоречие.■

Сформулируем и докажем эту же лемму в одномерном случае. *Пусть* $g \in C([a;b])$. *Если*

$$\int\limits_a^b g(x)h(x)\,dx = 0 \quad \forall\, h \in C^1([a;b]) \text{ и } h(a) = h(b) = 0,$$

то

$$g \equiv 0 \text{ на } [a;b].$$

Доказательство. От противного.
Пусть существует $x^* \in [a;b]\colon\ g(x^*) \neq 0$. Не умаляя общности, можем считать, что $g(x^*) > 0$. По условию $g \in C([a;b])$, следовательно, по теореме о стабилизации знака существует $\delta > 0\colon \forall\, x : |x - x^*| < \delta$ выполняется неравенство $g(x) > 0$. Возьмем такую функцию

$$h(x) = \begin{cases} \left(\delta^2 - |x - x^*|^2\right)^2, & x \in V_\delta(x^*) \\ 0, & x \notin V_\delta(x^*) \end{cases}, \quad h \in \mathring{C}^1([a;b]),$$

она не отрицательна, следовательно,

$$\int\limits_a^b g(x)h(x)\,dx = \int\limits_{V_\delta(x^*)} g(x)h(x)\,dx > 0.$$

Получили противоречие.■

Применяя эту лемму, получаем *уравнение Эйлера*:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \tag{14}$$

Покажем, что можно обойтись без предположения о существовании производной $\frac{d}{dx} f_{y'}$.

Л е м м а 2. *Пусть $n = 1$. Если $g \in C([a;b])$ и при любом $h \in \mathring{C}^1([a;b])$*

$$\int\limits_a^b g(x)h'(x)\,dx = 0,$$

то $g(x) = const$, $x \in [a;b]$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$p(x) = \int\limits_a^x (g(t) - \alpha)\ dt, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b g(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Посмотрим как ведет себя функция p на концах:

$$p(a) = \int\limits_a^a (g(t) - \alpha)\,dt = 0, \qquad p(b) = \int\limits_a^b g(t)\,dt - (b-a)\alpha = 0,$$

ясно, что $p \in \mathring{C}^1([a;b])$.

По теореме Барроу $p'(x) = g(x) - \alpha$. Тогда

$$\int\limits_a^b g(x)p'(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)(g(x) - \alpha)\,dx = 0,$$

вычтем $\alpha p(b)$, равное нулю:

$$\int\limits_a^b g(x)(g(x) - \alpha)\,dx - \int\limits_a^b \alpha(g(x) - \alpha)\,dx = \int\limits_a^b (g(x) - \alpha)^2\,dx = 0,$$

следовательно, $g \equiv \alpha$ на $[a;b]$.■

Л е м м а 3. *Пусть функции $A, B \in C([a;b])$. Если*

$$\int\limits_a^b (A(x)h(x) + B(x)h'(x))\,dx = 0 \quad \forall\, h \in \mathring{C}^1([a;b]),$$

то существует частная производная

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} = A(x).$$

Доказательство. Пусть есть интеграл с переменным верхним пределом

$$p(x) = \int\limits_a^x A(t)\,dt.$$

Тогда по теореме Барроу $p'(x) = A(x)$, следовательно,

$$\int\limits_a^b (p'(x)h(x) + B(x)h'(x))\,dx = 0.$$

Проинтегрируем по частям с учетом $h(a) = h(b) = 0$:

$$\int\limits_(B(x) - p(x))h'(x)\,dx = 0 \quad \forall\, h \in \mathring{C}^1([a;b]),$$

отсюда по лемме 2 следует, что

$$B(x) - p(x) = C = const \quad \Rightarrow \quad B(x) = p(x) + C = \int\limits_a^x A(t)\,dt + C,$$

следовательно, существует $B'(x)$: $B'(x) = A(x)$.■

Таким образом, уравнение Эйлера получается без предположения о существовании производной $\frac{d}{dx}f_{y'}$:

$$f_y = A, f_{y'} = B \quad \Rightarrow \quad \delta F = \int\limits_a^b (Ah + Bh')\,dx = 0\,\forall\, h \in \mathring{C}^1([a;b]) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \frac{d}{dx}f_{y'} = f_y \quad \Leftrightarrow \quad (14).$$

Если существует y'' и все частные производные функции f, то уравнение (14) можно раскрыть:

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0, \tag{15}$$

такое уравнение называется *квазилинейным* (линейным относительно старшей производной).

Покажем, что если $f_{y'y'} \neq 0$, то у экстремали существует y''. Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{1} y^2(1-y')^2\,dx, \quad y(-1) = 0,\, y(1) = 1.$$

Подынтегральная функция в квадрате, значит, она не отрицательна, поэтому можно утверждать, что $\min J \geq 0$. Пусть

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases},$$

тогда $J[v] = 0$. Кроме того, очевидно, что $\min J[y] \equiv 0 = J[v]$.

Функция v не имеет второй производной в классическом смысле, так как

$$v'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

терпит разрыв. Поймем, что уравнение Эйлера выполняется. Посчитаем

$$f_y = 2y(1-y')^2, \qquad f_{y'} = -2y^2(1-y').$$

Функция v обращается в ноль на промежутке $[-1;0]$, следовательно, требование $f_{y'y'} \neq 0$ выполнено: $f_{y'y'} = y^2$. А уравнение Эйлера:

$$2y\left(1-y'\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(2y^2(1-y')\right) = 0,$$

то есть функция v удовлетворяет этому уравнению.

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x,y,y') = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{y'}(x+\Delta x, y(x+\Delta x), y'(x+\Delta x)) - f_{y'}(x,y,y')}{\Delta x} =$$

упростим выражение, используя $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{y'}(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y') - f_{y'}(x,y,y')}{\Delta x} =$$

теперь воспользуемся теоремой Лагранжа о среднем (значение в точке между x и $x+\Delta x$)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tilde{f}_{y'x}\Delta x + \tilde{\tilde{f}}_{y'y}\Delta y + \tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{y'y'}\Delta y'}{\Delta x} = f_{y'x} + f_{y'y}y' + f_{y'y'} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x},$$

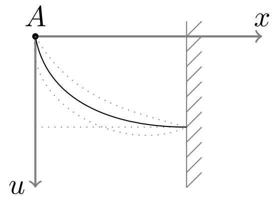
поскольку точка стремится к x, то в последнем переходе сняли волны с функций. Подставим это в уравнение Эйлера (14) и учтем, что $f_{y'y'} \neq 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{1}{f_{y'y'}}\left(f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y'\right).$$

Правая часть выражения существует, значит существует и левая, то есть предел. Таким образом, производная y'' тоже существует.

§ 8. Естественные граничные условия

Рассмотрим задачу о брахистохроне (см. § 6), и пусть на правом конце нет условия — поставили стенку.



Пусть функционал F такой

$$F[u] = \int\limits_a^b f(x, u, u')\, dx,$$

а его область определения:

$$D = \left\{ u \in C^1([a; b]), \quad u(a) = A \right\}.$$

Посчитаем первую вариацию при $h \in C^1([a; b])$:

$$\delta F(u, h) = \frac{d}{d\alpha} \left(\int\limits_a^b f(x, u + \alpha h, u' + \alpha h')\, dx \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \left(f_u h + f_{u'} h' \right)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} \right) h\, dx + f_{u'}|_{x=b}\, h(b) = 0 \qquad \forall\, h : \, h(a) = 0.$$

Пусть нарисованная кривая дает экстремум. Она кончается в некоторой точке, в этой же точке кончаются и другие кривые, поэтому можно сказать, что среди них данная экстремаль также является экстремалью. Таким образом, экстремум на такой кривой является экстремумом и по более узкому множеству — множеству тех кривых, которые кончаются в этой же точке для любой гладкой функции h.

С учетом этого факта и того, что при $h \in \mathring{C}^1([a; b])$ уравнение Эйлера выполнено, понимаем, что уравнение Эйлера должно быть выполнено $\forall\, h \in C^1([a; b])$, так как функция u не зависит от h. То есть $f_{u'}|_{x=b} = 0$.

С другой стороны, интеграл должен быть ограничен, а поскольку первая вариация равна нулю, то все слагаемые будут ограничены, но по условию задачи на $h(b)$ нет никаких ограничений, значит, остается потребовать равенства $f_{u'}|_{x=b} = 0$.

Выражение

$$f_{u'}|_{x=b} = 0$$

и есть *естественное граничное условие.*

Заметим, что для левого конца все аналогично.

§ 9. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления

Обобщение на старшие производные.

Рассмотрим функционал

$$F[u] = \int\limits_a^b f(x, u, u', u'')\, dx,$$

$$D(F) = \left\{u \in C^2([a; b]), \quad u(a) = A_1, u(b) = B_1; u'(a) = A_2, u'(b) = B_2\right\}.$$

Посчитаем первую вариацию $\delta F(u, h) = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha h]\big|_{\alpha=0}$, которая по необходимому условию экстремума равна нулю $\forall\, h \in \overset{\circ}{C}{}^2([a; b])$:

$$\delta F = \int\limits_a^b \left(f_u h + f_{u'} h' + f_{u''} h''\right)\, dx = \int\limits_a^b \left(f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{u''}\right) h\, dx = 0$$

По лемме 1 выражение

$$f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{u''} = 0$$

есть уравнение Эйлера. Нетрудно догадаться, как будет выглядеть уравнение Эйлера для функционала

$$F[u] = \int\limits_a^b f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(k)})\, dx,$$

$$D(F) = \left\{ \begin{array}{lcc} u \in C^k([a;b]), & u(a) = A_1, & u(b) = B_1 \\ & u'(a) = A_2, & u'(b) = B_2 \\ & \dots & \dots \\ & u^{(k-1)}(a) = A_k, & u^{(k-1)}(b) = B_k \end{array} \right\}.$$

Чтобы не «испортить» данные краевые условия, назовем h допустимыми функциями и положим

$$M = \left\{ \begin{array}{lc} h \in C^k([a;b]): & h(a) = h(b) = 0 \\ & h'(a) = h'(b) = 0 \\ & \dots \\ & h^{(k-1)}(a) = h^{(k-1)}(b) = 0 \end{array} \right\}.$$

Тогда необходимое условие экстремума:

$$\delta F(u,h) = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha h]\bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \left(f_u h + f_{u'} h' + \dots + f_{u^{(k)}} h^{(k)} \right) dx = 0,$$

интегрируем по частям и, применяя лемму 1, получаем уравнение Эйлера:

$$f_u - \frac{d}{dx} f_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{u''} - \dots + \frac{d^k}{dx^k} f_{u^{(k)}} (-1)^k = 0.$$

Обобщение на вектор-функции.
Пусть $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ — вектор-функция. Рассмотрим функционал

$$F[\vec{u}] = \int\limits_a^b f\left(x, \vec{u}, \vec{u}'\right) dx,$$

$$D(F) = \left\{ \vec{u} \in C^1([a;b]), \quad \vec{u}(a) = \vec{A},\ \vec{u}(b) = \vec{B} \right\},$$

тогда допустимые функции $\vec{h} \in \mathring{C}^1([a;b])$, то есть $\vec{h}(a) = \vec{0}$, $\vec{h}(b) = \vec{0}$.

Представим этот функционал в виде

$$F[u_1 + \alpha_1 h_1, u_2 + \alpha_2 h_2, \dots, u_m + \alpha_m h_m] = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m),$$

где функция φ — просто функция многих переменных. Если на кривой $\vec{u}$ достигается экстремум для любой фиксированной вектор-функции $\vec{h}$, то на кривой φ достигается экстремум при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Тогда необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha_1}(0, 0, \dots, 0) = 0, \\ \dots \\ \varphi_{\alpha_m}(0, 0, \dots, 0) = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} F[u_1 + \alpha_1 h_1, u_2 + \alpha_2 h_2, \dots, u_m + \alpha_m h_m]\Big|_{\vec{\alpha} = \vec{0}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

отсюда получаем систему уравнений Эйлера:

$$f_{u_j} - \frac{d}{dx} f_{u'_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

Обобщение на функции многих переменных.
Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, функция $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционал

$$J[u] = \int\limits_{\Omega} f(x, u, u_{x_1}, u_{x_n}, \dots, u_{x_n})\, dx,$$

$$D(J) = \left\{ u \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = g \right\}.$$

Область $D = \{\hat{u}\} + M$, где $M = \mathring{C}^1(\bar{\Omega})$, иначе говоря, если $h \in M$, то $h|_{\partial\Omega} = 0$.

Необходимое условие экстремума: $\delta J(u, h) = 0 \quad \forall\, h \in M$. Рассмотрим первую вариацию

$$\delta J(u, h) = \frac{d}{d\alpha} \left(\int\limits_{\Omega} f(x, u + \alpha h, u_{x_1} + \alpha h_{x_1}, \dots, u_{x_n} + \alpha h_{x_n})\, dx \right)\Bigg|_{\alpha = 0} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(f_u h + f_{u_{x_1}} h_{x_1} + f_{u_{x_2}} h_{x_2} + \dots + f_{u_{x_n}} h_{x_n} \right) dx = 0,$$

проинтегрируем по частям.

Положим $n = 3$ и вспомним теорему Остроградского—Гаусса:

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\vec{a}\, dx = \oiint\limits_{\partial\Omega} (\vec{a}, \vec{n})\ d\sigma.$$

Напомним следующие выражения

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3},$$

$$(\vec{a}, \vec{n}) = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3,$$

и поскольку a_1, a_2, a_3 не зависят друг от друга, будем требовать верности трех равенств. Пусть $a_1 = uv$, $a_2 = a_3 = 0$, тогда

$$\int\limits_{\Omega} (uv)_{x_1}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} uvn_1\, d\sigma,$$

где $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ — единичный вектор нормали, компоненты которого являются направляющими косинусами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\right) = \frac{\left(\vec{n}, \vec{i}\right)}{\|\vec{n}\|\|\vec{i}\|} = n_1, \quad \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}\right) = n_2, \quad \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}\right) = n_3.$$

Перепишем теорему с учетом этого факта:

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_1} v\, dx + \int\limits_{\Omega} uv_{x_1}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} uv\cos\left(\vec{n}, o\vec{x}_1\right)\ d\sigma.$$

Таким образом, формула интегрирования по частям в $\mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_j} v\, dx = -\int\limits_{\Omega} uv_{x_j}\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\cos\left(\vec{n}, o\vec{x}_j\right)\ d\sigma. \tag{16}$$

Вернемся к первой вариации и применим формулу (16) с учетом условия $h|_{\partial\Omega} = 0$ (то есть все интегралы по границе нули). Получаем

$$\int\limits_{\Omega} \left(f_u - \frac{\partial}{\partial x_1} f_{u_{x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{u_{x_2}} - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} f_{u_{x_n}}\right) h\, dx = 0 \quad \forall\, h \in M.$$

Применяя лемму 1, получаем *уравнение Эйлера—Остроградского*:

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x_1} f_{u_{x_1}} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{u_{x_2}} - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} f_{u_{x_n}} = 0.$$

Поймем следующие два примера.

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$, рассмотрим функционал

$$F[u] = \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + 2ug \right) \, dx, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Заметим: $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})^T$, следовательно,

$$|\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\delta F(u,h) = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha h] \bigg|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall\, h \in \mathring{C}^1(\bar{\Omega}).$$

Итог:

$$\int\limits_{\Omega} \left(2g - 2\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} \right) h\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} 2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j} \cos\left(\vec{n}, o\vec{x}_j\right) h\, d\sigma = 0,$$

последнее слагаемое здесь равно нулю, так как $h|_{\partial\Omega} = 0$. Следовательно,

$$\begin{cases} \Delta u = g, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}.$$

Такая задача называется *задачей Дирихле.*

2. Аналогично, но пусть нет условия на границе. Как и в одномерном случае здесь выполнено уравнение Эйлера—Остроградского. Тогда понятно, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} 2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j} n_j h\, d\sigma = 0,$$

отсюда выводим естественное граничное условие

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_j} n_j \Big|_{\partial\Omega} = (\nabla u, \vec{n})|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Таким образом,

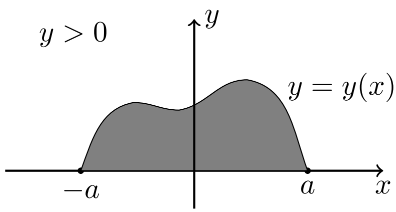
$$\begin{cases} \Delta u = g, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}.$$

Такая задача называется *задачей Неймана*.

§ 10. Изопериметрическая задача

Рассматриваемая нами задача будет задачей на условный экстремум, где условия задаются через функционал такого же типа.

Самой известной изопереметрической задачей является *задача Дидоны*: найти максимум площади при заданном периметре.



Ответом на эту задачу является окружность.

Пусть l — длина кривой, огибающей выделенную цветом площадь, причем очевидно, что $l > 2a$. Тогда задача состоит в поиске максимума функционала

$$F[y] = \int_{-a}^{a} y(x)\,dx \quad \text{при условии} \quad G[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = l.$$

Пусть F и G заданы на $D = \{\hat{u}\} + M = D(F) = D(G)$.

Теорема Эйлера. *Если кривая и доставляет экстремум функционалу $F[u]$ при условии $G[u] = l$ и не является экстремалью функ-*

ционала $G[u]$, то существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что кривая u — экстремаль функционала $(F + \lambda G)[u]$. (Замечание: λ называют множителем Лагранжа.)

Доказательство. Не умаляя общности, будем рассматривать минимум. Пусть функции $h, \eta \in M$. При достаточно малых α, β справедливо, что $F[u] \le F[u + \alpha h + \beta\eta]$.

По условию, кривая u не является экстремалью функционала G, значит, существует такая функция $\eta \in M$, что $\delta G(u, \eta) \neq 0$.

Рассмотрим функционал $G[u + \alpha h + \beta\eta] = \varphi(\alpha, \beta)$, посчитаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\bigg|_{\alpha,\beta=0} = \frac{\partial}{\partial\beta} G[u + \alpha h + \beta\eta]\bigg|_{\alpha,\beta=0} = \frac{\partial}{\partial\beta} G[u + \beta\eta]\bigg|_{\beta=0} = \delta G(u, \eta).$$

Пусть эта функция η и есть та самая, для которой $\delta G(u, \eta) \neq 0$, тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}(0, 0) \neq 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции, при достаточно малых $|\alpha| < \varepsilon$ такое уравнение неявно задает $\beta(\alpha) = \beta$, $\beta(0) = 0$.

Мы ищем экстремум среди тех функций, для которых выполняется $G[u] = l$, а значит, $\varphi(0, 0) = l$. В некоторой окрестности нуля ($|\alpha| < \varepsilon$) будет верным и то, что $\varphi(\alpha, \beta) = l$. Итак,

$$\frac{d\varphi(\alpha, \beta(\alpha))}{d\alpha} = \varphi_\alpha + \varphi_\beta\, \beta'(\alpha).$$

Посчитаем теперь в этой окрестности

$$\frac{d}{d\alpha} G[u + \alpha h + \beta(\alpha)\eta]\bigg|_{\alpha=0} = \delta G(u, h) + \delta G(u, \eta)\, \beta'(0) = 0,$$

второе слагаемое здесь положительно, так как $G[u] = const$. Поэтому

$$\beta'(0) = -\frac{\delta G(u, h)}{\delta G(u, \eta)}.$$

Аналогично рассмотрим $F[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta] = \psi(\alpha)$. Функция ψ имеет минимум при $\alpha = 0$, следовательно, необходимое условие экстремума: $\psi'(0) = 0$, то есть $\forall\, h \in M$

$$\frac{d}{d\alpha}F[u+\alpha h+\beta(\alpha)\eta]\bigg|_{\alpha=0} = \delta F(u,h) - \frac{\delta F(u,\eta)}{\delta G(u,\eta)}\delta G(u,h) = 0.$$

Функция η фиксирована, значит эта дробь имеет конкретное значение, обозначим ее как $-\lambda$, получаем

$$\delta F(u,h) + \lambda\, \delta G(u,h) = 0,$$

таким образом, кривая u — экстремаль функционала $F + \lambda G$. ■

§ 11. Вторая вариация. Достаточное условие экстремума

Рассмотрим функционал $F[u]$, $u \in D$, где $D = \{\hat{u}\} + M$, $D \subset B$ (B — линейное нормированное пространство).

Пусть $F[u+\alpha h] = \varphi(\alpha)$, где u и $h \in M$ фиксированы, а $\varphi \in C^2\,(C^1)$. Запишем формулу Тейлора второго порядка в окрестности нуля с остатком в форме Пеано:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \varphi'(0)\alpha + \frac{1}{2}\varphi''(0)\alpha^2 + o(\alpha^2), \quad \alpha \to 0.$$

Второй вариацией функционала F называется

$$\delta^2 F(u,h) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}F[u+\alpha h]\bigg|_{\alpha=0}.$$

Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа выглядит как

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \varphi'(0)\alpha + \frac{1}{2}\varphi''(\theta\alpha)\alpha^2, \quad 0 < \theta < 1.$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\theta),$$

причем $\varphi'(0) = 0$, поскольку кривая u является экстремалью. Рассмотрим последнее слагаемое и положим $\beta = \alpha - \theta$:

$$\frac{1}{2}\varphi''(\theta) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}F[u+\alpha h]\bigg|_{\alpha=\theta} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\beta^2}F[u+\beta h+\theta h]\bigg|_{\beta=0} = \delta^2(u+\theta h, h),$$

таким образом,

$$F[u+h] = F[u] + \delta^2(u+\theta h, h). \qquad (17)$$

Сформулируем теперь *достаточное условие экстремума.*

Теорема 1 (достаточное условие локального экстремума). *Пусть кривая u — экстремаль функционала F и пусть существует $\rho > 0$, такой что*

$$\forall\, v \in V_\rho(u) \cap D, \quad \forall\, h : \|h\| < \rho \quad \Rightarrow \quad \delta^2 F(u,h) \geq 0, \qquad (18)$$

тогда функционал F имеет локальный минимум на кривой u.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall\, w \in V_\rho(u) \cap D$ справедливо неравенство $F[w] \geq F[u]$.

Пусть $w - u = h$, тогда выполнено условие $\|h\| < \rho$. Рассмотрим

$$F[w] - F[u] = F[u+h] - F[u] \overset{(17)}{=} \delta^2 F(u+\theta h, h) = \delta^2 F(v,h) \overset{(18)}{\geq} 0,$$

следовательно, $F[w] \geq F[u]$.$\blacksquare$

Теорема 2 (необходимое условие локального экстремума). *Если кривая u — локальный минимум функционала F, то*

$$\delta^2 F(u,h) \geq 0 \qquad \forall\, h \in M.$$

Доказательство. От противного.
Пусть существует функция $h_0 \in M$ такая, что $\delta^2 F(u,h_0) < 0$. Положим $F[u+\varepsilon h_0] = \varphi(\varepsilon)$ и разложим в ряд Тейлора:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + \frac{1}{2}\varphi''(0)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0.$$

По условию u — экстремаль, значит, $\varphi'(0) = 0$. Тогда

$$\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \delta^2 F(u, h_0) < 0,$$

следовательно, $\varphi(\varepsilon) < \varphi(0)$, то есть $F[u+\varepsilon h_0] < F[u]$. Таким образом, пришли к противоречию.■

Теорема 3 (достаточное условие глобального экстремума). *Пусть кривая u — экстремаль функционала F и пусть*

$$\delta^2 F(u, h) \geq 0 \qquad \forall\, v \in D, \quad \forall\, h \in M, \tag{19}$$

тогда кривая u доставляет функционалу F глобальный минимум на D.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall\, w \in D \quad F[w] \geq F[u]$.

Пусть $w - u = h$, и рассмотрим

$$F[w] - F[u] = F[u+h] - F[u] \overset{(17)}{=} \delta^2 F(u + \theta h, h) = \delta^2 F(v, h) \geq 0$$

по условию теоремы, следовательно, $F[w] \geq F[u]$.■

Заметим, что если бы в выражении (19) был бы строгий знак (то есть $\delta^2 F(u,h) > 0$), то тогда бы было верно, что $F[u] < F[w]$, то есть получился бы *строгий минимум* (он единственен).

§ 12. Вычисление второй вариации

Рассмотрим функционал

$$F[u] = \int\limits_a^b f(x, u, u')\, dx, \tag{20}$$

$$D(F) = \left\{u \in C^1([a;b]), \quad u(a) = A,\, u(b) = B\right\}, \quad M = \left\{h \in \mathring{C}^1([a;b])\right\}.$$

Предполагаем существование всех частных производных функции f. Посчитаем вторую вариацию:

$$\delta^2 F(u,h) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2} F[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int\limits_a^b f(x, u+\alpha h, u'+\alpha h')\,dx\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f_{uu}h^2 + f_{uu'}hh' + f_{u'u}h'h + f_{u'u'}\left(h'\right)^2\right)dx = \left[2hh' = \frac{d}{dx}\left(h^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f_{uu}h^2 + f_{uu'}\frac{d}{dx}\left(h^2\right) + f_{u'u'}\left(h'\right)^2\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f_{u'u'}\left(h'\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(f_{uu} - \frac{d}{dx}f_{uu'}\right)h^2\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(R(x)\left(h'\right)^2 + P(x)h^2\right)dx$$

Утверждение (необходимое *условие (Лежандра)* минимума). *Если кривая u — локальный минимум функционала F, а $f_{u'u'} = R(x)$, то $R(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a;b]$.* (Замечание: $R(x) > 0$ называется *усиленным* условием Лежандра.)

Доказательство. От противного.
Пусть существует точка $x_0 \in (a;b)$ такая, что $R(x_0) < 0$. Функция R непрерывная, следовательно, по теореме о стабилизации знака существует $\delta > 0$ такая, что $\forall\, x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \subset (a;b) \quad R(x) < 0$.

Подберем функцию h такой, чтобы вторая вариация стала отрицательной. Например, можно взять

$$h = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi n(x-x_0)}{\delta}\right), & x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \\ 0, & x \notin (x_0-\delta; x_0+\delta) \end{cases},$$

в этом случае функция h мала, но имеет большую осцилляцию (то есть $(h')^2$ доминирует над h^2). Имеем

$$|h| \leq 1, \qquad |h'| \sim \frac{C}{\delta}, \qquad C = const,$$

$\operatorname{supp} h$[6] $\subset (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Тогда, возвращаясь к вычислению второй вариации $\delta^2 F(u, h)$,

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b \Big(R(x)\left(h'\right)^2 + P(x)h^2\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \Big(R(x)\left(h'\right)^2 + P(x)h^2\Big)\,dx < 0,$$

это выражение строго меньше нуля, поскольку, во-первых, $R(x) < 0$, $h' \sim C/\delta$, значит, $R(x)(h')^2 \sim 1/\delta^2$ и $R(x)(h')^2 < 0$, во-вторых, $|h| \leq 1$, следовательно, $P(x)h^2$ ограничено. Таким образом, первое слагаемое «задавит» второе при малом δ. Получаем нарушение условия — мы рассматривали минимум на экстремали, а получили отрицательную вторую вариацию, то есть максимум.■

Итак, для рассмотренного функционала (20) формула второй вариации:

$$\delta^2 F(u, h) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \Big(R(x)\left(h'\right)^2 + P(x)h^2\Big)\,dx, \tag{21}$$

где $R = f_{u'u'}$, $P = f_{uu} - \frac{d}{dx} f_{uu'}$.

В таких обозначениях получаем

условие Лежандра:	$f_{u'u'} \geq 0$	(≤ 0 в случае максимума),
усиленное условие Лежандра:	$f_{u'u'} > 0$	(< 0 в случае максимума).

Условие Якоби.

Пусть выполнено условие Лежандра. Хорошо, если $P(x) = 0$ (таких функционалов много), например, есть функционал

$$F[u] = \int\limits_1^3 \Big(\left(u'\right)^2 + 3xu\Big)\,dx, \quad u(1) = 3,\ u(3) = 1.$$

[6] $\operatorname{supp} f$ («support», носитель функции) — замыкание множества тех точек, в которых функция f не обращается в ноль. Пример: если $f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (0; 1)$, то $\operatorname{supp} f = [0; 1]$; $f(x) = 0$ вне промежутка $(0; 1)$.

Считаем вторую вариацию:

$$\delta^2 F(u,h) = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 2\left(h'\right)^2\,dx,$$

здесь $R(x) = 2 > 0$, а $P(x) = 0$, следовательно, $\delta^2 F(u,h) \geq 0$. Вторая вариация равна нулю при $h = const$, но нам это не подходит, следовательно, $\delta^2 F(u,h) > 0$. Итого имеем строгий глобальный минимум.

Пусть $P(x) \neq 0$. Рассмотрим выражение

$$\int\limits_a^b \left(wh^2\right)' dx = \left. wh^2\right|_a^b = 0,$$

так как $h \in \mathring{C}^1([a;b])$. Прибавим это к формуле (21):

$$\delta^2 F(u,h) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(R\left(h'\right)^2 + Ph^2 + \left(wh^2\right)'\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b R\left(\left(h'\right)^2 + \frac{P}{R}\,h^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{w'}{R}\,h^2 + 2hh'\,\frac{w}{R}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b R\left(\left(h' + \frac{hw}{R}\right)^2 + \left(\frac{P}{R} + \frac{w'}{R} - \frac{w^2}{R^2}\right)h^2\right)dx.$$

Подберем функцию w так, чтобы выполнялось равенство

$$P + w' - \frac{w^2}{R^2} = 0. \tag{22}$$

Будем искать ее в виде $w = -\frac{Rv'}{v}$, тогда уравнение (22) станет линейным. Продифференцируем:

$$w' = -\frac{\left(Rv'\right)'}{v} + \frac{R\left(v'\right)^2}{v^2},$$

подставим это в уравнение (22):

$$P - \frac{\left(Rv'\right)'}{v} + \frac{R\left(v'\right)^2}{v^2} - \frac{R^2\left(v'\right)^2}{Rv^2} = 0,$$

отсюда получаем *условие Якоби*:

$$\begin{cases} -(Rv')' + Pv = 0, \\ v(a) = 0, \\ v'(a) = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Данная задача Коши должна иметь решение, не обращающееся в ноль на промежутке $(a;b]$, тогда выражение (22) верно, а знак второй вариации определяется знаком функции R.

Условие Якоби и условие Лежандра дают достаточное условие экстремума.

Многомерный случай ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$).

$$F[u] = \int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})\,dx, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

$$D = \left\{u \in C^1(\bar{\Omega}); \quad h \in C^1(\bar{\Omega}), \quad h|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Считаем вторую вариацию этого функционала $\delta^2 F(u,h)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\int\limits_{\Omega}\cdots\int f(x, u+\alpha h, u_{x_1}+\alpha h_{x_1}, \ldots, u_{x_n}+\alpha h_{x_n})\,dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\int\limits_{\Omega}\cdots\int\left(f_u(x,\ldots)h + \sum_{j=1}^{n} f_{u_{x_j}}(x,\ldots)h_{x_j}\right)\,dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\cdots\int\left(f_{uu}h^2 + 2\sum_{j=1}^{n} f_{uu_{x_j}} h h_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} f_{u_{x_i}u_{x_j}} h_{x_i} h_{x_j}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\cdots\int\left(f_{uu}h^2 + \sum_{j=1}^{n} f_{uu_{x_j}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(h^2\right) + \sum_{i,j=1}^{n} f_{u_{x_i}u_{x_j}} h_{x_i} h_{x_j}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\cdots\int\left(\left(f_{uu} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}f_{uu_{x_j}}\right)h^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_{u_{x_i}u_{x_j}} h_{x_i} h_{x_j}\right)dx.$$

В подынтегральном выражении в первом слагаемом множитель при h^2 окажется равным нулю, поскольку функция $f(x, \nabla u)$ не зависит от функции u. Из необходимого условия экстремума следует, что второе слагаемое неотрицательно (если говорим о минимуме). Таким образом, второе слагаемое определяет вторую вариацию данного функционала.

Рассмотрим небольшой пример

$$F[u] = \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + 2gu\right) dx, \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi,$$

здесь $f_{uu} = 0$, $f_{uu_{x_j}} = 0$ (зависимость от функции u не мешает — первое слагаемое нулевое).

$$|\nabla u|^2 = \textstyle\sum_{j=1}^n u_{x_j}^2; \qquad \begin{array}{ll} \text{при } i \neq j & f_{u_{x_i} u_{x_j}} = 0, \\ \text{при } i = j & f_{u_{x_i} u_{x_j}} = 2. \end{array}$$

Посчитаем вторую вариацию

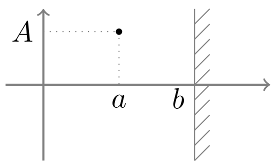
$$\delta^2 F(u, h) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} 2 \sum_{j=1}^{n} h_{x_j}^2 \, dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx \geq 0,$$

это выражение будет равно нулю при $h = const$. Такой интеграл называется *интегралом Дирихле.*

§ 13. Вариационная задача в параметрической форме. Условие трансверсальности

Пусть есть функционал

$$F[y] = \int\limits_{a}^{x_1} f(x, y, y') \, dx, \qquad y(a) = A. \tag{24}$$



Построим вариационную задачу в параметрической форме.

Пусть γ — некоторая гладкая кривая, которая задает параметризацию

$$\gamma\ :\quad \begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2.$$

Тогда

$$F[\gamma] = F[y] = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t)\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right)\, dt.$$

Поясним, как это получилось:

$$\int\limits_{a}^{x_1} f(x, y, y')\, dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x\,\frac{dx}{dt}, y\,\frac{dx}{dt}, y'\,\frac{dx}{dt}\right)\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x\dot{x}, y\dot{x}, \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x\dot{x}, y\dot{x}, \frac{dy}{dt}\right)\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \dot{x}\, dt.$$

Для функции $\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ верно следующее

$$\begin{cases} \text{нет явной зависимости от переменной } t, \\ \text{при } \lambda > 0\ :\quad \varphi(x, y, \lambda\dot{x}, \lambda\dot{y}) = \lambda\varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$[7] решение вариационной задачи не зависит от параметризации.

Система уравнений Эйлера для данного функционала

$$\begin{cases} \varphi_x - \frac{d}{dt}\varphi_{\dot{x}} = 0, \\ \varphi_y - \frac{d}{dt}\varphi_{\dot{y}} = 0. \end{cases}$$

Покажем, почему это так. Пусть функция φ такая, как описано выше. Пусть $t = t(\tau)$ — параметризация, такая что $t'(\tau) > 0$,

$$\begin{cases} x(t(\tau)) = \tilde{x}(\tau), \\ y(t(\tau)) = \tilde{y}(\tau), \end{cases} \qquad \tau_1 \le \tau \le \tau_2.$$

[7]Функция φ является положительной однородной функцией первой степени по третьему и четвертому аргументам.

Итого,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi\left(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau),\frac{d\tilde{x}}{d\tau}\Big/\frac{dt}{d\tau},\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\Big/\frac{dt}{d\tau}\right)\frac{dt}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi\left(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau),\frac{d\tilde{x}}{d\tau},\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)d\tau.$$

Получилось то же самое, значит и система Эйлера та же.

Рассмотрим функционал (24), условие задано только на левом конце, верхний предел интеграла не фиксирован. Если ограничить кривую концом в точке b, то появится естественное граничное условие. Сейчас этого нет.

Перейдем к параметрической форме:

$$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Тогда функционал

$$F[x,y] = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt,$$

$$x(t_1) = a, \quad y(t_1) = A,$$

$$\psi\ :\quad \begin{cases} \text{не зависит явно от переменной } t, \\ \forall\,\lambda > 0 \quad \varphi(x,y,\lambda\dot{x},\lambda\dot{y}) = \lambda\varphi(x,y,\dot{x},\dot{y}). \end{cases}$$

Необходимое условие экстремума для данного функционала — система уравнений Эйлера:

$$x,y \in C^1(t \geq t_1) \qquad \begin{cases} \psi_x - \frac{d}{dt}\psi_{\dot{x}} = 0, \\ \psi_y - \frac{d}{dt}\psi_{\dot{y}} = 0. \end{cases}$$

Посчитаем первую вариацию. Пусть $\{h, \eta \in C^1(t \geq t_1)\colon h(t_1) = 0, \eta(t_1) = 0\}$ — это M. Положим $\alpha = \beta$:

$$\delta F(x, y, h, \eta) = \frac{d}{d\alpha} F[x + \alpha h, y + \alpha \eta]\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\psi_x h + \psi_y h + \psi_{\dot{x}} \dot{h} +$$

$$+\psi_{\dot{y}} \dot{h}\Big)\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\left(\psi_x - \frac{d}{dt}\psi_{\dot{x}}\right) h + \left(\psi_y - \frac{d}{dt}\psi_{\dot{y}}\right)\eta\right) dt +$$

$$+ \psi_{\dot{x}}\big|_{t=t_2} h(t_2) + \psi_{\dot{y}}\big|_{t=t_2} \eta(t_2) = 0.$$

В подынтегральном выражении в скобках очевидны уравнения из системы Эйлера, следовательно, весь интеграл будет равен нулю. Остается

$$\psi_{\dot{x}}\big|_{t=t_2} h(t_2) + \psi_{\dot{y}}\big|_{t=t_2} \eta(t_2) = 0 \qquad \forall\, h, \eta \in M.$$

Функции h и η не зависят друг от друга и произвольны, запишем тогда так:

$$\psi_{\dot{x}}\big|_{t=t_2} \delta x + \psi_{\dot{y}}\big|_{t=t_2} \delta y = 0. \tag{25}$$

Вспомним, что $\psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = f(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}})\dot{x}$, тогда

$$\psi_{\dot{x}} = f\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) + \dot{x} f_{y'}\left(-\frac{\dot{y}}{\dot{x}^2}\right) = f - y' f_{y'},$$

$$\psi_{\dot{y}} = \dot{x} f_{y'} \frac{1}{\dot{x}} = f_{y'}.$$

Перепишем теперь формулу (25) как

$$\left(f - y' f_{y'}\right)\big|_{x=x_1} \delta x + f_{y'}\big|_{x=x_1} \delta y = 0, \tag{26}$$

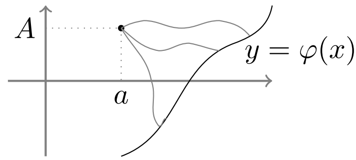
это выражение называется *общей формой первой вариации.*

Частные случаи формулы (26).

1. Пусть переменная x не варьируется (то есть задан какой-то x_1), значит, $\delta x = 0$, а δy — любая. Тогда естественное граничное условие такого функционала на свободном конце

$$f_{y'}\big|_{x=x_1} = 0.$$

2. Пусть экстремаль заканчивается на заданной гладкой кривой — условие трансверсальности.



Пусть кривая $y = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1$. В данном случае мы не можем произвольно варьировать x и y: в формуле (26) δx и δy связаны тем, что с заданной кривой сходить нельзя. Поймем эту связь. По формуле Тейлора

$$\varphi(x_1 + \Delta x) = \varphi(x_1) + \varphi'(x_1)\Delta x + o(\Delta x),$$

получаем

$$\Delta\varphi|_{x=x_1} = \varphi(x_1 + \Delta x) - \varphi(x_1) \approx \varphi'(x_1)\Delta x,$$

обозначим Δx и $\Delta\varphi|_{x=x_1}$ как δx и δy соответственно (это ассоциации). Подставим все это в формулу (26):

$$\left(f - y' f_{y'}\right) \delta x\Big|_{x=x_1} + f_{y'}\varphi'(x_1)\delta x\Big|_{x=x_1} = 0.$$

Отсюда следует *условие трансверсальности*

$$\left(f + \left(\varphi' - y'\right) f_{y'}\right)\Big|_{x=x_1} = 0.$$

3. Экстремаль с изломом (то есть вторая производная равна нулю). Рассмотрим на примере уже знакомого нам функционала

$$\int\limits_{-1}^{1} y^2 \left(1 - y'\right)^2 dx, \quad y(-1) = 0,\, y(1) = 1.$$

Решением будет кривая

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

являющаяся экстремалью с изломом. Пусть не знаем, где излом: $c \in (a;b)$ — точка, где нарушается непрерывность и дифференцируемость, значит

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx = F_1 + F_2,$$

тогда $\delta F_1 + \delta F_2 = 0$ и потребуем условие непрерывности экстремали в точке c. Но эта точка неизвестна, значит, нужно варьировать не только y, но и x. Для F_1 выполняется формула (26), и предел слева:

$$\big(f - y' f_{y'}\big)\big|_{x=c-0}\,\delta x + f_{y'}\big|_{x=c-0}\,\delta y -$$

для F_2 аналогично, но c — нижний предел:

$$-\,\big(f - y' f_{y'}\big)\big|_{x=c+0}\,\delta x - f_{y'}\big|_{x=c+0}\,\delta y = 0.$$

$\delta x.\delta y$ произвольны, следовательно, в точке излома выполняются *условия на скачок* (Вейерштрасса—Эрдмана):

$$\big[f - y' f_{y'}\big]_{x=c} = 0, \qquad \big[f_{y'}\big]_{x=c} = 0.$$

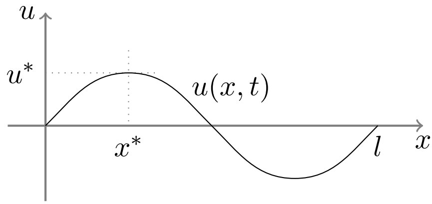
§ 14. Вывод уравнения колебаний струны

Принцип наименьшего действия Остроградского—Гамильтона: для систем со стационарными связями, находящимися под действием потенциальных сил и не зависящих явно от времени, существует интеграл энергии $E = K + \Pi = h = const$, где K — кинетическая энергия, Π — потенциальная.

Запишем функционал действия

$$D = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi)\,dt,$$

то есть реальное движение — это экстремаль D. Рассмотрим струну:



Кинетическая энергия — это $K = mv^2/2$, где m — масса, а v — скорость (то есть u_t). Пусть ρ — линейная плотность струны, тогда

$$K(t) = \int\limits_0^l \frac{\rho u_t^2}{2}\, dx.$$

Удлинение струны — это $\sqrt{1+u_x^2} - 1$, пусть T — натяжение струны, тогда

$$\varPi(t) = \int\limits_0^l T\left(\sqrt{1+u_x^2} - 1\right) dx.$$

Предполагаем, что колебания малые, значит $|u_x|$ мало. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора следующей функции

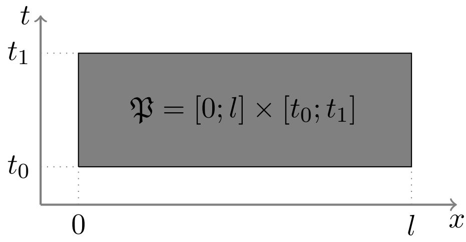
$$\sqrt{1+u_x^2} = 1 + \frac{1}{2}u_x^2 + o(u_x^2),$$

отсюда следует, что

$$\varPi(t) \approx \int\limits_0^l \frac{T u_x^2}{2}\, dx.$$

Тогда, в случае струны, получаем такой функционал действия:

$$D = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l \left(\frac{\rho}{2}u_t^2 - \frac{T}{2}u_x^2\right) dx dt,$$



Считаем, что концы струны закреплены (то есть $h|_{x=0} = h|_{x=l} = h|_{t=t_0} = h|_{t=t_1} = 0$, где $h \in C^1(\mathfrak{P})$, а функции $u|_{t=t_0}, u|_{t=t_1}$ известны). Пусть $\rho, T > 0$ и постоянны, посчитаем первую вариацию:

$$\delta D(u,h) = \frac{d}{d\alpha} D[u+\alpha h]\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l (\rho u_t h_t - T u_x h_x)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l (-\rho u_{tt} + T u_{xx}) h\,dxdt + \int\limits_0^l \rho u_t|_{t=t_1} h(x,t_1)\,dx -$$

$$- \int\limits_0^l \rho u_t|_{t=t_0} h(x,t_0)\,dx + \int\limits_{t_0}^{t_1} T u_x|_{x=l} h(l,t)\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} T u_x|_{x=0} h(0,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l (T u_{xx} - \rho u_{tt}) h\,dxdt.$$

Заметим, что если $\rho, T < 0$, то тоже все хорошо, просто здесь не рассматривается этот случай.

По лемме 1 получаем $\rho u_{tt} - T u_{xx} = 0$, введем множитель $a^2 = T/\rho$, тогда *волновое уравнение*:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

Если на струну есть внешнее воздействие (колебания не свободные), то рассматривают неоднородное уравнение

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t).$$

Рассмотрим колебания мембраны. Пусть T — натяжение площади поверхности, а растяжение — $\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1 \approx (u_x^2+u_y^2)/2$, тогда

$$\Pi(t) = \iint\limits_{\Omega} T\left(\frac{u_x^2}{2}+\frac{u_y^2}{2}\right)dxdy.$$

Значит, функционал дейстия в этом случае

$$D = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\rho u_t^2}{2}-\frac{T(u_x^2+u_y^2)}{2}\right)dxdy\right)dt.$$

Аналогично одномерному случаю получаем волновое уравнение

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}) = f, \quad \text{или} \quad u_{tt}-a^2\Delta u = f, \quad u = u(x,t),\, x\in\mathbb{R}^n.$$

§ 15. Постановка краевых задач

Пусть есть такая задача Коши:

$$u_{tt}-a^2\Delta u = f, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0,$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Решение этой задачи ищется во всем пространстве.

Начально-краевые задачи.

Рассмотрим на примере струны ($n=1$).

Начальные условия — это $u|_{t=0} = \varphi(x)$ (положение точек струны в начальный момент времени), $u_t|_{t=0} = \psi(x)$ (начальная скорость). Краевые условия — условия при $x=0$ и при $x=l$. Различают три вида краевых условий.

1. Первое краевое *условие Дирихле.*

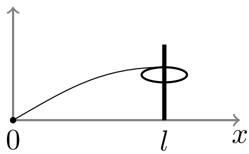
   Закон движения конца:

$$u|_{x=0} = g(t) \quad \text{или} \quad u|_{x=l} = g(t).$$

2. Второе краевое *условие Неймана.*

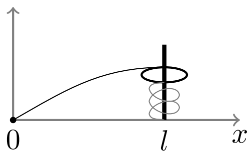
$$u_x|_{x=0} = g(t) \quad \text{или} \quad u_x|_{x=l} = g(t).$$

Пояснение: конец струны как бы «ходит» по колечку, нанизанному на штырь, без трения.



Свободный конец будет при $u_x|_{x=0} = 0$, то есть никакая сила не приложена.

2. *Третье краевое условие.*
Колечко перемещается по штырю несвободно, поскольку штырь находится на пружине.



Тогда функционал действия будет выглядеть так

$$\Pi(t) = \int_0^l T\left(\sqrt{1+u_x^2} - 1\right) dx + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sigma u^2(t,l)}{2}\, dt.$$

В этом случае первая вариация будет

$$\delta D(u,h) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l (\rho u_t h_t + T u_x h_x)\, dxdt - \int_{t_0}^{t_1} \sigma u(t,l) h\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l (T u_{xx} - \rho u_{tt}) h\, dxdt + \int_{t_0}^{t_1} \left(-T u_x h|_{x=0}^{x=l} - \sigma u(t,l) h\right) dt.$$

При $x = l$ нет условия $h|_{x=l} = 0$, значит, в первой вариации множитель при $x = 0$ уйдет, и останется

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (-Tu_x - \sigma u)\, h(t,l)\, dt = 0 \quad \overset{\text{лемма 1}}{\Longrightarrow} \quad Tu_x + \sigma u = 0.$$

Таким образом, третье краевое условие на правом конце:

$$(u_x + hu)\big|_{x=l} = 0, \quad h = \frac{\sigma}{T} > 0.$$

Пусть теперь $x = 0$, тогда множитель при $x = l$ занулится, и останется

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (Tu_x - \sigma u)\, h(t,0)\, dt = 0 \quad \overset{\text{лемма 1}}{\Longrightarrow} \quad Tu_x - \sigma u = 0.$$

Следовательно, третье краевое условие на левом конце:

$$(u_x - hu)\big|_{x=0} = 0, \quad h = \frac{\sigma}{T} > 0.$$

Заметим, что третьим краевым условием является линейная комбинация первого и второго.

Пусть есть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Составим начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Пусть $\vec{n}$ — внешняя нормаль по отношению к границе области Ω, тогда

$$\left[\begin{array}{ll} u|_{\partial\Omega} = g(t) & \text{(к.у. Дирихле)}, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = g(t) & \text{(к.у. Неймана)}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\big|_{\partial\Omega} = g(t) & \text{(Третье к.у.)}; \end{array}\right. \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

§ 16. Энергетическое неравенство для волнового уравнения