

**Все**

**аксиомы и теоремы стереометрии**

**Содержание:**

#### Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

* Параллельность прямых и плоскостей

#### Перпендикулярность прямых и плоскостей



**С1. *Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не***

***принадлежащие ей.***

**С2*. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***

***С3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***



**Теорема 15.1:**

Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

**Теорема 15.2:**

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

**Теорема 15.3:**

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.



**Теорема 16.1:**

**Теорема 16.2:**



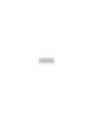
Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

Две прямые, параллельные третьей прямой,

параллельны

**Теорема 16.3:**

**Теорема 16.4:**



Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой - нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

**Теорема 16.5:**



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Через точку вне данной плоскости можно провести



**Теорема 17.1:**

Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

**Теорема 17.2:**



Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

**Теорема 17.3:**



Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

**Теорема 17.4:**



Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

**Теорема 17.5:**



Если прямая, проведѐнная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна еѐ проекции, то она перпендикулярна наклонной.

**Теорема 17.6:**



Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

**С1. *Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не***



***принадлежащие ей.***

*F*

BD14866_

BD14866_*M E*

Точки *A*, *B*,*C*, *D*

Точки *M* , *F*, *E*

BD14866_



*A*

*B*

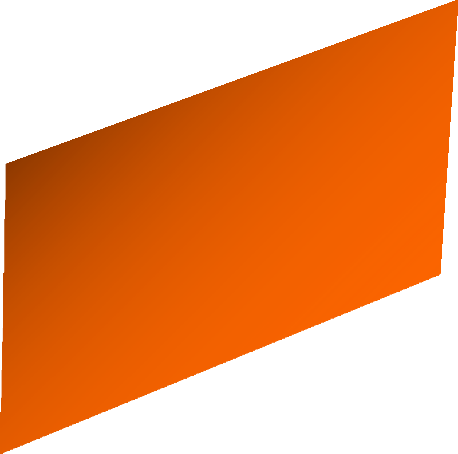
*D*

*C*



**С2*. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***

*m*.*A*  ,





*A*

*a*



*m*.*A*   ,

 ∩ 

 *a*,

*m*.*A*  *a*



***С3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***

*a* ∩ *b*  *m*.*A*



*b*

*A*



*a*

*a*, *b*  ,

 

!

**Теорема 15.1: Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.**

* Дано: прямая а,
* Доказать:

*m*.*A* *a*

*A B*

,такая, что *m*.*A*, *a* ;

*пл*. единственн ая ! *a* 

* Доказательство:

2) Проведѐм прямую АВ, 3)Через прямые АВ и а

*AB* ∩ *a*

 *m*.*B*

проведѐм плоскость 



1)Возьмѐм

*m*.*B*  *a*

(по I)

4)  - ! (по С3)

Теорема доказана.

**Теорема 15.2: Если две точки прямой принадлежат**

**плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.**

* Дано: прямая

*a* , плоскость .

*m*.*A*,

*m*.*A*,

*B*  *a B* 

* Доказать:



*a*  *B a*

*A*

## 

**Теорема 15.2**

* Доказательство:

1. Возьмѐм *m*.*C*  
2. Через прямую *a*

и *m*.*C*

проведѐм плоскость 

(по Теореме 15.1) *C*

*m*.*A*,

3)

*m*.*B* ,

   ∩   *a a*

 

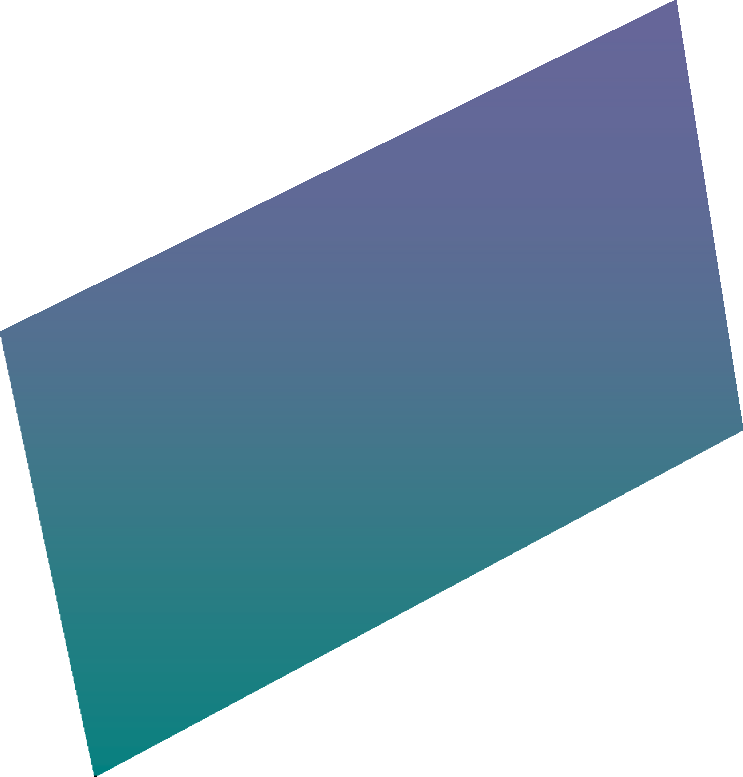
*B*

*A*

И значит,

*a*  .

Теорема доказана.



**Следствие из Теоремы 15.2:**

**Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.**

*a a*

*A*

##  

*a* ∩  0



*a* ∩

 *m*.*A*



**Теорема 15.3: Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.**

* Дано:

*m*.*A*, *B*,*C*  *a A B*

C

* + Доказать:
  1. ,такая, что *m*.*A*, *B*, *C* 
  2. *пл*. единственн ая !

**Теорема 15.3**

* + - Доказательство:

Проведѐм прямые

*B*

*AB* и *AC A C*

*AB* ∩ *AC*  *m*.*A* 

По *C*3 через

*AB* и *AC*

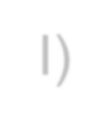
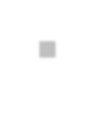
можно построить



плоскость , и притом

только одну. Теорема доказана.

* + - * Дано: прямая *a,* т.А *а*





* + - * + Доказать:

*a*

* + - * + I)

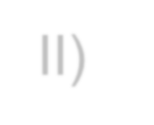


* ***Теорема 16.1:* Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.**

*a*1, т.ч. *т*.*А* *a*1, *a* || *a*1

 единственн ая

!

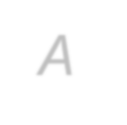
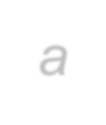


* II) *a*1

1. *a*1

**Доказать:**

, т.ч. *т*.*А* *a*1



*a*1

, *a* || *a*1

1. *a*1 

! *a*

**Доказательство:**



1. 1) Проведѐм плоскость 

через

прямую *а* и т.*А* ( по Т.15.1)

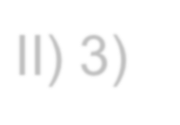
2) Через т.А проведѐм прямую *a*1

*a*1 || *a*, *a*1 



Существование доказано.

1. 3) Предположим,



*a*2 || *a*, т.ч. *т*.А  *а*2



1. Проведѐм через прямые



*a* и *а*2

плоскость

2

, *т*.*ч*. *a*1

*a* 

2

, *a*2

2 

*a*

 *т*.*А*  

2

1. Получили, что через прямую а и

точку А проходит 2 различные

плоскости   , а по Т.15.1

и 2

через прямую и не принадлежащую ей точку

можно провести единственную

!

плоскость, значит,

*a*1 

**Теорема доказана.**

Признак параллельности прямых

***Теорема 16.2:***

**Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.**

Рассмотрим случай, когда прямые не принадлежат

одной плоскости. ***b***

* Дано:

*a* || *b*, a || c *a*

*a*,*b*, *c* одной

* Доказать:

плоскости

*b* || *c*

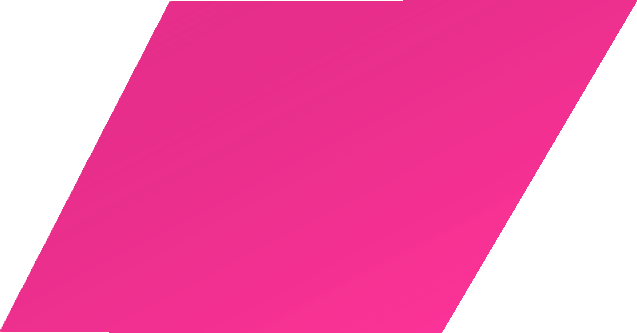


***c***

###### Доказательство:

***1)*** *a* || *b*; *a*,*b*  

***(по определению параллельных) b***  *B*



***2)*** a || c; a, c

***(по определению параллельных)*** *b*1

*a*

***3) Возьмём***

т. B*b*,   1

т.B, прямая *с*  1

***(по теореме 15.1) c***

***4)*** 

1 ∩ 

 *b*1,

*т*.*В* *b*1

*b*1 ∩ ,

5) Предположим, что

*тогда*

*b*1 ∩ *с*

*b*1 ∩ *а*

 *т*.*Х*

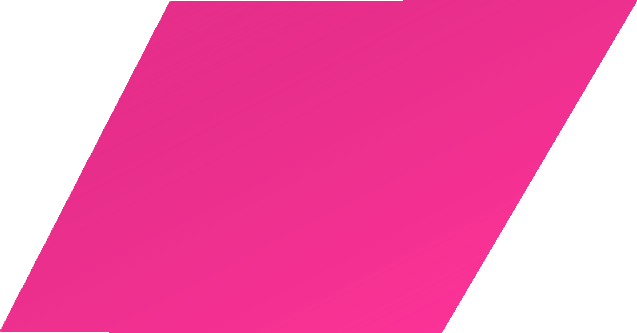
 *т*.*Х*

следовательно,

*а* ∩*с*

 *т*.*Х*

1. Но по условию a || c. Значит, наше



*b*

 *B*

*b*1

*a*



 1

*с*

предположение (п.5) не верно, и значит

*b*1 не

пересекает

пл. ,

1. Значит,

*b*1  *b*

*b*1 не

*b*1 не

пересекает

пересекает

пр.*с*,

пр.*а*,

*b*, *c*  1 

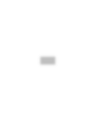
*b*, *c*  не пересекаются  *b* || *c*



***Что и требовалось доказать.***



Признак параллельности прямой и плоскости



***Теорема 16.3:* Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой - нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.**

* + Дано:

*b*

плоскость 

*a*  ,

*b*  ,

*a* || *b a*

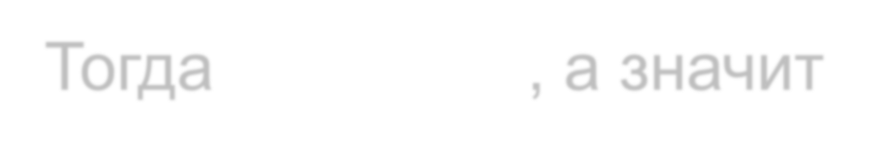
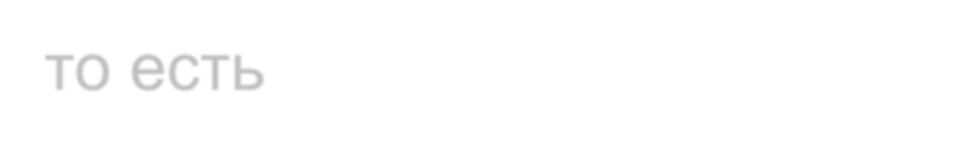
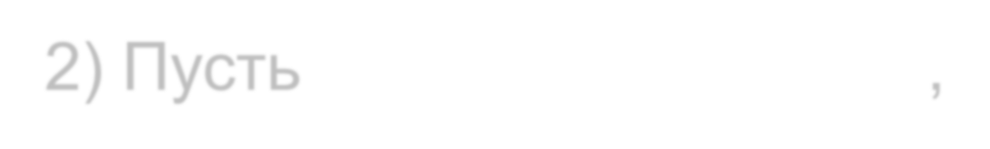


* + - Доказать:



*b* || 

(по определению  *b*



1

параллельных)

1  *a a*

1. Пусть *b* не параллельна ,

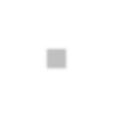
то есть *b* ∩  *т*.*Х*

Тогда

*т*.*Х*

 *a* , а значит

*a* ∩ *b*  *т*.*Х* 



**Теорема 16.3**

* Доказательство:

1) *a* || *b*; *a*,*b* 1

Но по условию

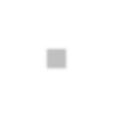
*a* || *b*  *b* не пересекает 

и следовательно, *b* || 



* Теорема доказана.

***Теорема 16.4:* Если две пересекающиеся прямые**



**одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**

* + Дано:



*a*1, *a*2 

*b*1, *b*2  

 *a*1 *a*2

### c

*a*1 ∩ *a*2  *т*.*А*

*a*1 || *b*1, *a*2 || *b*2

* Доказать:

 *b*1 *b*2

 || 



Признак параллельности плоскостей

* Доказательство:

1) Пусть

∩ 



*c*

2) *a*1, *a*2 ||  (по Т.16.3)

3) Прямые *a*1, *a*2 не пере-

секают прямую *с* и лежат с ней в одной плоскости*,* а значит,

*a*1, *a*2 || *c*

 *a*1 *a*2

### c

1. Следовательно, через т.А



в плоскости проходит

2 прямых, *b*1 *b*2

параллельных данной, 

а это противоречит

аксиоме параллельных. Наше предположение

(п.1) неверно, и значит,



**Теорема 164**

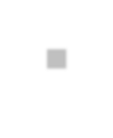


 || .

Теорема доказана.



Существование плоскости, параллельной данной плоскости



***Теорема 16.5:***

**Через точку вне данной плоскости можно**

**провести плоскость, параллельную данной, и притом**

**только одну.**

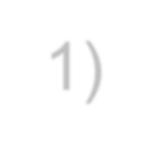
* Дано:

плоскость

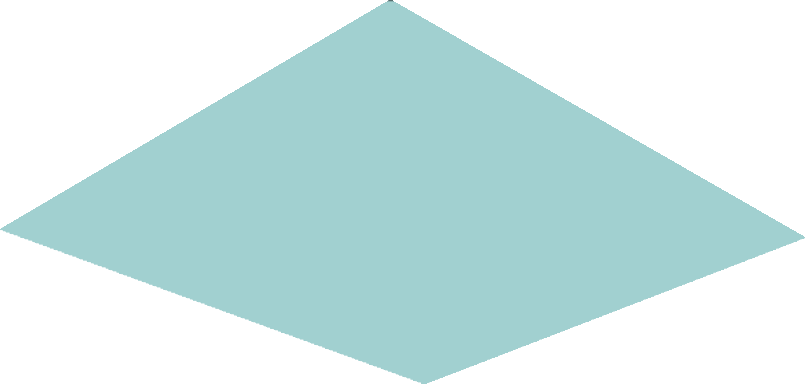
*т*.*А*



* + BD14868_Доказать:



1)  , т.ч. *т*.*А* ; || 







2)

  !

(единственность мы доказывать не будем)

* + Доказательство:

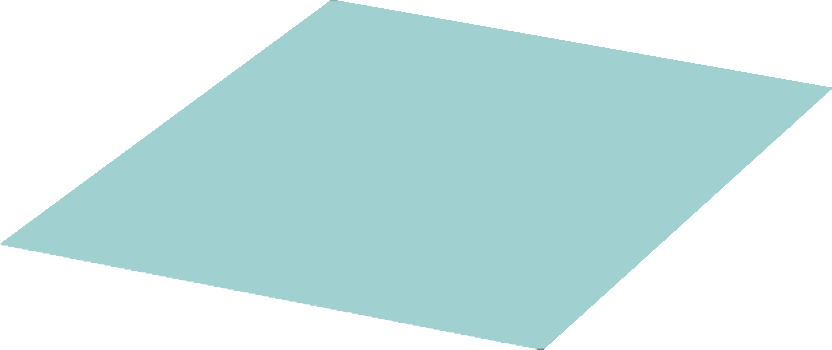
1) Возьмѐм произвольные

**Теорема 16.5**

прямые

*a* 

*b* 

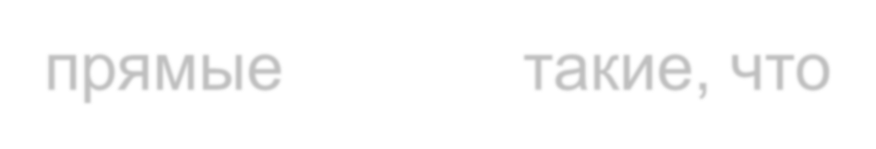




*b*1

*a*1

*a* ∩ *b*



2) Через точку А проведѐм

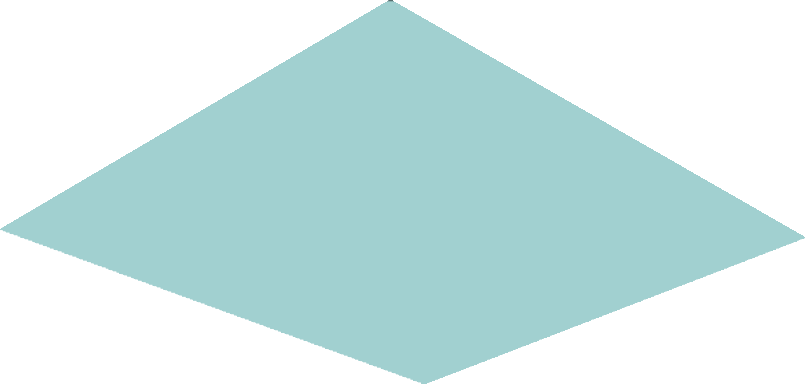
3) Проведѐм плоскость

прямые *a*1, *b*1 такие, что

*a*1 || *a*,*b*1 || *b*.

через прямые *a*1, *b*1



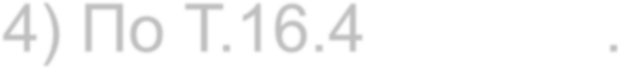
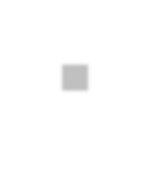
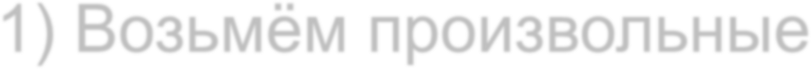




*a*

*b*

 *m*.*B*



4) По Т.16.4  || .



* Теорема доказана.



**Теорема 17.1: Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.**



*b*



*a*



*b*

*a*1

1



1

**Дано:** *a*  *b*; *a*, *b* 

*a*1 ∩ *b*1;

*a*1 *a*, *b*1 *b*

*a* , *b* 

1

1

1

**Доказать:**

*a*1  *b*1

#### Дополнительное построение:

1. *a* ∩ *b*

 *m*.*C*;

*a*1 ∩ *b*1

 *m*.*C*1

1. В плоскости параллельных

прямых *a* и *a*1 проведѐм

прямую

*c* || *CC*1,

*c* ∩ *a*

 *m*.*A*

  *AA*

|| *CC*

*c* ∩ *a*  *m*.*A*  1 1

1 1 

1. Аналогично проведѐм

прямую *d*

|| *CC*1 ,

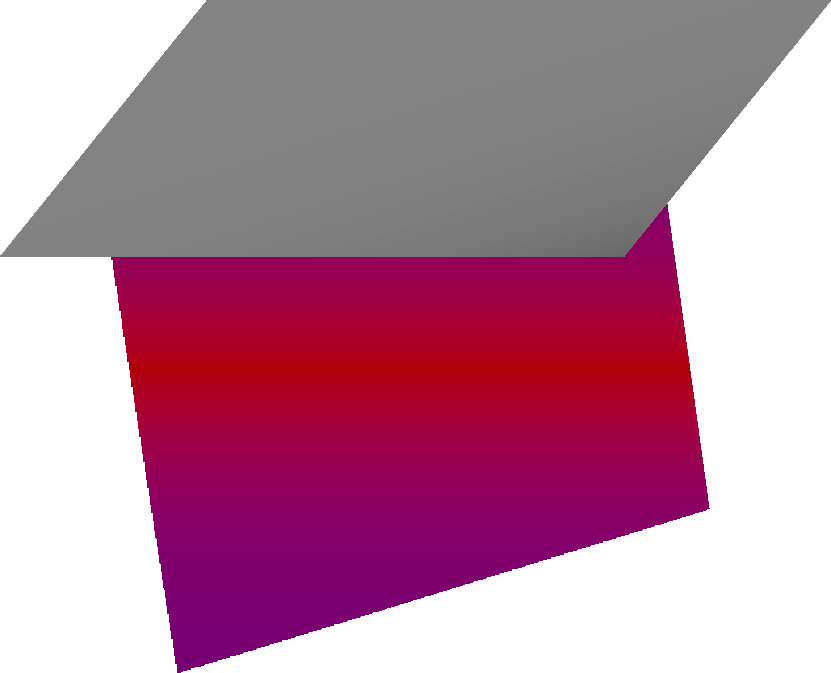
*d* ∩ *b*

 *m*.*B*

  *BB*

|| *CC*

*d* ∩ *b*  *m*.*B*  1 1



*b*

*A*

*a*

*C*

*B*



*b*1

*A*

*a*

*C*

1

*B*

1

*c*

1

1

1

*d*

1 1 

1. Проведѐм отрезки

*AB* и

*A*1*B*1 .

# Доказательство:

1. Так как по построению *AA*1 || *CC*1 и 



*AA*1 || *BB*1

*BB*1 || *CC*1,то по теореме 16.2 *b C B*

1. Плоскости  и 1 параллельны *A a*

по теореме 16.4.

1. Рассмотрим четырѐхугольник

*ACC*1 *A*1

*AC* ||

*A*1*C*1 -по условию

*ACC A* 

1 1 параллелограмм

*AC*  *A*1*C*1

##### 

*b*1 *C* 1

1

*AA* || *CC* -по построению

1 1

*A a*1 *B*1

1. Рассмотрим четырѐхугольник

*CBB*1*C*1 1 *d*

*BC* ||

*B*1*C*1 -по условию

*CBB C*  *c*

*BB* ||

*CC* -по построению 1 1

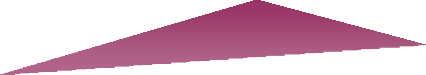
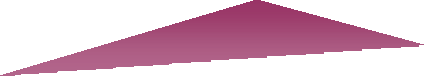
1 1 параллелограмм

*BC*  *B*1*C*1



# Доказательство:

1. Рассмотрим четырѐхугольник



*ABB*1 *A*1 : 

*AA*1 ||

*AB* ||

*BB*1-из 1)

*A B* -по 1-му свойству

*АBB А*  *b C*

1 1 *A a*

1 1 параллелограмм

 *B*

параллельных плоскостей

##### 

*AB*  *A*1*B*1

1. Рассмотрим  *ABC* и  *A*1*B*1*C*1

Они равны по 3-м сторонам.

*b*1 *C* 1

 *ACB*  900   *AC B*  900

*d*

*a* 1 *B*

1 1 1

*a*1  *b*1.

*A*1 1 1

А значит,

*c*

Теорема доказана.

Плоскость  ,



*a*

*b*

*A*

 *c*



**Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым,**

**лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной**

**плоскости.**

Дано:

*a* ;*b*, *c* 

*b* ∩ *c*

 *m*.*A*

*a*  *b*, *a*  *c*



**Теорема 17.2:**

Доказать:

*a* 

Дополнительное построение:

1) *AA*1  *AA*2 ; *A*1, *A*2  *a*;

2)*Проведём* прямую *х* ; *m*.*A*  *x*;

3)*Проведём* прямую*k* ; *m*.*A*  *k*;

*k* ∩ *c*  *m*.*C*, *k* ∩ *b*  *m*.*B*, *k* ∩ *x*  *m*.*X* ;

*a A*1



b A X B k

4)*Соединим т*.*A*1, *A*2 c *m*. *B*,*C* и *X* .

*C*

 *c x*

*A*2

#### Доказательство:



* 1. Рассмотрим  *A A C*

- равнобедренный, так *a A*

как *A A*  *A A*1

2 -по построению, *AC*  *a* 1

1 2 

- по условию. Т.е. АС– высота и медиана

*A*1 *A*2*C*

Следовательно,

*A*1*C*  *A*2*C*

* 1.  *A*1 *A*2 *B* - равнобедренный аналогично,

 *A B*  *A B*

1 2

b A B k

3) 

*A*1*BC*

=  *A*2 *BC*

по 3 призн., *C X*

Т.к. ВС – общая, а две другие стороны



равны из 1) и 2), следовательно, *c x*

 *A*1*BC*   *A*2*BC*

4) 

*A*1*BX*

  *A*2 *BX*

по 1 признаку р-ва тр.

( *BX*

-общая,

*A*1*B* 

*A*2 *B*) *A*

 *A BC*

1

  *A*

*BC* 

*A X*  *A X* 2

1. Рассмотрим  *A*1 *A*2 *X* -он равнобедренный (

2

1

2

*A*1 *X*

 *A*2 *X*, *A*1 *A* 

*A*2 *A*)

 ХА- медиана, высота, а значит, прямая

*a*  *x* , и

 *a* . 

Ч.и т.д.

**Теорема 17.3:**

**Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.**



Дано: *b*

плоскость , *a*

*a* || *b*

*a*   *B*

*a* ∩

*b* ∩

 *m*.*A A*

 *m*.*B* 

Доказать:



*b* 

#### Дополнительное построение:

* 1. Проведѐм в плоскости  *b*



через точку В произвольную *a*

прямую *x*2.

* 1. Проведѐм в плоскости 

прямую *x*1 || *x*2 ; *m*.*A* *x*1. *B*

* 1. Так как *a*  , то *a*  *x A*

1

по определению *x*2

перпендикулярности *x*1



прямой и плоскости.

#### Доказательство:





*a*

*b*

1.

*A*

*B*

2

*x*2



*x*1

1) *a* 

*x*1и

*a* || *b* 

по условию

*x*1 || *x*2 -по построению

*b*  *x*2

по теореме 17.

Но так как выбор прямой *x*

был произволен, то Теорема доказана.

*b* 



**Теорема 17.4:**

плоскость ,



*a*

*A*

*B*





**Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости,**

**параллельны.**

Дано: *b*

*a*  

*b*  

Доказать:

*a* || *b*

#### Доказательство:

Предположим противное - *a b*



прямая *a*

*B*

не параллельна *b* .

1

Возьмѐм на прямой *b*

какую-нибудь т. *B*1 и *B*

проведѐм через неѐ *B* 2

прямую *B*1*B*2 || *a*. *A*

*B*1*B*2

 - по теореме 17.3

*B* 

 через т. проходят 2 пересекающиеся прямые,

перпендикулярные

*BB*2 .

Пришли к противоречию, а значит,



**Теорема 17.4**

Теорема доказана.

*a* || *b* .



**Теорема 17.5:**

**Если прямая, проведѐнная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна еѐ проекции, то она перпендикулярна**



**наклонной.** *A*

Дано:

плоскость ,

*m*.*A* ;

*AB*  перпендикуляр к ,  *B*

*AC*  наклонная,

*BC*  проекция *AC* на , *c*

прямая *c* ; *m*.*C*  *c*, *C*

*BC*  *c*.

Доказать:

*c*  *AC*

#### Доказательство:



*A*

*A* 



*B*

*c*

*C*

1. Проведѐм

*A**C* || *AB*.

1. По теореме 17.3:

*A**C*   *c*  *A**C*.

1. Проведѐм плоскость 

через прямые *AB* и *A**C*.

1. *c*  *A**C* - по построению,

*c*  *BC*

- по условию,

 *c* 

 , а значит,

*c*  *AC*.



**Теорема 17.5**

Теорема доказана.

**Теорема 17.6:**



**Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную**

**другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны**

Дано:

плоскость

прямая *b*

,

 ;



|  |  |
| --- | --- |
| *b* |  |
|  |  |

*плоскость*  ,



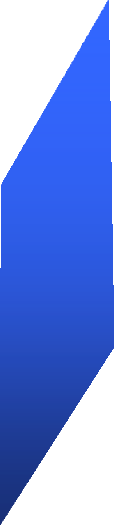
*b*  .

Доказать:

  

#### Доказательство:

1)  ∩   *c*



*b* 





*O*

*a*

*c*

*b* ∩ *c*  *m*.*O*

2) Проведѐм на пл.

через т. О прямую



*a* *c*

3) Проведѐм плоскость

через прямые *a* и *b*.

1. *c*  *a*

- по построению

условию,

*c*  *b*

 *c*  

- по

1. *a*  *b*

(т.к. *b*

), а значит, пл.

пересекает пл-ти и 

по перпендикулярным прямым,    по определению



**Теорема 17.6**

перпендикулярности плоскостей. Теорема доказана.