

## 2022 年算法设计与分析期中考试试卷

答题要求：解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树、约束条件、优化算法等；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。

一、（10 分）求解递推方程，要求给出求解过程。

$$(1) \quad T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n, \quad T(1) = 1$$

$$(2) \quad T(n) = T(n-1) + \log 3^n, \quad T(1) = 1$$

二、（10 分）逆序对计数

给定 1 到  $n$  的一个任意排列  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 请设计一个算法计数排列中逆序对的个数。逆序对的定义是:  $x_i > x_j$  并且  $i < j$ 。

三、（10 分）找坏硬币

在  $n$  枚硬币中有一枚重量过轻的硬币，其余  $n-1$  枚硬币重量相同。有一个天平可以用来称重，天平没有砝码，但天平两侧称重的硬币数没有限制。请设计一个算法，用较少的称重次数找出这枚过轻的硬币。

四、（10 分）最低收益最大化

某著名企业有一笔 100 亿的闲置资金，为了保值增值，需要通过投资 3 种基金进行组合投资。咨询机构为其预测了如下表所示的 4 种可能的年收益率（%）。

基金	可能性			
	1	2	3	4
1	$a_{11} = 6$	$a_{21} = 9$	$a_{31} = 30$	$a_{41} = -12$
2	$a_{12} = 10$	$a_{22} = 3$	$a_{32} = -2$	$a_{42} = 6$
3	$a_{13} = 27$	$a_{23} = 13$	$a_{33} = 6$	$a_{43} = -7$

企业需要按保守策略进行投资，要求可能的最低收益率最大。请问该如何确定 3 种基金的投资比例？试建立该问题的数学模型。

五、（15 分）最小生成树的唯一性

如果一个无向带权连通图  $G = (V, E, W)$ ，任意两个不同的边的权值均不同，即

$$\forall e_i, e_j \in E, e_i \neq e_j \Leftrightarrow W(e_i) \neq W(e_j),$$

则  $G$  的最小生成树是唯一的（即无论是用 Prim 算法还是 Kruskal 算法，计算的结果都是一样的）。试证明上述结论。

## 六、（15 分）树的完美匹配

$2n$ 个顶点的无向图的完美匹配是大小为 $n$ 的匹配（图的若干条没有公共顶点的边组成图的一个匹配；完美匹配是图的一个匹配，且图的每个顶点恰好在匹配中的一条边上）。请给出多项式时间算法，输入 $2n$ 个顶点的树，输出树中的完美匹配或者判断完美匹配不存在。并证明算法的正确性。

## 七、（30 分）广播协议

我们设计了一个用于超算中心数据广播的通讯协议，协议将所有 $n$ 个超算结点组织成一个树形网络。设根结点有 1GB 的数据需要广播给所有其他结点，树中的每个结点每次只能向其一个直接子结点发送数据，发送 1GB 数据需要用时 1 秒，发送完毕后才能向下一个子结点发送数据。每个结点在收到完整的广播数据后，才能开始向其子结点转发数据。

（1）（20 分）在给定的树形网络上，从根节点向其第一个子结点发送数据开始，每个结点按怎样的顺序向其子结点转发数据，才能让广播过程的总时间（从开始到最后一个结点收到完整广播数据的时间）最短？请尝试用动态规划方法求解该问题，说明算法的正确性，并分析算法的时间复杂度。（提示：在如图所示的树形网络中根节点为 A，其广播过程的总时间最少为 3 秒。）

（2）（10 分）假设 $n = 8$ ，请问如何组织树形网络才能让广播时间最短？画出其树形网络图来说明。

