

# WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

ZADANIA DLA CHEŃNYCH  
Zestaw 1. Wersja 1.0.0

VIKTAR ZHDANOVICH LB6

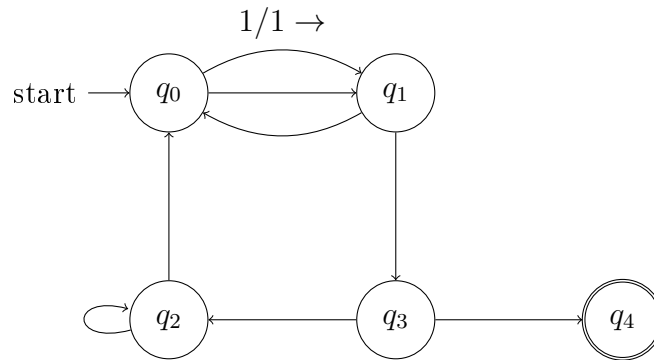
**Zad 1.1.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję odejmowania ograniczonego  $f$  dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m - n = \begin{cases} m - n, & \text{jeżeli } m \geq n, \\ 0, & \text{jeżeli } m < n \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$



**Zad 1.2.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję mnożenia  $f$  dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m \cdot n$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia, w tym pomnóż  $3 \cdot 2$  lub  $2 \cdot 3$  (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{11}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{11}\}).$$

**Zad 1.3.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję  $f$  dla liczby-naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1\}, \{1, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$

**Zad 1.5.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję  $f$  dla liczby naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangleright, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{1\}, \{1, \triangleright\}, \delta, q_0, \triangleright, \{q_6\}).$$

**Zad 1.7.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję signum (znaku)

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } n = 0 \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1\}, \{1, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$

**Zad 1.9.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{1\}, \{1, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_5\}).$$

**Zad 1.11.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję maksimum dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(n) = \max(m, n).$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{12}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{12}\}).$$



**Zad 1.13.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(m, n) = n^2$$

dla liczby naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{17}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, Y, r, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{17}\}).$$

**Zad 1.19.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która kopiuje wejściowy łańcuch  $w$  dla alfabetu  $\Sigma = \{a, b\}$ . Rozwiązanie może nie zawierać separatora

$$q_0 w \vdash^* q_f w w$$

lub może zawierać dowolny separator, na przykład separatorem może być blank, czyli

$$q_0 w \vdash^* q_f w \nabla w.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{10}\}, \{a, b\}, \{a, b, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{10}\}).$$

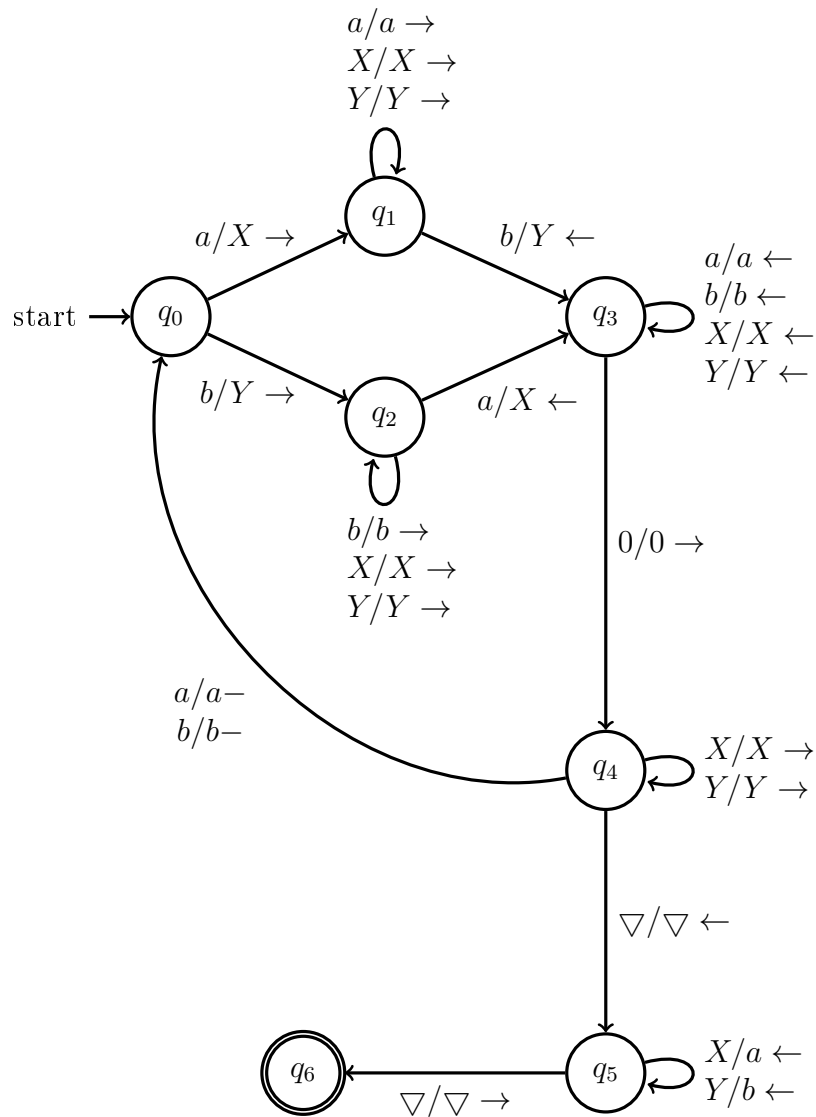
**Zad 1.22.** Zaprojektuj maszynę Turinga nad alfabetem  $\Sigma = \{a, b\}$ , która akceptuje język

$$L = \{w: w \text{ zawiera równą liczbę symboli } a \text{ i } b\}.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_6\}).$$



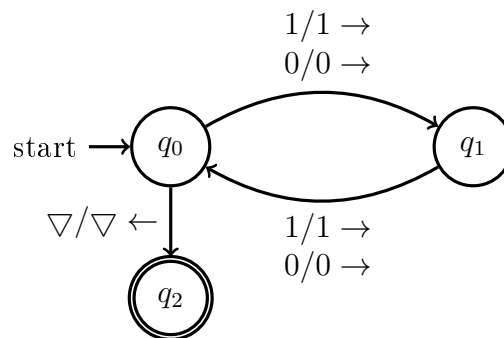
**Zad 1.23.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{w : |w| \text{ jest parzysta}\}$$

nad alfabetem  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangleright, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangleright\}, \delta, q_0, \triangleright, \{q_2\}).$$



**Zad 1.25.** Niech  $\Sigma = \{a, b\}$ . Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\},$$

gdzie  $w^R$  oznacza **odwrócenie**  $w$ , a więc jeśli  $w = a_1a_2\dots a_k$ , to  $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_8\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_8\}).$$

**Zad 1.27.** Niech  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza odwrócenie łańcucha, czyli funkcję

$$f(w) = w^R$$

gdzie  $w \in \{0, 1\}^+$  oraz  $w^R$  oznacza **odwrócenie**  $w$ , a więc jeśli  $w = a_1 a_2 \dots a_k$ , to  $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1, 0\}, \{1, 0, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$

**Zad 1.30.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{x^n y^n : n \geq 1\}$$

nad alfabetem  $\Sigma = \{x, y\}$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_8\}, \{x, y\}, \{x, y, A, B, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_8\}).$$

**Zad 1.46.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie  $\mathbf{a(a + b)^*bb}$ . Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = L(\mathbf{a(a + b)^*bb})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{a, b, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$



**Zad 1.47.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie  $10+(0+11)0^*1$ . Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = L(10+(0+11)0^*1)?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wy-konaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_8\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_8\}).$$

