

# Отчёт по лабораторной работе №8

## дисциплина: Математическое моделирование

Павлова Варвара Юрьевна

### Содержание

Цель работы .....	1
Задание .....	1
Выполнение лабораторной работы .....	2
Выводы .....	6

### Цель работы

Построить график распространения рекламы.

### Задание

#### Вариант 35

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{d\theta} &= M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{dM_2}{d\theta} &= \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2,\end{aligned}$$

где 
$$a_1 = \frac{P_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, \quad a_2 = \frac{P_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, \quad b = \frac{P_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, \quad c_1 = \frac{P_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}, \quad c_2 = \frac{P_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}.$$

Также введена нормировка  $1 \text{ т с} = \theta$ .

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед  $M_1 M_2$  будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \left( \frac{b}{c_1} + 0,00053 \right) M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами

$$M_0^1 = 5.4, M_0^2 = 4.1,$$

$$p_{cr} = 35, N = 30, q = 1$$

$$\tau_1 = 18, \tau_2 = 13,$$

$$\tilde{p}_1 = 7.7, \tilde{p}_2 = 8.3$$

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с введенной нормировкой для случая 2.

## Выполнение лабораторной работы

### 1. Теоритические сведения

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют. Обозначим:  $N$  – число потребителей производимого продукта.  $S$  – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.  $M$  – оборотные средства предприятия  $\tau$  – длительность производственного цикла  $p$  – рыночная цена товара  $\tilde{p}$  – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.  $\delta$  – доля оборотных средств, идущая на

покрытие переменных издержек.  $k$  – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.  $Q(S/p)$  – функция спроса, зависящая от отношения дохода  $S$  к цене  $p$ . Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени. Функцию спроса товаров длительного использования часто представляют в простейшей форме

$$Q = q - k \frac{p}{S} = q \left( 1 - \frac{p}{p_{cr}} \right)$$

где  $q$  – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при  $p = p_{cr}$  (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина  $p_{cr} = Sq/k$ . Параметр  $k$  – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть,  $Q(S/p) = 0$  при  $p \geq p_{cr}$ ) и обладает свойствами насыщения. Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq \left( 1 - \frac{p}{p_{cr}} \right) p - k$$

Уравнение для рыночной цены  $p$  представим в виде

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \left( -\frac{M\delta}{\tau} + Nq \left( 1 - \frac{p}{p_{cr}} \right) \right)$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр  $\gamma$  зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла  $\tau$ . При заданном  $M$  уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво. В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau \tilde{p}} + Nq \left( 1 - \frac{p}{p_{cr}} \right) = 0$$

Из этого следует, что равновесное значение цены  $p$  равно

$$p = p_{cr} \left( 1 - \frac{M\delta}{\tau \tilde{p} Nq} \right)$$

Уравнение с учетом приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -M \frac{\delta}{\tau} \left( \frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1 \right) - M^2 \left( \frac{\delta}{\tau \tilde{p}} \right)^2 \frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию  $dM/dt = 0$ :

$$\widetilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Где

$$a = Nq \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = kNq \frac{(\tilde{p}\tau)}{p_{cr}\delta^2}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае  $a^2 < 4b$ ) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть,  $b \ll a^2$ ) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При  $b \ll a^2$  стационарные значения  $M$  равны

$$\widetilde{M}_+ = Nq \frac{\tau}{\delta} \left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \tilde{p}, \widetilde{M}_- = k\tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние  $M_+$  устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние  $M_-$  неустойчиво, так, что при  $M < M_-$  – оборотные средства падают ( $dM/dt < 0$ ), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу  $M_-$  соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок. В обсуждаемой модели параметр  $\delta$  всюду входит в сочетании с  $\tau$ . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим:  $\delta = 1$ , а параметр  $\tau$  будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

## 2. Построение графиков

### 2.1 Написала программу на Modelica:

```
model lab08.1
  parameter Real p_cr = 35;
  parameter Real tau1 = 18;
  parameter Real p1 = 7.7;
  parameter Real tau2 = 13;
  parameter Real p2 = 0.9;
  parameter Real N = 30;
  parameter Real q = 1;

  parameter Real a1 = p_cr/ (tau1*tau1*p1*p1*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/ (tau2*tau2*p2*p2*N*q);
  parameter Real b = p_cr/ (tau1*tau1* tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  parameter Real M0_1=5.4;
  parameter Real M0_2=4.1;
  Real M1 (start=M0_1);
  Real M2 (start=M0_2);
equation
  der (M1) = M1 - (b/c1)*M1*M2 - (a1/c1)*M1*M1;
  der (M2) = (c2/c1)*M2 - (b/c1+0.00053)*M1*M2 - (a2/c1)*M2*M2;
end lab8.1;
```

Получила следующий график (см. рис. @fig:001).

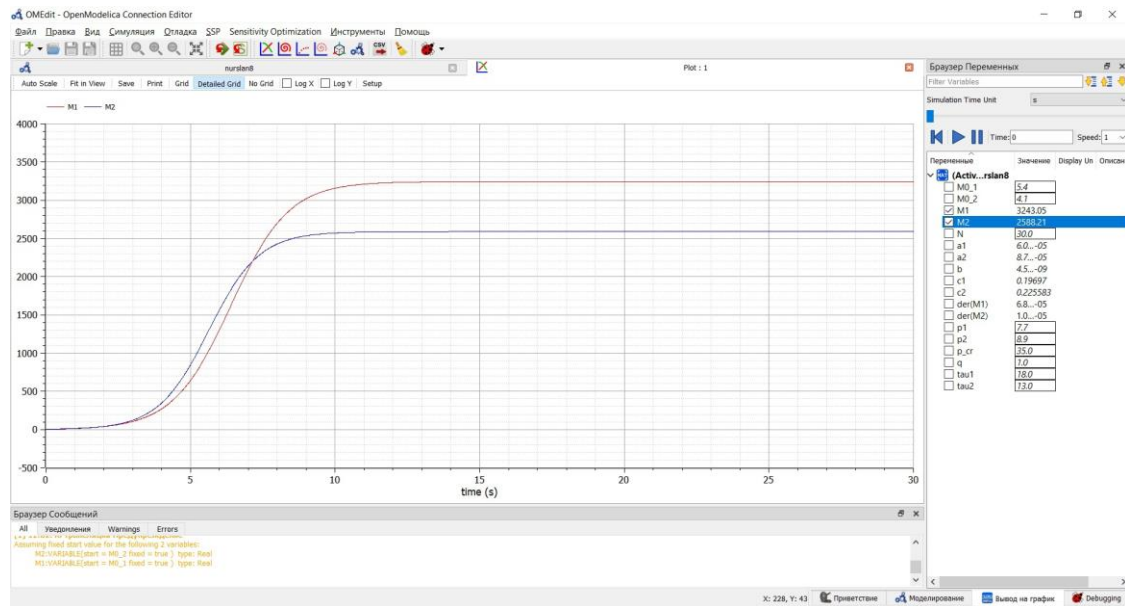


Рис. 1. График для 1 случая

## 2.2 Написала программу на Modelica:

model lab08

```
parameter Real p_cr = 35;
parameter Real tau1 = 18;
parameter Real p1 = 7.7;
parameter Real tau2 = 13;
parameter Real p2 = 0.9;
parameter Real N = 30;
parameter Real q = 1;
```

```
parameter Real a1 = p_cr / (tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr / (tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr / (tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);
```

```
parameter Real M0_1=5.4;
parameter Real M0_2=4.1;
Real M1 (start=M0_1);
Real M2 (start=M0_2);
```

equation

```
der (M1)=M1 - (b/c1)*M1*M2 - (a1/c1)*M1*M1;
der (M2) = (c2/c1)*M2 - (b/c1)*M1*M2 - (a2/c1)*M2*M2;
end lab8;
```

Получила следующий график (см. рис. @fig:002).

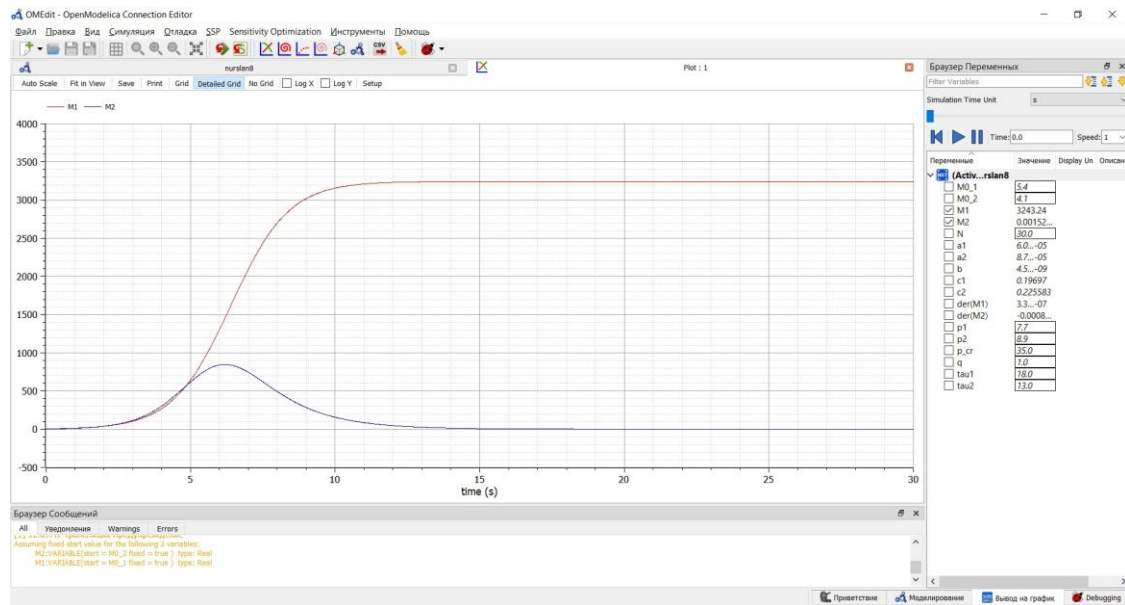


Рис. 2. График для 2 случая

## Выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы я ознакомилась с моделью конкуренции двух фирм для двух случаев, а также построила график распространения рекламы.