# WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

ZADANIA DLA CHĘTNYCH
Zestaw 1. Wersja 1.0.0

VIKTAR ZHDANOVICH LB6

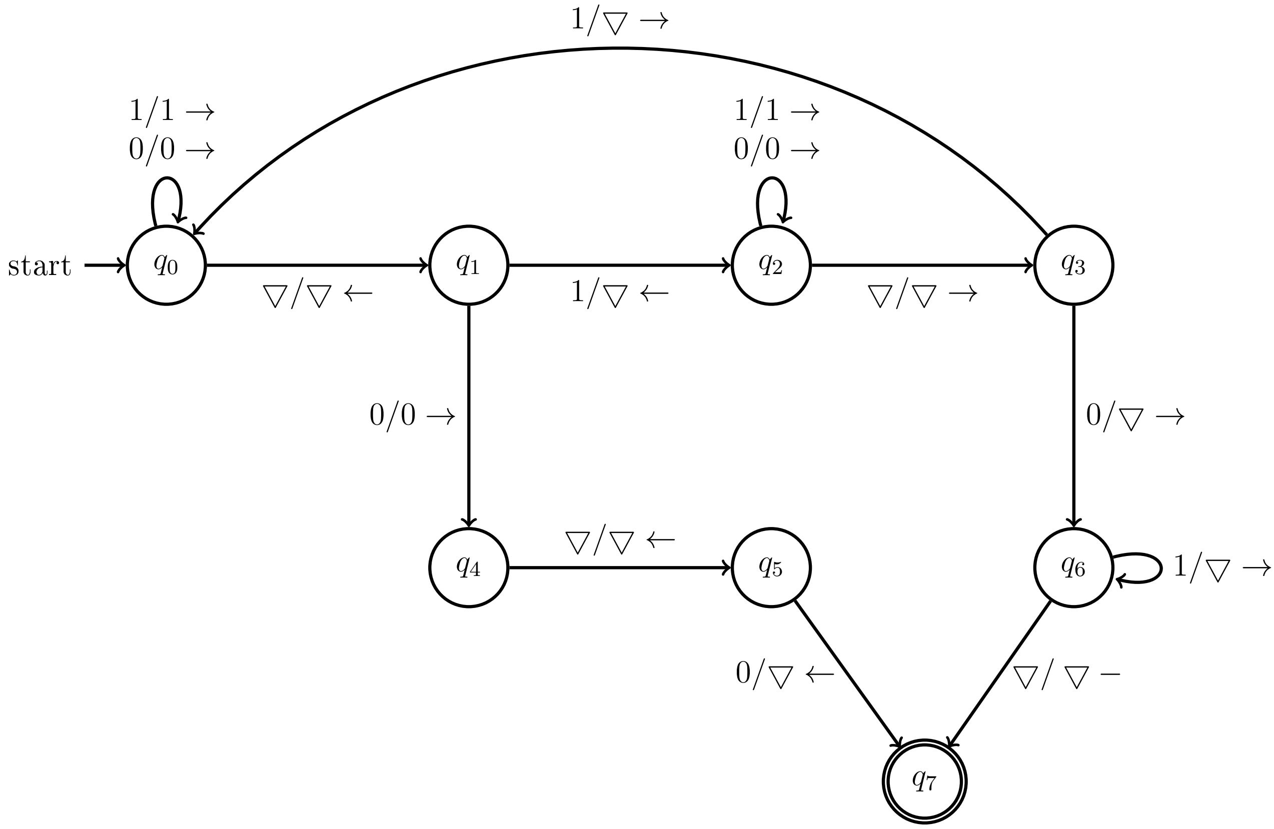
**Zad 1.1.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję odejmowania ograniczonego $f$ dla liczb naturalnych $m$ i $n$ w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m,n) = m \dot{-} n = \begin{cases} m-n, & \text{jeżeli } m \geq n, \\ 0, & \text{jezeli } m < n \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_7\}).$$



Obliczenia m = 2 , n = 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | **1** | 1 | 0 | 1 | $\triangledown$ | | $K_0$ | $q_0 1101 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | 0 | 1 | $\triangledown$ | | $K_1$ | $1q_0 101 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **0** | 1 | $\triangledown$ | | $K_2$ | $11q_0 01 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | 0 | **1** | $\triangledown$ | | $K_3$ | $110q_0 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | 0 | 1 | **$\triangledown$** | | $K_4$ | $1101q_0 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | 0 | **1** | $\triangledown$ | | $K_5$ | $110q_1 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_6$ | $11q_2 0 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_7$ | $1q_2 10 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | 1 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_8$ | $q_2 110 \vdash$ |
| | **$\triangledown$** | 1 | 1 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_9$ | $q_2 \triangledown 110 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | 1 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_{10}$ | $q_3 110 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_{11}$ | $q_0 10 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_{12}$ | $1q_0 0 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | 0 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | | $K_{13}$ | $10q_0 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_{14}$ | $1q_1 0 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | 0 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | | $K_{15}$ | $10q_4 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_{16}$ | $1q_5 0 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_{17}$ | $q_7 1$ |

Obliczenia m = 1 , n = 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | **1** | 0 | 1 | $\triangledown$ | | | $K_0$ | $q_0101 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **0** | 1 | $\triangledown$ | | | $K_1$ | $1q_001 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | **1** | $\triangledown$ | | | $K_2$ | $10q_01 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | **$\triangledown$** | | | $K_3$ | $101q_0\triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | **1** | $\triangledown$ | | | $K_4$ | $10q_11 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_5$ | $1q_20 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_6$ | $q_210 \vdash$ |
| | **$\triangledown$** | 1 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_7$ | $q_2 \triangledown 10 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_8$ | $q_310 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_9$ | $q_00 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 0 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | | | $K_{10}$ | $0q_0\triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_{11}$ | $q_10 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 0 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | | | $K_{12}$ | $0q_4\triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **0** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_{13}$ | $q_50 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_{14}$ | $q_7\triangledown$ |

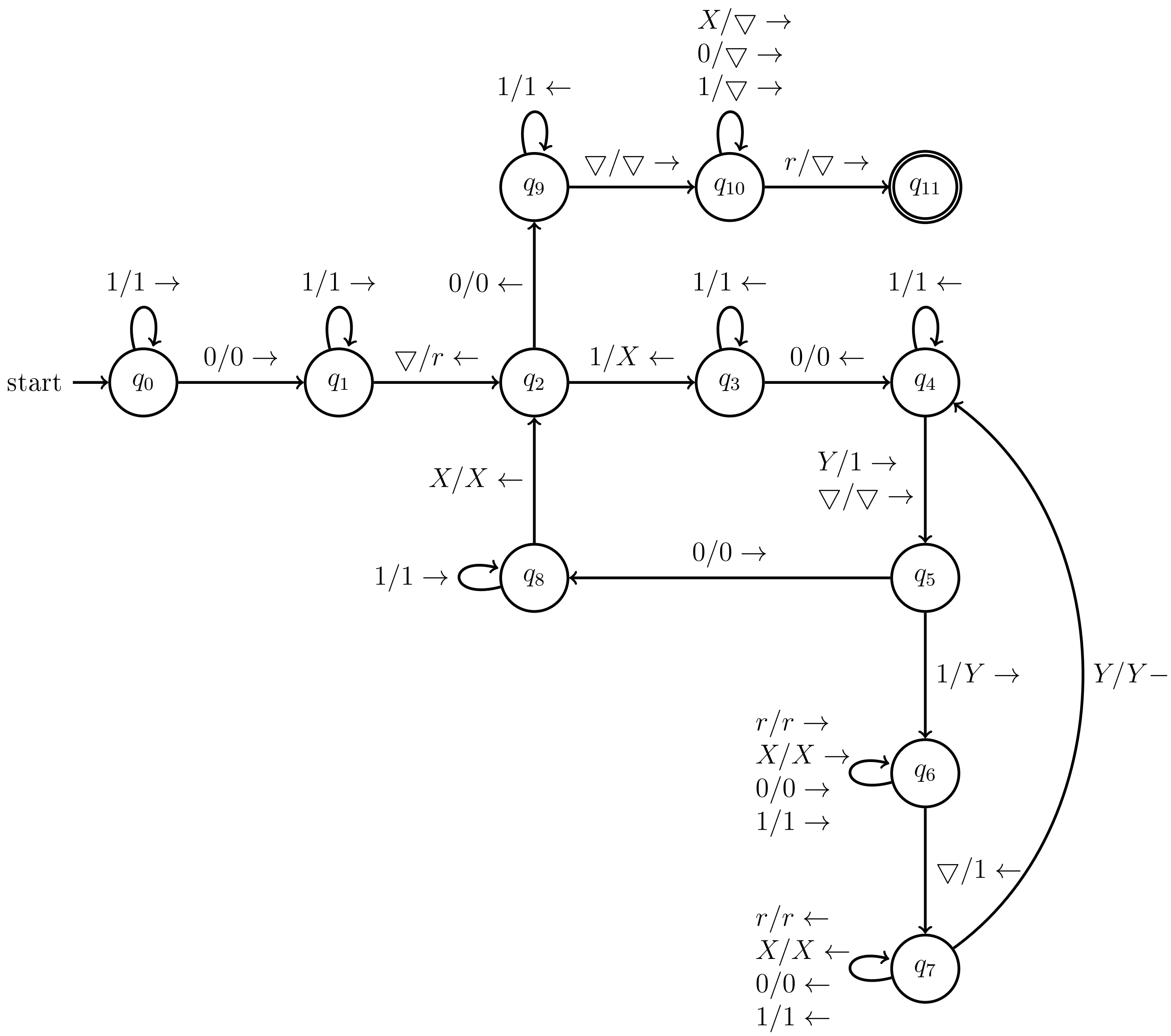
**Zad 1.2.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję mnożenia $f$ dla liczb naturalnych $m$ i $n$ w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m,n) = m \cdot n$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia, w tym pomnóż 3·2 lub 2·3 (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{11}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, r, X, Y, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_{11}\}).$$



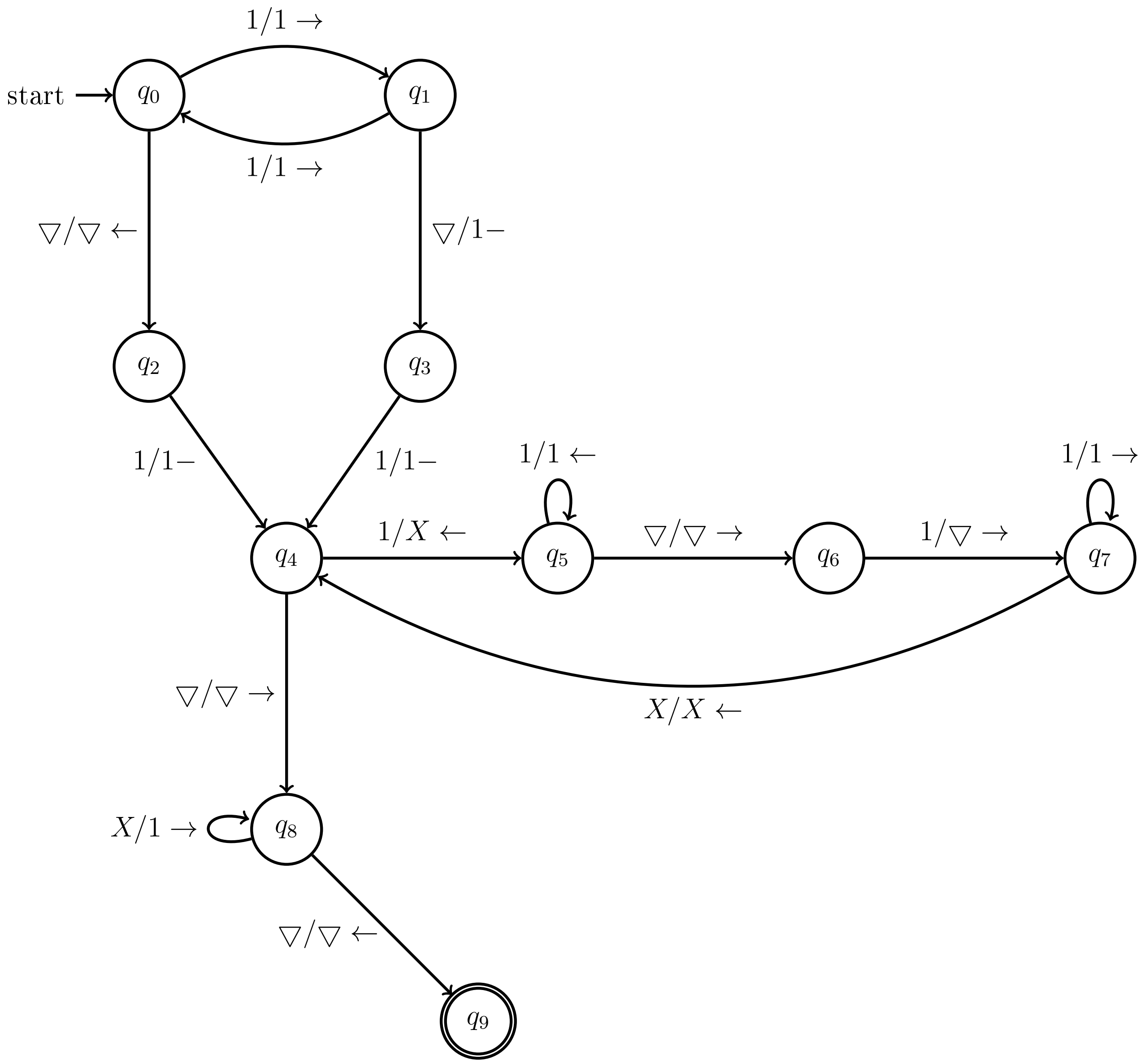
**Zad 1.3.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję $f$ dla liczbynaturalnej $n$ w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jezeli } n \text{ jest niparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_9\}, \{1\}, \{1, X, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_9\}).$$



Obliczenia n = 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_0$ | $\triangledown q_0 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | $K_1$ | $1 q_1 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $K_2$ | $1 q_3 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $K_3$ | $1 q_4 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $X$ | $\triangledown$ | $K_4$ | $q_5 1 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **$\triangledown$** | 1 | $X$ | $\triangledown$ | $K_5$ | $q_5 \triangledown 1X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $X$ | $\triangledown$ | $K_6$ | $q_6 1 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **$X$** | $\triangledown$ | $K_7$ | $q_7 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **$\triangledown$** | $X$ | $\triangledown$ | $K_8$ | $q_4 \triangledown X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **$X$** | $\triangledown$ | $K_8$ | $q_8 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **$\triangledown$** | $K_9$ | $1 q_8 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $K_{10}$ | $q_9 1$ |

Obliczenia n = 2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | **1** | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_0$ | $q_0 11 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_1$ | $1 q_1 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | $K_2$ | $11 q_0 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_3$ | $1 q_2 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_4$ | $1 q_4 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | $X$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_5$ | $q_5 1 X \vdash$ |
| | **$\triangledown$** | 1 | $X$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_6$ | $q_5 \triangledown 1X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | $X$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_7$ | $q_6 1 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **$X$** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_8$ | $q_7 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **$\triangledown$** | $X$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_8$ | $q_4 \triangledown X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **$X$** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_9$ | $q_8 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | $K_{10}$ | $1 q_8 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $K_{11}$ | $q_9 1$ |

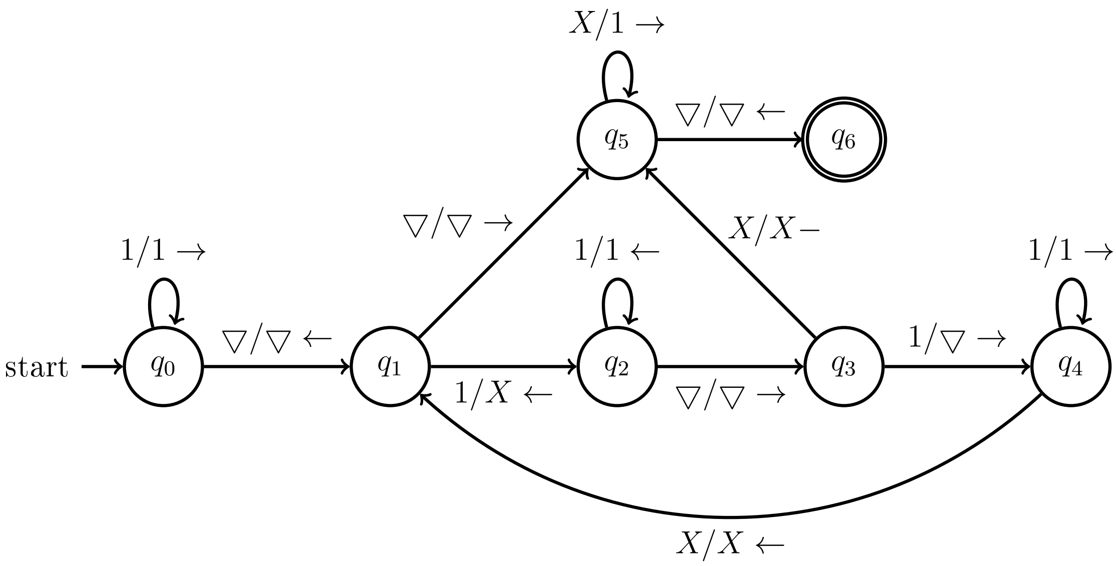
**Zad 1.5.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję $f$ dla liczby naturalnej $n$ w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_6\}, \{1\}, \{1, X, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_6\}).$$



Obliczenia n = 0

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bigtriangledown$ | **1** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_0$ | $\bigtriangledown q_0 1 \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | 1 | **$\bigtriangledown$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_1$ | $1 q_0 \bigtriangledown \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | **1** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_2$ | $\bigtriangledown q_1 1 \vdash$ |
| **$\bigtriangledown$** | $X$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_3$ | $q_2 \bigtriangledown X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | **$X$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_4$ | $q_3 X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | **$X$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_5$ | $q_5 X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | 1 | **$\bigtriangledown$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_6$ | $1 q_5 \bigtriangledown \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | **1** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_7$ | $q_6 1$ |

Obliczenia n = 1

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bigtriangledown$ | **1** | 1 | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_0$ | $q_0 11 \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | 1 | **1** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_1$ | $1 q_0 1 \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | 1 | 1 | **$\bigtriangledown$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_2$ | $11 q_0 \bigtriangledown \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | 1 | **1** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_3$ | $1 q_1 1 \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | **1** | $X$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_4$ | $q_2 1X \vdash$ |
| **$\bigtriangledown$** | 1 | $X$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_5$ | $q_2 \bigtriangledown 1X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | **1** | $X$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_6$ | $q_3 1X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | **$X$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_7$ | $q_4 X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | **$\bigtriangledown$** | $X$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_8$ | $q_1 \bigtriangledown X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | **$X$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_9$ | $q_5 X \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | 1 | **$\bigtriangledown$** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_{10}$ | $1 q_5 \bigtriangledown \vdash$ |
| $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | **1** | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | $\bigtriangledown$ | | $K_{11}$ | $q_6 1$ |

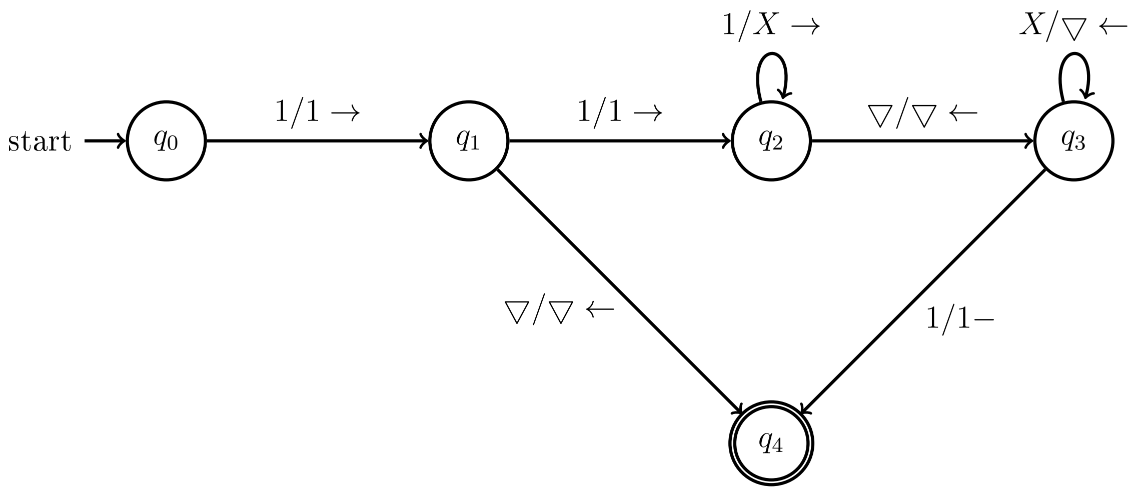
**Zad 1.7.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję signum (znaku)

$$sgn(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } n = 0 \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1\}, \{1, X, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_4\}).$$




Obliczenia n = 0

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_0$ | $\triangledown\, q_0 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | 1 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | | $K_1$ | $1 q_1 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_2$ | $q_4 1$ |

Obliczenia n = 2

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | **1** | 1 | 1 | $\triangledown$ | | $K_0$ | $q_0 111 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | 1 | $\triangledown$ | | $K_1$ | $1 q_1 11 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **1** | $\triangledown$ | | $K_2$ | $11 q_2 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | $X$ | **$\triangledown$** | | $K_3$ | $11X q_2 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **$X$** | $\triangledown$ | | $K_4$ | $11 q_3 X \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_5$ | $1 q_3 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_6$ | $1 q_4 1$ |

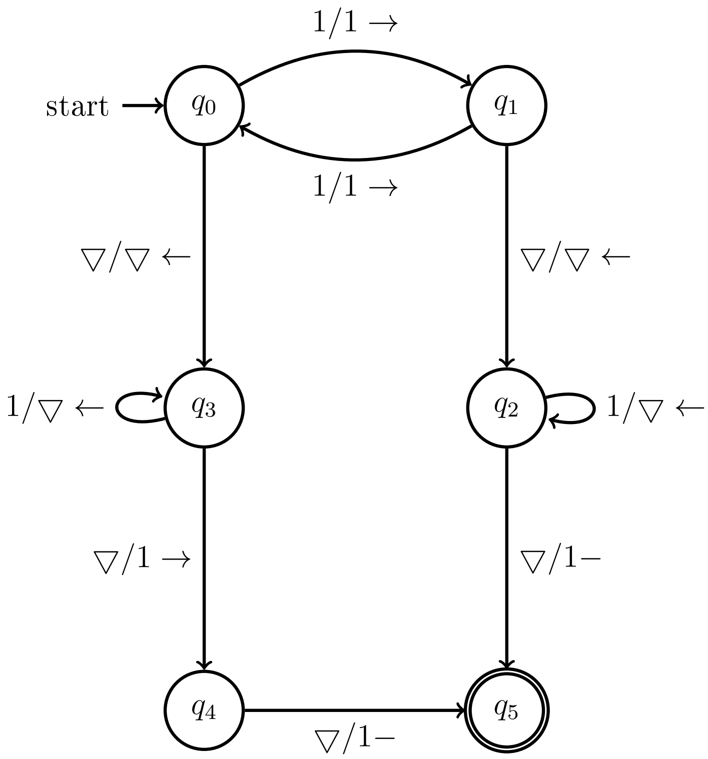
**Zad 1.9.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{1\}, \{1, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_5\}).$$



Obliczenia n = 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | **1** | 1 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_0$ | $q_0 11 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_1$ | $1 q_1 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | | | $K_2$ | $11 q_0 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_3$ | $1 q_3 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_4$ | $\triangledown\, q_3 1 \vdash$ |
| | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_5$ | $\triangledown\, q_3 \triangledown \vdash$ |
| | 1 | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_6$ | $1 q_4 \triangledown \vdash$ |
| | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_7$ | $1 q_5 1$ |

Obliczenia n = 2

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | **1** | 1 | 1 | $\triangledown$ | | | $K_0$ | $q_0 111 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | 1 | $\triangledown$ | | | $K_1$ | $1 q_1 11 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **1** | $\triangledown$ | | | $K_2$ | $11 q_0 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | 1 | **$\triangledown$** | | | $K_3$ | $111 q_1 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 1 | **1** | $\triangledown$ | | | $K_4$ | $11 q_2 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_5$ | $1 q_2 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_6$ | $\triangledown\, q_2 1 \vdash$ |
| | **$\triangledown$** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_7$ | $\triangledown\, q_2 \triangledown \vdash$ |
| | **1** | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | | $K_8$ | $q_5 1$ |

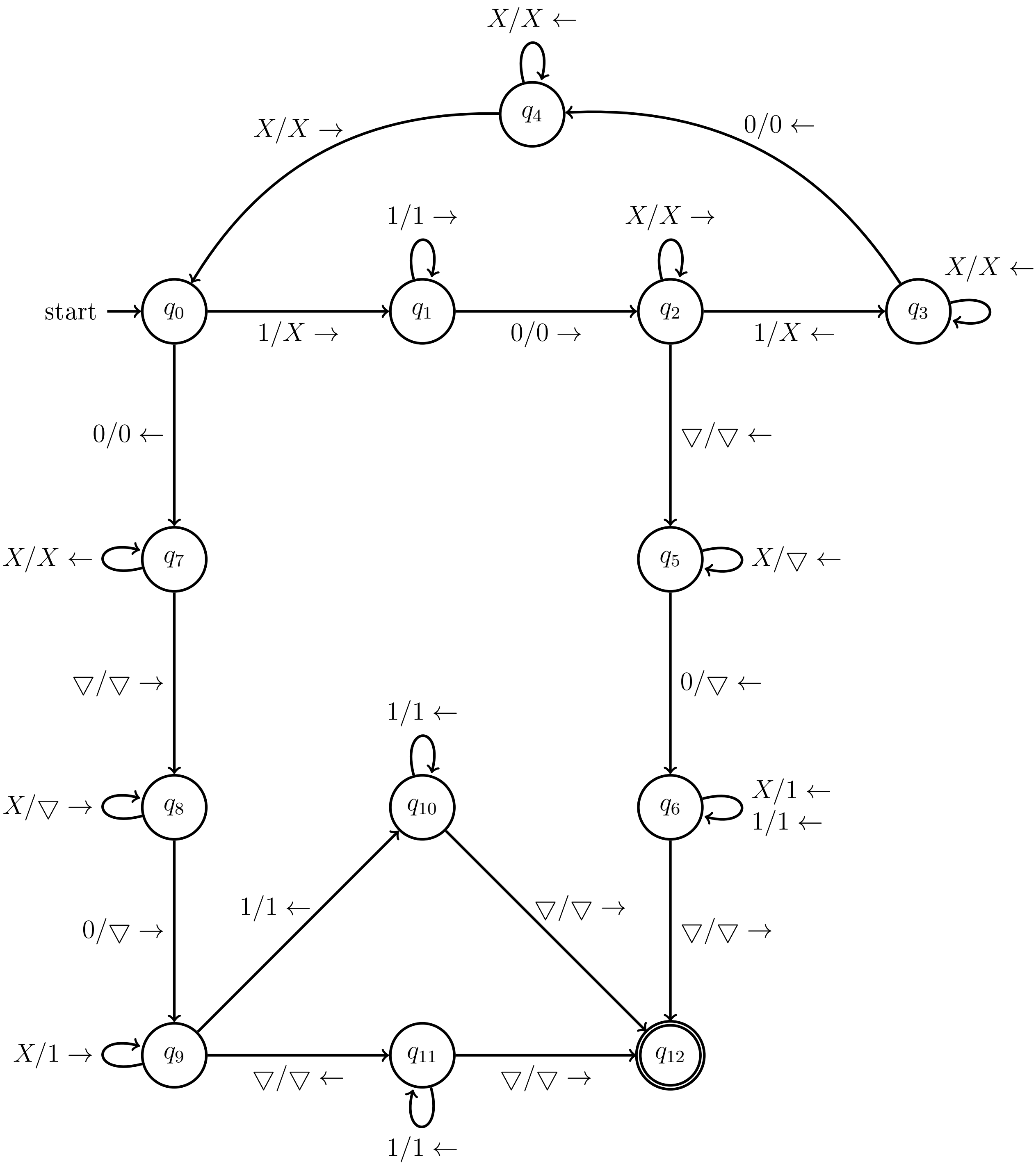
**Zad 1.11.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję maksimum dla liczb naturalnych $m$ i $n$ w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(n) = max(m, n).$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{12}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_{12}\}).$$



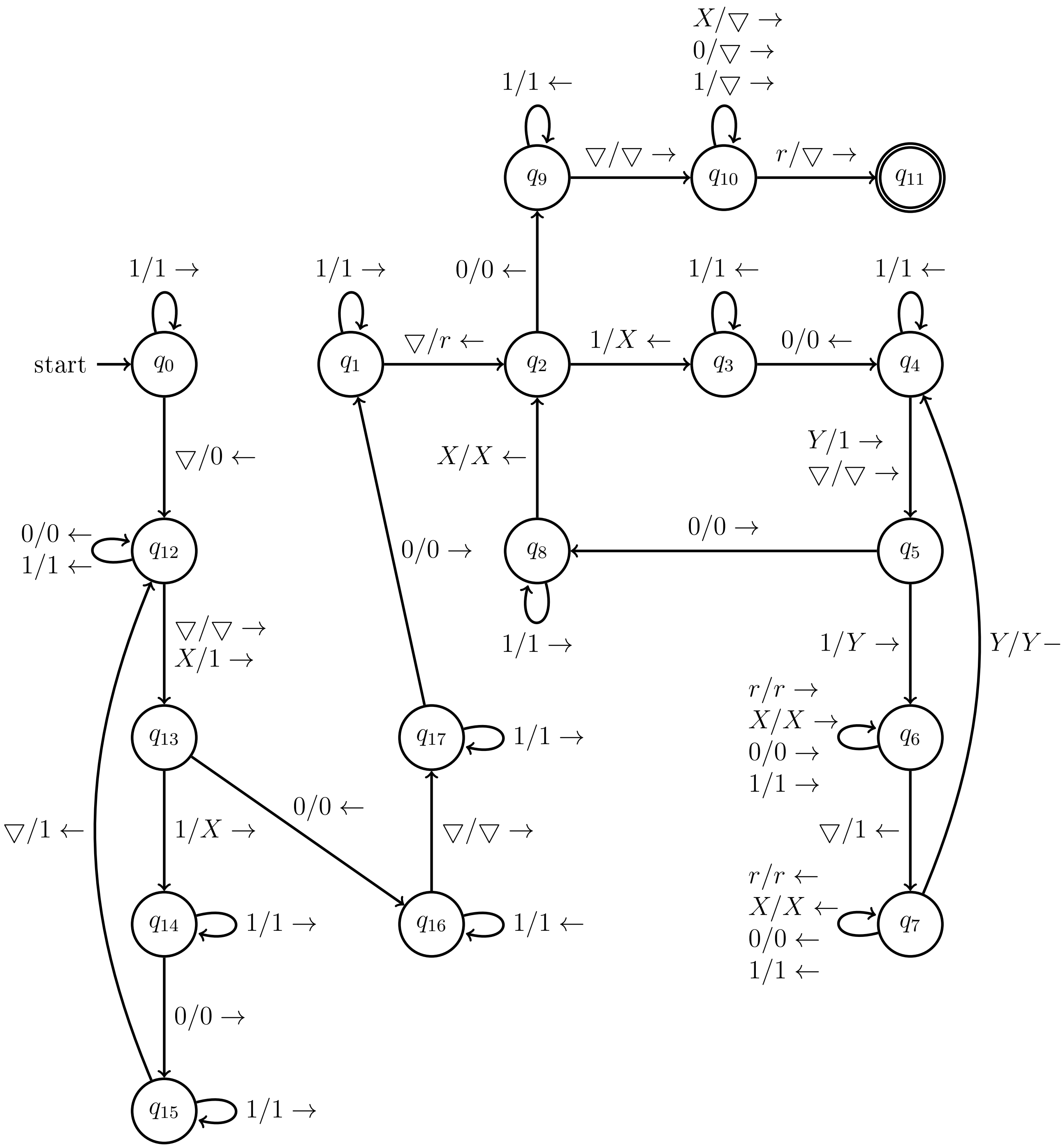
**Zad 1.13.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(m, n) = n^2$$

dla liczby naturalnej $n$ w reprezentacji unarnej. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{17}\}, \{1\}, \{1, 0, X, Y, r, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_{11}\}).$$



**Zad 1.19.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która kopiuje wejściowy łańcuch $w$ dla alfabetu $\Sigma = \{a, b\}$. Rozwiązanie może nie zawierać separatora

$$q_0 w \overset{*}{\vdash} q_f ww$$

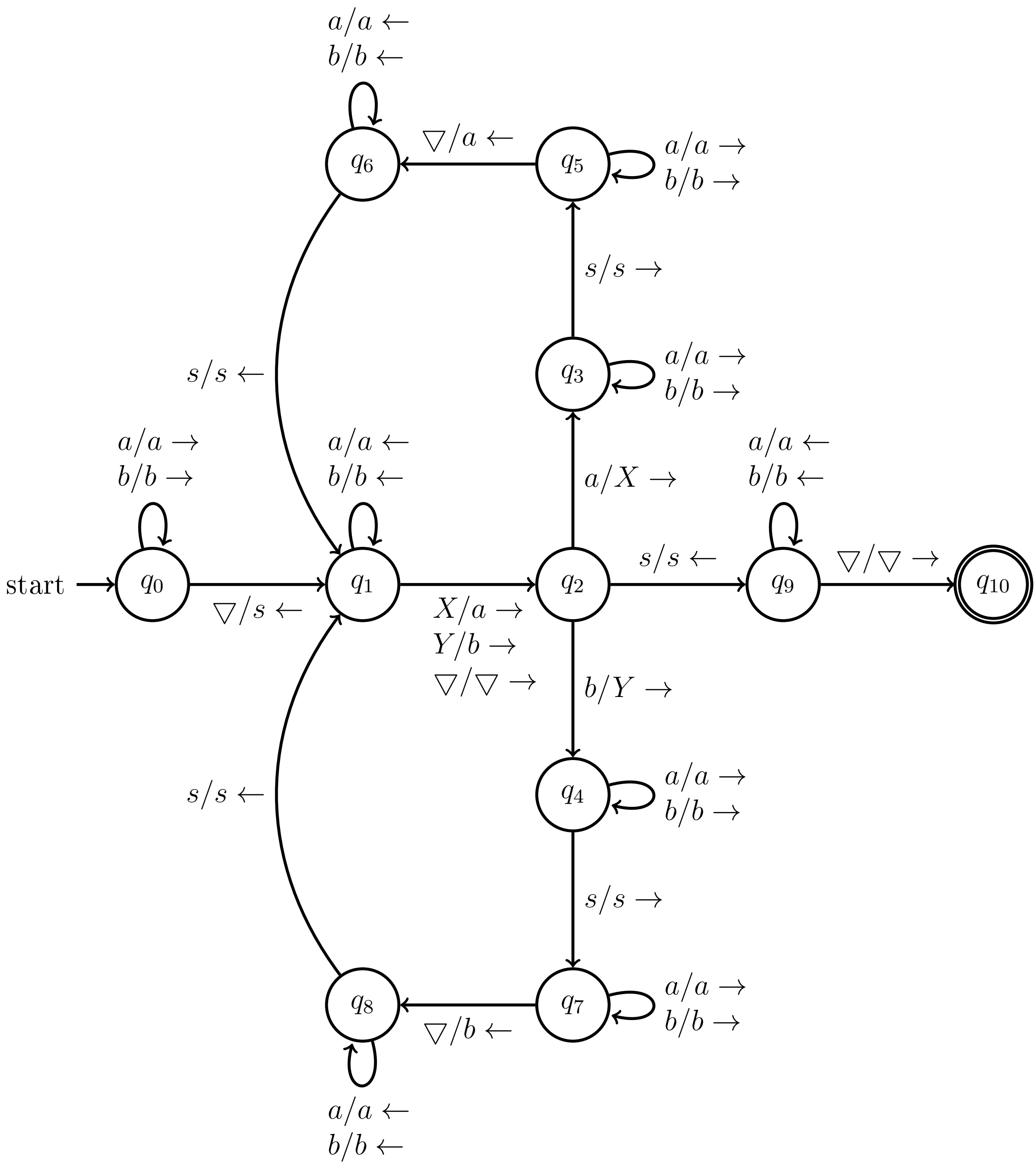
lub może zawierać dowolny separator, na przykład separatorem może być blank, czyli

$$q_0 w \overset{*}{\vdash} q_f w \bigtriangledown w.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{10}\}, \{a, b\}, \{a, b, s, X, Y, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_{10}\}).$$



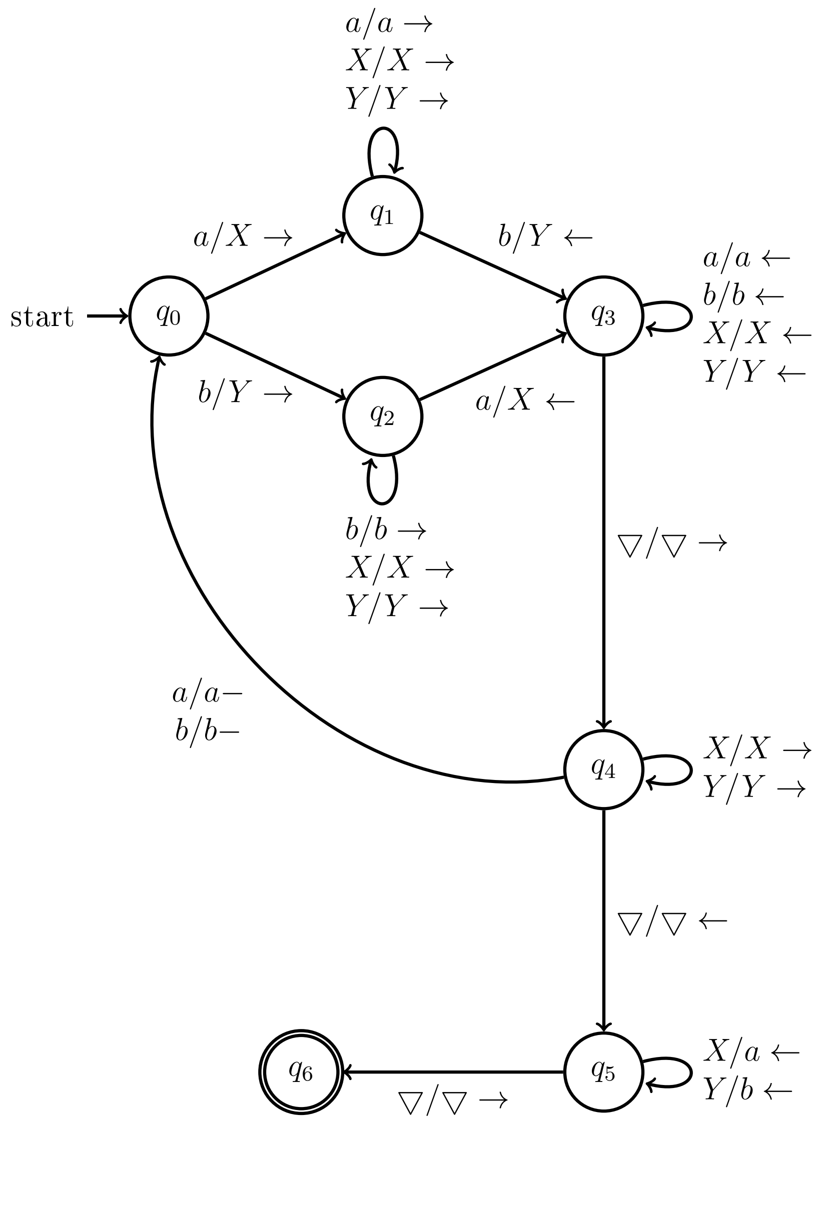
**Zad 1.22.** Zaprojektuj maszynę Turinga nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$, która akceptuje język

$$L = \{w\colon\ w \text{ zawiera równą liczbę symboli } a \text{ i } b\}.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_6\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_6\}).$$



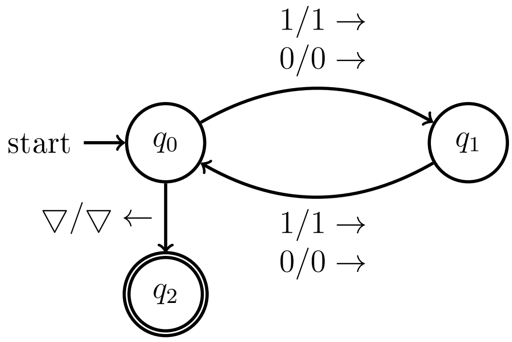
**Zad 1.23.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{w\colon\ |w| \text{ jest parzysta}\}$$

nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_2\}).$$




Obliczenia $w = 1011$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | $\triangledown$ | | $K_0$ | $q_0 1011 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | $\triangledown$ | | $K_1$ | $1 q_1 011 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | $\triangledown$ | | $K_2$ | $10 q_0 11 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | $\triangledown$ | | $K_3$ | $101 q_1 1 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | $\triangledown$ | | $K_4$ | $1011 q_0 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 1 | 0 | 1 | 1 | $\triangledown$ | | $K_5$ | $101 q_2 1$ |

Obliczenia $w = 00$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | 0 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_0$ | $q_0 00 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 0 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_1$ | $0 q_1 0 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 0 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_2$ | $00 q_0 \triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | 0 | 0 | $\triangledown$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_3$ | $0 q_2 0$ |

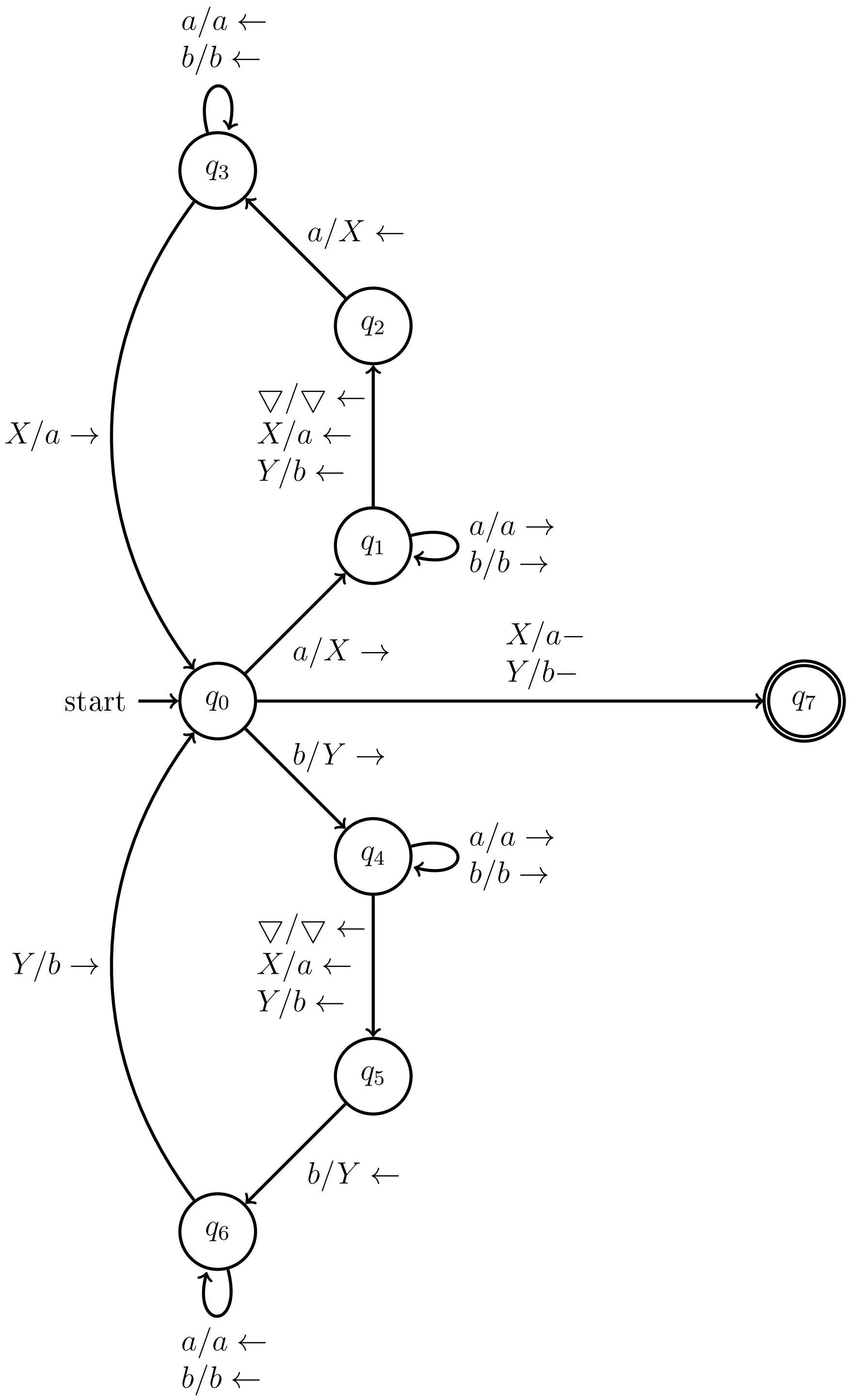
**Zad 1.25.** Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{ww^R\colon\ w \in \{a, b\}^*\},$$

gdzie $w^R$ oznacza **odwrócenie** $w$, a więc jeśli $w = a_1a_2...a_k$, to $w^R = a_ka_{k-1}...a_1$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_7\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_7\}).$$



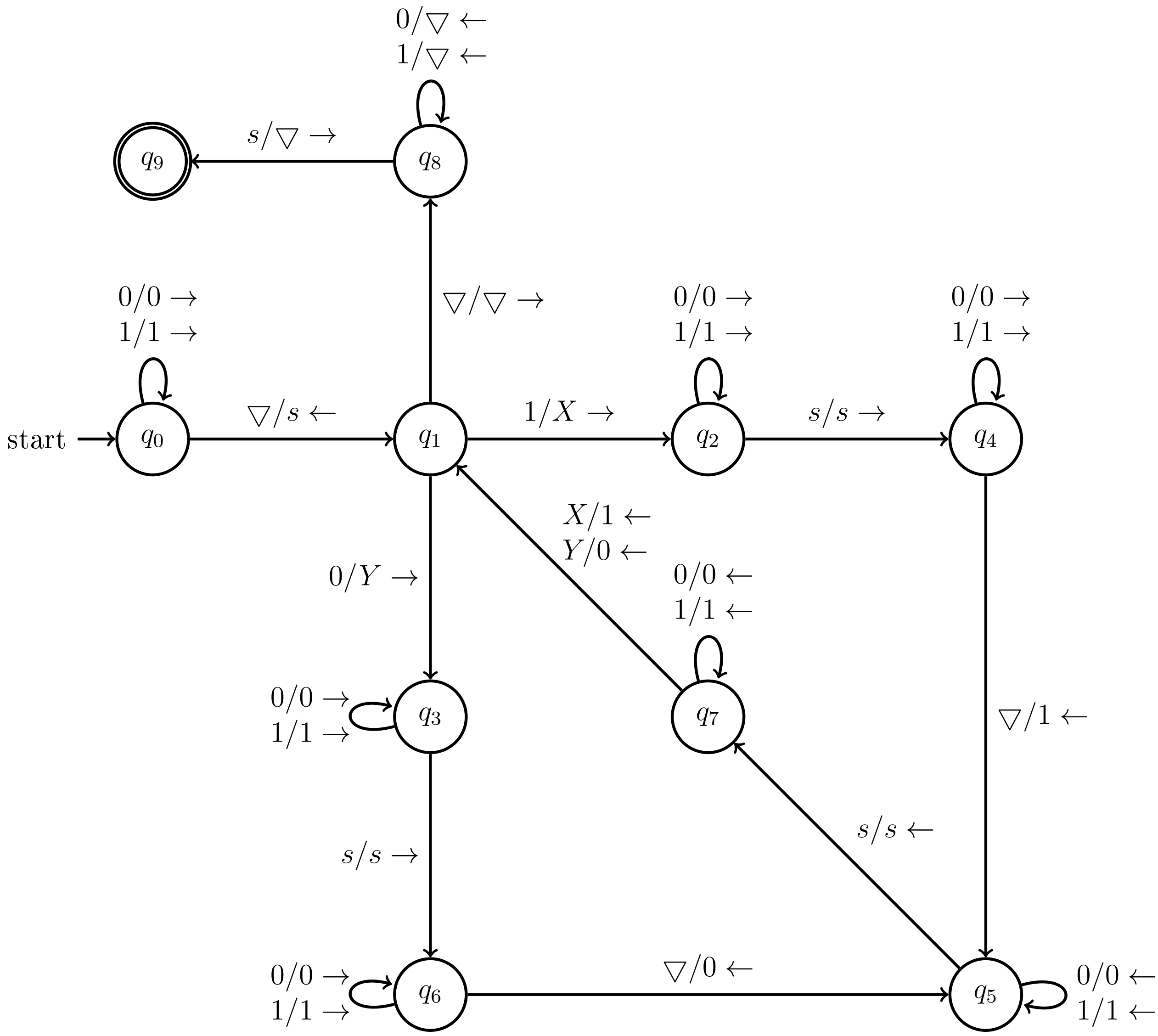
**Zad 1.27.** Niech $\Sigma = \{0, 1\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza odwrócenie łańcucha, czyli funkcję

$$f(w) = w^R$$

gdzie $w \in \{0,1\}^+$ oraz $w^R$ oznacza **odwrócenie** $w$, a więc jeśli $w = a_1a_2...a_k$, to $w^R = a_ka_{k-1}...a_1$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_9\}, \{1, 0\}, \{1, 0, s, X, Y, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_9\}).$$



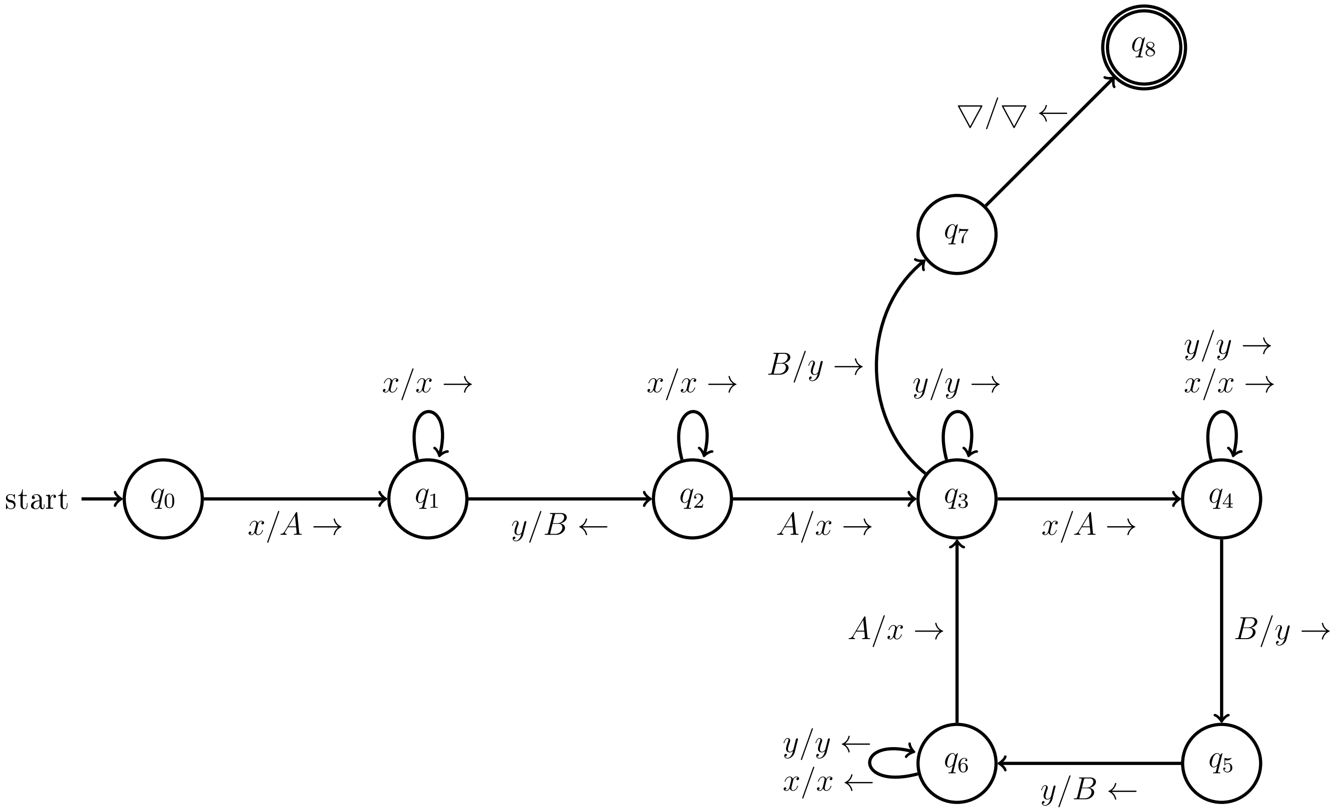
**Zad 1.30.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{x^n y^n \colon\ n \geq 1\}$$

nad alfabetem $\Sigma = \{x, y\}$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_8\}, \{x, y\}, \{x, y, A, B, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_8\}).$$



**Zad 1.46.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie $\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{bb}$. Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga,która akceptuje język

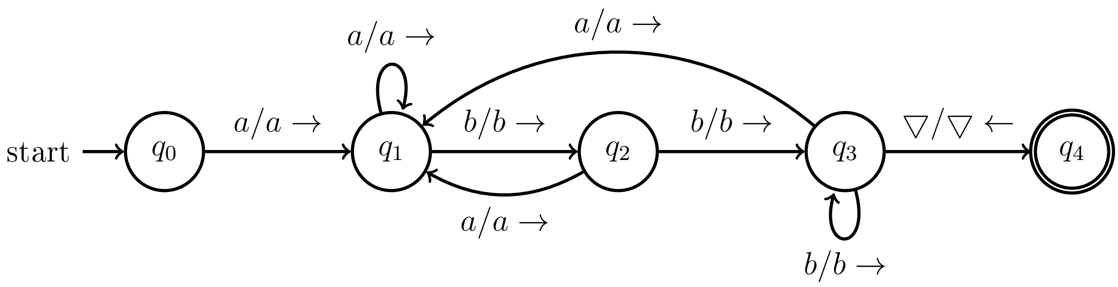
$$L = L(\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{bb})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

1. abb
2. aaaabbb
3. ababaaabbbb
4. aaabbaabbabb

$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{a, b, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_4\})$.




Obliczenia $w$ = abb

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_0$ | $q_0abb \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_1$ | $aq_1bb \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_2$ | $abq_2b \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_3$ | $abbq_3\triangledown \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | $\triangledown$ | | $K_4$ | $abq_4b$ |

Obliczenia $w$ = aabb

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\triangledown$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | | $K_0$ | $q_0aabb \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | | $K_1$ | $aq_1abb \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | | $K_2$ | $aaq_1bb \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | | $K_3$ | $aabq_2b \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | | $K_4$ | $aabbq_3 \vdash$ |
| | $\triangledown$ | $a$ | $a$ | $b$ | $b$ | $\triangledown$ | | $K_5$ | $aabq_4b$ |

**Zad 1.47.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie $\mathbf{10{+}(0{+}11)0^{*}1}$. Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = L(\mathbf{10{+}(0{+}11)0^{*}1})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wy-konaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_7\}).$$