排序算法时间复杂度分析

- 冒泡排序
- 堆排序
- 排序算法的复杂度下界

冒泡排序

输入： $L, n \geq 1.$

输出: 按非递减顺序排序的 L.

算法 bubbleSort

$FLAG \leftarrow n$ //标记被交换的最后元素位置

while $FLAG > 1$ do

  $k \leftarrow FLAG - 1$

  $FLAG \leftarrow 1$

  for $j=1$ to k do

    if $L(j) > L(j+1)$ then do

      $L(j) \leftrightarrow L(j+1)$

      $FLAG \leftarrow j$

实例

5 3 2 6 9 1 4 8 7

3 2 5 6 1 4 8 7 9

2 3 5 1 4 6 7 8 9

2 3 1 4 5 6 7 8 9

2 1 3 4 5 6 7 8 9

1 2 3 4 5 6 7 8 9

特点：交换发生在相邻元素之间

置换与逆序

- 逆序　令$L=\{1,2,...,n\}$, 排序的任何输入为L上的置换. 在置换$a_1\ a_2...a_n$中若$i<j$ 但$a_i>a_j$, 则称 (a_i,a_j) 为该置换的一个逆序
- 逆序序列　在 i 右边，并且小于i 的元素个数记作b_i，$i=1, 2, \ldots, n$. $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 称为置换的逆序序列

- 性质　$b_1=0$;　$b_2=0,1$;　… ;　$b_n= 0,1, \ldots, n-1$
- 总共$n!$个不同的逆序序列，置换与逆序序列一一对应
- 逆序数：置换中的逆序总数

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

实例

置换	3 1 6 5 8 7 2 4
逆序序列为	(0, 0, 2, 0, 2, 3, 2, 3)
逆序数	12

冒泡排序算法复杂度分析

- 最坏情况分析：$W(n)=O(n^2)$，至多巡回$O(n)$次，每次$O(n)$.
- 对换只发生在相邻元素之间，每次相邻元素交换只消除1个逆序，比较次数不少于逆序数，最大逆序数 $n(n-1)/2$，于是$W(n)=\Theta(n^2)$.
- 平均情况：设各种输入是等可能的，置换α 的逆序序列是 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, 置换α′ 的逆序序列为 $(0-b_1, 1-b_2, \ldots, n-1-b_n)$， α 与α′ 的逆序数之和为 $n(n-1)/2$. $n!$个置换分成 $n!/2$个组，每组逆序之和为 $n(n-1)/2$.

  平均逆序数 $n(n-1)/4$，平均的交换次数为 $n(n-1)/4$.
- 冒泡排序的最坏和平均复杂性均为$\Theta(n^2)$

堆的定义

设 T 是一棵深度为 d 的二叉树，结点为L中的元素.
若满足以下条件，称作堆.

(1) 所有内结点（可能一点除外）的度数为 2

(2) 所有树叶至多在相邻的两层

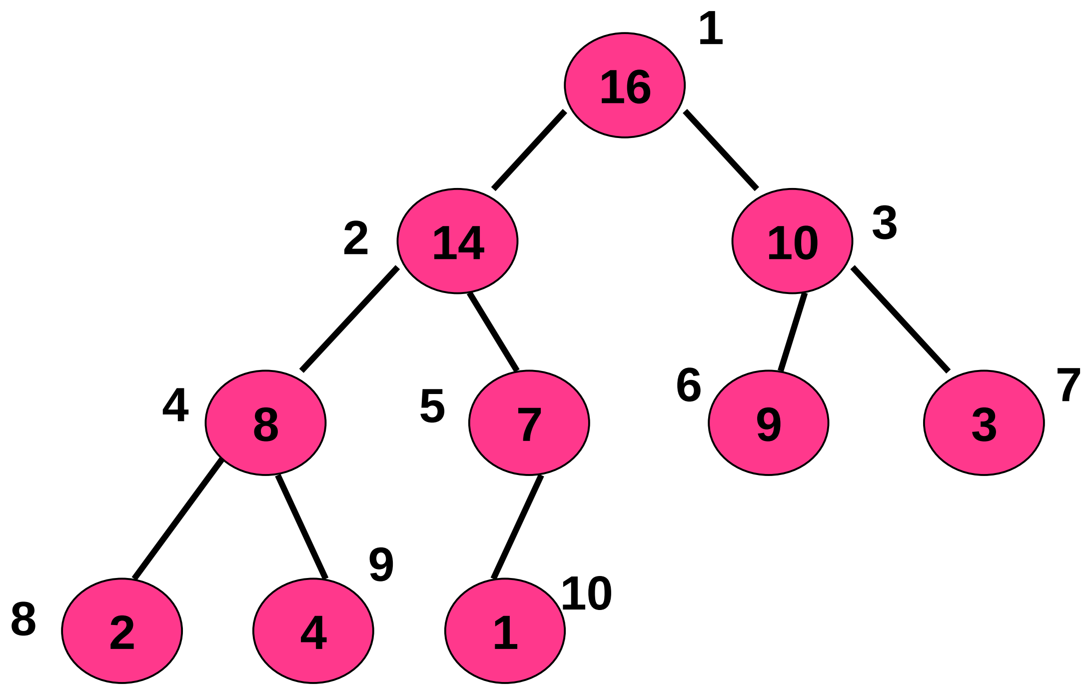
(3) $d-1$ 层的所有树叶在内结点的右边

(4) $d-1$ 层最右边的内结点可能度数为1（没有右儿子）

(5) 每个结点的元素不小于儿子的元素

若只满足前(4)条，不满足第(5)条，称作堆结构

实例



堆存储在数组*A*

***A*[*i*]：结点 *i* 的元素，例如*A*[2]=14.**

***left*(*i*), *right*(*i*) 分别表示 *i* 的左儿子和右儿子**

堆的运算：整理Heapify

算法 Heapify(A,i)

```
l ← left(i)
r ← right(i)
if  l ≤ heap-size[A] and A[l] > A[i]
    then  largest ← l
    else  largest ← i
if  r ≤ heap-size[A]  and  A[r] > A[largest]
    then  largest ← r
if  largest ≠ i
    then exchange A[i] ↔ A[largest]
         Heapify(A, largest)
```

复杂度分析

每次调用为$O(1)$

子堆大小至多为原来的 2/3

递推不等式

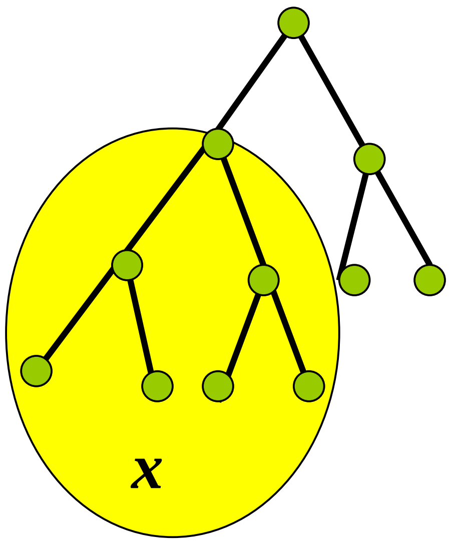
$$T(n) \le T(2n/3) + \Theta(1)$$

解得 $T(n) = \Theta(\log n)$

或者 $T(h) = \Theta(h)$

h为堆的根的高度

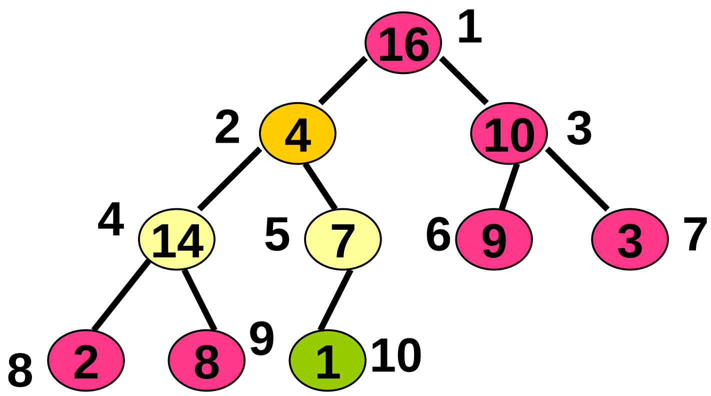
（距树叶最大距离）

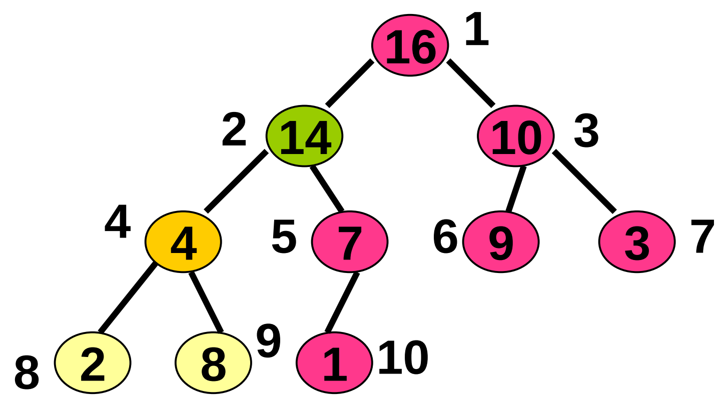


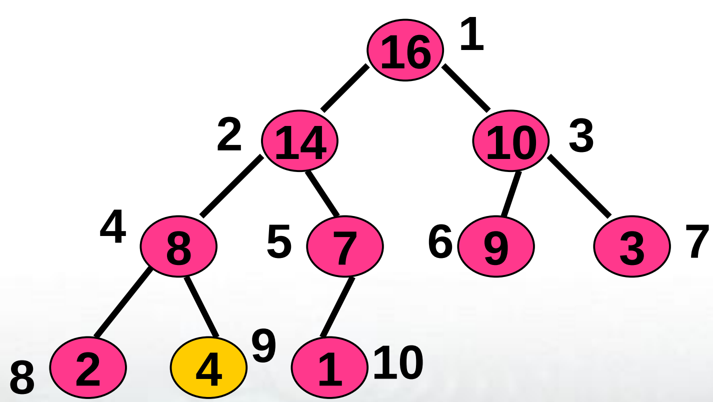
结点总数

$x+(x-1)/2+1=(3x+1)/2$

Heapify 实例







Heapify(*A*,2)

建堆时间复杂度分析

算法 **Build-Heap(A)**

1. $heap\text{-}size[A] \leftarrow length[A]$
2. **for** $i \leftarrow \lfloor length[A]/2 \rfloor$ **downto** 1
3. **do** Heapify(A, i)

- 结点的高度：该结点距树叶的距离
- 结点的深度：该结点距树根的距离

- 思路：**Heapify(i)** 的复杂度依赖于 i 的高度，按照高度计数结点数，乘以$O(h)$, 再求和

$$T(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \text{高为}h\text{的结点数} \times O(h)$$

计数高度为h的结点数

引理

n个元素的堆高度 h 的层至多存在 $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$个结点.

证明思路：对 h 进行归纳.

归纳基础

$h=0$, 命题为真，即证堆中树叶数为 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

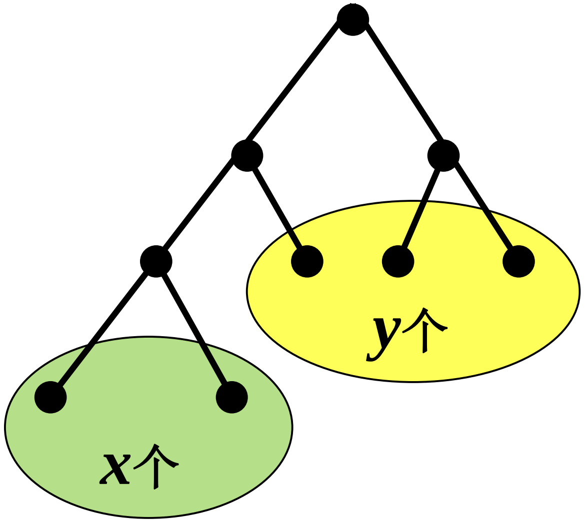
归纳步骤

假设对 h-1为真，证明对 h 也为真.

归纳基础

h=0, 树叶分布在 *d*和*d*-1层，*d*层 (*x*个), *d*-1 层 (*y*个).

Case1: *x*为偶数



$$x + y = x + 2^{d-1} - \frac{x}{2} = 2^{d-1} + \frac{x}{2}$$

$$= \frac{(2^d + x)}{2} = \left\lceil \frac{2^d + x - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

每个内结点有 2 个儿子，树叶数为 x

(*x*为偶数，*d*-1 层以前各层结点总数 2^d-1)

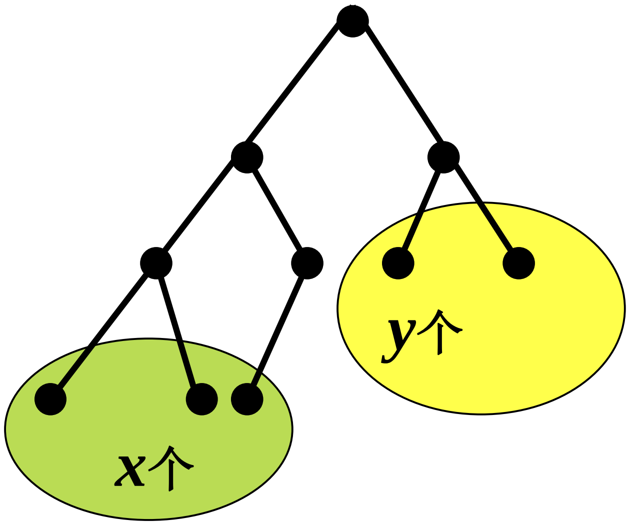
归纳基础（续）

Case2 x为奇数 (x为奇数，n为偶数)

$$x+y=x+2^{d-1}-\frac{x+1}{2}$$

$$=2^{d-1}+\frac{x-1}{2}$$

$$=\frac{2^d+x-1}{2}=\frac{n}{2}=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$$



归纳步骤

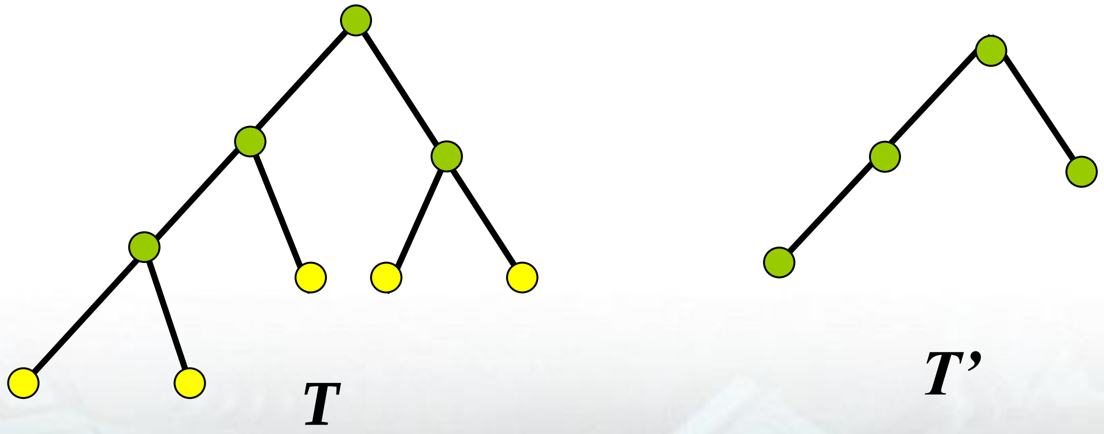
假设命题对于高度 h-1为真，证明对于高度为 h 也为真.

设 T 表示 n 个结点的树，从 T 中移走所有的树叶得到树 T',

T 与T'的关系：

T 为 h 的层恰好是 T' 的高为 h-1 的层.

$n=n'+n_0$　（T' 的结点数为 n', n_0为T的树叶数）



归纳步骤（续）

令 n_h 表示 T 中高为 h 的层的结点数

根据归纳基础，$n_0 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$$n' = n - n_0 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$n_h = n'_{h-1}$$

$$n_h = n'_{h-1} \le \left\lceil \frac{n'}{2^h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{2^h} \right\rceil \le \left\lceil \frac{\frac{n}{2}}{2^h} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$$

时间复杂度分析

定理3 n 个结点的堆算法 Build-Heap 的时间复杂性是 $O(n)$

证明：对高为 h 的结点调用Heapify算法时间是$O(h)$,

根据引理，高为 h 的结点数至多为 $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$, 因此时间复杂度

$$T(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h)$$

$$= O(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^{h+1}}) = O(n)$$

推导

$$T(n)=\sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor}\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h),$$

令$2^{k-1}<n\le 2^k$，于是$k-1\le\lfloor \log n \rfloor\le k$. 若$n=2^k$， 则

$$T(n)=\sum_{h=0}^{k}\left\lceil \frac{2^k}{2^{h+1}} \right\rceil ch=\sum_{h=0}^{k-1}2^{k-h-1}ch+\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil ck$$

$$=2^k\sum_{h=0}^{k-1}\frac{ch}{2^{h+1}}+ck=O(n)\sum_{h=0}^{k-1}\frac{h}{2^{h+1}}+ck=O(n).$$

若$2^{k-1}<n<2^k$， 则

$$T(n)<\sum_{h=0}^{k-1}\left\lceil \frac{2^k}{2^{h+1}} \right\rceil ch=\sum_{h=0}^{k-1}2^{k-h-1}ch=2^k\sum_{h=0}^{k-1}\frac{ch}{2^{h+1}}=O(n)$$

求和

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{h}{2^h}=[0+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots]$$

$$=[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots]+[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots]+[\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots]+\ldots$$

$$=[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots][\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=2$$

堆排序算法

算法 Heap-sort(A)

1. Build-Heap(A)
2. for $i \leftarrow length[A]$ downto 2
3. do *exchange* $A[1] \leftrightarrow A[i]$
4. $heap\text{-}size[A] \leftarrow heap\text{-}size[A]-1$
5. Heapify(A,1)

复杂性：$O(n\log n)$

Build-Heap 时间为 $O(n)$,

从行2-5 调用 Heapify n-1次，每次$O(\log n)$，

时间为$O(n\log n)$

排序问题的决策树

考虑以比较运算作为基本运算的排序算法类，

任取算法 A, 输入 $L=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, 如下定义决策树：

1. A第一次比较的元素为 x_i , x_j，那么树根标记为 i, j
2. 假设结点 k 已经标记为 i, j,

   (1) $x_i < x_j$

   若算法结束，k 的左儿子标记为输入；

   若下一步比较元素 x_p, x_q，那么 k 的左儿子标记为 p,q

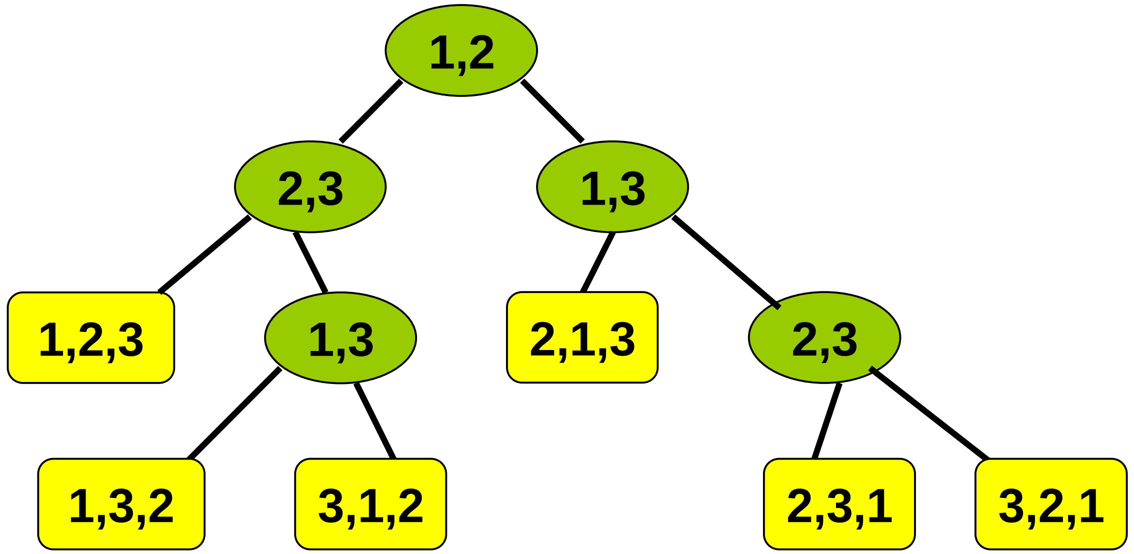
   (2) $x_i > x_j$

   若算法结束，k 的右儿子标记为输入；

   若下一步比较元素 x_p, x_q，那么 k 的右儿子标记为 p,q

一棵冒泡排序的决策树

设输入为 x_1, x_2, x_3， 冒泡排序的决策树如下



任意输入：对应了决策树树中从树根到树叶的一条路径，

算法最坏情况下的比较次数：树深

删除非二叉的内结点，得到二叉树叫做 **B-树**

B-树深度不超过决策树深度，**B-**树有$n!$片树叶

引理

引理1 设 t 为B-树中的树叶数，d 为树深，则 $t \le 2^d$.

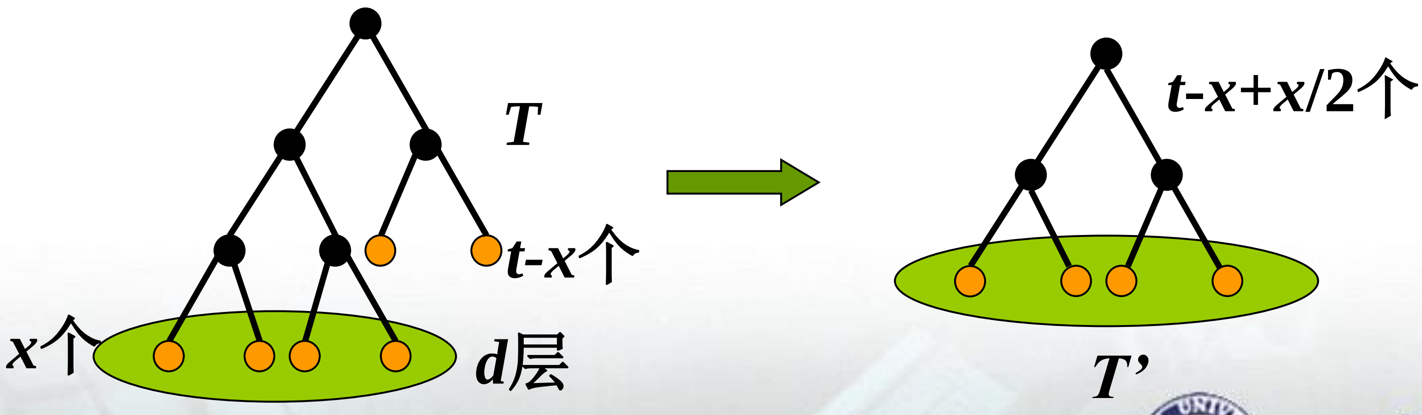
证明 归纳法.

d=0, 树只有1片树叶，深度为0，命题为真.

假设对一切小于d 的深度为真，设 T 是一棵深度为 d 的树，树叶数为 t. 取走 T 的 d 层的 x片树叶，得到树T'. 则 T'的深度为$d-1$，树叶数 t'。那么

$$t' = (t-x) + x/2 = t - x/2, \quad x \le 2^d$$

$$t = t' + x/2 \le 2^{d-1} + 2^{d-1} = 2^d$$



最坏情况复杂度的下界

引理2 对于给定的n，任何通过比较对 n 个元素排序的算法的决策树的深度至少为$\lceil \log n! \rceil$.

证明　决策树的树叶有$n!$个，由引理1得证.

定理4 任何通过比较对 n 个元素排序的算法在最坏情况下的时间复杂性是$\lceil \log n! \rceil$, 近似为 $n \log n - 1.5n$.

证明 最坏情况的比较次数为树深，由引理2树深至少为

$$\log n! = \sum_{j=1}^{n} \log j \ge \int_1^n \log x dx = \log e \int_1^n \ln x dx$$

$$= \log e(n \ln n - n + 1)$$

$$= n \log n - n \log e + \log e$$

$$\approx n \log n - 1.5n$$

结论：堆排序算法在最坏情况阶达到最优.

平均情况分析

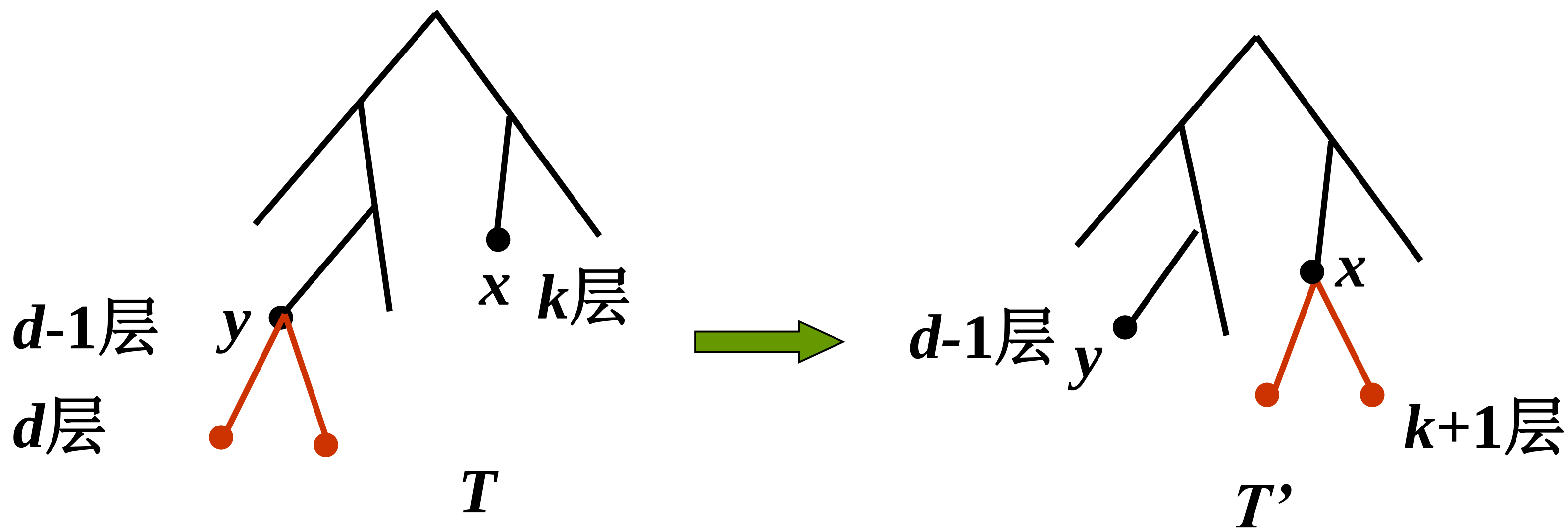
epl(T)：假设所有的输入等概分布，令 epl(T) 表示 B 树中从根到树叶的所有路径长度之和, epl(T)/n! 的最小值对应平均情况复杂性的下界.

思路：分析具有最小 epl(T) 值的树的结构求得这个最小值.

引理3 在具有 t 片树叶的所有 B-树中,树叶分布在两个相邻层上的树的 epl 值最小

证明：反证法.
设树 T 的深度为 d，假设树叶 x 在第 k 层，$k<d-1$. 取 d-1层的某个结点 y，y 有两个儿子是第 d 层的树叶.将y 的两个儿子作为 x 的儿子得到树 T'.

具有最小epl 值的树结构



$$\mathrm{epl}(T) - \mathrm{epl}(T') = (2d+k) - [(d-1)+2(k+1)]$$

$$= 2d+k - d+1-2k-2 = d-k-1 > 0 \qquad (d > k+1)$$

T '的树叶相距层数小于 *T* 的树叶相距的层数，

而 *T* ' 的 epl 值小于 *T* 的 epl 值

epl值的下界

引理4　具有t片树叶且 epl 值最小的 B 树 T 满足

$$\mathrm{epl}(T) = t\lfloor \log t\rfloor + 2(t - 2^{\lfloor \log t\rfloor})$$

证明：由引理1 树 T 的深度 $d \ge \lceil \log t\rceil$,

由引理3 树 T 只有 d 和 d-1层有树叶.

Case1　$t = 2^k$. 必有$d = k$,

$$\mathrm{epl}(T) = t\, d = t\, k = t\lfloor \log t\rfloor$$

epl值的下界（续）

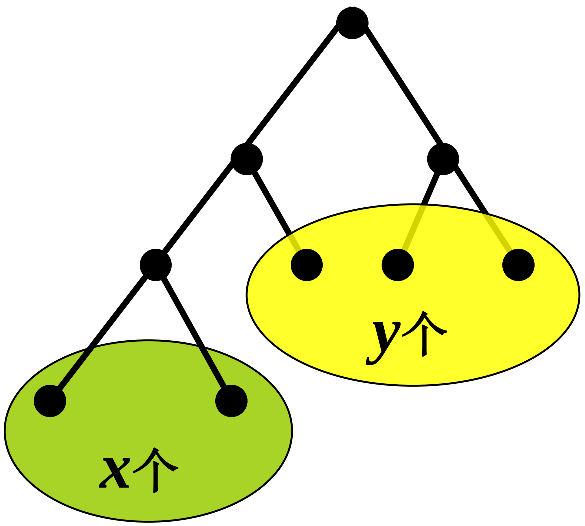
Case2 $t \neq 2^k$.

设 d 层和 $d-1$ 层树叶数分别为 x, y，

$$x + y = t$$

$$x/2 + y = 2^{d-1}$$

解得 $x = 2t - 2^d$, $y = 2^d - t$.



$$\begin{aligned} \text{epl}(T) &= x\,d + y\,(d-1) \\ &= (2t - 2^d)d + (2^d - t)(d-1) \\ &= td - 2^d + t = t(d-1) + 2(t - 2^{d-1}) \\ &= t\lfloor \log t \rfloor + 2(t - 2^{\lfloor \log t \rfloor}) \quad (\lfloor \log t \rfloor = d-1) \end{aligned}$$

平均复杂度的下界

定理4　在输入等概分布下任何通过比较对n个项排序的算法平均比较次数至少为$\lfloor \log n! \rfloor$，近似为 $n\log n - 1.5\, n$.

证明：算法类中任何算法的平均比较次数是该算法决策树T 的 epl(T)/n!，根据引理4

$$
\begin{aligned}
A(n) &\ge \frac{1}{n!}\,\mathrm{epl}(T) \\
&= \frac{1}{n!}\left(n!\lfloor \log n! \rfloor + 2(n! - 2^{\lfloor \log n! \rfloor})\right) \\
&= \lfloor \log n! \rfloor + \varepsilon, \qquad 0 \le \varepsilon < 1 \\
&\approx n \log n - 1.5n
\end{aligned}
$$

$$0 \le n! - 2^{\lfloor \log n! \rfloor} < n! - 2^{\log n! - 1} = n! - \frac{n!}{2} = \frac{n!}{2}$$

结论：堆排序在平均情况下阶达到最优.

几种排序算法的比较

算法	最坏情况	平均情况	占用空间	最优性
冒泡排序	$O(n^2)$	$O(n^2)$	原地	
快速排序	$O(n^2)$	$O(n\log n)$	$O(\log n)$	平均最优
归并排序	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	$O(n)$	最优
堆排序	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	原地	最优