

Лабораторная работа №3

Многомерные методы решения уравнений в частных производных

Написать программу, реализующую численное решение двумерного уравнения теплопроводности с помощью одной из выбранных схем:

- 1) полностью неявная схема;
- 2) метод Кранка-Николсон.

Для расщепления двумерной схемы по пространственным направлениям предлагается выбрать один из методов: продольно-поперечную схему (метод переменных направлений) или локально-одномерный метод (метод с факторизованным оператором).

Варианты постановки задачи

Вариант 1

Промоделировать с помощью разработанной программы установление температуры в однородной прямоугольной медной пластине размерами $L_x \times L_y = 0.5 \times 0.5$ м. Торцы пластины вдоль одной из осей поддерживаются при постоянной температуре 25 градусов. На торцах вдоль другой оси задан нулевой поток тепла. Начальная температуры пластины равна 0 градусов.

Построить рисунки с двумерными картами распределения температуры для нескольких выбранных моментов времени. Проанализировать характер решения.

Вариант 2*

Промоделировать с помощью разработанной программы распространение анизотропной температурной волны, эволюция которой описывается следующим уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 U^{\sigma_1} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 U^{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Данное уравнение имеет аналитическое решение вида:

$$T(t, x, y) = \begin{cases} 0.5 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16(t - x - 2y)}}, & \text{если } t \geq x + 2y \\ 0 & \text{если } t < x + 2y \end{cases}$$

Протестировать программу для следующих параметров: $k_1 = 4$, $\sigma_1 = 4$, $k_2 = 0.25$, $\sigma_2 = 2$. Проанализировать решение для момента времени $t = 30$ в области $x \in [0, 25]$, $y \in [0, 16]$. Помимо двумерной карты распределения температуры, требуется построить рисунки с одномерными профилями $T(t = 30, x, y = [3, 7, 11])$ и $T(t = 30, x = [1, 11, 21], y)$.

Требования к работам

Программа должна быть написана на языке программирования С, С++ или Фортран с использованием принципов процедурного, модульного и/или объектно-ориентированного программирования.

Для сдачи работы необходимо продемонстрировать корректность работы программы, а также презентацию с описанием постановки задачи, рисунков с результатами расчетов, кратким обсуждением полученных результатов. Задание выполняется группами по два человека. Крайний срок сдачи работы: последняя неделя обучения в семестре.

Составитель:
старший научный сотрудник СПбГУ,
канд. физ.-мат. наук, доцент

С.А. Хайбрахманов