第11章

6. 解：(1) 特征方程为 $x^2-7x+12=0$

$\Rightarrow x_1=3, x_2=4$

$\Rightarrow$ 方程通解为 $a_n=c_1\cdot 3^n+c_2\cdot 4^n$.

将 $a_0=4, a_1=6$ 代入得：

$$\begin{cases}4=c_1+c_2\\6=3c_1+4c_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1=10\\c_2=-6\end{cases}.$$

$\Rightarrow$ 方程的解为 $a_n=10\cdot 3^n-6\cdot 4^n$.

(2) 特征方程为 $x^2+6x+9=0$

$\Rightarrow x_1=x_2=-3$.

$\Rightarrow$ 对应齐次方程通解为 $\overline{a_n}=(C_1+C_2n)(-3)^n$.

注意到 $f(n)=3$. 设特解为 $a_n^*=P$.

$\Rightarrow P+6P+9P=3$，$P=\frac{3}{16}$

$\Rightarrow$ 方程通解为 $a_n=(C_1+C_2n)(-3)^n+\frac{3}{16}$.

将 $a_0=0, a_1=1$ 代入得：

$$\begin{cases}0=C_1+\frac{3}{16}\\1=(C_1+C_2)(-3)+\frac{3}{16}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=-\frac{3}{16}\\C_2=-\frac{1}{12}.\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 方程通解为 $a_n=(-\frac{3}{16}-\frac{1}{12}n)(-3)^n+\frac{3}{16}$

(3) 特征方程为 $x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow x_1=1, x_2=2$.

$\Rightarrow$ 对应齐次方程通解为 $\overline{a_n}=C_1+C_2\cdot 2^n$.

注意到 $f(n)=1$，设方程特解 $a_n^*=P_1n+P_2$.

$\Rightarrow (P_1n+P_2)-3(P_1(n-1)+P_2)+2(P_1(n-2)+P_2)=1$.

$\Rightarrow -P_1=1$

$\Rightarrow a_n^*=-n$.

$\Rightarrow$ 方程通解为 $a_n=C_1+C_2\cdot 2^n-n$.

代入 $a_0=4, a_1=6$ 得：

$$\begin{cases}4=C_1+C_2\\6=C_1+2C_2-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=1\\C_2=3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 方程的解为 $a_n=3\cdot 2^n-n+1$.

(4) 特征方程为 $x^2-7x+10=0$.

$\Rightarrow x_1=2, x_2=5$

$\Rightarrow$ 对应齐次方程通解为 $\overline{a_n}=C_1 2^n+C_2\cdot 5^n$.

注意到 $f(n)=3^n$. 设特解为 $a_n^*=P\cdot 3^n$

$\Rightarrow P\cdot(3^n-7\cdot 3^{n-1}+10\cdot 3^{n-2})=3^n \Rightarrow P=-\frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ 方程通解为 $a_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 5^n-\frac{9}{2}\cdot 3^n$

将 $a_0=0, a_1=1$ 代入得：

$$\begin{cases}0=C_1+C_2-\frac{9}{2}\\1=2C_1+5C_2-\frac{9}{2}\times 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=\frac{8}{3}\\C_2=\frac{11}{6}\end{cases}.$$

$\Rightarrow$ 方程通解为 $a_n=\frac{8}{3}\cdot 2^n+\frac{11}{6}\cdot 5^n-\frac{9}{2}\cdot 3^n$.

(5) 依题知：

$a_n=n!+na_{n-1}$

$a_{n-1}=(n-1)!+(n-1)a_{n-2}$

$a_{n-2}=(n-2)!+(n-2)a_{n-3}$.

$\vdots$

$a_1=1!+1\cdot a_0$

依次代入得：$a_n=n\cdot n!+n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 1\cdot a_0$

$=n\cdot n!+2\cdot n!$

$=(n+2)n!$

下证 $a_n=(n+2)n!$ 符合题意.

$n=0$, $a_0=2\cdot 0!=2$ 符合题意

假设 $n=k$ 时 $a_k=(k+2)k!$，则当 $n=k+1$ 时

$a_{k+1}-(k+1)a_k=(k+1)!$

$\Rightarrow a_{k+1}=(k+2)(k+1)k!+(k+1)!$

$=(k+1+2)(k+1)!$ 合题意.

故 $a_n=(n+2)n!$ 为方程的解.

15. 解：(1) 设 $H(n)$ 表示 $n\mu s$ 内可以发送的不同信号数.

$H(n)=H(n-2)+H(n-3)\ (n\geq 4)$

(2) $H(2)=1, H(3)=1$,

$H(1)=0$

(3) $H(12)=H(10)+H(9)$

$=H(8)+H(7)+H(7)+H(6)$

$=H(6)+H(5)+2(H(5)+H(4))+H(4)+H(3)$

$=H(6)+3H(5)+3H(4)+H(3)$

$H(6)=H(4)+H(3)=H(2)+H(1)+1=2$

$H(5)=H(3)+H(2)=2$

$H(4)=H(2)+H(1)=1$

$H(3)=1$

$\Rightarrow H(12)=2+6+3+1=12$

21. 解：(1) 依题知：

$C(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^4$

$=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x(1-x^{2n})}{1-x^2}\right)^4$

$=\frac{x^4}{(1-x^2)^4}$

(2) 依题知：

$C(x)=(x^0+x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2$

$=(1+x)\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^n}{1-x}\right)^2$

$=\frac{x+1}{x^2-2x+1}$

(3) 依题知:

$$C(x)=(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4$$
$$=(\lim_{n\to\infty}\frac{x^{10}(1-x^n)}{1-x})^4$$
$$=\frac{x^{40}}{(1-x)^4}.$$

23. 解: 原问题等价于将 n (n 为奇数) 拆分为 3 个正整数, 且 2 个整数不相等.

拆分数: 考虑不定方程 $(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)=n$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3=n-3$,

生成函数 $F(x)=(1+y+y^2+\cdots)^3=\frac{1}{(1-y)^3}$,

y^{n-3} 系数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

考虑 2 个整数相等的情况, 不定方程 $2x_1+x_3=n-3$,

n 为奇数 $\Rightarrow$ $n-3$ 为偶数 $\Rightarrow$ x_3 为偶数

$\Rightarrow$ 有 $\frac{n-1}{2}$ 种情况.

故总的方案数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{1}{2}(n-1)(n-3)$,

28. 解: 设方案数为 $\{a_n\}$, 其生成函数为 $F(x)$

依题知:

$$F(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)$$
$$(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)$$
$$=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2$$
$$=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2(e^{2x})$$
$$=\frac{1}{4}(e^{4x}+2e^{2x}+1)$$
$$=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{+\infty}4^n\frac{x^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{+\infty}2^n\frac{x^n}{n!}+1)$$

$$\Rightarrow a_n=\begin{cases}4^{n-1}+2^{n-1}, & n\geq 1\\ 0, & n=0\end{cases}$$