Лабораторная работа 6

Модель эпидемии SIR

Саттарова Вита Викторовна

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Построить, используя Julia и OpenModelica, модель эпидемии SIR с заданными параметрами, начальными условиями, построить график, отображающий изменение по времени количества восприимчивых, инфецированных и выздоровевших для двух случаев: когда число инфицированных не превышает критическое значение и больные не заражают восприимчивых и когда число инфицированных превышает критическое значение и больные заражают восприимчивых.

2 Задание

Вариант 66 Задание. (рис. fig. 2.1)

Вариант 66

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N=10\ 098$) в момент начала эпидемии ($t=0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0)=78$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0)=13$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0)=N-I(0)-R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1) если $I(0) \leq I^*$

2) если $I(0) > I^*$

Figure 2.1: Задание

3 Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, то есть, $I(t) \leq I^*$, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$ тогда инфицированные способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

(1) $$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -\alpha S, & I(t) > I^* \\ 0, & I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей $I(t)$ представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

(2) $$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & I(t) > I^* \\ -\beta I, & I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей $R(t)$ (при этом приобретающих иммунитет к болезни)

(3) $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \beta I$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ число особей с иммунитетом к болезни - $R(0)$, число инфицированных - $I(0)$ и число восприимчивых к болезни особей $S(0)$. Для анализа картины протекания эпидемии рассматриваются 2 случая: $I(t) \leq I^*$ - когда число заболевших не превышает критического значения и $I(t) > I^*$ - когда инфицированные способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Более подробно см. в справочнике на сайте ТУИС на странице курса “Математическое моделирование” [1] [@mm:lab6].

4 Выполнение лабораторной работы

1. Написала код задач для модели эпидемии SIR для двух случаев: в случае, когда число заболевших не превышает критического значения - 1, в случае, когда число заболевших превышает критическое значение - 2, и подготовила результаты для представления на Julia. (рис. fig. 4.1)

```julia
using DifferentialEquations
using Plots

N = 10098
I0 = 78
R0 = 13
S0 = N - I0 - R0

a = 0.4
b = 0.2

function F1(du, u, p, t)
    s, i, r = u
    du[1] = 0
    du[2] = -b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end

function F2(du, u, p, t)
    s, i, r = u
    du[1] = -a*u[1]
    du[2] = a*u[1]-b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end


# Задача
prob1 = ODEProblem(F1, [S0, I0, R0], (0.0, 35.0))
prob2 = ODEProblem(F2, [S0, I0, R0], (0.0, 35.0))


# Решение задачи
sol1 = solve(
  prob1,
  dtmax=0.1
  )
sol2 = solve(
  prob2,
  dtmax=0.1
  )

S1 = [u[1] for u in sol1.u]
I1 = [u[2] for u in sol1.u]
R1 = [u[3] for u in sol1.u]

S2 = [u[1] for u in sol2.u]
I2 = [u[2] for u in sol2.u]
R2 = [u[3] for u in sol2.u]
```

Figure 4.1: Задачи и решения Julia

2. Создала график изменения по времени количеств восприимчивых, заражённых и выздоровевших в случае, когда число заболевших не превышает критического значения. (рис. fig. 4.2)

```
plt1 = plot(
  dpi=300,
  title="Число заболевших меньше критического: I(t)<=I*"
  legend=true)

plot!(
  plt1,
  sol1.t,
  S1,
  xlabel="Время",
  ylabel="Особи",
  label="Восприимчивые",
  color=:blue)

plot!(
  plt1,
  sol1.t,
  I1,
  label="Инфецированные",
  color=:red)

plot!(
  plt1,
  sol1.t,
  R1,
  label="Выздоровевшие",
  color=:green)

plt1
```

Figure 4.2: Код график случай 1 Julia

3. Сам график изменения по времени количеств восприимчивых, заражённых и выздоровевших в первом случае. (рис. fig. 4.3)

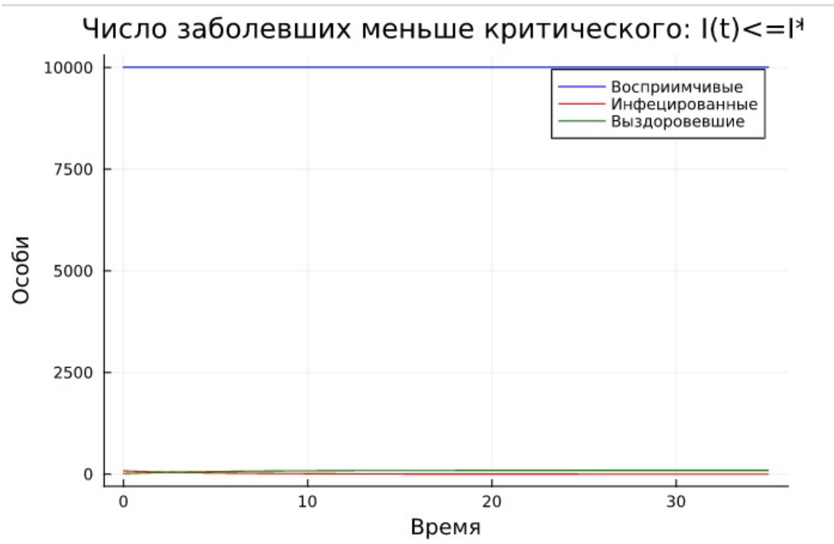

Figure 4.3: График случай 1 Julia

4. Создала график изменения по времени количеств восприимчивых, заражённых и выздоровевших в случае, когда число заболевших превышает критическое значение. (рис. fig. 4.4)

```
plt2 = plot(
  dpi=300,
  title="Число заболевших больше критического: I(t)>I*",
  legend=true)

plot!(
  plt2,
  sol2.t,
  S2,
  xlabel="Время",
  ylabel="Особи",
  label="Восприимчивые",
  color=:blue)

plot!(
  plt2,
  sol2.t,
  I2,
  label="Инфецированные",
  color=:red)

plot!(
  plt2,
  sol2.t,
  R2,
  label="Выздоровевшие",
  color=:green)

plt2
```

Figure 4.4: Код график случай 2 Julia

5. Сам график изменения по времени количеств восприимчивых, заражённых и выздоровевших во втором случае. (рис. fig. 4.5)

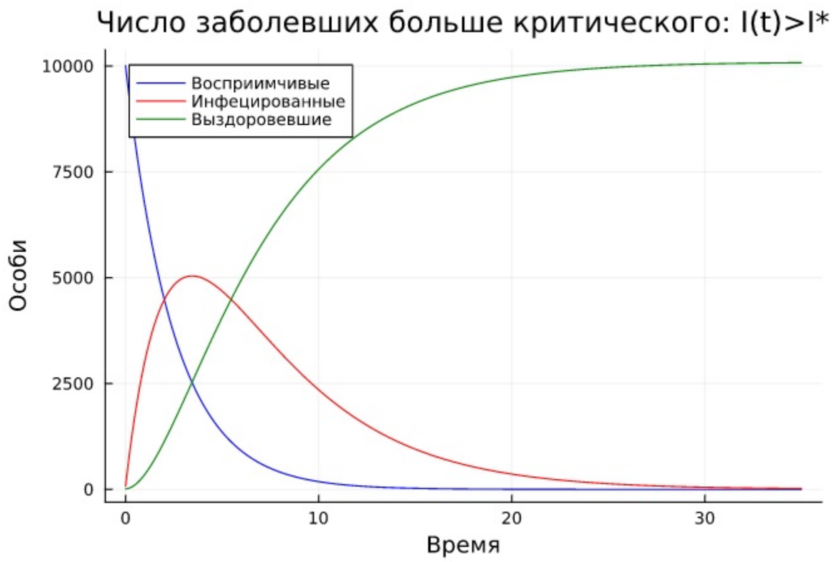

Figure 4.5: График случай 2 Julia

6. Написала код модели эпидемии SIR в случае, когда число заболевших не превышает критического значения на OpenModelica. (рис. fig. 4.6)

```
model lab61
Real s;
Real i;
Real r;
Real N = 10098;
Real a = 0.4;
Real b = 0.2;
initial equation
i = 78;
r = 13;
s = N - i - r;
equation
der(s) = 0;
der(i) = -b*i;
der(r) = b*i;
end lab61;
```

Figure 4.6: Задача модель случай 1 OpenModelica

7. Создала график изменения по времени количеств восприимчивых, заражённых и выздоровевших в первом случае. (рис. fig. 4.7)

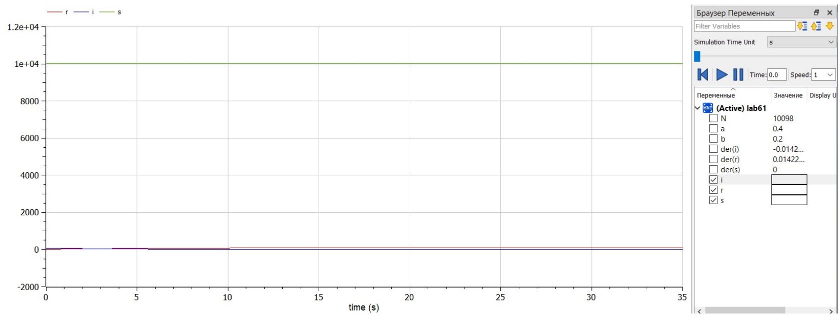

Figure 4.7: График случай 1 OpenModelica

8. Написала код модели эпидемии SIR в случае, когда число заболевших превышает критическое значение на OpenModelica. (рис. fig. 4.8)

```
model lab62
Real s;
Real i;
Real r;
Real N = 10098;
Real a = 0.4;
Real b = 0.2;
initial equation
i = 78;
r = 13;
s = N - i - r;
equation
der(s) = -a*s;
der(i) = a*s-b*i;
der(r) = b*i;
end lab62;
```

Figure 4.8: Задача модель случай 2 OpenModelica

9. Создала график изменения по времени количеств восприимчивых, заражённых и выздоровевших во втором случае. (рис. fig. 4.9)

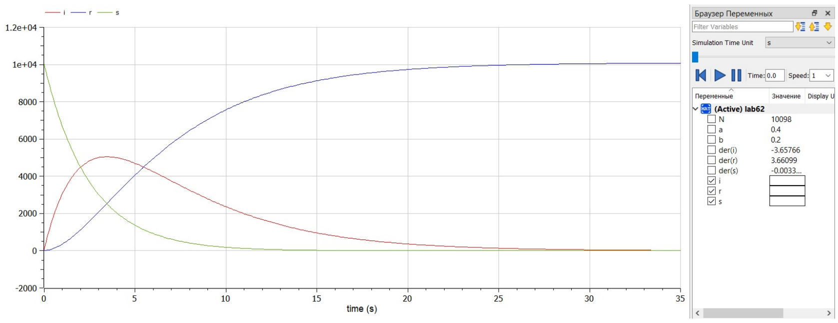

Figure 4.9: График случай 2 OpenModelica

5 Сравнение Julia и OpenModelica

Результаты получились одинаковые, однако на Julia можно было строить одновременно модель в двух разных случаях, в то время как на OpenModelica их необходимо было создавать в отдельных файлах. Также в Julia необходимо было в формате кода задать начальные параметры и создать графики, тогда как на OpenModelica для этого используется графический интерфейс. В связи с этим, код на OpenModelica намного короче, чем на Julia.

6 Выводы

В результате работы удалось на Julia и OpenModelica модель эпидемии SIR с заданными параметрами, начальными условиями, построить график, отображающий изменение по времени количества восприимчивых, инфецированных и выздоровевших для двух случаев: когда число инфицированных не превышает критическое значение и больные не заражают восприимчивых и когда число инфицированных превышает критическое значение и больные заражают восприимчивых. Также в результате работы удалось улучшить навыки решения научных задач на Julia и OpenModelica.

Список литературы

[1] Справочная информация для лабораторной работы 6 в ТУИС на курсе "Математическое моделирование" URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971664/mod_resource/cont