某课程作业集

张三
究物理 01, 31415926

Autumn 2025

目录

作业集一　文档特性 1
作业一 文档标题格式 2
作业 1.1 作业集 2
作业 1.2 作业 2
作业二 习题和解答格式 3
作业三 其它特性 4
作业 3.1 作业独立编号 4
作业 3.2 页码 4
作业 3.3 d'Alembert 算符 4

作业集二　示例 5
作业四 Maxwell 方程组 6
作业五 应用 Maxwell 方程组 8
作业 5.1 电磁场用势函数表示 8
作业 5.2 介质中的 Maxwell 方程组 9
作业六 镜像法 11

作业集三　后记 12
作业七 文档说明 13

作业集一　文档特性

作业一　文档标题格式

姓名： 张三　**班级：** 究物理 01　**学号：** 31415926

作业 1.1　作业集

调用 *chapter* 命令，可以生成大章标题，它被命名为“作业集”，以汉字数字作为序号。

作业 1.2　作业

可以调用 *assignment* 命令生成作业文档的标题，它相当于 *section*.

然而，为了方便逐次作业提交，这一级别的标题下还缀有个人信息栏。如你所见，信息栏中包含姓名、班级和学号，可以在前文当中编辑，通用于整个文档中所有的作业。

```
 %个人信息设置
\newcommand{\studentname}{张三}  % 姓名
\newcommand{\studentclass}{究物理01}  % 班级
\newcommand{\studentid}{31415926}  %学号

 %设置编号格式
\counterwithout{section}{chapter}
\renewcommand{\thesection}{作业\chinese{section}}
\titleformat{\section}
  {\centering\zihao{3}\bfseries}
  {\thesection}  % 显示“作业一”
  {1em}
  {}
```

同时，新一节的作业会自动转到下一页开始。

另外，你还可以使用 *subsection* 命令生成子节，用于标示同一次作业当中不同的部分。

作业二　习题和解答格式

姓 名: 张 三　**班 级:** 究 物 理 01　**学 号:** 31415926

可以使用 *problem* 环境书写题目，并使用 *solution* 环境进入解答格式。

习题 1　这是一道习题!

解. 以下是这一部分的代码:

```
  %problem
\newcounter{problem}[subsection]
\renewcommand{\theproblem}{\arabic{problem}}

\newmdenv[
  backgroundcolor=gray!10,
  linewidth=0pt,
  skipabove=12pt,
  skipbelow=12pt,
  innertopmargin=10pt,
  innerbottommargin=10pt,
  innerleftmargin=15pt,
  innerrightmargin=15pt,
  roundcorner=0pt
]{problembox}


\newenvironment{problem}[1][]{
  \stepcounter{problem}
  \begin{problembox}
  \textbf{习题 \theproblem \ \ \kaishu}
  \ifx\\#1\\\relax\else\quad (#1)\fi
}{
  \end{problembox}
}

  %solution
\newtheorem*{solution}{\heiti 解}
```

如你所见，在解答格式当中，字体被设置为 *kaishu* 楷体。
另外，习题编号是绑定到 *subsection* 的。

作业三　其它特性

姓 名: 张 三　**班 级:** 究 物 理 01　**学 号:** 31415926

作业 3.1　作业独立编号

作业的编号与作业集无关，因此你可以根据需要划分作业集而不用担心影响作业的序号。

作业 3.2　页码

本文档在目录处采用大写阿拉伯数字作页码，在正文部分则采用阿拉伯数字页码，正文页码从第一个 $chapter$ 所处页开始计数。

作业 3.3　d'Alembert 算符

本文档还特别含有了 d'Alembert 算符，它的数学定义为

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

如今，你可以使用 $\backslash dalembert$ 命令来调用它。

作业集二　示例

作业四 Maxwell 方程组

姓 名: 张 三 **班 级:** 究 物 理 01 **学 号:** 31415926

本节是一般格式的示例

习题 1 分析一块正在充电的圆形（半径为 R）平行板电容器周围的磁场分布。

解. 由

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{4.1}$$

得

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} \tag{4.2}$$

故

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 R \frac{dE}{dt} \tag{4.3}$$

习题 2 如果磁单极存在，如何改写真空中的 Maxwell 方程组?

解.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.4a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m \tag{4.4b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J_m} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.4c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4.4d}$$

习题 3 由真空中的 Maxwell 方程组推导电荷守恒定律。

解. 由

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4.5}$$

得

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \tag{4.6}$$

又

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.7}$$

故

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{4.8}$$

得证。

习题 4 由真空中的 Maxwell 方程组研究电磁场运动方程的波动性。

解. 对于电场，由

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.9}$$

得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \tag{4.10}$$

考虑到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \tag{4.11}$$

有

$$\nabla(\frac{\rho}{\varepsilon_0}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})}{\partial t} \tag{4.12}$$

即

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\frac{\rho}{\varepsilon_0}) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \tag{4.13}$$

对于行进的电磁波，如光，取 $\rho = 0$，$\mathbf{J} = 0$，故

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.14}$$

正是波动方程。磁场同理，有

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.15}$$

作业五 应用 Maxwell 方程组

姓名: 张三 **班级:** 究物理 01 **学号:** 31415926

本节是带有子节的格式的示例

作业 5.1 电磁场用势函数表示

习题 1 试证明：一定可以找到一组满足洛伦兹规范条件的 $\vec{A}$ 和 φ，并且即使满足洛伦兹规范条件，$\vec{A}$ 和 φ 仍不是唯一的。

解. 原势

$$\varphi(\vec{r},t), \quad \vec{A}(\vec{r},t), \tag{5.1}$$

做规范变换

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\lambda}{\partial t}, \\ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \end{cases} \tag{5.2}$$

洛仑兹规范条件

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A}' = 0 \tag{5.3}$$

代入上式可得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A} + \Big(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\Big)\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} = -\Big(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A}\Big), \tag{5.4}$$

如令

$$f = (\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A}) \tag{5.5}$$

则构成一个 *d'Alembert* 方程，总是有解。因此总能找到一个 φ 对应一组 $\vec{A}$ 和 φ，满足洛伦兹规范。若再对已满足洛仑兹规范的势做一次规范变换，有如 *(4.2)*，则

$$\nabla\cdot\vec{A} + \nabla^2\lambda + \frac{1}{c^2}(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}) = 0 \tag{5.6}$$

考虑到势已经满足洛伦兹变换，故

$$\nabla^2\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} = 0 \tag{5.7}$$

仍是 *d'Alembert* 方程，有非零解。得证。

习题 2 在静电、静磁情况下，如何用势函数表示相应的电场和磁场？它们满足的场方程分别是什么？

解.

***(1)* 静电场** 对于静止电荷分布 $\rho(\vec{r})$，电场 $\vec{E}$ 满足

$$\nabla\times\vec{E} = \vec{0}, \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{5.8}$$

由于旋度为零，可引入电势 $\varphi(\vec{r})$，使

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \tag{5.9}$$

由此，得

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{5.10}$$

***(2)* 静磁场** 对于稳恒电流分布 $\vec{J}(\vec{r})$，磁场 $\vec{B}$ 满足

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} \tag{5.11}$$

由于散度为零，可引入矢势 $\vec{A}(\vec{r})$，使

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \tag{5.12}$$

由此，得

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu_0\,\vec{J} \quad\Longrightarrow\quad \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\,\vec{J} \tag{5.13}$$

选取库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A} = 0$，则简化为

$$\nabla^2\vec{A} = -\,\mu_0\,\vec{J} \tag{5.14}$$

作业 5.2　介质中的 Maxwell 方程组

习题 1　由 Maxwell 方程组出发，在均匀介质（电导率 σ，介电常数 ε）内，求：

(1) 自由电荷体密度 ρ_f 与时间 t 的关系；

(2) 极化电荷体密度 ρ_p 与自由电荷体密度 ρ_f 的关系。

解.

(1) 由于

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}_f = 0\,, \qquad \mathbf{J}_f = \sigma\,\mathbf{E}, \tag{5.15}$$

且在均匀线性介质中，

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \tag{5.16}$$

故

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \nabla\cdot(\sigma\,\mathbf{E}) = \frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \sigma\,\frac{\rho_f}{\varepsilon} = 0 \tag{5.17}$$

即

$$\rho_f(t) = \rho_f(0)\,\exp\!\Big(-\frac{\sigma}{\varepsilon}\,t\Big) \tag{5.18}$$

(2)

$$\rho_p = -\,\nabla\cdot\mathbf{P}, \tag{5.19}$$

而

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\,\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon\,\mathbf{E}, \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f \tag{5.20}$$

故

$$\mathbf{P} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\,\mathbf{E} \quad\Longrightarrow\quad \rho_p = -\,(\varepsilon-\varepsilon_0)\,\nabla\cdot\mathbf{E} = -\,(\varepsilon-\varepsilon_0)\,\frac{\rho_f}{\varepsilon} = -\Big(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\Big)\,\rho_f \tag{5.21}$$

习题 2 电流稳定地流过两个导电介质的交界面，已知介质 1 的电导率和介电常数分别为 σ_1, ε_1，介质 2 的电导率和介电常数分别为 σ_2, ε_2。交界面处介质 1 和介质 2 的电流密度分别为 $\mathbf{j}_1$ 和 $\mathbf{j}_2$。试求交界面上的自由电荷面密度 σ_f

解. 由边界条件，

$$\sigma_f = D_{1n} - D_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \ - \ \varepsilon_2 E_{2n} \tag{5.22}$$

如题，两介质中

$$j_1 = \sigma_1 E_{1n}, \qquad j_2 = \sigma_2 E_{2n}, \tag{5.23}$$

从而

$$E_{1n} = \frac{j_1}{\sigma_1}, \qquad E_{2n} = \frac{j_2}{\sigma_2} \tag{5.24}$$

故

$$\sigma_f = \varepsilon_1 \frac{j_1}{\sigma_1} \ - \ \varepsilon_2 \frac{j_2}{\sigma_2} \tag{5.25}$$

习题 3 证明：当两种绝缘介质的界面上不带面自由电荷时，界面上电场线的折射满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别为两介质的介电常数，θ_1, θ_2 分别为界面两侧电场线与法线的夹角。

解. 由题，

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \tag{5.26}$$

而

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{5.27}$$

折射角 θ_i $(i = 1, 2)$ 满足

$$\tan\theta_i = \frac{E_{it}}{E_{in}} \tag{5.28}$$

故

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} = \frac{E_{2t}/E_{2n}}{E_{1t}/E_{1n}} = \frac{E_{1t}}{E_{2t}} \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \tag{5.29}$$

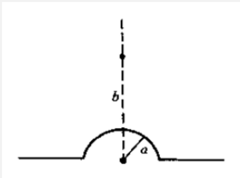
得证。

作业六　镜像法

姓名: 张三　**班级:** 究物理 01　**学号:** 31415926

本节是带有图片的格式的示例

习题 1　如图所示，一无穷大导体平面上有一半径为 a 的半球形鼓包，这导体不带电。现将一电荷量为 q 的点电荷放在鼓包的正上方离球心为 $b\ (>a)$ 处，这时导体电势为零。试用镜像法求空间电势。



解. 以球心为坐标原点建立右手系，图中平面取为 yz 平面，z 轴正方向为竖直向上，则定解条件

$$\nabla^2\varphi = -q\delta(x, y, z-b)/\varepsilon_0 \tag{6.1}$$

记空间点与原点的距离为 R. 考虑到导体表面电势为零，无限远处电势为零，使用镜像法，设置如下像电荷：

位置	电荷
$z=-b$	$-q$
$z=a^2/b$	$-qa/b$
$z=-a^2/b$	$+qa/b$

于是导体外的空间点处电势

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[&\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}} \\ &+ \frac{-qa/b}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a^2/b)^2}} + \frac{qa/b}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a^2/b)^2}}]\end{aligned} \tag{6.2}$$

作业集三　后记

作业七　文档说明

姓 名： 张 三　**班 级：** 究 物 理 01　**学 号：** 31415926

感谢您使用该模板！欢迎关注我的微信公众号**我辈都能究物理**

如您在使用过程中有意见或建议，敬请通过该公众号与我联系。
祝学业顺利！