Теплопроводность и детерминированное горение. Этап 2

Групповой проект

Студенты:

Тагиев Б.А. *Чекалова Л.Р.* *Сергеев Т.С.*

Саттарова В.В. *Прокошев Н.Е.* *Тарусов А.С.*

Группа: НФИбд-02-20

2023

Явная разностная схема

Одномерное уравнение теплопроводности без химических реакций

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Заменим частные производные на разностные

Соотношение, связывающее температуру в узле на новом шаге по времени с температурой в узлах текущего временного слоя

$$\frac{\hat{T}_i - T_i}{\Delta t} = \frac{\frac{T_{i+1} - T_i}{h} - \frac{T_i - T_{i-1}}{h}}{h} = \chi \frac{(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1})}{h^2}$$

$$\Delta N_i = -\frac{N_i}{\tau} e^{-\frac{E}{T_i}} \Delta t,$$

$$\hat{T}_i = T_i + \frac{\chi \Delta t}{h^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) - \Delta N_i,$$

$$\hat{N}_i = N_i - \Delta N_i, \text{где } i = 1,2,\ldots,n.$$

Добавим **изменение безразмерной температуры за счет энерговыделения** в химических реакциях за шаг по времени

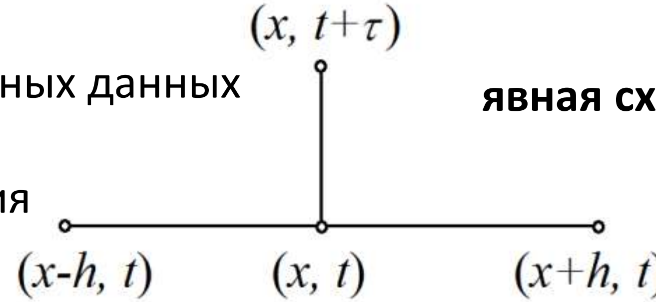
Разностные схемы: явная и неявная

Виды схем	Явная разностная схема	Неявная разностная схема
Описание	Есть уравнение, есть 1 неизвестная, по уравнению можно найти неизвестную	Есть уравнение с 3 связанными неизвестными и некоторыми известными значениями
Преимущества и недостатки		
Количество неизвестных	+ 1 неизвестная в уравнении	- Несколько неизвестных в уравнении
Порядок аппроксимации	- низкий порядок аппроксимации по времени	+ более высокий порядок аппроксимации по времени
Устойчивость	- устойчива, при ограничении на шаг аппроксимации	+ всегда устойчива, нет ограничений на шаг аппроксимации

Разностная аппроксимация второй производной:

$$(\delta^2 T)_i = T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}$$

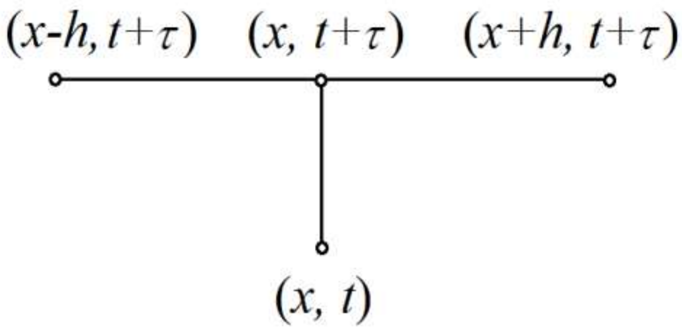
<u>Устойчивость</u>: малые возмущения x в начальных данных и правой части разностной схемы приводят к равномерно малому по t изменению решения



явная схема

$$\frac{\hat{T}_i - T_i}{\Delta t} = \chi \frac{(\delta^2 T)_i}{h^2} \quad \varepsilon = O[\Delta t] + O[h^2]$$

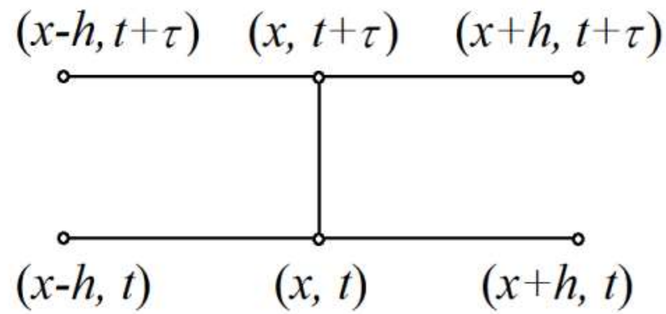
устойчива, если $\chi \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$



$$\frac{\hat{T}_i - T_i}{\Delta t} = \chi \frac{(\delta^2 \hat{T})_i}{h^2} \quad \varepsilon = O[\Delta t] + O[h^2]$$

неявная схема, всегда устойчива

неявная схема



$$\frac{\hat{T}_i - T_i}{\Delta t} = \chi \frac{(\delta^2 T)_i + (\delta^2 \hat{T})_i}{2h^2} \quad \varepsilon = O[(\Delta t)^2] + O[h^2]$$

неявная схема Кранка-Николсон, всегда устойчива

Система уравнений

1. $\frac{\hat{T}_i - T_i}{\Delta t} = \chi \frac{(\delta^2 T)_i + (\delta^2 \hat{T})_i}{2h^2}$

2. $\frac{\hat{T}_i}{\Delta t} - \frac{T_i}{\Delta t} = \frac{\chi(T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1})}{2h^2} + \frac{\chi(\hat{T}_{i-1} - 2\hat{T}_i + \hat{T}_{i+1})}{2h^2}$ $\Bigg|$ $: \chi$ $*2h^2$

3. $\frac{2h^2 \hat{T}_i}{\chi \Delta t} - \frac{2h^2 T_i}{\chi \Delta t} = (T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}) + (\hat{T}_{i-1} - 2\hat{T}_i + \hat{T}_{i+1})$

4. $0 = \left(\hat{T}_{i-1} - \left(2 + \frac{2h^2}{\chi \Delta t}\right)\hat{T}_i + \hat{T}_{i+1}\right) + (T_{i-1} - (2 - \frac{2h^2}{\chi \Delta t})T_i + T_{i+1})$

$$\boxed{\hat{T}_{i-1} - \left(2 + \frac{2h^2}{\chi \Delta t}\right)\hat{T}_i + \underset{\text{где } i = 1, 2, \dots, n}{\hat{T}_{i+1} = -T_{i-1}} + \left(2 - \frac{2h^2}{\chi \Delta t}\right)T_i - T_{i+1}}$$

Система *n* уравнений относительно *n* + 2 неизвестных $\hat{T}_i$ на новом временном слое

Недостающие $\hat{T}_0$ и $\hat{T}_{n+1}$ выбираются в соответствии с граничными условиями

Метод прогонки

Метод прогонки – алгоритм для диагональных систем, в которых ненулевые элементы расположены на главной и соседних диагоналях

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \text{где } i = 1,2,\dots,n;\ a_1 = c_n = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{b}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{c}_1\mathrm{x}_2 = \mathrm{d}_1 \tag{2}$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \tag{3}$$

$$x_1 = \frac{d_1 - c_1 x_2}{b_1} = A_2 x_2 + B_2 \tag{4}$$

$$\mathrm{A}_2 = -\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{b}_1}, \mathrm{B}_2 = \frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{b}_1} \tag{5}$$

$$a(A_i x_i + B_i) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \tag{6}$$

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i A_i + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i B_i}{a_i A_i + b_i} \tag{7}$$

$$x_i = A_{i+1} x_{i+1} + B_{i+1}, i = n, n-1, \dots, 1 \tag{8}$$

$$A_{i+1} = -\frac{c_i}{b_i - a_i A_i}, B_{i+1} = \frac{d_i - a_i B_i}{b_i - a_i A_i} \tag{9}$$