节奏中的数学

Mathematics in Rhythm

王 杰

北京大学数学科学学院

2022 – 2023 学年 • 第一学期

目录

内容提要

节拍 vs 节奏

节拍 (meter): 若干拍子按照一定的强弱规律形成的组合. **节奏 (rhythm)**: 由音符的不同 **时值 (duration)** 组合构成的模式.

固定节奏型 (rhythmic ostinato) 是在乐曲中无变化地反复出现, 贯穿始终的节奏模式.

范吉利斯

Vangelis

Evángelos Odysséas

Papathanassíou

1943.3.29 —

希腊音乐家、作曲家

拉威尔

Joseph-Maurice Ravel

(1875.3.7 –

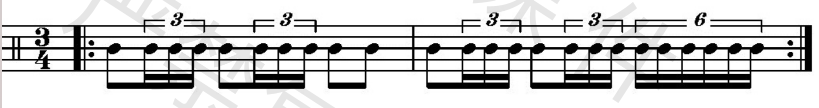
1937.12.28)

法国作曲家、钢琴家、

指挥

固定节奏型

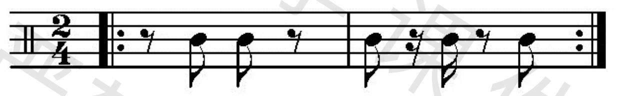
拉威尔的舞曲《波莱罗》(Boléro) 的固定节奏型



古巴颂乐 (*son cubano*)

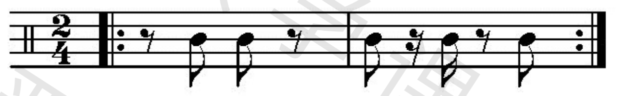
古巴颂乐 (*son cubano*)

基本节奏型



为了记录和描述固定节奏型，要引入其表示法和 **几何模型**. 为了分析这些节奏型的特点，比较它们之间的异同，要引入若干关于节奏型的 **度量特征**.

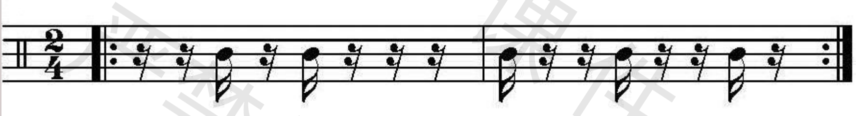
古巴颂乐



在古巴颂乐的固定节奏型中，时值最短的是十六分音符和十六分休止符，把十六分音符的时值作为单位，将这个节奏型划分为 16 个单位，每个单位称为一个 **拍 (pulse)**.

表示法

根据这样的划分，古巴颂乐的基本节奏型也可以表示成



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		●		●				●			●			●	

[. . X . X . . . X . . X . . X .]

[0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0]

表示法

		●		●				●			●			●	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

在上面的表示形式中，标号为 0, . . ., 15 的每个小方格代表一拍.

标有圆点的小方格代表的是发声的 **起拍 (onset)**; 空白的小方格代表不发声的拍 (休止拍).

在颂乐中，共有 5 个起拍，分别位于 2, 4, 8, 11, 14 的位置.

组合计数

包含 5 个起拍的 16 拍节奏型一共有多少个？这个问题相当于要在 16 个空格子里放 5 个球，每个格子里最多放一个球，问一共有多少种放法. 回忆 **组合数** 的定义

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

这里相当于 $n = 16$, $k = 5$ 的情形，所以一共有

$$C_{16}^5 = \frac{16(16-1)(16-2)(16-3)(16-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4368$$

种放法.

什么样的节奏是好节奏？

极大均衡 (maximal evenness) 原则:

在所有的拍上，要将起拍尽可能地均匀分布.

极大均衡原则

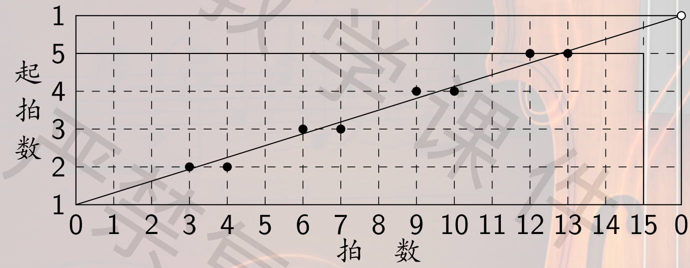
对于 16 拍的节奏型，如果只包含 4 个起拍，则最均匀的分布显然是

●				●				●				●			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

但是这样的节奏型持续不停地反复出现会显得单调乏味.

在颂乐的节奏型中有 5 个起拍，于是两个相邻的起拍之间的平均间隔应该等于 $16/5 = 3.2$ 拍

极大均衡原则



每个起拍都必须位于整数拍的位置上. 如果假定第一个起拍均位于第 0 拍的位置, 就可以得到 16 个符合极大均衡原则的节奏型.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	●			●			●			●			●			
2	●			●			●			●				●		
3	●			●			●				●		●			
4	●			●			●				●			●		
5	●			●				●		●			●			
6	●			●				●		●				●		
7	●			●				●			●		●			
8	●			●				●			●			●		
9	●				●		●			●			●			
10	●				●		●			●				●		
11	●				●		●				●		●			
12	●				●		●				●			●		
13	●				●			●		●			●			
14	●				●			●		●				●		
15	●				●			●			●		●			
16	●				●			●			●			●		

line 4: Bossa-Nova, line 7: Rumba. Where is *Son?*

▸ 节奏奇性 ▸ 颂乐的特性

颂乐的两种形式

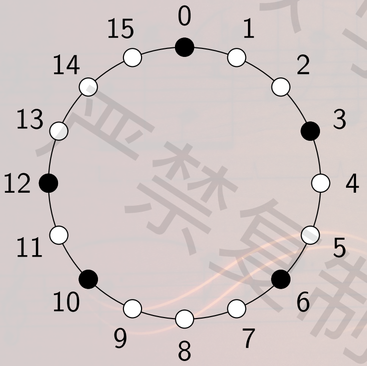
开始给出的是 2 — 3 形式

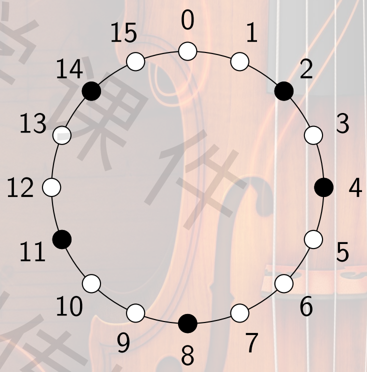
		●		●				●			●			●	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

表中第 3 行给出的是 3 — 2 形式

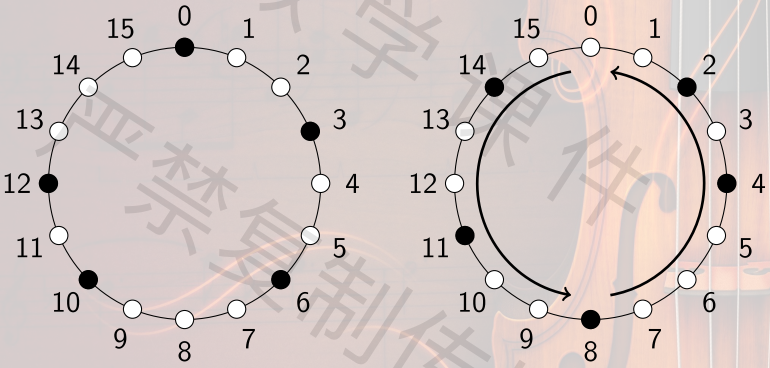
●			●			●				●		●			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

几何模型: 圆周上的节奏型





几何模型: 圆周上的节奏型



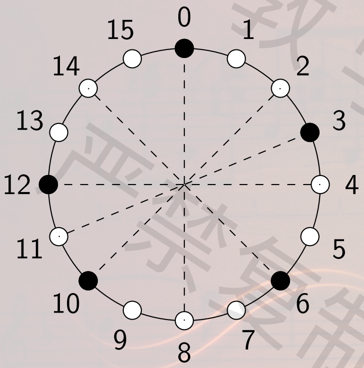
相 位

在乐曲中，由于固定节奏型持续不断地反复出现，故可以将其视为时间轴上的 **周期函数**. 同一个节奏型的不同表示缘于选取不同的起点. 或者说它们之间只是 **相位 (phase)** 不同.

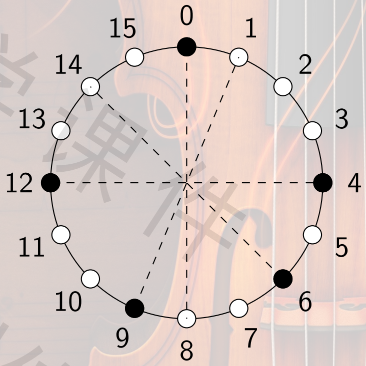
在圆周上，如果两个节奏型的表示相差一个旋转，则本质上它们就是同一个节奏型.

练习: 找出表中哪些行只是相位不同.

节奏奇性



古巴颂乐的节奏型



第 9 行的节奏型 ▸ 表 1.

节奏奇性

在节奏型的圆周表示中，把每个起拍所对应的点与其 **对径点** **(antipodal point)** 连接起来. 颂乐的节奏型中起拍的对径点都不是起拍，而节奏型 9 中，起拍 4 和 12 形成对径点.

一个节奏型称作具有 **节奏奇性 (rhythmic oddity)**，如果它不包含对径的起拍对. 古巴颂乐的节奏型具有节奏奇性.

节奏奇性

起拍构成对径点的节奏型，其起拍点被划分在两个等时值的半圆内，从而显得更加有规律．例如在通常的包含偶数个起拍的节奏型中，都包含对径的起拍对．反之，节奏奇性往往会使得节奏型呈现出切分的效果，增强了其 **节奏感** 和音乐的 **活力**．例如在非洲传统音乐中使用的许多节奏型都具有节奏奇性．

在表中，节奏型 9, 11, 13 和 15 不具备节奏奇性．由此可见，尽管包含 5 个起拍的 16 拍节奏型有 4368 个之多，但是既满足极大均衡原则，又具有节奏奇性的节奏型却是少之又少．

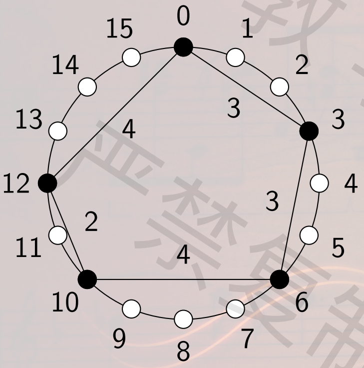
内容提要

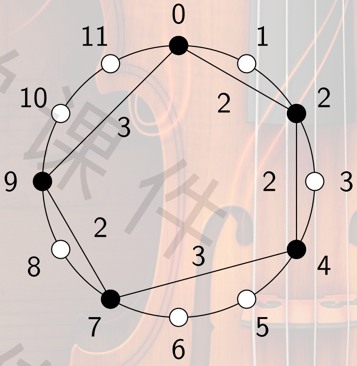
距离序列

在节奏型中，由相邻起拍点之间的距离构成的序列称作该节奏的**距离序列**.

这些距离反映了相邻起拍之间的时间间隔的 **绝对长度**.

节奏型的距离序列





Son: [3, 3, 4, 2, 4]

Fume-fume: [2, 2, 3, 2, 3]

人耳感知的时间

这两个节奏型有着明显的差异. 一个是 16 拍的, 另一个是 12 拍的. 相邻起拍点之间的距离也都不同. 唯一相同的是两个节奏型都具有 5 个起拍.

但对于许多人来说, 听不出这两个节奏型有多少区别. 原因在于, 相对于时间间隔的 **绝对长度**, 人类听觉系统对于一系列音乐事件之间的 **相对变化** 更为敏感. 换言之, 人们在听音乐时, 会比较容易地注意到起拍和休止拍之间的交替变化, 而对各拍的确切时值感受并不敏感.

人耳感知的时间

受法国哲学家亨利·柏格森 (Henri Bergson, 1859.10.18 – 1941.1.4) 有关时间概念的影响，梅西安认为：

与用固定时值测定出来的时间不同，还存在着为精神所感知的时间. 而同一个音乐事件在这两种不同的时间测度下所反映出来的时长是不同的.

——《节奏、色彩和鸟类学的论著》(*Traité de rythme, de couleur, et d'ornithologie*), Vol. II, Chapt. 3

从古巴颂乐节奏型的距离序列 $[\,3,\ 3,\ 4,\ 2,\ 4\,]$ 中提取出相对变化的特征: 分别用 $+$, $-$, 0 表示下一个距离比前一个增加、减小、保持不变. 于是得到

$$[\,0,\ +,\ -,\ +,\ -\,].$$

由于节奏型是反复出现的, 所以序列中的最后一个距离 4 要与第一个距离 3 作比较, 得到 $-$.

这个序列称为颂乐节奏型的 **轮廓 (contour)**.

Fume-fume 节奏型的距离序列为 $[2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3]$, 故其轮廓也等于 $[\,0,\ +,\ -,\ +,\ -\,]$.

轮廓同构

节奏型 A 和 B 称作是 **轮廓同构的 (contour isomorphic)**, 如果 B 的轮廓序列可以经过 **循环移位** 得到 A 的轮廓序列. 例如

$$[\,-,\ +,\ -,\ 0,\ +\,]$$

经过两次右循环移位, 或者三次左循环移位, 就得到

$$[\,0,\ +,\ -,\ +,\ -\,].$$

因此这两个轮廓序列实际上是相同的, 它们所代表的节奏型就是轮廓同构的.

结论: 古巴颂乐和 Fume-fume 的节奏型是轮廓同构的.

对偶的节奏— 影子

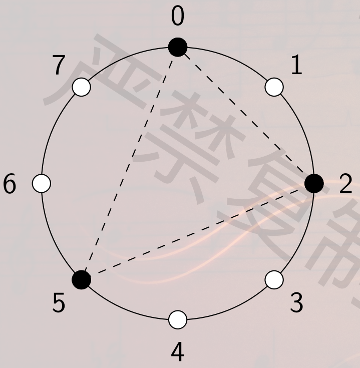
在发声的起拍之间，那些不发声的休止拍同样形成了某种无声的、但却能够被人们感知的节奏.

各个起拍之间的间隔中点形成一个与发声的节奏型对偶的节奏，称作原来节奏型的 **影子 (shadow)**.

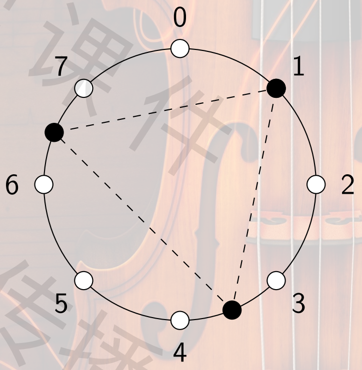
前景 vs 背景

影子节奏

影子节奏的拍点位置可能不在原来节奏的拍点上, 而是位于两个拍点中间.

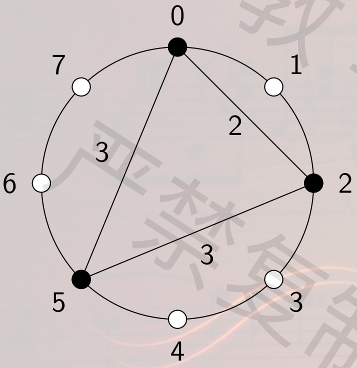


具有 3 个起拍的 8 拍节奏型

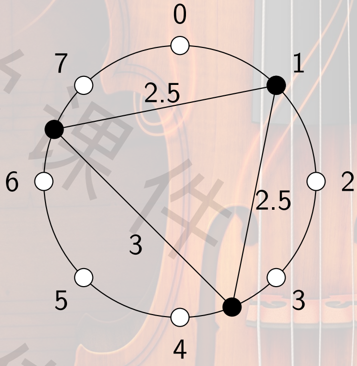


左图节奏的影子

距离序列

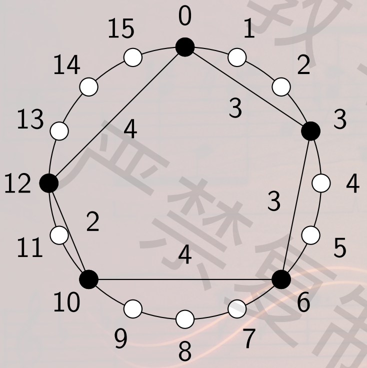


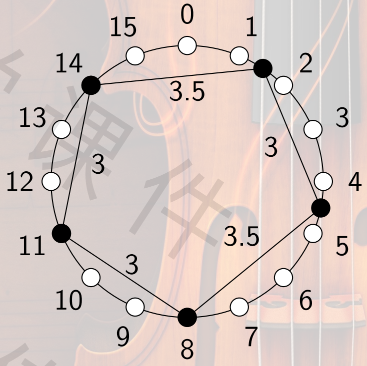
[2, 3, 3]



[2.5, 3, 2.5]

古巴颂乐及其影子节奏





Son: [3, 3, 4, 2, 4]　　影子节奏: [3, 3.5, 3, 3, 3.5]

古巴颂乐及其影子节奏

由颂乐的距离序列 [3, 3, 4, 2, 4] 得到其轮廓为

$$[\,0,\ +,\ -,\ +,\ -\,].$$

由其影子节奏的距离序列 [3, 3.5, 3, 3, 3.5] 得到其轮廓为

$$[\,+,\ -,\ 0,\ +,\ -\,].$$

将后者左循环移位两次 (或者右循环移位三次) 就得到前者.

古巴颂乐和它的影子节奏是轮廓同构的

古巴颂乐节奏型的独特之处

与自己的影子节奏轮廓同构的节奏型非常少见. 在前面表中列出的 16 个节奏型当中, 只有古巴颂乐满足与自己的影子节奏轮廓同构. ▸ 表 1.

可见, 古巴颂乐满足极大均衡原则、节奏奇性, 又与自己的影子节奏轮廓同构, 是具有 5 个起拍的 16 拍节奏型中唯一满足这些性质的好节奏型!

练习: 试求出 Fume-fume 节奏型的影子节奏, 计算它的轮廓, 进而说明 Fume-fume 与其影子节奏不是轮廓同构的.

Arturo Márquez (1950.12.20 –), 墨西哥作曲家

第二舞曲 (Danzón No. 2, 1994)

内容提要

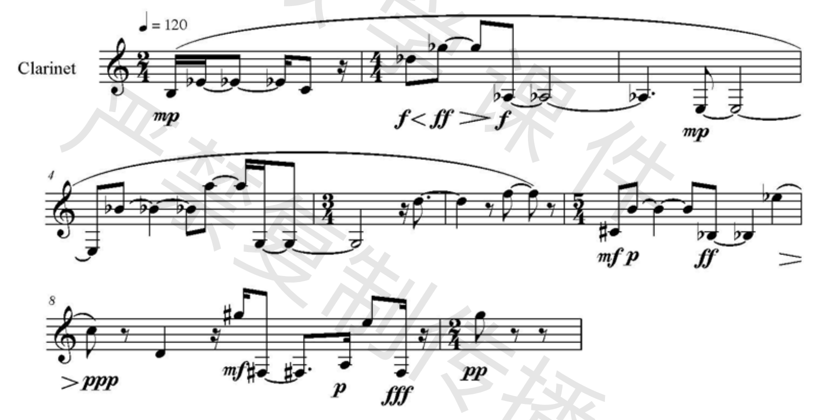
Milton Byron Babbitt

1916.5.10 – 2011.1.29

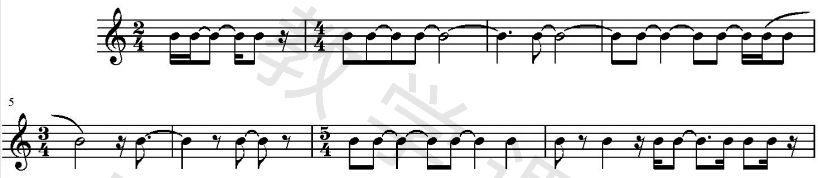
美国作曲家，音乐理论家

《为四件乐器而作》(1948)

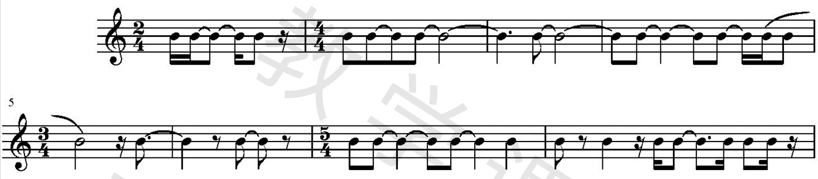
Composition for four instruments: 长笛，单簧管，小提琴，大提琴

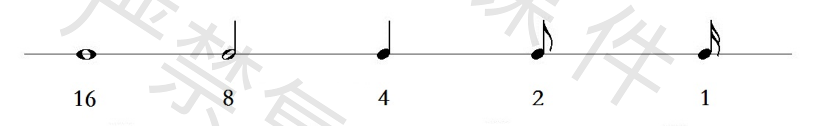


时值序列 (duration rows)



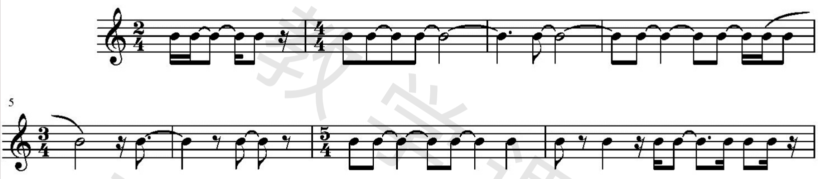
时值序列 (duration rows)

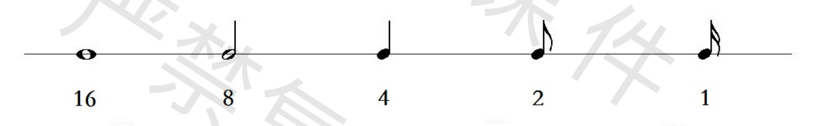




1 4 3 2 4 16 12 8 3 12 9 6 2 8 6 4

时值序列 (duration rows)





1 4 3 2	4 16 12 8	3 12 9 6	2 8 6 4
1	4	3	2

时值序列 (duration rows)

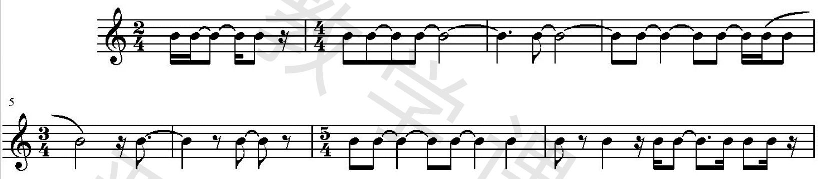
初始的时值序列是 1 4 3 2. 用 **增值变换** 相继产生新的时值序列

$$4 \quad 16 \quad 12 \quad 8, \qquad 3 \quad 12 \quad 9 \quad 6, \qquad 2 \quad 8 \quad 6 \quad 4$$

而增值的倍数恰好就等于时值序列本身

$$1 \quad 4 \quad 3 \quad 2$$

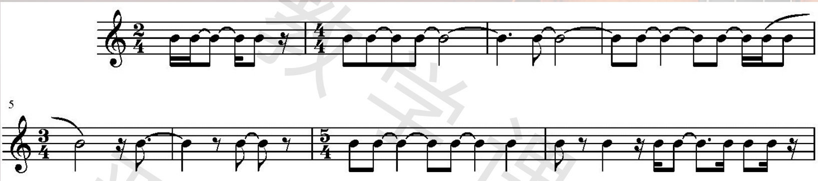
时值序列 (duration rows)



最后一小节的时值是

4 5 1 5 1 2 2

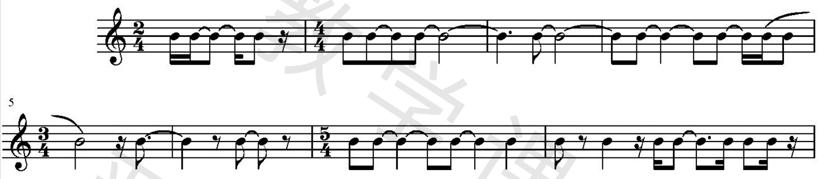
时值序列 (duration rows)



最后一小节的时值是

4	5	1	5	1	2	2
4	5+1=6		5+1+2=8			2

时值序列 (duration rows)



最后一小节的时值是

4	5	1	5	1	2	2
4	5+1=6		5+1+2=8			2

恰为上一个时值序列 2　8　6　4 的逆行!

整体序列主义

Schönberg 的十二音技术是对音列做移调、倒影、逆行以及逆行倒影变换.

Babbitt 发展了勋伯格的思想, 进一步把音列 (音类序列) 与时值序列以及力度、音区 (registers)、音色等序列化的元素有机地结合在一起, 形成了 **整体上的** 序列音乐 (integral serialism, total serialism).

《为十二件乐器而作》(1948, 1954 年修订)

Composition for Twelve Instruments: 长笛, 双簧管, 单簧管, 大管, 圆号, 小号, 竖琴, 钢片琴, 小提琴, 中提琴, 大提琴, 低音提琴.

《为十二件乐器而作》(1948, 1954 年修订)

Composition for Twelve Instruments: 长笛, 双簧管, 单簧管, 大管, 圆号, 小号, 竖琴, 钢片琴, 小提琴, 中提琴, 大提琴, 低音提琴.

给定一个初始音列 $P_0 = 0, a_1, \ldots, a_{11}$

相应的数字形式为

$$P_0 = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 5,\ 8,\ 3,\ 10,\ 2,\ 11,\ 6,\ 7.$$

计算时值序列

任意选定一个音类作为“零点”. 例如取 F 作为零点, 即令 F 对应 0. 给每个音列中的第 i 项 $(0 \le i \le 11)$ 赋予一个数 d_i, 它的值等于第 i 项与零点之间相差的半音数. 于是初始音列

$$P_0 = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 5,\ 8,\ 3,\ 10,\ 2,\ 11,\ 6,\ 7$$

中各项对应的 d_i 分别为

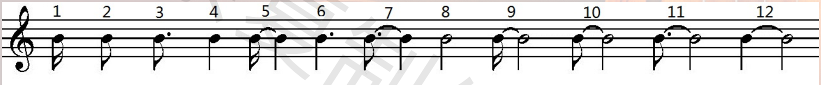
$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 5,\ 8,\ 3,\ 10,\ 2,\ 11,\ 6,\ 7$$

计算时值序列

对于每个音列，按照上述方法都可以求出一个相应的**时值序列**

$$(d_0,\ d_1,\ \ldots,\ d_{11}),\quad 0 \le d_i \le 11.$$

假定以十六分音符为时值单位 1，则有下面的数字与时值的对应



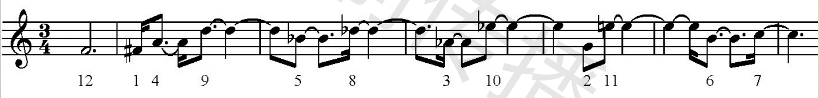
注意：在模 12 意义下，$0 = 12$，所以数字 0 对应于 $12 = 4 + 8$.

带时值的序列

按照这样的对应关系，初始音列 P_0 加上时值序列

$$(d_0, d_1, \ldots, d_{11}) = (0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 5,\ 8,\ 3,\ 10,\ 2,\ 11,\ 6,\ 7)$$

就变成了一段旋律



《为十二件乐器而作》第一乐章的整体结构

12 件乐器平行地演奏各自的音列，一共 4 次.

	长笛	双簧管	单簧管	大管	圆号	小号	竖琴	钢片琴	小提琴	中提琴	大提琴	低音提琴
I	P_4	R_4	I_1	RI_1	RI_9	I_9	R_0	P_0	P_8	R_8	I_5	RI_5
II	RI_{11}	I_{11}	R_2	P_2	P_{10}	R_{10}	I_7	RI_7	RI_3	I_3	R_6	P_6
III	I_5	RI_5	P_8	R_8	R_4	P_4	RI_1	I_1	I_9	RI_9	P_0	R_0
IV	R_{10}	P_{10}	RI_7	I_7	I_3	RI_3	P_6	R_6	R_2	P_2	RI_{11}	I_{11}

郑艳，《结构主义视域下的序列主义音乐研究》，人民音乐出版社，北京，2015, p. 120.

《为十二件乐器而作》

表中出现的 48个音列具有极强的规律性. 共有

6 个移调音列: P_0, P_2, P_4, P_6, P_8, P_{10};

6 个倒影音列: I_1, I_3, I_5, I_7, I_9, I_{11}.

每个音列在表中恰出现两次; 每次均有相应的逆行音列 R_i 和 RI_j 与之成对出现. 形成了更高层次的结构.

M. Babbitt

Who cares if you listen

High Fidelity

8 (1958), February,

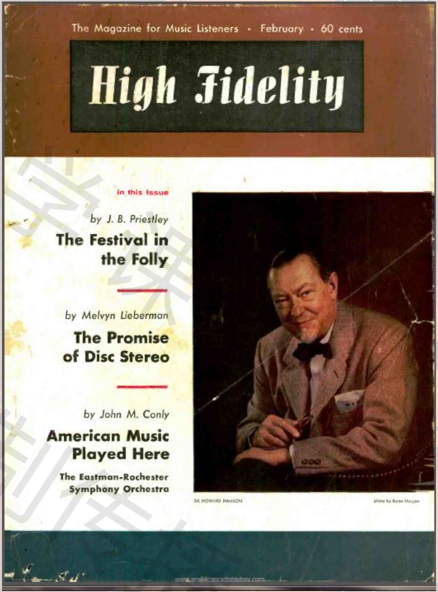
38 – 40, 126.

蔡良玉译

谁在乎你听不听

《中央音乐学院学报》

1998, no. 2, 64 – 68.



Who cares if you listen

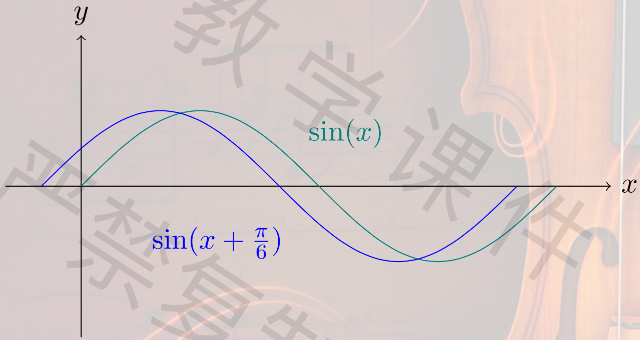
This music employs a tonal vocabulary which is more **“efficient”** than that of the music of the past, or its derivatives. This is not necessarily a virtue in itself, but it does make possible a greatly increased number of pitch simultaneities, successions, and relationships. This increase in efficiency necessarily reduces the **“redundancy”** of the language,

Who cares if you listen

and as a result the intelligible communication of the work demands **increased accuracy from the transmitter (the performer) and activity from the receiver (the listener).** Incidentally, it is this circumstance, among many others, that has created the need for purely electronic media of "performance". More importantly for us, it makes ever heavier demands upon **the training of the listener's perceptual capacities**.

内容提要

相　移 (phase shift)



这是两条相同的曲线, 但是有一个 $\pi/6$ 的 **相位差**. 称 $\sin(x+\pi/6)$ 是曲线 $\sin(x)$ 的一个 **相移** (phase shift).

Stephen Michael "Steve" Reich

1936.10.3 –

美国作曲家


Clap. 1
Clap. 2
12/8
3
5
7
9

循环左移位

ROL: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{11} \longrightarrow a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{11},\ a_0$

3	2	1	2	
2	2	1	2	1
1	2	1	2	2
	2	1	2	3
2	1	2	3	
1	1	2	3	1

	1	2	3	2
1	2	3	2	
	2	3	2	1
2	3	2	1	
1	3	2	1	1
	3	2	1	2

Counting

一共有多少个可能的 **节奏型 (rhythmic pattern)**?

假定:

- 恰有 4 拍休止符;
- 休止符不能连续出现.

情形 I.

第一拍不是休止符. 这时只需计算在下列 8 个空格 □ 中放入 4 个休止符的取法

● □ ● □ ● □ ● □ ● □ ● □ ● □ ● □

共有

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70 \text{ 种}.$$

情形 II.

第一拍是休止符. 这时只需计算在下面 7 个空格中放入 3 个休止符的取法

■ ● □ ● □ ● □ ● □ ● □ ● □ ● □ ●

共有

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35 \text{ 种}.$$

Counting

因此, 一共有 $70 + 35 = 105$ 种可能的节奏型.

但是, 在循环左移位变换 ROL 下是有重复的.

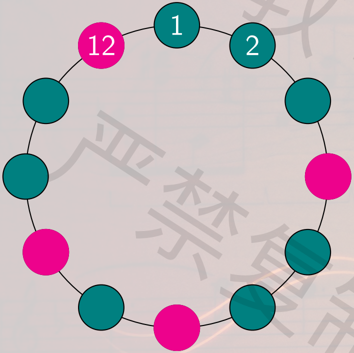
3, 2, 1, 2:

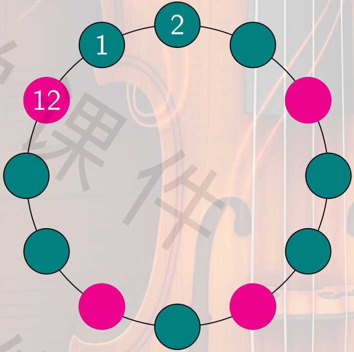
● ● ●■● ●■●■● ●■

2, 2, 1, 2, 1:

● ●■● ●■●■● ●■●

项链的计数





▸ Burnside 引理　▸ 不动点

旋转等价

设 $\mathscr{C}$ 为上述 105 个项链构成的集合. 定义 $\mathscr{C}$ 上的变换 σ: 对任意一条项链 $X \in \mathscr{C}$, σ 把 X 按照逆时针方向旋转 30°.

显然 σ 生成一个 12 阶的循环群 $G = \langle \sigma \rangle$.

在 $\mathscr{C}$ 中定义一个等价关系 $\sim$: 任意给定两条项链 $X, Y \in \mathscr{C}$, $X \sim Y$ 当且仅当项链 Y 可以通过把 X 旋转若干个 30° 得到. 换言之, 存在正整数 k, 使得

$$\sigma^k(X) = Y.$$

置换的轮换分解

也可以把变换 σ 表示成置换的形式.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12).$$

置换的 **轮换分解**.

Burnside 引理

设 $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ 是一个有限集合. Ω 到自身的全体可逆变换构成 n **次对称群** S_n. S_n 的任一子群 $G \le S_n$ 称为 Ω 上的一个**置换群 (permutation group)**.

给定 Ω 上的一个置换群 $G \le S_n$, 定义 Ω 中元素之间的一个等价关系:

$$\alpha \sim \beta \iff \exists\, g \in G \quad 使得 \quad g(\alpha) = \beta.$$

Burnside 引理

对于 $\alpha \in \Omega$, 把 α 所在的等价类记作

$\mathrm{Orb}(\alpha) = \{\, \beta \in \Omega \mid \beta \sim \alpha \,\}$, 称为包含 α 的 **轨道 (orbit)**. 记 G 的子集合 $G_\alpha = \{\, g \in G \mid g(\alpha) = \alpha \,\}$, 称为 α 的 **稳定化子 (stabilizer)**.

推 论

$$|\mathrm{Orb}(\alpha)| = |G : G_\alpha| = |G|/|G_\alpha|.$$

对于群中的元素 $g \in G$, 记 g 的 **不动点集合 (the set of fixed points)** 为

$$\mathrm{fix}(g) = \{\, \alpha \in \Omega \mid g(\alpha) = \alpha \,\}.$$

Burnside 引理

设 G 是集合 Ω 上的一个置换群, 共有 t 条轨道, 则有

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

William Burnside

1852.7.2 – 1927.8.21

英国数学家

群作用的两个定理

设群 G 作用在集合 Ω 上.

$(g, \alpha) \in G \times \Omega$

群作用的两个定理

设群 G 作用在集合 Ω 上.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \text{不动点集合 } \mathrm{fix}(g) \\
(g,\alpha)\in G\times\Omega \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& \text{稳定化子 } G_\alpha
\end{tikzcd}$$

群作用的两个定理

设群 G 作用在集合 Ω 上.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{不动点集合 } \mathrm{fix}(g) \arrow[r, Rightarrow] & \text{轨道数 } t = \frac{1}{|G|}\sum|\mathsf{fix}(g)| \\
(g,\alpha)\in G\times\Omega \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \text{稳定化子 } G_\alpha \arrow[r, Rightarrow] & \text{轨道长度 } |\mathsf{Orb}(\alpha)| = |G|/|G_\alpha|
\end{tikzcd}$$

项链的计数

12 阶循环群 $G=\langle\sigma\rangle$ 作用在项链 (节奏型) 的集合 $\mathscr{C}$ 上.

▶ 珍珠项链

在 $\mathscr{C}$ 中定义一个等价关系 $\sim$: 任意给定两条项链 $X,Y\in\mathscr{C}$,

$X\sim Y$ 当且仅当项链 Y 可以通过把 X 旋转若干个 30° 得到.

换言之, 存在正整数 k, 使得

$$\sigma^k(X)=Y.$$

项链的计数

显然 X 所在的等价类就是在群 G 的作用下, 包含 X 的轨道 $\mathrm{Orb}(X)$.

于是, 项链 (节奏型) 的计数问题就转化为求群 G 在集合 $\mathscr{C}$ 上的轨道数目的问题. 而由 Burnside 引理,

$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)|.$$

G 中元素的不动点

$G=\{\sigma,\ \sigma^2,\ \dots,\ \sigma^{11},\ \sigma^{12}=e\}$ 中任一元素 σ^k 保持某条项链不动，等价于经过 σ^k 后绿色的珠子仍然位于原来绿色的位置，红色的珠子仍然位于红色的位置. ▸ 珍珠项链

代表休止符的红色珠子恰有四颗，因此置换 σ^k 必须保持这四个位置 **整体不变**；同时保持八颗绿色珠子所对应的位置整体不变.

G 中元素的不动点

可见

$$\sigma = (1,\ 2,\ \ldots,\ 12), \qquad \sigma^{11} = \sigma^{-1} = (1,\ 12,\ 11,\ \ldots,\ 3,\ 2)$$

不可能有不动点. 同理, σ^5, $\sigma^7 = \sigma^{-5}$ 没有不动点. 类似地,

$$\sigma^2 = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11)(2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12),$$

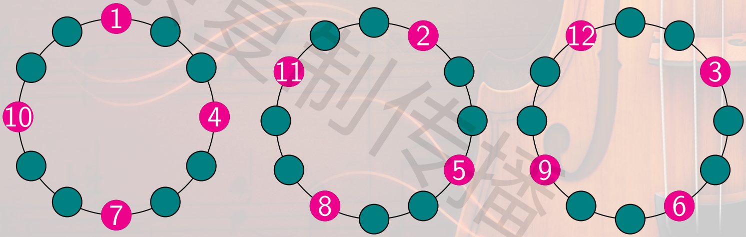
$$\sigma^4 = (1,\ 5,\ 9)(2,\ 6,\ 10)(3,\ 7,\ 11)(4,\ 8,\ 12)$$

和它们的逆 σ^{10}, σ^8 也都没有不动点.

G 中元素的不动点

另一方面, 单位元 $e=\sigma^{12}$ 保持 $\mathscr{C}$ 中 105 个元素每个都不动, 即它有 105 个不动点.

$\sigma^3=(1,\ 4,\ 7,\ 10)(2,\ 5,\ 8,\ 11)(3,\ 6,\ 9,\ 12)$ 和它的逆 σ^9 各有 3 个不动点.



σ^6 的轮换分解为

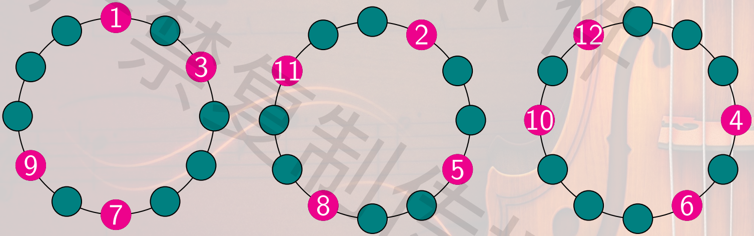
$$\sigma^6 = (1,\ 7)(2,\ 8)(3,\ 9)(4,\ 10)(5,\ 11)(6,\ 12).$$

要从六个对换中选出两个作为红色珠子 (休止符) 的位置. 注意 “休止符不能连续出现” 的规则, 故不能选取相邻的对换. 因此, 任意取定第一个对换后, 只有 3 个对换可以选取, 总共得到 $6 \times 3 = 18$ 种取法.

但是, $(1,\ 7)(3,\ 9)$ 和 $(3,\ 9)(1,\ 7)$ 是相同的取法. 所以实际上共有 $18/2 = 9$ 种不同的取法, 分别对应 σ^6 的 9 个不动点.

σ^6 的不动点

例如: 对应于 $(1,\ 7)(3,\ 9)$, $(2,\ 8)(5,\ 11)$, $(4,\ 10)(6,\ 12)$ 的不动点分别为



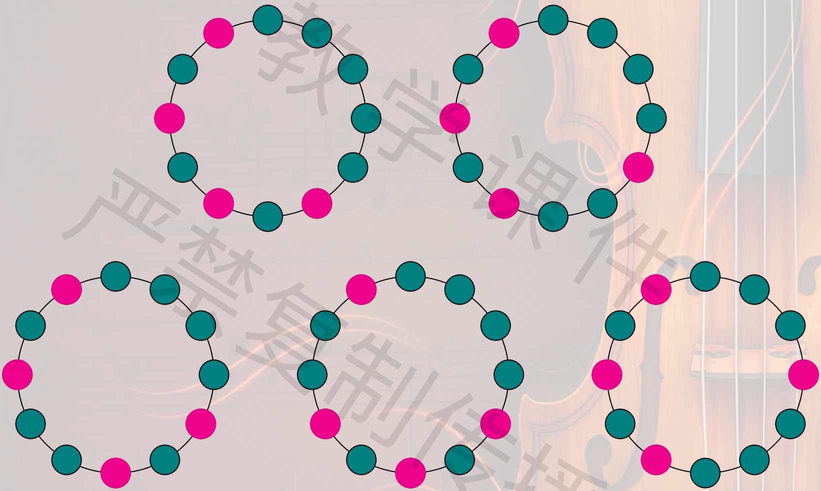
Burnside 引理

$g \in G$	fix(g)
e	105
$\sigma, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^7, \sigma^8, \sigma^{10}, \sigma^{11}$	0
σ^3, σ^9	3+3
σ^6	9

故由 Burnside 引理,

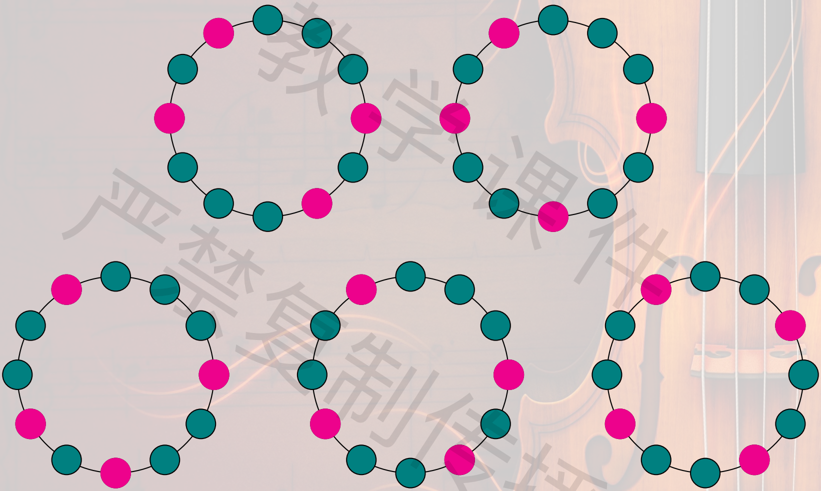
$$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\text{fix}(g)| = \frac{1}{12}(105+3+3+9) = 10.$$

互不相同的项链



5, 1, 1, 1;　4, 2, 1, 1;　4, 1, 2, 1;　4, 1, 1, 2;　3, 3, 1, 1

互不相同的项链



3, 1, 3, 1;　3, 2, 2, 1;　3, 2, 1, 2;　3, 1, 2, 2;　2, 2, 2, 2

互不相同的节奏型

这 10 条轨道 (等价类) 所对应的节奏型可以分别表示成

5,1,1,1	4,2,1,1	4,1,2,1	4,1,1,2	3,3,1,1
3,1,3,1	3,2,2,1	3,2,1,2	3,1,2,2	2,2,2,2

节奏型 3,1,3,1 和 2,2,2,2 由于自身的对称性, 在循环左移位下得不到 12 个不同的序列. 而在剩下的 8 个节奏型中, 只有 4,1,2,1 和 Reich 采用的 3,2,1,2 满足相邻的拍数均不相等.

简约主义

Reich 的音乐风格属于 **简约主义** (minimalism, 极简主义).

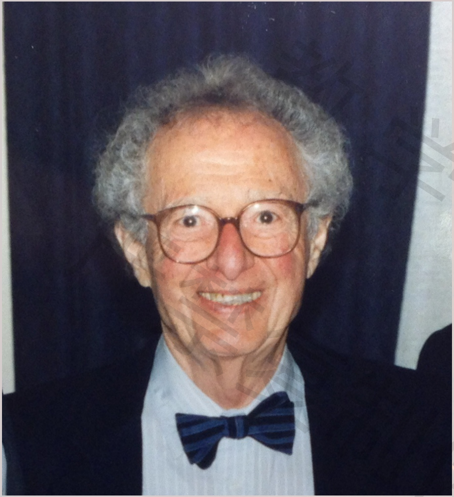
极简主义始于 20 世纪 60 年代. 采用简单的和声语言重复短小的音乐动机, 使用最少的音乐材料达到尽可能大的效果.

代表性的作曲家有 Terry Riley, Philip Glass, Steve Reich, John Adams 等.

序列主义 vs 简约主义

Babbitt: This increase in efficiency necessarily **reduces the "redundancy"** of the language, . . .

音乐是时间的艺术. 一段旋律转瞬即逝, 要将这种转瞬即逝的音响反复地呈现、不断地强调, 才能给听众留下深刻印象, 才能具有强烈的艺术感染力. 因此, **重复原则** 便成为音乐发展的一项特殊的美学原则, 成为揭示音乐内涵、完成音乐创作的一项最基本的写作原则.



Leonard B. Meyer

1918.1.12 – 2007.12.30

美国作曲家、哲学家

Music, The arts and

Ideas

Patterns and Predictions

in Twentieth-Century

Culture

一连串的事件(音乐的或是语言的)必须有足够的内在冗余来对抗由于注意力不集中、执行错误、音响噪音等而产生的“错误”. 例如在调性音乐或在语言中，如果我们错过部分讯息，我们通常能够重建错失的部分，因而仍能够理解整个讯息中前后事件之间的关系和进行. 但整体序列音乐呈现给听者极少的潜在冗余，因而假如有任何错失，听者便会遇到困难.

伦纳德·迈尔，《音乐、艺术与观念》，刘丹霓译，杨燕迪校，华东师范大学出版社，上海，2014, p. 285.

由此看来，实验音乐往往是一套 **有待研究的关系，而非有待聆听的音乐**. 它不像语言那样是交流的手段，而像数学一样是研究的对象. 正如韦斯利·彼得森所言：“当我们从语言转向数字表达的信息时，我们发现通常自然冗余过少，无法用来发现并纠正错误.” 当然，我们可以核查数学讯息以寻找错误 — 整体序列音乐亦如此. 但音乐几乎无法 **从听觉上** 进行核查和纠正.

ibid. pp. 285 – 286.

为间歇性聆听创作音乐的方法应当是提供足够的冗余，听者所错过的任何部分或者在之前听到过，或者将在随后听到，或者能够通过风格规约或作曲技术规约方面的知识而对之进行“重构”.

这恰恰是越来越多的当代作曲家 — 如简约主义者 — 已经在做的事情. 他们所写作的音乐 **不仅具有冗余性，而且其冗余性持续不断，甚至富有侵略性**.

ibid. p. 331.

菲利普·格拉斯

Philip Morris Glass

1937.1.31 —

美国作曲家

《新音乐—1945年以来的先锋派》译者序

人类对新领域的探索，往往在发展中走极端，这是人类探索精神的必然产物，也是科学精神的需要. 新视野的开拓，使新的方法和技术被过分使用是不可避免的. 人类一旦在这新领域的探索中经受挫折，克服困难，最终熟悉了它，把握了它，就会在这新的领域中感到真正的自由，就会从必然王国走向自由王国，而成熟的艺术恰恰就是建立在这从“必然”到“自由”的基础上的.

《新音乐—1945年以来的先锋派》译者序

因此，从人类对艺术探索的宏观角度看，我想，先锋派音乐的历史意义要远胜于它眼前的价值，它使人类的音乐探索在某些方面真正达到了极限.

黄枕宇，译者序，p. III.

Reginald Smith Brindle, *The New Music — The Avant-Garde since 1945*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1987.

音乐语言: 创造 vs 使用

When you talk about concert musicians, you're talking about people who actually **invent language**. They create values, a value being a unit of meaning that is new and different. Pop musicians **package language**. I don't think there's anything *wrong* with packaging language; some of that can be very good music.

Richard Taruskin, *The Oxford History of Western Music*, Vol. 5, Oxford University Press, New York, 2005, p. 392.