

《人工智能引论》课后练习-2

内容：逻辑与搜索 提交时间：2023-03-16 姓名：刘沛雨 学号：2100012289

1. 图着色问题 (25 分)

我们课堂上讲的地图着色问题，其实更普遍被成为图着色问题。

我们总共有 K 中颜色，现在需要给图的每一个节点分配一种颜色，如果任意两个相邻节点不是相同的颜色，则该图是可 K 着色的。图 K 着色问题是一个经典的 NP-Complete 问题，具有许多实际应用，例如编译器的寄存器分配，课程安排，课上讲的 N 皇后其实也是一种图 K 着色问题。在该问题中，你将开发用于图着色的合取范式 (conjunctive normal form, CNF)。

假设该图 $G = \langle V, E \rangle$ 有 $|V|$ 个节点和 $|E|$ 边，我们用变量 $color_{ik}$ 表示第 i 节点是否是颜色 k ，我们用变量 $neighbor_{ij}$ 表示第 i 节点和第 j 节点是否有边相连。

- (a) (5 分) 请用命题逻辑表示约束每一个节点都着色了。
- (b) (5 分) 请用命题逻辑表示约束每一个节点最多只被一种颜色着色了。
- (c) (5 分) 请用命题逻辑表示约束任意相邻的两个节点的颜色不一样。
- (d) (10 分) 请将所有前面的约束合起来，并用 CNF 的形式表示。

解: (a) $(color_{11} \vee color_{12} \vee \dots \vee color_{1k}) \wedge (color_{21} \vee color_{22} \vee \dots \vee color_{2k}) \wedge \dots \wedge$
 $(color_{m1} \vee color_{m2} \vee \dots \vee color_{mk}) = \bigwedge_{i=1}^M \bigvee_{j=1}^k color_{ij}.$

故当上式 = 1 时表示约束每一个节点都着色了.

(b) $\bigwedge_{i=1}^M \bigwedge_{\substack{k_1=1 \\ k_2 \neq k_1}}^k \bigwedge_{k_2=1}^k \neg (color_{ik_1} \wedge color_{ik_2})$

故当上式 = 1 时表示约束每个节点至多只被一种颜色着色了.

(c) $\bigwedge_{i=1}^M \bigwedge_{j=1}^M \left(\neg neighbor_{ij} \vee (neighbor_{ij} \wedge \left(\bigwedge_{k_1=1}^k \neg (color_{ik_1} \wedge color_{jk_1}) \right)) \right)$

当上式 = 1 时表示约束任意相邻两节点颜色不同.

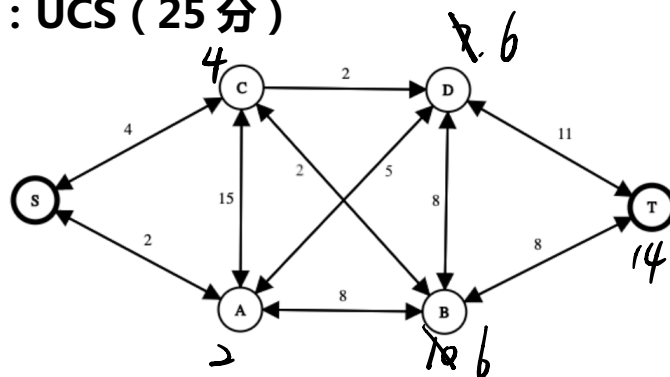
(d) 合起来后总的约束为每个节点有且仅有一种颜色且相邻两节点颜色不同.

对应的 CNF 为:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^M \bigvee_{j=1}^k color_{ij} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^M \bigwedge_{\substack{k_1=1 \\ k_2 \neq k_1}}^k \bigwedge_{k_2=1}^k (\neg color_{ik_1} \vee \neg color_{ik_2}) \right) \wedge$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^M \bigwedge_{j=1}^M \bigwedge_{k=1}^k (\neg neighbor_{ij} \vee \neg color_{ik} \vee \neg color_{jk}) \right)$$

2. 最短路径：UCS (25 分)



使用UCS算出S 到 T 的最短路径及其代价。请给出离开优先队列节点的顺序。当两个节点可以同时离开优先队列的时候，顺序为 S、A、B、C、D、T。

解：顺序为 S、A、C、B、D、T

最短路径为 $S \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow T$

其代价为 14.

S

S: A, C
2 4

A: C, D, B
4 7 10

C: B, D
6 6

B: D, T
6 14

D: T
14

T:

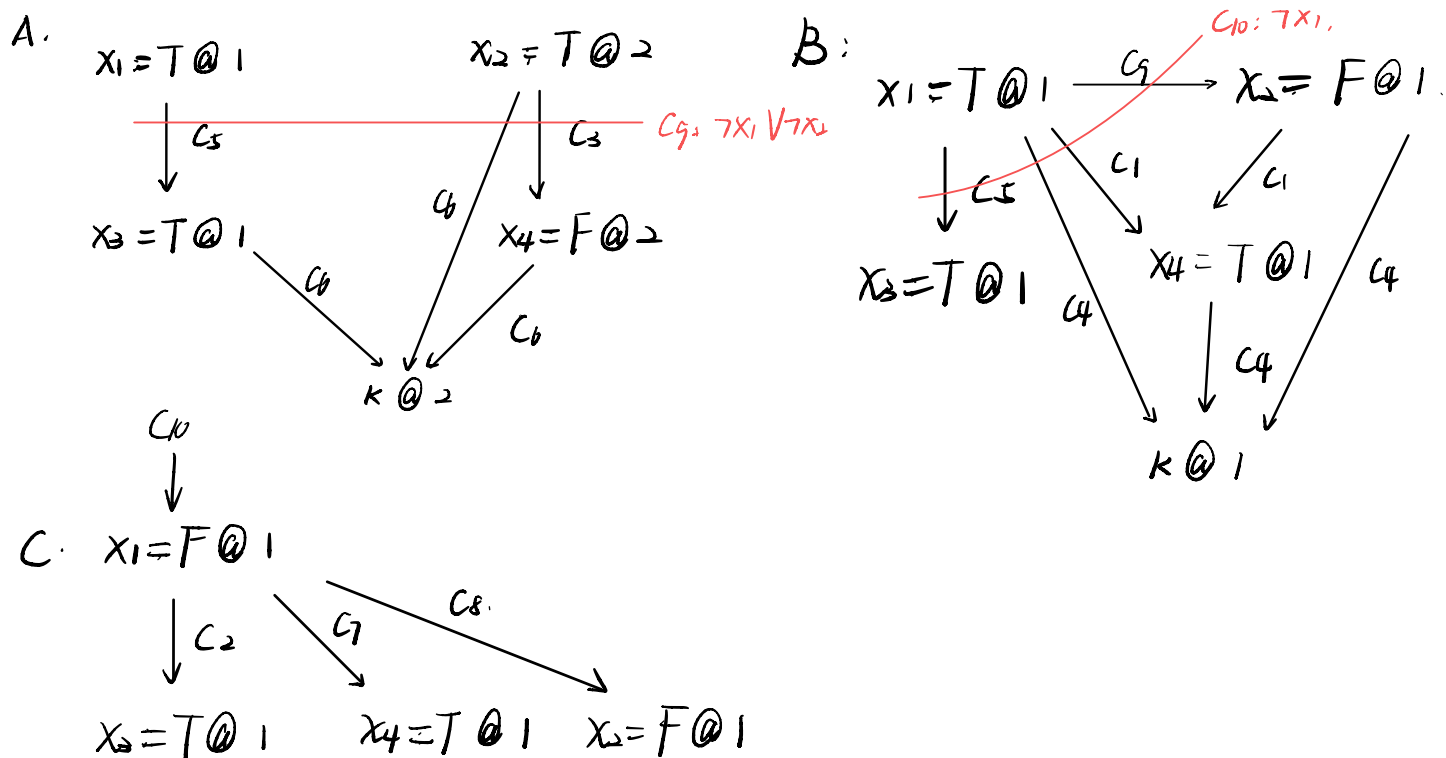
3. SAT 问题 : CDCL (50 分)

考虑如下 CNF :

- $c_1 : (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$
- $c_2 : (x_1 \vee x_3)$
- $c_3 : (\neg x_4 \vee \neg x_2)$
- $c_4 : (\neg x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2)$
- $c_5 : (x_3 \vee \neg x_1)$
- $c_6 : (\neg x_3 \vee \neg x_2 \vee x_4)$
- $c_7 : (x_1 \vee x_4)$
- $c_8 : (\neg x_2 \vee x_1)$

使用 CDCL 算法, 并画出隐含图 (implication graph), 当有矛盾 (conflict) 的时候, 必须形成再回溯后可以 BCP 的子句。学到的新子句以 $c_9, c_{10} \dots$ 命名。新子句必须不能和已有的重复。当有回溯的时候需要附上新的隐含图。并给出最后使 CNF 满足的变量赋值。

注意: 深搜时必须以 $x_1, x_2 \dots$ 的顺序考虑变量, 每个变量的取值必须先 True 后 False。



找到了使 CNF 满足的变量赋值 $x_1 = x_2 = F$
 $x_3 = x_4 = T$.