

# WSTĘP DO TEORII OBLICZALNOŚCI

ZADANIA DLA CHĘTNYCH  
Zestaw 1. Wersja 1.0.0

VIKTAR ZHDANOVICH LB6

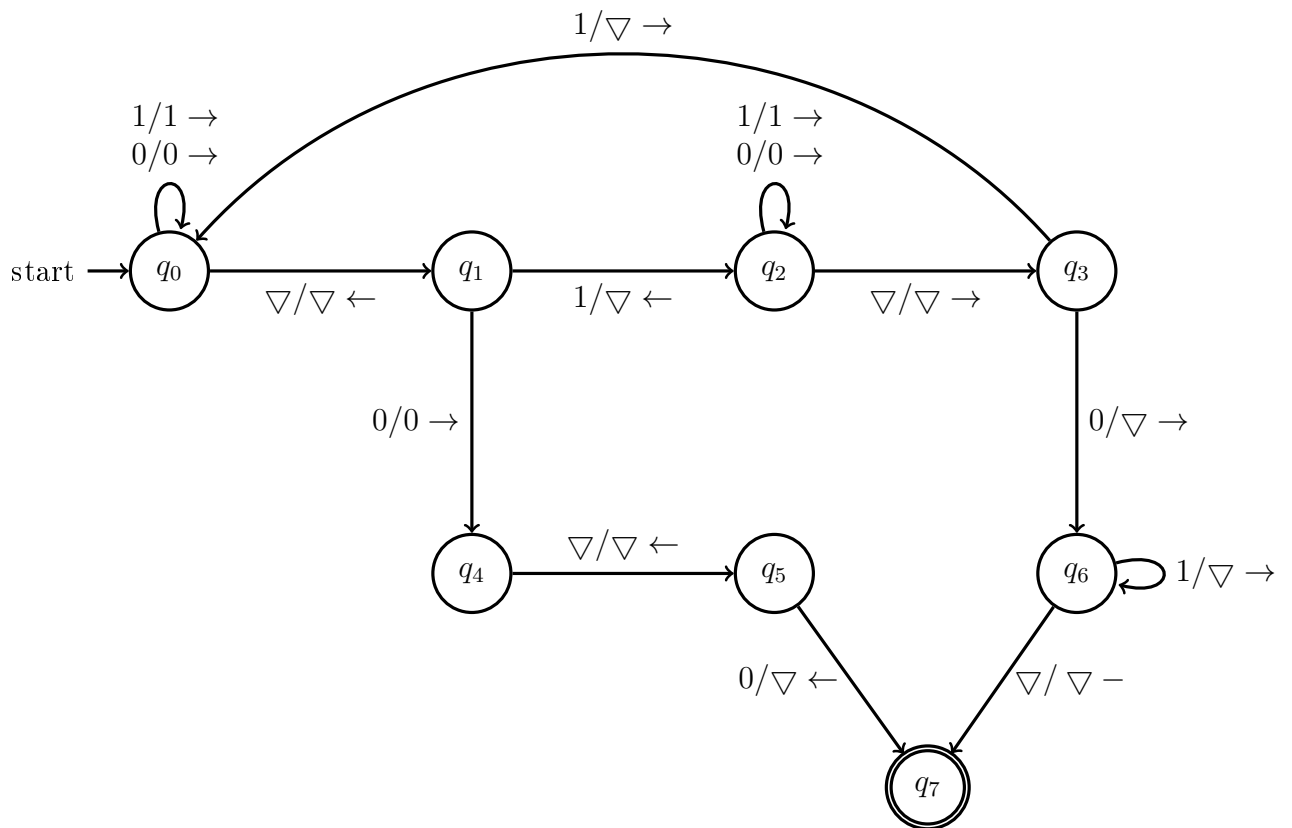
**Zad 1.1.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję odejmowania ograniczonego  $f$  dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m - n = \begin{cases} m - n, & \text{jeżeli } m \geq n, \\ 0, & \text{jeżeli } m < n \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$



Obliczenia  $m = 2$ ,  $n = 1$ 

|                                                |          |                         |
|------------------------------------------------|----------|-------------------------|
| $\nabla$ 1 1 0 1 $\nabla$                      | $K_0$    | $q_0 1101 \vdash$       |
| $\nabla$ 1 1 0 1 $\nabla$                      | $K_1$    | $1q_0 101 \vdash$       |
| $\nabla$ 1 1 0 1 $\nabla$                      | $K_2$    | $11q_0 01 \vdash$       |
| $\nabla$ 1 1 0 1 $\nabla$                      | $K_3$    | $110q_0 1 \vdash$       |
| $\nabla$ 1 1 0 1 $\nabla$                      | $K_4$    | $1101q_0 \vdash$        |
| $\nabla$ 1 1 0 1 $\nabla$                      | $K_5$    | $110q_1 1 \vdash$       |
| $\nabla$ 1 1 0 $\nabla$ $\nabla$               | $K_6$    | $11q_2 0 \vdash$        |
| $\nabla$ 1 1 0 $\nabla$ $\nabla$               | $K_7$    | $1q_2 10 \vdash$        |
| $\nabla$ 1 1 0 $\nabla$ $\nabla$               | $K_8$    | $q_2 110 \vdash$        |
| $\nabla$ 1 1 0 $\nabla$ $\nabla$               | $K_9$    | $q_2 \nabla 110 \vdash$ |
| $\nabla$ 1 1 0 $\nabla$ $\nabla$               | $K_{10}$ | $q_3 110 \vdash$        |
| $\nabla$ $\nabla$ 1 0 $\nabla$ $\nabla$        | $K_{11}$ | $q_0 10 \vdash$         |
| $\nabla$ $\nabla$ 1 0 $\nabla$ $\nabla$        | $K_{12}$ | $1q_0 0 \vdash$         |
| $\nabla$ $\nabla$ 1 0 $\nabla$ $\nabla$        | $K_{13}$ | $10q_0 \nabla \vdash$   |
| $\nabla$ $\nabla$ 1 0 $\nabla$ $\nabla$        | $K_{14}$ | $1q_1 0 \vdash$         |
| $\nabla$ $\nabla$ 1 0 $\nabla$ $\nabla$        | $K_{15}$ | $10q_4 \nabla \vdash$   |
| $\nabla$ $\nabla$ 1 0 $\nabla$ $\nabla$        | $K_{16}$ | $1q_5 0 \vdash$         |
| $\nabla$ $\nabla$ 1 $\nabla$ $\nabla$ $\nabla$ | $K_{17}$ | $q_7 1$                 |

Obliczenia  $m = 1$  ,  $n = 1$

|          |          |          |          |          |  |          |                        |
|----------|----------|----------|----------|----------|--|----------|------------------------|
| $\nabla$ | 1        | 0        | 1        | $\nabla$ |  | $K_0$    | $q_0 101 \vdash$       |
| $\nabla$ | 1        | 0        | 1        | $\nabla$ |  | $K_1$    | $1q_0 01 \vdash$       |
| $\nabla$ | 1        | 0        | 1        | $\nabla$ |  | $K_2$    | $10q_0 1 \vdash$       |
| $\nabla$ | 1        | 0        | 1        | $\nabla$ |  | $K_3$    | $101q_0 \nabla \vdash$ |
| $\nabla$ | 1        | 0        | 1        | $\nabla$ |  | $K_4$    | $10q_1 1 \vdash$       |
| $\nabla$ | 1        | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_5$    | $1q_2 0 \vdash$        |
| $\nabla$ | 1        | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_6$    | $q_2 10 \vdash$        |
| $\nabla$ | 1        | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_7$    | $q_2 \nabla 10 \vdash$ |
| $\nabla$ | 1        | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_8$    | $q_3 10 \vdash$        |
| $\nabla$ | $\nabla$ | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_9$    | $q_0 0 \vdash$         |
| $\nabla$ | $\nabla$ | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_{10}$ | $0q_0 \nabla \vdash$   |
| $\nabla$ | $\nabla$ | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_{11}$ | $q_1 0 \vdash$         |
| $\nabla$ | $\nabla$ | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_{12}$ | $0q_4 \nabla \vdash$   |
| $\nabla$ | $\nabla$ | 0        | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_{13}$ | $q_5 0 \vdash$         |
| $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_{14}$ | $q_7 \nabla$           |

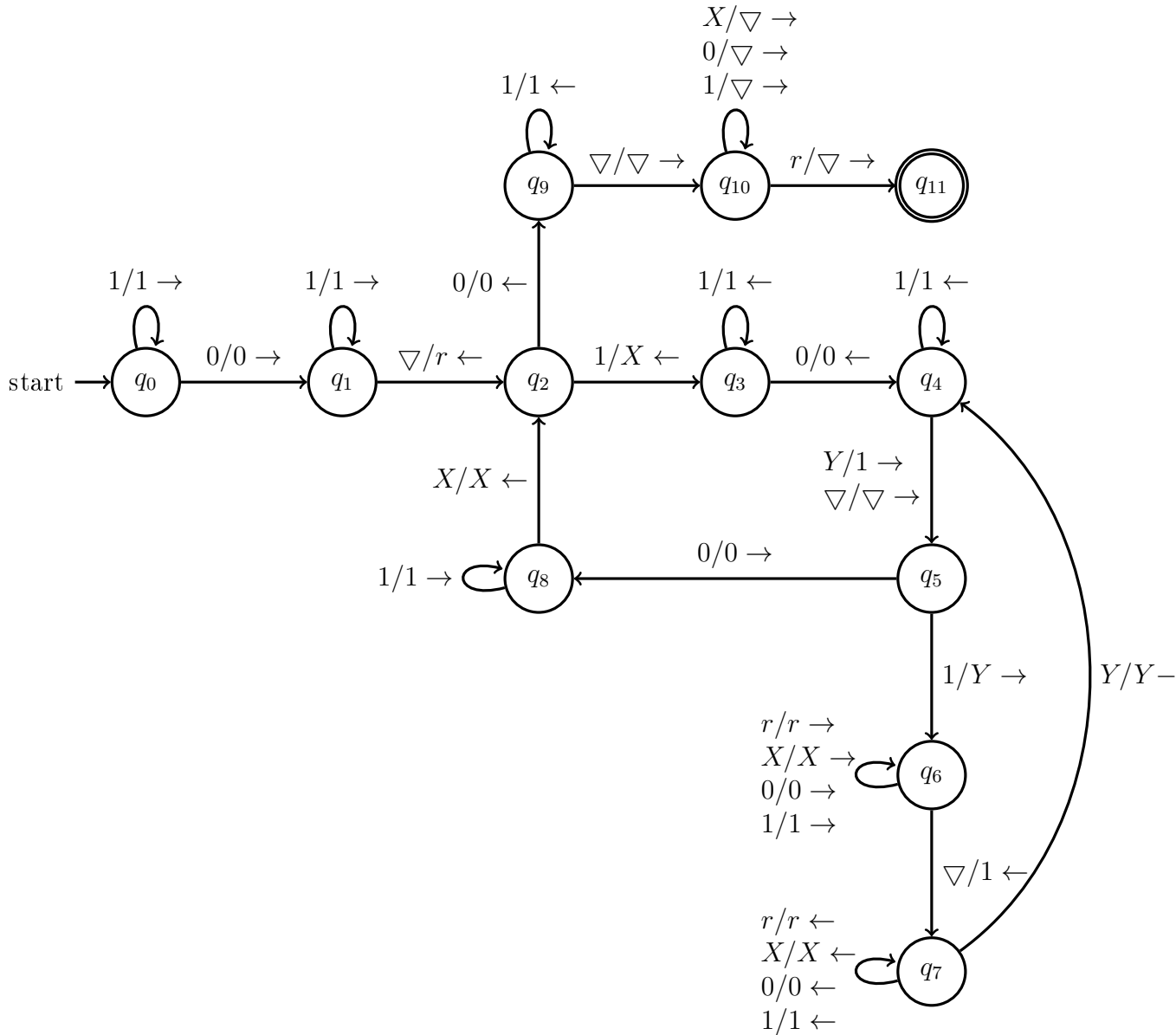
**Zad 1.2.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję mnożenia  $f$  dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(m, n) = m \cdot n$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia, w tym pomnóż  $3 \cdot 2$  lub  $2 \cdot 3$  (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{11}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, r, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{11}\}).$$



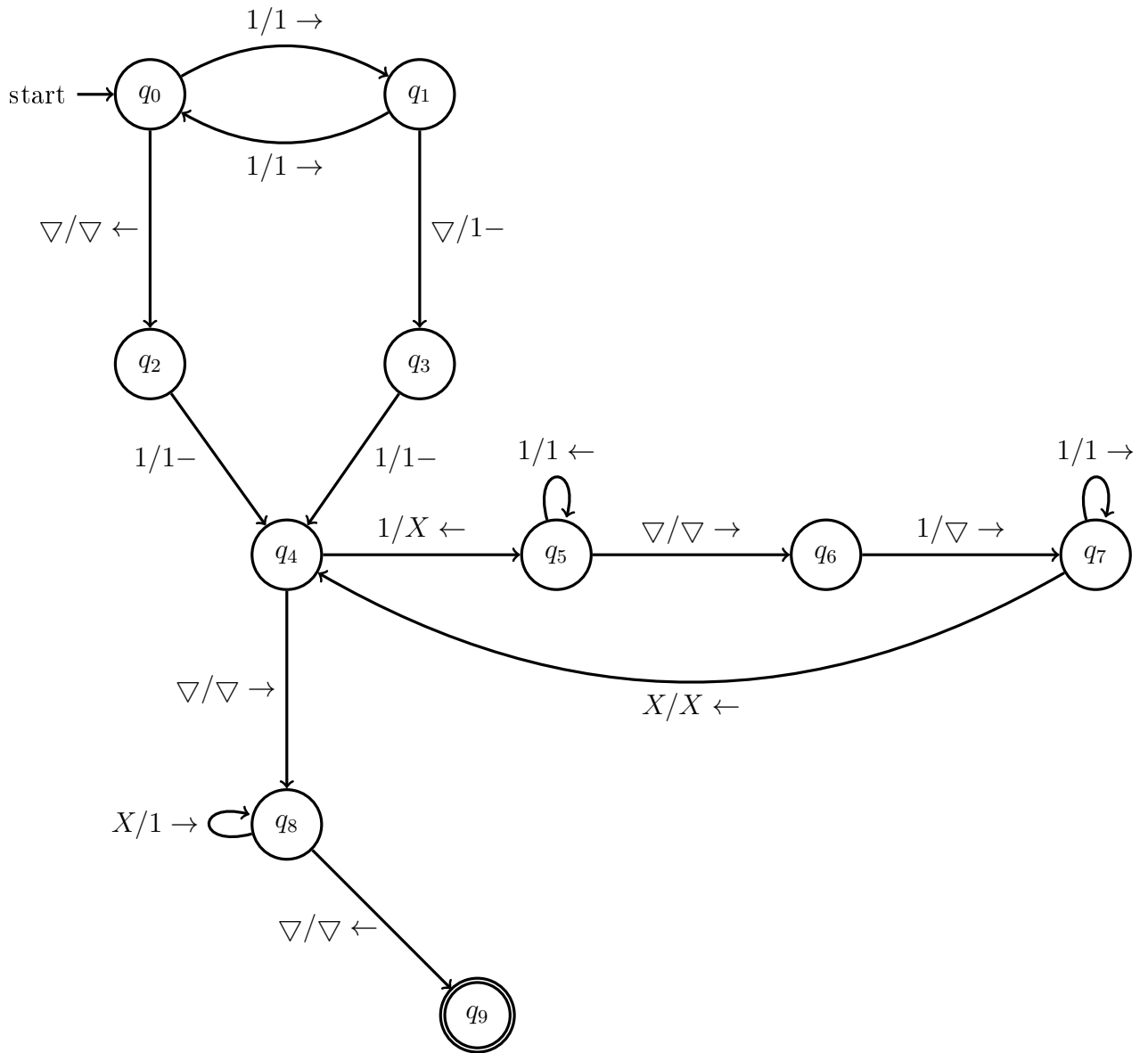
**Zad 1.3.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję  $f$  dla liczb naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1\}, \{1, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$



Obliczenia  $n = 1$ 

|  |          |          |          |          |          |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | 1        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | 1        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | X        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | X        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | X        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | X        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | X        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | 1        | $\nabla$ |

|          |                         |
|----------|-------------------------|
| $K_0$    | $\nabla q_0 1 \vdash$   |
| $K_1$    | $1 q_1 \nabla \vdash$   |
| $K_2$    | $1 q_3 1 \vdash$        |
| $K_3$    | $1 q_4 1 \vdash$        |
| $K_4$    | $q_5 1 X \vdash$        |
| $K_5$    | $q_5 \nabla 1 X \vdash$ |
| $K_6$    | $q_6 1 X \vdash$        |
| $K_7$    | $q_7 X \vdash$          |
| $K_8$    | $q_4 \nabla X \vdash$   |
| $K_8$    | $q_8 X \vdash$          |
| $K_9$    | $1 q_8 \nabla \vdash$   |
| $K_{10}$ | $q_9 1$                 |

 Obliczenia  $n = 2$ 

|  |          |          |   |          |          |
|--|----------|----------|---|----------|----------|
|  | $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | 1        | X | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | 1        | X | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | 1        | X | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |

|          |                         |
|----------|-------------------------|
| $K_0$    | $q_0 1 1 \vdash$        |
| $K_1$    | $1 q_1 1 \vdash$        |
| $K_2$    | $1 1 q_0 \nabla \vdash$ |
| $K_3$    | $1 q_2 1 \vdash$        |
| $K_4$    | $1 q_4 1 \vdash$        |
| $K_5$    | $q_5 1 X \vdash$        |
| $K_6$    | $q_5 \nabla 1 X \vdash$ |
| $K_7$    | $q_6 1 X \vdash$        |
| $K_8$    | $q_7 X \vdash$          |
| $K_8$    | $q_4 \nabla X \vdash$   |
| $K_9$    | $q_8 X \vdash$          |
| $K_{10}$ | $1 q_8 \nabla \vdash$   |
| $K_{11}$ | $q_9 1$                 |

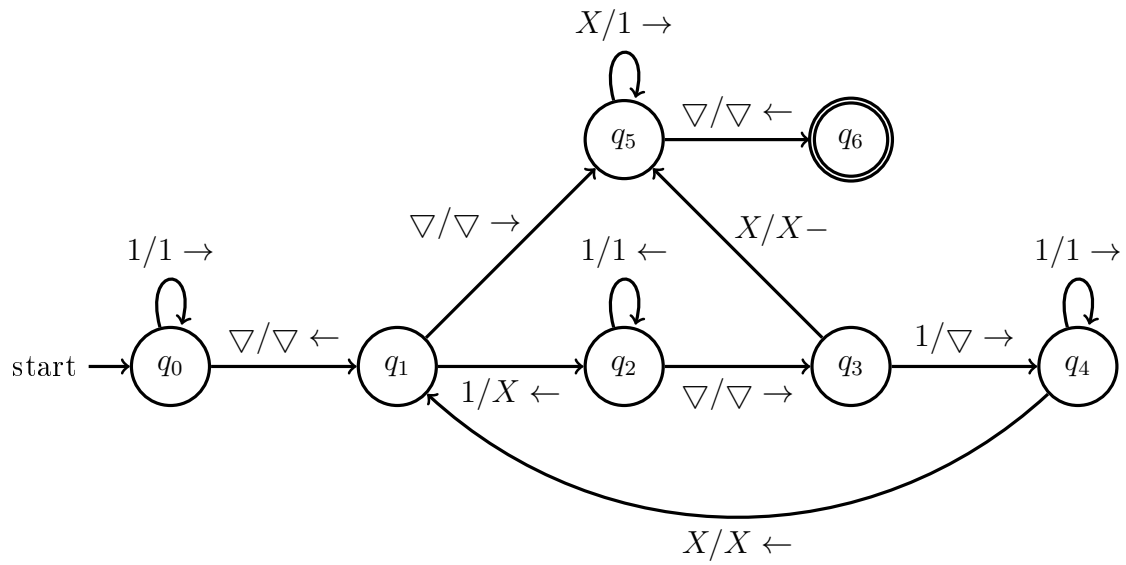
**Zad 1.5.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję  $f$  dla liczby naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej, gdzie

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \triangledown, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{1\}, \{1, X, \triangledown\}, \delta, q_0, \triangledown, \{q_6\}).$$





Obliczenia  $n = 0$ 

|          |   |          |          |          |          |  |
|----------|---|----------|----------|----------|----------|--|
| $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |

$$K_0 \quad \nabla q_0 1 \vdash$$

$$K_1 \quad 1 q_0 \nabla \vdash$$

$$K_2 \quad \nabla q_1 1 \vdash$$

$$K_3 \quad q_2 \nabla X \vdash$$

$$K_4 \quad q_3 X \vdash$$

$$K_5 \quad q_5 X \vdash$$

$$K_6 \quad 1 q_5 \nabla \vdash$$

$$K_7 \quad q_6 1$$

 Obliczenia  $n = 1$ 

|          |          |   |          |          |          |  |
|----------|----------|---|----------|----------|----------|--|
| $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1        | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1        | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1        | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1        | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | 1        | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | $\nabla$ | X | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
| $\nabla$ | $\nabla$ | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |

$$K_0 \quad q_0 1 1 \vdash$$

$$K_1 \quad 1 q_0 1 \vdash$$

$$K_2 \quad 1 1 q_0 \nabla \vdash$$

$$K_3 \quad 1 q_1 1 \vdash$$

$$K_4 \quad q_2 1 X \vdash$$

$$K_5 \quad q_2 \nabla 1 X \vdash$$

$$K_6 \quad q_3 1 X \vdash$$

$$K_7 \quad q_4 X \vdash$$

$$K_8 \quad q_1 \nabla X \vdash$$

$$K_9 \quad q_5 X \vdash$$

$$K_{10} \quad 1 q_5 \nabla \vdash$$

$$K_{11} \quad q_6 1$$

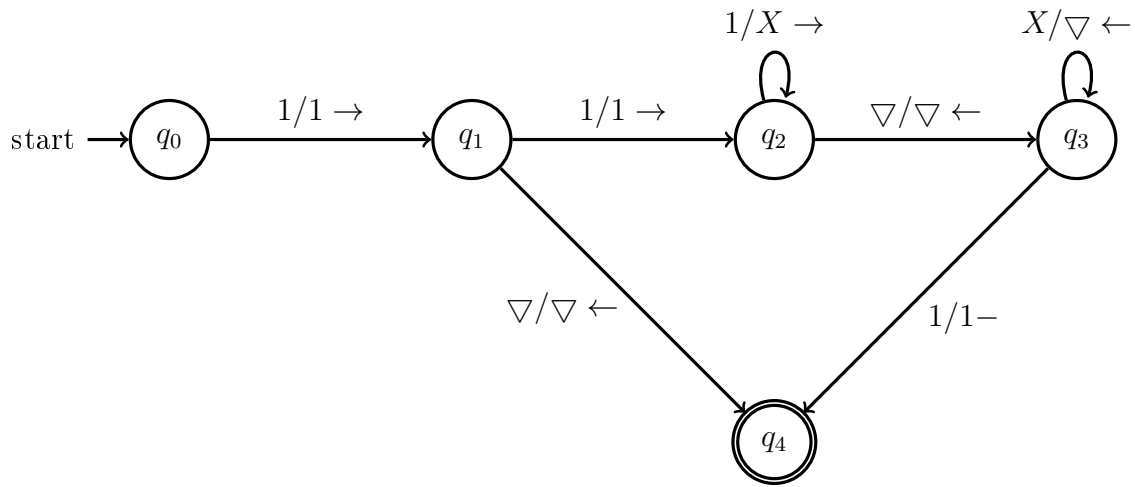
**Zad 1.7.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję signum (znaku)

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } n = 0 \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{1\}, \{1, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$



Obliczenia  $n = 0$

|  |   |   |   |   |   |  |
|--|---|---|---|---|---|--|
|  | ∇ | ∇ | 1 | ∇ | ∇ |  |
|  | ∇ | ∇ | 1 | ∇ | ∇ |  |
|  | ∇ | ∇ | 1 | ∇ | ∇ |  |

Obliczenia  $n = 2$

|  |   |   |   |   |   |  |
|--|---|---|---|---|---|--|
|  | ∇ | 1 | 1 | 1 | ∇ |  |
|  | ∇ | 1 | 1 | 1 | ∇ |  |
|  | ∇ | 1 | 1 | 1 | ∇ |  |
|  | ∇ | 1 | 1 | X | ∇ |  |
|  | ∇ | 1 | 1 | X | ∇ |  |
|  | ∇ | 1 | 1 | ∇ | ∇ |  |
|  | ∇ | 1 | 1 | ∇ | ∇ |  |

$K_0 \quad \nabla q_0 1 \vdash$

$K_1 \quad 1 q_1 \nabla \vdash$

$K_2 \quad q_4 1$

$K_0 \quad q_0 111 \vdash$

$K_1 \quad 1 q_1 11 \vdash$

$K_2 \quad 11 q_2 1 \vdash$

$K_3 \quad 11 X q_2 \nabla \vdash$

$K_4 \quad 11 q_3 X \vdash$

$K_5 \quad 1 q_3 1 \vdash$

$K_6 \quad 1 q_4 1$

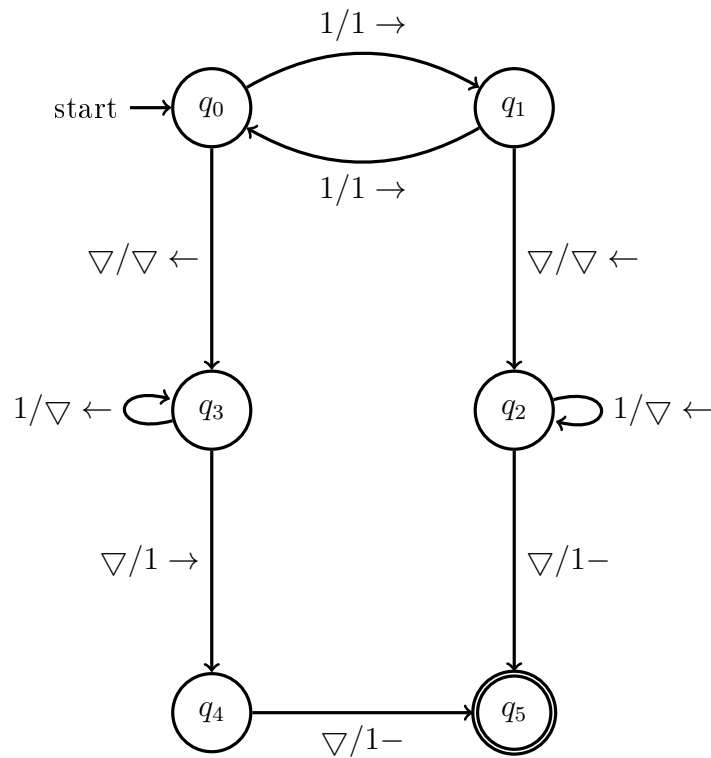
**Zad 1.9.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \text{ jest parzysta,} \\ 1, & \text{jeżeli } n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{1\}, \{1, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_5\}).$$



Obliczenia  $n = 1$

|  |          |          |          |          |          |  |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|--|
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | 1        | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |

|       |                            |
|-------|----------------------------|
| $K_0$ | $q_0 11 \vdash$            |
| $K_1$ | $1 q_1 1 \vdash$           |
| $K_2$ | $11 q_0 \nabla \vdash$     |
| $K_3$ | $1 q_3 1 \vdash$           |
| $K_4$ | $\nabla q_3 1 \vdash$      |
| $K_5$ | $\nabla q_3 \nabla \vdash$ |
| $K_6$ | $1 q_4 \nabla \vdash$      |
| $K_7$ | $1 q_5 1$                  |

Obliczenia  $n = 2$

|  |          |          |          |          |          |  |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|--|
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | 1        | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | 1        | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | 1        | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | 1        | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | 1        | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |
|  | 1        | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ | $\nabla$ |  |

|       |                            |
|-------|----------------------------|
| $K_0$ | $q_0 111 \vdash$           |
| $K_1$ | $1 q_1 11 \vdash$          |
| $K_2$ | $11 q_0 1 \vdash$          |
| $K_3$ | $111 q_1 \nabla \vdash$    |
| $K_4$ | $11 q_2 1 \vdash$          |
| $K_5$ | $1 q_2 1 \vdash$           |
| $K_6$ | $\nabla q_2 1 \vdash$      |
| $K_7$ | $\nabla q_2 \nabla \vdash$ |
| $K_8$ | $q_5 1$                    |

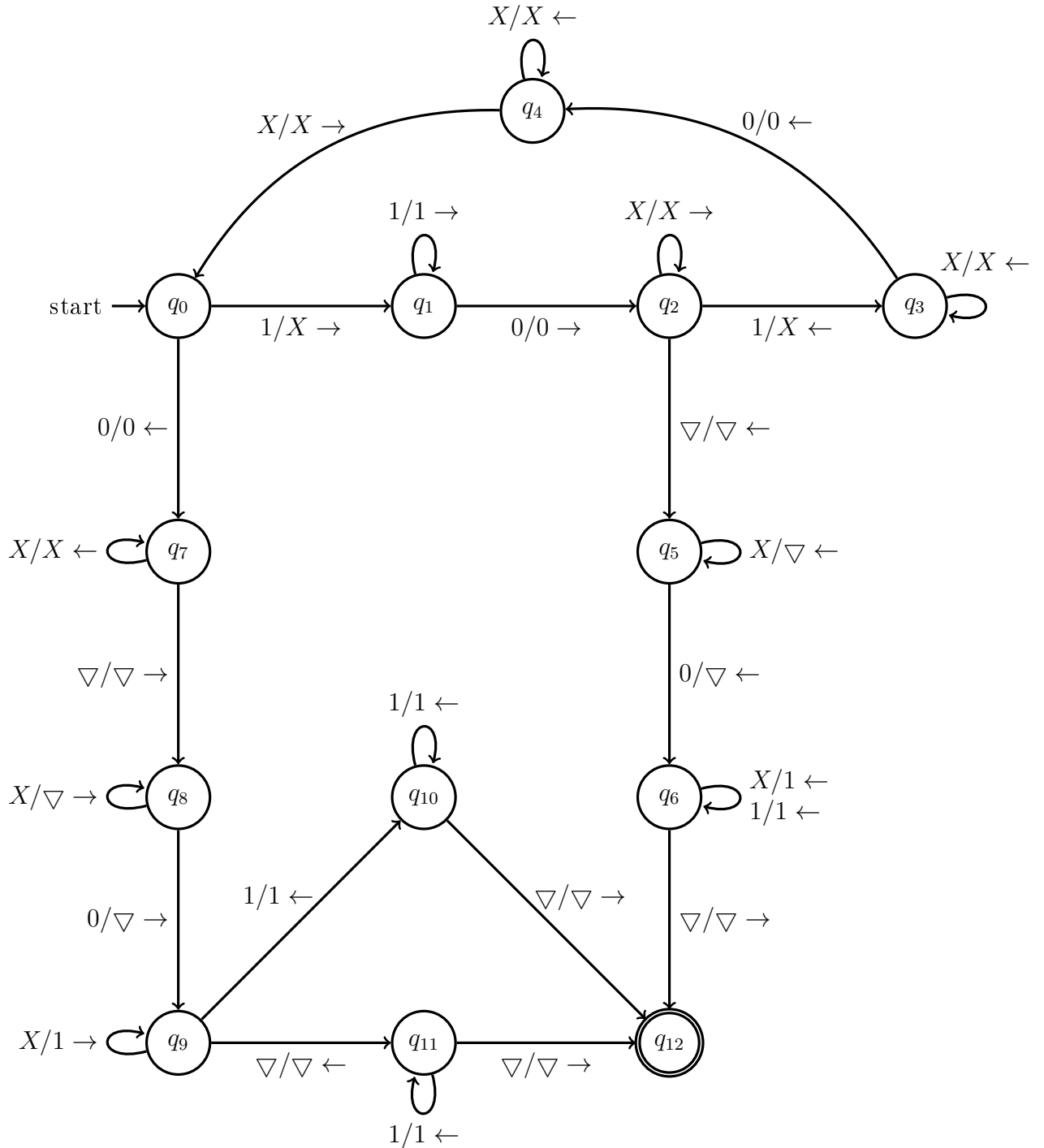
**Zad 1.11.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję maksimum dla liczb naturalnych  $m$  i  $n$  w reprezentacji unarnej, czyli

$$f(n) = \max(m, n).$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{12}\}, \{1, 0\}, \{1, 0, X, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{12}\}).$$



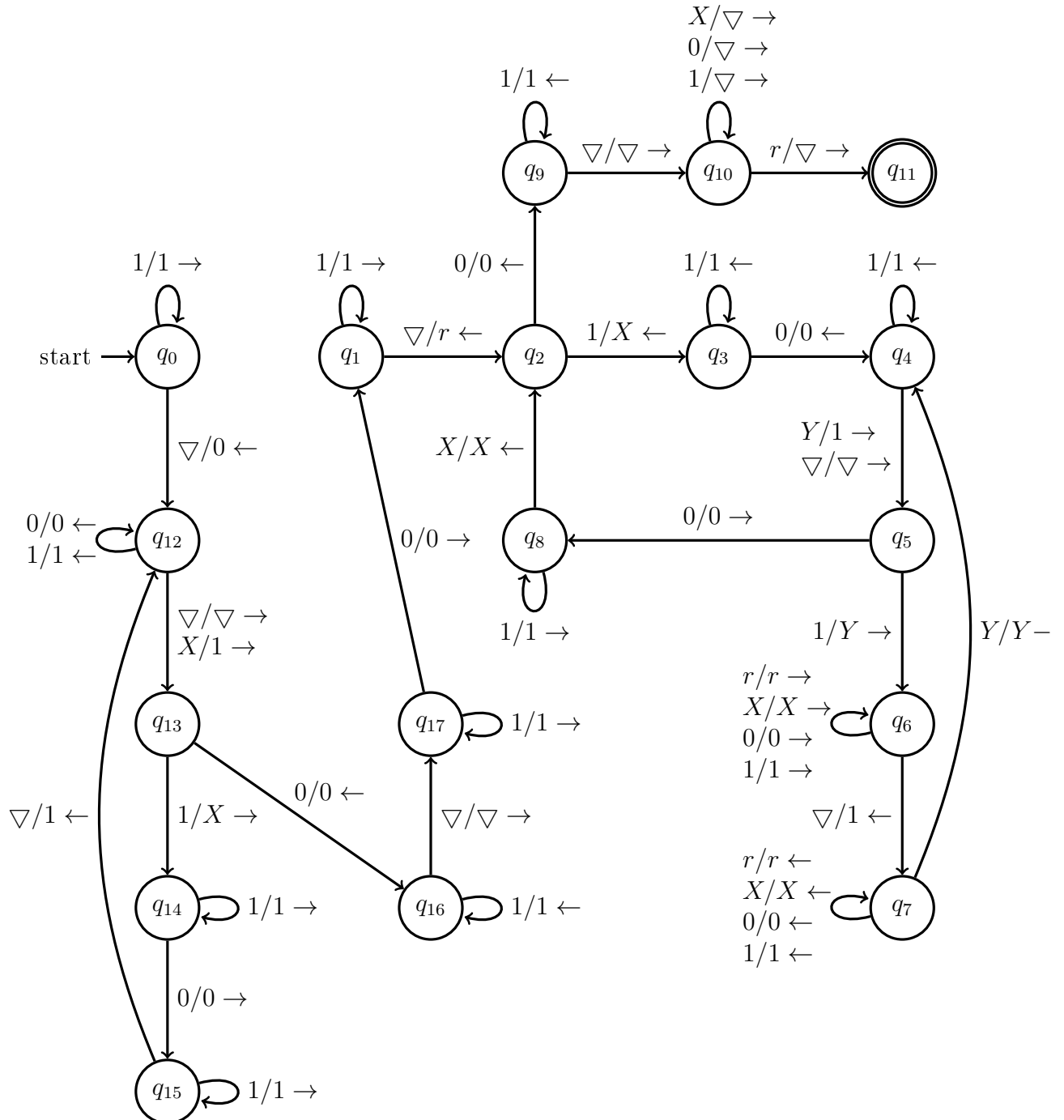
**Zad 1.13.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza funkcję

$$f(m, n) = n^2$$

dla liczby naturalnej  $n$  w reprezentacji unarnej. Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{17}\}, \{1\}, \{1, 0, X, Y, r, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{11}\}).$$



**Zad 1.19.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która kopiuje wejściowy łańcuch  $w$  dla alfabetu  $\Sigma = \{a, b\}$ . Rozwiązanie może nie zawierać separatora

$$q_0 w \vdash^* q_f w w$$

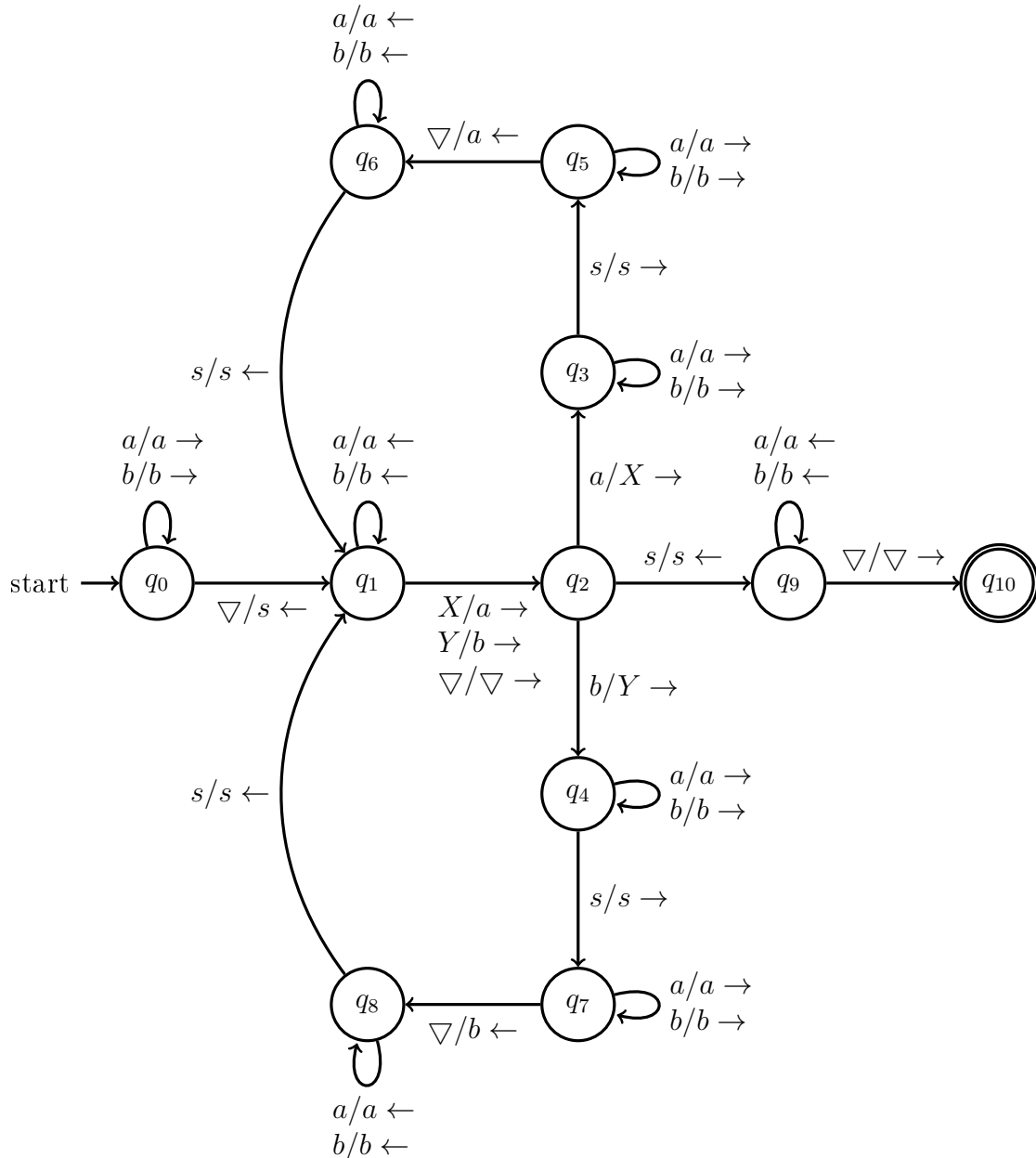
lub może zawierać dowolny separator, na przykład separatorem może być blank, czyli

$$q_0 w \vdash^* q_f w \nabla w.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_{10}\}, \{a, b\}, \{a, b, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_{10}\}).$$



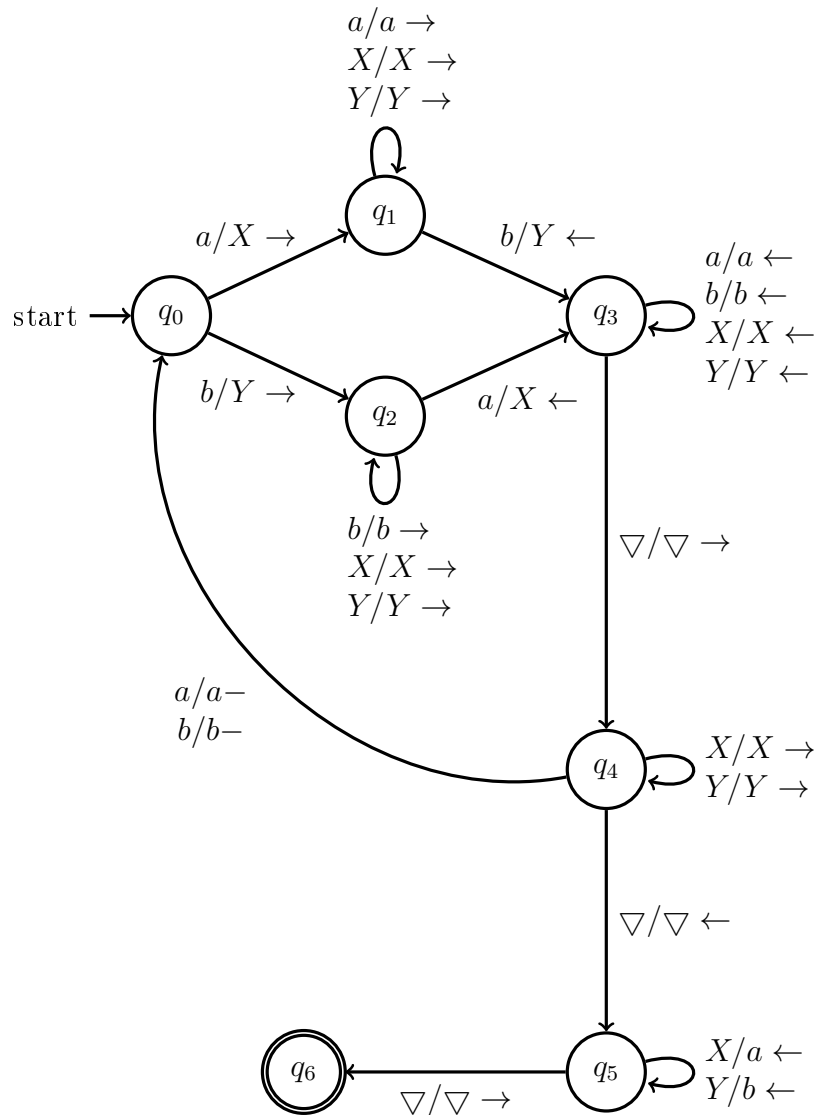
**Zad 1.22.** Zaprojektuj maszynę Turinga nad alfabetem  $\Sigma = \{a, b\}$ , która akceptuje język

$$L = \{w: w \text{ zawiera równą liczbę symboli } a \text{ i } b\}.$$

Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_6\}, \{a, b\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_6\}).$$





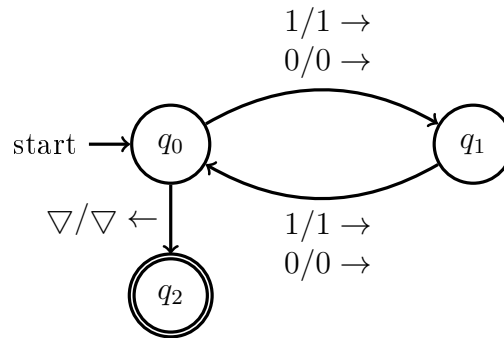
**Zad 1.23.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{w : |w| \text{ jest parzysta}\}$$

nad alfabetem  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_2\}).$$



Obliczenia  $w = 1011$

|   |   |   |   |   |   |  |       |                         |
|---|---|---|---|---|---|--|-------|-------------------------|
| ∇ | 1 | 0 | 1 | 1 | ∇ |  | $K_0$ | $q_0 1011 \vdash$       |
| ∇ | 1 | 0 | 1 | 1 | ∇ |  | $K_1$ | $1q_1 011 \vdash$       |
| ∇ | 1 | 0 | 1 | 1 | ∇ |  | $K_2$ | $10q_0 11 \vdash$       |
| ∇ | 1 | 0 | 1 | 1 | ∇ |  | $K_3$ | $101q_1 1 \vdash$       |
| ∇ | 1 | 0 | 1 | 1 | ∇ |  | $K_4$ | $1011q_0 \nabla \vdash$ |
| ∇ | 1 | 0 | 1 | 1 | ∇ |  | $K_5$ | $101q_2 1$              |

Obliczenia  $w = 00$

|   |   |   |   |   |   |  |       |                       |
|---|---|---|---|---|---|--|-------|-----------------------|
| ∇ | 0 | 0 | ∇ | ∇ | ∇ |  | $K_0$ | $q_0 00 \vdash$       |
| ∇ | 0 | 0 | ∇ | ∇ | ∇ |  | $K_1$ | $0q_1 0 \vdash$       |
| ∇ | 0 | 0 | ∇ | ∇ | ∇ |  | $K_2$ | $00q_0 \nabla \vdash$ |
| ∇ | 0 | 0 | ∇ | ∇ | ∇ |  | $K_3$ | $0q_2 0$              |

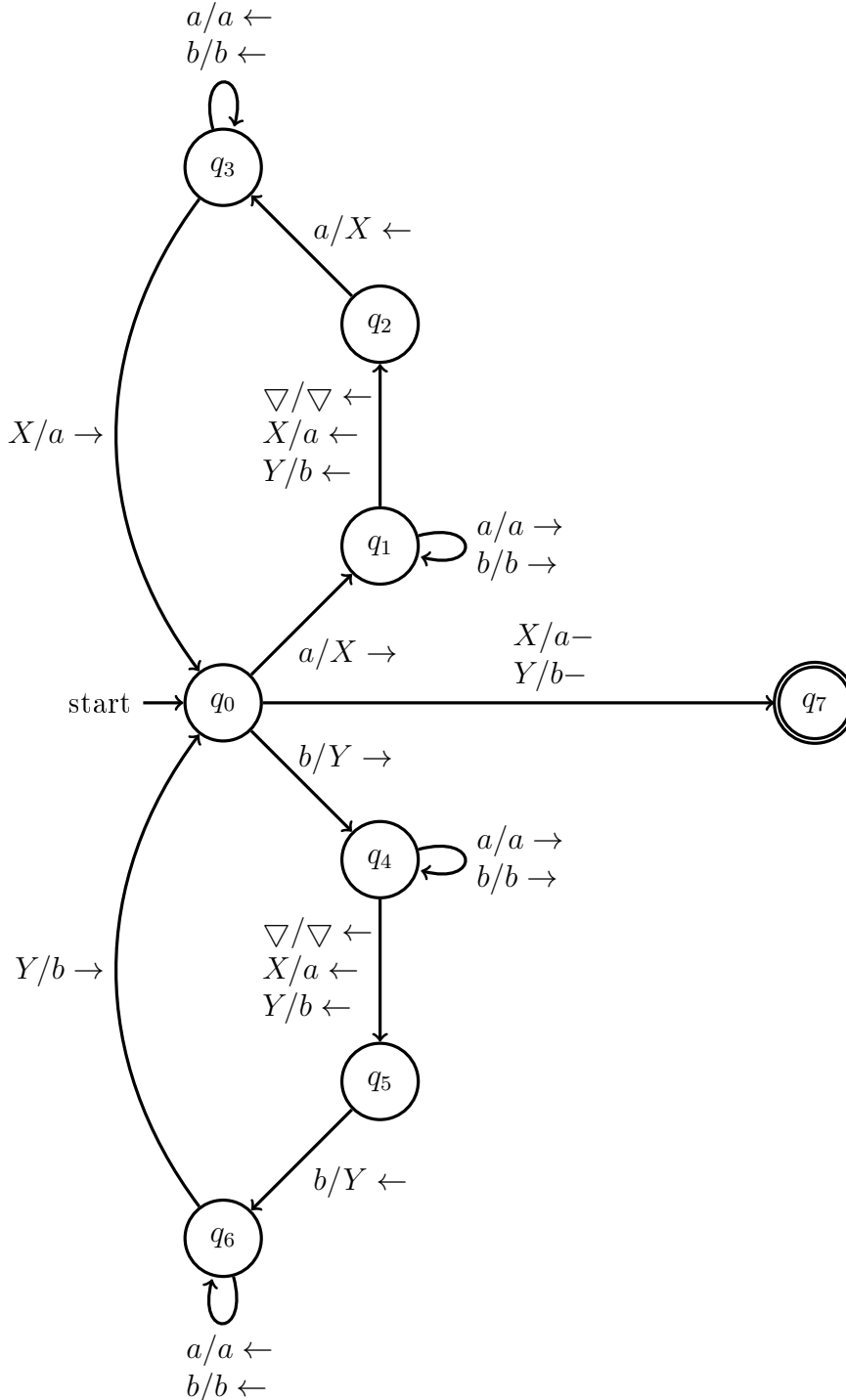
**Zad 1.25.** Niech  $\Sigma = \{a, b\}$ . Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\},$$

gdzie  $w^R$  oznacza **odwrócenie**  $w$ , a więc jeśli  $w = a_1a_2\dots a_k$ , to  $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{a, b, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$



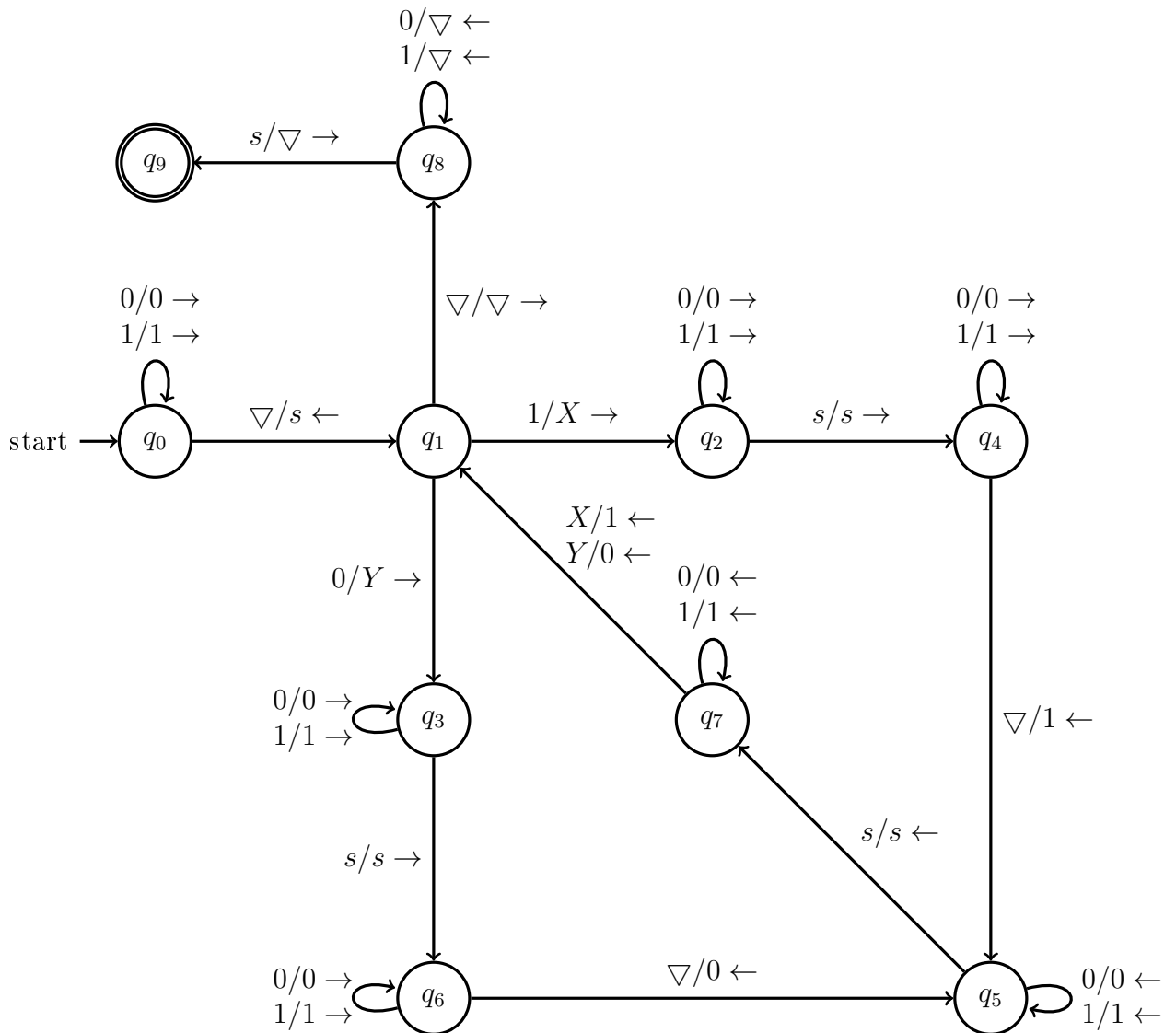
**Zad 1.27.** Niech  $\Sigma = \{0, 1\}$ . Zaprojektuj maszynę Turinga, która oblicza odwrócenie łańcucha, czyli funkcję

$$f(w) = w^R$$

gdzie  $w \in \{0, 1\}^+$  oraz  $w^R$  oznacza **odwrócenie**  $w$ , a więc jeśli  $w = a_1 a_2 \dots a_k$ , to  $w^R = a_k a_{k-1} \dots a_1$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_9\}, \{1, 0\}, \{1, 0, s, X, Y, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_9\}).$$



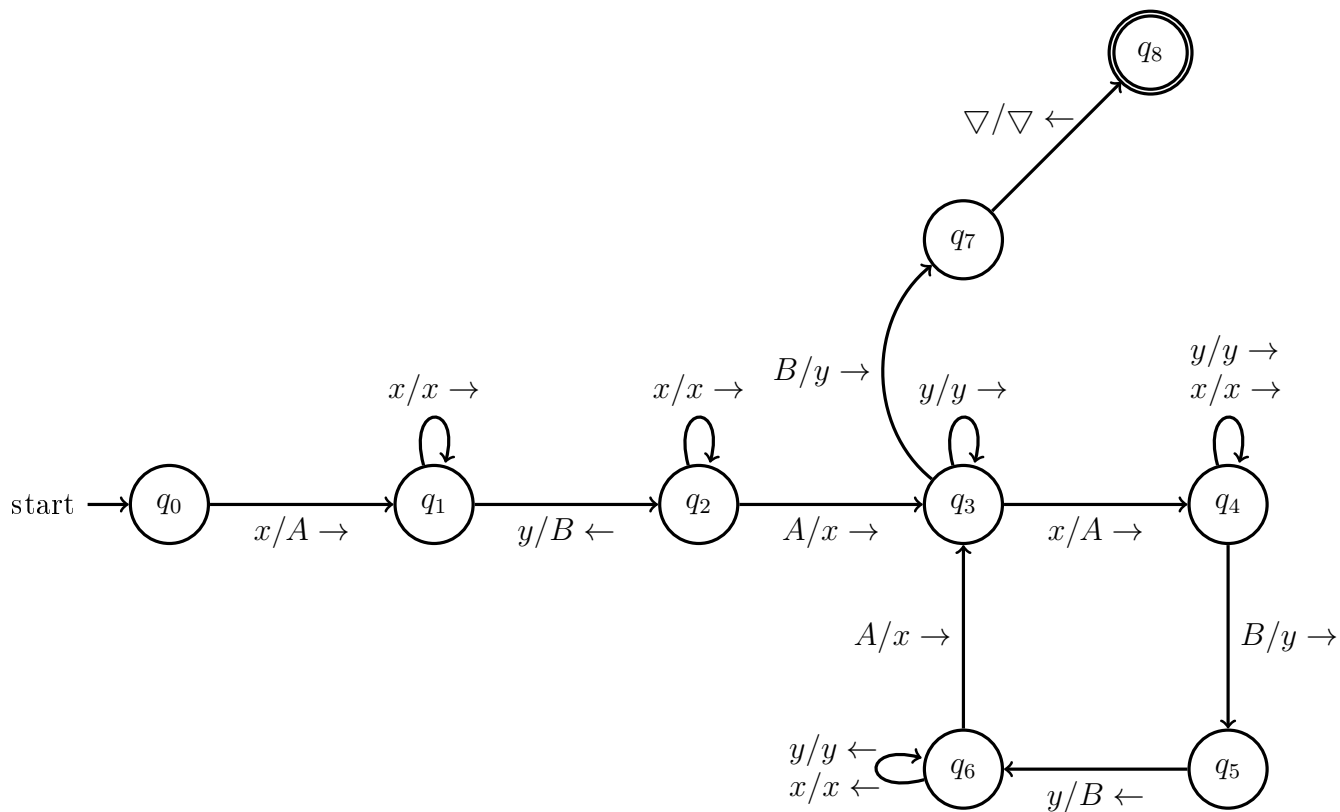
**Zad 1.30.** Zaprojektuj maszynę Turinga, która akceptuje język

$$L = \{x^n y^n : n \geq 1\}$$

nad alfabetem  $\Sigma = \{x, y\}$ . Narysuj diagram przejść. Dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_8\}, \{x, y\}, \{x, y, A, B, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_8\}).$$



Obliczenia  $w = xy$

|  |   |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|---|
|  | ∇ | ∇ | x | y | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | ∇ | A | y | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | ∇ | A | B | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | ∇ | x | B | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | ∇ | x | y | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | ∇ | x | y | ∇ | ∇ |

|       |                       |
|-------|-----------------------|
| $K_0$ | $q_0 xy \vdash$       |
| $K_1$ | $Aq_1 y \vdash$       |
| $K_2$ | $q_2 AB \vdash$       |
| $K_3$ | $xq_3 B \vdash$       |
| $K_4$ | $xyq_7 \nabla \vdash$ |
| $K_5$ | $xq_8 y$              |

Obliczenia  $w = xxyy$

|          |     |     |     |     |          |          |                       |
|----------|-----|-----|-----|-----|----------|----------|-----------------------|
| $\nabla$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $\nabla$ | $K_0$    | $q_0xxyy \vdash$      |
| $\nabla$ | $A$ | $x$ | $y$ | $y$ | $\nabla$ | $K_1$    | $Aq_1xyy \vdash$      |
| $\nabla$ | $A$ | $x$ | $y$ | $y$ | $\nabla$ | $K_2$    | $Axq_1yy \vdash$      |
| $\nabla$ | $A$ | $x$ | $B$ | $y$ | $\nabla$ | $K_3$    | $Aq_2xB y \vdash$     |
| $\nabla$ | $A$ | $x$ | $B$ | $y$ | $\nabla$ | $K_4$    | $q_2AxB y \vdash$     |
| $\nabla$ | $x$ | $x$ | $B$ | $y$ | $\nabla$ | $K_5$    | $xq_3xB y \vdash$     |
| $\nabla$ | $x$ | $A$ | $B$ | $y$ | $\nabla$ | $K_6$    | $xAq_4B y \vdash$     |
| $\nabla$ | $x$ | $A$ | $y$ | $y$ | $\nabla$ | $K_7$    | $xAyq_5y \vdash$      |
| $\nabla$ | $x$ | $A$ | $y$ | $B$ | $\nabla$ | $K_8$    | $xAq_6yB \vdash$      |
| $\nabla$ | $x$ | $A$ | $y$ | $B$ | $\nabla$ | $K_9$    | $xq_6AyB \vdash$      |
| $\nabla$ | $x$ | $x$ | $y$ | $B$ | $\nabla$ | $K_{10}$ | $xxq_3yB \vdash$      |
| $\nabla$ | $x$ | $x$ | $y$ | $B$ | $\nabla$ | $K_{11}$ | $xyq_3B \vdash$       |
| $\nabla$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $\nabla$ | $K_{12}$ | $xyyq_7\nabla \vdash$ |
| $\nabla$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $\nabla$ | $K_{13}$ | $xyq_8y$              |

**Zad 1.46.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie  $\mathbf{a(a + b)^*bb}$ . Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

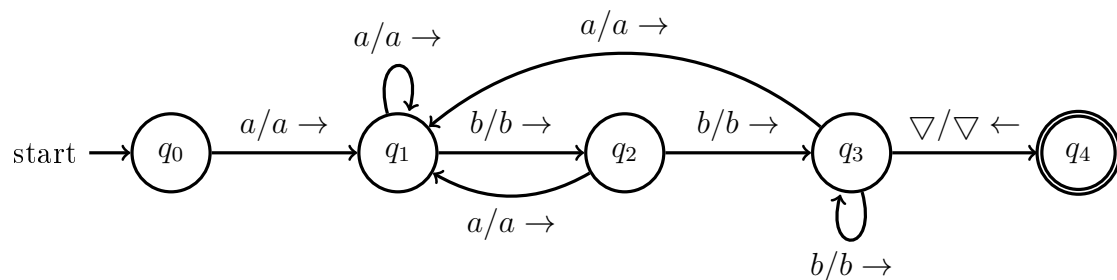
$$L = L(\mathbf{a(a + b)^*bb})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

1. abb
2. aaaabbbb
3. ababaaabbbb
4. aaabbaabbabb

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{a, b, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_4\}).$$



Obliczenia  $w = abb$

|  |   |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|---|
|  | ∇ | a | b | b | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | a | b | b | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | a | b | b | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | a | b | b | ∇ | ∇ |
|  | ∇ | a | b | b | ∇ | ∇ |

|       |                              |
|-------|------------------------------|
| $K_0$ | $q_0abb \vdash$              |
| $K_1$ | $aq_1bb \vdash$              |
| $K_2$ | $abq_2b \vdash$              |
| $K_3$ | $abbq_3\triangledown \vdash$ |
| $K_4$ | $abq_4b$                     |

Obliczenia  $w = aabb$

|  |   |   |   |   |   |   |
|--|---|---|---|---|---|---|
|  | ∇ | a | a | b | b | ∇ |
|  | ∇ | a | a | b | b | ∇ |
|  | ∇ | a | a | b | b | ∇ |
|  | ∇ | a | a | b | b | ∇ |
|  | ∇ | a | a | b | b | ∇ |
|  | ∇ | a | a | b | b | ∇ |

|       |                  |
|-------|------------------|
| $K_0$ | $q_0aabb \vdash$ |
| $K_1$ | $aq_1abb \vdash$ |
| $K_2$ | $aaq_1bb \vdash$ |
| $K_3$ | $aabq_2b \vdash$ |
| $K_4$ | $aabbq_3 \vdash$ |
| $K_5$ | $aabq_4b$        |

**Zad 1.47.** Wypisz cztery przykładowe łańcuchy opisywane przez wyrażenie  $\mathbf{10+(0+11)0^*1}$ . Czy można skonstruować (deterministyczną) maszynę Turinga, która akceptuje język

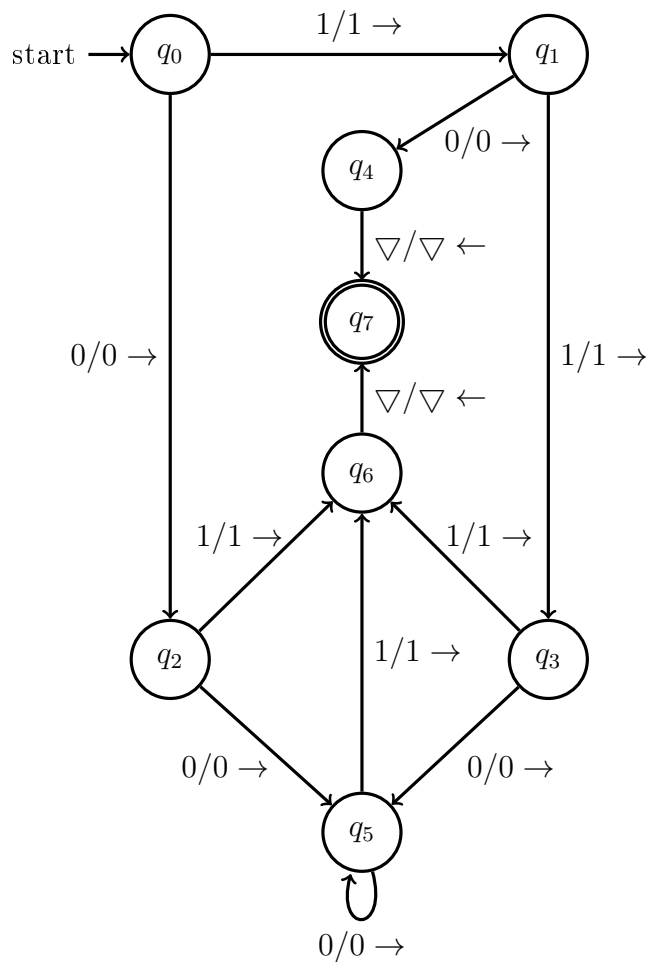
$$L = L(\mathbf{10+(0+11)0^*1})?$$

Jeżeli można, to narysuj diagram przejść i dla zaprojektowanej maszyny wykonaj dwa obliczenia (wykonaj rysunki taśmy i zapisz konfiguracje).

Rozwiązanie.

1. 10
2. 000001
3. 110001
4. 111

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \nabla, F) = (\{q_0, \dots, q_7\}, \{1, 0\}, \{1, 0, \nabla\}, \delta, q_0, \nabla, \{q_7\}).$$



Obliczenia  $w = 1101$

|  |          |   |   |   |   |          |  |       |                         |
|--|----------|---|---|---|---|----------|--|-------|-------------------------|
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $\nabla$ |  | $K_0$ | $q_0 1101 \vdash$       |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $\nabla$ |  | $K_1$ | $1q_1 101 \vdash$       |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $\nabla$ |  | $K_2$ | $11q_3 01 \vdash$       |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $\nabla$ |  | $K_3$ | $110q_5 1 \vdash$       |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $\nabla$ |  | $K_4$ | $1101q_6 \nabla \vdash$ |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $\nabla$ |  | $K_5$ | $110q_7 1$              |

Obliczenia  $w = 111$

|  |          |   |   |   |          |          |  |       |                        |
|--|----------|---|---|---|----------|----------|--|-------|------------------------|
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_0$ | $q_0 111 \vdash$       |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_1$ | $1q_1 11 \vdash$       |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_2$ | $11q_3 1 \vdash$       |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_3$ | $111q_6 \nabla \vdash$ |
|  | $\nabla$ | 1 | 1 | 1 | $\nabla$ | $\nabla$ |  | $K_4$ | $11q_7 1$              |