Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
Кафедра астрофизики

Методы решения многомерных уравнений

Хайбрахманов Сергей Александрович

кандидат физико-математических наук, доцент,
старший научный сотрудник СПбГУ

Email: s.khaibrakhmanov@spbu.ru

Содержание

1) Постановка задачи
2) Метод переменных направлений
3) Локально-одномерный метод

§7.1 Постановка задачи

Для примера рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности в прямоугольной области $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u(t=0, x, y) & = & u_0(x, y), \\ u(t, \Gamma) & = & u_\Gamma, \end{cases} \qquad (7.1)$$

где D – коэффициент теплопроводности, Γ – граница области, в которой ищется решение.

Для дискретизации введем однородную сетку

$$\begin{array}{lll} x_i = i\Delta x, & i = 0 \ldots N, & \Delta x = a/N \\ y_j = j\Delta y, & j = 0 \ldots M, & \Delta y = b/M \end{array}$$

И определим сеточную функцию как

$$u_{i,j}^n = u\left(t^n, x_i, y_j\right)$$

Выберем явно-неявную схему по аналогии с одномерным случаем (см. §5.3)

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} & = & (\Lambda_1 + \Lambda_2)\left[\sigma u_{i,j}^{n+1} + (1-\sigma) u_{i,j}^{n}\right] & (7.2) \\ \Lambda_1 & = & \dfrac{D}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) & (7.3) \\ \Lambda_2 & = & \dfrac{D}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) & (7.4) \end{cases}$$

Порядок аппроксимации такой схемы:

$$O(\Delta t^{\nu} + \Delta x^2 + \Delta y^2)\ ,\nu = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 1/2 \\ 2, & \sigma = 1/2 \end{cases}$$

Условие устойчивости

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4D\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)^{-1} \geq \sigma \qquad (7.5)$$

Например, для явной схемы ($\sigma = 0$)

$$2D\Delta t \leq \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

§7.2 Метод переменных направлений

Другое название: **продольно-поперечная схема**.

Введем промежуточный временно́й слой

$$t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$$

И запишем схему (7.2) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{0.5\Delta t} = \Lambda_1 u_{i,j}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{i,j}^n \\ \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{0.5\Delta t} = \Lambda_1 u_{i,j}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{i,j}^{n+1} \end{cases} \qquad (7.6)$$

Схема является неявной по x на первом этапе и неявной по y – на втором. На каждом этапе система уравнений совпадает с одномерной схемой типа (5.7). Она может быть решена методом прогонки.

Порядок аппроксимации схемы (7.6) совпадает с (7.2).

Замечания

1) Данная схема является одной из лучших схем для двумерных уравнений.
2) Схему невозможно обобщить на трехмерный случай.

§8.3 Локально-одномерный метод

Другое название – **метод с факторизованным оператором**.

Рассмотрим общий случай многомерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u, \qquad (7.7)$$

где $u = u(t, x_1, \dots, x_\alpha, \dots x_p)$,

$$A_\alpha = D_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}, \quad D_\alpha = const. \qquad (7.8)$$

Аппроксимируем это уравнение симметричной неявной схемой Кранка-Николсон

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha (u^{n+1} + u^n), \qquad (7.9)$$

где Λ_α определяется по аналогии с (7.3-7.4) для каждого x_α.

Введем промежуточные временны́е слои и на каждом таком слое сделаем в (7.9) замену:

$$\sum_{\alpha} \Lambda_\alpha \to p\Lambda_\alpha, \qquad (7.10)$$

$$\Delta t \to \Delta t/p. \qquad (7.11)$$

Пусть w_α – решение на промежуточном шаге α. Тогда схема запишется в следующем виде

(7.12)
$$\begin{cases} \dfrac{w_\alpha^* - w_\alpha^n}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\Lambda_\alpha(w_\alpha^* - w_\alpha^n), \ \alpha = 1, \dots, p \\ w_1^n = u^n \\ w_2^n = w_1^* \\ w_3^n = w_2^* \\ \cdots \\ w_p^n = w_{p-1}^* \\ u^{n+1} = w_p^* \end{cases}$$

Например, для двумерного случая

$$(7.13)\qquad \begin{cases} w_1^n = u^n, \\ \dfrac{w_1^* - w_1^n}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\Lambda_1(w_1^* - w_1^n), \\ w_2^n = w_1^*, \\ \dfrac{w_2^* - w_2^n}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\Lambda_2(w_2^* - w_2^n), \\ u^{n+1} = w_2^*, \end{cases}$$

где Λ_1 и Λ_2 определяются согласно (7.3-7.4).

Как и одномерная схема Кранка-Николсон, схемы (7.12) и (7.13) являются безусловно устойчивыми и имеют порядок аппроксимации $O\left(\Delta t^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \Delta x_\alpha^2\right)$. На каждом промежуточном шаге по времени система уравнений для w_α^* решается методом прогонки.

Замечания

1) «Расщепление» конечно-разностных операторов по пространственным направлениям, как в (7.6) или (7.12), приводит к последовательности одномерных задач в каждом координатном направлении.
2) Расщепление можно делать не только по пространственным направлениям, но и по физическим процессам. В этом случае конечно-разностные операторы Λ_α соответствуют различным типам физических процессов: гиперболическим (процессы переноса), параболическим (процессы диффузии, теплопроводности) и проч.

Список литератруры

1) Калиткин Н.Н., Самарский А.А. Численные методы. 1978. М.:Наука. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456957
2) *Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
3) Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. URL: http://biblioclub.ru/index.php?&page=book&id=457052
4) Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. URL: http://biblioclub.ru/index.php?&page=book&id=457046