Лабораторная работа 5

Модель хищник - жертва

Саттарова Вита Викторовна

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Построить, используя Julia и OpenModelica, модель хищник-жертва (модель Лотки-Вольтерры) с заданными параметрами, начальными условиями и найти стационарное состояние системы, построить графики: зависимости численности хищников от численности жертв, изменения популяции хищников и популяции жертв при заданных начальных условиях, - а также, найдя стационарное состояние системы, показать с помощью графика отсутствие изменений в популяциях хищников и жертв в стационарном состоянии.

2 Задание

Вариант 66 Задание. (рис. fig. 2.1)

Вариант 66

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.51x(t) + 0.046x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.41y(t) - 0.036x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 6,\ y_0 = 22$. Найдите стационарное состояние системы.

Figure 2.1: Задание

3 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник - жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв и хищников зависят только от времени.
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.
3. Естественные смертность жертвы и рождаемость хищника считаются несущественными.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

Уравнение изменения численности жертв имеет следующий вид:

(1) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax(t) - bx(t)y(t).$

Уравнение изменения численности хищников имеет следующий вид:

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cy(t) + dx(t)y(t).$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв - $-bxy$, но способствует увеличению популяции хищников dxy в правой части уравнения.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние. Стационарное состояние системы из уравнений (1) и (2) - положение равновесия, не зависящее от времени решение, будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Более подробно см. в справочнике на сайте ТУИС на странице курса “Математическое моделирование” [1] [@mm:lab5].

4 Выполнение лабораторной работы

1. Написала код задач для модели с заданными начальными условиями - 1, для вычисления стационарного состояния модели - 2, и подготовила результаты для представления на Julia. (рис. fig. 4.1)

```julia
using DifferentialEquations
using Plots

xx = 6
yy = 22

a = 0.51
b = 0.046
c = 0.41
d = 0.036

xxx = c / d
yyy = a / b

function F(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b*u[1]*u[2]
    du[2] = c*u[2] - d*u[1]*u[2]
end

# Задача
prob1 = ODEProblem(F, [xx, yy], (0.0, 40.0))
prob2 = ODEProblem(F, [xxx, yyy], (0.0, 40.0))


# Решение задачи
sol1 = solve(
  prob1,
  dtmax=0.1
  )
sol2 = solve(
  prob2,
  dtmax=0.1
  )

X1 = [u[1] for u in sol1.u]
Y1 = [u[2] for u in sol1.u]

X2 = [u[1] for u in sol2.u]
Y2 = [u[2] for u in sol2.u]
```

Figure 4.1: Задачи и решения Julia

1. Создала график зависимости численности хищников от численности жертв

для модели с заданными начальными условиями. (рис. fig. 4.2)

```
plt11 = plot(
  dpi=300,
  title="Зависимость числа хищников от числа жертв",
  legend=true)

plot!(
  plt11,
  X1,
  Y1,
  xlabel="Жертвы",
  ylabel="Хищники",
  label="Y(x)",
  color=:red)

plt11
```

Figure 4.2: Код график начальные условия y(x) Julia

1. Сам график зависимости численности хищников от численности жертв для модели с заданными начальными условиями. (рис. fig. 4.3)

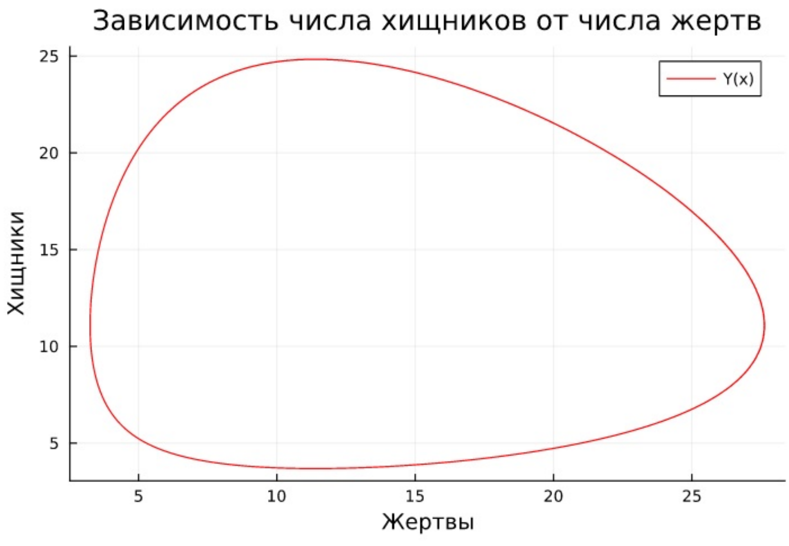


Figure 4.3: График начальные условия y(x) Julia

1. Создала график изменения популяций жертв и хищников по времени для модели с заданными начальными условиями. (рис. fig. 4.4)

```
plt12 = plot(
  dpi=300,
  title="Изменение численности хищников и жертв",
  legend=true)

plot!(
  plt12,
  sol1.t,
  X1,
  xlabel="Время",
  ylabel="Популяции",
  label="Изменение численности жертв",
  color=:blue)

plot!(
  plt12,
  sol1.t,
  Y1,
  label="Изменение численности хищников",
  color=:green)

plt12
```

Figure 4.4: Код график начальные условия x(t) y(t) Julia

1. Сам график изменения популяций жертв и хищников по времени для модели с заданными начальными условиями. (рис. fig. 4.5)

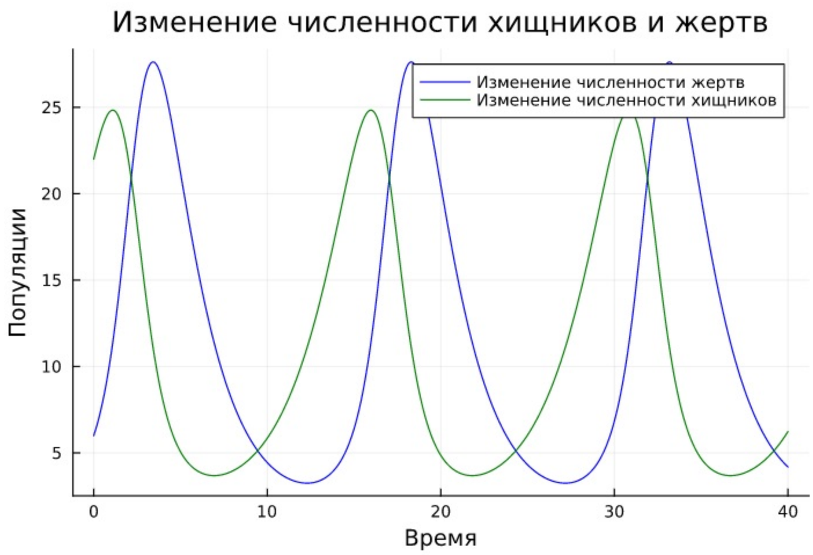


Figure 4.5: График начальные условия x(t) y(t) Julia

1. Создала график, показывающий отсутствие изменения численности популяций жертв и хищников в стационарном состоянии системы. (рис. fig. 4.6)

```
plt21 = plot(
  dpi=300,
  title="Изменение численности хищников и жертв",
  legend=true)

plot!(
  plt21,
  sol2.t,
  X2,
  xlabel="Время",
  ylabel="Популяции",
  label="Изменение численности жертв",
  color=:blue)

plot!(
  plt21,
  sol2.t,
  Y2,
  label="Изменение численности хищников",
  color=:green)

plt21
```

Figure 4.6: Код график стационарное состояние x(t) y(t) Julia

1. Сам график, показывающий отсутствие изменения численности популяций жертв и хищников в стационарном состоянии системы. (рис. fig. 4.7)

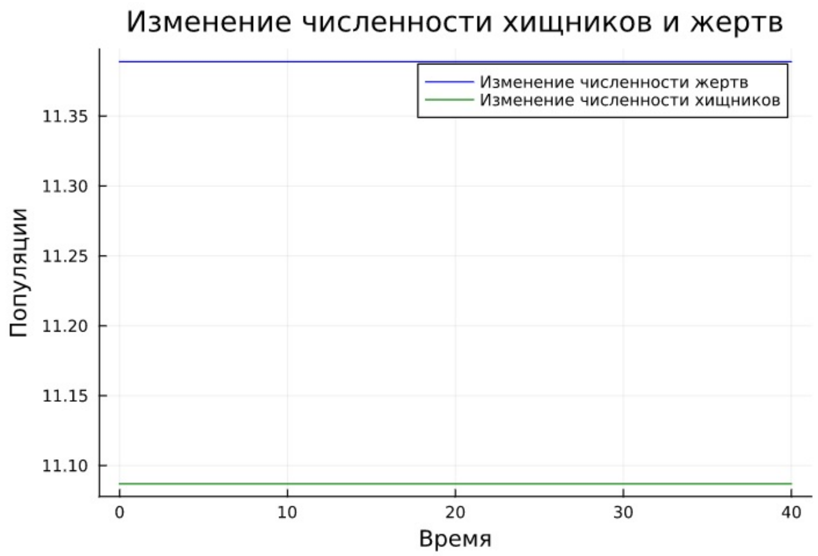
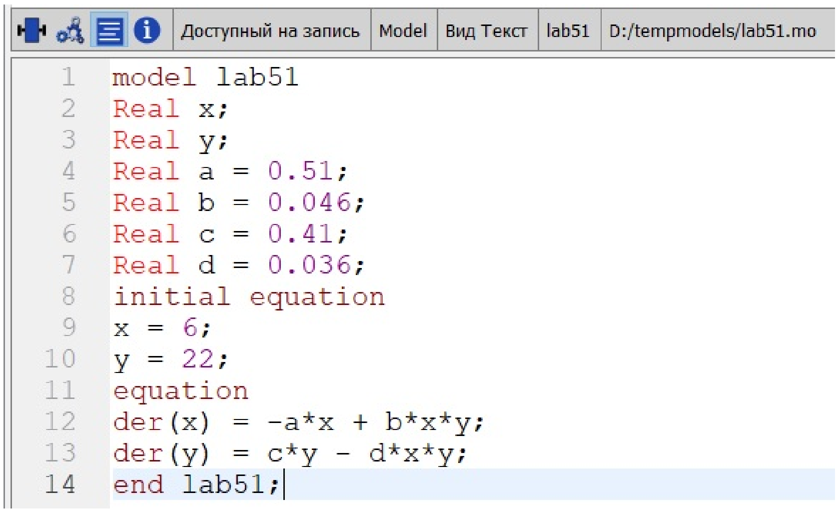


Figure 4.7: График стационарное состояние x(t) y(t) Julia

1. Написала код модели с заданными начальными условиями на OpenModelica. (рис. fig. 4.8)




```
model lab51
Real x;
Real y;
Real a = 0.51;
Real b = 0.046;
Real c = 0.41;
Real d = 0.036;
initial equation
x = 6;
y = 22;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab51;
```

Figure 4.8: Задача модель начальные условия OpenModelica

1. Создала график изменения популяций жертв и хищников по времени для модели с заданными начальными условиями. (рис. fig. 4.9)

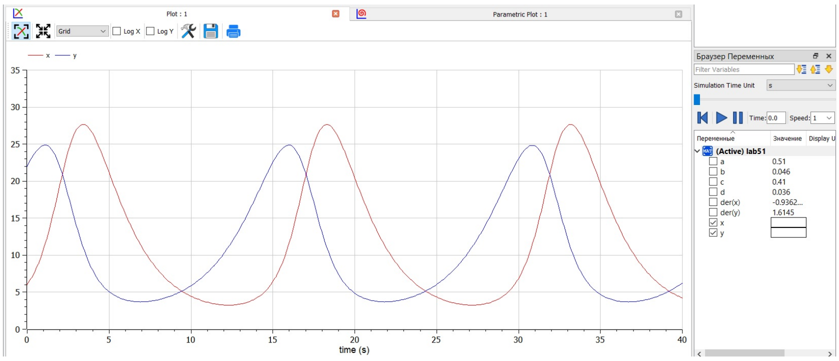


Figure 4.9: График начальные условия x(t) y(t) OpenModelica

1. Создала график зависимости численности хищников от численности жертв для модели с заданными начальными условиями. (рис. fig. 4.10)

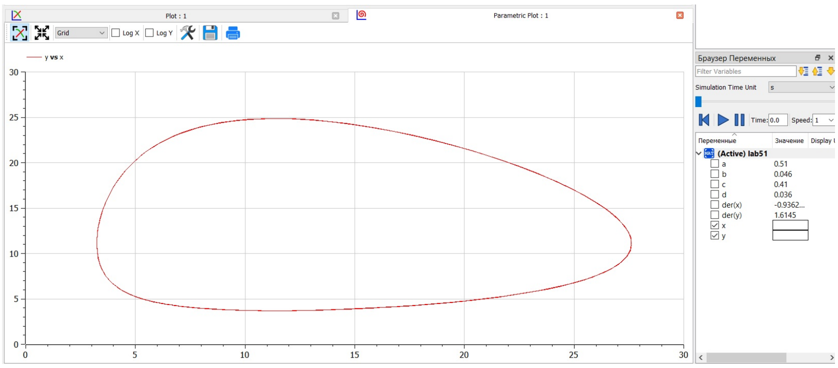


Figure 4.10: График начальные условия y(x) OpenModelica

1. Написала код модели в стационарном состоянии на OpenModelica. (рис. fig. 4.11)

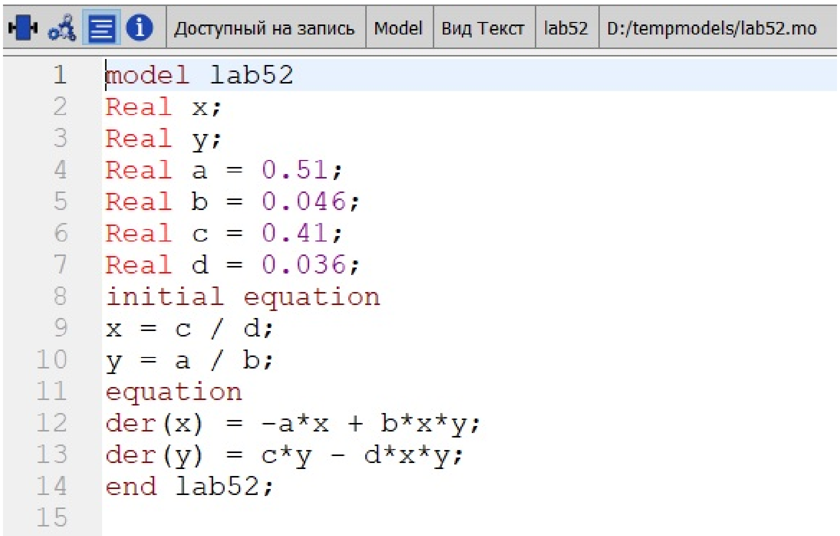


Figure 4.11: Задача модель стационарное состояние OpenModelica

1. Создала график, показывающий отсутствие изменения численности популяций жертв и хищников в стационарном состоянии системы. (рис. fig. 4.12)

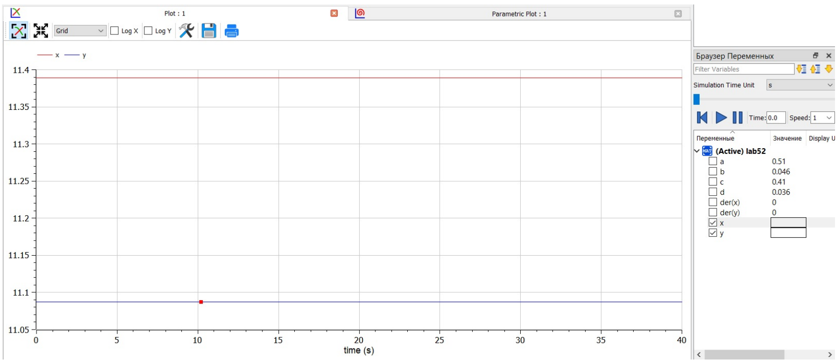


Figure 4.12: График стационарное состояние x(t) y(t) OpenModelica

5 Сравнение Julia и OpenModelica

Результаты получились одинаковые, однако на Julia можно было строить одновременно модель с разными начальными условиями, в то время как на OpenModelica их необходимо было создавать в отдельных файлах. Также в Julia необходимо было в формате кода задать начальные параметры и создать графики, тогда как на OpenModelica для этого используется графический интерфейс. В связи с этим, код на OpenModelica намного короче, чем на Julia.

6 Выводы

В результате работы удалось на Julia и OpenModelica:

1. создать модель хищник-жертва (модель Лотки-Вольтерры) с заданными параметрами и начальными условиями;
2. найти стационарное состояние системы;
3. построить графики: зависимости численности хищников от численности жертв, изменения популяции хищников и популяции жертв при заданных начальных условиях;
4. показать с помощью графика отсутствие изменений в популяциях хищников и жертв в стационарном состоянии.

Список литературы

[1] Справочная информация для лабораторной работы 5 в ТУИС на курсе "Математическое моделирование" URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971660/mod_resource/cont