

# 第十一章作业

1. 解: 只和让 B 树层高尽可能大即可.

即令根结点有两个子结点, 其余所有内部结点有  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 21$  个子结点, 即根结点内含 1 个关键字而其余所有内部结点内含

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 = 20$  个关键字. 如此则有:

第 1 层关键字个数为 1

第 2 层关键字个数为  $2 \times 20$

第 3 层关键字个数为  $2 \times 21 \times 20$

...

第 h 层关键字个数为  $2 \times 21^{h-2} \times 20$

$$\Rightarrow 1 + 2 \times 20 + 2 \times 21 \times 20 + \dots + 2 \times 21^{h-2} \times 20$$

$$= 1 + 40 \times (1 + 21 + 21^2 + \dots + 21^{h-2})$$

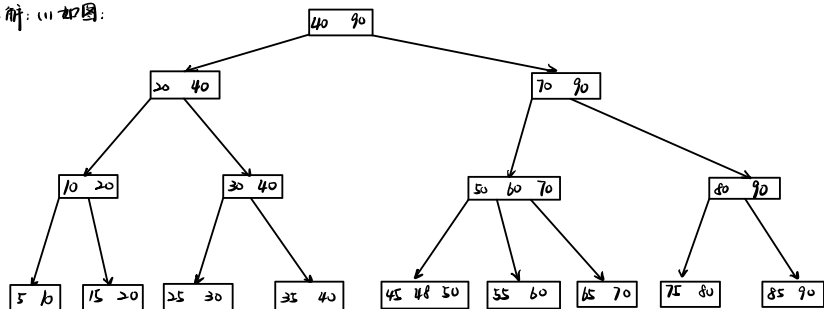
$$= 1 + 40 \times (\frac{1 - 21^{h-1}}{1 - 21})$$

$$= 1 + 2 \cdot 21^{h-1} - 2 = 2 \cdot 21^{h-1} - 1 \geq 10000$$

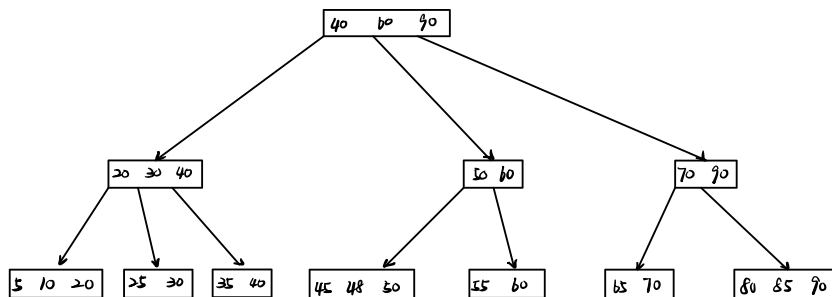
$$\Rightarrow h \geq 4$$

即树最高为 4 层, 即最长查找路径为  $4-1=3$ .

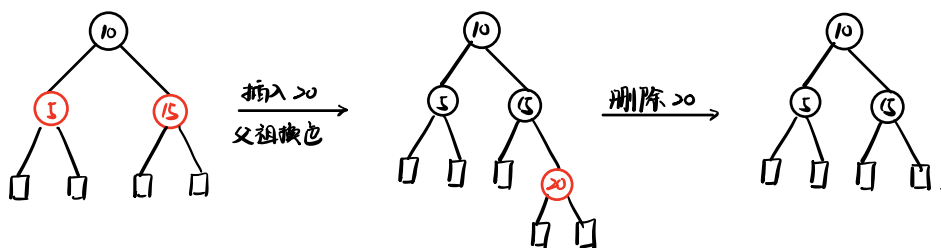
2. 解: (1) 如图:



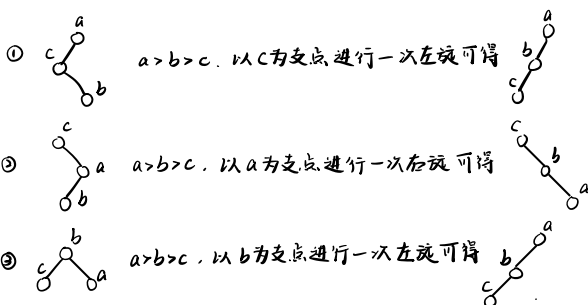
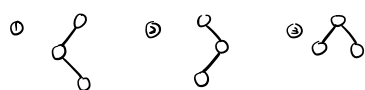
(2)



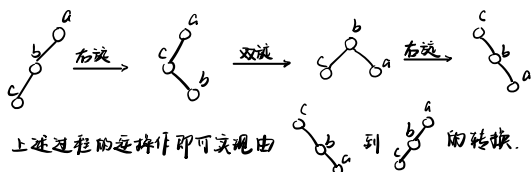
3. 解: 不一定. 例子如下:



4. 证: 先证以下几种子树均可转化为链状 BST.



下证: 上述两种子树可以互相转换



因此, 通过对任意 BST 递归地进行上述操作均可使其转换为一条链.

再对链进行逆操作即可得任意 BST, 显然时间复杂度是  $O(n)$  的

5. (1) 解: 考虑搜索的时间上界

当根结点只有 1 个关键字, 其余所有内部结点有  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  个关键字时, 第 I 层结点数 (外部结点数) 至少为  $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{I-1}}$ .

$$n+1 \geq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{I-1}} \quad (I \text{ 为树的深度})$$

$$\Rightarrow I \leq 1 + \log_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\frac{n+1}{2})$$

由于每个节点内用线性查找的时间复杂度为  $O(t)$

$$\Rightarrow \text{时间复杂度为 } O(t(1 + \log_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n+1}{2})) = O(t(1 + \frac{\log n}{\log t})) = O(t + \frac{t \log n}{\log t})$$

$$(2) \text{ 证: 时间复杂度为 } O(\log t(1 + \log_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n+1}{2})) = O(\log t(1 + \frac{\log n}{\log t})) = O(\log t + \log n) = O(\log n).$$