第一次作业

5(2) 解: $f(x)=x^4-4x^3+1$

$g(x)=x^3-3x^2+1$

$f(x)=g(x)(x-1)+(-3x^2-x+2)$

令 $r(x)=-3x^2-x+2$

$g(x)=r(x)(-\frac{1}{3}x+\frac{10}{9})+(\frac{16}{9}x-\frac{11}{9})$

令 $r_1(x)=\frac{16}{9}x-\frac{11}{9}$

$r(x)=r_1(x)(-\frac{27}{16}x-\frac{441}{256})-\frac{27}{256}$

令 $r_2(x)=-\frac{27}{256}$

$r_1(x)=r_2(x)(-\frac{256\times16}{27\times9}x+\frac{256\times11}{27\times9})$

故 $(f(x),g(x))=1$.

6.(1) 解: $f(x)=g(x)+(x^3-2x)$

令 $r(x)=x^3-2x$

$g(x)=r(x)(x+1)+(x^2-2)$

令 $r_1(x)=x^2-2$

$r(x)=r_1(x)\cdot x$

$\Rightarrow (f(x),g(x))=x^2-2$.

$x^2-2=g(x)-(x^3-2x)(x+1)$

$=g(x)-(f(x)-g(x))(x+1)$

$=g(x)-(x+1)f(x)+(x+1)g(x)$

$=(x+2)g(x)-(x+1)f(x)$

$\Rightarrow u(x)=-x-1$

$v(x)=x+2$.

19. 解:

$$
\begin{array}{r}
Ax^2+2Ax+(B+3A) \\
x^2-2x+1\ \overline{)\ Ax^4+Bx^2+1} \\
Ax^4-2Ax^3+Ax^2 \\
\hline
(B-A)x^2+2Ax^3+1 \\
-4Ax^2+2Ax^3+2Ax \\
\hline
(B+3A)x^2-2Ax+1 \\
(B+3A)x^2-2(B+3A)x+B+3A \\
\hline
(-2A+2B+6A)x+1-B-3A
\end{array}
$$

$\Rightarrow \begin{cases}4A+2B=0\\ 3A+B=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}A=1\\ B=-2.\end{cases}$

26. 解. 单位根 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$

$\overline{\varepsilon_k}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$

$=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{-2k\pi}{n}$

$\varepsilon_{n-k}=\cos\frac{2n\pi-2k\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}$

$=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{-2k\pi}{n}$.

$\overline{\varepsilon_k}=\varepsilon_{n-k}$.

x^n-1 在 $\mathbb{C}$ 内有 n 个根 ε_k $(k=0,1,\cdots,n-1)$

故 $x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k)$

当 $x\in\mathbb{R}$ 时, 由 $\varepsilon_k+\overline{\varepsilon_k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$ 和 $\overline{\varepsilon_k}=\varepsilon_{n-k}$ 得:

$\varepsilon_k\cdot\overline{\varepsilon_k}=1$

当 n 为奇数时, $x^n-1=(x-1)[x^2-(\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon_2+\varepsilon_{n-2})x+1]\cdots$

$[x^2-(\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon_{\frac{n+1}{2}})x+1]$

$=(x-1)[x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1]\cdots[x^2-2\cos\frac{n-1}{n}\pi\cdot x+1]$

当 n 为偶数时, $x^n-1=(x-1)(x+1)[x^2-(\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1})x+1]\cdots[x^2-(\varepsilon_{\frac{n-2}{2}}+\varepsilon_{\frac{n+2}{2}})x+1]$

$=(x-1)(x+1)[x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}\cdot x+1]\cdots[x^2-2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\cdot x+1]$