第七章 多元函数微分法

多元函数的极限

定义：$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 则称 $p\to p_0$ 时，$f(x,y)$ 极限为 A

连续性

定义：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续

偏导

定义：当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

则称此极限为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处 x 的偏导数.

(同理可推广到二元以上的函数)

函数在一点偏导存在与函数在该点连续无直接联系.

全微分

定义：$z=f(x,y)$ 在 (x,y) 邻域有定义，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y)

全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

则 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

三元函数全微分 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

连续偏导可微关系图

(必要)连续 $\not\Leftrightarrow$ 可偏导(必要)

连续 $\overset{\times}{\Rightarrow}$ 可微，可微 $\overset{\checkmark}{\Rightarrow}$ 连续

可微 $\overset{\checkmark}{\Rightarrow}$ 可偏导，可偏导 $\overset{\times}{\Rightarrow}$ 可微

可微 $\overset{\times}{\Rightarrow}$ 偏导连续，偏导连续 $\overset{\checkmark}{\Rightarrow}$ 可微

偏导连续(充分)

全微分的近似应用

当 $|\Delta x|$ $|\Delta y|$ 充分小时 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0)+f_x\cdot\Delta x+f_y\cdot\Delta y$

隐函数求导

从左到右依次求导

方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$

雅可比行列式

方向导数 梯度

可微 $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ 方向导数 $\underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ 可偏导

定：如果 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微 那么函数在该点可沿任何方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数存在

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \underbrace{\cos\alpha}_{\frac{\Delta x}{\rho}} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \underbrace{\cos\beta}_{\frac{\Delta y}{\rho}}$$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

同理可推至三元函数

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0}\cos\gamma$$

方向余弦为方向向量与 x, y 坐标轴夹角余弦值

$\vec{l} = (x_0, y_0, z_0)$

则 $\cos\alpha = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$

梯度

定义：函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数

则 $\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j}$

当 l 与 $\mathrm{grad} f$ 同向时

方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}_{max} = |\mathrm{grad} f|$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

另 $e_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 为方向l的单位向量

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)} = \big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\big)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \mathrm{grad} f(x_0,y_0)\cdot e_l$$

$$= |\mathrm{grad} f(x_0,y_0)|\cos\theta$$

空间曲线的切线与法平面

曲面方程 $z=f(x,y)$ 则令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$

$F_x=-f_x(x,y)$

$F_y=-f_y(x,y)$

$F_z=1$

则在某点法向量为 (F_x, F_y, F_z)

切平面为 $F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$

存在空间曲线 T $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

多元函数最值与极值

必要条件. 若 $P(x_0,y_0)$ 为函数极值点. 则 $f_x=0$ $f_y=0$ 在 (x_0,y_0) 处

充分条件 $f_{xx}=A$ $f_{xy}=B$ $f_{yy}=C$

若 $B^2-AC<0$ 具有极值 $A<0$ 时极大值

$A>0$ 时极小值

若 $B^2-AC>0$ 则无极值

若 $B^2-AC=0$ 可能有可能无 需讨论