

# WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

ZADANIA DLA CHĘTNYCH  
Zestaw 1. Wersja 1.0.0

VIKTAR ZHDANOVICH LB6

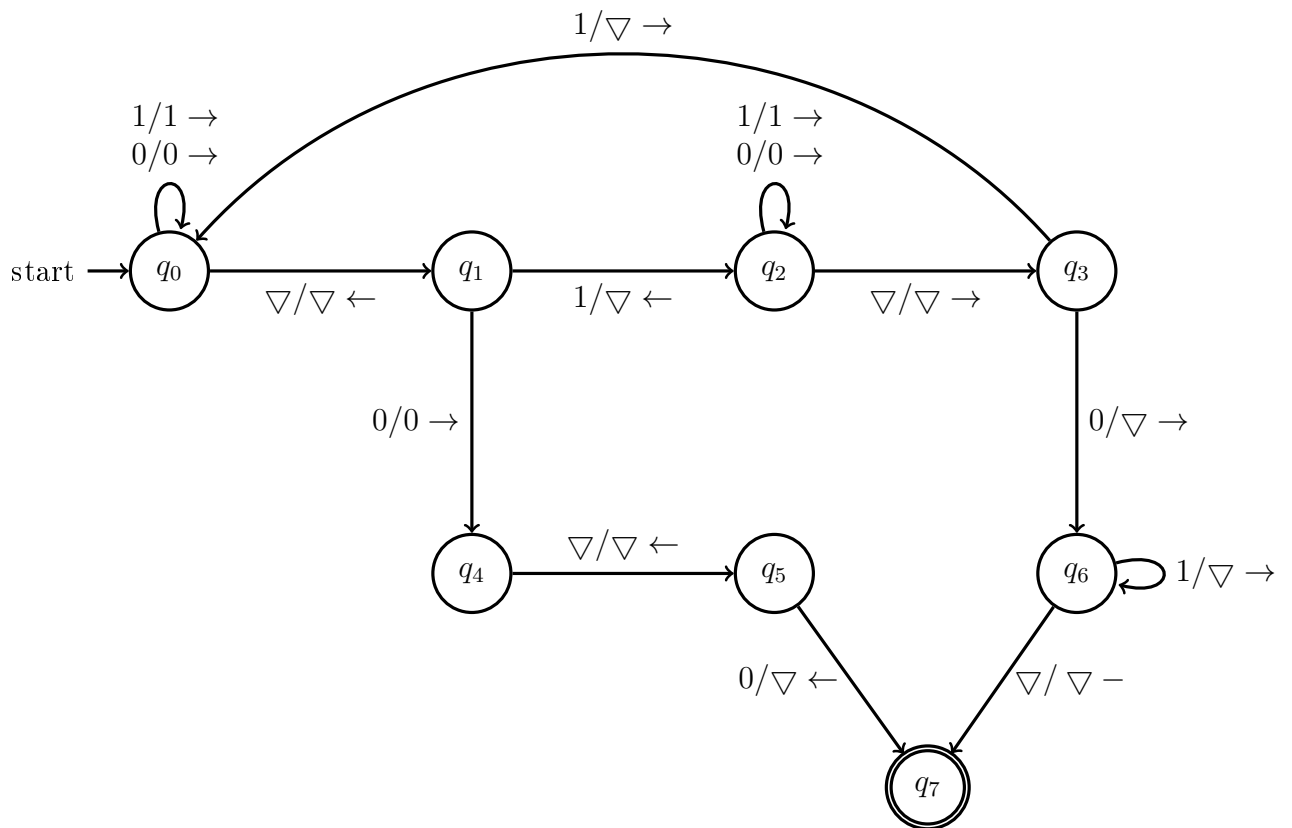
**Zad 1.1.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję odejmowania ograniczonego  $f$  dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m - n = \begin{cases} m - n, & \text{jeżeli } m \geq n, \\ 0, & \text{jeżeli } m < n \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_7\}).$$



Obliczenia  $m = 2$ ,  $n = 1$ 

$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$		$K_0$	$q_0 1101 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$		$K_1$	$1q_0 101 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$		$K_2$	$11q_0 01 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$		$K_3$	$110q_0 1 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$		$K_4$	$1101q_0 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$		$K_5$	$110q_1 1 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_6$	$11q_2 0 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_7$	$1q_2 10 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_8$	$q_2 110 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_9$	$q_2 \nabla 110 \vdash$
$\nabla$	1	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_{10}$	$q_3 110 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_{11}$	$q_0 10 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_{12}$	$1q_0 0 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_{13}$	$10q_0 \nabla \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_{14}$	$1q_1 0 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_{15}$	$10q_4 \nabla \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	1	0	$\nabla$	$\nabla$		$K_{16}$	$1q_5 0 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$		$K_{17}$	$q_7 1$

Obliczenia  $m = 1$  ,  $n = 1$

	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	▽	▽	▽	

$K_0$	$q_0 101 \vdash$
$K_1$	$1 q_0 01 \vdash$
$K_2$	$10 q_0 1 \vdash$
$K_3$	$101 q_0 \nabla \vdash$
$K_4$	$10 q_1 1 \vdash$
$K_5$	$1 q_2 0 \vdash$
$K_6$	$q_2 10 \vdash$
$K_7$	$q_2 \nabla 10 \vdash$
$K_8$	$q_3 10 \vdash$
$K_9$	$q_0 0 \vdash$
$K_{10}$	$0 q_0 \nabla \vdash$
$K_{11}$	$q_1 0 \vdash$
$K_{12}$	$0 q_4 \nabla \vdash$
$K_{13}$	$q_5 0 \vdash$
$K_{14}$	$q_7 \nabla$

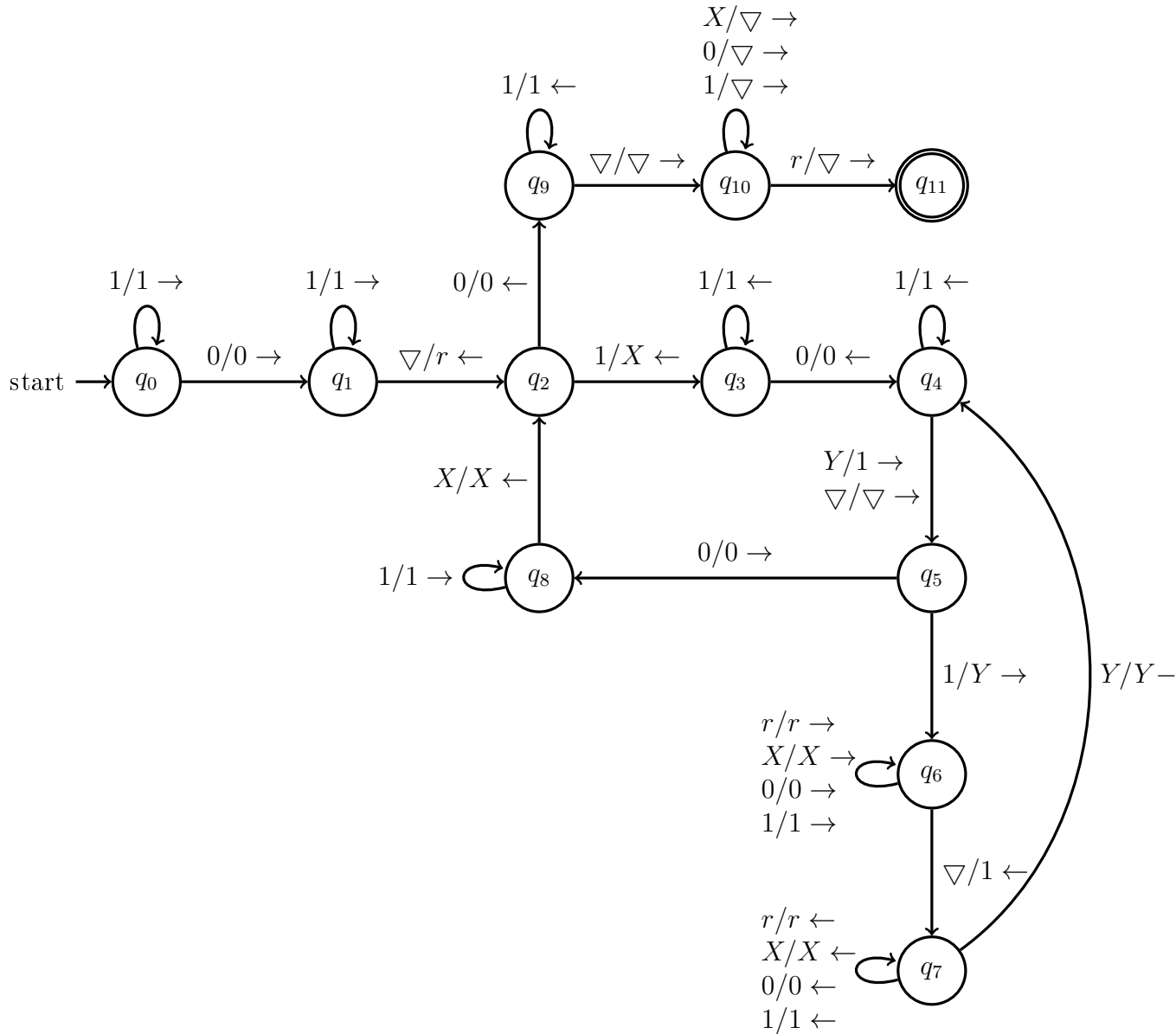
**Zad 1.2.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję mnożenia  $f$  dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m \cdot n$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia, w tym pomnóż  $3 \cdot 2$  lub  $2 \cdot 3$  (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{11}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, r, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{11}\}).$$



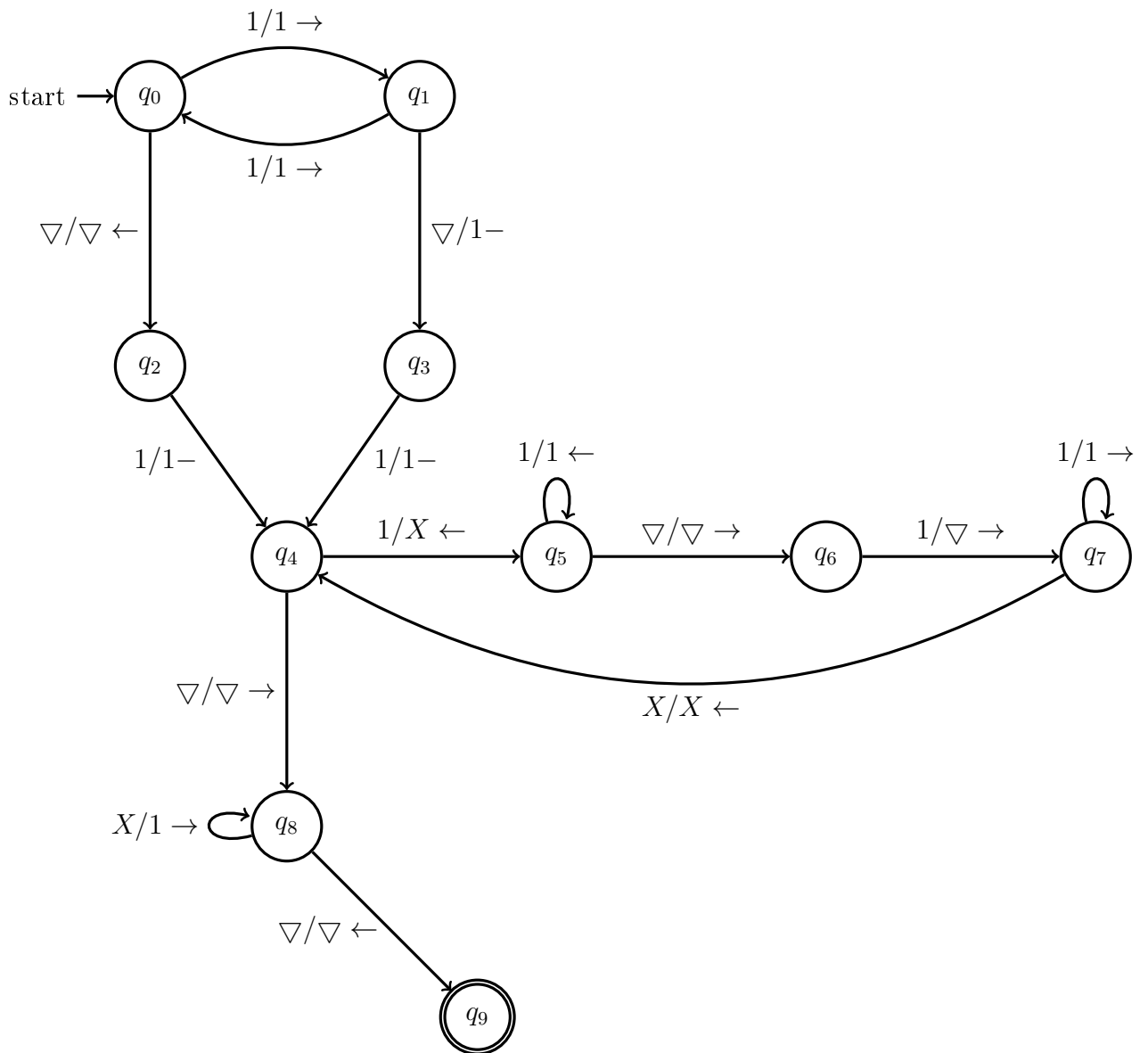
**Zad 1.3.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję  $f$  dla liczb naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1\}, \{1, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$



Obliczenia  $n = 1$ 

	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	1	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	1	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	X	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	X	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	X	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$

$K_0$	$\nabla q_0 1 \vdash$
$K_1$	$1 q_1 \nabla \vdash$
$K_2$	$1 q_3 1 \vdash$
$K_3$	$1 q_4 1 \vdash$
$K_4$	$q_5 1 X \vdash$
$K_5$	$q_5 \nabla 1 X \vdash$
$K_6$	$q_6 1 X \vdash$
$K_7$	$q_7 X \vdash$
$K_8$	$q_4 \nabla X \vdash$
$K_8$	$q_8 X \vdash$
$K_9$	$1 q_8 \nabla \vdash$
$K_{10}$	$q_9 1$

 Obliczenia  $n = 2$ 

	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	1	X	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	1	X	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	1	X	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$
	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$

$K_0$	$q_0 11 \vdash$
$K_1$	$1 q_1 1 \vdash$
$K_2$	$11 q_0 \nabla \vdash$
$K_3$	$1 q_2 1 \vdash$
$K_4$	$1 q_4 1 \vdash$
$K_5$	$q_5 1 X \vdash$
$K_6$	$q_5 \nabla 1 X \vdash$
$K_7$	$q_6 1 X \vdash$
$K_8$	$q_7 X \vdash$
$K_8$	$q_4 \nabla X \vdash$
$K_9$	$q_8 X \vdash$
$K_{10}$	$1 q_8 \nabla \vdash$
$K_{11}$	$q_9 1$

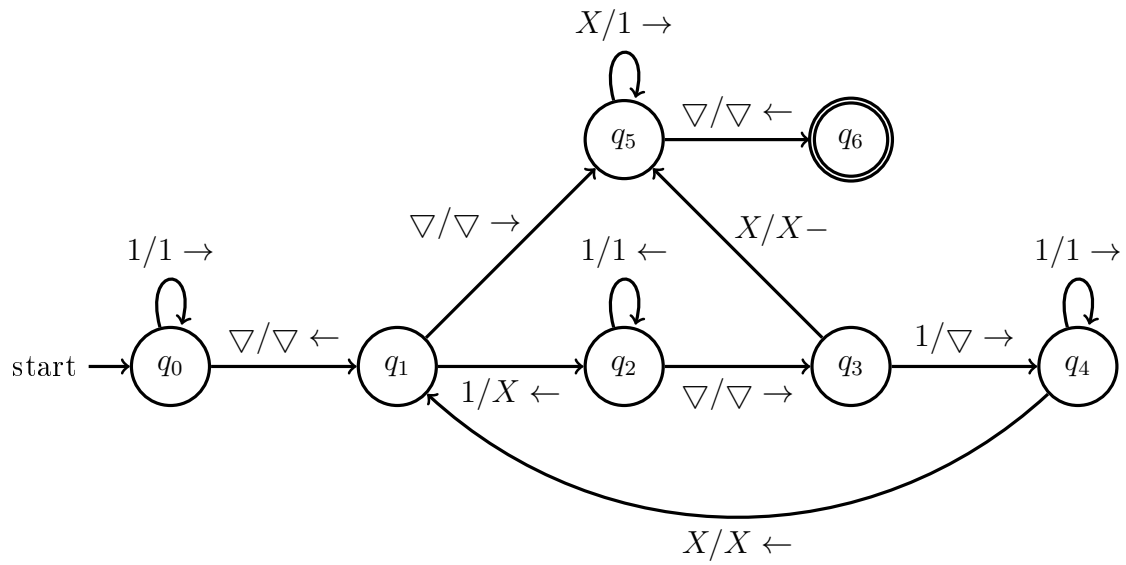
**Zad 1.5.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję  $f$  dla liczby naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{1\}, \{1, X, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_6\}).$$





Obliczenia  $n = 0$ 

$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	

$K_0 \quad \nabla q_0 1 \vdash$

$K_1 \quad 1 q_0 \nabla \vdash$

$K_2 \quad \nabla q_1 1 \vdash$

$K_3 \quad q_2 \nabla X \vdash$

$K_4 \quad q_3 X \vdash$

$K_5 \quad q_5 X \vdash$

$K_6 \quad 1 q_5 \nabla \vdash$

$K_7 \quad q_6 1$

 Obliczenia  $n = 1$ 

$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	1	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	

$K_0 \quad q_0 1 1 \vdash$

$K_1 \quad 1 q_0 1 \vdash$

$K_2 \quad 1 1 q_0 \nabla \vdash$

$K_3 \quad 1 q_1 1 \vdash$

$K_4 \quad q_2 1 X \vdash$

$K_5 \quad q_2 \nabla 1 X \vdash$

$K_6 \quad q_3 1 X \vdash$

$K_7 \quad q_4 X \vdash$

$K_8 \quad q_1 \nabla X \vdash$

$K_9 \quad q_5 X \vdash$

$K_{10} \quad 1 q_5 \nabla \vdash$

$K_{11} \quad q_6 1$

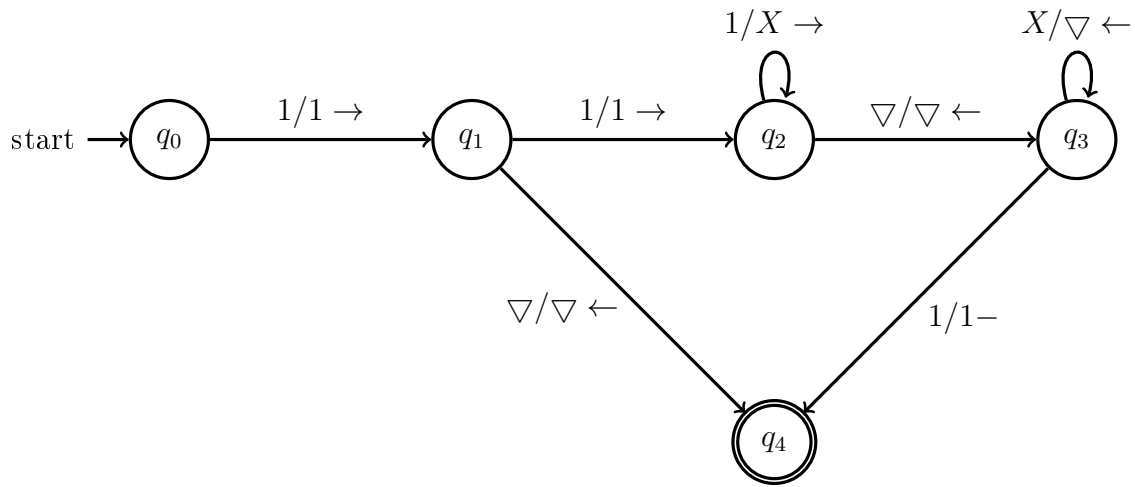
**Zad 1.7.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję signum (znaku)

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } n = 0 \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1\}, \{1, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$



Obliczenia  $n = 0$

	∇	∇	1	∇	∇	
	∇	∇	1	∇	∇	
	∇	∇	1	∇	∇	

Obliczenia  $n = 2$

	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	X	∇	
	∇	1	1	X	∇	
	∇	1	1	∇	∇	
	∇	1	1	∇	∇	

$K_0 \quad \nabla q_0 1 \vdash$

$K_1 \quad 1 q_1 \nabla \vdash$

$K_2 \quad q_4 1$

$K_0 \quad q_0 111 \vdash$

$K_1 \quad 1 q_1 11 \vdash$

$K_2 \quad 11 q_2 1 \vdash$

$K_3 \quad 11 X q_2 \nabla \vdash$

$K_4 \quad 11 q_3 X \vdash$

$K_5 \quad 1 q_3 1 \vdash$

$K_6 \quad 1 q_4 1$

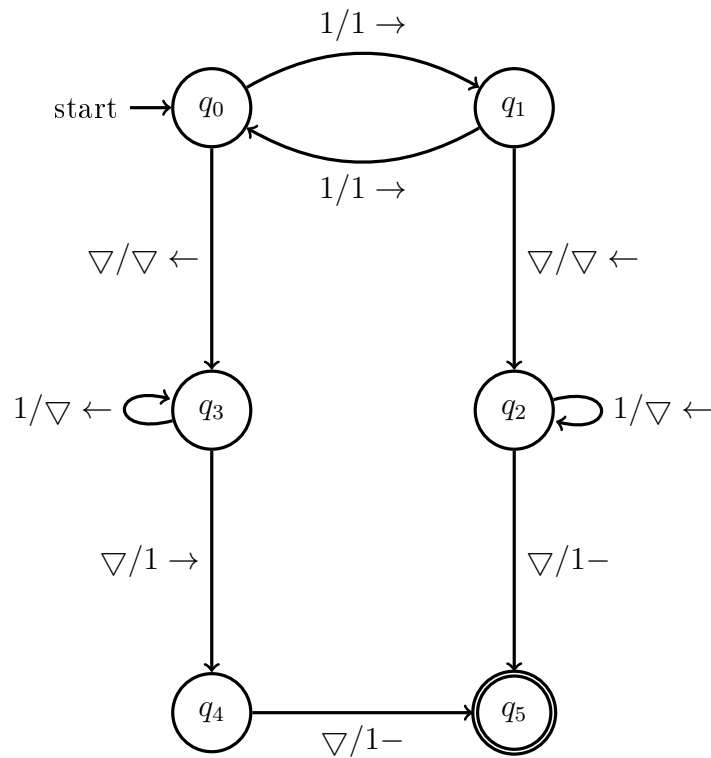
**Zad 1.9.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{1\}, \{1, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_5\}).$$



Obliczenia  $n = 1$

	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
	1	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	

$K_0$	$q_0 11 \vdash$
$K_1$	$1q_1 1 \vdash$
$K_2$	$11q_0 \nabla \vdash$
$K_3$	$1q_3 1 \vdash$
$K_4$	$\nabla q_3 1 \vdash$
$K_5$	$\nabla q_3 \nabla \vdash$
$K_6$	$1q_4 \nabla \vdash$
$K_7$	$1q_5 1$

Obliczenia  $n = 2$

	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
	1	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	

$K_0$	$q_0 111 \vdash$
$K_1$	$1q_1 11 \vdash$
$K_2$	$11q_0 1 \vdash$
$K_3$	$111q_1 \nabla \vdash$
$K_4$	$11q_2 1 \vdash$
$K_5$	$1q_2 1 \vdash$
$K_6$	$\nabla q_2 1 \vdash$
$K_7$	$\nabla q_2 \nabla \vdash$
$K_8$	$q_5 1$

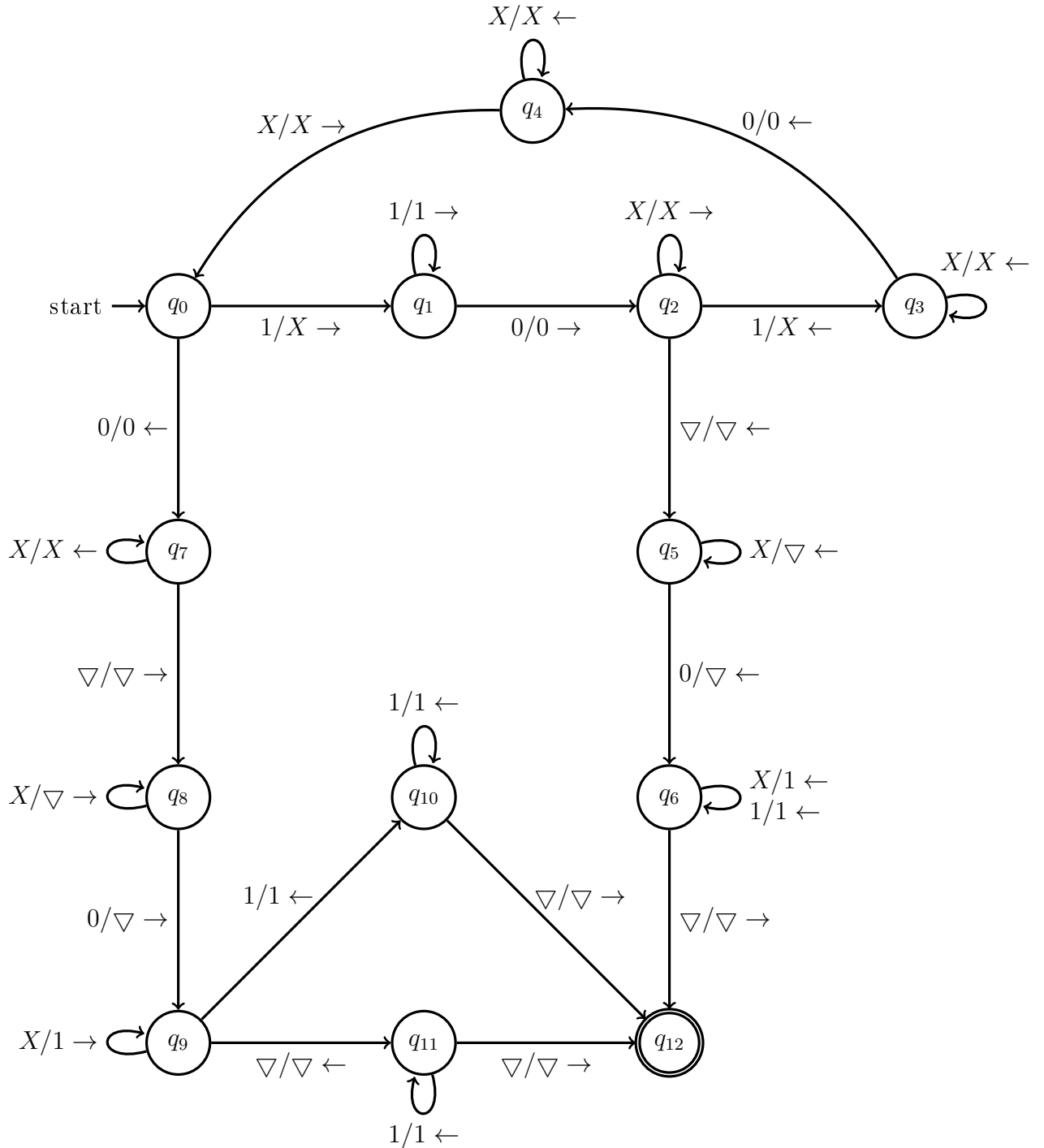
**Zad 1.11.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję maksimum dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(n) = \max(m, n).$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{12}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{12}\}).$$



Obliczenia  $m = 1$   $n = 2$ 

$\nabla$	1	0	1	1	$\nabla$	$K_0$	$q_0 1011 \vdash$
$\nabla$	X	0	1	1	$\nabla$	$K_1$	$X q_1 011 \vdash$
$\nabla$	X	0	1	1	$\nabla$	$K_2$	$X 0 q_2 11 \vdash$
$\nabla$	X	0	X	1	$\nabla$	$K_3$	$X q_3 0 X 1 \vdash$
$\nabla$	X	0	X	1	$\nabla$	$K_4$	$q_4 X 0 X 1 \vdash$
$\nabla$	X	0	X	1	$\nabla$	$K_5$	$X q_0 0 X 1 \vdash$
$\nabla$	X	0	X	1	$\nabla$	$K_6$	$q_7 X 0 X 1 \vdash$
$\nabla$	X	0	X	1	$\nabla$	$K_7$	$q_7 \nabla X 0 X 1 \vdash$
$\nabla$	X	0	X	1	$\nabla$	$K_8$	$q_8 X 0 X 1 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	0	X	1	$\nabla$	$K_9$	$q_8 0 X 1 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	X	1	$\nabla$	$K_{10}$	$q_9 X 1 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$K_{11}$	$1 q_9 1 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$K_{12}$	$q_{10} 11 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$K_{13}$	$q_{10} \nabla 11 \vdash$
$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	1	$\nabla$	$K_{14}$	$q_{12} 11$

Obliczenia  $m = 1$   $n = 1$ 

	$\nabla$	1	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	X	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	0	X	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	X	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	
	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	1	$\nabla$	

$K_0$	$q_0 101 \vdash$
$K_1$	$X q_1 01 \vdash$
$K_2$	$X 0 q_2 1 \vdash$
$K_3$	$X q_3 0 X \vdash$
$K_4$	$q_4 X 0 X \vdash$
$K_5$	$X q_0 0 X \vdash$
$K_6$	$q_7 X 0 X \vdash$
$K_7$	$q_7 \nabla X 0 X \vdash$
$K_8$	$q_8 X 0 X \vdash$
$K_9$	$q_8 0 X \vdash$
$K_{10}$	$q_9 X \vdash$
$K_{11}$	$1 q_9 \vdash$
$K_{12}$	$q_9 1 \vdash$
$K_{13}$	$q_{11} \nabla 1 \vdash$
$K_{14}$	$q_{12} 1$

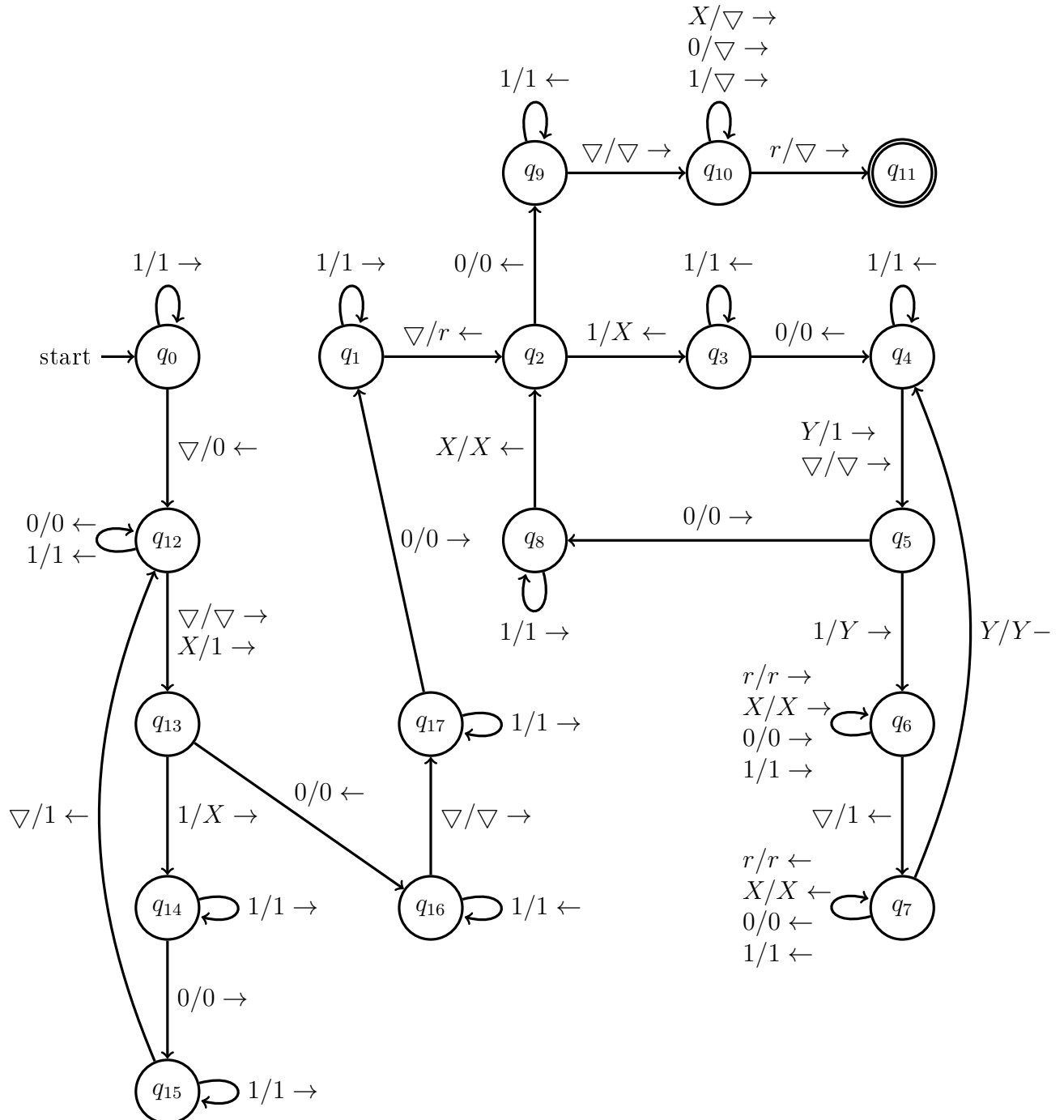
**Zad 1.13.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(m, n) = n^2$$

dla liczby naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{17}\}, \{1\}, \{1, 0, X, Y, r, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{11}\}).$$





**Zad 1.19.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która kopiuje wejściowy łańcuch  $w$  dla alfabetu  $\Sigma = \{a, b\}$ . Rozwiązanie może nie zawierać separatora

$$q_0 w \vdash^* q_f w w$$

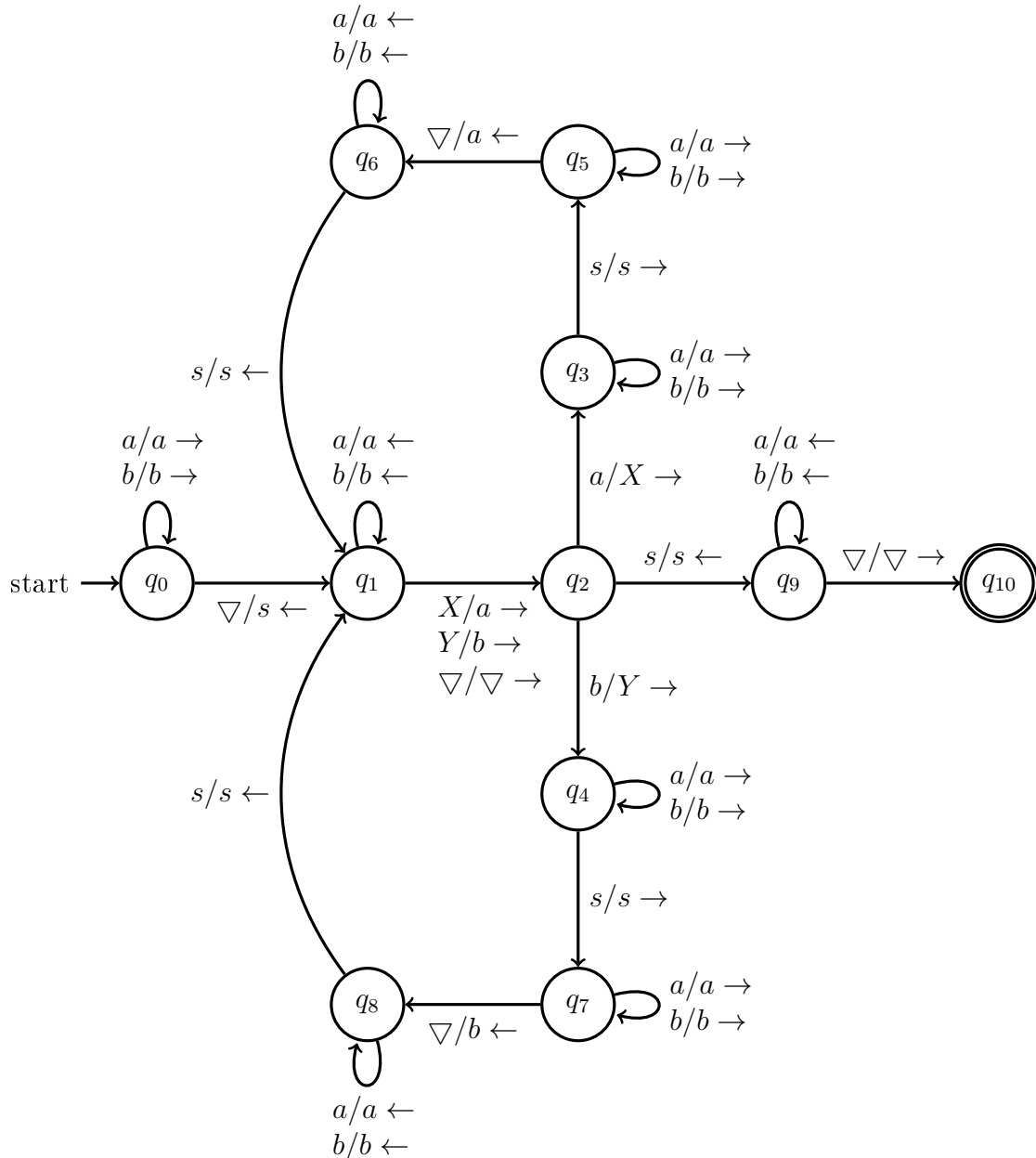
lub może zawierać dowolny separator, na przykład separatorem może być blank, czyli

$$q_0 w \vdash^* q_f w \nabla w.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{10}\}, \{a, b\}, \{a, b, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{10}\}).$$



Obliczenia  $w = a$ 

$\nabla$	$a$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$s$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$s$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$s$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$X$	$s$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$X$	$s$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$X$	$s$	$a$	$\nabla$	
$\nabla$	$X$	$s$	$a$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$s$	$a$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$s$	$a$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$s$	$a$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$s$	$a$	$\nabla$	

$K_0$	$q_0 a \vdash$
$K_1$	$a q_0 \nabla \vdash$
$K_2$	$q_1 a s \vdash$
$K_3$	$q_1 \nabla a s \vdash$
$K_4$	$q_2 a s \vdash$
$K_5$	$X q_3 s \vdash$
$K_6$	$X s q_5 \nabla \vdash$
$K_7$	$X q_6 s a \vdash$
$K_8$	$q_1 X s a \vdash$
$K_9$	$a q_2 s a \vdash$
$K_{10}$	$q_9 a s a \vdash$
$K_{11}$	$q_9 \nabla a s a \vdash$
$K_{12}$	$q_{10} a s a$

 Obliczenia  $w = ab$ 

$\nabla$	$a$	$b$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$s$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$s$	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$	

$K_0$	$q_0 a b \vdash$
$K_1$	$a q_0 b \vdash$
$K_2$	$a b q_0 \nabla \vdash$
$K_3$	$a q_1 b s \vdash$
$K_4$	$q_1 a b s \vdash$

 $\vdots$ 

$\nabla$	$a$	$Y$	$s$	$a$	$b$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$s$	$a$	$b$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$s$	$a$	$b$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$s$	$a$	$b$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$s$	$a$	$b$	$\nabla$	
$\nabla$	$a$	$b$	$s$	$a$	$b$	$\nabla$	

$K_{19}$	$a q_1 Y s a b \vdash$
$K_{20}$	$a b q_2 s a b \vdash$
$K_{21}$	$a q_9 b s a b \vdash$
$K_{22}$	$q_9 a b s a b \vdash$
$K_{23}$	$q_9 \nabla a b s a b \vdash$
$K_{24}$	$q_{10} a b s a b$

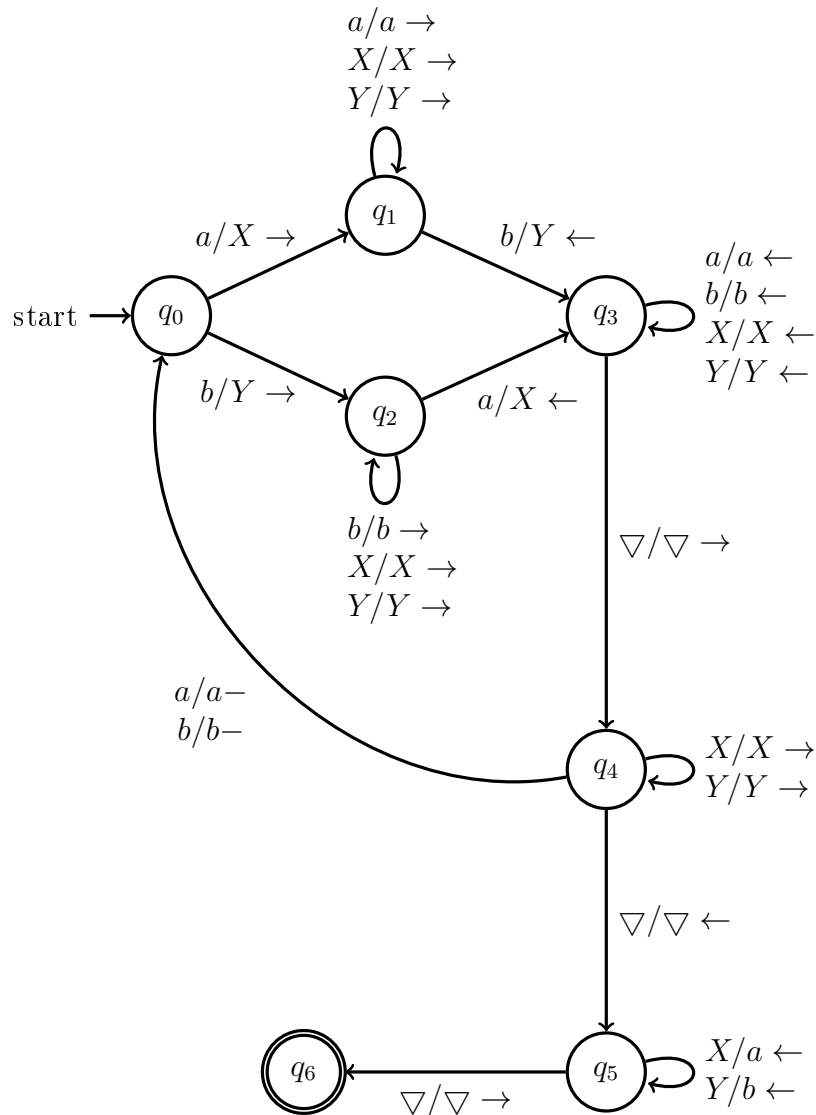
**Zad 1.22.** Zaprojektuj maszynę Turinga nad alfabetem  $\Sigma = \{a, b\}$ , która akceptuje język

$$L = \{w : w \text{ zawiera równą liczbę symboli } a \text{ i } b\}.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_6\}).$$



Obliczenia  $w = ab$

	$\nabla$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$a$	$b$	$\nabla$	

$K_0$	$q_0ab \vdash$
$K_1$	$Xq_1b \vdash$
$K_2$	$q_3XY \vdash$
$K_3$	$q_3 \nabla XY \vdash$
$K_4$	$q_4XY \vdash$
$K_5$	$Xq_4Y \vdash$
$K_6$	$XYq_4 \nabla \vdash$
$K_7$	$Xq_5Y \vdash$
$K_8$	$q_5Xb \vdash$
$K_9$	$q_5 \nabla ab \vdash$
$K_{10}$	$q_6ab$

Obliczenia  $w = abab$

	$\nabla$	$a$	$b$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$b$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$a$	$b$	$\nabla$	

$K_0$	$q_0abab \vdash$
$K_1$	$Xq_1bab \vdash$
$K_2$	$q_3XYab \vdash$
$K_3$	$q_3 \nabla XYab \vdash$
$K_4$	$q_4XYab \vdash$
$K_5$	$Xq_4Yab \vdash$

$\vdots$

	$\nabla$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$X$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$Y$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$X$	$b$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$a$	$b$	$a$	$b$	$\nabla$	
	$\nabla$	$a$	$b$	$a$	$b$	$\nabla$	

$K_{18}$	$XYXq_5Y \vdash$
$K_{19}$	$XYq_5Xb \vdash$
$K_{20}$	$Xq_5Yab \vdash$
$K_{21}$	$q_5Xbab \vdash$
$K_{22}$	$q_5 \nabla abab \vdash$
$K_{23}$	$q_6abab \vdash$

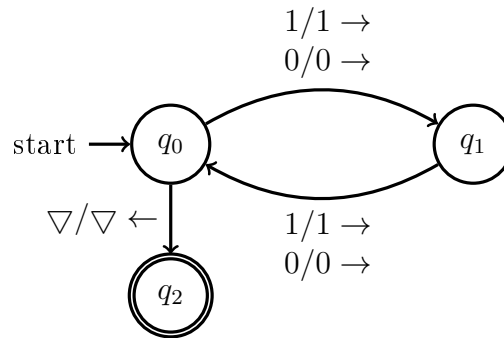
**Zad 1.23.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{w : |w| \text{ jest parzysta}\}$$

nad alfabetem  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_2\}).$$



Obliczenia  $w = 1011$

$\nabla$	1	0	1	1	$\nabla$		$K_0$	$q_0 1011 \vdash$
$\nabla$	1	0	1	1	$\nabla$		$K_1$	$1q_1 011 \vdash$
$\nabla$	1	0	1	1	$\nabla$		$K_2$	$10q_0 11 \vdash$
$\nabla$	1	0	1	1	$\nabla$		$K_3$	$101q_1 1 \vdash$
$\nabla$	1	0	1	1	$\nabla$		$K_4$	$1011q_0 \nabla \vdash$
$\nabla$	1	0	1	1	$\nabla$		$K_5$	$101q_2 1$

Obliczenia  $w = 00$

$\nabla$	0	0	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$		$K_0$	$q_0 00 \vdash$
$\nabla$	0	0	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$		$K_1$	$0q_1 0 \vdash$
$\nabla$	0	0	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$		$K_2$	$00q_0 \nabla \vdash$
$\nabla$	0	0	$\nabla$	$\nabla$	$\nabla$		$K_3$	$0q_2 0$

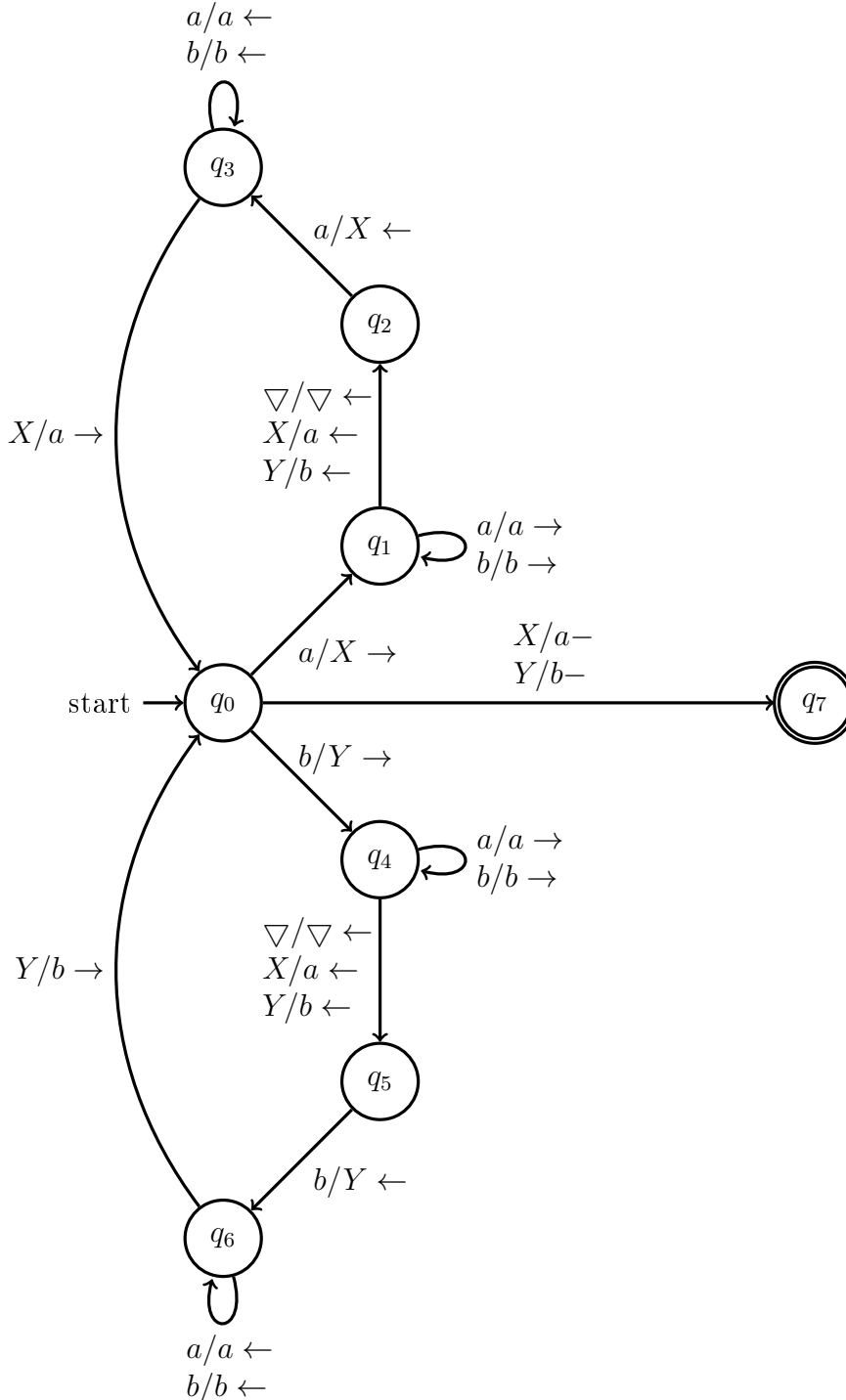
**Zad 1.25.** Niech  $\Sigma = \{a, b\}$ . Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\},$$

gdzie  $w^R$  oznacza **odwrócenie**  $w$ , a więc jeśli  $w = a_1a_2\dots a_k$ , to  $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$



Obliczenia  $q = \text{abba}$

$\nabla$	$a$	$b$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_0$	$q_0abba \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_1$	$Xq_1bba \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_2$	$Xbq_1ba \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_3$	$Xbbq_1a \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_4$	$Xbbaq_1\nabla \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_5$	$Xbbq_2a \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$X$	$\nabla$	$K_6$	$Xbq_3bX \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$X$	$\nabla$	$K_7$	$Xq_3bbX \vdash$
$\nabla$	$X$	$b$	$b$	$X$	$\nabla$	$K_8$	$q_3XbbX \vdash$
$\nabla$	$a$	$b$	$b$	$X$	$\nabla$	$K_9$	$aq_0bbX \vdash$
$\nabla$	$a$	$Y$	$b$	$X$	$\nabla$	$K_{10}$	$aYq_4bX \vdash$
$\nabla$	$a$	$Y$	$b$	$X$	$\nabla$	$K_{11}$	$aYbq_4X \vdash$
$\nabla$	$a$	$Y$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_{12}$	$aYq_5ba \vdash$
$\nabla$	$a$	$Y$	$Y$	$a$	$\nabla$	$K_{13}$	$aq_6YYa \vdash$
$\nabla$	$a$	$b$	$Y$	$a$	$\nabla$	$K_{14}$	$abq_0Ya \vdash$
$\nabla$	$a$	$b$	$b$	$a$	$\nabla$	$K_{15}$	$abq_7ba$

Obliczenia  $q = \text{aa}$

$\nabla$ $a$ $a$ $\nabla$	$K_0$	$q_0aa \vdash$
$\nabla$ $X$ $a$ $\nabla$	$K_1$	$Xq_1a \vdash$
$\nabla$ $X$ $a$ $\nabla$	$K_2$	$Xaq_1\nabla \vdash$
$\nabla$ $X$ $a$ $\nabla$	$K_3$	$Xq_2a \vdash$
$\nabla$ $X$ $X$ $\nabla$	$K_4$	$q_3XX \vdash$
$\nabla$ $a$ $X$ $\nabla$	$K_5$	$aq_0X \vdash$
$\nabla$ $a$ $a$ $\nabla$	$K_6$	$aq_7a$

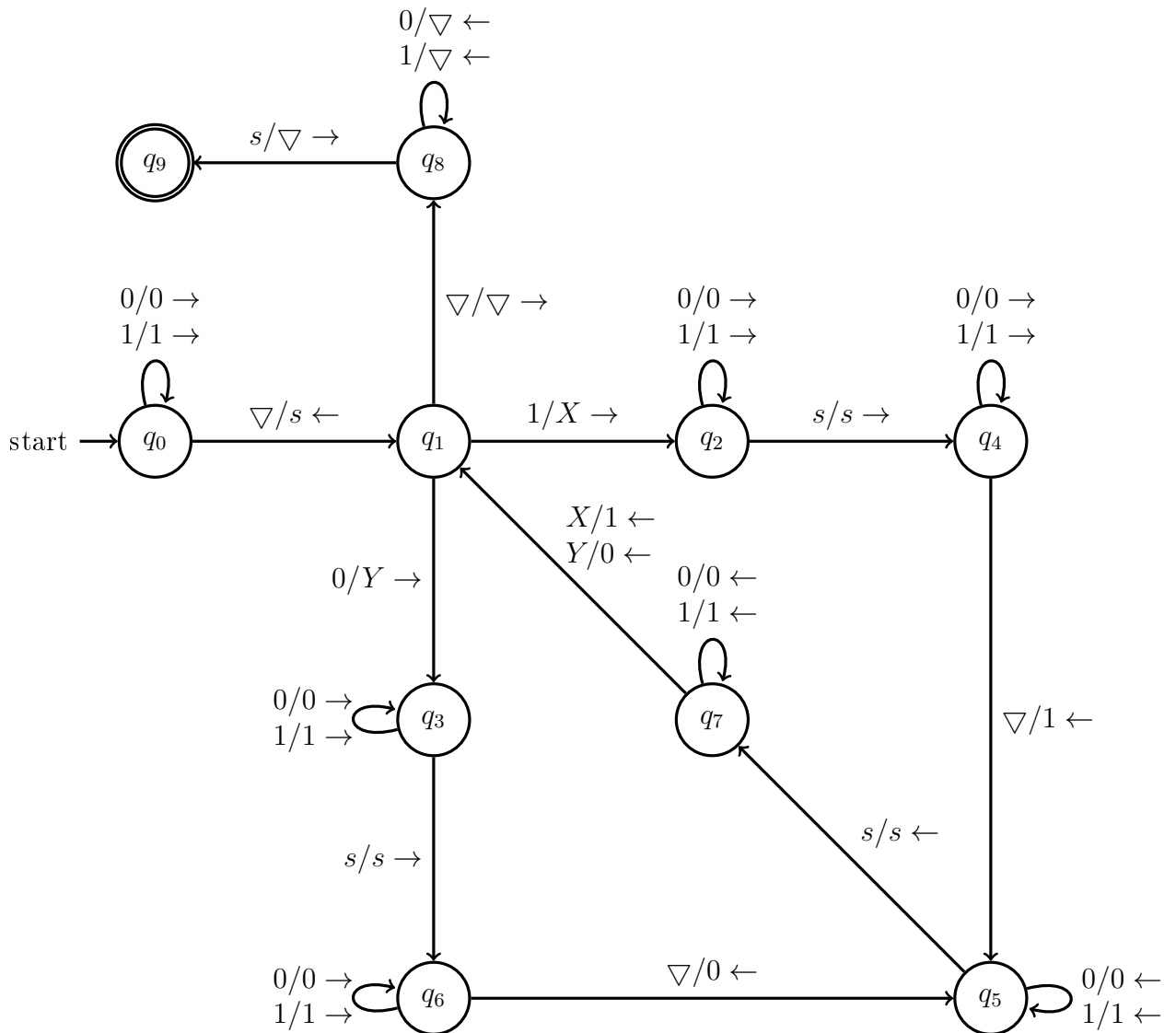
**Zad 1.27.** Niech  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza odwrócenie łańcucha, czyli funkcję

$$f(w) = w^R$$

gdzie  $w \in \{0, 1\}^+$  oraz  $w^R$  oznacza **odwrócenie**  $w$ , a więc jeśli  $w = a_1 a_2 \dots a_k$ , to  $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1, 0\}, \{1, 0, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$





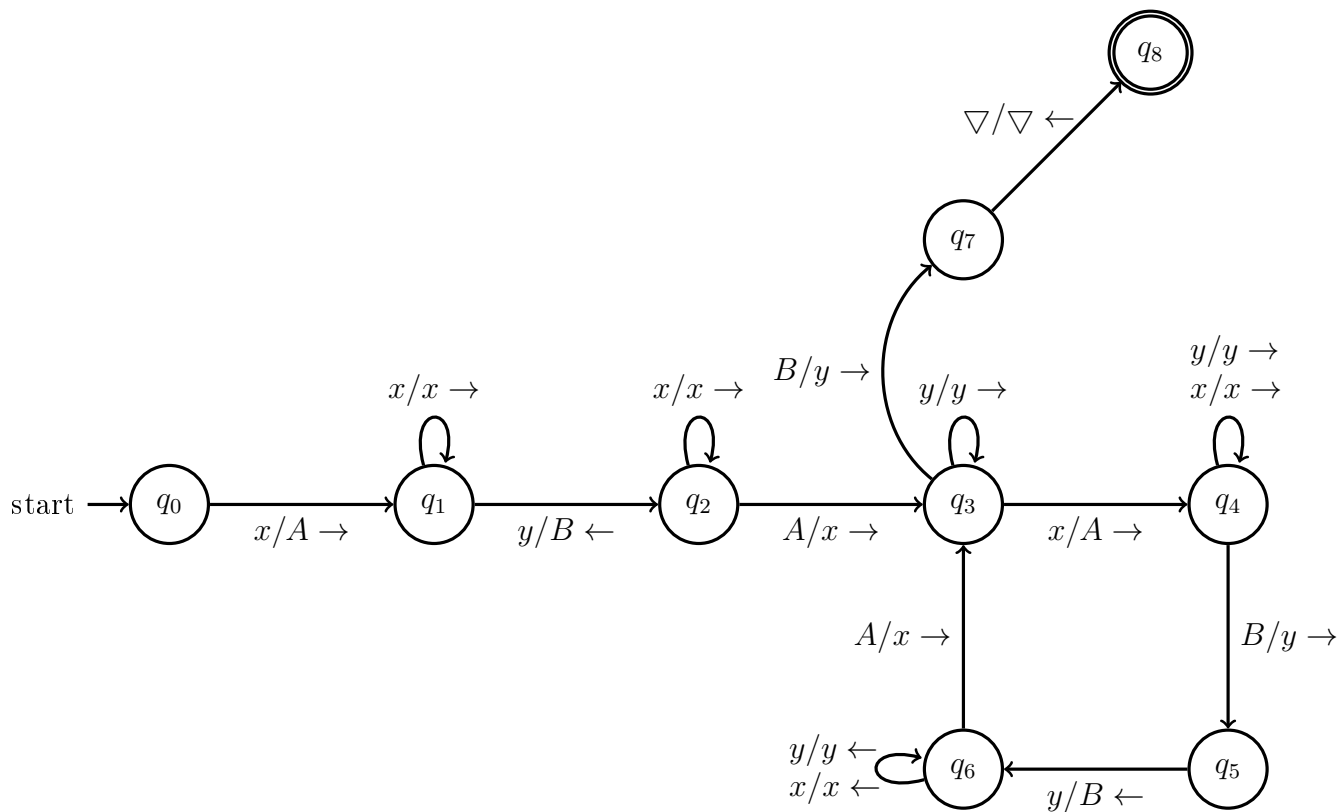
**Zad 1.30.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{x^n y^n : n \geq 1\}$$

nad alfabetem  $\Sigma = \{x, y\}$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_8\}, \{x, y\}, \{x, y, A, B, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_8\}).$$



Obliczenia  $w = xy$

	∇	∇	x	y	∇	∇
	∇	∇	A	y	∇	∇
	∇	∇	A	B	∇	∇
	∇	∇	x	B	∇	∇
	∇	∇	x	y	∇	∇
	∇	∇	x	y	∇	∇

$K_0$	$q_0 xy \vdash$
$K_1$	$Aq_1 y \vdash$
$K_2$	$q_2 AB \vdash$
$K_3$	$xq_3 B \vdash$
$K_4$	$xyq_7 \nabla \vdash$
$K_5$	$xq_8 y$

Obliczenia  $w = xxyy$

$\nabla$	$x$	$x$	$y$	$y$	$\nabla$	$K_0$	$q_0xxyy \vdash$
$\nabla$	$A$	$x$	$y$	$y$	$\nabla$	$K_1$	$Aq_1xyy \vdash$
$\nabla$	$A$	$x$	$y$	$y$	$\nabla$	$K_2$	$Axq_1yy \vdash$
$\nabla$	$A$	$x$	$B$	$y$	$\nabla$	$K_3$	$Aq_2xB y \vdash$
$\nabla$	$A$	$x$	$B$	$y$	$\nabla$	$K_4$	$q_2AxB y \vdash$
$\nabla$	$x$	$x$	$B$	$y$	$\nabla$	$K_5$	$xq_3xB y \vdash$
$\nabla$	$x$	$A$	$B$	$y$	$\nabla$	$K_6$	$xAq_4B y \vdash$
$\nabla$	$x$	$A$	$y$	$y$	$\nabla$	$K_7$	$xAyq_5y \vdash$
$\nabla$	$x$	$A$	$y$	$B$	$\nabla$	$K_8$	$xAq_6yB \vdash$
$\nabla$	$x$	$A$	$y$	$B$	$\nabla$	$K_9$	$xq_6AyB \vdash$
$\nabla$	$x$	$x$	$y$	$B$	$\nabla$	$K_{10}$	$xxq_3yB \vdash$
$\nabla$	$x$	$x$	$y$	$B$	$\nabla$	$K_{11}$	$xyq_3B \vdash$
$\nabla$	$x$	$x$	$y$	$y$	$\nabla$	$K_{12}$	$xyyq_7\nabla \vdash$
$\nabla$	$x$	$x$	$y$	$y$	$\nabla$	$K_{13}$	$xyq_8y$

**Zad 1.46.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie  $\mathbf{a(a + b)^*bb}$ . Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

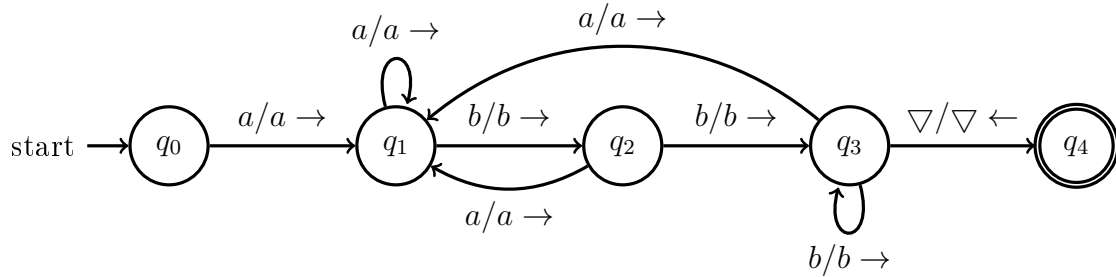
$$L = L(\mathbf{a(a + b)^*bb})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

1. abb
2. aaaabbbb
3. ababaaabbbb
4. aaabbaabbabb

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{a, b, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$



Obliczenia  $w = abb$

	∇	a	b	b	∇	∇
	∇	a	b	b	∇	∇
	∇	a	b	b	∇	∇
	∇	a	b	b	∇	∇
	∇	a	b	b	∇	∇

$K_0$	$q_0abb \vdash$
$K_1$	$aq_1bb \vdash$
$K_2$	$abq_2b \vdash$
$K_3$	$abbq_3\triangledown \vdash$
$K_4$	$abq_4b$

Obliczenia  $w = aabb$

	∇	a	a	b	b	∇
	∇	a	a	b	b	∇
	∇	a	a	b	b	∇
	∇	a	a	b	b	∇
	∇	a	a	b	b	∇
	∇	a	a	b	b	∇

$K_0$	$q_0aabb \vdash$
$K_1$	$aq_1abb \vdash$
$K_2$	$aaq_1bb \vdash$
$K_3$	$aabq_2b \vdash$
$K_4$	$aabbq_3 \vdash$
$K_5$	$aabq_4b$

**Zad 1.47.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie  $\mathbf{10+(0+11)0^*1}$ . Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

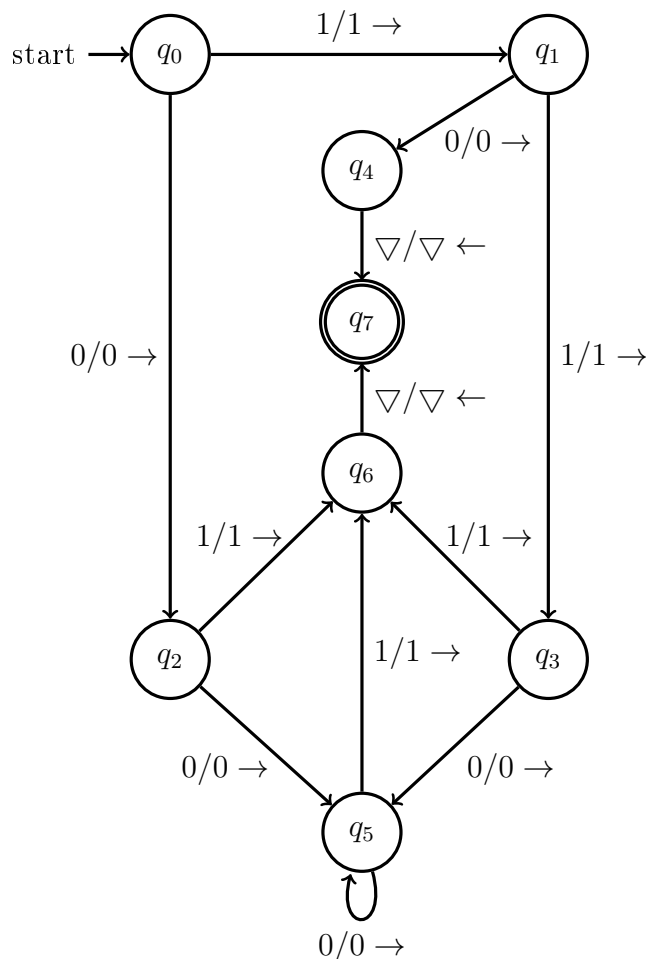
$$L = L(\mathbf{10+(0+11)0^*1})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

1. 10
2. 000001
3. 110001
4. 111

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$



Obliczenia  $w = 1101$

	$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	0	1	$\nabla$	

$K_0$	$q_0 1101 \vdash$
$K_1$	$1q_1 101 \vdash$
$K_2$	$11q_3 01 \vdash$
$K_3$	$110q_5 1 \vdash$
$K_4$	$1101q_6 \nabla \vdash$
$K_5$	$110q_7 1$

Obliczenia  $w = 111$

	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	$\nabla$	
	$\nabla$	1	1	1	$\nabla$	$\nabla$	

$K_0$	$q_0 111 \vdash$
$K_1$	$1q_1 11 \vdash$
$K_2$	$11q_3 1 \vdash$
$K_3$	$111q_6 \nabla \vdash$
$K_4$	$11q_7 1$