《人工智能引论》课后练习-3

内容：<u>机器学习</u> **提交时间：**<u>2023-04-17</u> **姓名：**<u>刘沛雨</u> **学号：**<u>2100012289</u>

一、（20 分）对以下数据一维线性回归 y=wx+b

X	0	2	3
Y	1	1	4

请列出平方损失函数L，并直接通过令$\frac{\partial L}{\partial w}=0,\frac{\partial L}{\partial b}=0$，求出最小化$L$时 w,b 的数值解。请画出得到的回归曲线。

解：$L=\frac{1}{3}\left[(b-1)^2+(2w+b-1)^2+(3w+b-4)^2\right]$

$=\frac{1}{3}(b^2-2b+1+4w^2+b^2+1+4wb-4w-2b+9w^2+b^2+16+6wb-24w-8b)$

$=\frac{1}{3}(3b^2+13w^2+10wb-12b-28w+18)$

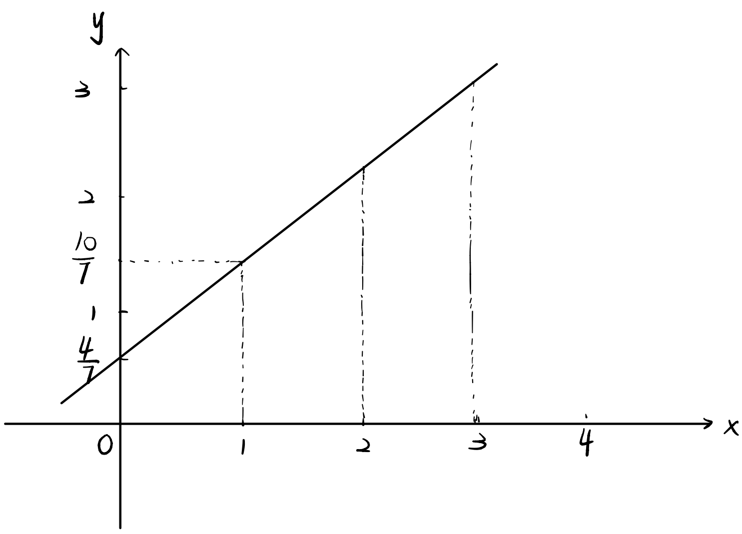
$\frac{\partial L}{\partial w}=26w+10b-28$

$\frac{\partial L}{\partial b}=6b+10w-12$

令 $\frac{\partial L}{\partial w}=0$，$\frac{\partial L}{\partial b}=0$ 得：

当 L 最小化时，$w=\frac{6}{7}$，$b=\frac{4}{7}$

回归曲线为 $y=\frac{6}{7}x+\frac{4}{7}$，如下图：



二、（20 分）课上学的逻辑回归以{1, -1}作为正负类标签，本题使用{1, 0}作为正负类标签。给定数据集$D = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$。设权重 (weight)为$w \in \mathbb{R}^d$ 和 偏置 (bias) 为 $b \in \mathbb{R}$，σ表示 sigmoid 函数

1)（6 分）写出$p(y = y_i | x = x_i)$在$y_i = 0, 1$下分别是多少。

2)（14 分）利用$p(y = y_i | x = x_i) = p(y = 1 | x = x_i)^{y_i}\, p(y = 0 | x = x_i)^{1-y_i}$，推导逻辑回归在 D 上的对数似然函数（log-likelihood）。

解: 1) $f(x) = w^T x + b$

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$p(y = y_i \mid x = x_i) = \sigma(f(x))$$

当 $y_i = 1$ 时，$p(y=1 \mid x = x_i) = \sigma(f(x_i)) = \dfrac{1}{1+e^{-(w^T x_i + b)}}$

当 $y_i = 0$ 时，$p(y=0 \mid x = x_i) = 1 - p(y=1 \mid x = x_i)$

$$= 1 - \sigma(f(x_i))$$

$$= \sigma(-f(x_i))$$

$$= \frac{1}{1+e^{w^T x_i + b}}$$

2) $$\text{log-likelihood} = \max_{w,b} \sum_{i \in [n]} \log p(y = y_i \mid x = x_i)$$

$$= \max_{w,b} \sum_{i\in[n]} \left[y_i \log p(y=1 \mid x = x_i) + (1-y_i) \log p(y=0 \mid x = x_i) \right]$$

$$= -\max_{w,b} \sum_{i\in[n]} \left[y_i \log(1+e^{-(w^T x_i + b)}) + (1-y_i) \log(1+e^{w^T x_i + b}) \right]$$

$$= -\max_{w,b} \sum_{i\in[n]} \left[y_i \log \frac{1+e^{-(w^T x_i + b)}}{1+e^{w^T x + b}} + \log(1+e^{w^T x_i + b}) \right]$$

$$= \max_{w,b} \sum_{i\in[n]} \left[y_i (w^T x + b) - \log(1+e^{w^T x_i + b}) \right]$$

其中，$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

三、（30 分）利用树模型对以下数据进行二分类。id 表示数据编号，A，B，C 是特征，y 是标签。

id	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0	0	0	1	1	1	1	1	1
B	1	0	1	1	0	1	0	0	1
C	1	1	0	1	1	1	1	1	0
y	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1

1） （15 分）在树的根节点，特征 A 的 gain ratio 是多少？(请使用以 2 为底的对数)

2） （15 分）假设在根节点对 A 分裂。在第二层所有结点对 C 分裂，在第三层对 B 分裂。请画出分类树并预测$x_* = [1,1,1]$的标签。

解：1) 设 $D=\{y_i\}$

特征A的熵益率为：

$$g_R(D,A) = \frac{g(D,A)}{H_A(D)}$$

$$g(D,A) = H(D) - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3}\log\frac{3}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right)\right]$$

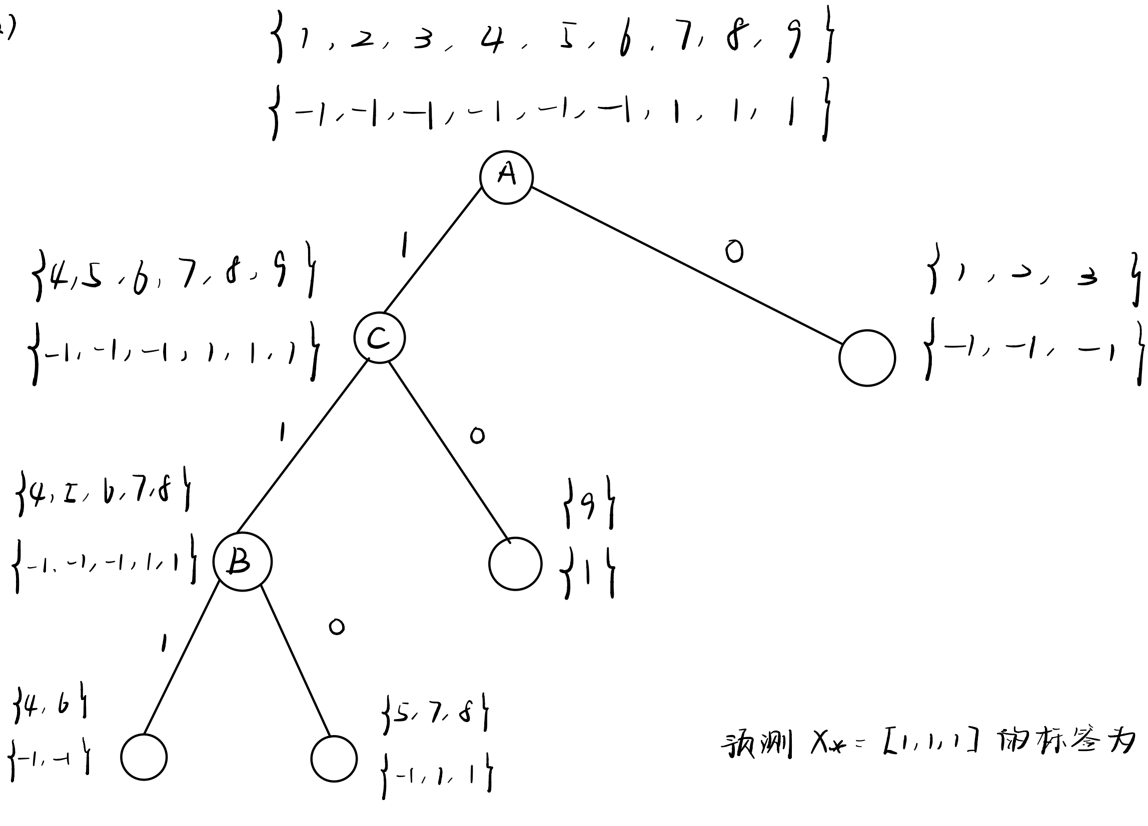
$$= H(D) - \frac{2}{3}$$

$$H(D) = -\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}$$

$$H_A(D) = -\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g_R(D,A) \approx 0.274$$

2)



预测 $X_* = [1,1,1]$ 的标签为 -1

四（30 分）推导 softmax, log softmax 的反向传播公式。设输入$z \in \mathbb{R}^d$，计算图为线性（计算结点之间顺序连接，没有跨层连接），总损失函数为L。

1) （15 分）softmax 的输出为$a \in \mathbb{R}^d, a_i = \frac{e^{z_i}}{\sum_j e^{z_j}}$。用$\frac{\partial L}{\partial a}$来表示$\frac{\partial L}{\partial z}$

2) （15 分）log softmax 的输出为$a \in \mathbb{R}^d, a_i = \ln \frac{e^{z_i}}{\sum_j e^{z_j}}$。用$\frac{\partial L}{\partial a}$来表示$\frac{\partial L}{\partial z}$

提示：逐分量表示$\frac{\partial L}{\partial z_i}$。先求$\frac{\partial a_j}{\partial z_i}$，再利用使用链式法则$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial z_i}$。你可以使用$a$来表示$\frac{\partial L}{\partial z}$，最终表达式中不要出现 z。

解: 1)

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1} \\ \frac{\partial L}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial z_d} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial L}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial L}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial a_j}{\partial z_i}$$

$$\frac{\partial a_j}{\partial z_i} = \frac{\partial \frac{e^{z_j}}{\sum_k e^{z_k}}}{\partial z_i} = \begin{cases} -\frac{e^{z_i+z_j}}{(\sum_k e^{z_k})^2}, & i \neq j \\ \frac{e^{z_i}(\sum_k e^{z_k}) - e^{2z_i}}{(\sum_k e^{z_k})^2}, & i = j. \end{cases} = \begin{cases} -a_i a_j, & i \neq j \\ a_i - a_i^2, & i = j. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z_1} = \frac{\partial L}{\partial a_1} \cdot a_1(1-a_1) + \frac{\partial L}{\partial a_2}(-a_1 a_2) + \cdots + \frac{\partial L}{\partial a_d}(-a_1 a_d)$$

$$= [a_1(1-a_1), -a_1 a_2, \cdots, -a_1 a_d] \frac{\partial L}{\partial a}$$

$\cdots$

$$\frac{\partial L}{\partial z_d} = [-a_d a_1, -a_d a_2, \cdots, a_d(1-a_d)] \frac{\partial L}{\partial a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = \begin{bmatrix} a_1(1-a_1), & -a_1 a_2, & \cdots, & -a_1 a_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_d a_1, & -a_d a_2, & \cdots, & a_d(1-a_d) \end{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial a}$$

2) 由 1) 知: $\frac{\partial L}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial L}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial z_i}$

$$\frac{\partial a_j}{\partial z_i} = \frac{\partial \ln \frac{e^{z_j}}{\sum_k e^{z_k}}}{\partial z_i} = \begin{cases} \frac{\sum_k e^{z_k}}{e^{z_j}} \cdot -\frac{e^{z_i+z_j}}{(\sum_k e^{z_k})^2} = -\frac{e^{z_i}}{\sum_k e^{z_k}} = -e^{a_i}, & i \neq j \\ \frac{\sum_k e^{z_k}}{e^{z_j}} \cdot \frac{e^{z_i}(\sum_k e^{z_k}) - e^{2z_i}}{(\sum_k e^{z_k})^2} & \end{cases}$$

$$= e^{-a_i} \cdot (e^{a_i} - e^{2a_i}) = 1 - e^{a_i}, \ i = j.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z_1} = [1-e^{a_1}, -e^{a_2}, \cdots, -e^{a_d}] \frac{\partial L}{\partial a}$$

$\cdots$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial z} = \begin{bmatrix} 1-e^{a_1}, & -e^{a_2}, & \cdots, & -e^{a_d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -e^{a_1}, & -e^{a_2}, & \cdots, & 1-e^{a_d} \end{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial a}$$