第13章

2.解：(1) 构成半群、独异点、群

(2) 构成半群、独异点、群

(3) 构成半群，不构成独异点和群

(4) 构成半群、独异点、群

(5) 构成半群、独异点，不构成群.

(6) 构成半群、独异点、群

12.证：即证：$<T, \otimes_n>$ 为Abel群

$\forall x, y \in T$，$(x, n) = 1$，$(y, n) = 1$ （显然 $T \neq \emptyset$，$1 \in T$）

$x \otimes_n y = xy \bmod n \in \mathbb{Z}_n$

$(x, n) = 1 \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$，$ax + bn = 1$

$(y, n) = 1 \Leftrightarrow \exists c, d \in \mathbb{Z}$，$cy + dn = 1$

$\Rightarrow (ac)(xy) = (1 - bn)(1 - dn)$

$\Rightarrow (ac)(xy) = 1 - (b+d)n + bdn^2$

$\Rightarrow (ac)(xy) + (b + d + bdn)n = 1$

$\Leftrightarrow (xy, n) = 1 \Leftrightarrow a'xy + b'n = 1$，$a', b' \in \mathbb{Z}$

设 $xy = kn + i$，$k \in \mathbb{N}$，$0 \leq i < n$

则 $i = x \otimes_n y$

$\Rightarrow a'(kn + i) + b'n = 1$

$\Rightarrow a'i + (a'k + b')n = 1$

$\Leftrightarrow (i, n) = 1 \Rightarrow x \otimes_n y \in T$

故 $\otimes_n$ 对T封闭.

① 结合律：

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_n$

$(x \otimes_n y) \otimes_n z = ((xy \bmod n)\, z) \bmod n$

$= xyz \bmod n$

$x \otimes_n (y \otimes_n z) = x \otimes_n (yz \bmod n)$

$= xyz \bmod n$

② 单位元为1

③ 逆元.

显然 $0 \notin T$，$1 \in T$

$\forall x \in T$，$(x, n) = 1$

$\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$，$ax + bn = 1$

即 $ax \bmod n = 1$，$a \otimes_n x = 1$

只需证 $\exists a$，$a \in T$

显然 $(a, n) = 1$

故只需证 $\exists a$，$a \in [0, n)$.

设 $a = kn + a'$（$k \in \mathbb{N}$，$0 \leq a' < n$）

$\Rightarrow (kn + a')x + bn = 1$

$\Rightarrow a'x + (b + k)n = 1$

$\Rightarrow (a', n) = 1$

故 $\forall x \in T$，$x^{-1} = a'$.

④ 交换律显然成立.

29.解：(1) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\sigma\tau = (1\ 4\ 2\ 3)$，$\tau^{-1} = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$

$\sigma^{-1}\tau\sigma = (1\ 5\ 2\ 4\ 3)$

(3) $\sigma\tau = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)$，奇置换

$\tau^{-1} = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 3)$ 偶置换

$\sigma^{-1}\tau\sigma = (1\ 5)(1\ 2)(1\ 4)(1\ 3)$，偶置换

31.解：由Polya定理：

方案数 $M = \frac{1}{6+6}(\underbrace{3^6 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^2 + 3^1}_{\text{旋转}} + \underbrace{3 \times 3^3 + 3 \times 3^4}_{\text{翻转}})$

$= \frac{1}{12}(729 + 3 + 9 + 27 + 9 + 3 + 81 + 243)$

$= \frac{1}{12} \times 1104$

$= 92$

34.解：(1) 构成环、整环、域

(2) 不构成环、整环、域（加法不封闭）

(3) 构成环，不构成整环、域（乘法无单位元）

(4) 不构成环，整环，域（加法存在无逆元元素）

(5) 不构成环，整环和域（乘法不封闭）