线性代数期末总结

较牛的记忆法

I_n可逆，$r(I_n)=n$

$|I_n|\neq 0$

1. 判断向量组线性无关

$(0,0,0)$向量与任一向量相关

$n+1$个n维向量一定线性相关

向量组的行列式为0（只适用于方阵）则相关

或构成矩阵的秩 $r(A)=n$ 无关

$\Updownarrow$

矩阵可逆 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$

或 $r(A)<n$ 则矩阵不可逆 $|A|=0$ 相关

证明无关的方法

① 定义法 $k_1\beta_1+\cdots k_n\beta_n=0$ 只能得到$k_i=0\ (i=1\cdots s)$

② $r(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s)=s$ 则线性无关

$(\beta_1,\beta_2\beta_3\cdots)=A(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ 无关

若$|A|\neq 0$则$(\beta_1\cdots)$无关 若$A=0$则$(\beta_1\cdots)$相关

可逆 $\rightarrow r(\alpha_1\cdots)=r(\beta_1\cdots)$

2. 矩阵的秩

矩阵的秩与伴随矩阵秩的关系

	原矩阵	伴随矩
秩	n	n
	$n-1$	1
	$<n-1$	0

秩的常用性质

逆矩阵不改变乘积矩阵的秩

$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)$

$A_{m\times n}B_{n\times s}=0$ 时

$r(A)+r(B)\le n$

3. 相似矩阵 具有相同特征值 还有 行列式和秩

存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$ 则 AB 相似

$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_mI$

的特征值为 $f(\lambda)$ 特征向量与 A 相同

为 A 的特征值

计算题

1. 行列式的计算

n阶行列式 ⇒ 把 r_i 列加到第一列提公因式

副对角线的行列式的值

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$A^* = |A| \frac{1}{A}$ $\quad |A^T| = |A|$

通过特征值计算行列式的值

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n = |A|$

例 3阶A的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 3$

$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 3)$

$\lambda_1 = 1$

由韦达定理 $\lambda_2 \lambda_3 = -3$

$\therefore |A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -3$

2. 求向量组的秩和极大无关组

① 将A化为行阶梯阵 化为行最简行阶梯

⇓

$r(A)$

则可将其余向量用极大无关组线性表示

② 首非0元所在位置即为极大无关组的向量

3. 求 $Ax=b$ 的通解

① 写出增广矩阵 化为行最简行阶梯后

写出相应方程组

② 找自由未知量令为0 ⇒ 特解 η_0

③ 写出系数矩阵的相应方程组

令自由未知量 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 求 $Ax=0$ 的通解 η_1, η_2

④ 通解为 $\eta_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ $(k_1, k_2 \in R)$

4 找正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵

① 令 $|\lambda I - A| = 0$ 求入的值

② 求出 λ_i 对应的特征向量 P_i

即 $(\lambda I - A)x = 0$ 的基础解系

③ $\boxed{\lambda_1}$ $\boxed{\lambda_2}$ ……

$\downarrow$ $\downarrow$

$\boxed{p_1 \cdots}$ $\boxed{p_{21} \cdots}$

正交化 单位化 $\Downarrow$ $\Downarrow$ 正交化 单位化

分别正交化

$\beta_1 = p_1$

$$\beta_2 = p_2 - \frac{[p_1, p_2]}{[p_1, p_1]} \beta_1$$

$\Downarrow$

求出 q_1 q_2 …

则 $Q = (q_1, q_2, \cdots)$ 为所求正交矩阵

增广矩阵 ⇒ $r(A)=r(A|b)$ { $r(A)<n$ 则 A 不可逆 $|A|=0$ 方程组有无穷解
$r(A)=n$ 则 A 可逆 $|A|\neq0$ 方程组有唯一解

$r(A)\neq r(A|b)$ 无解

系数矩阵

首非零元对应的列
标量

↓

极大无关组 { 向量无关 ← 向量组相关与无关的判断
其余向量均可由极大无关组表示 → 化行最简行阵

↓

矩阵的极大组为方程的基础解系

证明 → 1. $\eta_1 \cdots \eta_n$ 无关
2. 可表达
$P_1 P_2$ 是否为基础解系 → 3. $A\eta_i=0$
dim S 为 JCJX 所含向量个数

⇒

① 求 JCJX 中解个数 $\dim S=n-r$
② 化行最简行阵
③ 化为齐次线性方程组

标量 $\begin{cases} x_1=-\frac{3}{2}x_3-x_4 \\ x_2=\frac{7}{2}x_3-2x_4 \end{cases}$ ← 自由量

④ 取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

解得 $\underbrace{\eta_1\ \eta_2 \cdots}$ dim S 个

$\eta_1 \cdots \eta_t$ 为 $Ax=0$ 的 JCJX
则 $Ax=0$ 的通解为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$

⇒ ⇓

$Ax=b$ 的通解 $=$ $Ax=b$ 特解 $+$ $Ax=0$ 通解

增广矩阵 → 系数矩阵

方阵的特征值与特征向量

↓

$|\lambda I-A|=0$

$(\lambda I-A)$

$(\lambda I-A)x=0$
的 JCJX

特征列向量 $X^TA=\lambda X^T$
特征行向量

小性质
1. A 与 A^T 有相同的 λ
2. $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn}$
$=tr(A)$
3. $tr(AB)=tr(BA)$
4. $\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$