

WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

ZADANIA DLA CHĘTNYCH
Zestaw 1. Wersja 1.0.0

VIKTAR ZHDANOVICH LB6

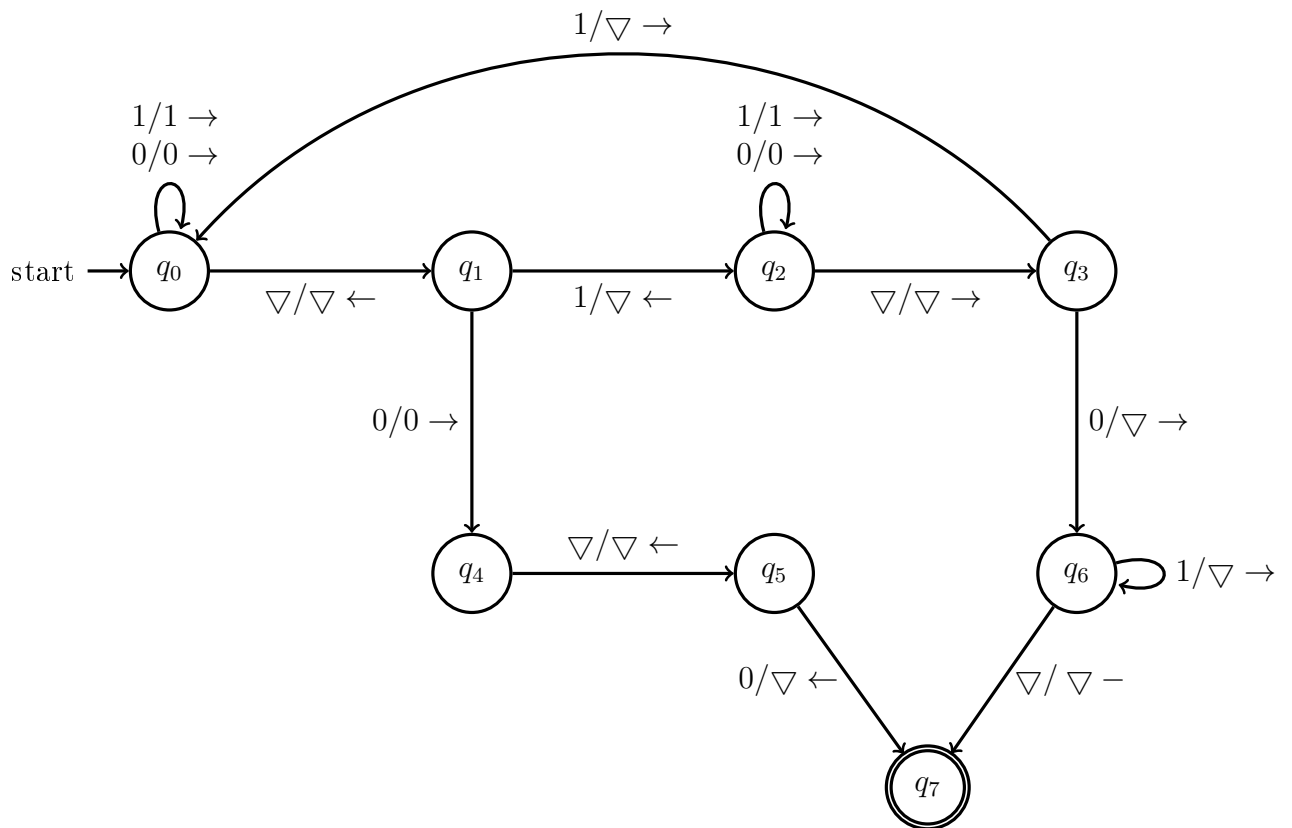
Zad 1.1. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję odejmowania ograniczonego f dla liczb naturalnych m i n w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m - n = \begin{cases} m - n, & \text{jeżeli } m \geq n, \\ 0, & \text{jeżeli } m < n \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_7\}).$$



Obliczenia $m = 2$, $n = 1$

∇	1	1	0	1	∇	K_0	$q_0 1101 \vdash$
∇	1	1	0	1	∇	K_1	$1q_0 101 \vdash$
∇	1	0	1	1	∇	K_2	$11q_0 01 \vdash$
∇	1	1	0	1	∇	K_3	$110q_0 1 \vdash$
∇	1	1	0	1	∇	K_4	$1101q_0 \vdash$
∇	1	0	1	1	∇	K_5	$110q_1 1 \vdash$
∇	1	0	1	∇	∇	K_6	$11q_2 0 \vdash$
∇	1	0	∇	∇	∇	K_7	$1q_2 10 \vdash$
∇	1	1	0	∇	∇	K_8	$q_2 110 \vdash$
∇	1	1	0	∇	∇	K_9	$q_2 \nabla 110 \vdash$
∇	1	1	0	∇	∇	K_{10}	$q_3 110 \vdash$
∇	∇	1	0	∇	∇	K_{11}	$q_0 10 \vdash$
∇	∇	1	0	∇	∇	K_{12}	$1q_0 0 \vdash$
∇	∇	1	0	∇	∇	K_{13}	$10q_0 \nabla \vdash$
∇	∇	1	0	∇	∇	K_{14}	$1q_1 0 \vdash$
∇	∇	1	0	∇	∇	K_{15}	$10q_4 \nabla \vdash$
∇	∇	1	0	∇	∇	K_{16}	$1q_5 0 \vdash$
∇	∇	1	∇	∇	∇	K_{17}	$q_7 1$

Obliczenia $m = 1$, $n = 1$

	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	1	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	1	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	0	▽	▽	
	▽	▽	▽	▽	▽	

K_0	$q_0 101 \vdash$
K_1	$1 q_0 01 \vdash$
K_2	$10 q_0 1 \vdash$
K_3	$101 q_0 \nabla \vdash$
K_4	$10 q_1 1 \vdash$
K_5	$1 q_2 0 \vdash$
K_6	$q_2 10 \vdash$
K_7	$q_2 \nabla 10 \vdash$
K_8	$q_3 10 \vdash$
K_9	$q_0 0 \vdash$
K_{10}	$0 q_0 \nabla \vdash$
K_{11}	$q_1 0 \vdash$
K_{12}	$0 q_4 \nabla \vdash$
K_{13}	$q_5 0 \vdash$
K_{14}	$q_7 \nabla$

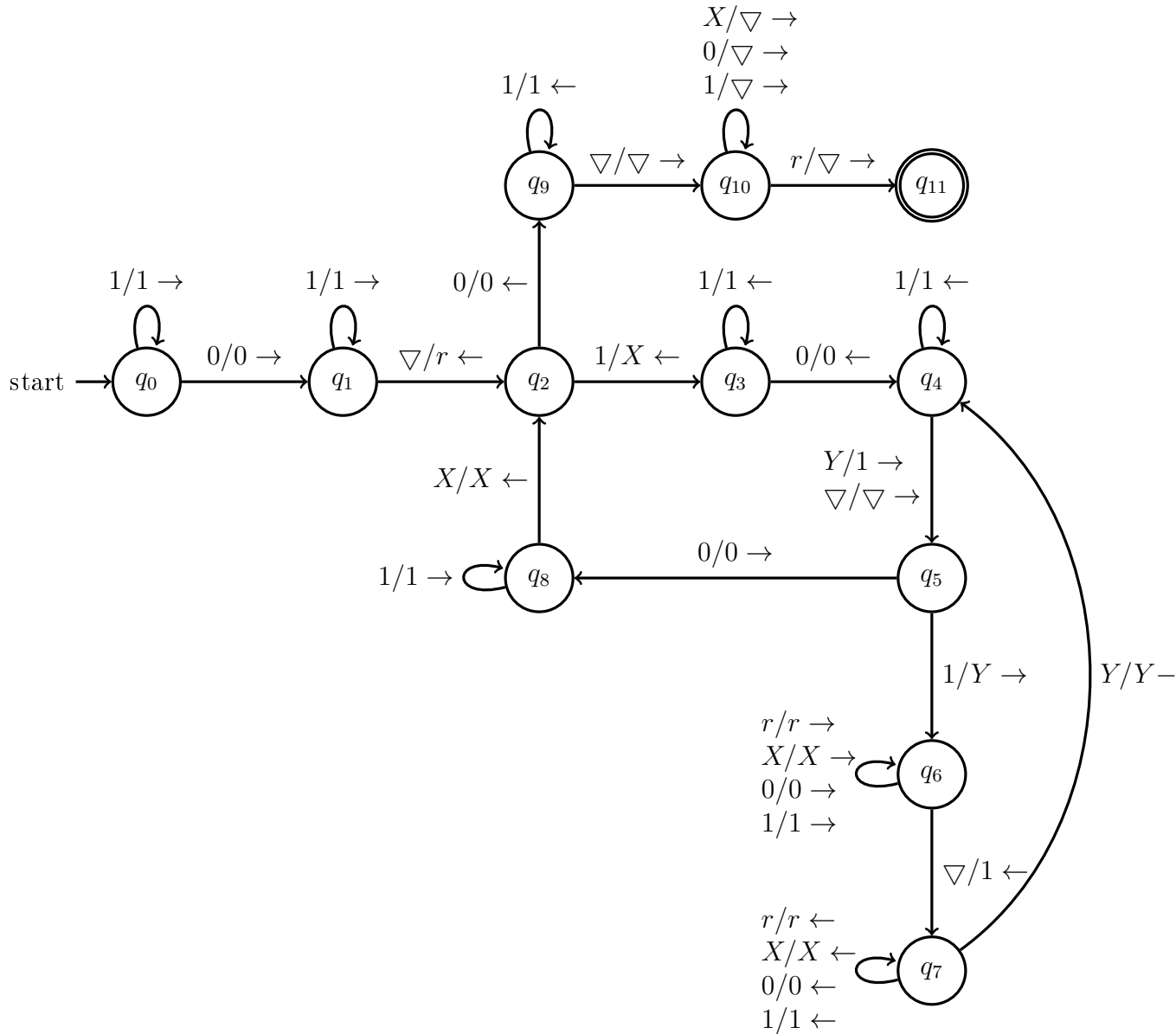
Zad 1.2. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję mnożenia f dla liczb naturalnych m i n w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m \cdot n$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia, w tym pomnóż $3 \cdot 2$ lub $2 \cdot 3$ (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{11}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, r, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{11}\}).$$



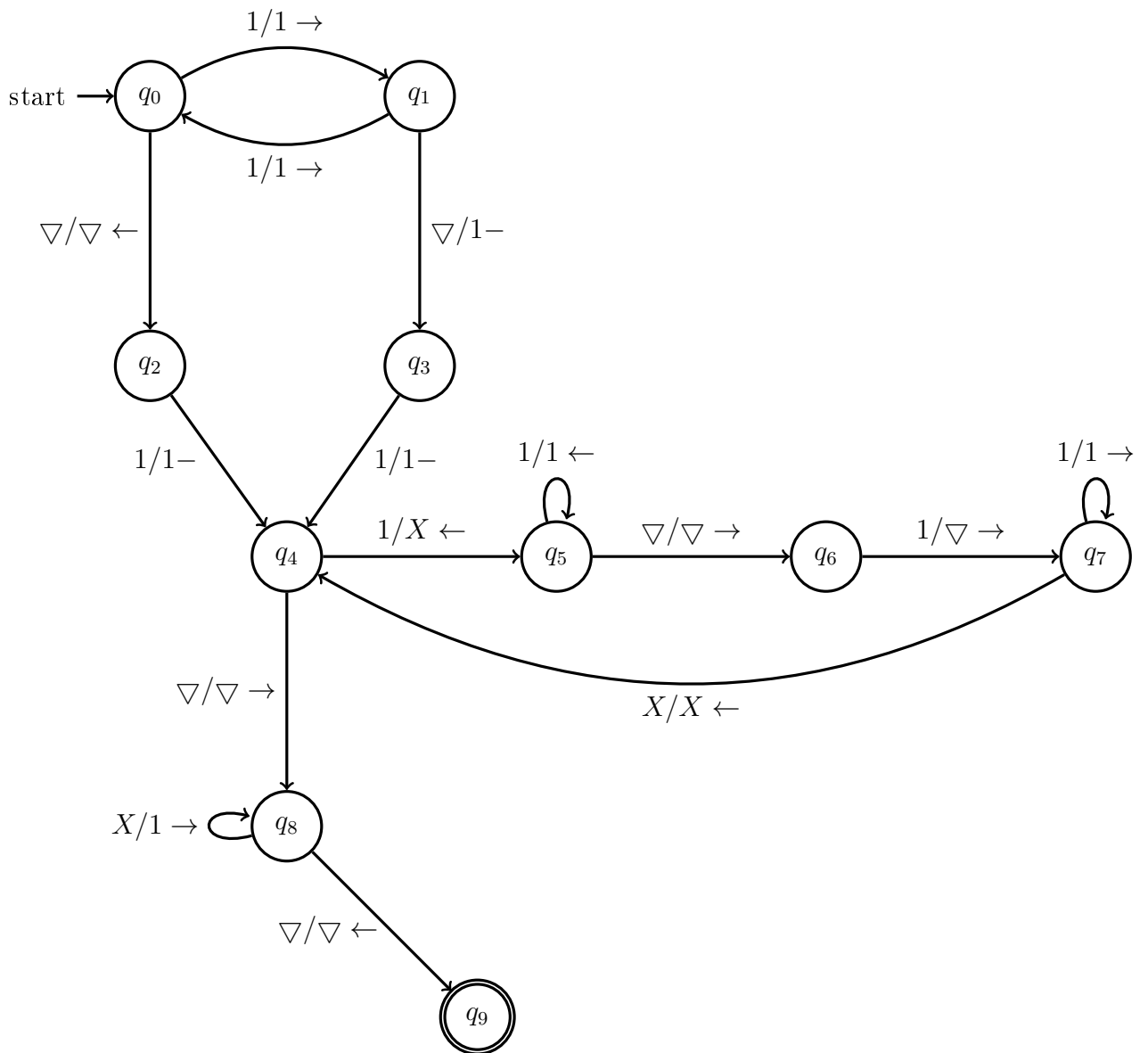
Zad 1.3. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję f dla liczb naturalnej n w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1\}, \{1, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$



Obliczenia $n = 1$

	∇	∇	1	∇	∇
	∇	∇	1	∇	∇
	∇	∇	1	1	∇
	∇	∇	1	1	∇
	∇	∇	1	X	∇
	∇	∇	1	X	∇
	∇	∇	1	X	∇
	∇	∇	∇	X	∇
	∇	∇	∇	X	∇
	∇	∇	∇	1	∇
	∇	∇	∇	1	∇

K_0	$\nabla q_0 1 \vdash$
K_1	$1 q_1 \nabla \vdash$
K_2	$1 q_3 1 \vdash$
K_3	$1 q_4 1 \vdash$
K_4	$q_5 1 X \vdash$
K_5	$q_5 \nabla 1 X \vdash$
K_6	$q_6 1 X \vdash$
K_7	$q_7 X \vdash$
K_8	$q_4 \nabla X \vdash$
K_8	$q_8 X \vdash$
K_9	$1 q_8 \nabla \vdash$
K_{10}	$q_9 1$

 Obliczenia $n = 2$

	∇	1	1	∇	∇
	∇	1	1	∇	∇
	∇	1	1	∇	∇
	∇	1	1	∇	∇
	∇	1	1	∇	∇
	∇	1	X	∇	∇
	∇	1	X	∇	∇
	∇	1	X	∇	∇
	∇	∇	X	∇	∇
	∇	∇	X	∇	∇
	∇	∇	X	∇	∇
	∇	∇	1	∇	∇
	∇	∇	1	∇	∇

K_0	$q_0 11 \vdash$
K_1	$1 q_1 1 \vdash$
K_2	$11 q_0 \nabla \vdash$
K_3	$1 q_2 1 \vdash$
K_4	$1 q_4 1 \vdash$
K_5	$q_5 1 X \vdash$
K_6	$q_5 \nabla 1 X \vdash$
K_7	$q_6 1 X \vdash$
K_8	$q_7 X \vdash$
K_8	$q_4 \nabla X \vdash$
K_9	$q_8 X \vdash$
K_{10}	$1 q_8 \nabla \vdash$
K_{11}	$q_9 1$

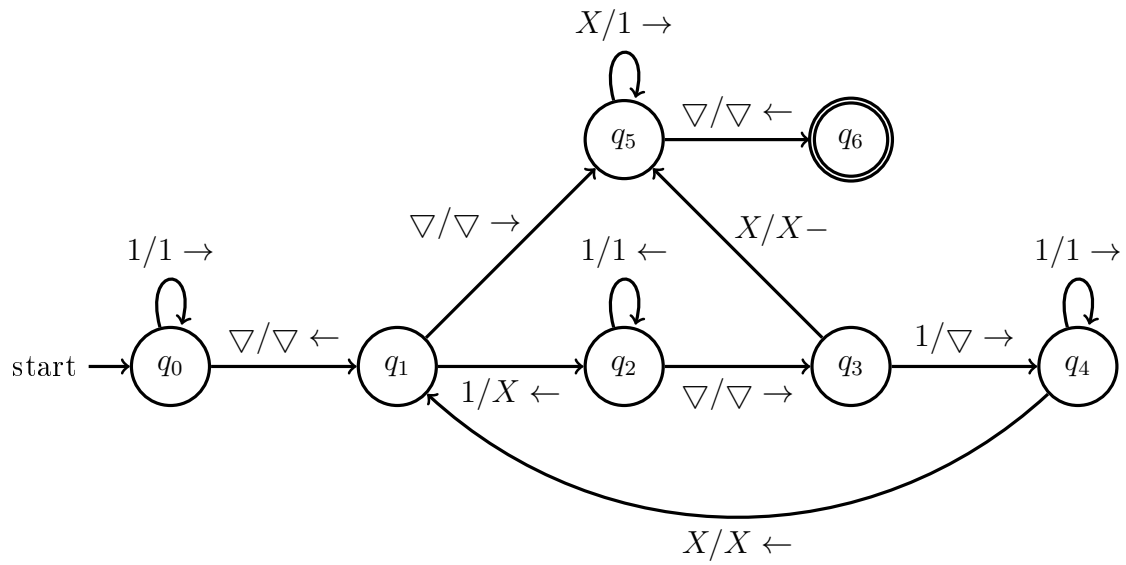
Zad 1.5. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję f dla liczby naturalnej n w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{1\}, \{1, X, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_6\}).$$



Obliczenia $n = 0$

∇	1	∇	∇	∇	∇	
∇	1	∇	∇	∇	∇	
∇	1	∇	∇	∇	∇	
∇	X	∇	∇	∇	∇	
∇	X	∇	∇	∇	∇	
∇	X	∇	∇	∇	∇	
∇	1	∇	∇	∇	∇	
∇	1	∇	∇	∇	∇	

$$K_0 \quad \nabla q_0 1 \vdash$$

$$K_1 \quad 1 q_0 \nabla \vdash$$

$$K_2 \quad \nabla q_1 1 \vdash$$

$$K_3 \quad q_2 \nabla X \vdash$$

$$K_4 \quad q_3 X \vdash$$

$$K_5 \quad q_5 X \vdash$$

$$K_6 \quad 1 q_5 \nabla \vdash$$

$$K_7 \quad q_6 1$$

 Obliczenia $n = 1$

∇	1	1	∇	∇	∇	
∇	1	1	∇	∇	∇	
∇	1	1	∇	∇	∇	
∇	1	1	∇	∇	∇	
∇	1	X	∇	∇	∇	
∇	1	X	∇	∇	∇	
∇	1	X	∇	∇	∇	
∇	1	X	∇	∇	∇	
∇	∇	X	∇	∇	∇	
∇	∇	X	∇	∇	∇	
∇	∇	X	∇	∇	∇	
∇	∇	1	∇	∇	∇	
∇	∇	1	∇	∇	∇	

$$K_0 \quad q_0 1 1 \vdash$$

$$K_1 \quad 1 q_0 1 \vdash$$

$$K_2 \quad 1 1 q_0 \nabla \vdash$$

$$K_3 \quad 1 q_1 1 \vdash$$

$$K_4 \quad q_2 1 X \vdash$$

$$K_5 \quad q_2 \nabla 1 X \vdash$$

$$K_6 \quad q_3 1 X \vdash$$

$$K_7 \quad q_4 X \vdash$$

$$K_8 \quad q_1 \nabla X \vdash$$

$$K_9 \quad q_5 X \vdash$$

$$K_{10} \quad 1 q_5 \nabla \vdash$$

$$K_{11} \quad q_6 1$$

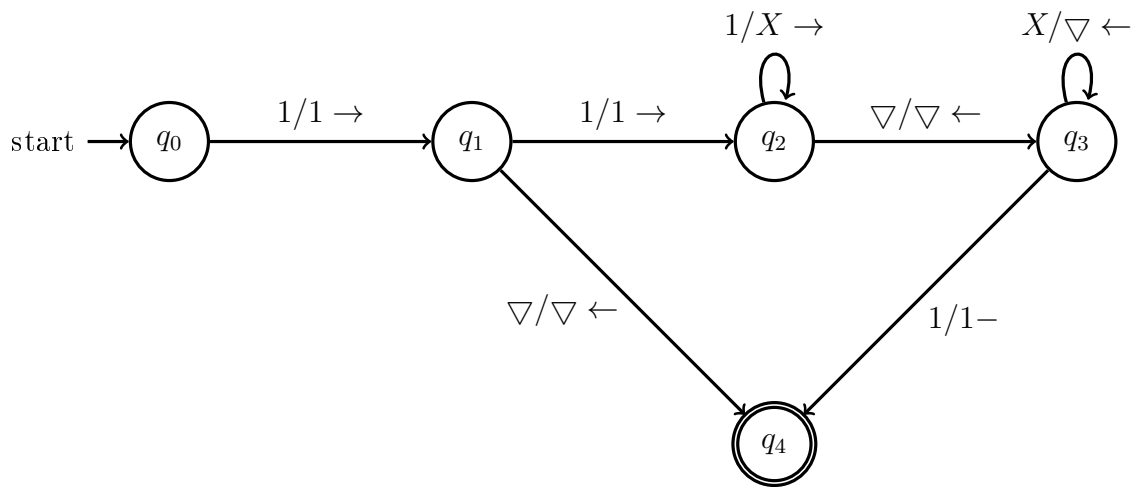
Zad 1.7. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję signum (znaku)

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } n = 0 \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1\}, \{1, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$



Obliczenia $n = 0$

	∇	∇	1	∇	∇	
	∇	∇	1	∇	∇	
	∇	∇	1	∇	∇	

$$K_0 \quad \nabla q_0 1 \vdash$$

$$K_1 \quad 1q_1 \nabla \vdash$$

$$K_2 \quad q_4 1$$

Obliczenia $n = 2$

	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	X	∇	
	∇	1	1	X	∇	
	∇	1	1	∇	∇	
	∇	1	1	∇	∇	

$$K_0 \quad q_0 111 \vdash$$

$$K_1 \quad 1q_1 11 \vdash$$

$$K_2 \quad 11q_2 1 \vdash$$

$$K_3 \quad 11Xq_2 \nabla \vdash$$

$$K_4 \quad 11q_3 X \vdash$$

$$K_5 \quad 1q_3 1 \vdash$$

$$K_6 \quad 1q_4 1$$

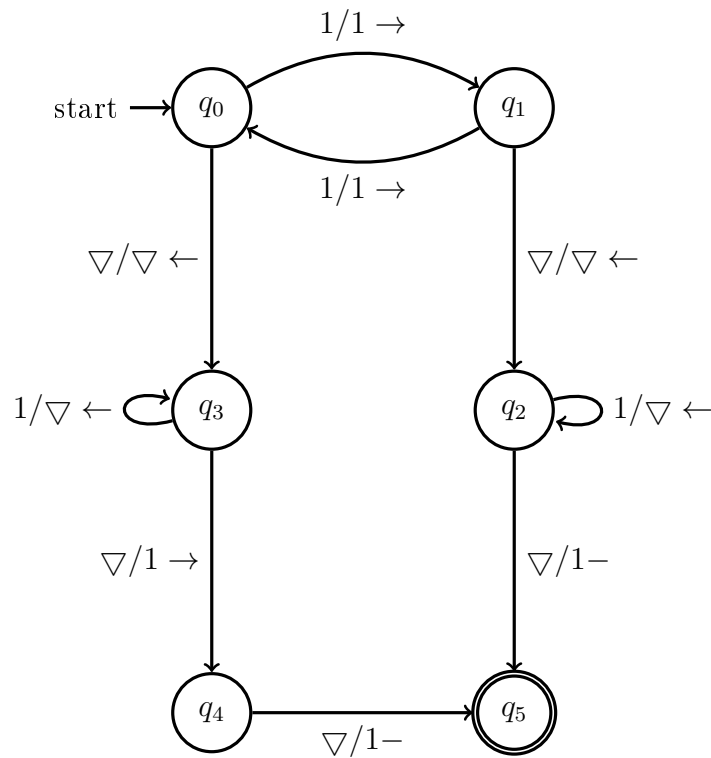
Zad 1.9. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{1\}, \{1, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_5\}).$$



Obliczenia $n = 1$

	∇	1	1	∇	∇	
	∇	1	1	∇	∇	
	∇	1	1	∇	∇	
	∇	1	1	∇	∇	
	∇	1	∇	∇	∇	
	∇	∇	∇	∇	∇	
	1	∇	∇	∇	∇	
	1	1	∇	∇	∇	

K_0	$q_0 11 \vdash$
K_1	$1q_1 1 \vdash$
K_2	$11q_0 \nabla \vdash$
K_3	$1q_3 1 \vdash$
K_4	$\nabla q_3 1 \vdash$
K_5	$\nabla q_3 \nabla \vdash$
K_6	$1q_4 \nabla \vdash$
K_7	$1q_5 1$

Obliczenia $n = 2$

	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	1	∇	
	∇	1	1	∇	∇	
	∇	1	∇	∇	∇	
	∇	∇	∇	∇	∇	
	1	∇	∇	∇	∇	

K_0	$q_0 111 \vdash$
K_1	$1q_1 11 \vdash$
K_2	$11q_0 1 \vdash$
K_3	$111q_1 \nabla \vdash$
K_4	$11q_2 1 \vdash$
K_5	$1q_2 1 \vdash$
K_6	$\nabla q_2 1 \vdash$
K_7	$\nabla q_2 \nabla \vdash$
K_8	$q_5 1$

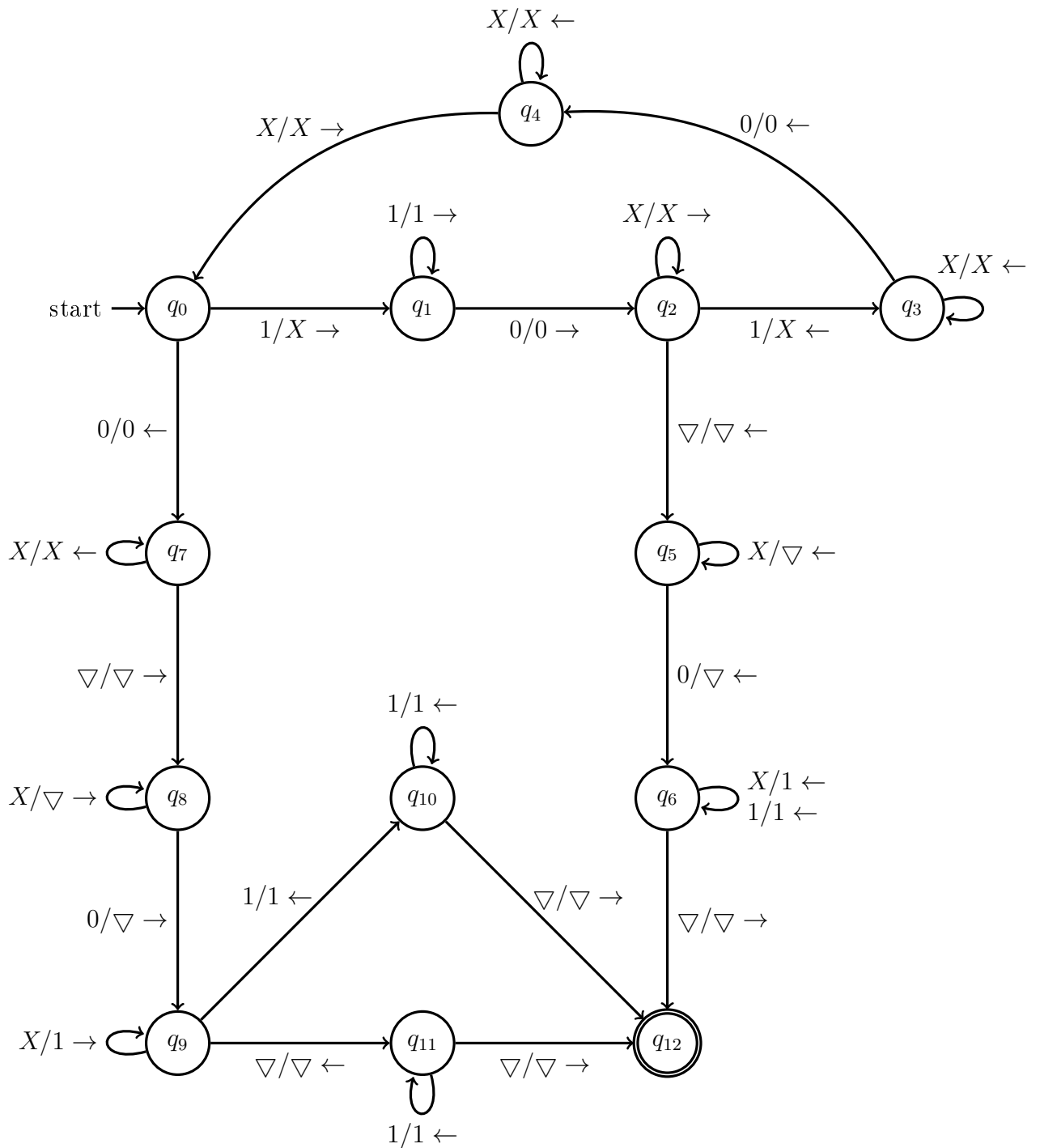
Zad 1.11. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję maksimum dla liczb naturalnych m i n w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(n) = \max(m, n).$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{12}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{12}\}).$$



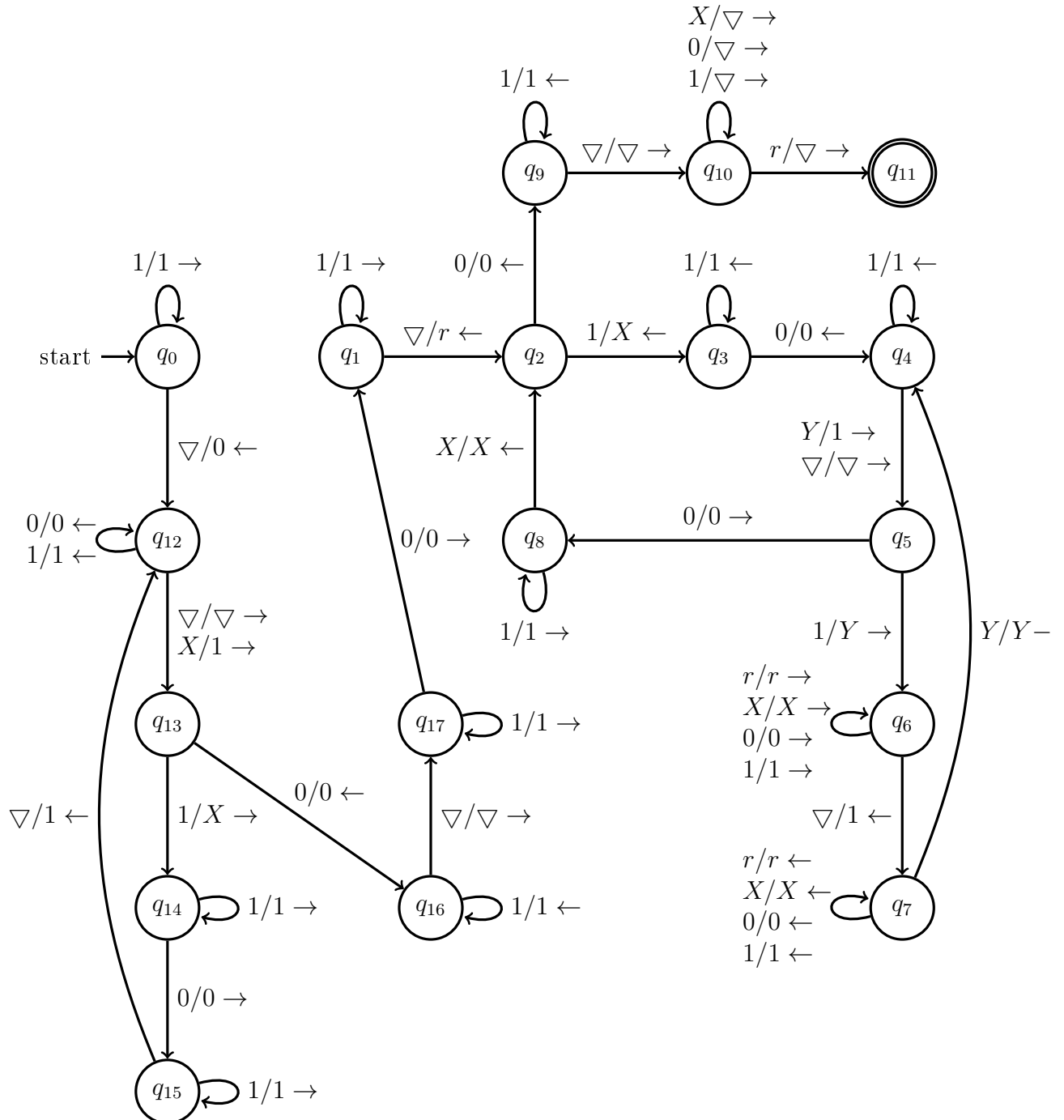
Zad 1.13. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(m, n) = n^2$$

dla liczby naturalnej n w reprezentacji unarnej. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{17}\}, \{1\}, \{1, 0, X, Y, r, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{11}\}).$$



Zad 1.19. Zaprojektuj maszynę Turinga, która kopiuje wejściowy łańcuch w dla alfabetu $\Sigma = \{a, b\}$. Rozwiązanie może nie zawierać separatora

$$q_0 w \vdash^* q_f w w$$

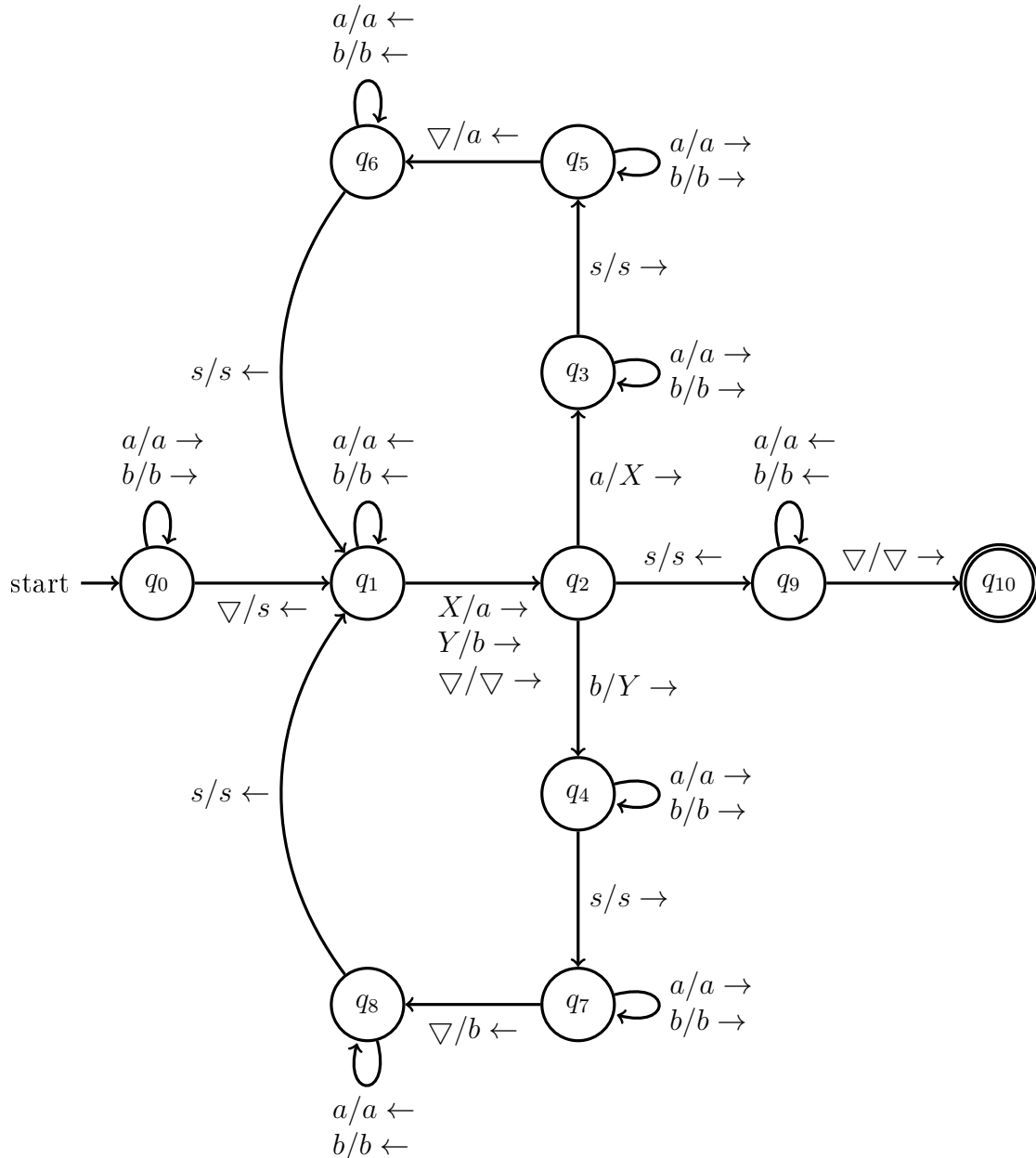
lub może zawierać dowolny separator, na przykład separatorem może być blank, czyli

$$q_0 w \vdash^* q_f w \nabla w.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{10}\}, \{a, b\}, \{a, b, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{10}\}).$$



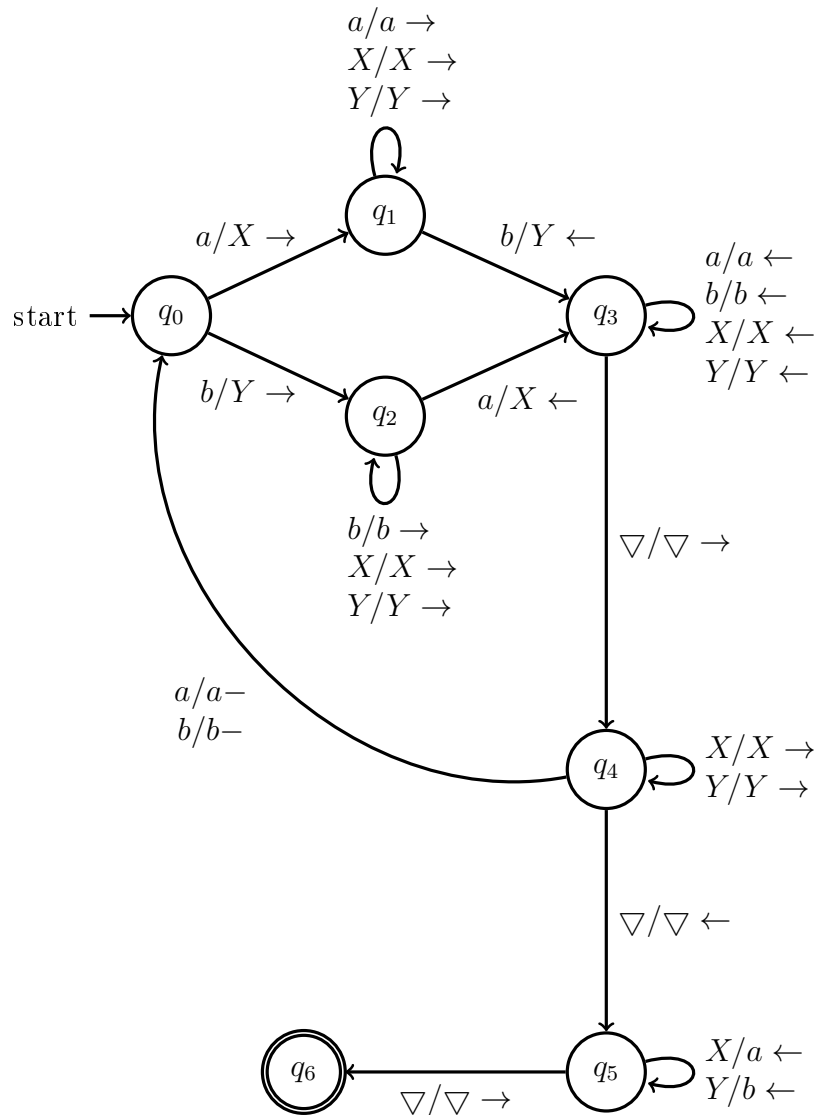
Zad 1.22. Zaprojektuj maszynę Turinga nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$, która akceptuje język

$$L = \{w : w \text{ zawiera równą liczbę symboli } a \text{ i } b\}.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_6\}).$$



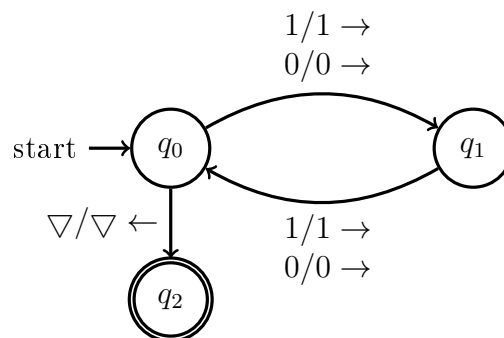
Zad 1.23. Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{w: |w| \text{ jest parzysta}\}$$

nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangleright, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \triangleright\}, \delta, q_0, \triangleright, \{q_2\}).$$



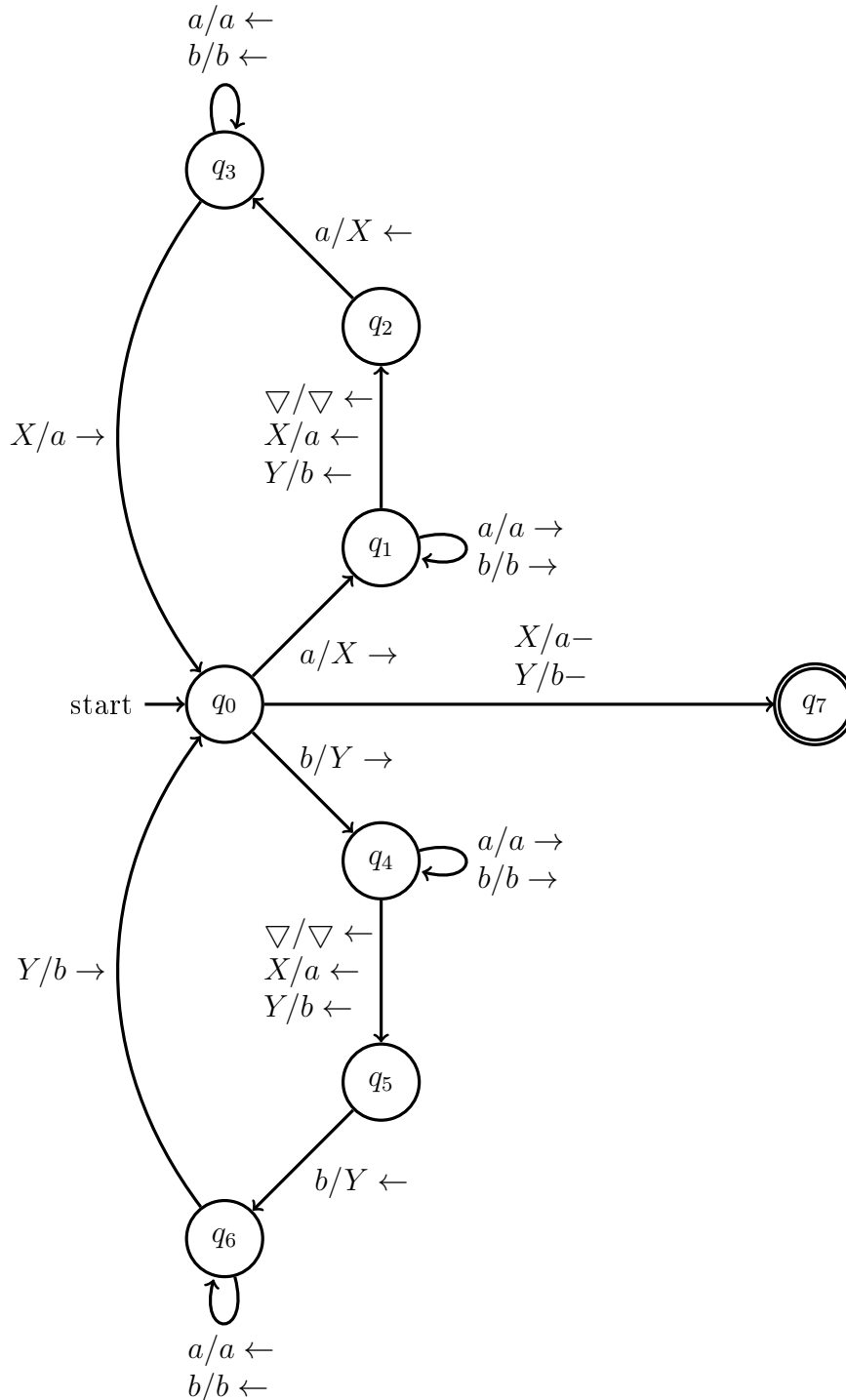
Zad 1.25. Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\},$$

gdzie w^R oznacza **odwrócenie** w , a więc jeśli $w = a_1a_2\dots a_k$, to $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$



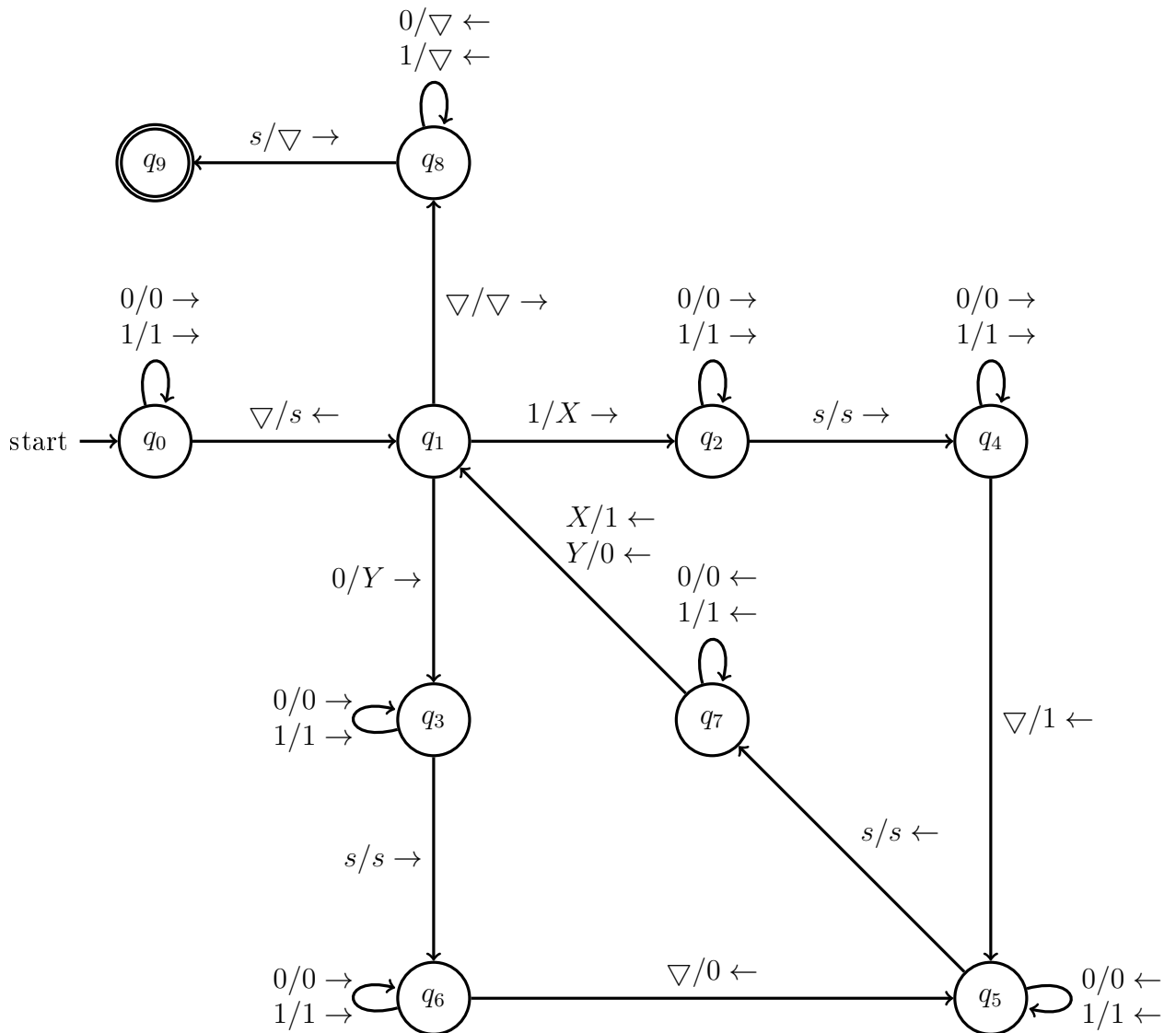
Zad 1.27. Niech $\Sigma = \{0, 1\}$. Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza odwrócenie łańcucha, czyli funkcję

$$f(w) = w^R$$

gdzie $w \in \{0, 1\}^+$ oraz w^R oznacza **odwrócenie** w , a więc jeśli $w = a_1 a_2 \dots a_k$, to $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1, 0\}, \{1, 0, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$



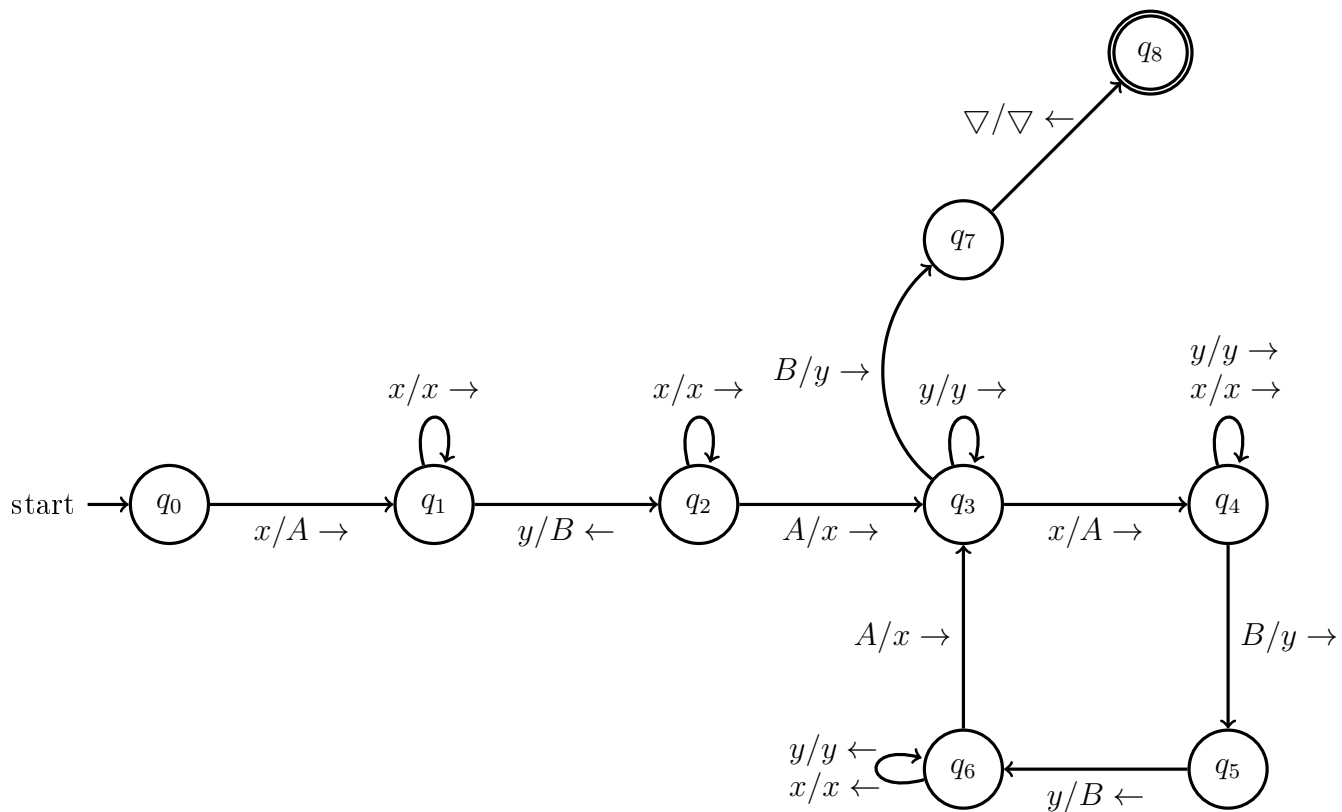
Zad 1.30. Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{x^n y^n : n \geq 1\}$$

nad alfabetem $\Sigma = \{x, y\}$. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_8\}, \{x, y\}, \{x, y, A, B, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_8\}).$$



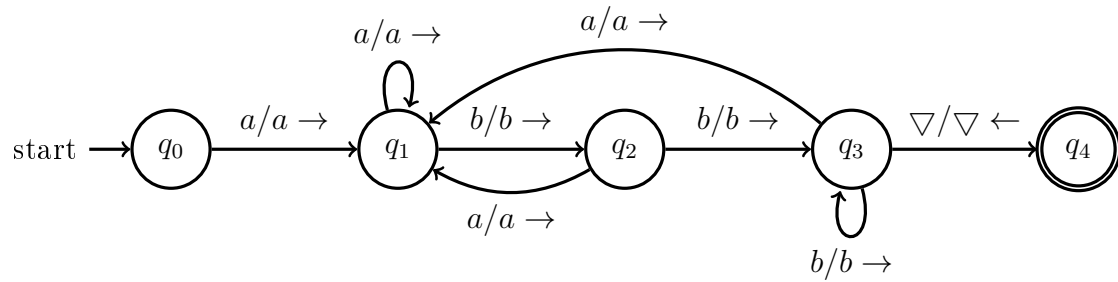
Zad 1.46. Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie $\mathbf{a(a + b)^*bb}$. Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = L(\mathbf{a(a + b)^*bb})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{a, b, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$



Zad 1.47. Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie $\mathbf{10+(0+11)0^*1}$. Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = L(\mathbf{10+(0+11)0^*1})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$

