算法分析与设计
研讨型小班
期中试卷讲评

教师：李文新
助教：林　舒

2016 年 4 月 15 日
文史 204

小班整体情况

平均值 89

中位数 92

最高分 99

小班各题情况

一、函数的阶 平均 13.5，得分率 90.2%

二、递推方程 平均 9.4，得分率 93.8%

三、伪码分析 平均 14.1，得分率 93.8%

四、分治策略 平均 12.5，得分率 83.6%

五、贪心算法 平均 14.5，得分率 96.4%

六、动态规划 平均 12.3，得分率 82.0%

七、回溯算法 平均 12.7，得分率 84.6%

一（15 分）

在下表中填入“是”或者“否”，其中 $k > 0$ 和 $c > 1$ 是常数。

$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$	$f(n) = \Theta(g(n))$
n^k	c^n			
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$			
2^n	$2^{n/2}$			
$n^{\log c}$	$c^{\log n}$			
$\log(n!)$	$\log(n^n)$			

$f(n)$	$g(n)$	$f(n)=O(g(n))$	$f(n)=o(g(n))$	$f(n)=\Theta(g(n))$
n^k	c^n	是	是	否
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	否	否	否
2^n	$2^{n/2}$	否	否	否
$n^{\log c}$	$c^{\log n}$	是	否	是
$\log(n!)$	$\log(n^n)$	是	否	是

二（10 分）

求解递推方程。要求给出求解过程或依据。

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$
$$T(1) = 1$$

使用主定理

$a = 2, b = 4, f(n) = \sqrt{n}$

$\because f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$\therefore T(n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$

三（15 分）

下面是算法 Determine 的伪码，输入 S 是 n 个不等的递增排好序的正整数的数组，a 是一个给定的正整数。请说明该算法的输出是什么？该算法在最坏情况下做多少次比较运算？

Determine(S, a)

```
1  i ← n
2  y ← S[i]
3  while i ≥ 2
4        do x ← a − y
5           在 S[1..i − 1] 中二分检索 x
6           if 存在 x
7              then return x, y
8              else  i ← i − 1; goto 2
9  return "NO"
```

由作业 2.7 改编

算法输出：S 中满足 $x + y = a$ 的两个不同数 x, y，若不存在输出 “NO”

最坏情况下比较次数 $T(n) = \Theta(n \log n)$

$$T(n) = \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots + \log 1$$

$$\begin{aligned} T(n) &< \log(n-1) + \log(n-1) + \cdots + \log(n-1) \\ &= (n-1)\log(n-1) = \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &> \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots + \log(\lceil n/2 \rceil) \\ &> \log(n/2) + \log(n/2) + \cdots + \log(n/2) \\ &= \lfloor n/2 \rfloor \log(n/2) = \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

四（15 分）

设 S 是 n 个不等的正整数构成的数组，n 是奇数，k 是偶数，且 $2 \le k \le (n-1)/2$。设计一个算法从 S 中删除最接近中位数的 k 个数（不包括中位数）。

位置最接近

1. 用 Select 算法找出 S 的中位数 m，第 $\frac{n+1-k}{2}$ 小的 x 和第 $\frac{n+1+k}{2}$ 小的 y
2. 删除所有大于等于 x 且小于等于 y 的非 m 的数

时间复杂度 $O(n)$

数值最接近

1. 用 Select 算法找出 S 的中位数 m
2. 计算其他每个数与 m 的差的绝对值，并用 Select 算法在这些绝对值中找出第 k 小的数 d
3. 将 S 中除 m 外所有与 m 的差的绝对值小于 d 的数删除
4. 在 S 中删除一个与 m 的差的绝对值等于 d 的数

时间复杂度 $O(n)$

五（15 分）

考虑 0-1 背包问题。设背包重量限制为 b，物品标号为 $1, 2, \cdots, n$。物品 i 的重量和价值分别为 w_i，v_i，$i = 1, 2, \cdots, n$。假设 b，w_i，v_i 都是正整数，且满足

$$v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n，\quad w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_n$$

设计一个算法求解上述 0-1 背包问题。

贪心：将物品按标号顺序依次装入，直至无法装入

- 交换论证
- 按算法步骤归纳
- 按问题规模归纳（类似教材例 4.2）

六（15 分）

设一条街道上有 m 家店面，计划开设 n 种类型的商铺，已知第 i 种商铺开设 k（$k \geq 0$）家店面的总收益为 $f(i,k)$（$f(i,k) > 0$），$f(i,k)$ 是关于 k 的非降函数。问如何规划使最终收益最大化？

1) 设 x_i 表示第 i 种商铺的个数，$i = 1, \cdots, n$，用组合最优化对该问题建模，给出目标函数和约束条件；
2) 设计算法求解上述问题。

动态规划（教材例 3.4 投资问题）

1) 目标函数

$$\max \sum_{i=1}^{n} f(i, x_i)$$

约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$$

2) $F(i,k)$：前 i 种商铺共开设 k 家店面的最大收益

$$F(i,k) = \max_{0 \leq j \leq k} \{F(i-1, k-j) + f(i,j)\} \quad 2 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq m$$

$$F(1,k) = f(1,k) \qquad 0 \leq k \leq m$$

标记函数记录 $F(i,k)$ 取最大时的 j
时间复杂度 $O(nm^2)$

七（15 分）

给定某只股票连续 m 天的收盘价 $p_1, p_2, \cdots, p_m$（假设任意两天的收盘价均不相同），对于给定的 n（$n < m$），给出算法找到所有 n 天收盘价严格上升的收盘价序列

$$p_{x_1}, p_{x_2}, \cdots, p_{x_n}$$

使得

$$p_{x_1} < p_{x_2} < \cdots < p_{x_n} \text{ and } 1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq m$$

回溯法
解向量：$\langle y_1, y_2, \cdots, y_m \rangle$，$y_i = 0, 1$ 表示是否选择第 i 天
搜索树：子集树
搜索策略：深度优先
约束条件：（假设当前考虑第 k 天）若 $y_k = 1$，收盘价需大于上一次选择天数的收盘价，且

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \leq n$$

时间复杂度 $O(2^m)$ 或 $O(C_m^n)$

优化 *
代价函数 $g(k)$：从第 k 天开始的最长上升序列长度
可用动态规划预先求出