

第14章

1. 解: (a) 是格.

(b) 不是格, $\{d, e\}$ 无最大下界

(c) 是格

(d) 不是格, $\{d, e\}$ 无最大下界

(e) 不是格, $\{d, e\}$ 无最大下界

(f) 是格.

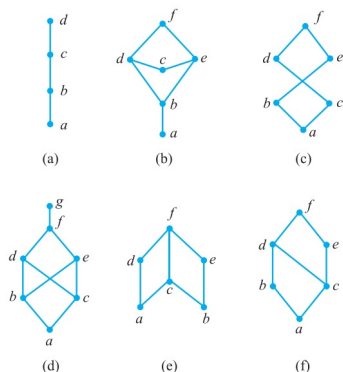


图 14.4.1

2. 解: (1) 不是任何一类代数系统, 因为 $*$ 在 S_1 上不封闭.

(2) 显然, $*$ 在 S_2 上封闭.

① 满足结合律:

$$\forall a_i, a_j, a_k \in S_2, (a_i * a_j) * a_k = a_i * a_k = a_i$$

$$a_i * (a_j * a_k) = a_i * a_j = a_i$$

② 无单位元.

故是且仅是半群

(3) $*$ 在 S_2 上封闭

① 满足结合律

② 单位元: 1

③ 逆元: 0 无逆元 (0 为零元)

故是且仅是独异点

(4) $\circ, *$ 分别在 S_4 上封闭.

① $*$ 满足结合律

② $*$ 单位元: b

③ $*$ 逆元: 1 无逆元 (1 为零元)

故 $\langle S_4, * \rangle$ 为独异点.

① \circ 满足结合律

② \circ 单位元: 1

③ \circ 逆元: 2 无逆元

故 $\langle S_4, \circ \rangle$ 为独异点.

$\Rightarrow \langle S_4, \circ, * \rangle$ 不构成环、域.

显然 $*$ 满足交换律、结合律.

吸收律: $\forall a, b \in S_4, a * (a \circ b) = \gcd(a, \text{lcm}(a, b))$

$$= a$$

$$a \circ (a * b) = \text{lcm}(a, \gcd(a, b)) = a.$$

从而满足吸收律.

在 S_4 上定义偏序关系 \leq :

$$\forall x, y \in S_4, \langle x, y \rangle \in \leq \Leftrightarrow x | y.$$

显然 \leq 是自反、反对称和传递的.

故 $\langle S_4, \leq, \circ, *, 1, b \rangle$ 构成格.

分配律: $\forall a, b, c \in S_4$

$$a \circ (b * c) = \text{lcm}(a, \gcd(b, c)) \quad \textcircled{1}$$

$$(a \circ b) * (a \circ c) = \gcd(\text{lcm}(a, b), \text{lcm}(a, c)) \quad \textcircled{2}$$

由正整数的素因子分解知:

$$\textcircled{1} = \textcircled{2}.$$

由对偶原理: 分配律成立

补元: 1 与 b 互为补元, 2 与 3 互为补元.

故 $\langle S_4, \leq, \circ, *, 0, 1 \rangle$ 为布尔代数.

(5) $*$ 、 \circ 均在 S_5 上封闭.

显然 $*$ 、 \circ 满足结合律、交换律、分配律.

$*$ 单位元: 0, $*$ 逆元: $0^{-1} = 1, 1^{-1} = 0$

\circ 单位元: 1,

$\Rightarrow \langle S_5, * \rangle$ 构成交换群

$\langle S_5, \circ \rangle$ 构成半群

0 对 $*$ 构成分配律.

$\Rightarrow \langle S_5, *, \circ \rangle$ 是整环

又 $|S_5| \geq 2 \wedge 1^{-1} = 1 \in S_5$

$\Rightarrow \langle S_5, *, \circ \rangle$ 构成域.

B. 解: (1) $p = (a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$

$$= (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$$

$$= b \wedge (a \vee c)$$

$$(2) p^* = b \vee (a \wedge c)$$

第十五章

4. 解: (1) p : 2 是素数, q : 5 是素数

$p \wedge q$, 真值为 1.

(2) p : π 是无理数, q : e 是无理数

$p \wedge q$, 真值为 1.

(3) p : 2 是最小的素数, q : 2 不是最小的自然数

$p \wedge q$, 真值为 1.

(4) p : 3 是偶数, q : 3 是素数

$p \wedge q$, 真值为 0.

(5) p : 4 不是素数, q : 4 不是偶数

$p \wedge q$, 真值为 0.

8. 解: (1) p : $2 < 1$, q : $3 < 2$

$p \rightarrow q$, 真值为 1

(2) p : $2 < 1$, q : $3 \geq 2$

$p \rightarrow q$, 真值为 1

(3) p : $2 < 1$, q : $3 \geq 2$

$q \rightarrow p$, 真值为 0

(4) p : $2 < 1$, q : $3 \geq 2$

$q \rightarrow p$, 真值为 0.

(5) p : $2 < 1$, q : $3 \geq 2$

$q \rightarrow p$, 真值为 0.

(6) p : $2 < 1$, q : $3 < 2$

$p \rightarrow q$, 真值为 1.

11. 解: (1) p : $2+2=4$, q : 地球是静止不动的

$p \rightarrow q$, 真值为 0.

(2) p : $2+2=4$, q : 地球是运动不止的

$p \rightarrow q$, 真值为 1.

(3) p : 地球上没有树木

q : 人类不能生存.

$p \rightarrow q$, 真值为 1.

(4) p : 地球上没有水

q : $\sqrt{2}$ 是无理数

$p \rightarrow q$, 真值为 1.

16. 解: (1) 真值为 0

(2) 真值为 0

(3) 真值为 0

(4) 真值为 1

25. 解: 均为矛盾式.

30. 解: 不能, 能得出 A 或 B 是重言式.