第12章

8. 解：(1) $4*6=4$

$7*3=3$

(2) ① $\forall x,y\in \mathbb{Z}^+$

$x*y=\min(x,y)=\min(y,x)=y*x$

满足交换律

② $\forall x,y,z\in \mathbb{Z}^+$

$(x*y)*z=\min(\min(x,y),z)=\min(x,y,z)$

$x*(y*z)=\min(x,\min(y,z))=\min(x,y,z)$

满足结合律

③ $\forall x\in \mathbb{Z}^+$

$x*x=\min(x,x)=x$

满足幂等律.

(3) 无单位元

零元为 1

$\mathbb{Z}^+$中无可逆元素

17. 解：V_1的所有子代数为 $<\{1\},\circ,1>$，$<\{1,2\},\circ,1>$

$<\{1,3\},\circ,1>$，$<\{1,2,3\},\circ,1>$

平凡子代数为 $<\{1\},\circ,1>$，$<\{1,2,3\},\circ,1>$

真子代数为 $<\{1,2\},\circ,1>$，$<\{1,3\},\circ,1>$，$<\{1\},\circ,1>$

V_2的所有子代数为 $<\{6\},*,6>$，$<\{5,6\},*,6>$

均为平凡子代数，真子代数为 $<\{6\},*,6>$

18. 解：(1) $f(x\cdot y)=|xy|$

$f(x)\cdot f(y)=|x||y|=|xy|$

为自同态，不是单自同态、满自同态和自同构.

$f(V)=<\mathbb{R}_+,\cdot>$

(2) $f(xy)=2xy$

$f(x)f(y)=4xy$

不是V的自同态

(3) $f(xy)=(xy)^2=x^2y^2$

$f(x)\cdot f(y)=x^2\cdot y^2=x^2y^2$

是V的自同态，不是单自同态、满自同态和自同构.

$f(V)=<\mathbb{R}_+,\cdot>$

(4) $f(x\cdot y)=\frac{1}{xy}$

$f(x)\cdot f(y)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}$

是V的自同态，是单自同态、满自同态和自同构.

$f(V)=V$

(5) $f(x\cdot y)=-(x\cdot y)=-xy$

$f(x)\cdot f(y)=(-x)\cdot(-y)=xy$

不是V的自同态

(6) $f(x\cdot y)=xy+1$

$f(x)\cdot f(y)=(x+1)(y+1)$

不是V的自同态

20. 证：设 $V_1\times V_2=<A\times B,\cdot>$，$\forall <x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in A\times B$

$<x_1,y_1>\cdot<x_2,y_2>=<x_1\circ x_2,\ y_1*y_2>$

只需证：$\forall <x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in A\times B$

$f(<x_1,y_1>\cdot<x_2,y_2>)=f(<x_1,y_1>)\circ f(<x_2,y_2>)$

$LHS=f(<x_1\circ x_2,\ y_1*y_2>)=x_1\circ x_2$

$RHS=x_1\circ x_2$

$\Rightarrow LHS=RHS$，

故f是$V_1\times V_2$到V_1的同态映射，

∎