WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

ZADANIA DLA CHĘTNYCH
Zestaw 1. Wersja 1.0.0

VIKTAR ZHDANOVICH LB6

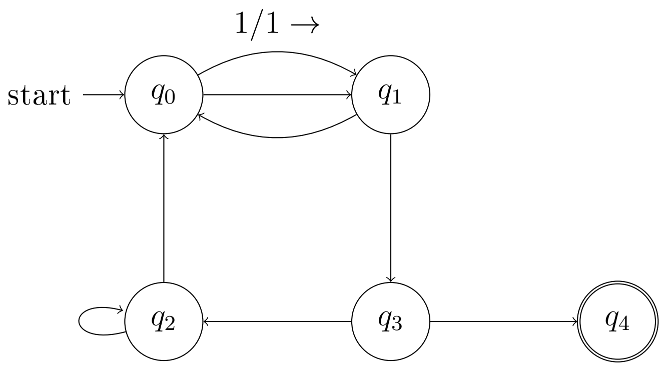
Zad 1.1. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję odejmowania ograniczonego f dla liczb naturalnych m i n w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m,n) = m \dot{-} n = \begin{cases} m-n, & \text{jeżeli } m \geq n, \\ 0, & \text{jezeli } m < n \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_7\}).$$



Zad 1.2. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję mnożenia f dla liczb naturalnych m i n w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m,n) = m \cdot n$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia, w tym pomnóż 3·2 lub 2·3 (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{11}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_{11}\}).$$

Zad 1.3. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję f dla liczby-naturalnej n w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jezeli } n \text{ jest niparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_9\}, \{1\}, \{1, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_9\}).$$

Zad 1.5. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję f dla liczby naturalnej n w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_6\}, \{1\}, \{1, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_6\}).$$

Zad 1.7. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję signum (znaku)

$$sgn(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } n = 0 \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1\}, \{1, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_4\}).$$

Zad 1.9. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{1\}, \{1, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_5\}).$

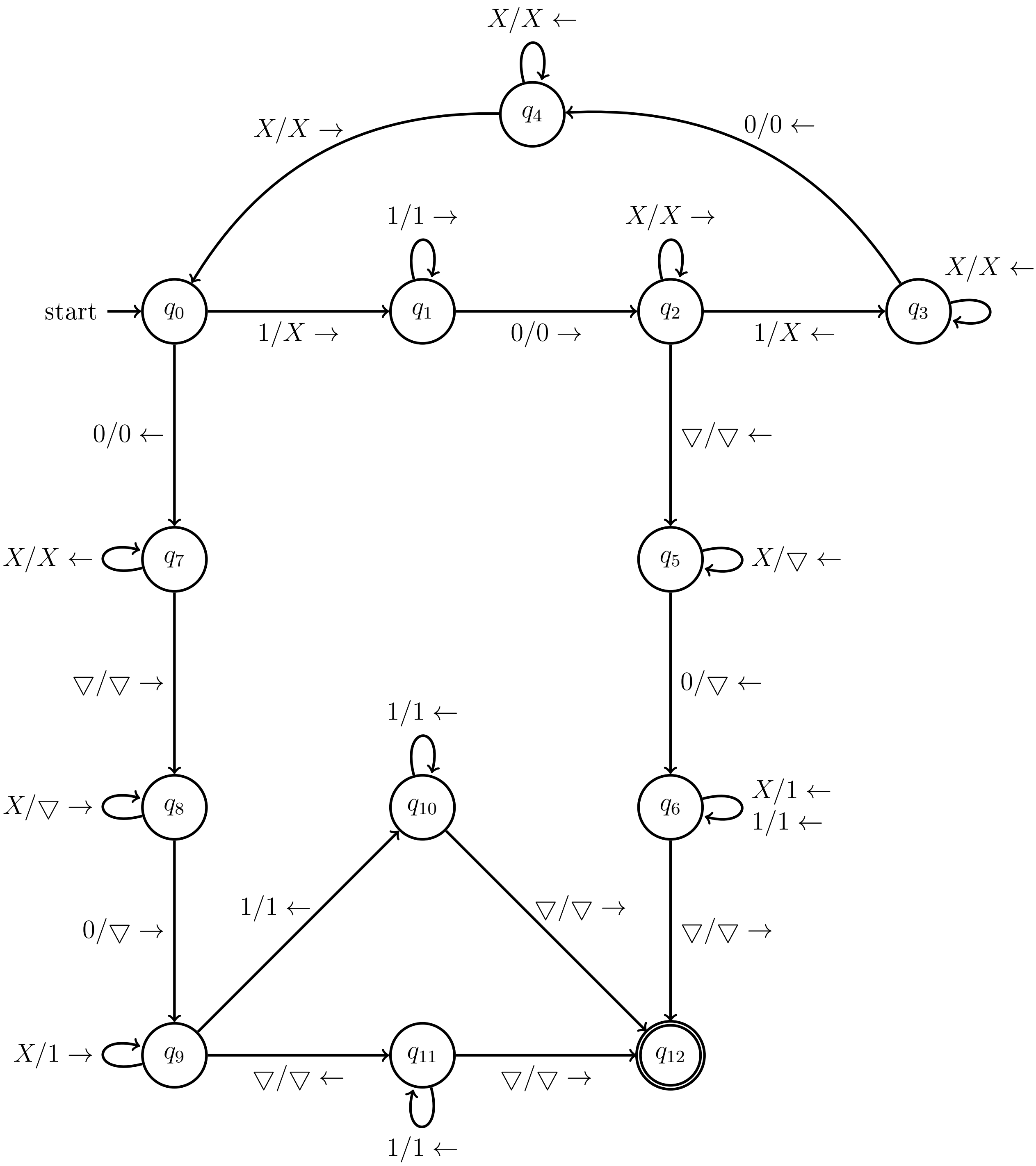
Zad 1.11. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję maksimum dla liczb naturalnych m i n w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(n) = max(m, n).$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{12}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_{12}\}).$



Zad 1.13. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(m,n) = n^2$$

dla liczby naturalnej n w reprezentacji unarnej. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{17}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, Y, r, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_{17}\})$.

Zad 1.19. Zaprojektuj maszynę Turinga, która kopiuje wejściowy łańcuch w dla alfabetu $\Sigma = \{a, b\}$. Rozwiązanie może nie zawierać separatora

$$q_0 w \overset{*}{\vdash} q_f w w$$

lub może zawierać dowolny separator, na przykład separatorem może być blank, czyli

$$q_0 w \overset{*}{\vdash} q_f w \bigtriangledown w.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_{10}\}, \{a, b\}, \{a, b, s, X, Y, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_{10}\}).$$

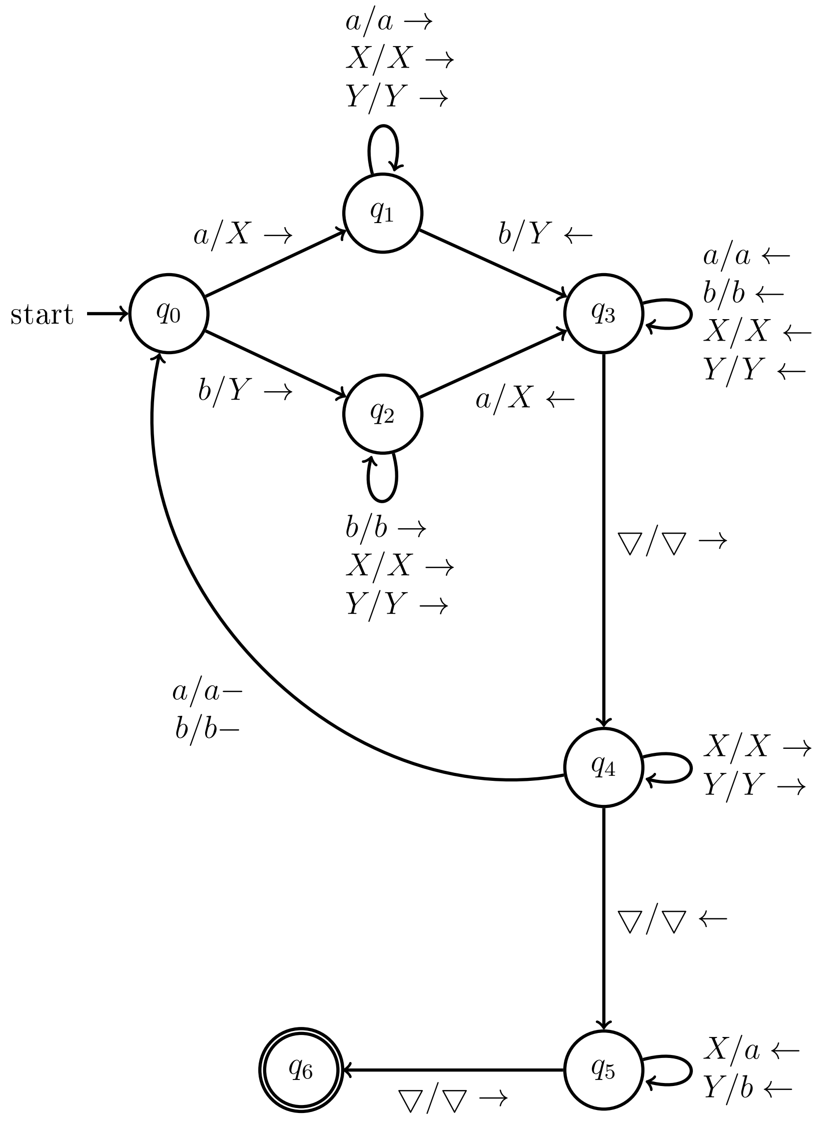
Zad 1.22. Zaprojektuj maszynę Turinga nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$, która akceptuje język

$$L = \{w\colon\ w \text{ zawiera równą liczbę symboli } a \text{ i } b\}.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_6\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_6\}).$$



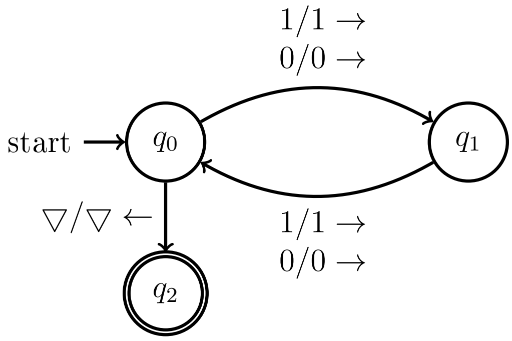
Zad 1.23. Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{w\colon\ |w| \text{ jest parzysta}\}$$

nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_2\}).$$



Zad 1.25. Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{ww^R \colon\ w \in \{a, b\}^*\},$$

gdzie w^R oznacza **odwrócenie** w, a więc jeśli $w = a_1a_2...a_k$, to $w^R = a_ka_{k-1}...a_1$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_8\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_8\})$.

Zad 1.27. Niech $\Sigma = \{0, 1\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza odwrócenie łańcucha, czyli funkcję

$$f(w) = w^R$$

gdzie $w \in \{0, 1\}^+$ oraz w^R oznacza **odwrócenie** w, a więc jeśli $w = a_1 a_2 ... a_k$, to $w^R = a_k a_{k-1} ... a_1$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_9\}, \{1, 0\}, \{1, 0, s, X, Y, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_9\})$.

Zad 1.30. Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{x^n y^n \colon\ n \geq 1\}$$

nad alfabetem $\Sigma = \{x, y\}$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, ..., q_8\}, \{x, y\}, \{x, y, A, B, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_8\})$.

Zad 1.46. Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie $\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{bb}$. Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga,która akceptuje język

$$L = L(\mathbf{a}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*\mathbf{bb})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{a, b, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_4\}).$$

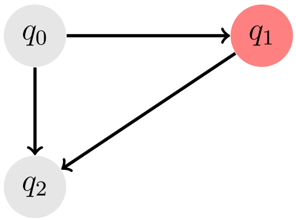
Zad 1.47. Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie **10+(0+11)0*1**. Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

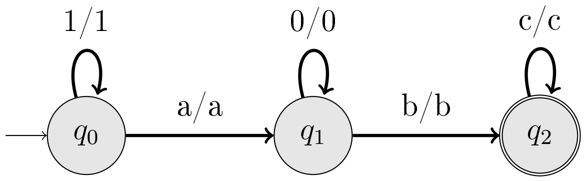
$$L = L(\mathbf{10+(0+11)0^{*}1})?$$

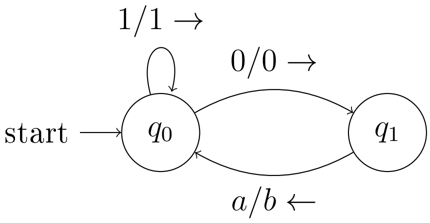
Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wy-konaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

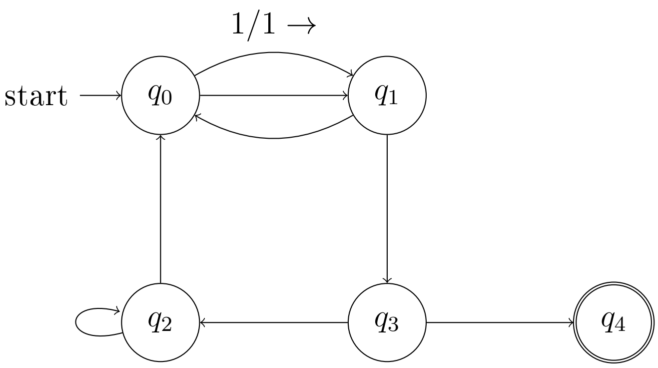
Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \bigtriangledown, F) = (\{q_0, ..., q_8\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \bigtriangledown\}, \delta, q_0, \bigtriangledown, \{q_8\}).$$


q_0
q_1
q_2


1/1
0/0
c/c
a/a
b/b
q_0
q_1
q_2


1/1 →
0/0 →
start
q_0
q_1
a/b ←


1/1 →
start
q_0
q_1
q_2
q_3
q_4