1. 解：(1) $N=11$ 时散列表如下

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22		41	30	1	53	46	13	67		

$$ASL=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}C_i=\frac{1}{8}(1+1+2+2+1+1+2+6)$$

$$=\frac{1}{8}\times 16=2.$$

(2) $N=10$ 时散列表如下

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	13	67	41	1		22		46	53

$$ASL=\frac{1}{8}\times(1+3+2+1+2+1+1+1)$$

$$=\frac{1}{8}\times 12=1.5.$$

故ASL减少了0.5.

2. 解：

(1) 先证明：$(a+b\bmod m)\bmod m=(a+b)\bmod m\ (a,b\geq 0,m>0)$

设 $b=km+\lambda\ (k,\lambda\geq 0)$

$\Rightarrow b\bmod m=\lambda.\ (0\leq\lambda\leq m-1)$

$\Rightarrow (a+b\bmod m)\bmod m=(a+\lambda)\bmod m=(a+\lambda+km)\bmod m=(a+b)\bmod m.$

为了方便递推，不妨令：

$i_0=0,\quad j_0=h(k)$

$\Rightarrow i_1=1,\quad j_1=(i_1+j_0)\bmod m.$

$=(1+h(k))\bmod m.$

$\Rightarrow i_2=2,\quad j_2=(2+[(1+h(k))\bmod m])\bmod m.$

$=(2+1+h(k))\bmod m.$

$\Rightarrow\cdots$

$\Rightarrow i_n=n,\ j_n=(n+(n-1)+\cdots+2+1+h(k))\bmod m.$

$$=\left(\frac{(1+n)n}{2}+h(k)\right)\bmod m$$

$$=(h(k)+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n)\bmod m$$

即 $h(k,i)=(h'(k)+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i^2)\bmod m,\ h'(k)=h(k)$

故该查找方法为二次探查法. $c_1=c_2=\frac{1}{2}$.

(2) 最坏情况为共散列 $m-1$ 次

每次散列得到的初始地址均相同，即每次都从相同的基位置开始向后探查. 不妨设基位置为0. 如图.

0	1	2	3	4	5		m-3	m-2	m-1
k_0	k_1		k_2			···			

设 $h(k_i)=0,\ \forall i\in\{0,1,\cdots,m-1\}$

根据(1)中求得的探查序列.

$h(k,i)=(h(k_0)+\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i)\bmod m$

$=(\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i)\bmod m.$

令 $f(i)=(\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i)\bmod m,\ i\in\{0,1,\cdots,m-1\}.$

只需证 $f(i)$ 为单射.

假设 $\exists i\neq j\wedge f(i)=f(j),\ i,j\in\{0,1,\cdots,m-1\}$

$\Rightarrow(\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i)\bmod m=(\frac{1}{2}j^2+\frac{1}{2}j)\bmod m.$

不妨设 $i<j$. $(\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i)\bmod m=r$.

$\Rightarrow\exists k_1<k_2.\ \frac{1}{2}i^2+\frac{1}{2}i=k_1m+r$

$\frac{1}{2}j^2+\frac{1}{2}j=k_2m+r.$

$\Rightarrow\frac{1}{2}(j+i)(j-i)+\frac{1}{2}(j-i)=(k_2-k_1)m$

$\Rightarrow\frac{1}{2}(j-i)(j+i+1)=(k_2-k_1)m$

$\Rightarrow(j-i)(j+i+1)=(k_2-k_1)2^{l+1}\quad(m=2^l).$

下面讨论 i,j 奇偶性.

① i,j 奇偶性相同

$\Rightarrow j+i+1$ 为奇数，$j-i$ 为偶数.

$\Rightarrow j-i$ 中有 $l+1$ 个因子2.

$\Rightarrow j-i\geq 2^{l+1}=2m.$

显然与 $0\leq i<j\leq m-1$ 矛盾！

② i,j 奇偶性不同.

$\Rightarrow j+i+1$ 为偶数，$j-i$ 为奇数.

$\Rightarrow j+i+1$ 中有 $l+1$ 个因子2.

$\Rightarrow j+i+1\geq 2^{l+1}=2m$

显然与 $0\leq i<j\leq m-1$ 矛盾！

综上 $\forall i,j\,(f(i)=f(j)\rightarrow i=j)$，即 f 是单射

又 $\mathrm{dom}F=\mathrm{ran}F$

故 f 是双射

即原命题成立.

证毕.

3. 解：(1) 算法描述：

利用二分查找，每次查找统计矩阵中小于等于 mid 的元素个数，根据个数与 k 的大小关系逼近第k小元素

伪代码：

```
matrix [n][n], l = matrix[0][0], r = matrix[n-1][n-1].
int calculate (int mid)
    i = n-1, j = 0
    num = 0
    while i >= 0 and j < n do:
        if matrix[i][j] <= mid then
            num += i+1
            j++
        else
            i--
        End if
    End while
End

int searchKth
    while l <= r do:
        mid = l + (r-l)/2
        count = calculate(mid)
        if count < k then
            l = mid+1
        else
            r = mid-1
        End if
    End while
    return l
End
```

(2) 时间复杂度分析：

算法所需时间为

$$O(N\cdot\log_2(\max(A)-\min(A)))$$

$$\ll O(N\log_2 2^N)=O(N^2)$$

即可以认为时间复杂度是 $O(N^2)$ 的.

4. 解：算法A：开一个大小为 10^8+1 的数组 v，任意随机数 $r\Rightarrow v[r]=\text{visited}$.
最终没有visited标记的下标即为没有在随机数中的数.

算法B：开一个大小为 10^7+1 的数组 v，记录所有随机数并用排序算法使之有序. 最后没有在随机数中的数为 $[0, v[0])$
$(v[0], v[1]),\cdots,(v[10^7-1], v[10^7])$

算法C：利用 10^8 个bit筛出没有在随机数中的数. 思路与A类似.

复杂度比较：$N=10^7$.

算法	时间复杂度	空间复杂度
A	$\theta(N)$	$\Theta(N)$
B	$\theta(N\lg N)$	$\theta(N)$
C	$\theta(N)$	10^8 bit $(\ll\theta(N))$