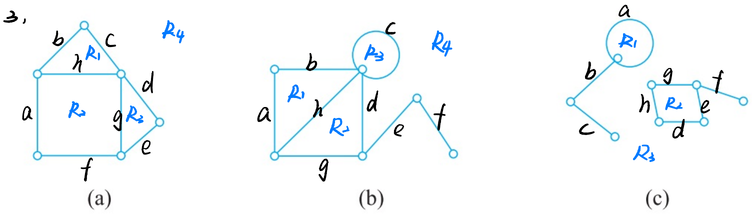
3.



(a) (b) (c)

解: (a). R_1 : bch, $deg(R_1)=3$

R_2 : ahgf, $deg(R_2)=4$

R_3 : deg, $deg(R_3)=3$

R_4 : abcdef, $deg(R_4)=6$.

(b) R_1 : abh, $deg(R_1)=3$

R_2 : hdg, $deg(R_2)=3$

R_3 : c, $deg(R_3)=1$

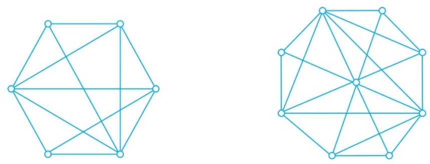
R_4 : abcdeffeg, $deg(R_4)=9$

(c) R_1 : a, $deg(R_1)=1$

R_2 : hdeg, $deg(R_2)=4$

R_3 : abccb ∪ hdeffg, $deg(R_3)=11$

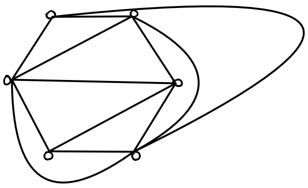
7. 证:



(a) (b)

(a) 图(a)的平面嵌入如下图.

(a)显然为简单连通平面图.

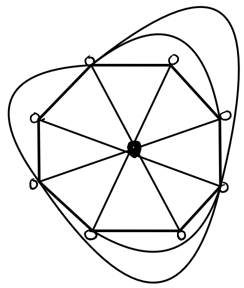


满足 $\forall R_i, deg(R_i)=3$

$\Rightarrow$ (a)为极大平面图

(b) 图(b)的平面嵌入如下图.

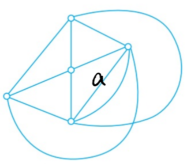
显然为简单连通平面图.



满足 $\forall R_i, deg(R_i)=3$

$\Rightarrow$ (b)为极大平面图

9.



解: 不是极小非平面图.

删去边 a 仍是非平面图.

14. 证: 设 $G=<V,E>$, $|V|=n$, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, $|E|=m$.

不妨设G是连通的. 若不连通则可对每个连通分支进行讨论.

由欧拉公式:

$n-m+r=2$

由握手定理:

$$2m=\sum_{i=1}^{n} d(v_i)\geq 3n$$

$$\Rightarrow 2m\geq 3n=3(2+m-r)=3m-3r+6$$

$$\Rightarrow 3r-6\geq m \quad ①$$

$$2m=\sum_{i=1}^{r} deg(R_i)$$

假设 $\forall R_i, deg(R_i)\geq 5$.

$$\Rightarrow 2m\geq 5r \quad ②$$

①② $\Rightarrow 3r-6\geq \frac{5}{2}r \Rightarrow r\geq 12$, 矛盾!

故 $\exists R_i, deg(R_i)\leq 4$. ∎

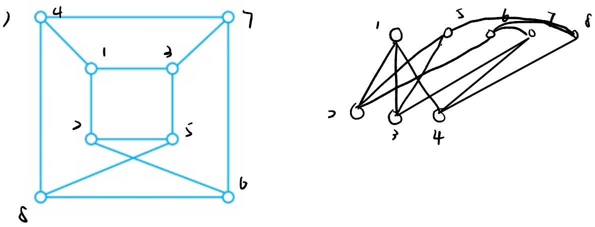
$r=12$, 反例: 正十二面体所形成的平面图.

17. 证: 设m为图的边数, n为图的顶点数

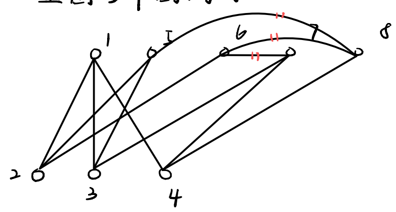
(a). 图(a)中含有 K_5 子图

故不是平面图.

(b)



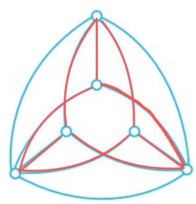
上图与下图同构.



将标出的3条边收缩, 即可得到 $K_{3,3}$.

由Kuratowski定理: (b)为非平面图.

(c)



(c)中含有 $K_{3,3}$ 子图

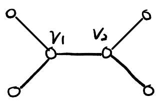
故为非平面图.

3. 解：极小点覆盖集：$\{v_3, v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_2, v_5\}$.

最小点覆盖集：$\{v_3, v_2, v_4\}$

$\alpha_0 = 3$.

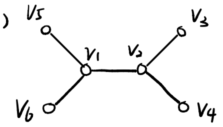
10. (1)



$\{v_1, v_2\}$是极小支配集

但不是点独立集

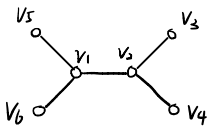
(2)



$\{v_1, v_3, v_4\}$是极小支配集

但不是最小支配集

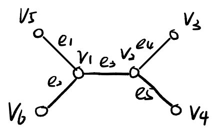
(3)



$\{v_1, v_3, v_4\}$是极大独立集

但不是最大独立集

(4)



$\{e_3\}$是极大匹配

但不是最大匹配.

17. 解：建模如下：

二部图 $G=\langle V_1, V_2, E\rangle$, $|V_1|=|V_2|=n$.

$\forall(u,v)\in E \Leftrightarrow$ 老师u教课程v.

$\forall v\in V_1, d(v_1)\geq 2$, $\forall v\in V_2, d(v_2)\leq 2$.

由t条件：

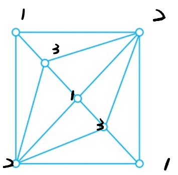
G中存在由V_1到V_2的完备匹配.

又 $|V_1|=|V_2|=n$

$\Rightarrow$ 该完备匹配为完美匹配.

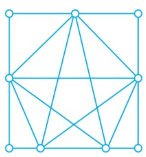
即每位老师可以正好教一门课

21.



(a)

$\chi = 3$



(b)

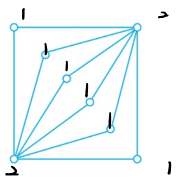
$\Delta = 5$

$\chi \leq 5$

又K_5为(b)的子图

故 $\chi \geq 5$

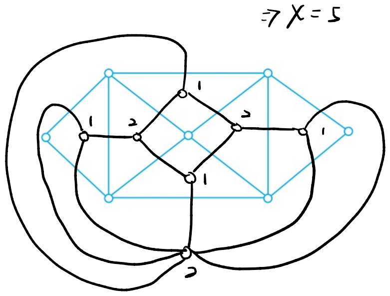
$\Rightarrow \chi = 5$



(c)

$\chi = 2$

28.



G^*如左图.

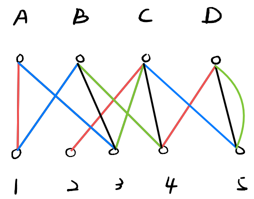
$\chi(G^*) = 2$

$\Rightarrow \chi^*(G) = 2$.

22. 建模如下：

二部图 $G=\langle V_1, V_2, E\rangle$, $V_1=\{A, B, C, D\}$, $V_2=\{1,2,3,4,5\}$

$e=(X, m)\in E \Leftrightarrow$ 老师X给m班上课.



$\chi'(G)=4$ (Vizing定理)

即至少要安排4节课，需要3个教室.
(最少)