

音乐基础知识

音乐：凭借声波振动而产生，在时间中展现
声波：是纵波，空气疏密的变化。

声音的物理属性：
高低由频率决定，音高 (pitch)
声音强弱由压力决定，力度 (dynamics)
~ 时间长度 时值 (duration)
~ 特征 由波形决定 音色 (timbre)

频率 - 音高 人听力 20-20K Hz

音乐会音高 (concert pitch) 中央C上方的A是440 Hz

人耳对不同频率声音有不同听感即响度

声压 - 力度 人耳听觉下限阈值：20 μPa (频率为1KHz时)

一分贝 人对声压的感觉并非线性，用声压水平来度量

$I_p = 20 \log \frac{p}{p_0}$ p_0 是下限阈值， I_p 单位就是分贝

音色 傅里叶级数 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

⇒ 一个复杂的振动可以分解成简单的正弦波振动的叠加。

⇒ 一个复杂的振动包含了若干不同频率的振动

两种视图：把一个振动描绘成随时间变化的图。时域

把振动对应的不同频率上的图绘出 频域

物理知识

声音体系：乐音 (musical tone) 噪音 (noise)

二十世纪以来音乐家越来越多地使用 (organized noise)

乐音：(打击乐器 (percussion instrument))：分为有固定音高和无固定音高的

噪音使用：eg 1. 柴科夫斯基《1812序曲》，用炮

eg 2. 打溜子 vs. stomping (舞台表演状态) 谭盾《地图》第三乐章

乐音：音乐中使用的，有固定音高的几个乐音构成一个集合，称为乐音体系，通常作

音级，从低到高排列叫音列，两个相邻的音相差一个半音

每级都有音名 C D E F G A B

在每个八度 (octave)，为已列不同八度间同名音，人们把这些音分为音组

88键

lower left: 88-key piano

(变音记号)

音名 C, D, E, F, G, A, B 是基本音级; 将基本音级加上升、降号成为变化音级。

升 #, 降 b, 重升 x, 重降 bb 还原 ♮

在现代钢琴 $\sharp E = F$, $\flat F = E$, $\sharp B = C$, $\flat C = B$

一个音级可以有不同音名, 这些音名称为等音的, 但这些音有不同意义。

唱名 do re mi fa sol la si (ti)

固定唱名法 (fixed do)

do = C, 唱名在键盘上位置固定

首调唱名法 (movable do)

移动唱名法, do 可以是任何一个音级 (简谱中 1 = ...)

大调主音唱 do, 小调主音唱 la

五线谱:

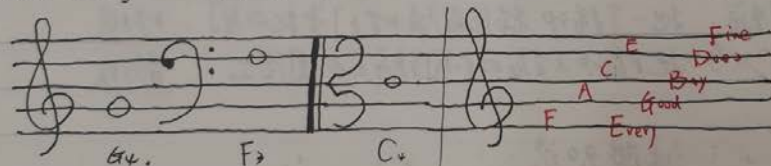
历史: 工尺谱

合 四 一 上 尺 工 凡 六 五 乙

→ 简谱

音符: 符头, 符干, 符尾, 描述的是相对长度附点: 原音符时值 $\times \frac{3}{2}$ 拍号: (time signature) $\frac{m}{n}$, m 为每小节拍数, n 为每拍音符的时值绝对时值: 速度 (tempo) $\text{♩} = 60$: 每分钟奏 60 个四分音符

谱号: (clef): 高音谱号 (treble ~), 低音 (bass ~), 中音 (alto ~)



谱表 (staff), 分为单谱表和联合谱表 (钢琴、花格谱表 grand staff)

(合唱谱 S, A, T, B.)

变音记号: ① 调号 (key signature): 对乐谱中所有同高度音 (未改变调之前)② 临时变音记号: 变音记号之后一小节之内 同高度的音, 延音例外

音程: Edwin Evans. (英国音乐评论家):

Music is, however, an art not of notes but of intervals

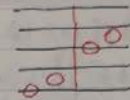
在乐音体系中，两个音级之间距离称为音程 (interval) 高的叫上方音 (冠音)
低的叫下方音 (基音)，先后发声叫旋律音程，同时叫和声音程

由两个音级决定 (度数 + 半音数)

度数：在五线谱上包括的间和线度数

半音数：两个音级包含的半音的数目

半音数为1的二度音程叫小二度 *the minor second* $E_4 - F_4, B_4 - C_5$



半音数为2的二度音程叫大二度 *the major second* $C_4 - D_4, D_4 - E_4, F_4 - G_4, G_4 - A_4, A_4 - B_4$

半音数为3的三度音程叫小三度 $D_4 - F_4, E_4 - G_4, A_4 - C_5, B_4 - D_5$

半音数为4的三度音程叫大三度 $C_4 - E_4, F_4 - A_4, G_4 - B_4$

半音数为5的四度音程叫纯四度 *the perfect fourth* $C_4 - F_4, D_4 - G_4, E_4 - A_4, G_4 - C_5, A_4 - D_5, B_4 - E_5$

半音数为6的四度音程叫增四度 (三全音) 最不协和 *the augmented fourth* $F_4 - B_4$

半音数为6的五度音程叫减五度 *tritone* *the diminished fifth* $B_4 - F_5$

半音数为7的五度音程叫纯五度 $C_4 - G_4, D_4 - A_4, E_4 - B_4, F_4 - C_5, G_4 - D_5, A_4 - E_5$

半音数为8的六度音程叫小六度 $E_4 - C_5, A_4 - F_5, B_4 - G_5$

半音数为9的六度音程叫大六度 $C_4 - A_4, D_4 - B_4, F_4 - D_5, G_4 - E_5$

半音数为10的七度音程叫小七度 $D_4 - C_5, E_4 - D_5, G_4 - F_5, A_4$

半音数为11的七度音程叫大七度 $C_4 - B_4, F_4 - E_5$

半音数为12的八度，纯八度 *the perfect octave* $C_4 - C_5, \dots, B_4 - B_5$

不计纯一度，纯八度，有42个音程

diatonic interval

自然音程 和变化音程:

自然~: 大小二, 大小三, 大小六, 大小七, 纯一, 四, 五, 八, 增四减五

变化~: 大, 纯音程 增一半音得到增音程

小, 纯音程 减一半音得到减音程

大减小, 小增大

consonant int. dissonant int.

协和音程 和不协和音程

纯四, 纯五, 纯八, 大小三度, 大小六度, 协和

二, 七 和所有增减, 不协和音程

协和的主观性? 协和不协和是相对的, 有时不协和音程也有特殊作用.

减	小	纯	大	增
				C-C(1)
		C-C(1)		
二	#C-bD(2) C-bD(1)		C-D(2) C-#D(3)	
三	#C-bE(2) C-bE(1)		C-E(4) C-#E(5)	
四	#C-F(4)		C-F(5) C-#F(6)	
五	#C-G(6)		C-G(7) C-#G(8)	
六	#C-#A(7) C-A(8)		C-A(9) C-#A(10)	
七	#C-bB(9) C-bB(10)		C-B(11) C-#B(12)	
八	#C-C(11)		C-C(12) C-#C(13)	

毕达哥拉斯 B.C.569-475 理论

在弦乐器中, 弦长缩短 $\frac{1}{2}$, 音高八度

长度成简单整数比的弦能够发出协和声音 一度: 1:1, 1/2, 1:2

二: 3:2 纯四度: 3:4 (完全协和) 六度 3:5 纯五度 4:3 不完全协和

赫尔姆霍兹 1821-1894 德国生理学家, 物理学家

论音的复合理论 八度: $f, 2f, 3f, \dots, nf \dots$ $2f, 4f, 6f, \dots, 2nf \dots$ ↑ 全可对应拍音理论, 拍音的形成: 假使一个声音频率为 w , 另一个 $w+\delta$ 叠加为 $\sin(2\pi(w+\delta)t) + \sin(2\pi wt)$

$$= 2\sin(2\pi(w+\frac{\delta}{2})t) \cdot \cos(\pi\delta t)$$

这说明两个频率分别是 w 和 $w+\delta$ 的声音叠加, 得到一个比 w 稍高的音, 频率为 $w+\delta/2$, 但其音量 (1) δ 为周期变化, 使人感觉到拍.频率为 w_1, w_2 的两声叠加, 每秒产生 $\delta = |w_1 - w_2|$ 个拍音

但有缺陷: 在不同音区同音程协和程度会变化

斯内姆夫 1848-1936 德国物理学家, 心理学家

心理学实验结果, 越协和越认为是同一音

振动方程和泛音 (overtone)

Edward Benjamin Britten 英国作曲, 指挥, 钢琴家

1898-1975

《青少年管弦队指南》之标题选自英国作曲家亨利·珀塞尔 Henry Purcell 为双簧 | 《音乐人的音乐》所作的插曲。

乐器分类 气鸣 (aerophones) 管鸣 笛, 箫; 弦鸣 (chordophones) 弦 弹拨 击打;
电鸣 (electrophones) ; 体鸣 (idiophones) 打击, 木琴, 膜鸣 (membranophones) 鼓, 卡祖油

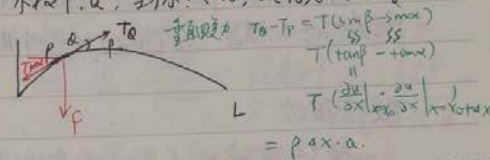
一维波动方程 假设一根均匀细弦被固定在水平轴 $(0, 0), (L, 0)$ 间, 设 $u(x, t)$ 是

弦上 x 处在时刻 t 的位移。取一小段 P, Q , 坐标 $(x_0, u(x_0, t))$ 和

$(x_0 + \Delta x, u(x_0 + \Delta x, t))$ 。

记细弦张力为 T , 线密度 ρ 。

$$\text{则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ 一维波动方程}$$



令 $c = \sqrt{T/\rho}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 由弦两端固定, 边界条件: $u(0, t) = u(L, t) = 0$ 。

分离变量法设 $u(x, t) = \phi(x)\psi(t)$, 则

$$\frac{\partial^2 \phi(x)\psi(t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi(x)\psi(t)}{\partial x^2}, \text{ 整理 } \frac{1}{c^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

两端只可能是常数, 记之为 $-\lambda$, 则 $\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0$, $\psi''(t) + \lambda c^2 \psi(t) = 0$

$\lambda \leq 0$: 无非平凡解, $\lambda > 0$: 有通解 $\phi(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$ 。

由边界条件 $0 = \phi(0) = A$, $0 = \phi(L) = B \sin \sqrt{\lambda} L$; $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ 离普泛音

$$\phi_n(x) = B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x$$

$$\text{进而 } u(x, t) = \phi_n(x) \psi_n(t) = B_n \sin \sqrt{\lambda_n} x \left(C_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + D_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right)$$

$$(a_n = B_n C_n, b_n = B_n D_n) = \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \quad (5)$$

振动模式与泛音 设 θ_n 满足 $\sin \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $\cos \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$

$$(5) \Rightarrow \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(\omega_n t + \theta_n), \quad (\omega_n = \frac{n\pi c}{L})$$

由此 $u_n(x, t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(\omega_n t + \theta_n) \cdot \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$ (随 x 不同振幅不同)

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

1548-1648

梅森 Mersenne 定律, 弦的振动频率与长度成反比, 与张力平方根成正比, 与线密度平方根成反比

成反比

$$f \propto \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

(法国神学, 数学, 教子, 公理论者)

因此, 弦的振动不是简单的单频率运动, 而是无数个正弦振力的叠加

对于 $n=1, 2, \dots$ $u_n(x, t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(\frac{n\pi c}{L}t + \theta_n) \sin(\frac{n\pi}{L}x)$
 称为弦振动的第 n 个振动模态, 频率为 $f_n = \frac{n}{2L} \cdot c = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}} = n f_1$

$\{f_1, 2f_1, \dots\}$ 称为倍音列

序列 $\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ 称为弦的固有频率, f_1 是基频, 相应声音叫基音 (fundamental note)

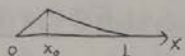
$f_n (n > 1)$ 对应的声音叫泛音 (overtone) f_1 叫第一泛音, \dots 依次类推。

驻波: 两频率和振幅相同的, 但行进方向相反的波在同一介质中叠加, 会形成驻波。
 驻波由振动波和固定驻留在原地, 不随时间移动。弦上每一点都做简谐运动, 但振幅各不相同, 振幅为 0 的点叫波节 (node), 振幅最大的点叫波腹 (antinode)。

拨弦振动

一拨弦波 (Pizzicato Polka) 圆舞曲之王 John Strauss (1825-1899)

初始条件



折线函数, 将其奇延拓到 $[-L, 0]$

$$u(x, 0) = \phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{x_0} & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{x-L}{x_0-L} & x_0 \leq x \leq L \end{cases} \quad \phi(x) \text{ Fourier 级数 - 收敛到 } \phi$$

1) 中 $x_0 = \frac{L}{2}$, 求 Fourier 系数 $a_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n \text{ 偶}) \\ \pm \frac{8}{n^2\pi^2} & (n \text{ 奇}) \end{cases}$

最终结论 中弦拨弦振动

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right) \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{L}t\right)$$



只有对奇数的振动出现, (几何解释: 弦的振动应该始终保持关于 $x=L/2$ 对称)

高维波动方程 $u(x, y, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$

管乐器及振动

木管五重奏 (wood wind quintet) 长笛 (flute), 双簧管 (oboe)

单簧管 (黑管 clarinet) 大管 (巴松 bassoon) * 圆号 (French horn)

《千与千寻》宫崎骏

《千与千寻》神隐, 久石让

管乐器的振动是管内空气柱, 振动的空气柱会超出管的端口, 故须对 (管口问题) 予以修正 (end correction) (变低)

不计管口校正, 开口位置处于振动的波腹。闭口只能位于波节。 $f = \frac{v}{\lambda}$


③ 闭管振动模式.

设管长为 L , 不同模式波长 $\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$, $\Rightarrow f_n = \frac{(2n-1)v}{4L}$ 泛音: $f_1, 3f_1, 5f_1, \dots$

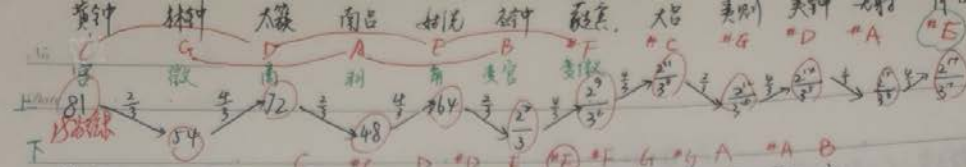
只有奇数
偶次泛音

① 起吹，长笛的泛音列中，第二项为2f，起吹产生高八度的音，
单簧管泛音列中，第二项为3f，起吹产生高十二度的音

律学(temperament) ① 确定绝对音高 (absolute pitch), 确定每十二度音程

管仲 (B.C. 723) - B.C. 645) 《管子》 地員篇 (三分水而二分土)
 三分水而二分土 (相对10度)

吕不韦《吕氏春秋》^{卷下}中记载了十二律
 钟中林钟，林钟生大簇，~生南吕，~生姑洗，~生应钟，~生蕤宾，~生大吕，~生夷则，~生夹钟，~生无射
 夹钟生仲吕，三分益一为生，三分损一为下生，黄钟大簇，夹钟，姑洗，仲吕，蕤宾，大吕
 林钟夷则，南吕，无射，应钟为下



旋宫不利? 按角, 黄, 太, 夹, 姑, 仲, 蕤, 林, 夷, 南, 无, 应
 81 72 64 54 48 45 40 36
 得仲吕后, 三分损一得其上方五度的 $\sharp B$ 得到 $\frac{27}{16}$, 按现在律制 $\sharp B = C'$, 但其小于 $\frac{81}{32}$, 高 $\frac{1}{32}C$
 \Rightarrow 京房命其为大吕, 得六十律.
 (西汉)

五度相生: (1) $\frac{3}{2}$ 五度, 若超出2, 再除 $\times 2$, 接以续行
 (毕达哥拉斯) $C \xrightarrow{\frac{3}{2}} G \xrightarrow{\frac{3}{2}} D \xrightarrow{\frac{3}{2}} A \xrightarrow{\frac{3}{2}} E \xrightarrow{\frac{3}{2}} B \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp F \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp C \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp G \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp D \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp A \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp E$

问题: 毕达哥拉斯音差 (pythagorean comma)
 (五度相生音阶, 前11个五度均是 $\frac{3}{2}$, 他四度均是 $\frac{4}{3}$, 但三度音程出了问题 $(E - \frac{81}{64} \times \frac{1}{4})$)
 若假定 $\sharp E = F$, 大二度 $F - A$ 之比: $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$, 大二度 $C - A, D - B$: $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$
 得到 $\sharp E$ 后, 考虑其上方五度 $\frac{3}{2} \times \frac{81}{64} > 2$, 其理应是 $\sharp B = C'$, 但比 C' 高.
 \Rightarrow 从 C 出发连续做12个五度, 得到 $\frac{3^{12}}{2^7}C$, 将 $\frac{3^{12}}{2^7}C$ 降低7个五度, 应回到 C , 但回到 $\frac{3^{12}}{2^7}C$

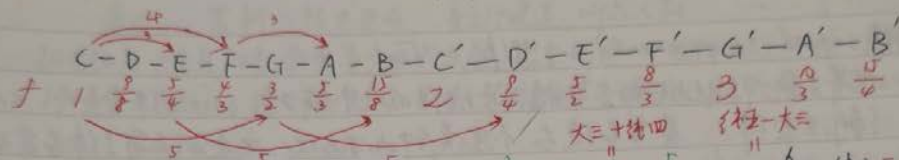
monophony (对律制问题没有意见)
 单声音乐: 指单一曲调构成的音乐, 包括无伴奏的独唱, 独奏, (1)及四洲级同/高低八度的合奏
 格里高利圣歌 (Gregorian Chant) <<赞美圣母>> (Hail Holy Queen)

多声部音乐 ADP 奥卡加农 (Organum) 雏形 (counterpoint)
 (a) 复调音乐 (polyphony) 不同声部相对独立性, 按和声进行
 (b) 主调音乐 (homophony) (1)一声部为主要旋律, 其余伴奏、烘托
 复调: Ricercar "无拍子赋格" (16-17世纪), 巴赫<<音乐的奉献>>中
 有一首无拍子赋格 (17世纪复调音乐模仿的早期形式)
 复调, 合声旧指 (复调) <<军队进行曲>>

(just intonation)
 纯律 从文艺复兴时始, 西方音乐中越来越多地重视和使用三度、六度音程
 于是人们将毕达哥拉斯五度相生法中添加一个生律元素 理想大三度的比例 5:4
 由于四度+五度 \rightarrow 八度, 四度音程频率比名为 $2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$
 故音名 F 的频率为 $\frac{4}{3}$, 由大三度 F-A 得到, 到音名 A
 所对应的频率应该为 $\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$

再根据纯五度 E-B 和 G-D' 确定 B, D 相对频率。

由纯五度 E-B 可求出 B 的频率: $\frac{1}{8}$, 这时大二度 G-B, 纯四度 B-E 也满足纯律比例。
最后确定 D, 假定其频率为 y , 由纯五度 G-D 可得 $y = \frac{2}{3}$ 。



理想大三度: $\frac{4}{3}$, 纯四度: $\frac{3}{2}$, 纯五度: $\frac{3}{2}$, 大六度: $\frac{5}{3}$, 小三度: $\frac{6}{5}$, 纯八度: 纯四+纯五

按纯律, 基本三和弦 C-E-G, F-A-C', G-B-D' 比例符合 4:5:6。

对复调音乐有重要意义。

纯律的缺点: ①五度音程 D-A 不协和, 比例为 $\frac{80}{54} = \frac{81}{54} = \frac{3}{2}$

②有两种不同大二度(今音): C-D, F-G, A-B: $\frac{8}{6}$, 但 D-E, G-A: $\frac{10}{9}$ 。

音阶的音差: 按纯律, 从 C 出发连续升高 4 个纯五度再降 2 个 8 度和一个大三度。

得到 $(\frac{3}{2})^4 \times (\frac{4}{3})^2 \times \frac{4}{3} = \frac{81}{64} > 1$, 回到比 C 略高处, 音阶音差。

不同律制在不同历史时期都发挥了不同作用, 但都有缺陷。

西汉京房六十律, 南朝宋太史令钱乐之三百六十律, 蔡元定十八律。

律制缺陷的本质: 设 C, f , C', $2f$, 若(上方五度为 $\frac{3}{2}f$, 则没做 m 个五度

可以) 得到 m 个八度的 C, 这时对应频率有

$$(\frac{3}{2})^m \cdot f = 2^n \cdot f, \quad 3^m = 2^{m+n} \quad (\text{无整数解})$$

mean-tone temperaments

中庸全音律。

五度相去和纯律都有同样音程但频率比不同的问题

方法: 对于纯律中五度 C-D 比例 $\frac{3}{2}$ 和音程 D-E 的比例 $\frac{4}{3}$ 做几何平均

$$\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \text{说明在大三度 C-E 之中点插入 D, 使得大三度}$$

CD, DE 之间比例相等, 还需要确定两个半音(小二度),

若再求中点仍不行, 另一方面, 用八度去掉五个大三度再开方有:

$$\sqrt[5]{2 \div (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^5} = \frac{8}{5\sqrt{5}}, \quad \text{有两个生律元素。}$$

大三度的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和小二度的 $\frac{8}{5\sqrt{5}}$ 。

$$C \quad D \quad E \quad F \quad G \quad A \quad B \quad C'$$

$$1 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{8}{\sqrt{5}} \quad 2$$

但这牺牲了纯五度的理想比例: $\sqrt{5} < \frac{3}{2}$

平均律 (equal temperament) 半音: $^{12}\sqrt{2}$
 世界上第一个通过准确计算提出平均律的是朱载堉 《乐律全书》 <A.1613>
 (新法密律) 其首先提出 不取黄钟九寸之说, 就是认识到了律吕实为比例

巴赫: Johann Sebastian Bach, 德国作曲家, 巴洛克时代音乐大师, 能大调前奏曲

Harsichord 羽管键琴 (大键琴) 是钢琴前身之一, 无法强弱变化
 → Forte piano

巴赫名作 <音乐的奉献> (Das Musikalische Opfer) 1747.

在波茨坦觐见普鲁士国王腓特烈二世, 在宴会的作曲之中含十首卡农, 其中一首, "Canon per tonos": 即经由种不同性的卡农

卡农: 复调音乐的一种, 原意为规律, 一个声部的曲调始终追逐另一声部, 直至最后一小节最后一个和弦, 而融合在一起, 所有声部模仿一个声部, 但不同高度的声部依一定间隔进入, 造成一种此起彼伏, 连绵不断的感受, 轮唱也是其中一种

音分*: 两音之间音分数为 $1200 \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$

不同律制音分值对照表

	C	D	E	F	G	A	B	C'
十二平均	0	200 ⁺¹⁴	400 ⁺¹⁴	500 ⁺¹²	700 ⁺¹²	900 ⁺¹⁶	1100 ⁺¹²	1200
三分损益	0	204	408	498	702	906	1110	1200
纯律	0	204	386	498	702	884	1088	1200
中庸律	0	193	386	503	697	890	1083	1200

八度循环 2:1; 五度纯正: 3:2; 和弦协和 4:3

绝对音高:

历史上并没有标准的绝对音高, 不同国家、时代有不同标准

在19世纪的欧洲和北美, 人们趋向于不断提高绝对音高(A的频率)

原因: 乐器制造技术进步, 音乐厅建造, 听众人数

20世纪后随着广播、录音等产业的发展, 需要制定一个国际通行的绝对音高标准

1939年5月国际标准化协会 ISA 在伦敦召开会议, 正式确立 $A=440\text{Hz}$

为“音乐会音高” concert pitch.

1955年国际标准化组织 ISO 接受 $A=440\text{Hz}$ 为技术标准, 沿用至今

一个八度为何有12个半音

1. 传统阿拉伯音乐中, 音级间最小差 $\frac{1}{2}$ 个半音, 即四分之一音 (quarter tone)

$\sharp \sharp \sharp, \flat \flat \flat$ 但不是所有都会任曲中用到, 有不同调式的音阶

2. 纯八度音程包含12个半音, 纯五度包含7个半音, 即

设纯八度含 n 个半音, 12个半音 = 7个半音, 理想纯五度之比为 $3:2$, 1度 $2:1$

纯五度含 m 个半音

则 n 个半音 = m 个半音

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = 2^n$$

(continued fraction)

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{m}{n} \text{ 可用连分数近似地表示无理数 } a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0, a_1, \dots]$$

即 $\frac{m}{n}$ 近似表示 $\log_2 \frac{3}{2}$, 当 $(m, n)=1$, 不断上升五度可遍历所有音级, 而遍历时前 m 次是基本音级

$$C_N = [a_0, a_1, \dots, a_N] \quad C_N = \frac{p_N}{q_N} \quad (p_N, q_N)=1$$

无限连分数的值为 $C = \lim_{N \rightarrow \infty} C_N$

求 A 的连分数的算法

Input $A \in \mathbb{R}$

Output $[a_0, a_1, \dots, a_N]$

$i \leftarrow 0, a_0 \leftarrow \lfloor A \rfloor, x_0 \leftarrow A - a_0$

repeat $i \leftarrow i+1$

$$a_i \leftarrow \left\lfloor \frac{1}{x_{i-1}} \right\rfloor, x_i \leftarrow \frac{1}{x_{i-1}} - a_i$$

until $x_i = 0$

定理: A 是无理数, $N \geq 1, \frac{p_N}{q_N}$ 是 A 的

N 次近似, 若 p, q 满足 $0 < q \leq q_N$ 且

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_N}{q_N}, \text{ 则}$$

$$|A - \frac{p_N}{q_N}| < |A - \frac{p}{q}|$$

即 $\frac{p_N}{q_N}$ 是所有分母不超过 q_N 的有理数中

最接近于 A 的. 一个有理数的复杂度可由其

分母刻画, 此意义下, 对任意无理数, N 次近似是 A 的

最佳有理逼近

$\log_2 \frac{3}{2}$ の N 次逼近: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{43}, \frac{128}{201} \dots$
 对序列中每个分数 $\frac{p}{q}$, 都可以建立一个 q 平均律, 把一个八度音程平均划分为 q 等分, 把每一个等分作为一个半音, 以 $\frac{p}{q}$ 半音做为纯五度, 这样的调律都是对 $\log_2 \frac{3}{2}$ 的最佳逼近。——

Stochastic process 音乐为随机过程

1. 音乐骰子游戏

1871 克恩伯格 (德国, 老柏林的学生) 出版了一本《波格涅兹和卡洛舞团作曲常备》
 本书是最早涉及到音乐骰子游戏的著作。

卡洛舞团常采用 ABA 曲式。B 段常使用两支双簧管和一支大管 (baron)
 故名 三声中部 (trio) 三声中部本身由两部分组成, 每部分 8 小节。

2. Stockhausen (德国先锋派 音乐家) 的第十一钢琴曲是由单独的一张大纸上的
 19 个音乐片段构成, 每个片段末尾标有速度、力度等记号, 但是对下一片段的指示。演奏者
 可以从任一片段随意演奏下去, 直至某一片段第三次被选中, 则音乐片段

2. 随机音乐: (希腊裔法国作曲家, 建筑工程师 在塞内勒斯音乐厅使用)

① Illiac 组曲: 美国作曲家 Lejaren Arthur Hiller, 数学家 Leonard M. Isaacson

② 变形 Metastasis: 在弦乐和铜管部分有大量滑奏 (glissandi) 经过所有频率,
 在乐器上, 表示滑奏的边线直接构成直线面, 斜率是频率变化速度。

③ 《概率运动》: 克塞内勒斯将分子运动理论应用到音乐创作中, 创造了
 《概率运动》, 他把每件乐器当作做一个气体分子, 把乐器器在一定音区内的滑奏
 当做分子随机运动, 他事先给出对声音效果的两个总体要求: 乐器器滑奏速度
 均匀分布, 速度的密度名为常数, 在任何一个音域内, 上升和下降的声音数量应相等
 听者来愉悦感: 预测 + 判断。判断正确会得到多巴胺奖赏。

随机过程: 从 概率论角度, 可以把音乐看作随机过程。

假设 $\{x_i | i=0, 1, \dots\}$ 是一个离散型随机变量序列, 且 $\{x_i\}$ 都有相同取值范围 Ω 。
 这个随机变量的序列就构成 随机过程, Ω 是 $\{x_i\}$ 的状态空间。

马尔可夫链: 具有马尔可夫性质的随机过程。

马尔可夫性质: $\forall n \in \mathbb{N}^+, n+2$ 个状态 $k_0, k_1, \dots, k_n, k_{n+1} \in \Omega$, 条件概率满足

$$P\{x_{n+1}=k_{n+1} | x_0=k_0, x_1=k_1, \dots, x_n=k_n\} = P\{x_{n+1}=k_{n+1} | x_n=k_n\}$$

马尔可夫性说明, 移动到下一个状态 $\{x_{t+1}=k_{t+1}\}$ 的概率只与当前状态 $\{x_t=k_t\}$ 有关. 与所有过去状态 $\{x_s=k_s | 0 \leq s \leq t-1\}$ 都无关 —— 无记忆性 (memoryless)
 时序马尔可夫链: 一个链称为时间齐次的 (time-homogeneous), 如果 $\forall x, y \in \Omega$, 相应的条件是概率不随时间变化. 即 $\forall t \geq 0$, 总有 $P\{x_{t+1}=y | x_t=x\} = P\{x_1=y | x_0=x\}$,
 可以用一个转移概率矩阵来刻画马尔可夫链的性质.

$$P\{x_{t+1}=k_j | x_t=k_i\} = P_{ij} \quad (i \rightarrow j)$$

$$P = (P_{ij})_{n \times n} \quad \sum_j P_{ij} = 1 = \sum_i P_{ij}$$

给定包含 n 个音级的有限集 Ω 的一个转移概率矩阵 P , 从 $t=0$ 初始音级 $x_0=k_0 \in \Omega$ 出发, 根据 P 随机选定下一个音级, 如此进行, 得到旋律

高斯马尔可夫链: 移动到下一个状态的概率只与过去 m 个状态有关. (更符合音乐本身特性)

Markov chain 只反映局部特性

遗传算法 (Genetic Algorithm) 是模拟生物进化中的遗传、变异和自然选择过程的一种搜索最优解的方法. 其出发点是若干个个体 (individuals) 组成的种群 (population). 遗传算法要求对这些个体进行交叉 (crossover, 交换), 变异 (mutation, 突变) 等操作使其进化, 产生下一代种群. 根据音乐本身性质设定适应度函数 (fitness function) 来评价进化结果. 遗传算法不断迭代, 直至产生需要的进化结果 (令人满意的乐曲片段) 或达到预设迭代次数.

基因编码: C_4-C_6 : 25级, 1~25. 音符时值 全 ~ 十六, 16~1, 有序对.

进化操作: 设一节为一个体, 交叉: 交换两个体基因片段, 产生新个体.

变异: 随机改变某个体的一些基因, 产生新个体. 问题: (节奏, 时值)

适应度函数: 对于每个可能个体 i , 定义一个说明其好坏的值 (适应度 fitness) $f(i)$.

根据每个个体适应度来选择产生下一代的亲本. 如何度量好坏?

轮盘赌算法 (Roulette Wheel Algorithm). 设当前种群共 N 个个体 i_1, i_2, \dots, i_N , 其适应度分别为 $f(i_k)$, 则个体 i_k 被选做亲本的概率 = $\frac{f(i_k)}{\sum f(i_k)}$

进化策略: ① 部分适应度高的个体直接进入下一代

② 进化操作中交叉、变异比例预设定

③, 增加进化操作种类: 移调、倒影、逆行

机器学习-音频信息检索

MIR, Music Information Retrieval 音乐信息检索

genre 类型、流派、风格、体裁 (判断流派依据?)

机器学习 (Machine learning) 借助计算机, 通过已有数据, 训练得到模型, 然后使用模型对新数据的属性做出判断

模型对新数据的属性做出判断

— 分类器的特征提取 MFCC (梅尔频率倒谱系数) Mel-frequency ^{spec} Cepstrum Coefficients

音频数据流 - 分帧, Hamming窗 - FFT - 滤波器组 - DCT(离散余弦变换) - MFCC
(模仿人耳) Mel 标度 $m = 1127 \ln(1 + \frac{f}{700})$ SVM

① 监督学习: ① 回归算法 (线性, 逻辑) ② 神经网络 (递归, 卷积). ③ 支持向量机 (已经分好的数据) ④ 无监督学习 (未分类数据聚类)

③ 学习样本：通常分为两部分，大部分(70-80%)做为训练集合，小部分做为测试集。有时还要从训练样本中选取一部分作为验证集合，用于模型集合。

Modes Scales chords
调式 音阶 和弦

1. 调式与音阶:

调式 若干音级围绕某一有稳定感的中心音级,按一定音程关系组织在一起,成为有机体系。

调式中的中心音级称为主音 (tonic) 如大、小调式, 中国民族调式

将洞式中的音级从主音开始,直到八度的主音,这种形成的音级序列叫洞式音阶。

自然大调 (以C为宫音)

C	D	E	F	G	A	B
I	II	III	IV	V	VI	VII

do, re ...

C — D — E — F — G — A — B — C'

大 = 小 = 1) C 为 $\frac{1}{2}$ 大 小 大 大 小

major
自然大调

1 (主音) (tonic)

II. (上 $\frac{2}{3}$ 音) (super tonic) III. (中 $\frac{2}{3}$ 音) (mediant)

IV $(\Phi \frac{2}{10})$ (mediant)

IV (F $\frac{3}{4}$) (subdominant) V (G $\frac{3}{4}$) (dominant) VI (F $\frac{3}{4}$) (submediant)

VI $\Gamma \cdot \frac{3}{10}$ (submediant)

VII (ㄱ² ㄴ³) (leading note)

* natural minor

自然小调

I II III IV V VI VII

A B C D E F G A'

大小大大小小大

1234567

harmonic

和声小调

在自然小调中, 将 VII 音升高半音 → (harmonic minor)

A B C D E F G A'

大小大大小增小

I II III IV V VI VII

例: 2. (179) <<小和中的回忆>> 林涛达作曲

melodic

旋律小调

在和声小调中, 再将 VI 音升高半音 (melodic minor) (莫斯科郊外的晚上)

A B C D E F G A'

大小大大大大小

~莫斯科郊外的晚上~

调式音阶: 调式音阶从主音开始, 而主音可以位于任一音级

按五度循环规律依次考虑 C G D A E B $\sharp F \sharp C$ 为主音的自然大调
则在相邻的两个音阶中, 除一个音级需升高半音, 其他的音级均同, 因此按上述次序生成
的大调音阶, 后一个比前一个多一个升号, 反向五度循环, C, F, $\flat B$, $\flat E$, $\flat A$, $\flat D$, $\flat G$, C 降号调

主音

升号数

升号音级

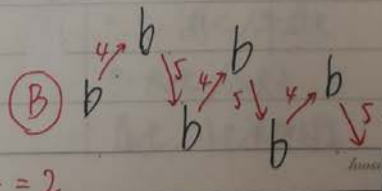
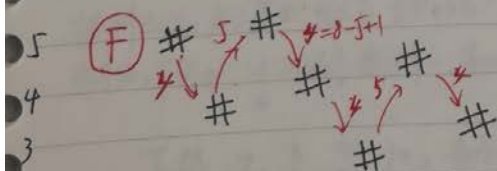
主音

降号数

降号音级

C	0		C	0	
G $\downarrow +5$	1	$\sharp F \downarrow +5$	F $\downarrow -5$	1	$\flat B \downarrow -5$
D	2	$\sharp F \sharp C \downarrow +5$	$\flat B$	2	$\flat B \flat E \downarrow -5$
A	3	$\sharp F \sharp C \sharp G \downarrow +5$	$\flat E$	3	$\flat B \flat E \flat A \downarrow -5$
E	4	$\sharp F \sharp C \sharp G \sharp D$	$\flat A$	4	$\flat B \flat E \flat A \flat D$
B	5	$\sharp F \sharp C \sharp G \sharp D \sharp A$	$\flat D$	5	$\flat B \flat E \flat A \flat D \flat G$
$\sharp F$	6	$\sharp F \sharp C \sharp G \sharp D \sharp A \sharp E$	$\flat G$	6	$\flat B \flat E \flat A \flat D \flat G \flat C$
$\sharp C$	7	$\sharp F \sharp C \sharp G \sharp D \sharp A \sharp E \sharp B$	$\flat C$	7	$\flat B \flat E \flat A \flat D \flat G \flat C \flat F$

调号: 根据调式需要升高或降低的音级记号统一写在五线谱调号之后, 为调号 (key signature)

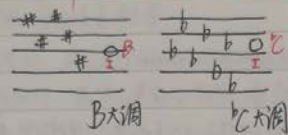


纯四 + 纯五 = 八度 $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$

B大调和bC大调的部中，在7个级都是等音的，在十二平均律调律的键盘上，这两个调的部中，在键盘位置一样，但在五线谱上标记为不同名称——等音调

等音调有3对 B - bC ; #F - bG ; #C , bD 在五个自然大调中

1) 上音阶相同，但记谱为二度



B大调

bC大调

6个升号

6个降号

7个升号

5个降号

第一间#F

第二线bG

第三加线#C

下加二线bD

#F大调

bG大调

#C大调

bD大调

关系大、小调和平行大、小调：每个大调对应一个关系小调（差小三度）。

反之亦然，这种调号相同的大小调叫关系大小调。大调记谱为大写，小调记谱为小写。

有相同主音的大小调叫平行大小调。

中国五声音阶（大调）

C D E G A

日本五声音阶（小调）

C D bE G bA

C小调

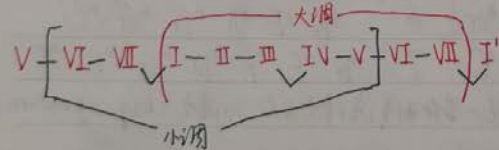
C D bE F G bA bB C

大调 平行小调 关系小调

大调 平行小调 关系小调

C c a
G g e
D d b
A a #f
E e #c
B b #g
#F #f #d
#C #c #a

F f d
bB b b g
bE b e c
bA b a f
bD b d b b
bG b g b e
bC b c b a



和

大調中

降号

間四

和弦 chord

定义: 三个或三个以上同向的音按一定关系叠合起来
产生和弦的构成, 连接及运用, 是主调音乐的基础

传统和弦按三度叠置原则

按三度关系叠置: 三和弦, 根音, 三音, 五音(冠音)

大三和弦: 大+小 / 小三: 小+大 / 减三: 小+小 / 增三: 大+大 (三度)
major triad 大三 minor 小三 diminished 减三 augmented 增三

Seventh chord

七和弦: 在三和弦上方再叠一个七度音, 一共有七个, 都不是协和的 (含不协和的七度音程)

七和弦的名称

	三度结构	命名	名称	简称
000	小三+小三+小三	减三减七	减七和弦	减七和弦
001	小三+小三+大三	减三小七	减小七和弦	半减七和弦
010	小三+大三+小三	小三小七	小小七和弦	小七和弦
011	小三+大三+大三	小三大七	小大七和弦	——
100	大三+小三+小三	大三小七	大小七和弦	属七和弦
101	大三+小三+大三	大三大七	大大七和弦	大七和弦
110	大三+大三+小三	增三 大七	增大七和弦	—— (增七) (无大大调为减和弦1度)

和弦的转位: 123, 五音为低音, (将根音升1度)

三和弦有2种转位, 以三音为低音: 第一转位 (六和弦: 低→高差6度)

以五音为低音: 第二转位 (四和弦: 低→中, 四度, 中→高, 六度)

七和弦有3种转位

第一: 五入, 第二: 三四, 第三: 二和弦

和弦的标记

调式中的每个7个级都可做根音, 1. 罗马数字表示根音在调式音阶中的级数, 用大写字母表示
根到三为大三度的: 标记为大三, 根到小三, 上标0, +表示大三, 增三, 上标(七); 大三无上标
转位: 下标6, 6, 4, 4, 分别表示第一, 第二, 第三, 第四转位

下标 7, 6, 4, 4 和 2 表示七和弦的

原位, 第一转位, 第二, 第三转位

00: 减七/半减七

m: 大七/小大七

属七: 小七不加七

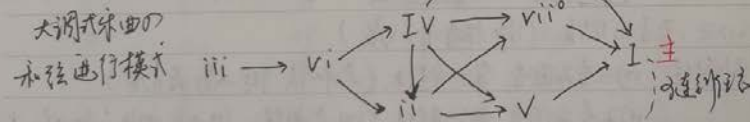
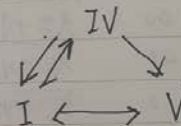
自然大调: I, ii, iii, IV, V, vi, vii°
 和声大调: i, ii°, iii°, iv, V, VI, vii°
 七和弦(大调): I^m, ii^m, iii^m, IV^m, V₇, vi^m, vii^o₇
 七和弦(小调): i₇, ii^o₇, III⁺, iv₇, V₇, VI^m, vii^o₇

调性功能: 主和弦, 下属和弦, 属和弦 $\xrightarrow{\text{转移}}$ 正和弦
 I IV V

主和弦: 稳定性, 给人内心(结束, 完成)的感觉, 曲始也用, 强调音乐的调性特征
 属和弦: 不稳定性, 与主形成对比, 给人进行到主和弦的感觉
 乐曲常用属七和弦 $V_7 = \{G, B, D, F\}$, B-F减五度(三音)进一步增强不稳定性
 下属和弦: 用来连接, 过渡, 从主出发, 再连接到属和弦

和声进行 (Chromatic progression) 在一定范围内的和弦连接, 体现和弦间的相互关系, 功能关系, 色彩对比。

正格进行: $I \rightarrow V \rightarrow I$ 变格 ~ $I \rightarrow IV \rightarrow I$
 变式 $I \rightarrow IV \rightarrow V \rightarrow I$



解决 (resolution) 从不协和的和弦出发, 连接到协和的某和弦
 在调性音乐中, 最终都要解决到主和弦 I。

特罗斯坦和弦: 半减七 $(F, B^{\#}, D^{\#}, G)$ $(F, C^{\#}, E, A)$

突破了传统调性音乐中功能的束缚, 突破色彩(打破和声效果)

蓝调: 在美国黑人音乐(爵士乐, 布鲁斯) 发展起来 (布鲁斯, blues)

标准布鲁斯, 12小节 (12-bar blues)

I I I I, IV IV I I, V IV I I \rightarrow V, 又或 V 方便反复吟唱, 回到 I

旋律与对称

人旋律的变换: 最简单的移调 —— 严格移调 (exact transposition) —— 一般通过升降调实现。

—— 调性移调: 指定要求仍在调式音阶之中 (调性音乐要求调性不移调)

$C_4 = 48$

M 是乐器本身的集合

乐器本身的数字化: $C_0 - C_8$: 97个音级, 与 $0, 1, \dots, 96$ 一一对应

移调变换: $+n$ 半音的变换 T_n , $-n$, T_{-n} , $\forall n \in \mathbb{Z}$, $T_2(x) = x+2$,

两个移调变换相建作用 $T_n * T_m = T_{n+m}$, 构成群

/ 帕萨卡利弦乐板 Adagio for Strings - Barber, (U.S.)

② 倒影变换 (调性要求)

③ 展开变换

用 I 表示关于 $C_4=48$ 对称的倒影变换

$$I(x) = 96 - x, \quad I^2 = T_0, \quad T_n * I = I * T_n$$

③ 逆行变换 (retrograde): $R(x_1 \dots x_k) = x_k x_{k-1} \dots x_1$, $x_i \in M$ (有限序列)

$$\textcircled{1} R^2 = T_0, \quad R * T_i = T_i * R, \quad R * I = I * R$$

音乐中的编码: BACH 谜题.

八度关系: 若若干个八度或相等, 构成新关系, 等价关系

音类: M/\sim : RT 音类

音类空间: $PC = \{ \bar{C}, \bar{C}\sharp, \dots, \bar{B} \}$ $|PC| = 12$ (pitch class space)

$$\bar{C} \leftrightarrow \bar{D}_{(mod 12)} \dots$$

像との置換 前像との変換 や可逆作用 Z_n 上の変換
対称変換群 $J = \{T_i \mid 0 \leq i \leq n\}$, $\langle J, * \rangle$ 是交換群

例 8 变换原定义在 M 上的, 可定义 $I(\bar{x}) = \overline{I(x)}$. $\forall x \in Pe$

1. $x \mapsto -x \pmod{12}$, C 和 $\#F$ 不变

I 可以和 T_i 复合, 由 I 和 I 生成的群

$$\mathcal{D} = \langle I, T \rangle, \quad IT_i = I_i I$$

≡ $D_{2,0}$ (正交対称の変換群)

把新 R 添加来. $M = \langle T, I, R \rangle$. $|M| = 48$. $M = \langle T, I \rangle \times \langle R \rangle \stackrel{\text{由 } R \text{ 有 } 4 \text{ 个元素}}{=} D_4 \times Z_2$

12-tone technique

12-tone technique.
十二音技术 从19.8. 奥地利作曲家在其音乐创作中建立 1) 将十二个调性音 对作曲法

出发点是 十二音序列 (12-tone series), 一个音列是 12 个音类 (的 7 代表之) 的排列

① 音表中第 1 个音读为起立，今其对应于 Σ_2 中の π (覚悟初め音列)

以音类中第*k*音类的迭入，令其对应于 β_1 中的0（安静状态）， β_2 中的1（紧张状态）。

给定一个音列，可以对其进行各种神变换，得到一系列新的音列。作上述定义的列叫

给定一个音列, 对其进行了半音变换, 移调一个半音, 得到一个新的音列。
初始音列: P_0 , 对其进行移调变换, 升 n 个半音, 得到一个新的移调音列 P_n 。

对 P_n 作关于其第一个主类的列变换, 得到 $-T(P_n)$ 的第 3 列, I_n .

对 Z_n 做递归, 可得递归序列 R_n , 对 Z_n 做递归, 得递归序列 R_n .

人从初始点到P出发,通过投掷,顺利通行. 通行概率为 $\frac{484}{512}$

$$P_0, \dots, P_{n-1}, I_0, \dots, I_{n-1}, R_0, \dots, R_{n-1}, RI_0, \dots, RI_{n-1} \quad \text{可排成 } -1 \text{ 的 } n \times n \text{ 矩阵}$$

* $I_0 \rightarrow I_n$
 $P_m \downarrow \quad \quad \downarrow R_m$
 $\rightarrow R I_n$

第一行是第1列的倒影, 据此决定各行各列的变换.

以矩阵 $M + M^T = 0$, 对称线为 0

有妙互不相同的音节。

P_0 是一个全音阶 (chromatic scale). P_0 の位相 $\} \{ I_0 = R_1, I_1 = R_2, \dots$

对 z 式用逆行变换. $R_2 = R_1, \dots$ 故又可得2个互解系列, R 上行, R 下行

定理A. 给定列 $R_0 = 0, a_1, \dots, a_n$, $\exists k, 1 \leq k \leq n$, s.t. $I_k = R_0 \Leftrightarrow$

$$0 + a_{11} = a_1 + a_{10} \neq \dots = a_r + a_i = k \pmod{12}$$

対角列 $I_k = P_0$ (仮定) $RI_k = P_0$ 上述定理より $P_0 = RI_k$ の元素は

 $k \in 2\mathbb{Z}-1$

満足定理Aの系列, ^{首項本項} $(12 \times 6) \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2)$

由于移用系列 P_i 与倒转系列 I_j 互异, 要讨论 P_0 与 R_k 的关系, 何时得到 48 个互异系列, 就只需讨论 $P_0 = R_k$ 的情况

定理B. 给定系列 $P_0 = 0, a_1, \dots, a_{10}, a_{11}$. $\exists k: 1 \leq k \leq 11$, s.t. $P_0 = R_k \Leftrightarrow k=6$. 且 $a_6 = a_7 + 6, a_7 = a_8 + 6, \dots, a_{11} = 6 \pmod{12}$

满足定理B的系列: ^{首项 = 本项} $(12 \times (10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2)) = 46080$ 个.

记全体系列构成的集合为 $T = \{\text{全体系列}\}$. $|T| = 12! = 479001600$

在 T 中的系列之间定义一二元关系 \sim . 任意给定 $X, Y \in T$. $X \sim Y \Leftrightarrow$

Y 出现在 X 为初始系列. 的系列矩阵中. \sim 是 T 上的一个等价关系.

X, Y 不同 $\Leftrightarrow X \not\sim Y$.

共有 990720 个系列的等价类.

$$\frac{276480 + 46080}{48} = 522560 \quad \text{折半的轨道.}$$

$$\frac{12! - 322560}{48} + \frac{322560}{24} = 990720.$$

和弦与音网

将里斯坦和弦 $\{F, B, D, \#G\}$
 音网: 瓦格纳从传统的调性和谐更进一步, 强调和弦本身的声效效果, 而非传统和声功能, 则 将里斯坦和弦应当被看做有别于传统和声进行方式的一系列和弦连接。最先注意到和弦间存在抽象网络关系的是 欧拉。
 到 19 世纪, 黎曼等人在传统框架内发展了音网的理论, 提出三和弦间若干变换。
 20 世纪下半叶, 一些音乐家 在平均律框架下进一步利用和发展了音网理论和分析工具, 形成 新黎曼理论。

现代音乐理论把传统和弦的概念推广成一般 n -和弦, 即音类空间 \mathcal{PC} 的一个 n -子集, 称为一个音类集合。
 音类圆周, 12 个音类——对应于 12 个调类, n -和弦可表示为一个基上的边形。

- 例 $T = \langle T \rangle$
- ① 以大三和弦 $X = \{C, E, G\}$ 对 X 做移调变换 T , 得新的大三和弦 $T(X) = \{T(C), T(E), T(G)\}$; $\langle T \rangle$ 作用 X 上可得 12 个音类集合, 对应 12 个大三和弦。
 - ② 对应于减七和弦 $Y = \{E, G, Bb, Db\}$ 的图形为正方形, T, T^3, T^6, T^9 保其不动, 则对 Y 移调只能得 3 个不同音类的集合, 即只有 3 个减七和弦。

不仅移调可作用在 12 音类上, 倒影也可。在音类圆周上, 倒影相当于做 $C \rightarrow \#F$ 的反射。 I 和 T 生成 2 阶群, 其同构于二面体群 D_{12} 。
 $\mathcal{D} = \langle T, I \rangle \cong D_{12}$
 对 X (大三) 做倒影 I , 得小三和弦 $I(X)$ 。

轨道和稳定化子。给定 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 上的一个置换群 (是 n 次对称群 S_n 的子群)
 定义 Ω 中元素的一个等价关系 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists g \in G, g(\alpha) = \beta$ 。
 对于 $\alpha \in \Omega$, 把 α 所在等价类记作 $\text{Orb}(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid \beta \sim \alpha\}$ 。
 称为含 α 的轨道, 是 G 的子集 (也是 S_n 的子集)。
 $G_\alpha = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\}$ 称为 α 的稳定化子 (stabilizer)。

- 性质 ① $\text{Orb}(\alpha) = \{g(\alpha) \mid g \in G\}$ 。 ② $G_\alpha \leq G$ 。
 ③ $\forall \alpha, \beta \in \Omega, \exists g \in G, g(\alpha) = \beta \Rightarrow G_\beta = g G_\alpha g^{-1}$ 共轭子群。
 ④ $\forall g, h \in G, \alpha \in \Omega, g(\alpha) = h(\alpha) \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_\alpha$ 。
 ⑤ $|\text{Orb}(\alpha)| = |G : G_\alpha| = |G| / |G_\alpha|$ 。

音类集合的分类

在 $\mathcal{S} = \langle T, I \rangle$ 的作用下, 音类集合按 \mathcal{S} 的轨道分成若干等价类.

* 例如可将大三和弦的音类集合互换, 则这24个大三和弦音类集合属同一轨道. 按照一定方法在每个等价类中取一个音类集合做代表, 可得音类集合表. 大三 $\rightarrow 3-1-1$

音类间的距离, 定义为音类圆周上的距离. (取劣弧)

距离向量. 在音类圆周上, 一个包含 n 个元素的音类集合被表示成一个 n 边形.

其有 C_n 个顶点, 把这 C_n 对顶点间距离都算出来.

这个音类集合的距离向量 $\delta = (d_1, d_2, \dots, d_6)$ d_i 表示距离 i 的点对数.

例: 大三和弦 $\delta = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$. 减七和弦 $\delta = (0, 0, 4, 0, 0, 2)$.

移调变换 T^k 的不动点

给定 $k \in \mathbb{N}$, $k < 6$, 对于每对距离为 k 的音类 X, Y , 移调变换 T^k 或 T^{-k} 恰保持

其中一个音类不变, 即 $|\{X, Y\} \cap \{T^k(X), T^k(Y)\}| = 1$.

$$|\{X, Y\} \cap \{T^k(X), T^k(Y)\}| = 1.$$

而对于距离不等于 k 的音类对 X, Y , 则上述二式均为 0.

当 $k=6$, $|\{X, Y\} \cap \{T^k(X), T^k(Y)\}| = 2$. 互换这两个音类

定理. 设一个音类集合 X 的距离向量 $\delta = (d_1, \dots, d_6)$. $\forall 1 \leq k \leq 5$.

$$|X \cap T^k(X)| = d_k = |X \cap T^{-k}(X)|$$

$$\text{而对于 } k=6, |X \cap T^6(X)| = 2d_6.$$

例 1. 减七和弦 $y = \{E, G, bB, bD\}$. $\delta = (0, 0, 4, 0, 0, 2)$ 是正方形

由定理 T^3 和 $T^{-3} = T^3$ 保持 4 个音类不变, 同理 T^6 保持 $2d_6 = 4$ 个音类不变.

在音类圆周上, y 是正方形. 所以群 $\mathcal{S} = \langle T, I \rangle$ 中的 12 个排列变换, 中会有 4 个保持 y 整体不变, 则 \mathcal{S} 中保持 y 不变的稳定化子是 8 阶群 $D_{4 \times 2}$.

则 \mathcal{S} 作用在 y 上的轨道长度为 $|G|/|G_y| = 24/8 = 3$.

共有 3 种减七和弦 (音类的集)

例2 大小和弦 $\Sigma = \{G, B, D, F\}$, $\delta = (0, 1, 2, 1, 1, 1)$. 无对称轴.
 假定它是子群, 则在 Σ 作用下有 24 个不同的簇集合: (称为 $4-17$)

全音程和弦 all-interval chord, $\delta = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ の和弦

$$\text{由 } C_n = \frac{n(n-1)}{2} = 1+1+\dots+1 = 6 \Rightarrow n=4.$$

$$Q_1 = \{B, C, D, \#F\}, \quad Q_2 = \{C, \#C, E, \#F\}$$

不满三度叠置, 非传统七和弦. 在调性音乐中只有在极特殊情形下才会出现
 但在无调性音乐的创作中有重要地位 (勋伯格《室内乐四重奏》).

定理. 在 $\langle T, I \rangle$ 的作用下, 只有 2 类互不等价的 4-24 全音程和弦 Q_1 和 Q_2 .

音阶. 由音类圆周上若干点按顺时针序排成的有序集合. 称为音阶 (scale)

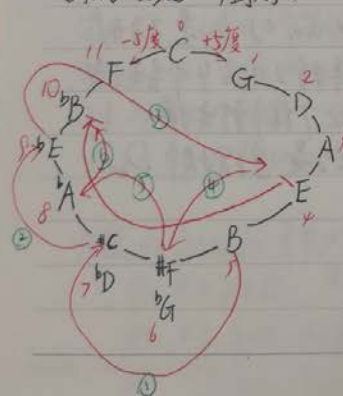
五声音阶 (pentatonic scale) $\{F, G, A, C, D\}$.

全音阶 (whole tone scale) $\{C, D, E, \#F, G, \#A\}$.

半音阶 (chromatic ~) $\{C, \#C, D, \#D, E, F, \#F, G, \#G, A, \#A, B\}$.

C 大调音阶: 2 对称轴 $\#G-D$. 全音阶为 $\{C, D, E, F, G, A, B\}$.
 对 C 做移调得: 都是自然大调音阶 第一项为主音.
 C 的距离向量 $\delta = (2, 1, 4, 3, 6, 1)$ 由于其中无等于 7 的分量, 则无非平凡移调变换
 保持不变, 在 $\langle T \rangle$ 作用下共可得 12 个自然大调音阶 (自然)
 由于其对称轴 $\#G-D$, 故添加 I 不令形成新的自然大调音阶 (有序集意义下).

* 五度圆周. 在音类圆周上, 按五度相生原则排列 12 个音, 所得一新的音类圆周,
 称为五度圆周.



从 E 开始的半圆弧 第一次是 B, 把这个半圆弧上的音类
 重排, 可得到 B 大调音阶 $B, \#C, \#D, E, \#F, \#G, \#A$.

调关系 C 和 G 关系密切, 因为二者有 6 个相同.
 C, G, D, A, E, B .

C 的弧: F, C, G, D, A, E, B

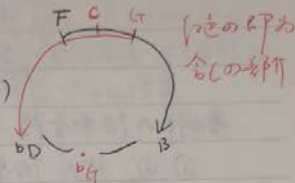
G 的弧: $C, G, D, A, E, B, \#F$.

期望大洞含C? (1) 对C的直径为对称轴, 故C大洞部所有事件图线: $F \rightarrow B$.

共同和弦：两个不同部中其有和弦

应用: 枢轴和法 音乐作品中常用到转调(modulation)

若用两洞共同承担连接, 则叫 桩轴和弦. (pivot)



三和弦 大写为大三,小写为小三

把24个大小三构成的集记为 \mathcal{F} , 引入其上变换

(C) 和 c 根号相同, 称为平行, 平行变换, P : 换成平行的和法

(和 α 称为关系三和法。关系变换 R 若大, 下小三度变小, 若小, 上小三度变大。

导音交换: \downarrow 把大三的根降一半音, 变为小三 $\overset{C}{CEG} \rightarrow \overset{E}{EGB}$

把小三的冠升一半音，变为大三

(中垂线) $d=5$

$$d=4$$
$$d=3$$

几何: ρ : 根冠连枝翻转变

R: 大三连浅翻转移 L: 小三连浅翻转移

①: 小三逆浅羽转

共同特点 ① 只改变一个顶点 ② 只改变和它一级的可连接和弦

② 只做变二和统一音级, 可连接和弦

音网

1. 在19世纪, 黎曼等人在傅氏的框架下发展了音高的理论, 提出了三和弦之间的变换。在20世纪下半, 一些音乐家在平均律框架下进一步利用和发展了音高理论和分析工具, 形成新黎曼理论。(非数学的黎曼)。

PRL 循环:

从大三和弦C出发 继续用P.R.L作用 可得

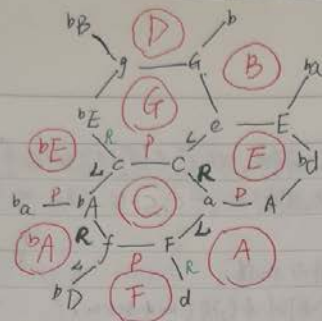
$$C \xrightarrow{P} c \xrightarrow{R} bE \xrightarrow{L} g \xrightarrow{P} G \xrightarrow{R} e \xrightarrow{L} C \quad \text{得到循环}$$

同理,从 P_2 和 P_3 出发,可以得到另一个循环

$$F \xrightarrow{P} f \xrightarrow{R} A \xrightarrow{L} c \xrightarrow{P} C \xrightarrow{R} a \xrightarrow{L} F$$

共有 12 个大三和弦，因此可产生 12 个正八边形。将这些正八边形按照公共边重合起来，就得到 T 网状的图，即音网 (Tonnetz)

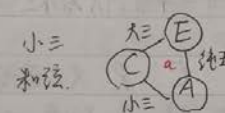
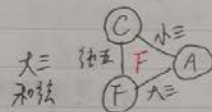
局部示例



考虑该环 $C \xrightarrow{P} c \xrightarrow{R} bE \xrightarrow{L} g \xrightarrow{P} G \xrightarrow{R} e \xrightarrow{L} C$
 这些和弦唯一包含同一个音是 G.
 把它写在大边形环中心形成
 带标号的音网.

音网中的协和音程, 与标号对应的正边形 周围六个正边形的标号 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥.
 ①, ②, ③ 构成协和音程, 如图中 C 和 G, E, A, F, bA, bE
 图中 $\rho = [CDEGA]$ 是五声音阶, 除 D, 其他四个音级所在正边形都相邻.
 图中 C 大调音阶 $[C, D, E, F, G, A, B]$ 对应的更多不相邻的正边形, 说明
 大调音阶 μ 包含更多不协和音程.

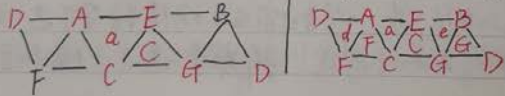
音网的对偶形式: 连接各个红圈, 构成一张网.



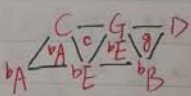
这时中间夹的正边形顶点
 即和弦根音.

在十二平均律体系中, 音网不是无限延展的, 而是在水平和垂直两个方向上周期重复.
 几何上, 这种有双周期的图形叫环面 (torus)

音阶包含的三和弦, $\rho = [c, D, E, G, A]$ | $\mu_c = [C, D, E, F, G, A, B]$



大调音阶 $\mu = [C, D, bE, G, bA, bB]$
 (在 C 自然小调音阶中替换 F)



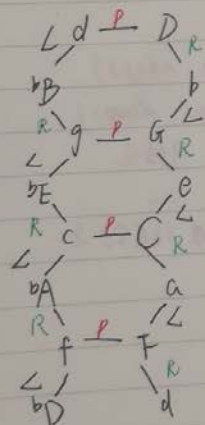
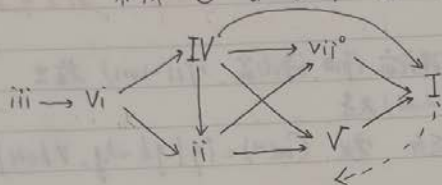
(出自美国作曲家、音乐理论家 约翰·凯奇 (1912-1992) 钢琴曲《梦》(1944))

新黎曼群：大、小三和弦的集合上的排列变换 L ，类导变换 R 和导交换 L 关于变换的复合构成一个群 $\mathcal{N} = \langle P, R, L \rangle$ ，称为新黎曼群。
 实际上， \mathcal{N} 可由 R, L 生成。 $P = (RL)^3 R$ ($(LR)^6 = e$ ，是12阶元)
 从音网中任一三和弦 ∇ 出发，依次用 R, L 作用。（相当于每次右移一个三角形）
 移动7次，最终得到的大三和弦 Δ 必定是平行变换作用在 ∇ 上的结果。
 可以证明 $\mathcal{N} \cong D_{24}$ 。

和弦进行和 \mathcal{N} 中的字，

1) C大调为例：此时

级	I	ii	iii	IV	V	vi	vii°
和弦	C	d	e	F	G	a	/ (减三)



$$V \rightarrow I: G \xrightarrow{LR} C$$

$$IV \rightarrow I: F \xrightarrow{RL} C$$

$$vi \rightarrow IV: a \xrightarrow{L} F$$

$$IV \rightarrow ii: F \xrightarrow{R} d$$

$$iii \rightarrow vi: e \xrightarrow{RL} a$$

$$vi \rightarrow ii: a \xrightarrow{RL} d$$

$$ii \rightarrow V: \begin{cases} d \xrightarrow{LRP} G \\ d \xrightarrow{PRL} G \end{cases}$$

设 G 是群，子集 $S \subset G$ 是 G 的一个生成元集。 S 上的一个字是一个形如 $s_1^{e_1} s_2^{e_2} \dots s_n^{e_n}$ 的表达式，在 \mathcal{N} 中， $S = \{P, R, L\}$ 是一个生成元集。

给定 \mathcal{N} 中一个字，从音网中某三和弦（三角形） X 出发，用此字中的变换依次作用到三和弦上，就得到三和弦的一个序列，在音网上则是一条从 X 出发的路径。

音网上的哈密尔顿图 经过每个T顶点恰一次。

环面上的音网图包含一个哈密尔顿图，说明可以从一个三和弦出发，经过一系列的变换P, R, L，使24个大、小三和弦每个都恰好出现一次。由于每个新黎曼变换都只把大三和弦中某一个音变化半音，这说明可以平滑地遍历24个大、小三和弦。

N 与 $\mathcal{Q} = \langle T, I \rangle$ 的关系。

大小三和弦集 $|Y| = 24$ ，则 Y 上最大的变换群是 S_{24} ，而 $N \subset S_{24}$ 。

\mathcal{Q} 本来是定义在 $PC(N/\sim)$ 上的，通过对三和弦每个音类的变换，可以诱导 \mathcal{Q} 中元素对 N 中元素的作用，则 $\mathcal{Q} \subset S_{24}$ 。（ T 改变根音， I 改变大/小）

$$\forall d \in \mathcal{Q}, d\{x, y, z\} = \{dx, dy, dz\}$$

子群的中心化子。

David Lewin (美国音乐理论家、作曲、评论家, 1935-2003) 指出。

\mathcal{Q} 和 N 有某种对偶(dual)关系。

(centralizer)

Def. G 是群, $H \leq G$ 。定义 $C_G(H) = \{g \mid gh = hg, \forall h \in H\}$ 为 H 在 G 中的中心化子。

对偶关系是 $C_{S_{24}}(N) = \mathcal{Q}$, $C_{S_{24}}(\mathcal{Q}) = N$ 。

简证: $\forall n \in N, d \in \mathcal{Q}$ $nd\{x, y, z\} = \{nd(x), nd(y), nd(z)\}$

$x, y, z \in \mathbb{Z}_{12}$

$$dx = k + (1-j)x$$

$$= \{d(nw), d(ny), d(nz)\}$$

$$= d\{x, y, z\} \quad \text{可验证。}$$

事实上常取 N 中生成元验证即可。

得 $\mathcal{Q} \subseteq C_{S_{24}}(N)$, $N \subseteq C_{S_{24}}(\mathcal{Q})$ 。...

反向: 取 $C_{S_{24}}(N)$ 中元素, 其可与 N 交换, 证其余于 \mathcal{Q} 。

和弦与音阶
特里斯坦和弦 $\{F, B, \#D, \#G\}$
音阶, 瓦格纳从传统的调性和谐更进一步, 强调和弦本身的音响效果, 而非传统和声功能, 则特里斯坦和弦应当被看做有别于传统和声进行方式的一系列和弦连接。最先注意到和弦间存在抽象网络关系的是欧拉。
到19世纪, 黎曼等人在传统框架内发展了音阶的理论, 提出三和弦间若干变换。
20世纪下半叶, 一些音乐家在平均律框架下进一步利用和发展了音阶理论和分析工具, 形成新黎曼理论。

现代音乐理论把传统和弦的概念推广成一般的不和弦, 即音类空间 PC 的一个子集, 称为一个音类集合。
音类圆周, 12个音类——对应于12个同构类, n -和弦可表示为一个基上的边形。

- 例 134 $T = \langle T \rangle$
- ① 记大三和弦 $X = \{C, E, G\}$ 对 X 做移调变换 T , 得新的大三和弦 $T(X) = \{T(C), T(E), T(G)\}$, $\langle T \rangle$ 作用 X 上可得12个音类集合, 对应12个大三和弦。
 - ② 对应于减七和弦 $Y = \{E, G, B, D\}$ 的图形为正方形, T, T^3, T^5, T^9 保其不动, 则对 Y 移调只能得3个不同音类的集合, 即只有3个减七和弦。

不仅移调可作用在12音类上, 倒影也可。在音类圆周上, 倒影相当于做 $C \rightarrow F$ 的反射。 I 和 T 生成24阶群, 其同构于二面体群 D_{12} 。
 $\mathcal{G} = \langle T, I \rangle \cong D_{12}$
对 X (大三) 做倒影 I , 得小七和弦 $I(X)$ 。

轨道和稳定化子。给定 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 上的一个置换群 (是 n 次对称群 S_n 的子群)。
定义 Ω 中元素的一个等价关系 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists g \in G, g(\alpha) = \beta$ 。
对于 $\alpha \in \Omega$, 把 α 所在等价类记作 $Orb(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid \beta \sim \alpha\}$ 。
称为含 α 的轨道, 是 G 的子集 (也是 S_n 的子集)。
 $G_\alpha = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\}$ 称为 α 的稳定化子 (stabilizer)。

- 性质 ① $Orb(\alpha) = \{g(\alpha) \mid g \in G\}$ ② $G_\alpha \leq G$ 。
③ $\forall \alpha, \beta \in \Omega, \exists g \in G, g(\alpha) = \beta \Rightarrow G_\beta = g G_\alpha g^{-1}$ 共轭子群。
④ $\forall g, h \in G, \alpha \in \Omega, g(\alpha) = h(\alpha) \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_\alpha$ 。
⑤ $|Orb(\alpha)| = |G : G_\alpha| = |G| / |G_\alpha|$ 。

音乐基础常识
音乐凭借声带振动而产生，在时间中展现
声波，是纵波，空气疏密的变化。

声音强弱由压力决定, 力度 (dynamics)
~ 时间长度 时值 (duration)
~ 特殊 由波形决定 音色 (timbre)

频率—音高 人听力 20-20K Hz

• 音乐会音高 (concert pitch) 中央C上方的A是440 Hz

声压一力度. 人耳听觉下限范围: $20 \mu\text{Pa}$ (频率为 1 kHz 时)

一、分贝 人对声压弱感觉并非线性, 用声压水平来度量

$I_p = 20 \log_{10} \frac{P}{P_0}$ 是下限阈值 I_p 单位就是分贝

音色 傅里叶级数 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

⇒ 一个复杂的脉冲可以分解成简单的正余弦脉冲的叠加.

\Rightarrow 一个复杂的振动包含了若干不同频率的振动

两种视图：把-T 振荡描绘成随时间变化的图。时域

把播波対応の不同頻率上の圓位土 頻域

物理知識

乐音体系 乐音 (musical tone) 噪音 (noise)

二十世纪以来音乐越来越重视噪音的使用 (organized noise)

打击乐 (percussion instrument): 分为有固定音高和无固定音高的)

录音使用. eg 1. 柴可夫斯基 《1812序曲》, 用炮

eg2. 打溜子 v.s. stamp: (舞的视觉状态) 谭盾《秧歌》第三章打溜子

乐音 音乐中使用的,有固定音高的单个乐音构成一个集合,称为乐音体系,通常作

音级，从低到高排成音列，两个相邻的音相差一个半音

每段都有音名 C D E F G A B

在每个八度(octave), 为已⁶不同八度间同音的音, 人们把这些音分为音组

88鍵

音乐：凭借声波振动而产生，在时间中展现
声波是纵波，空气疏密的变化。

声音的物理属性：
 高低由频率决定，音高 (pitch)
 声音强弱由压力决定，力度 (dynamics)
 ~ 时间长度，时值 (duration)
 ~ 特征，由波形决定，音色 (timbre)

频率—音高 人听力 20-20K Hz

音乐会音高 (concert pitch) 中央C上的A是440 Hz

声压一力度. 人耳听觉下限阈值: $20 \mu\text{Pa}$ (频率为 1kHz 时)

一、对人声强弱感觉并非线性，用声压水平来度量

$$I_p = 20 \log_{10} \frac{P}{P_0}$$

P_0 是下限阈值 I_p 单位就是分贝

音色 傅里叶级数 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

⇒ 一个复杂的脉冲可以分解成简单的正、余弦振动的叠加

⇒ 一个复杂的振动包含了若干不同频率的振动

两种视图: 把-T 振荡描绘成随时间变化的图. 时域

把播冲対応の不同频率上の图位土 频率

录音带 录音 (musical tune) 明智 (wise)

二十世纪以来音乐越来越重视条音的使用 (organized wise)

打击乐器 (percussion instrument): 分为有固定音高和无固定音高的)

录音使用. eg 1. 柴科夫斯基 *1812序曲*, 用炮

eg2. 打溜子 v.s. stamp. (舞的视觉状态) 谭盾《秧田》第三乐章打溜

乐音 音乐中使用的, 有固定音高的单个乐音构成一个集合, 称为乐音体系。通常有

音级，从低到高排成音列，两个相邻的音相差一个半音

每段都有音名 C D E F G A B

在每个八度(octave), 为已6⁴不同八度间同名的音, 人们把这些音分为音组

88鍵