

Signály a informace

Přednáška č.9

Praktický návrh filtrů FIR

Připomenutí předchozí přednášky

- Z-transformace umožňuje převést analýzu signálů a systémů do oblasti komplexních čísel
- To usnadňuje počítačový návrh systémů i výpočet frekvenčních charakteristik
- Frekvenční charakteristiky udávají závislost modulu a fáze přenosové funkce na frekvenci.
- Lze je zjistit buď postupným měřením na jednotlivých frekvencích nebo odvodit z popisu systému.
- V MATLABU lze frekvenční charakteristiku získat (včetně grafu) prostřednictvím funkce freqz.

Připomenutí předchozí přednášky

- Je-li systém popsán diferenční rovnicí

$$y[n] + A_1 y[n-1] \cdots A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M]$$

je přenos dán vztahem

$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} \cdots A_N z^{-N}}$$

- Frekv. char. $H[F]$ získáme dosazením $z=e^{j2\pi F}$
kosinusovka v komplex. tvaru

- Podobně jako u Z-transformace, kde platí

$$Y[z] = H[z] \cdot X[z]$$

- platí i ve frekvenční oblasti

$$Y[F] = H[F] \cdot X[F]$$

což můžeme interpretovat jako

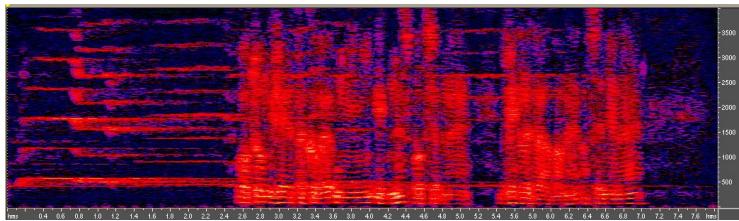
spektrum výstup. signálu = frekv. charakteristika systému • spektrum vstup. signálu

Návrh filtrů - motivace

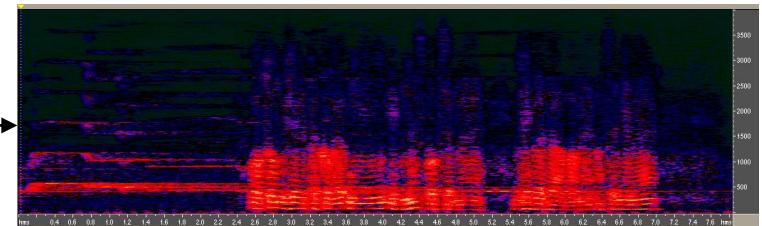
Potřeba upravit spektrum signálu nebo frekvenční charakteristiku systému (např. snímače)

Jaká by měla být amplitudová frekv. charakteristika filtru v zobrazeném příkladě?

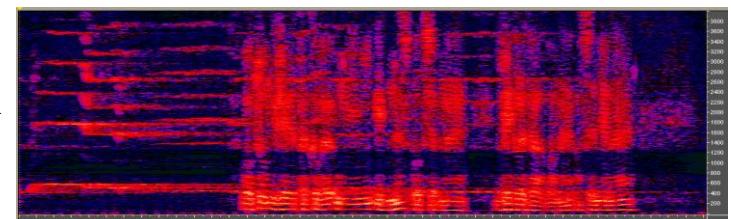
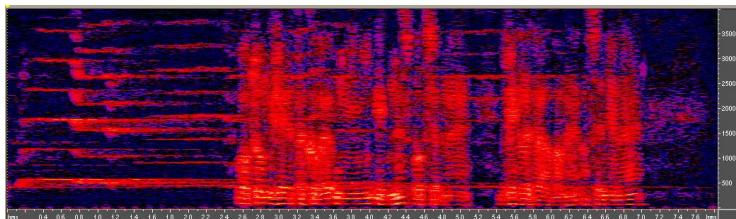
vstupní signál



požadovaný výstupní signál



$$Y[F] = H[F] \cdot X[F]$$



Filtry

Systémy upravující signál požadovaným způsobem

- Např. typ DP, HP, PP, PZ, zpoždovač, atd.
- Zasahují vždy do časového i frekvenčního průběhu signálu (zasah pouze do časové nebo pouze do frekvenční charakteristiky není možný).
- U spojitých signálů se realizují obvodově (s pas. součástkami RLC nebo s operačními zesilovači).
- U číslicových signálů pomocí speciálních číslicových obvodů a signálových procesorů (DSP – digital signal processor) či čistě programově na běžné výp. technice.
- **Návrh číslicového filtru** spočívá v navržení jeho impulzní odezvy, případně přenosové funkce (mezi nimi existuje jednoznačný vztah).

Lineární filtry

Číslicové LTI systémy

4 základní popisy činnosti filtru:

Časový popis pomocí diferenční rovnice:

$$y[n] + A_1 y[n-1] + \cdots + A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \cdots + B_M x[n-M]$$

Časový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

Systémový popis pomocí přenosové funkce:

$$H[z] = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + \cdots + B_M z^{-M}}{1 + A_1 z^{-1} + \cdots + A_N z^{-N}}$$

Frekvenční přenosová charakteristika (za z dosazeno $e^{j2\pi F}$)

$$H[F] = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} + \cdots + B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} + \cdots + A_N e^{-j2\pi FN}}$$

Vztahy mezi jednotlivými popisy

V časové oblasti je klíčový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n] = h[n]^* x[n]$$

Ve frekvenční oblasti pak popis pomocí Fourier. transf.

$$Y[F] = H[F]X[F]$$

kde $Y[F]$ je DFT (tj. spektrum) výstupního signálu

$X[F]$ je DFT (tj. spektrum) vstupního signálu

$H[F]$ je DFT impulzní odezvy systému a zároveň frek. char.

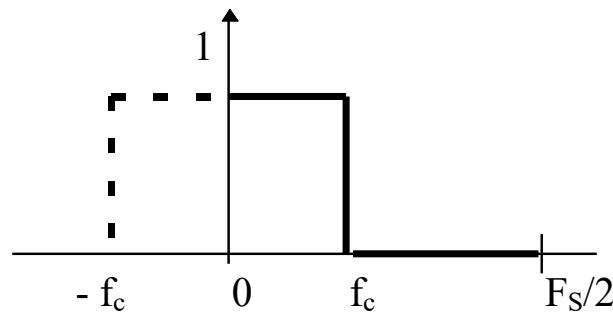
$$H[F] = \frac{B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \cdots B_M e^{-j2\pi FM}}{1 + A_1 e^{-j2\pi F} \cdots A_N e^{-j2\pi FN}}$$

Platí:

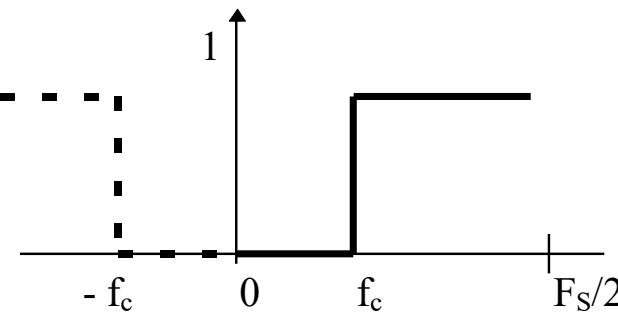
1. Frekv. charakteristika je Fourier. transformací imp. odezvy
2. Konvoluce v čase se transformuje na součin ve frekvencích

Ideální filtry

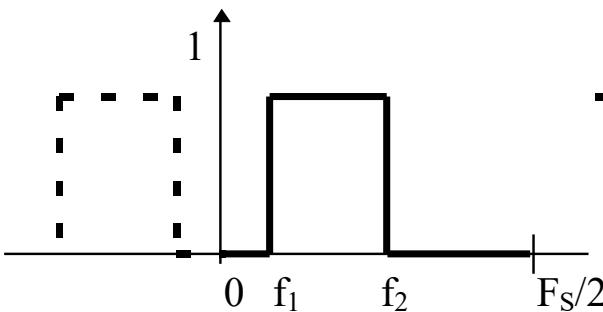
Základní typy podle frekvenční charakteristiky



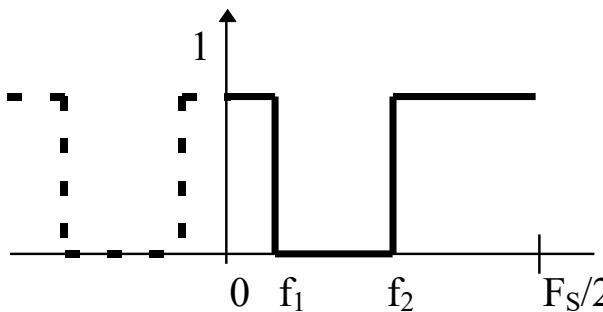
Dolní propust (DP)
Lowpass (LP)



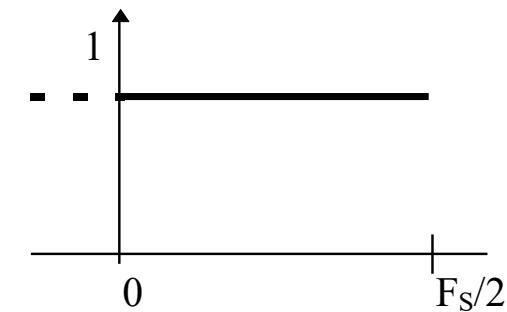
Horní propust (DP)
Highpass (HP)



Pásmová propust (PP)
Bandpass (BP)



Pásmová zádrž(PZ)
Bandstop (BS)



Fázový posouvač (FP)
Allpass (AP)

Filtry typu FIR

FIR (Finite Impulse Response) – f. s konečnou imp. odezvou

Časový popis pomocí diferenční rovnice:

$$y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \cdots B_M x[n-M] = \sum_{k=0}^M B_k x[n-k]$$

Časový popis pomocí impulzní odezvy:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^M h[k] x[n-k]$$

Popis pomocí přenosové funkce a frekvenční charakteristiky

$$H[z] = B_0 + B_1 z^{-1} \cdots B_M z^{-M}$$

$$H[F] = B_0 + B_1 e^{-j2\pi F} \cdots B_M e^{-j2\pi FM}$$

platí že

$$B_k = h[k]$$

Návrh filtru spočívá v nalezení koeficientů impulzní odezvy
– tedy koeficientů h[k] (které jsou pro FIR totožné s koeficienty B)

Příklad použití navrženého filtru v Matlabu $y = \text{filter}(B, A, x)$

Příklady metod návrhu filtru FIR (1)

Metoda vzorkování frekvenční charakteristiky

Princip: Frekvenční charakteristika je Fourierovým obrazem impulzní odezvy a tedy naopak
impulzní odezva je inverzním obrazem frekvenční charakteristiky.

Princip použití:

1. V obrazu dvoustranného spektra si stanovíme průběh frekvenční charakteristiky (modulové i fázové).
2. Charakteristiku navzorkujeme ve frekv. pásmu $-Fs/2$ až $Fs/2$ vhodným počtem bodů N (nejlépe mocnina 2).
3. Provedeme inverzní DFT, kterou získáme impulzní odezvu o N koeficientech. (Koeficienty jsou obecně komplexní).

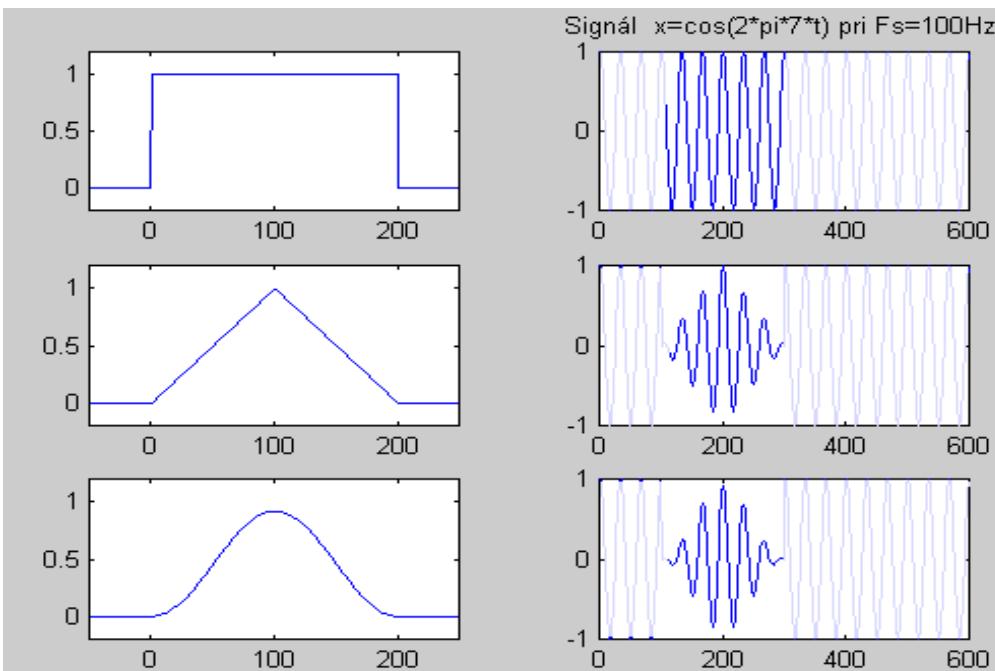
Okénkovací funkce (připomenutí)

Okénkovací funkce (window function) – řeší otázku, jak nejlépe provést výřez z dlouhého (příp. nekonečného) signálu, aniž by to mělo velký vliv na chování ve frekvenční oblasti. Platí to i inverzně pro výřez spektra

Nejlepší výřez je takový, kdy vzorky na obou koncích hrají minimální roli.

Obdélníkové okno

(prostý výřez signálu
= násobení obdéln. funkcí)
boxcar(N)



Trojúhelníkové okno

(násobení trojúhel. funkcí)
bartlett(N)

Hammingovo okno

hamming(N)

Praktická aplikace: Okénkovací funkce jsou používány při výpočtu DFT a podobně i při návrhu filtrů.

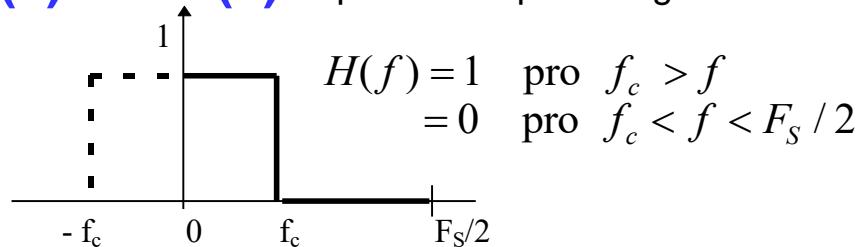
Příklady metod návrhu filtru FIR (2)

Metoda využívající okénkovací funkce

Princip: Frekvenční charakteristiky ideálních filtrů jsou tvořeny obdélníkovými funkcemi a tedy **impulzní odezva je inverzním Four. obrazem obdélníkové funkce, která je založena na funkci $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$** <https://cs.wikipedia.org/wiki/Sinc>

Postup při použití (příklad DP):

1. vymezení frekvenčního pásma
2. převedení na normalizovanou (číslicovou) frekvenci $F_c = f_c / F_S$
3. získání imp. odezvy pomocí IDFT $h(n) = IDFT(H(F)) = 2F_c \text{sinc}(2nF_c)$
4. vybrání konečného počtu **N** vzorků symetricky rozložených kolem 0
$$-\frac{1}{2}(N-1) \leq n \leq \frac{1}{2}(N-1)$$
5. násobení vhodnou okénkovací funkcí kvůli konečnému počtu vzorků
$$h[n] = h[n].w[n]$$
6. posunutí impulzní odezvy o $(N-1)/2$ vzorků doprava, abychom dostali kauzální filtr
$$h[n] = h[n - (N-1)/2]]$$



Příklady metod návrhu filtru FIR (3)

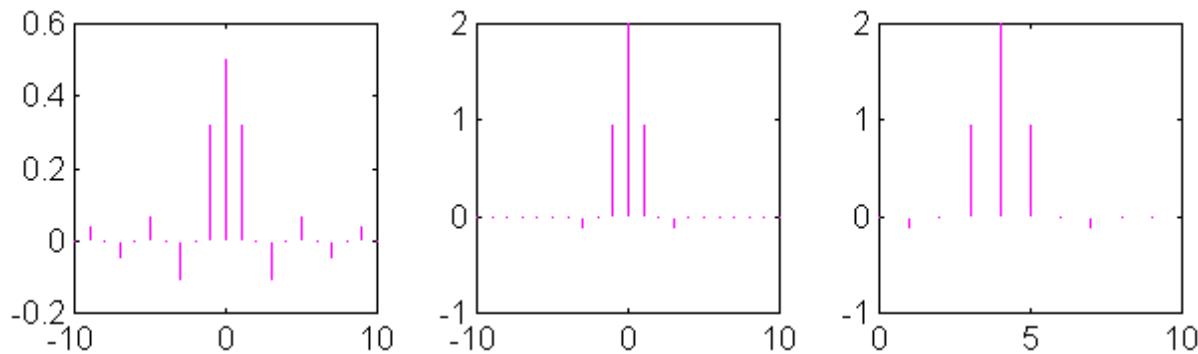
Metoda váhových oken - příklad

Zadání: Navrhnut DP s pásmem 0 až 5 kHz pro vzorkovací frekvencí 20 kHz.

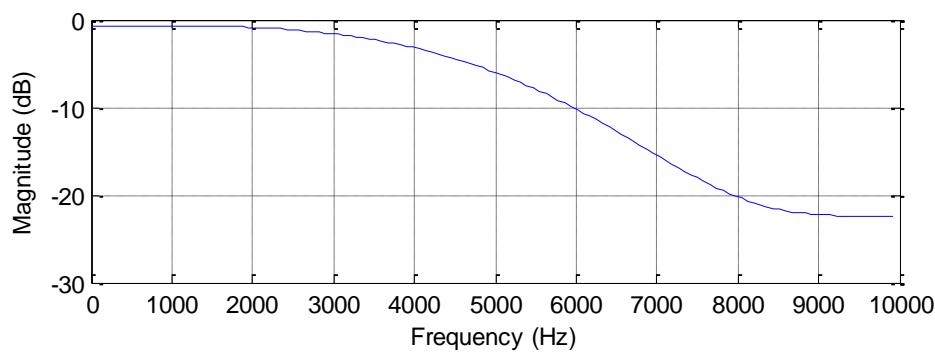
1. vymezení frekvenčního pásma $f_c = 5 \text{ kHz}$
2. převedení na normalizovanou frekvenci $F_c = 5 / 20 = 0,25$
- 3.+ 4. dosazení do $h(n) = 2F_c \operatorname{sinc}(2nF_c)$ $h(n) = 0,5 \operatorname{sinc}(0,5 n)$,
zvolíme např. $N = 9$, tj. $-4 < n < 4$
dosazením $h(n) = (0, -0.11, 0, 0.32, 0.5, 0.32, 0, -0.11, 0)$
5. vynásobení okénkovací funkcí – zvolíme např. trojúhelníkovou
 $w(n) = (0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0)/4$
 $h(n) = h(n).w(n) = (0, -0.03, 0, 0.24, 0.5, 0.24, 0, -0.03, 0)$ a
 $H(z) = -0.03 z^3 + 0.24 z^1 + 0.5 z^0 + 0.24 z^{-1} - 0.03 z^{-3}$
6. posunutí impulzní odezvy o $(N-1)/2$ vzorků doprava (vynásobení z^{-4})
 $H(z) = -0.03 z^{-1} + 0.24 z^{-3} + 0.5 z^{-4} + 0.24 z^{-5} - 0.03 z^{-7}$
vektor koeficientů B $[0 \ -0.03 \ 0 \ 0.24 \ 0.5 \ 0.24 \ 0 \ -0.03 \ 0]$
7. Použití v Matlabu $y = \text{filter}(B, 1, x)$

Příklady metod návrhu filtru FIR (4)

Metoda váhových oken – ilustrace k příkladu

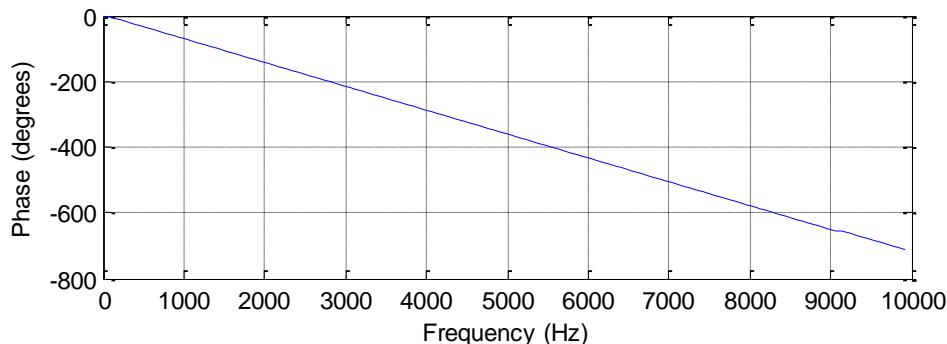


- a) impulzní odezva z funkce $h(n) = 0.5 \text{sinc}(0.5n)$,
- b) po vynásobení trojúhelníkovým oknem,
- c) posunutí kvůli splnění podmínky kauzálnosti.



vykreslení přenosové funkce navrženého filtru

`freqz (B,A,M,Fs)` M je počet bodů pro vykreslení charakteristiky

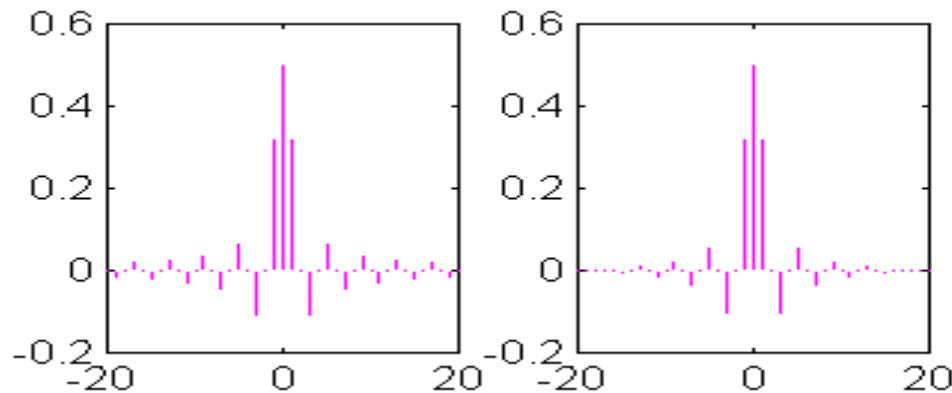


V Matlabu:

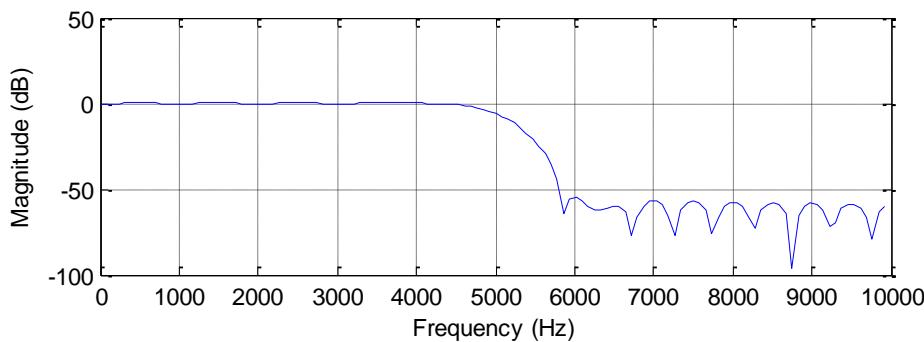
```
n=9; i=-(n-1)/2:(n-1)/2;  
h=0.5*sinc(0.5*i);  
w=bartlett(n); B=h.*w';  
freqz (B,1,128,20000);
```

Příklady metod návrhu filtru FIR (5)

Metoda váhových oken – stejné zadání, N=41, hamming

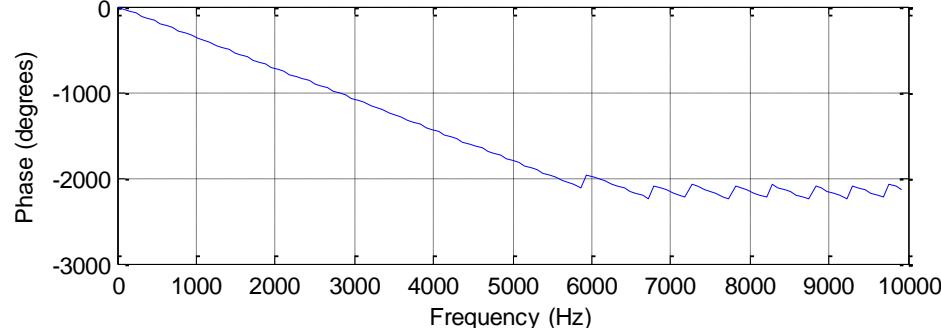


impulzní odezva z funkce
 $h(n) = 0.5 \operatorname{sinc}(0.5n)$,
spočítána pro 41 bodů
po vynásobení hammingovým oknem,



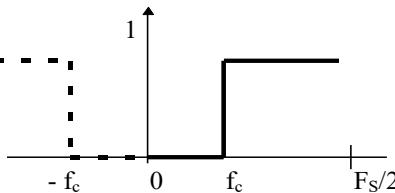
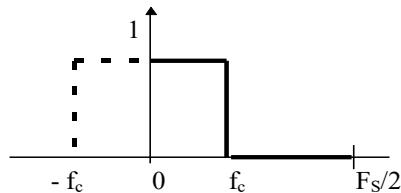
Můžeme si všimnout, že

- a) zvýšením délky filtru se zvýšila strmost filtru a odstup mezi propustným a nepropustným pásmem (cca -50dB)
- b) v nepropustném pásmu dochází ke zvlnění v ampl. i fáz. spektru,
- c) protože N je velké, filtr bude mít též velké zpoždění.

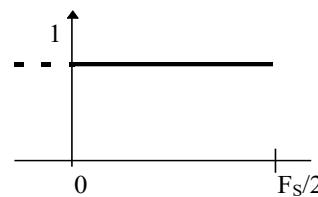
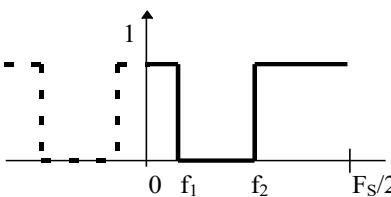
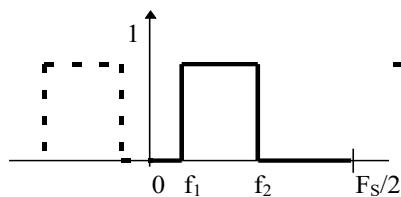


Příklady metod návrhu filtru FIR (6)

Metoda váhových oken – ostatní typy filtrů



Všechny uvedené typy filtrů lze vyjádřit pomocí funkce obdélníku (jednoho nebo dvou) a na základě toho provést příslušnou transformaci



typ přenosová funkce

$$\mathbf{DP} \quad H_{DP}(F) = \text{rect}(F / 2F_c)$$

$$\mathbf{HP} \quad H_{HP}(F) = 1 - H_{DP}$$

$$\mathbf{PP} \quad H_{PP}(F) = \text{rect}((F + F_0) / 2F_c) + \text{rect}((F - F_0) / 2F_c)$$

$$\mathbf{PZ} \quad H_{PZ}(F) = 1 - H_{PP}$$

impulsní odezva

$$h_{DP}(n) = 2F_c \text{sinc}(2nF_c)$$

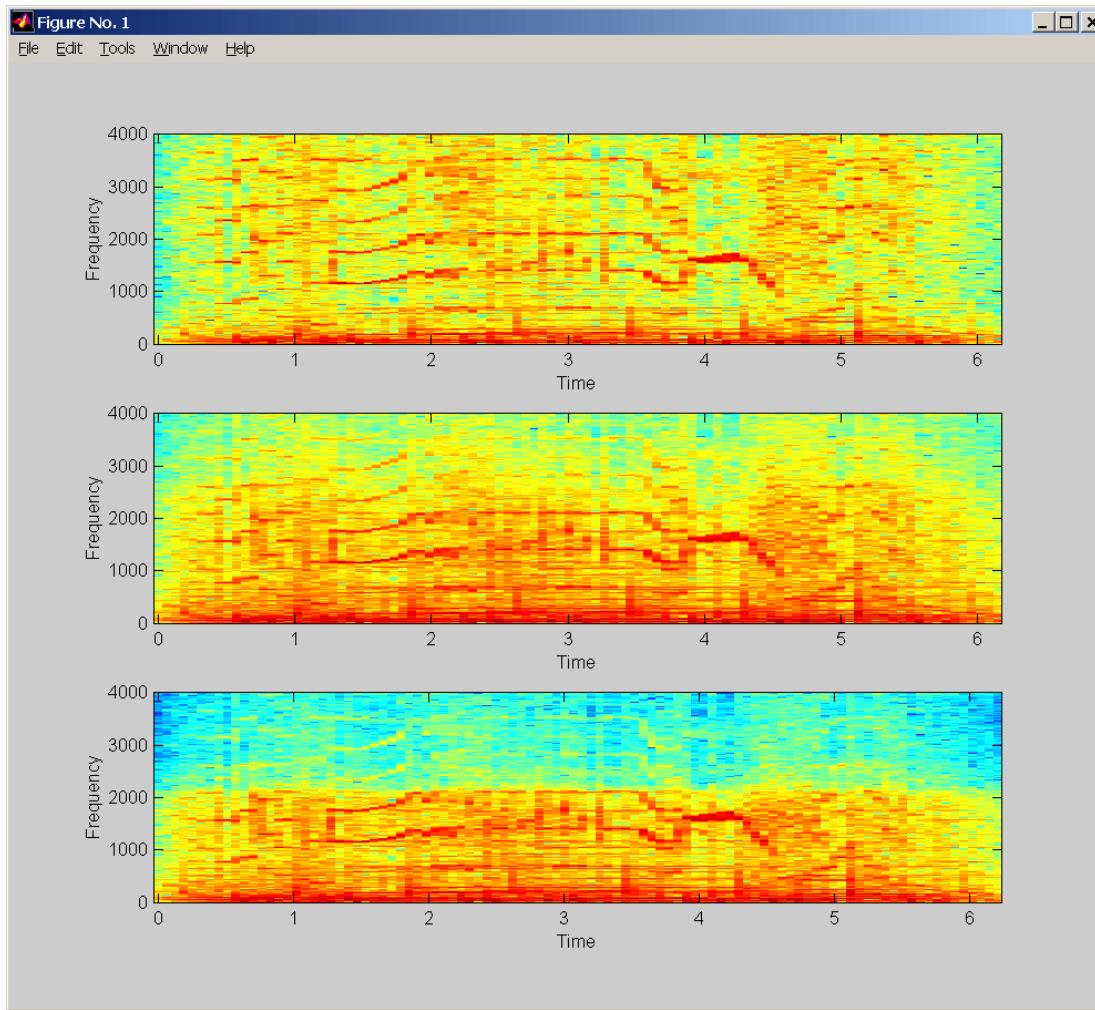
$$h_{HP} = \delta(n) - h_{DP}(n)$$

$$h_{PP}(n) = 2 \cos(2nF_0)h_{DP}(n)$$

$$h_{PZ} = \delta(n) - h_{PP}(n)$$

Příklady metod návrhu filtru FIR (7)

Metoda váhových oken – ilustrace



Originál



Filtr o délce 9



Filtr o délce 41



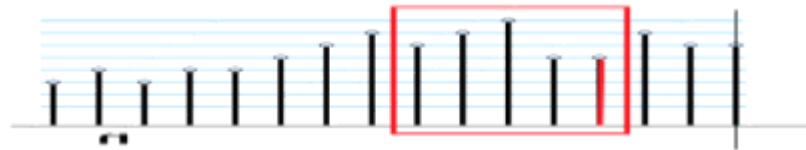
Nástroje pro návrh filtrů FIR v MATLABu

1. Metoda okénkovacích funkcí
funkce FIR1 – umožňuje návrh DP, HP, PP, PZ
2. Metoda vzorkování
funkce FIR2 – umožňuje návrh DP, HP, PP, PZ
3. Remezův algoritmus
(výpočet filtrů se zvlněnou frekvenční charakteristikou)
funkce REMEZORD určí pomocné parametry
funkce REMEZ vypočte koeficienty filtru
4. Výpočet a vykreslení charakteristiky filtru
funkce FREQZ (B,A,M,Fs)
5. Aplikace navrženého filtru
funkce FILTER
 $y = \text{filter} (B, 1, x)$

Výhody a nevýhody filtrů FIR

1. Poměrně jednoduchý a intuitivní návrh
2. Filtr je **nerekurzivní** (bez zpětných vazeb), je tudíž vždy **stabilní** (nemůže způsobit kmitání)
3. Filtry FIR mohou zajistit **lineární** průběh **fáz. char.**
4. S filtry FIR se **hůře dosahuje velká strmost** přechodu mezi propustným a nepropustným pásmem
5. Pro dosažení velké strmosti jsou nutné **filtry s mnoha koeficienty**, ty pak mají dlouhé zpoždění
6. **Interpretace** funkce FIR filtru: výstupní signál filtru je lineární kombinací vzorků z určitého okolí vstupního signálu

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] = h[0].x[n] + h[1].x[n-1] \dots + h[M].x[n-M]$$



n-ty vzorek a jeno (kauzální) okolí v čase

Dvourozměrné filtry FIR pro zprac. obrazu (1)

Ve statickém obrazu nehraje při filtrování roli čas, ale prostor - **okolí jednotlivých bodů**.

Obrazové filtry rovněž pracují **na principu konvoluce**, tj. novou hodnotu (jasu) v daném bodě určí z lineární kombinace hodnot v okolních bodech.

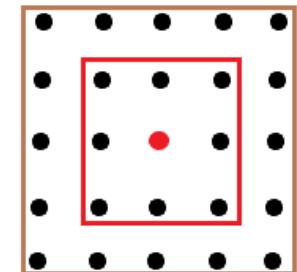
$$I_k(n,m) = \sum_{i,j \in \text{okolí}} h(i,j) \cdot I_{k-1}(n+i, m+j)$$

Nová hodnota v bodu

konvoluční jádro

Poznámka:

Operace s obrazy se často dělají v iteračních krocích. Při výpočtu nové iterace je třeba nové hodnoty ukládat do jiné matice než té, v níž byly uloženy původní hodnoty.



pixel $[n,m]$ a jeho okolí

Dvourozměrné filtry FIR pro zprac. obrazu (2)

Příklady konvolučního jádra pro **DP** (dolní propust)
(provádí potlačení šumu a detailů)

$$h_{DP1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_{DP2} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_{DP3} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklady konvolučního jádra pro **HP** (horní propust)
(zvýrazňuje rychlé změny, zejména hrany)

$$h_{HP1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad h_{HP2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad h_{HP3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

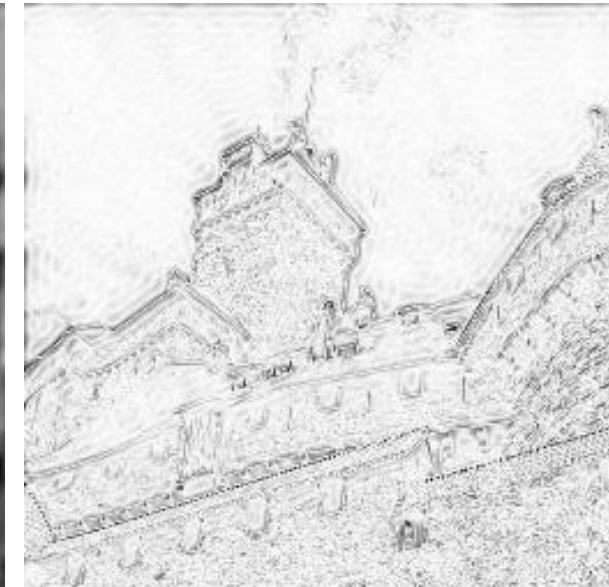
Příklady číslicových LTI systémů (3)



originál



DP



HP

Shrnutí

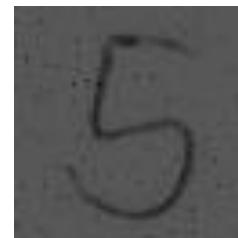
- Ideální filtry DP, HP, PP a PZ mají jednotkový přenos v propustném pásmu a nulový přenos v nepropustném pásmu. Přechod mezi pásmeny je dokonale strmý.
- Reálné filtry toto neumožňují – charakteristiky jsou více či méně zvlněné, přechody jsou pozvolně.
- Filtry FIR jsou jednodušší pro návrh a realizaci, jejich průběhy jsou však dosti vzdálené ideálním filtrům.
- V Matlabu je k dispozici několik funkcí pro návrh a analýzu filtrů.

Bonusová část

Práce s obrazovými signály

Motivace: Chceme „vylepšit“ naskenované obrázky ručně psaných číslic pro automatické rozpoznávání (téma přednášek č. 11-13)

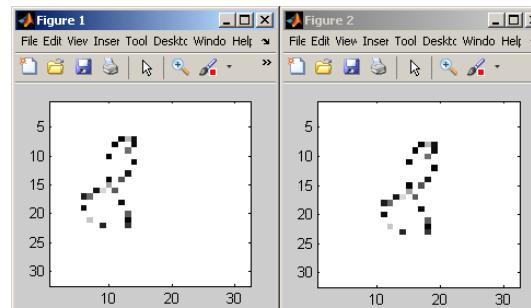
V rámci úlohy 05 jste vytvořili data - obrázky v šedotónové stupnici, které nevždy vypadají vhodně pro rozpoznávání



Přímé užití takových obrázků pro učení/testování by vedlo k horším výsledkům

Proto je vhodné obrázky před tím

- zbavit šumu (ale nerozmazat)
- zvýšit kontrast
- vycentrovat motiv (číslici)



původní obrázek - vycentrovaný

Zadání úlohy a postup

1. Stáhněte si z e-learningu soubor Bonus09 s připravenými obrázky
2. Napište Program1 v Matlabu, který je načte a provede s nimi následující kroky (**vlastními naprogramovanými funkcemi!**):
 - provede filtraci vhodně navrženým filtrem FIR typu DP s cílem potlačit šum
 - výrazně zvýší kontrast obrázku (např. na základě analýzy a rozšíření histogramu jasu – jde o jednoduchý princip, nastudujte si)
 - vycentruje číslici tak, aby ležela co nejblíže středu, tj. bodu o souřadnicích [16,16], jeho velikost ani natočení se nesmí změnit
3. Možný postup centrování: najděte polohu „těžiště“ pův. obrázku a obrázek posuňte ve směru os x a y, aby se těžiště dostalo do bodu [16,16], přičemž to, co na jedné straně obrázku posunem vypadne, doplňte na opačnou stranu (tj. nevymýšlejte si nové body pozadí)
4. Váš program načte obrázky ze souboru `FileList.txt` (s celými cestami - podobně jako v některých předchozích úlohách), zpracuje je a po 10 je zobrazí takto: pomocí funkce `subplot` zobrazí matici 10x2 obrázků, kde pův. obrázek bude vlevo, zpracovaný vpravo. Upravené obrázky neukládejte.

Hodnocení úlohy

1. Řešení (program + komentář) musí být odesláno tradičně do soboty 23:59
2. Řešení musí rozumně fungovat na všech dodaných obrázcích a na podobných testovacích datech. Kontrolu provedu tak, že vyzkouším na vlastním FileListu obsahujícím cesty k obrázkům stejného typu.
3. Bod získáte, pokud splníte výše uvedenou podmínu.
4. Řešení si uložte, bude se vám hodit v závěrečných úlohách, kde budete soutěžit o co nejlepší výsledky v rozpoznávání (a extra body).

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.