**Р. К. Гордин**

Это должен знать

**каждый матшкольник**

**МЦНМО, 2003**

УДК 514.112

ББК 22.151.0 Г89

**Гордин Р. К.**

Г89 Это должен знать каждый матшкольник. — 2-е изд., испр.

— М.: МЦНМО, 2003. — 56 с.

ISBN 5-94057-093-3

В этой книге в форме серии задач излагается практически вся элемен- тарная геометрия. Книга состоит из двух частей: первую можно считать базовым курсом геометрии, содержащим наиболее известные и часто ис- пользуемые теоремы; во второй приводятся малоизвестные, но красивые факты. Близкие по тематике задачи располагаются рядом, так чтобы бы- ло удобно их решать.

В настоящем втором издании исправлены замеченные ошибки и опе- чатки.

Книга будет полезна как школьникам математических классов («мат- школьникам»), так и преподавателям. Кроме того, она доставит немало приятных минут всем любителям геометрии.

ББК 22.151.0

*Рафаил Калманович Гордин*

ЭТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ КАЖДЫЙ МАТШКОЛЬНИК

Художник Н. Суворова.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 26.02.2003 г. Формат

60 *×* 88*/*16. Печать офсетная. Объем 3,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № . Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

**ISBN 5-94057-093-3**

c Гордин Р. К., 2003.

Ⓧc МЦНМО, 2003.

Ⓧ

# Предисловие

В первой части данного текста перечислены основные теоремы школьного курса геометрии и некоторые ключевые факты, которые бу- дут полезны тем школьникам, которые добросовестно учатся в школе и хотели бы научиться решать более-менее содержательные геомет- рические задачи. Все эти факты не выходят за пределы школьной программы и содержатся практически в любом школьном учебнике (иногда в виде задач). Первая часть может служить памяткой по гео- метрии для поступающих вузы, где к абитуриентам не предъявляют повышенных требований по математике. Таких вузов большинство.

Вторая часть состоит из задач повышенной трудности. Это

а) известные классические задачи и теоремы элементарной геомет- рии, не вошедшие в школьные учебники;

б) красивые задачи математических олимпиад разных уровней; в) задачи, содержащие ключевые идеи;

г) некоторые ставшие довольно популярными задачи, в разные годы предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по математике (МГУ, МФТИ, МИФИ и т. д.);

д) просто интересные и красивые геометрические задачи, которые традиционно предлагаются на занятиях различных математических кружков.

Задачи второй части могут быть рекомендованы тем школьникам, которые проявляют повышенный интерес к геометрии, любят решать геометрические задачи.

При необходимости, подробные решения большинства задач школь- ник может найти в известных книгах:

1. *Адамар Ж*. Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1936.
2. *Делоне Б*., *Житомирский О*. Задачник по геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. *Прасолов В*. *В*. Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1991.
4. *Прасолов В*. *В*, *Шарыгин И*. *Ф*. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.
5. *Шарыгин И*. *Ф*. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986.
6. *Шклярский Д*. *О*., *Ченцов Н*. *Н*., *Яглом И*. *М*. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: ГИТТЛ, 1954. (Библиотека математического кружка. Выпуск 2 и 3).

4 Предисловие

При подборе задач использована компьютерная информационно-по- исковая система «Задачи», созданная Московским математическим цен- тром под руководством И. Ф. Шарыгина, а также сотрудниками и уче- никами московской школы № 57. Система также содержит решения большинства из предложенных задач.

# Часть 1. Основные сведения из школьной геометрии

**Планиметрия**

1. **Признаки равенства треугольников.**
2. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соот- ветственно равны двум сторонам и углу между ними другого треуголь- ника, то треугольники равны.
3. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.
4. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то треугольники равны.
5. **Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника.**
6. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
7. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основа- нию, является биссектрисой и высотой.
8. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.
9. Если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.
10. Если биссектриса треугольника является его высотой, то тре- угольник равнобедренный.
11. Если медиана треугольника является его биссектрисой, то тре- угольник равнобедренный.
12. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину (серединный перпендикуляр к отрезку).
13. **Признаки и свойства параллельных прямых.**
14. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.
15. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
16. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.
17. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, парал- лельны.
18. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образован- ные при этом внутренние накрест лежащие углы равны.
19. **Теорема о сумме углов треугольника и следствия из нее.**
20. Сумма внутренних углов треугольника равна 180*◦*.
21. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.
22. Сумма внутренних углов выпуклого *n*-угольника равна 180*◦*(*n* 2).

−

1. Сумма внешних углов *n*-угольника равна 360*◦*.
2. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.
3. Если биссектрисы углов *B* и *C* треугольника *ABC* пересекаются в точке *M* , то ∠*BMC* = 90*◦* + ∠*A/*2.
4. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90*◦*.
5. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.
6. **Признаки равенства прямоугольных треугольников.**
7. По двум катетам.
8. По катету и гипотенузе.
9. По гипотенузе и острому углу.
10. По катету и острому углу.
11. Геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, есть биссектриса угла.
12. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в

30*◦*, равен половине гипотенузы.

1. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипо- тенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30*◦*.
2. **Неравенство треугольника.** Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.
3. **Следствие из неравенства треугольника.** Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом послед- него.
4. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.
5. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.
6. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.
7. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и на- клонные, то
8. перпендикуляр короче наклонных;
9. большей наклонной соответствует большая проекция и наоборот.
10. **Параллелограмм.** Параллелограммом называется четырехуголь- ник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

**Свойства и признаки параллелограмма.**

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треуголь- ника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пе- ресечения пополам.
5. Если противоположные стороны четырехугольника попарно рав- ны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
6. Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
7. Если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.
8. **Прямоугольник.** Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

**Свойства и признаки прямоугольника.**

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллело- грамм — прямоугольник.
3. **Ромб.** Ромбом называется четырехугольник, все стороны которо- го равны.

**Свойства и признаки ромба.**

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот па- раллелограмм — ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.
5. **Квадрат.** Квадратом называется прямоугольник, все стороны ко- торого равны.
6. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной пря- мой — две параллельные прямые.
7. **Теорема Фалеса.** Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекаю- щие второю сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.
8. **Средняя линия треугольника.** Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется средней линией треугольника.

**Теорема о средней линии треугольника.** Средняя линия треугольни- ка параллельна стороне треугольника и равна ее половине.

1. **Свойство середин сторон четырехугольника.** Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
2. **Теорема о медианах треугольника.** Медианы треугольника пере- секаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вер- шины.
3. а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к кото- рой она проведена, то треугольник прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

1. **Трапеция.** Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Сред- ней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непа- раллельных сторон (боковых сторон).

**Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции парал- лельна основаниям и равна их полусумме.

1. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен по- луразности оснований.
2. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

**Свойства и признаки равнобедренной трапеции.**

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основа- ние равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.
6. **Окружность.** Окружностью называется геометрическое место то- чек плоскости, удаленных от данной точки, называемой центром окруж- ности, на одно и то же положительное расстояние.

**Свойства окружности.**

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диа- метром, перпендикулярен этой хорде.
3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окруж- ности.
4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные рассто- яния.
5. Хорды окружности, удаленные от центра на равные расстояния, равны.
6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.
7. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.
8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.
9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.
10. **Замечательное свойство окружности.** Геометрическое место то- чек *M* , из которых отрезок *AB* виден под прямым углом (∠*AMB* =

= 90*◦*), есть окружность с диаметром *AB* без точек *A* и *B*.

1. Геометрическое место точек *M* , из которых отрезок *AB* виден под острым углом (∠*AMB <* 90*◦*) есть внешность круга с диаметром *AB* без точек прямой *AB*.
2. Геометрическое место точек *M* , из которых отрезок *AB* виден под тупым углом (∠*AMB >* 90*◦*), есть внутренность круга с диаметром *AB* без точек отрезка *AB*.
3. **Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольни- ка.** Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекают- ся в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.
4. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендику- лярна их общей хорде.
5. Центр окружности, описанной около прямоугольного треуголь- ника — середина гипотенузы.
6. **Теорема о высотах треугольника.** Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.
7. **Касательная к окружности.** Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.
8. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку ка- сания.
9. Если прямая *l*, проходящая через точку на окружности, перпенди- кулярна радиусу, проведенному в эту точку, то прямая *l* — касательная к окружности.
10. Если прямые, проходящие через точку *M* , касаются окружности в точках *A* и *B*, то *MA* = *MB*.
11. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе это- го угла.
12. **Теорема о биссектрисах треугольника.** Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.
13. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами *a*, *b* и гипотенузой *c*, равен (*a* + *b c*)*/*2.

−

1. Если *M* — точка касания со стороной *AC* окружности, вписанной в треугольник *ABC*, то *AM* = *p BC*, где *p* — полупериметр треуголь- ника.

−

1. Окружность касается стороны *BC* треугольника *ABC* и продол- жений сторон *AB* и *AC*. Тогда расстояние от вершины *A* до точки касания окружности с прямой *AB* равно полупериметру треугольни- ка *ABC*.
2. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *AB*, *BC* и *AC* соответственно в точках *K*, *L* и *M* . Если ∠*BAC* = *α*, то ∠*KLM* = 90*◦ α/*2.

−

1. Даны окружности радиусов *r* и *R* (*R > r*). Расстояние между их

центрами равно *a* (*a > R* + *r*). Тогда отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно *a*2 (*R r*)2 и *a*2 (*R* + *r*)2.

√ − − √ −

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.
2. **Касающиеся окружности.** Говорят, что две окружности касают- ся, если они имеют единственную общую точку (точка касания).
3. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.
4. Окружности радиусов *r* и *R* с центрами *O*1 и *O*2 касаются внеш- ним образом тогда и только тогда, когда *R* + *r* = *O*1*O*2.
5. Окружности радиусов *r* и *R* (*r < R*) с центрами *O*1 и *O*2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда *R r* = *O*1*O*2.

−

1. Окружности с центрами *O*1 и *O*2 касаются внешним образом в точке *K*. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках *A* и *B* и пересекается с общей касательной, проходящей через точку *K*, в точке *C*. Тогда ∠*AKB* = 90*◦* и ∠*O*1*CO*2 = 90*◦*.
2. **Углы, связанные с окружностью.**
3. Угловая величина дуги окружности равна угловой величине цен- трального угла.
4. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на кото- рую он опирается.
5. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме проти- воположных дуг, высекаемых хордами.
6. Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекае- мых секущими на окружности.
7. Угол между касательной и хордой равен половине угловой вели- чины дуги, заключенной между ними.
8. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
9. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).
10. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180*◦*.
11. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна

180*◦*, то около него можно описать окружность.

1. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.
2. Если *M* — точка на отрезке *AB*, причем *AM* : *BM* = *a* : *b*, то

*AM* : *AB* = *a* : (*a* + *b*), *BM* : *AB* = *b* : (*a* + *b*).

1. **Теорема о пропорциональных отрезках.** Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные от- резки.
2. **Подобие. Признаки подобия треугольников.**
3. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорци- ональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.
4. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.
5. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорци- ональны трем сторонам другого, то треугольники подобны.
6. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фи- гур равно коэффициенту подобия.
7. **Замечательное свойство трапеции.** Точка пересечения диагона- лей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и сере- дины оснований лежат на одной прямой.
8. **Свойство биссектрисы треугольника.** Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сто- ронам.
9. Произведение основания на высоту для данного треугольника постоянно.
10. Если *BM* и *CN* — высоты треугольника *ABC* (∠*A* = 90*◦*), то тре- угольник *AMN* подобен треугольнику *ABC*, причем коэффициент по- добия равен cos ∠*A* .

/

| |

1. Произведения длин отрезков хорд *AB* и *CD* окружности, пере-

секающихся в точке *E*, равны, т. е *AE EB* = *CE ED* .

| | · | | | | · | |

1. **Теорема о касательной и секущей и следствие из нее.**
2. Если из одной точки проведены к окружности касательная и се- кущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квад- рату касательной.
3. Произведение всей секущей на ее внешнюю часть для данной точ- ки и данной окружности постоянно.
4. **Тригонометрические соотношения в прямоугольном треуголь- нике.**
5. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипоте- нузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.
6. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умно- женному на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к этому катету острого угла.
7. **Теорема Пифагора.** Квадрат гипотенузы прямоугольного тре- угольника равен сумме квадратов катетов.
8. **Теорема, обратная теореме Пифагора.** Если квадрат стороны тре- угольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треуголь- ник — прямоугольный.
9. **Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.** Вы- сота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотену- зу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.
10. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окруж- ности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка каса- ния делит боковую сторону.
11. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окруж-

ностям радиусов *r* и *R* равен отрезку общей внутренней касатель√ной,

заключенному между общими внешними. Оба эти отрезка равны 2 *Rr*.

1. **Метрические соотношения в треугольнике.**
2. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.
3. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
4. **Формула для медианы треугольник**√**а.** Если *m* — медиана треуголь-

ника, проведенная к стороне *c*, то *m* =

остальные стороны треугольника.

2*a*2 + 2*b*2 − *c*2*/*2, где *a* и *b* —

1. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны сину- сам противолежащих углов.
2. **Обобщенная теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описан- ной около треугольника.
3. **Формулы площади треугольника.**
4. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.
5. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.
6. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.
7. Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, де- ленному на учетверенный радиус описанной окружности.
8. Формула Герона.
9. **Элементы равностороннего треугольника со стороной** *a***.** Пусть *h*, *S*, *r*, *R* — высота, площадь, радиусы описанной и вписанной окружности равностороннего треугольника со стороной *a*. Тогда

*a*√3

*h* = 2 *, S* =

*a*2√3

4 *, R* =

*a*√3

3 *, r* =

*a*√3

6 *.*

1. **Формулы площади параллелограмма.**
2. Площадь параллелограмма равна произведению основания на вы- соту.
3. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сто- рон на синус угла между ними.
4. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.
5. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
6. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
7. Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.
8. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.
9. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его пло- щадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.
10. Если *M* — точка на стороне *BC* треугольника *ABC*, то

*S*(*AMB*) = *BM .*

*S*(*AMC*) *CM*

1. Если *P* и *Q* — точки на сторонах *AB* и *AC* (или на их продол- жениях) треугольника *ABC*, то

*S*(*APQ*) = *AP* · *AQ.*

*S*(*ABC*)

*AB*

*AC*

1. Длина окружности радиуса *R* равна 2*πR*.
2. Площадь круга радиуса *R* равна *πR*2.

## Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

1. Постройте треугольник по трем сторонам.
2. Постройте угол, равный данному.
3. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.
4. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.
5. Разделите отрезок пополам.
6. Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную данной.
7. Через данную точку проведите прямую, параллельную данной.
8. Постройте биссектрису данного угла.
9. Постройте сумму (разность) двух данных отрезков.
10. Разделите отрезок на *n* равных частей.
11. Постройте окружность, описанную около данного треугольника.
12. Даны отрезки *a*, *b* и *c*. Постройте такой отрезок *x*, что *x* : *a* = *b* : *c*.
13. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.
14. Постройте прямоугольный треугольник √по катету√и гипотен√узе.
15. Даны отрезки *a* и *b*. Постройте отрезки *a*2 + *b*2, *a*2 − *b*2, *ab*.
16. Постройте треугольник по серединам трех его сторон.
17. Постройте дугу, вмещающую данный угол.
18. Постройте окружность с данным центром, проходящую через данную точку.
19. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.
20. Через данную точку проведите касательную к данной окруж- ности.
21. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
22. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
23. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведен- ной к третьей.
24. Внутри произвольного угла взята точка *M* . Проведите через точ- ку *M* прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился бы точкой *M* пополам.
25. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и вы- соте, проведенной из вершины этого угла.

**Стереометрия**

1. Аксиомы стереометрии.

## Факты, непосредственно связанные с аксиомами

1. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.
2. Через две параллельные прямые проходит единственная плос- кость.
3. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единствен- ная прямая, параллельная данной.

## Параллельность в пространстве

1. **Признак параллельности прямой и плоскости.** Если прямая *a* па- раллельна некоторой прямой плоскости *α*, то прямая *a* параллельна плоскости *α*.
2. Если через прямую *a*, параллельную плоскости *α*, провести плос- кость, пересекающую плоскость *α* по прямой *b*, то прямые *a* и *b* парал- лельны.
3. Если прямые *a* и *b* параллельны, а плоскость, проходящая че- рез прямую *a*, пересекается с плоскостью, проходящей через прямую *b*, то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым *a* и *b*.
4. **Транзитивность параллельности прямых в пространстве.** Если прямая *a* параллельна прямой *b*, а прямая *b* параллельна прямой *c*, то прямая *a* параллельна прямой *c*.
5. **Признак параллельности плоскостей.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересека- ющимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.
6. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то пря- мые пересечения параллельны.
7. **Транзитивность параллельности плоскостей.** Если плоскость *α* параллельна плоскости *β*, а плоскость *β* параллельна плоскости *γ*, то плоскость *α* параллельна плоскости *γ*.
8. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллель- ными плоскостями, равны.
9. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.
10. **Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.** Противополож- ные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали паралле- лепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
11. **Теорема о медианах тетраэдра.** Медианы тетраэдра (отрезки, со- единяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противо- лежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины.
12. Диагональ *AC*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 проходит че- рез точку пересечения медиан треугольника *A*1*BD* и делится ею в от- ношении 1 : 2, считая от точки *A*.
13. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

## Скрещивающиеся прямые

1. **Признак скрещивающихся прямых.** Если прямая *a* лежит в плос- кости *α*, а прямая *b* пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой *a*, то *a* и *b* — скрещивающиеся прямые.
2. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.
3. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скре- щивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и про- ходящая через середину одного из таких отрезков.
4. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересе- кающимися в произвольной точке *M* прямыми, соответственно парал- лельными данным) не зависит от выбора точки *M* .
5. Для любых двух скрещивающихся прямых существует един- ственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым).

## Параллельное проектирование

1. Прямая, непараллельная проектирующей, переходит в прямую.
2. Пара параллельных прямых, непараллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.
3. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.
4. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой ее параллельной проекции на эту плоскость.
5. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольни- ка на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоско- стью проекций.

## Координаты и векторы в пространстве

1. Координаты вектора равны разностям соответствующих коорди- нат конца и начала данного вектора.
2. Для того, чтобы векторы *→a* и *→b* были коллинеарны, необходимо

и достаточно, чтобы выполнялось равенство *→a* = *k →b* , где *k* — некоторое

·

число.

1. Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде ли-

· ·

нейной комбинации двух других (*→a* = *x →b* + *y →c* , где *x*, *y* — некоторые

числа).

1. Любой вектор можно единственным образом разложить по трем некомпланарным векторам.
2. Если *M* — середина *AB*, то *OM→*= (*OA→*+ *OB→*)*/*2.
3. Если *M* — середина *AB*, а *N* — середина *CD*, то

= (*AC→*+ *BD→*)*/*2.

*M N→*=

**34.** Если *M* — точка пересечения медиан треугольника *ABC*, то

*OM→*= (*OA→*+ *OB→*+ *OC→*)*/*3.

1. Если *M* — точка пересечения диагоналей параллелограмма

*ABCD*, то *OM→*= (*OA→*+ *OB→*+ *OC→*+ *OD→*)*/*4.

1. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.
2. **Свойства скалярного произведения векторов.**

а) *→a* · *→b* = *→b* · *→a* ;

б) *α→a* · *→b* = *α*(*→a* · *→b* );

в) *→a* · (*→b* + *→c* ) = *→a* · *→b* + *→a* · *→c* ;

|*→*| = √*→*2;

г) *a a*

· ·

д) (*→a* + *→b* )2 = *→a* 2 + 2 (*→a →b* ) + *→b* 2;

е) (*→a →b* )2 ≤ *→a* 2 *→b* 2*,* причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы *→a* и *→b* коллинеарны;

· ·

ж) ненулевые векторы *→a* и *→b* перпендикулярны тогда и только тогда,

когда их скалярное произведение равно нулю.

1. Расстояние между точками *A*(*x*1; *y*1; *z*1) и *B*(*x*2; *y*2; *z*2) равно

√

(*x*2 − *x*1)2 + (*y*2 − *y*2)2 + (*z*2 − *z*1)2*.*

1. Если *ϕ* — угол между ненулевыми векторами *→a* (*x*1; *y*1; *z*1) и

*→b* (*x*2; *y*2; *z*2), то

cos *ϕ*

= *x*1*x*2 + *y*1*y*2 + *z*1*z*2

*x*2 + *y*2 + *z*2 *x*2 + *y*2 + *z*2

√ √ *.*

1

1

1

2

2

2

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку *M*0(*x*0; *y*0; *z*0) перпендикулярно ненулевому вектору *→n*(*a*; *b*; *c*) (вектор нормали), име- ет вид:

*a*(*x* − *x*0) + *b*(*y* − *y*0) + *c*(*z* − *z*0) = 0*.*

1. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку *M*0(*x*0; *y*0; *z*0) параллельно ненулевому вектору *m→*(*a*; *b*; *c*) (направляю- щий вектор), имеют вид:



*x* − *x*0 = *at,*

*y* − *y*0 = *bt,*

 *z* − *z* = *ct.*0

1. Прямая как пересечение двух плоскостей задается системой

*A*1*x* + *B*1*y* + *C*1*z* + *D*1 = 0*, A*2*x* + *B*2*y* + *C*2*z* + *D*2 = 0*,*

где *A*2 + *B*2 + *C*2

1

1

1

0 и *A*2 + *B*2 + *C*2

0, а коэффициенты при соответ-

ствующих неизвестных непропорциональны.

2

2

2

1. Если *ϕ* — угол между плоскостями, заданными уравнениями

*A*1*x* + *B*1*y* + *C*1*z* + *D*1 = 0 и *A*2*x* + *B*2*y* + *C*2*z* + *D*2 = 0, то

cos *ϕ*

= *A*1*A*2 + *B*1*B*2 + *C*1*C*2

*A*2 + *B*2 + *C*2 *A*2 + *B*2 + *C*2

√ √ *.*

1

1

1

2

2

2

1. **Уравнение плоскости «в отрезках».** Если плоскость пересекает оси координат в точках *A*(*p*; 0; 0), *B*(0; *q*; 0) и *C*(0; 0; *r*) (*p, q, r* = 0), то ее уравнение можно представить в виде

/

*x* + *y* + *z* = 1*.*

*p q r*

1. Если *ρ* — расстояние от точки *M*0(*x*0; *y*0; *z*0) до плоскости

*Ax* + *By* + *Cz* + *D* = 0, то

*ρ* = |*Ax*0 + *By*0 + *Cz*0 + *D*|

√ *.*

*A*2 + *B*2 + *C*2

## Перпендикулярность прямой и плоскости

1. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она пер- пендикулярна этой плоскости.
2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они па- раллельны.
3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плос- кости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.
4. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.
5. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.
6. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпен- дикулярная данной прямой.
7. Через данную точку проходит единственная прямая, перпенди- кулярная данной плоскости.
8. **Теорема о трех перпендикулярах.** Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плос- кость.
9. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и на- клонные, то

а) перпендикуляр короче наклонных;

б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;

в) большей наклонной соответствует большая ортогональная про- екция;

г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

1. **Теорема об угле прямой с плоскостью.** Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.
2. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.
3. Геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.
4. Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин тре- угольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружно- сти треугольника перпендикулярно его плоскости.
5. Если боковые ребра пирамиды равны, то ее высота проходит че- рез центр окружности, описанной около основания.

## Двугранный угол

1. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.
2. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, рав- ноудаленных от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.
3. **Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоско- стей.** Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпен- дикуляр к другой.
4. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плос- кости.
5. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды про- ходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

## Многогранные углы

1. Плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.
2. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше

360*◦*.

1. **Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда.**

а) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

б) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сум- ме квадратов трех его измерений (длин трех ребер с общей вершиной).

## Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

1. Сечение сферы плоскостью, удаленной от центра сферы на рас- стояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуля- ра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.
2. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, прове- денному в точку касания.
3. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой един- ственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведенно- му в точку касания.
4. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссектор- ной плоскости этого угла.
5. Отрезки касательных прямых, проведенных к сфере из одной точки, равны между собой.
6. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную об- щую точку) проходит через их точку касания.
7. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности пер- пендикулярна линии центров данных сфер.

## Правильная пирамида

1. Если *ABCD* — правильная треугольная пирамида с вершиной *D*, высотой *DM* и стороной основания *a*, а *A*1, *B*1 и *C*1 — середины сторон соответственно *BC*, *AC* и *AB*, то

а) ∠*DAM* = ∠*DBM* = ∠*DCM* — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) ∠*DA*1*M* = ∠*DB*1*M* = ∠*DC*1*M* — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) ∠*AFB* (где *F* — основание перпендикуляра, опущенного из вер- шины *A* основания на боковое ребро *DC*) — линейный угол между

боковыми гранями пирамид√ы;

г) *AA*1 = *BB*1 = *CC*1 = *a* 3*/*2 — вы√сота тр√еугольника основания;

д) *AM* = *BM* = *CM* = 2*AA*1*/*3 = *a/* 3 = (*a* 3)*/*3 — ортогональная

проекция бокового ребра на плоскость ос√нования√;

е) *A*1*M* = *B*1*M* = *C*1*M* = *AA*1*/*3 = *a/*(2 3) = *a*

3*/*6 — ортогональная

проекция апофемы на плоскость основания;

ж) *C*1*F* — общий перпендикуляр противоположных ребер *AB* и *CD*.

1. Противоположные ребра правильной треугольной пирамиды по- парно перпендикулярны.

√

1. Высота правильного тетраэдра с ребром *a* равна *a* 2*/*3.
2. Если *PABCD* — правильная четырехугольная пирамида с вер- шиной *P* , высотой *PM* и стороной основания *a*, а *A*1, *B*1, *C*1 и *D*1 — середины сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD* и *AD*, то

а) ∠*PAM* = ∠*PBM* = ∠*PCM* = ∠*PDM* — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) ∠*PA*1*M* = ∠*PB*1*M* = ∠*PC*1*M* = ∠*PD*1*M* — линейный угол дву- гранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) ∠*BFD* (где *F* — основание перпендикуляра, опущенного из вер- шины *B* основания на боковое ребро *AP* ) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) ∠*A*1*PC*1 = ∠*B*1*PD*1 — линейный угол двугранного угла между

противоположными боковыми гранями;

√ √

д) *AM* = *BM* = *CM* = *DM* = *DB/*2 = (*a* 2)*/*2 = *a/*

2 — ортогональ-

ная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) *A*1*M* = *B*1*M* = *C*1*M* = *D*1*M* = *a/*2 — ортогональная проекция апо- фемы на плоскость основания;

ж) *FM* — общий перпендикуляр диагонали *BD* основания и скре- щивающегося с ней бокового ребра *AP* .

1. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпен- дикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

## Площадь поверхности многогранника

1. Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.
2. Боковая поверхность правильной пирамиды равна площади ее основания, деленной на косинус угла боковой грани с плоскостью осно- вания.

## Объемы многогранников

1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.
2. Объем наклонной призмы равен произведению площади перпен- дикулярного сечения на боковое ребро.
3. Объем призмы равен произведению площади основания на вы- соту.
4. Объем треугольной призмы равен половине произведения пло- щади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежа- щим ей боковым ребром.
5. Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.
6. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.
7. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, ле- жащую в основании, делит объем пирамиды в том же отношении, в ко- тором прямая делит площадь основания.
8. Если точки *A*1, *B*1 и *C*1 лежат на боковых ребрах соответственно

*DA*, *DB* и *DC* треугольной пирамиды *ABCD* или на их продолжениях,

то объем пирамиды *A*1*B*1*C*1*D*1 относится к объему пирамиды *ABCD*

как произведение отношений *DA*1 · *DB*1 · *DC*1 *.*

*DA*

*DB*

*DC*

1. Отношение объемов подобных многогранников равно кубу коэф- фициента подобия.
2. Произведение площади основания на высоту тетраэдра посто- янно.
3. Объем тетраэдра *V* равен шестой части произведения длин двух противоположных ребер *a* и *b* на расстояние между ними *c* и на синус угла *ϕ* между ними, т. е. *V* = 1 *abc* · sin *ϕ*.

6

1. Объем тетраэдра *V* равен двум третям произведения площадей двух граней *P* и *Q* на синус угла *ϕ* между ними, деленному на их общее

ребро *a*, т. е. *V* = 2 *P* · *Q* · sin *ϕ* .

3 *a*

1. а) Объем тетраэдра равен трети произведения его полной поверх- ности на радиус вписанной сферы.

б) Объем многогранника, в который можно вписать сферу, равен одной третьей произведения полной поверхности многогранника на ра- диус сферы.

## Объемы и поверхности круглых тел

1. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.
2. Объем конуса равен трети произведения площади его основания на высоту.
3. Объем шара радиуса *R* равен 4*πR*3*/*3.
4. Oбъем шарового сегмента высотой *h* шара радиуса *R* равен

*πh*2(*R h/*3).

−

1. Боковая поверхность цилиндра с высотой *h* и радиусом основа- ния *r* равна 2*πrh*.
2. Боковая поверхность конуса с образующей *l* и радиусом основа- ния *r* равна *πrl*.
3. Поверхность сферы радиуса *R* равна 4*πR*2.
4. Сферическая поверхность шарового сегмента высотой *h* шара радиуса *R* равна 2*πRh*.

# Часть 2. Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии

**Планиметрия**

1. Сумма расстояний от произвольной точки основания равнобед- ренного треугольника до боковых сторон постоянна.
2. Если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то треугольники равны.
3. Медиана треугольника *ABC*, проведенная из вершины *A*, меньше полусуммы сторон *AB* и *AC*, но больше их полуразности.
4. Сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.
5. Cумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его двух противоположных сторон.
6. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, меньше большей из двух других сторон.
7. Расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.
8. а) Если треугольники *ABC* и *A*1*B*1*C*1 таковы, что *AB* = *A*1*B*1,

*AC* = *A*1*C*1 и ∠*BAC >* ∠*B*1*A*1*C*1, то *BC > B*1*C*1.

б) Если треугольники *ABC* и *A*1*B*1*C*1 таковы, что *AB* = *A*1*B*1,

*AC* = *A*1*C*1 и *BC > B*1*C*1, то ∠*BAC >* ∠*B*1*A*1*C*1.

1. Пусть *AA*1 — медиана треугольника *ABC*. Угол *A* острый тогда и только тогда, когда *AA*1 *> BC/*2.
2. Сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин больше полупериметра, но меньше периметра треугольника.
3. Две окружности радиусов *r* и *R* (*r < R*) пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами меньше, чем *r* + *R*, но больше, чем *R* − *r*.
4. Если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника,

а) равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны; б) перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны.

1. Точки *K*, *L*, *M* и *N* — середины сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD* и *DE* пятиугольника *ABCDE*, а точки *P* и *Q* — середины отрезков соответственно *KM* и *LN* . Тогда *PQ AE* и *PQ* = *AE/*4.

ǁ

1. Два равносторонних треугольника *ABC* и *CDE* (вершины пере- числены против часовой стрелки) расположены по одну сторону от пря- мой *AE* и имеют единственную общую точку *C*. Пусть *M* , *N* и *K* — середины отрезков *BD*, *AC* и *CE* соответственно. Тогда треугольник *MNK* — равносторонний.
2. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.
3. Стороны параллелограмма равны *a* и *b*. Тогда диагонали четы- рехугольника, образованного пересечениями биссектрис углов паралле- лограмма, равны *a b* .

| − |

1. Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90*◦*, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их по- луразности.
2. На сторонах *AB* и *AD* параллелограмма *ABCD* взяты точки *M* и *N* так, что прямые *MC* и *NC* делят параллелограмм на три равнове- ликие части. Найдите *MN* , если *BD* = *d*.
3. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий сере- дины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.
4. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключен- ный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.
5. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями *a* и *b* проведена прямая, параллельная основаниям. Отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции, равен 2*ab* .

*a* + *b*

1. Трапеция разделена прямой, параллельной ее основаниям, рав-

ным *a* и *b*, на две равновеликие трапеции. Тогда отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен (*a*2 + *b*2)*/*2.

√

1. Точка *M* — середина отрезка *AB*. Точки *A*1, *M*1 и *B*1 — про- екции точек *A*, *M* и *B* на некоторую прямую. Тогда *M*1 — середина отрезка *A*1*B*1.
2. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *BD* и *CE*. Если *BF* и *CG* — перпендикуляры, опущенные из вершин *B* и *C* на прямую *ED*, то *EF* = *DG*.
3. На отрезке *AB* взята точка *C*. Прямая, проходящая через точ- ку *C*, пересекает окружности с диаметрами *AC* и *BC* в точках *K* и *L*, а также окружность с диаметром *AB* — в точках *M* и *N* . Тогда *KM* = *LN* .
4. Пусть *α*, *β* и *γ* — углы треугольника, причем *α* ≤ *β* ≤ *γ*. Тогда

*α* ≤ 60*◦*, *γ* ≥ 60*◦*, 0*◦ < β <* 90*◦*.

1. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. То- гда отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из од- ной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.
2. **Обобщенная теорема Пифагора**. Пусть *CD* — высота прямоуголь- ного треугольника *ABC*, проведенная из вершины прямого угла. Тогда треугольники *ABC*, *CBD* и *ACD* подобны. Если *l*, *m* и *n* — соответ- ствующие линейные элементы этих треугольников, то

*l*2 = *m*2 + *n*2*.*

1. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит этот треугольник на два треугольника. Расстояние между цен- трами вписанных окружностей этих треугольников равно 1. Найдите радиус вписанной окружности исходного треугольника.
2. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Продолжения хорд *AC* и *BD* первой окружности пересекают вторую окружность в точках *E* и *F* . Тогда прямые *CD* и *EF* параллельны.
3. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. То- гда касательные, проведенные к окружностям через концы образовав- шихся хорд, параллельны.
4. **Теорема Коперника.** По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиу- са. Тогда фиксированная точка *K* подвижной окружности движется по диаметру неподвижной окружности.
5. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника *ABC* пересекают описанную окружность этого треугольника в точках *A*1, *B*1, *C*1. Тогда высоты треугольника *A*1*B*1*C*1 лежат на прямых *AA*1, *BB*1, *CC*1.
6. Продолжения высот остроугольного треугольника *ABC* пере- секают описанную окружность этого треугольника в точках *A*1, *B*1, *C*1. Тогда биссектрисы треугольника *A*1*B*1*C*1 лежат на прямых *AA*1, *BB*1, *CC*1.
7. Если выполняется одно из следующих условий, то четыре точ- ки *A*, *B*, *C* и *D* лежат на одной окружности.

а) ∠*CAD* = ∠*CBD* = 90*◦*.

б) Точки *A* и *B* лежат по одну сторону от прямой *CD* и ∠*CAD* =

= ∠*CBD*.

в) Прямые *AC* и *BD* пересекаются в точке *O* и *OA* · *OC* = *OB* · *OD*.

1. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* с катета-

ми *BC* = *a* и *AC* = *b* во внешнюю сторону построен квадрат *A*√*BKM* .

Тогда расстояние от точки *C* до центра квадрата равно (*a* + *b*)*/* 2.

1. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* во внеш- нюю сторону построен квадрат с центром в точке *O*. Докажите, что *CO* есть биссектриса прямого угла.
2. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 60*◦*, биссектрисы *AD* и *CE*

пересекаются в точке *O*. Докажите, что *OD* = *OE*.

1. а) Три прямые, проходящие через точку *O*, образуют друг с дру- гом углы в 60*◦*. Тогда проекции произвольной точки, отличной от *O*, на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

б) Проекции произвольной точки на высоты треугольника являются вершинами треугольника, подобного данному.

1. Через вершину *C* равностороннего треугольника *ABC* прове- дена произвольная прямая, *K* и *M* — проекции точек *A* и *B* на эту прямую, *P* — середина *AB*. Докажите, что треугольник *KMP* — рав- носторонний.
2. Основание каждой высоты треугольника проектируется на бо- ковые стороны треугольника. Докажите, что шесть полученных точек лежат на одной окружности.
3. **Задача Архимеда.** В дугу *AB* окружности вписана ломаная *AMB* из двух отрезков (*AM > MB*). Докажите, что основание перпен- дикуляра *KH*, опущенного из середины *K* дуги *AB* на отрезок *AM* , делит ломаную пополам, т. е. *AH* = *HM* + *MB*.
4. Около равностороннего треугольника *ABC* описана окружность, и на дуге *BC* взята произвольная точка *M* . Тогда *AM* = *BM* + *CM* .
5. **Точка Торричелли.** На сторонах треугольника *ABC* построены вне треугольника равносторонние треугольники *BCA*1, *CAB*1, *ABC*1, и проведены отрезки *AA*1, *BB*1 и *CC*1. Тогда

а) эти отрезки равны;

б) эти отрезки пересекаются в одной точке;

в) если эта точка находится внутри треугольника *ABC*, то сумма ее расстояний до трех вершин треугольника равна каждому из отрезков *AA*1, *BB*1, *CC*1.

1. **Задача Ферма.** Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.
2. Если прямая, проходящая через точку *A* и центр *O* вписан- ной окружности треугольника *ABC*, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке *M* , то треугольники *BOM* и *COM* равнобедренные.
3. **Теорема Мансиона.** Докажите, что отрезок, соединяющий цен- тры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.
4. **Формула Эйлера.** Если *O*1, *O*2 — центры вписанной и описанной

окружност√ей треугольника *ABC*, а *r* и *R* — радиусы этих окружностей,

то *O*1*O*2 = *R*2 − 2*rR*.

1. Четыре круга, построенных на сторонах выпуклого четырех- угольника как на диаметрах, покрывают весь четырехугольник.
2. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника — тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.
3. Две окружности касаются внутренним образом в точке *M* . Пусть *AB* — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке *T* . Докажите, что *MT* — биссектриса угла *AMB*.
4. Общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей или их продолжения проходят через одну точку, либо параллельны, либо лежат на одной прямой.
5. Точка *M* находится на продолжении хорды *AB*. Если точ- ка *C* окружности такова, что *MC*2 = *MA MB*, то *MC* — касательная к окружности.

·

1. Центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма вне его, сами образуют квадрат.
2. Если в треугольнике один угол равен 120*◦*, то треугольник, об-

разованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

1. Если в треугольнике *ABC* с углом *B*, равным 120*◦*, биссектрисы

*AE*, *BD* и *CM* пересекаются в точке *O*, то ∠*DMO* = 30*◦*.

1. Даны прямая (окружность) и на ней точки *A* и *B*. Найдите

геометрическое место точек касания окружностей, одна из которых ка- сается данной прямой (окружности) в точке *A*, а другая — в точке *B*.

1. **Прямая Эйлера.** В любом треугольнике точка *H* пересечения вы- сот (ортоцентр), центр *O* описанной окружности и точка *M* пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой, причем точка *M* рас- положена между точками *O* и *H*, и *MH* = 2*MO*.
2. **Теорема Менелая.** Дан треугольник *ABC*. Некоторая прямая пересекает его стороны *AB*, *BC* и продолжение стороны *AC* в точ- ках *C*1, *A*1, *B*1 соответственно. Тогда

*BA*1 *CB*1 *AC*1

*A C* · *B A* · *C B* = 1*.*

1 1 1

1. **Теорема Чевы.** Пусть точки *A*1, *B*1 и *C*1 принадлежат соответ- ственно сторонам *BC*, *AC* и *AB* треугольника *ABC*. Отрезки *AA*1, *BB*1,

*CC*1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

*AB*1 *CA*1 *BC*1

*B C* · *A B* · *C A* = 1*.*

1 1 1

1. а) **Точка Жергонна.** В треугольник вписана окружность. Точки касания со сторонами треугольника соединены с противоположными вершинами. Тогда три полученных отрезка пересекаются в одной точке. б) **Точка Нагеля.** В любом треугольнике отрезки, соединяющие вер- шины с точками касания вневписанных окружностей с противополож-

ными сторонами, пересекаются в одной точке.

1. Через точку *M* на высоте *AD* произвольного треугольника *ABC* проводятся прямые *BM* и *CM* , которые пересекают стороны *AC* и *AB* в точках *P* и *Q* соответственно. Тогда *AD* — биссектриса угла *PDQ*.
2. Прямая, соединяющая точку *P* пересечения диагоналей четы- рехугольника *ABCD* с точкой *Q* пересечения прямых *AB* и *CD*, делит сторону *AD* пополам. Тогда она делит пополам и сторону *BC*.
3. Если на стороне *BC* треугольника *ABC* как на диаметре постро- ена окружность, пересекающая стороны *AB* и *AC* в точках *M* и *N* , то *S*(*AMN* ) = *S*(*ABC*) cos2 *α*.
4. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны *S*1 и *S*2. Найдите площадь трапеции.
5. Если площадь треугольника *ABC* равна *S*, то площадь тре- угольника, стороны которого равны медианам треугольника *ABC*, равна 3*S/*4.
6. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треуголь- ник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями *S*1,

*S*2, *S*3. Тогда площадь данного треугольника равна

√ √ √

( *S*1 + *S*2 + *S*3)2*.*

1. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Тогда эти отрезки делят друг друга на три равные части.
2. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон вы- пуклого четырехугольника на три равные части. Тогда между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.
3. **Теорема Паскаля.** Точки пересечения продолжений противопо- ложных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.
4. **Теорема Брианшона.** Диагонали описанного шестиугольника, со- единяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.
5. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то отре- зок, соединяющий точки, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пе- ресечения диагоналей.
6. Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до точек *A* и *B* постоянна, есть прямая, перпендикуляр- ная *AB*.
7. Прямые *AB* и *CD* перпендикулярны тогда и только тогда, когда

*AC*2 + *BD*2 = *AD*2 + *BC*2*.*

1. Даны две окружности с центрами *O*1 и *O*2. Геометрическое ме- сто точек *M* , для которых касательные к данным окружностям равны, есть прямая, перпендикулярная *O*1*O*2, или часть такой прямой. В каких случаях искомым геометрическим местом является вся прямая?
2. В треугольнике *ABC*, стороны *AC* и *BC* которого не равны, биссектриса угла *C* делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины *C*, тогда и только тогда, когда ∠*C* = 90*◦*.
3. Найдите углы треугольника, если известно, что биссектриса, ме- диана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол треуголь- ника на четыре равные части.
4. В любом треугольнике *ABC* середина стороны *BC* лежит на от- резке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине *A*, и делит этот отрезок пополам.
5. Свойства точки пересечения высот (ортоцентра) треугольника. а) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Тогда ради-

усы окружностей, описанных около треугольников *ABC*, *AHB*, *BHC*

и *AHC*, равны между собой.

б) Если *H* — точка пересечения высот треугольника *ABC*, а *O* — центр описанной окружности, то

*OH→*= *OA→*+ *OB→*+ *OC→.*

в) Если *H* — точка пересечения высот треугольника *ABC*, то рассто- яние между серединами отрезков *BC* и *AH* равно радиусу описанной окружности треугольника *ABC*.

г) Расстояние от ортоцентра до вершины треугольника вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противопо- ложной этой вершине.

д) Точка, симметричная ортоцентру относительно прямой, содержа- щей сторону треугольника, лежит на описанной окружности треуголь- ника.

1. Три окружности равных радиусов пересекаются в точке *O* и, кро- ме того, попарно пересекаются в точках *A*, *B* и *C*. Тогда

а) окружность, описанная около треугольника *ABC*, имеет тот же радиус;

б) три прямые, каждая из которых соединяет центр одной окружно- сти с точкой пересечения двух других, пересекаются в одной точке;

в) точка *O* — ортоцентр треугольника *ABC*.

1. Пусть *O* — центр описанной окружности треугольника *ABC*,

*H* — точка пересечения высот. Тогда ∠*HAB* = ∠*OAC*.

1. Если *BM* и *CN* — высоты треугольника *ABC*, а *O* — центр опи-

санной окружности треугольника, то *OA MN* .

⊥

1. а) В остроугольном треугольнике *ABC* известно, что *CH* = *AB*, где *H* — точка пересечения высот. Найдите угол *C*.

б) В остроугольном треугольнике *ABC* известно, что *CH* = *R*, где *H* — точка пересечения высот, а *R* — радиус описанного круга. Найдите угол *C*.

1. Каждое из оснований высот треугольника проецируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего проекции, не за- висит от выбора высоты.
2. Отрезки *AB* и *CD* — диаметры одной окружности. Из точки *M* этой окружности опущены перпендикуляры *MP* и *MQ* на прямые *AB* и *CD*. Докажите, что длина отрезка *PQ* не зависит от положения точ- ки *M* .
3. Из вершины *C* остроугольного треугольника *ABC* опущена вы- сота *CH*, а из точки *H* опущены перпендикуляры *HM* и *HN* на стороны *BC* и *AC* соответственно. Докажите, что треугольники *MNC* и *ABC* подобны.
4. Продолжения высот *AM* и *CN* остроугольного треугольника *ABC* пересекают описанную около него окружность в точках *P* и *Q*. Найдите радиус описанной окружности, если *AC* = *a*, *PQ* = 6*a/*5.
5. Точки *K* и *P* симметричны основанию *H* высоты *BH* треуголь- ника *ABC* относительно его сторон *AB* и *BC*. Докажите, что точки пересечения отрезка *KP* со сторонами *AB* и *BC* (или их продолжени- ями) — основания высот треугольника *ABC*.
6. **Свойства ортотреугольника** (т. е. треугольника с вершинами в основаниях высот данного).

а) Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.

б) Если точки *A*1, *B*1 и *C*1 на сторонах соответственно *BC*, *AC* и *AB*

остроугольного треугольника *ABC* таковы, что

∠*BA*1*C*1 = ∠*CA*1*B*1*,* ∠*CB*1*A*1 = ∠*AB*1*C*1 и ∠*AC*1*B*1 = ∠*BC*1*A*1*,*

то *A*1*B*1*C*1 — ортотреугольник треугольника *ABC*.

в) Точки касания вписанного в данный треугольник круга соедине- ны отрезками, и в полученном треугольнике проведены высоты. Дока- жите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

г) **Задача Фаньяно.** Треугольник наименьшего возможного перимет- ра с вершинами на сторонах данного остроугольного треугольника — это ортотреугольник данного треугольника.

1. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного тре- угольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус описанной около тре- угольника окружности.
2. **Окружность девяти точек.** В любом треугольнике девять точек — середины сторон, основания высот и середины отрезков от вершин до ортоцентра — лежат на одной окружности.
3. Окружность касается стороны *BC* треугольника *ABC* в точ- ке *M* , а продолжений сторон *AB* и *AC* — в точках *N* и *P* соответственно. Вписанная окружность этого треугольника касается стороны *BC* в точ- ке *K*, а стороны *AB* — в точке *L*. Тогда

а) отрезок *AN* равен полупериметру треугольника *ABC*;

б) отрезок *AL* равен разности полупериметра и стороны *BC*; в) *BK* = *CM* ; г) *NL* = *BC*.

1. На сторонах *BC*, *CA*, и *AB* треугольника *ABC* взяты со- ответственно точки *A*1, *B*1 и *C*1, причем *AC*1 = *AB*1, *BA*1 = *BC*1 и *CA*1 = *CB*1. Тогда *A*1, *B*1 и *C*1 — точки касания вписанной окружно- сти со сторонами треугольника.
2. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Тогда радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей, равен 1.
3. Пусть *p* — полупериметр, а *S* — площадь треугольника.

а) Если *r*1 — радиус вневписанной окружности треугольника, каса-

ющейся стороны, равной *a*, то *r*1

= *S* .

*p* − *a*

б) Если *r* — радиус вписанной окружности треугольника, а *r*1, *r*2,

*r*3 — радиусы вневписанных окружностей, то

1 = 1

+ 1

+ 1 *, S* = √*r* · *r*

· *r* · *r .*

*r r*1 *r*2 *r*3

1 2 3

1. Если окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается сто- роны *BC* в точке *M* , то окружности, вписанные в треугольники *ABM* и *ACM* , касаются отрезка *AM* в одной точке.
2. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехуголь- ника равны, то в такой четырехугольник можно вписать окружность.
3. Если *AD* — биссектриса треугольника *ABC*, то а) *AD* = 2*AB* · *AC* cos(∠*BAC/*2) *,*

*AB* + *AC*

б) *AD*2 = *AB* · *AC* − *BD* · *CD.*

1. **Теорема Штейнера—Лемуса.** Если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.
2. **Свойства вписанного четырехугольника со взаимно перпендику- лярными диагоналями.** Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность радиуса *R* с центром *O*. Его диагонали *AC* и *BD* взаимно перпендику- лярны и пересекаются в точке *P* . Тогда

а) медиана треугольника *APB* перпендикулярна стороне *CD*;

б) ломаная *AOC* делит четырехугольник *ABCD* на две равновели- кие фигуры;

в) *AB*2 + *CD*2 = 4*R*2;

г) *AP* 2 + *BP* 2 + *CP* 2 + *DP* 2 = 4*R*2 и *AB*2 + *BC*2 + *CD*2 + *AD*2 = 8*R*2;

д) расстояние от центра окружности до стороны четырехугольника вдвое меньше противоположной стороны.

е) если перпендикуляры, опущенные на сторону *AD* из вершин *B* и *C*, пересекают диагонали *AC* и *BD* в точках *E* и *F* , то *BCFE* — ромб;

ж) четырехугольник, вершины которого — проекции точки *P* на сто- роны четырехугольника *ABCD*, — и вписанный, и описанный;

з) четырехугольник, образованный касательными к описанной ок- ружности четырехугольника *ABCD*, проведенными в его вершинах, можно вписать в окружность.

1. Если *a*, *b*, *c*, *d* — последовательные стороны четырехугольника, а *S* — его площадь, то *S* ≤ (*ac* + *bd*)*/*2, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно

перпендикулярны.

1. **Формула Брахмагупты.** Если стороны вписанного четырех- угольника равны сторон *a*, *b*, *c* и *d*, то его площадь *S* может быть вычислена по формуле

√

*S* = (*p* − *a*)(*p* − *b*)(*p* − *c*)(*p* − *d*)*,*

где *p* = (*a* + *b* + *c* + *d*)*/*2 — полупериметр четырехугольника.

1. Если четырехугольник со сторонами *a*, *b*, *c*, *d* можно вп√исать

и около него можно описать окружность, то его площадь равна *abcd*.

1. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. В каждой из этих

окружностей проведены хорды *AC* и *AD* так, чт√о хорда одной окруж-

ности касается другой окружности. Тогда *AB* = *CB* · *DB*.

1. Окружность и прямая касаются в точке *M* . Из точек *A* и *B*

этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные *a*√и *b*

соответственно. Тогда расстояние от точки *M* до прямой *AB* равно *ab*.

1. Из точки *M* , лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Если расстояния от точки *C*, лежащей

на окружности, до касательных равны *a* и *b*, то√расстояние от точки *C*

до прямой *AB* (*A* и *B* — точки касания) равно *ab*.

1. Пятиугольник *ABCDE* вписан в окружность. Расстояния от точки *A* до прямых *BC*, *DC* и *DE* равны соответственно *a*, *b*, *c*. То- гда расстояние от вершины *A* до прямой *BE* равно *ac/b*.
2. **Прямая Симсона.** Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой.
3. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.
4. Две окружности радиусов *R* и *r* пересекаются в точках *A* и *B* и касаются прямой в точках *C* и *D*; *N* — точка пересечения прямых *AB* и *CD* (*B* между *A* и *N* ). Найдите

а) радиус окружности, описанной около треугольника *ACD*;

б) отношение высот треугольников *NAC* и *NAD*, опущенных из вер- шины *N* .

1. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* проведены диагонали

*AC* и *BD*. Известно, что *AD* = 2, ∠*ABD* = ∠*ACD* = 90*◦*, и расстоя-

ние между цен√трами окружностей, вписанных в треугольники *ABD*

и *ACD*, равно 2. Найдите *BC*.

1. **Теорема Стюарта.** Точка *D* расположена на стороне *BC* тре- угольника *ABC*. Тогда

*AB*2 · *DC* + *AC*2 · *BD* − *AD*2 · *BC* = *BC* · *DC* · *BD.*

1. Точка *P* расположена внутри квадрата *ABCD*, причем ∠*PAB*=

= ∠*PBA* = 15*◦*. Тогда треугольник *DPC* — равносторонний.

1. Докажите, что если для вписанного четырехугольника *ABCD* выполнено равенство *CD* = *AD* + *BC*, то биссектрисы его углов *A* и *B* пересекаются на стороне *CD*.
2. Вписанная окружность касается сторон *AB* и *AC* треугольника *ABC* в точках *M* и *N* . Пусть *P* — точка пересечения прямой *MN* и бис- сектрисы угла *B* (или ее продолжения). Докажите, что ∠*BPC* = 90*◦*.
3. Из точки *A* проведены к окружности две касательные *AP* и *AQ*

(*P* и *Q* — точки касания) и секущая *AKL* (точка *K* между *A* и *L*). Пусть *M* — середина отрезка *KL*. Докажите, что ∠*AMP* = ∠*AMQ*.

1. На продолжении хорды *KL* окружности с центром *O* взята точ-

ка *A*, и из нее проведены касательные *AP* и *AQ*; *M* — середина отрезка

*PQ*. Докажите, что ∠*MKO* = ∠*MLO*.

1. Продолжения противоположных сторон *AB* и *CD* вписанного

четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *M* , а сторон *AD* и *BC* — в точке *N* . Тогда

а) биссектрисы углов *AMD* и *DNC* взаимно перпендикулярны;

б) прямые *MQ* и *NQ* пересекают стороны четырехугольника в вер- шинах ромба;

в) точка пересечения *Q* этих биссектрис лежит на отрезке, соединя- ющем середины диагоналей четырехугольника *ABCD*.

1. Продолжения противоположных сторон четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках *P* и *Q*. Найдите *PQ*, если касательные к окружности, проведенные из точек *P* и *Q*, равны *a* и *b*.
2. Окружность с центром *O* на стороне *BC* равностороннего тре- угольника *ABC* касается сторон *AB* и *AC* в точках *P* и *Q* соответствен- но. Касательная к окружности пересекает эти стороны в точках *M* и *N* , а отрезки *OM* и *ON* пересекают отрезок *PQ* в точках *E* и *F* . Тогда *EF* = *MN/*2.
3. **Задача о бабочке.** Через середину *C* произвольной хорды *AB* окружности проведены две хорды *KL* и *MN* (точки *K* и *M* лежат по одну сторону от *AB*). Отрезок *KN* пересекает *AB* в точке *P* . Отрезок *LM* пересекает *AB* в точке *Q*. Докажите, что *PC* = *QC*.
4. В любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной окружности, причем равенство достига- ется тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний.
5. **Окружность Аполлония.** Геометрическое место точек, расстоя- ния от каждой из которых до двух данных точек относятся как *m* : *n*

(*m n*), есть окружность.

1. **Теорема Птолемея.** Сумма произведений двух пар противопо-

ложных сторон вписанного четырехугольника равна произведению его диагоналей.

1. На отрезке *AC* взята точка *B* и на отрезках *AB*, *BC* и *AC* по- строены как на диаметрах полуокружности *S*1, *S*2 и *S*3 по одну сторону

от *AC*. Пусть *D* — точка на *S*3, проекция которой на *AC* совпадает с точкой *B*. Общая касательная к *S*1 и *S*2 касается этих полуокружно- стей в точках *E* и *F* соответственно.

а) Докажите, что прямая *EF* параллельна касательной к *S*3, прове- денной через точку *D*.

б) Докажите, что *BFDE* — прямоугольник.

в) Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокруж- ностей, если известно, что ее центр удален от прямой *AC* на расстоя- ние *a*.

г) **Задача об арбелосе Архимеда.** Докажите, что радиус окружности, касающейся *S*1, *S*3 и отрезка *BD*, равен радиусу окружности, касаю- щейся *S*2, *S*3 и отрезка *BD*.

1. **Теорема Ньютона.** Во всяком описанном четырехугольнике се- редины диагоналей и центр вписанной окружности расположены на од- ной прямой.
2. Если *M* — точка пересечения медиан треугольника *ABC*, а *O* — произвольная точка, то

*OM→* 1 *→ → →*

= 3 (*OA* + *OB* + *OC*)*.*

1. **Теорема Монжа.** Прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сто- ронам, пересекаются в одной точке.
2. а) Композиция симметрий относительно двух прямых, пересе- кающихся под углом *α*, есть поворот на угол 2*α* относительно точки пересечения прямых.

б) Композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360*◦*, является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360*◦*.

1. **Треугольник Наполеона.** Центры правильных треугольников, построенных внешним (внутренним) образом на сторонах произволь- ного треугольника, образуют правильный треугольник.
2. Две касающиеся окружности гомотетичны относительно их точ- ки касания.
3. **Теорема Шаля.** Всякое движение плоскости есть либо парал- лельный перенос, либо поворот, либо осевая симметрия, либо скользя- щая симметрия (композиция осевой симметрии и параллельного пере- носа в направлении, параллельном оси симметрии).
4. **Теорема Гаусса.** Если продолжения сторон *AB*, *AC* и *BC* тре- угольника *ABC* пересекают прямую *l* в точках *C*1, *B*1 и *A*1, то середины отрезков *AA*1, *BB*1 и *CC*1 лежат на одной прямой.

## Задачи на построение

1. Постройте треугольник по трем медианам.
2. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.
3. Постройте равносторонний треугольник *ABC* так, чтобы его вер- шины лежали на трех данных параллельных прямых.
4. Постройте треугольник по двум углам *A*, *B* и периметру *P* .
5. Постройте точки *X* и *Y* на сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC*

так, что *AX* = *BY* и *XY AC*.

ǁ

1. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и сум- ме двух других сторон.
2. Впишите в угол окружность, проходящую через данную точку.
3. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на двух данных окружностях.
4. Точки *A* и *B* лежат по разные стороны от прямой *l*. Постройте на этой прямой точку *M* так, чтобы прямая *l* делила угол *AMB* по- полам.
5. Точки *M* и *N* расположены по одну сторону от прямой *l*. По- стройте на прямой *l* такую точку *K*, чтобы

а) сумма *MK* + *NK* была наименьшей;

б) угол между прямыми *MK* и *l* был вдвое меньше угла между пря- мыми *NK* и *l*.

1. В каком месте нужно построить мост через реку с параллельны- ми берегами так, чтобы путь из деревни *A* в деревню *B*, расположенную на другом берегу реки, был минимальным? Мост строится перпендику- лярно берегу.
2. Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки а) разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них;

б) проведите через данную точку *M* прямую, параллельную этим прямым.

1. Даны две параллельные прямые, отрезок на одной из них и сере- дина этого отрезка. С помощью одной линейки проведите через данную точку *M* прямую, параллельную этим прямым.
2. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности.
3. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр на данную прямую из центра данной окружности.
4. Опишите около данного треугольника треугольник, равный дру- гому данному треугольнику, т. е. через вершины данного треугольника проведите прямые, которые пересекаются в вершинах треугольника, равного другому данному треугольнику.
5. В данный треугольник впишите треугольник, равный другому данному треугольнику, т. е. на сторонах данного треугольника построй- те вершины треугольника, равного другому данному треугольнику.
6. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник

а) заданного периметра;

б) наименьшего периметра; в) наименьшей площади.

1. Постройте (2*n* − 1)-угольник по серединам его сторон.
2. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, про- веденных из одной вершины.
3. Постройте треугольник по трем точкам, симметричным центру описанной окружности относительно сторон треугольника.
4. Постройте треугольник по основаниям его высот.
5. Даны две пересекающиеся окружности. Проведите через точку их пересечения прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между окружностями,

а) делился этой точкой пополам; б) был равен заданному отрезку.

1. Даны две окружности. Проведите через данную точку прямую так, чтобы

а) отрезок этой прямой, заключенный между окружностями, делил- ся этой точкой пополам;

б) она высекала на окружностях равные хорды.

1. Даны две окружности. Проведите прямую, параллельную дан- ной так, чтобы

а) она высекала на окружностях равные хорды;

б) сумма хорд, высекаемых ею на окружностях, была равна задан- ному отрезку.

1. *A* и *B* — фиксированные точки окружности, *C* — произвольная точка окружности. Постройте геометрическое место точек пересечения

а) биссектрис; б) высот треугольника *ABC*. √

1. Даны отрезки *a* и *b*. Постройте отрезок, равный 4 *a*4 + *b*4.
2. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и дан- ной прямой в данной на ней точке.
3. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.
4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
5. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.
6. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности.
7. Постройте треугольник по трем высотам.
8. Постройте треугольник по центрам вписанной, описанной и од- ной из вневписанных окружностей.
9. Постройте геометрическое место точек, расположенных внутри данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла имеет данную величину.
10. Восстановите квадрат по четырем точкам, лежащим на его сто- ронах.
11. С помощью одного циркуля а) разделите отрезок пополам; б) постройте центр данной окружности.
12. **Задача Аполлония.** Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.

**Стереометрия**

1. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости параллель- ны некоторой прямой, то прямая их пересечения параллельна этой же прямой.
2. Основание пирамиды *SABCD* — параллелограмм *ABCD*. Какая фигура получится в сечении этой пирамиды плоскостью *ABM* , где *M* — точка на ребре *SC*?
3. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться пра- вильный пятиугольник?
4. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противополож- ных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.
5. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекаю- щую две данные скрещивающиеся прямые.
6. На диагонали *AC*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точ- ка *M* , а на прямой *B*1*C* — точка *N* так, что отрезки *MN* и *BD* парал- лельны. Найдите отношение длин этих отрезков.
7. Основание пирамиды *SABCD* — произвольный четырехугольник

*ABCD*. Постройте прямую пересечения плоскостей *ABS* и *CDS*.

1. Докажите, что выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.
2. Дан произвольный трехгранный угол. Рассматриваются три плос- кости, каждая из которых проведена через ребро и биссектрису про- тиволежащей грани. Верно ли, что эти три плоскости пересекаются по одной прямой?
3. Пусть *A*, *B*, *C* и *D* — четыре точки, не лежащие в одной плоско- сти. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересече- ния медиан треугольников *ABC*, *ABD* и *BCD*, делит отрезок *BD*?
4. Точка *M* — середина ребра *AD* тетраэдра *ABCD*. Точка *N* лежит на продолжении ребра *AB* за точку *B*, точка *K* — на продолжении ребра *AC* за точку *C*, причем *BN* = *AB* и *CK* = 2*AC*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью *MNK*. В каком отношении эта плоскость делит ребра *DB* и *DC*?
5. В параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 на прямых *AC* и *BA*1 взя- ты точки *K* и *M* так, что *KM DB*1. Найдите отношение *KM* : *DB*1.

ǁ

1. Дан тетраэдр *ABCD*. Точки *M* , *N* и *K* лежат на ребрах *AD*, *BC* и *DC* соответственно, причем *AM* : *MD* = 1 : 3, *BN* : *NC* = 1 : 1 и *CK* : *KD* = 1 : 2. Постройте сечение тетраэдра плоскостью *MNK*. В каком отношении эта плоскость делит ребро *AB*?
2. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точки *M* , *N* и *K* — сере- дины ребер *AB*, *BC* и *DD*1 соответственно. Постройте сечение парал- лелепипеда плоскостью *MNK*. В каком отношении эта плоскость делит ребро *CC*1 и диагональ *DB*1?
3. Дана четырехугольная пирамида *SABCD*, основание которой — трапеция *ABCD*. Отношение оснований *AD* и *BC* этой трапеции рав- но 2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точ- ку *D* и середины ребер *SA* и *SB*. В каком отношении эта плоскость делит ребро *SC*?
4. Дана четырехугольная пирамида *SABCD*, основание кото- рой — параллелограмм *ABCD*. Точки *M* , *N* и *K* лежат на ребрах *AS*, *BS* и *CS* соответственно, причем *AM* : *MS* = 1 : 2, *BN* : *NS* = 1 : 3, *CK* : *KS* = 1 : 1. Постройте сечение пирамиды плоскостью *MNK*. В ка- ком отношении эта плоскость делит ребро *SD*?
5. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точки *M* , *N* и *K* лежат на ребрах *AB*, *CC*1 и *A*1*D*1 соответственно. Постройте сечение парал- лелепипеда плоскостью *MNK*.
6. На плоскости даны три луча с общим началом. Они делят плос- кость на три части, в которых взято по точке. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.
7. В основании четырехугольной пирамиды *SABCD*, лежит парал- лелограмм *ABCD*. Через середину ребра *AB* проведите плоскость, па- раллельную прямым *AC* и *SD*. В каком отношении эта плоскость делит ребро *SB*?
8. Через середины *M* и *N* ребер *AD* и *CC*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 проведена плоскость параллельно диагонали *DB*1. Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отноше- нии она делит ребро *BB*1?
9. Плоскость пересекает ребра *AB*, *AC*, *DC* и *DB* тетраэдра *ABCD* в точках *M* , *N* , *P* и *Q* соответственно, причем *AM* : *MB* = *m*, *AN* : *NC* = *n*, *DP* : *PC* = *p*. Найдите отношение *DQ* : *QB*.
10. В призме *ABCA*1*B*1*C*1 медианы оснований *ABC* и *A*1*B*1*C*1 пере- секаются соответственно в точках *O* и *O*1. Через середину отрезка *OO*1 проведена прямая, параллельная прямой *CA*1. Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если *CA*1 = *a*.
11. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Найдите углы между прямыми а) *AA*1 и *BD*1; б) *BD*1 и *DC*1; в) *AD*1 и *DC*1.
12. На прямой *l* в пространстве последовательно расположены точ- ки *A*, *B* и *C* так, что *AB* = 10 и *BC* = 22. Найдите расстояние между прямыми *l* и *m*, если расстояния от точек *A*, *B* и *C* до прямой *m* рав- ны 12, 13 и 20 соответственно.
13. Докажите, что для любых четырех точек пространства верно ра-

венство

*AB→*· *CD→*+ *AC→*· *DB→*+ *AD→*· *BC→*= 0*.*

1. **Формула Лейбница.** Пусть *M* — точка пересечения медиан тре- угольника *ABC*, *O* — произвольная точка пространства. Докажите, что

*OM* 2

1

= 3 (*OA*2

+ *OB*2

+ *OC*

2) − 1 (*AB*2

+ *BC*2

+ *AC*

2)*.*

1. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипоте- нузой, равной *c*, и углом в 30*◦*. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом в 45*◦*. Найдите объем пирамиды.

9

1. В трехгранный угол с вершиной *S* вписана сфера с центром *O*. Докажите, что плоскость, проходящая через точки касания сферы с гранями, перпендикулярна прямой *OS*.
2. Докажите, что сумма квадратов длин проекций всех ребер куба с ребром *a* на любую плоскость не зависит от взаимного расположения куба и плоскости и равна 8*a*2.
3. Докажите, что сумма квадратов длин проекций всех ребер пра- вильного тетраэдра с ребром *a* на любую плоскость не зависит от вза- имного расположения тетраэдра и плоскости и равна 4*a*2.
4. Каждая из боковых граней треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол в 60*◦*. Стороны основания равны 10, 10 и 12. Найдите объем пирамиды.
5. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8. Од- но из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 6. Найдите расстояние между этим ребром и скрещивающейся с ним диа- гональю основания, а также боковую поверхность пирамиды.
6. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром, равным *a*. Найдите рас- стояние между прямыми а) *AA*1 и *BD*1; б) *BD*1 и *DC*1; в) *A*1*D* и *D*1*C*. В каждом случае постройте общий перпендикуляр к указанным прямым.
7. Дан прямоугольный параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Через прямую *BD*1 проведена плоскость, параллельная прямой *AC*. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если *AB* = *a*, *BC* = *b*, *CC*1 = *c*.
8. Основанием пирамиды *SABCD* является равнобедренная трапе- ция *ABCD*, в которой *AB* = *BC* = *a*, *AD* = 2*a*. Плоскости граней *SAB* и *SCD* перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Найдите вы- соту пирамиды, если высота грани *SAD*, проведенная из вершины *S*, равна 2*a*.
9. На сфере радиуса 11 расположены точки *A*, *A*1, *B*, *B*1, *C* и *C*1.

Прямые *AA*1, *BB*1 и *CC*1 взаимно перпендикулярны и √пересекаются

в точке *M* , отстоящей от центра сферы на расстояние 59. Найдите

длину отрезка *AA*1, если известно, что длина о√тр езка *BB*√1 равна 18,

а точка *M* делит отрезок *CC*1 в отношении (8 + 2) : (8 − 2).

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром, равным *a*. Точка *E* — сере- дина ребра *AD*. Вершины *M* и *N* правильного тетраэдра *MNPQ* лежат на прямой *ED*1, а вершины *P* и *Q* — на прямой, проходящей через точ- ку *A*1 и пересекающей прямую *BC* в точке *R*. Найдите

а) отношение *BR* : *BC*;

б) расстояние между серединами отрезков *MN* и *PQ*.

1. В осно√вании призмы лежит равносторонний треугольник *ABC*

со стороной 3. Боковые ребра *AD*, *BE* и *CF* перпендикулярны осно-

ванию. Сфера радиуса 7*/*2 касается плоскости *ABC* и продолжений отрезков *AE*, *BF* и *CD* за точки *A*, *B* и *C* соответственно. Найдите длину боковых ребер призмы.

1. Катеты прямоугольного треугольника расположены в гранях некоторого острого двугранного угла и образуют с его ребром углы *α* и *β* соответственно. Найдите величину двугранного угла.
2. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторо-

нами, равными 2. На√йдите периметр четырехугольника, зная, что одна

из его сторон равна 5.

1. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Докажите, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан и центр описанного около пирамиды шара лежат на одной прямой.
2. В тетраэдре *ABCD* известно, что *AD BC*. Докажите, что вы- соты тетраэдра, проведенные из вершин *B* и *C*, пересекаются, причем точка их пересечения лежит на общем перпендикуляре скрещивающих- ся прямых *AD* и *BC*.

⊥

1. Известно, что в тетраэдре *ABCD* ребро *AB* перпендикулярно ребру *CD*, а ребро *BC* перпендикулярно ребру *AD*. Докажите, что реб- ро *AC* перпендикулярно ребру *BD*.
2. Докажите, что если в тетраэдре противоположные ребра попарно перпендикулярны, то

*AB*2 + *CD*2 = *AC*2 + *BD*2 = *AD*2 + *BC*2*.*

Верно ли обратное?

1. Высота треугольной пирамиды *ABCD*, опущенная из верши- ны *D*, проходит через точку пересечения высот треугольника *ABC*. Кроме того, известно, что *DB* = *b*, *DC* = *c*, ∠*BDC* = 90*◦*. Найдите отношение площадей граней *ADB* и *ADC*.
2. Высоты, проведенные из вершин *B* и *C* тетраэдра *ABCD*, пере- секаются. Докажите, что *AD* ⊥ *BC*.
3. Тетраэдр называется ортоцентрическим, если его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что тетра- эдр *ABCD* ортоцентрический тогда и только тогда, когда две па- ры его противоположных ребер перпендикулярны, т. е. *AB* ⊥ *CD* и *AD* ⊥ *BC* (в этом случае ребра третьей пары также перпендику- лярны, т. е. *AC* ⊥ *BD*).
4. Противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны. Докажите, что общие перпендикуляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпенди- куляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.
6. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре точки пересечения медиан, высот и центр описанной сферы лежат на одной прямой (пря- мая Эйлера ортоцентрического тетраэдра).
7. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна *a*, боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45*◦*. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) угол боковой грани с основанием;

в) расстояние между скрещивающимися ребрами; г) угол между боковыми гранями;

д) радиус описанного шара; е) радиус вписанного шара;

ж) угол апофемы с соседней боковой гранью.

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды рав- на *a*, боковая грань образует с плоскостью основания угол 60*◦*. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) угол бокового ребра с основанием;

в) расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром;

г) угол между противоположными боковыми гранями; д) угол между соседними боковыми гранями;

е) радиус вписанного шара; ж) радиус описанного шара;

з) угол апофемы с соседней боковой гранью.

1. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирами- ды равны *a*. Найдите:

а) угол бокового ребра с основанием; б) угол боковой грани с основанием;

в) плоский угол при вершине пирамиды;

г) угол между соседними боковыми гранями; д) радиус вписанного шара;

е) радиус описанного шара.

1. Пусть *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 — единичный куб. Найдите объем общей части пирамид *ACB*1*D*1 и *A*1*C*1*BD*.
2. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно *b*, а плоский угол при вершине равен *α*. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.
3. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильного тет- раэдра с ребром, равным *a*.
4. Из точки в пространстве выходят четыре луча, образующие друг с другом равные углы. Найдите эти углы.
5. Двугранный угол при основании правильной *n*-угольной пира- миды равен *α*. Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями.
6. Сторона основания *ABCD* правильной пирамиды *SABCD* рав- на *a*, боковые ребра равны 2*a*. Рассматриваются отрезки с концами на ребрах *AD* и *SC*, параллельные плоскости *SAB*.

а) Один из этих отрезков проведен через точку *M* ребра *AD* такую, что *AM* : *AD* = 3 : 4. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину рассматриваемых отрезков.

1. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* угол между боковым ребром *SA* и плоскостью основания *ABCD* равен углу между ребром *SA* и плоскостью *SBC*. Найдите этот угол.
2. Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной, рав- ной *a*, и острым углом 60*◦*. Найдите объем параллелепипеда.
3. Рассматривается фигура, полученная в пересечении правильно- го тетраэдра с его образом при центральной симметрии относительно середины высоты. Найдите объем этой фигуры, если ребро тетраэдра равно *a*.
4. В правильном тетраэдре точки *M* и *N* — середины противопо- ложных ребер. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость, па- раллельную прямой *MN* , является четырехугольник площади *S*, один из углов которого равен 60*◦*. Найдите площадь поверхности тетраэдра.
5. Две противоположные вершины единичного куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные вершины расположены на боковой поверхности цилиндра. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.
6. Даны скрещивающиеся прямые *a* и *b* и плоскость *α*, перпен- дикулярная прямой *a* и пересекающая ее в точке *A*. Докажите, что расстояние между прямыми *a* и *b* равно расстоянию от точки *A* до ор- тогональной проекции *b′* прямой *b* на плоскость *α*, а угол между пря- мыми *b* и *b′* дополняет до 90*◦* угол между прямыми *a* и *b*.
7. Дан единичный куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, *M* — середина *BB*1. Най- дите угол и расстояние между прямыми *AB*1 и *CM* . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок *CM* ?
8. В правильном тетраэдре *ABCD* с ребром, равным 1, *M* — середи- на *AB*, *N* — середина *BC*. Найдите угол и расстояние между прямыми *CM* и *DN* . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых де- лит отрезок *DN* ?
9. Дан единичный куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Прямая *l*, параллельная его диагонали *AC*1, равноудалена от прямых *BD*, *A*1*D*1 и *CB*1. Найдите расстояния от прямой *l* до этих прямых.
10. Докажите, что около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой пирамиды можно описать окружность.
11. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром, равным *a*. Точки *M* и *K* — середины ребер *AB* и *CD* соответственно. Найдите радиус сферы, про- ходящей через точки *M* , *K*, *A*1 и *C*1.
12. Известно, что в некоторую пирамиду можно вписать шар. До- кажите, что объем пирамиды равен 1*/*3 произведения радиуса шара на полную поверхность пирамиды.
13. Две грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольни- ки со стороной, равной *a*. Две другие грани — равнобедренные прямо- угольные треугольники. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.
14. Шар радиуса *r* касается всех боковых граней треугольной пира- миды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с осно- ванием пирамиды. Найдите объем пирамиды.
15. В треугольной пирамиде *SABC* боковое ребро *SC* равно ребру *AB* и наклонено к плоскости основания *ABC* под углом 60*◦*. Известно, что вершины *A*, *B*, *C* и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Докажите, что центр этой сферы лежит на ребре *AB* и найдите высоту пирамиды.
16. В треугольной пирамиде *PABC* боковое ребро *P*√*B* перпенди√ку-

лярно плоскости основания *ABC*, *PB* = 6, *AB* = *BC* = 15, *AC* = 2 3.

Сфера, центр *O* которой лежит на грани *ABP* , касается плоскостей остальных граней пирамиды. Найдите расстояние от центра *O* сферы до ребра *AC*.

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Сфера касается прямых *AC*, *B*1*C*, *AB*1 и продолжения ребра *BB*1 за точку *B*. Найдите радиус сферы, если длины ребер куба равны 1, а точка касания с прямой *AC* принадлежит грани куба.
2. Четырехугольная пирамида *SABCD* вписана в сферу, центр ко- торой лежит в плоскости основания *ABCD*. Диагонали *AC* и *BD* осно- вания пересекаются в точке *H*, причем *SH* — высота пирамиды. Най- дите *CS* и *CD*, если *CH* = 4, *AS* = 3*,*75, *AD* = 3, *AB* = *BS*.
3. Сфера касается ребер *AS*, *BS*, *BC* и *AC* треугольной пирами-

ды *SABC* в точках *K*, *L*√, *M* и *N* соответственно. Найдите *KL*, если

*MN* = 7, *NK* = 5, *LN* = 2 29 и *KL* = *LM* .

1. Сфера радиуса 3*/*8 вписана в четырехугольную пирамиду

*SABCD*, у которой основанием служит ромб *ABCD* такой, что

∠*BAD* = 60*◦*; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку *K*

пересечения диагоналей ромба. Докажите, что существует единствен-

ная плоскость, пересекающая ребра√основания *AB* и *AD* в некоторых

точках *M* и *N* таких, что *MN* = 4 3*/*5, касающаяся сферы в точке,

удаленной на равные расстояния от точек *M* и *N* , и пересекающая

продолжение отрезка *SK* за точку *K* в некоторой точке *E*. Найдите длину отрезка *SE*.

1. Основание четырехугольной пирамиды *SABCD* — прямоуголь- ник *ABCD*. Известно, что *AS* = 7, *BS* = 2, *CS* = 6, ∠*SAD* = ∠*SBD* =

= ∠*SCD*. Найдите ребро *DS*.

1. Через вершину нижнего основания единичного куба проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Эта плоскость отсека- ет от верхнего основания треугольник площади *S*. Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.
2. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикуляр- ны и равны *a*, *b* и *c*. Найдите радиус описанной сферы.
3. Пусть *V* — объем тетраэдра, *a* и *b* — его противоположные реб- ра, *c* — расстояние между ними, *α* — угол между ними. Докажите, что

1

*V* = 6 *abc* · sin *α.*

1. В треугольной пирамиде *ABCD* известно, что *CD* = *a*, а перпен- дикуляр, опущенный из середины ребра *AB* на *CD*, равен *b* и образует равные углы *α* с гранями *ACD* и *BCD*. Найдите объем пирамиды.
2. Сферы с центрами в точках *O*1 и *O*2 радиусов 3 и 1 соответствен- но касаются друг друга. Через точку *M* , удаленную от *O*2 на расстоя- ние 3, проведены две прямые, каждая из которых касается обеих сфер, причем точки касания лежат на прямых по одну сторону от точки *M* . Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них об- разует с прямой *O*1*O*2 угол 45*◦*.
3. В треугольной пирамиде противоположные ребра попарно рав- ны. Докажите, что центры описанной и вписанной сфер совпадают.
4. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, попар- но перпендикулярны;

б) площади всех граней равны;

в) точка пересечения медиан и центр описанной сферы совпадают.

1. Дана треугольная пирамида *ABCD*. Скрещивающиеся ребра *AC* и *BD* этой пирамиды перпендикулярны. Также перпендикулярны скре- щивающиеся ребра *AD* и *BC*, а *AB* = *CD*. Все ребра этой пирамиды касаются шара радиуса *r*. Найдите площадь грани *ABC*.
2. Сфера с центром в точке *O* проходит через вершины *A*, *B* и *C* треугольной пирамиды *ABCD* и пересекает прямые *AD*, *BD* и *CD* в точках *K*, *L* и *M* соответственно. Известно, что *AD* = 10,

*BC* : *BD* = 3 : 2 и *AB* : *CD* = 4√3 : 11. Проекциями точки *O* на плос- кости *ABD*, *BCD* и *CAD* являются середины ребер *AB*, *BC* и *AC* соответственно. Расстояние между серединами ребер *AB* и *CD* рав- но 13. Найти периметр треугольника *KLM* .

1. Ребро правильного тетраэдра равно *a*. Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Докажите, что пери- метр *P* сечения удовлетворяет неравенствам

2*a < P* ≤ 3*a.*

1. В треугольной пирамиде *SABC* суммы трех плоских углов при каждой из вершин *B* и *C* равны 180*◦* и *SA* = *CB*. Найдите объем пи- рамиды, если площадь грани *SBC* равна 100, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания *ABC* равно 3.
2. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром, равным 4. На середине ребра *BC* взята точка *M* , а на ребре *A*1*D*1 на расстоянии 1 от вершины *A*1 взята точка *N* . Найдите длину кратчайшего пути между точками *M* и *N* по поверхности куба.
3. Если поверхность тетраэдра *ABCD* разрезать вдоль ребер *AD*, *BD* и *CD*, то его разверткой на плоскость *ABC* будет квадрат со сто- роной, равной *a*. Найдите объем тетраэдра.
4. Основание п√ирамиды *ABCS* — равносторонний треугольник

*ABC* со стороной 4 2. Боковое ребро *SC* перпендикулярно плоскости

основания и равно 2. Найдите угол и расстояние между скрещиваю- щимися прямыми, одна из которых проходит через точку *S* и середину ребра *BC*, а другая проходит через точку *C* и середину ребра *AB*.

1. Основание пирамиды *SABCD* — параллелограмм *ABCD*. В ка- ком отношении плоскость, проведенная через прямую *AD* и середину ребра *SC*, делит объем этой пирамиды?
2. На ребре *DC* треугольной пирамиды *ABCD* взята точка *N* , при- чем *CN* = 2*DN* . На продолжении ребра *CA* за точку *A* и на продолже- нии ребра *CB* за точку *B* расположены точки *K* и *M* соответственно, причем *AC* = 2*AK* и *BM* = 2*BC*. В каком отношении плоскость *MNK* делит объем пирамиды *ABCD*?
3. Основание пирамиды *SABCD* — параллелограмм *ABCD*. Точ- ка *N* — середина ребра *AS*, точка *K* — середина медианы *SP* треуголь- ника *BSC*, точка *M* расположена на ребре *SB*, причем *SM* = 5*MB*. В каком отношении плоскость *MNK* делит объем пирамиды *ABCD*?
4. На ребрах *BC* и *DC* треугольной пирамиды *ABCD* расположе- ны точки *N* и *K* соответственно, причем *CN* = 2*BN* и *DK* : *KC* = 3 : 2; *M* — точка пересечения медиан треугольника *ABD*. В каком отношении плоскость *MNK* делит объем пирамиды *ABCD*?
5. Основание пирамиды *SABCD* — параллелограмм *ABCD*. На ребрах *AB* и *SC* расположены точки *K* и *M* соответственно, причем *AK* : *KB* = *CM* : *MS* = 1 : 2. В каком отношении плоскость, проходящая через точки *K* и *M* параллельно прямой *BD*, делит объем пирамиды *SABCD*?
6. Докажите, что из боковых граней четырехугольной пирамиды, основание которой является параллелограммом, можно составить тре- угольную пирамиду, причем ее объем вдвое меньше объема исходной пирамиды.
7. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла при ребре тетраэдра делит противолежащее ребро на отрезки, пропорцио- нальные площадям граней, образующих этот угол.
8. Докажите, что плоскость, проходящая через середины двух про- тивоположных ребер треугольной пирамиды, делит ее объем пополам.
9. Точки *M* и *N* — середины соответственно ребер *AA*1 и *CC*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Прямые *A*1*C*, *B*1*M* и *BN* попар- но перпендикулярны. Найдите объем параллелепипеда, если *A*1*C* = *a*, *B*1*M* = *b*, *BN* = *c*.
10. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На продолжении его ре- бер *AB*, *AA*1, *AD* за точки *B*, *A*1 и *D* соответственно отложены отрезки *BP* , *A*1*Q* и *DR*, равные 3*AB/*2, 3*AA*1*/*2 и 3*AD/*2. В каком отношении плоскость *PQR* делит объем параллелепипеда?
11. В каком отношении делит объем куба плоскость, перпендику- лярная его диагонали и делящая диагональ в отношении а) 2 : 1, б) 3 : 1?
12. Две плоскости, параллельные противоположным ребрам *AB* и *CD* тетраэдра *ABCD*, делят ребро *BC* на три равные части. Какая часть объема тетраэдра заключена между этими плоскостями?
13. Отношение длин двух скрещивающихся ребер тетраэдра рав- но *k*. Параллельно этим ребрам проведена плоскость, причем в сечении получился ромб. В каком отношении эта плоскость делит объем тетра- эдра?
14. Три шара попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются некоторой плоскости в вершинах прямоугольного треугольника с катетом, равным 1, и противолежащим углом в 30*◦*. Найдите радиусы шаров.
15. Сфера радиуса *r* касается всех ребер треугольной пирамиды, центр этой сферы лежит на высоте пирамиды. Докажите, что пирами-

да правильная, и найдите ее высоту, если изв√естно, что центр сферы

удален от вершины пирамиды на расстояние *r* 3.

1. В трехгранный угол, все плоские углы которого равны *α*, поме- щена сфера так, что она касается всех ребер трехгранного угла. Грани

трехгранного угла пересекают сферу по окружностям радиуса *R*. Най- дите радиус сферы.

1. Докажите, что в параллелепипед можно вписать сферу тогда и только тогда, когда все грани параллелепипеда равновелики.
2. Три конуса, радиусы оснований которых равны *R* и составля- ют 3*/*4 их высоты, расположены по одну сторону от плоскости *α*, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найдите радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости *α*, так и боковых поверхностей всех трех конусов.
3. В правильной пирамиде *SABC* сторона основания *ABC* рав- на *a*, боковое ребро — 2*a*. Точки *S*, *B* и *C* лежат на боковой поверхности конуса, имеющего вершину в точке *A*. Найдите угол при вершине осе- вого сечения конуса.
4. Все вершины правильной пирамиды *SABCD* лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости *SAB*. Найдите радиус основания цилиндра, если *AB* = *a*.
5. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* сторона основания равна *a*, боковое ребро — 5*a/*2. Одно основание цилиндра лежит в плоскости *SAB*, другое вписано в сечение пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
6. Высота цилиндра равна 3*r*. Внутри цилиндра расположены три сферы радиуса *r* так, что каждая сфера касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Две сферы касаются нижнего основания цилин- дра, а третья сфера — верхнего основания. Найдите радиус основания цилиндра.
7. В правильной призме *ABCA*1*B*1*C*1 длина каждого ребра рав- на *a*. Вершины *A* и *A*1 лежат на боковой поверхности цилиндра, плос- кость *BCC*1 касается этой поверхности. Ось цилиндра параллельна пря- мой *B*1*C*. Найдите радиус основания цилиндра.
8. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружно- сти радиуса 1, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данная, которая также расположена на дан- ной сфере и касается каждой из данных окружностей.
9. Одна вершина правильного тетраэдра расположена на оси ци- линдра, а другие вершины — на боковой поверхности этого цилиндра. Найдите ребро тетраэдра, если радиус основания равен *R*.
10. Вершина *A* основания *ABCD* правильной пирамиды *SABCD* совпадает с вершиной конуса, вершины *B*, *D* лежат на его боковой по- верхности, вершина *S* — на окружности основания этого конуса, а вер- шина *C* — в плоскости его основания. Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.
11. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60*◦*. Внутри конуса расположены три сферы радиуса 1. Каждая сфера касается двух других, основания конуса и его боковой поверхности. Найдите радиус основания конуса.
12. Четыре сферы радиуса 1 попарно касаются друг друга. Най- дите:

а) радиус сферы, касающейся всех четырех сфер;

б) высоту цилиндра, содержащего эти сферы так, что три из них ка- саются одного основания и боковой поверхности, а четвертая — другого основания цилиндра;

в) высоту конуса, содержащего эти сферы так, что все они касаются боковой поверхности, а три из них — основания конуса.

1. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Найдите объем конуса, если радиус каждого шара равен *r*.
2. Можно ли точку в пространстве заслонить четырьмя шарами?
3. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если извест- но, что на его поверхности можно провести три попарно перпендику- лярные образующие.
4. Два равных конуса с общей вершиной, с высотами, равными 2, и радиусами оснований, равными 1, касаются по некоторой образующей, а также касаются боковой поверхностью некоторой плоскости. Пусть *l* — прямая, по которой пересекаются плоскости основания конусов. Найди- те угол между прямой *l* и плоскостью *α*.
5. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по об- щей образующей. Угол в осевом сечении каждого из конусов равен 60*◦*. Найдите угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается конусов, но не проходит через общую образующую.
6. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каж- дый из них касается двух рядом лежащих. Найдите угол при вершине каждого конуса.
7. Два равных конуса с общей вершиной *D* расположены по раз- ные стороны от плоскости *α* и касаются этой плоскости по образующим *DE* и *DF* соответственно. Известно, что угол *DEF* равен *γ*, а угол

между прямой пересечения оснований конусов и плоскостью *α* равен *β*. Найдите угол между высотой и образующей каждого конуса.

1. Два конуса имеют общую вершину, и образующая первого кону- са является высотой второго. Угол при вершине осевого сечения первого конуса равен arccos(1*/*3), а второго — 2*π/*3. Найдите угол между обра- зующими, по которым пересекаются боковые поверхности конусов.
2. Три равных конуса с углом *α* (*α <* 2*π/*3) при вершине осевого сечения имеют общую вершину и касаются друг друга внешним образом по образующим *k*, *l*, *m*. Найдите угол между *l* и *k*.
3. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два одинаковых шара радиуса *r*, центры которых находятся на оси симмет- рии пирамиды. Один из шаров касается всех боковых граней пирамиды, а второй — основания пирамиды и первого шара. Найдите высоту пи- рамиды, при которой объем пирамиды наименьший.
4. Сторона основания *ABC* правильной пирамиды *PABC* равна *a*, боковое ребро равно *b*. На каком расстоянии от прямой *BC* следует провести сечение пирамиды, параллельное ребрам *BC* и *PA*, чтобы пло- щадь его была наибольшей из возможных?
5. Ребро *AB* тетраэдра *ABCD* является диагональю основания четырехугольной пирамиды, ребро *CD* параллельно другой диагонали этого основания, и концы его лежат на боковых ребрах пирамиды. Най- дите наименьший возможный объем пирамиды, если объем тетраэдра равен *V* .
6. Дана правильная призма *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Сторона ее основа- ния *ABCD* имеет длину 2*a*, боковое ребро — длину *a*. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали *AD*1 грани *AA*1*D*1*D* и диагонали *DB*1 призмы, параллельные плоскости *AA*1*B*1*B*.

а) Один из таких отрезков проведен через точку *M* диагонали *AD*1

такую, что *AM* : *AD*1 = 2 : 3. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

1. Докажите, что площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трех остальных его граней.
2. Докажите, что проекция правильного тетраэдра на плоскость будет иметь наибольшую площадь, когда эта плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.
3. Докажите, что сумма углов пространственного четырехуголь- ника не превосходит 360*◦*.
4. Докажите, что сумма внутренних двугранных углов трехгран- ного угла больше *π* и меньше 3*π*.
5. **Теорема косинусов для трехгранного угла.** Если *α*, *β*, *γ* — плос- кие углы трехгранного угла, а *A*, *B*, *C* — противолежащие им двугран-

ные углы, то

cos *A* =

cos *α* − cos *β* cos *γ .*

sin *β* sin *γ*

1. Пусть *MC* — перпендикуляр к плоскости треугольника *ABC*. Верно ли, что ∠*AMB <* ∠*ACB*?
2. Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранного

угла меньше 360*◦*.

1. **Теорема косинусов для тетраэдра.** Квадрат площади каждой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трех остальных гра- ней без удвоенных попарных произведений площадей этих граней на ко- синусы двугранных углов между этими плоскостями, т. е.

*S*2 = *S*2 + *S*2 + *S*2 − 2*S*1*S*2 cos *α*12 − 2*S*1*S*3 cos *α*13 − 2*S*2*S*3 cos *α*23*.*

0

1

2

3

1. В тетраэдре *ABCD* все плоские углы при вершине *A* равны 60*◦*. Докажите, что *AB* + *AC* + *AD* ≤ *BC* + *CD* + *DB*.
2. Основание пирамиды *ABCD* — правильный треугольник *ABC*. Известно, что ∠*BAD* = ∠*CBD* = ∠*ACD*. Докажите, что пирамида — правильная.
3. **Принцип Кавальери.** Если два геометрических тела можно раз- местить в пространстве так, что в сечении этих тел любой плоскостью, параллельной некоторой фиксированной плоскости, получаются рав- новеликие плоские фигуры, то данные тела равновелики. Выведите с помощью принципа Кавальери формулу объема шара.
4. Один выпуклый многогранник лежит внутри другого. Докажи- те, что площадь поверхности внешнего многогранника больше площади поверхности внутреннего.
5. Докажите, что сферическая поверхность шарового слоя (части шара, заключенной между двумя параллельными секущими плоско- стями) равна 2*πRh*, где *R* — радиус шара, *h* — высота шарового слоя (расстояние между секущими плоскостями).

**Оглавление**

[Предисловие](#_bookmark0) 3

[Часть 1. Основные сведения из школьной геометрии](#_bookmark1) 5

[Планиметрия](#_bookmark2) 5

[Задачи на построение с помощью циркуля и линейки](#_bookmark3) 14

[Стереометрия](#_bookmark4) 15

[Факты, непосредственно связанные с аксиомами](#_bookmark5) 15

[Параллельность в пространстве](#_bookmark6) 15

[Скрещивающиеся прямые](#_bookmark7) 16

[Параллельное проектирование](#_bookmark8) 16

[Координаты и векторы в пространстве](#_bookmark9) 17

[Перпендикулярность прямой и плоскости](#_bookmark10) 19

[Двугранный угол](#_bookmark11) 20

[Многогранные углы](#_bookmark12) 20

[Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы](#_bookmark13) 20

[Правильная пирамида](#_bookmark14) 21

[Площадь поверхности многогранника](#_bookmark15) 22

[Объемы многогранников](#_bookmark16) 22

[Объемы и поверхности круглых тел](#_bookmark17) 23

[Часть 2. Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии](#_bookmark18) 24

[Планиметрия](#_bookmark19) 24

[Задачи на построение](#_bookmark20) 37

[Стереометрия](#_bookmark21) 39

**Издательство МЦНМО предлагает следующие книги для школьников**

*В. Г. Болтянский, А. П. Савин.* **Беседы о математике. Дискретные объ- екты.** — 2002. — 368 с.

Книга вводит читателя в круг идей современной математики. В попу- лярной форме рассказывается о теории множеств, комбинаторике, теории графов, теории вероятностей и других вопросах.

Издание будет интересно учителям математики. Специальная глава по- священа вопросам, связанным с поиском учащимися решений задач.

В то же время эта книга может служить основой курса математики для студентов гуманитарных специальностей, такой курс был прочитан авторами для психологов.

Учащиеся и учителя математических школ, лицеев и гимназий могут ис- пользовать издание в качестве учебного пособия.

*Р. Курант, Г. Роббинс.* **Что такое математика?** — 3-e изд., испр. и доп.

— 2001. — 568 с.

Эта книга, написаная одним из ведущих математиков XX века Р. Ку- рантом вместе с Г. Роббинсом, — одна из лучших научно-популярных книг по математике. Ее замысел выражен в предисловии: «Нет ничего невозмож- ного в том, чтобы, начиная от первооснов, добраться до таких возвышенных точек, с которых можно ясно обозреть самую сущность и движущие силы современной математики».

Многочисленные упражнения разбросаны по всей книге; дополнительное собрание упражнений в конце облегчает ее использование в школьной об- становке. Большинство упражнений не носит чисто формального характера, более трудные отмечены звездочкой. Не надо слишком огорчаться, если вы не сумеете выполнить некоторые из них.

Мы надеемся, что и специалист обнаружит кое-что интересное в элемен- тарных рассуждениях, содержащих в себе зерно более широких идей.

*С. Г. Гиндикин.* **Рассказы о физиках и математиках.** — 3-е изд., расши- ренное. — 2001. — 576 c.

В книге рассказывается о жизни и творчестве двенадцати замечательных математиков и физиков, работы которых в значительной мере определили лицо современной математической науки.

Книга написана на основе статей, публиковавшихся в журнале «Квант» в течение ряда лет. Этим объясняется некоторый элемент случайности в вы- боре людей и событий, которым посвящены рассказы в книге. Однако нам кажется, что в книге идет речь о принципиальных явлениях в истории на- уки, достойных внимания любителей математики и физики. Хотя эта книга не дает систематической картины развития математики, она содержит зна- чительный материал для размышления.

Эта книга для всех: от старшеклассников до взрослых. Увлекательно из- ложенные биографии великих ученых могут заинтересовать самые широкие круги читателей. А те из читателей, кто интересуется математикой, получат удовольствие и пользу от знакомства с конкретными научными достижения- ми героев книги.

Настоящее издание более чем вдвое расширено по сравнению с предыду- щим, вышедшим в 1985 году и успевшим стать библиографической редко- стью.

Хотя эта книга не дает систематической картины развития математики, она содержит значительный материал для размышления. Непознанные зако- ны управляют математической модой!

*В. В. Прасолов.* **Задачи по планиметрии.** — 4-е изд., доп. — 2001. — 584 с.

В книгу включены нестандартные геометрические задачи несколько по- вышенного по сравнению со школьными задачами уровня. Сборник содержит около 1500 задач с полными решениями и около 150 задач для самостоятель- ного решения.

Настоящее издание дополнено по сравнению с предыдущим (3-е изд. — 1995).

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математи- ческих кружков, студентов пединститутов.

*Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер.* **Прямые и кривые.** — 2000. — 128 с.

Не нуждается в специальном представлении книга, ставшая классикой литературы для школьников, интересующихся математикой. Данное издание представляет собой переиздание брошюры серии «Библиотека физико-мате- матического кружка», давно ставшей библиографической редкостью.