

某课程作业集

张三

究物理 01, 31415926

Autumn 2025

目录

作业集一 文档特性	1
作业一 文档标题格式	2
作业 1.1 作业集	2
作业 1.2 作业	2
作业二 习题和解答格式	3
作业三 其它特性	4
作业 3.1 作业独立编号	4
作业 3.2 页码	4
作业 3.3 d'Alembert 算符	4
作业集二 示例	5
作业四 Maxwell 方程组	6
作业五 应用 Maxwell 方程组	8
作业 5.1 电磁场用势函数表示	8
作业 5.2 介质中的 Maxwell 方程组	9
作业六 镜像法	11
作业集三 后记	12
作业七 文档说明	13

作业集一 文档特性

作业一 文档标题格式

姓名：张三 班级：究物理 01 学号：31415926

作业 1.1 作业集

调用 `\chapter` 命令，可以生成大章标题，它被命名为“作业集”，以汉字数字作为序号。

作业 1.2 作业

可以调用 `\assignment` 命令生成作业文档的标题，它相当于 `\section`。

然而，为了方便逐次作业提交，这一级别的标题下还级有个人信息栏。如你所见，信息栏中包含姓名、班级和学号，可以在文首编辑，通用于整个文档中所有的作业。此外，文首还可以编辑课程信息和季节、年份信息。

```
%个人信息设置
\newcommand{\studentname}[1]{\def\@studentname{#1}} % 姓名
\newcommand{\studentclass}[1]{\def\@studentclass{#1}} % 班级
\newcommand{\studentid}[1]{\def\@studentid{#1}} %学号
%—————
\newcommand{\course}[1]{\def\@course{#1}} %课程
\newcommand{\season}[1]{\def\@season{#1}} %季节
\newcommand{\years}[1]{\def\@years{#1}} %年份
% 设置编号格式
\counterwithout{section}{chapter}
\renewcommand{\thesection}{作业\chinese{section}}
\titleformat{\section}
{\centering\zihao{3}\bfseries}
{\thesection} % 显示 “作业一”
{1em}
{}
```

同时，新一节的作业会自动转到下一页开始。

另外，你还可以使用 `\subsection` 命令生成子节，用于标示同一次作业当中不同的部分。

作业二 习题和解答格式

姓名：张三 班级：究物理 01 学号：31415926

可以使用 *problem* 环境书写题目，并使用 *solution* 环境进入解答格式。

习题 1 这是一道习题！

解. 依旧代码格式：

```
%problem
\newcounter{problem}[subsection]
\renewcommand{\theproblem}{\arabic{problem}}

\newmdenv[
  backgroundcolor=gray!10,
  linewidth=0pt,
  skipabove=12pt,
  skipbelow=12pt,
  innertopmargin=10pt,
  innerbottommargin=10pt,
  innerleftmargin=15pt,
  innerrightmargin=15pt,
  roundcorner=0pt
]{problembox}

\newenvironment{problem}[1][]{
  \stepcounter{problem}
  \begin{problembox}
  \textbf{习题 \theproblem} \quad \kaishu
  \ifx|#1||\relax\else\quad (#1)\fi
}{}
\end{problembox}
}

%solution
\newtheorem*{solution}{\heiti 解}
```

如你所见，在解答格式当中，字体被设置为 `\kaishu` 楷体。

另外，习题编号是绑定到 *subsection* 的。

作业三 其它特性

姓名：张三 班级：究物理 01 学号：31415926

作业 3.1 作业独立编号

作业的编号与作业集无关，因此你可以根据需要划分作业集而不用担心影响作业的序号。

作业 3.2 页码

本文档在目录处采用大写罗马数字作页码，在正文部分则采用阿拉伯数字页码，正文页码从第一个 *chapter* 所处页开始计数。

作业 3.3 d'Alembert 算符

本文档还特别含有了 d'Alembert 算符，它的数学定义为

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

如今，你可以使用 `\dalembert` 命令来调用它。

作业集二 示例

作业四 Maxwell 方程组

姓名: 张三 班级: 究物理 01 学号: 31415926

本节是一般格式的示例

习题 1 分析一块正在充电的圆形（半径为 R ）平行板电容器周围的磁场分布。

解. 由

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (4.1)$$

得

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} \quad (4.2)$$

故

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 R \frac{dE}{dt} \quad (4.3)$$

习题 2 如果磁单极存在，如何改写真空中的 Maxwell 方程组？

解.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m \quad (4.4b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.4c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.4d)$$

习题 3 由真空中的 Maxwell 方程组推导电荷守恒定律。

解. 由

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.5)$$

得

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (4.6)$$

又

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.7)$$

故

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.8)$$

得证。

习题 4 由真空中的 Maxwell 方程组研究电磁场运动方程的波动性。

解. 对于电场, 由

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.9)$$

得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \quad (4.10)$$

考虑到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (4.11)$$

有

$$\nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})}{\partial t} \quad (4.12)$$

即

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (4.13)$$

对于行进的电磁波, 如光, 取 $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, 故

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.14)$$

正是波动方程。磁场同理, 有

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.15)$$

作业五 应用 Maxwell 方程组

姓名: 张三 班级: 究物理 01 学号: 31415926

本节是带有子节的格式的示例

作业 5.1 电磁场用势函数表示

习题 1 试证明: 一定可以找到一组满足洛伦兹规范条件的 \vec{A} 和 φ , 并且即使满足洛伦兹规范条件, \vec{A} 和 φ 仍不是唯一的。

解. 原势

$$\varphi(\vec{r}, t), \quad \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (5.1)$$

做规范变换

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \\ \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda \end{cases} \quad (5.2)$$

洛伦兹规范条件

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}' = 0 \quad (5.3)$$

代入上式可得

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} + \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \lambda = 0 \implies \nabla^2 \lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = - \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \right), \quad (5.4)$$

如令

$$f = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \right) \quad (5.5)$$

则构成一个 *d'Alembert* 方程, 总是有解。因此总能找到一个 φ 对应一组 \vec{A} 和 φ , 满足洛伦兹规范。若再对已满足洛伦兹规范的势做一次规范变换, 有如 (4.2), 则

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \lambda + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (5.6)$$

考虑到势已经满足洛伦兹变换, 故

$$\nabla^2 \lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (5.7)$$

仍是 *d'Alembert* 方程, 有非零解。得证。

习题 2 在静电、静磁情况下, 如何用势函数表示相应的电场和磁场? 它们满足的场方程分别是什么?

解.

(1) **静电场** 对于静止电荷分布 $\rho(\vec{r})$, 电场 \vec{E} 满足

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (5.8)$$

由于旋度为零, 可引入电势 $\varphi(\vec{r})$, 使

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (5.9)$$

由此, 得

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (5.10)$$

(2) **静磁场** 对于稳恒电流分布 $\vec{J}(\vec{r})$, 磁场 \vec{B} 满足

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.11)$$

由于散度为零, 可引入矢势 $\vec{A}(\vec{r})$, 使

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.12)$$

由此, 得

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \implies \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.13)$$

选取库仑规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, 则简化为

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (5.14)$$

作业 5.2 介质中的 Maxwell 方程组

习题 1 由 Maxwell 方程组出发, 在均匀介质 (电导率 σ , 介电常数 ε) 内, 求:

- (1) 自由电荷体密度 ρ_f 与时间 t 的关系;
- (2) 极化电荷体密度 ρ_p 与自由电荷体密度 ρ_f 的关系。

解.

(1) 由于

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0, \quad \mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}, \quad (5.15)$$

且在均匀线性介质中,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (5.16)$$

故

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \sigma \frac{\rho_f}{\varepsilon} = 0 \quad (5.17)$$

即

$$\rho_f(t) = \rho_f(0) \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right) \quad (5.18)$$

(2)

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (5.19)$$

而

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (5.20)$$

故

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \implies \rho_p = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \nabla \cdot \mathbf{E} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\rho_f}{\varepsilon} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \rho_f \quad (5.21)$$

习题 2 电流稳定地流过两个导电介质的交界面, 已知介质 1 的电导率和介电常数分别为 σ_1, ε_1 , 介质 2 的电导率和介电常数分别为 σ_2, ε_2 。交界面处介质 1 和介质 2 的电流密度分别为 \mathbf{j}_1 和 \mathbf{j}_2 。试求交界面上的自由电荷面密度 σ_f

解. 由边界条件,

$$\sigma_f = D_{1n} - D_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} \quad (5.22)$$

如题, 两介质中

$$j_1 = \sigma_1 E_{1n}, \quad j_2 = \sigma_2 E_{2n}, \quad (5.23)$$

从而

$$E_{1n} = \frac{j_1}{\sigma_1}, \quad E_{2n} = \frac{j_2}{\sigma_2} \quad (5.24)$$

故

$$\sigma_f = \varepsilon_1 \frac{j_1}{\sigma_1} - \varepsilon_2 \frac{j_2}{\sigma_2} \quad (5.25)$$

习题 3 证明: 当两种绝缘介质的界面上不带面自由电荷时, 界面上电场线的折射满足

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别为两介质的介电常数, θ_1, θ_2 分别为界面两侧电场线与法线的夹角。

解. 由题,

$$D_{1n} = D_{2n} \implies \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \quad (5.26)$$

而

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (5.27)$$

折射角 θ_i ($i = 1, 2$) 满足

$$\tan \theta_i = \frac{E_{it}}{E_{in}} \quad (5.28)$$

故

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{E_{2t}/E_{2n}}{E_{1t}/E_{1n}} = \frac{E_{1t}}{E_{2t}} \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (5.29)$$

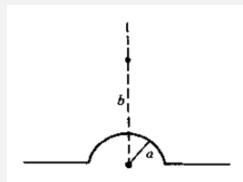
得证。

作业六 镜像法

姓名：张三 班级：究物理 01 学号：31415926

本节是带有图片的格式的示例

习题 1 如图所示，一无穷大导体平面上有一半径为 a 的半球形鼓包，这导体不带电。现将一电荷量为 q 的点电荷放在鼓包的上方离球心为 b ($b > a$) 处，这时导体电势为零。试用镜像法求空间电势。



解. 以球心为坐标原点建立右手系，图中平面取为 yz 平面， z 轴正方向为竖直向上，则定解条件

$$\nabla^2 \varphi = -q\delta(x, y, z - b)/\varepsilon_0 \quad (6.1)$$

记空间点与原点的距离为 R . 考虑到导体表面电势为零，无限远处电势为零，使用镜像法，设置如下像电荷：

位置	电荷
$z = -b$	$-q$
$z = a^2/b$	$-qa/b$
$z = -a^2/b$	$+qa/b$

于是导体外的空间点处电势

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + b)^2}} \right. \\ & \left. + \frac{-qa/b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a^2/b)^2}} + \frac{qa/b}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a^2/b)^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.2)$$

作业集三 后记

作业七 文档说明

姓名：张三 班级：究物理 01 学号：31415926

感谢您使用该模板！欢迎关注我的微信公众号**我辈都能究物理**



如您在使用过程中有意见或建议，敬请通过该公众号与我联系。
祝学业顺利！