3.3.3 最长公共子序列 LCS

相关概念

X 的子序列 Z ： 设序列 $X, Z,$

$$X =< x_1, x_2, \ldots, x_m >$$

$$Z =< z_1, z_2, \ldots, z_k >$$

若存在 X 的元素构成的严格递增序列 $< x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} >$ 使得 $z_j = x_{i_j}, j = 1,2,\ldots,k,$ 则称 Z 是 X 的子序列

X 与 Y 的公共子序列 Z ： Z 是 X 和 Y 的子序列

子序列的长度：子序列的元素个数

问题描述

给定序列 $X=<x_1, x_2, \cdots, x_m>$，$Y=<y_1, y_2, \cdots, y_n>$

求 X 和 Y 的最长公共子序列

实例

X: A B C B D A B

Y: B D C A B A

最长公共子序列: B C B A

蛮力算法：检查 X 的每个子序列在 Y 中出现

每个子序列 $O(n)$ 时间，X 有 2^m 个子序列，最坏情况下

时间复杂度：$O(n2^m)$

子问题划分及依赖关系

子问题边界： X和Y起始位置为1，X的终止位置是 i，Y的终止位置是j，记作

$$X_i=<x_1,x_2,\ldots,x_i>,\quad Y_j=<y_1,y_2,\ldots,y_j>$$

依赖关系：

$$X=<x_1,x_2,\ldots,x_m>,\ Y=<y_1,y_2,\ldots,y_n>,\ Z=<z_1,z_2,\ldots,z_k>,$$

Z 为 X 和 Y 的 LCS，那么

(1) 若$x_m=y_n \Rightarrow z_k=x_m=y_n$,且$Z_{k-1}$是$X_{m-1}$与$Y_{n-1}$的 LCS;

(2) 若$x_m\neq y_n, z_k\neq x_m \Rightarrow Z$是$X_{m-1}$与$Y$的 LCS;

(3) 若$x_m\neq y_n, z_k\neq y_n \Rightarrow Z$是$X$与$Y_{n-1}$的 LCS.

满足优化原则和子问题重叠性

递推方程、标记函数

令 X 与 Y 的子序列

$$X_i = \langle x_1, x_2, \cdots, x_i \rangle, \quad Y_j = \langle y_1, y_2, \cdots, y_j \rangle$$

$C[i,j]$： X_i 与 Y_j 的 LCS 的长度

递推方程

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{若 } i = 0 \text{或} j = 0 \\ C[i-1, j-1] + 1 & \text{若 } i, j > 0, x_i = y_j \\ \max\{C[i, j-1], C[i-1, j]\} & \text{若 } i, j > 0, x_i \neq y_j \end{cases}$$

标记函数：$B[i, j]$，其值为字符 ↖、←、↑，分别表示$C[i,j]$取得最大值时的三种情况

动态规划算法

算法3.4 LCS(X,Y,m,n)

```
1.  for i←1 to m do          //行1-4边界情况
2.      C[i,0]←0
3.  for i←1 to n do
4.      C[0,i]←0
5.  for i←1 to m do
6.      for j←1 to n do
7.          if X[i]=Y[j]
8.          then C[i,j]←C[i–1,j–1]+1
9.               B[i,j]←'↖'
10.         else if C[i–1,j] ≥ C[i,j–1]
11.              then C[i,j]←C[i–1,j]
12.                   B[i,j]←'↑'
13.              else C[i,j]←C[i,j–1]
14.                   B[i,j]←'←'
```

利用标记函数构造解

算法 Structure Sequence(*B*, *i*, *j*)

输入：*B*[*i*,*j*]

输出：*X*与*Y*的最长公共子序列

1. if *i*=0 or *j*=0 then return //一个序列为空

2. if *B*[*i*,*j*] = “↖”

3. then 输出*X*[*i*]

4. Structure Sequence(*B*, *i*－1, *j*－1)

5. else if *B*[*i*,*j*]=“↑” then Structure Sequence (*B*, *i*－1, *j*)

6. else Structure Sequence (*B*, *i*, *j*－1)

算法的计算复杂度

计算优化函数和标记函数：时间为$O(mn)$

构造解：每一步至少缩小X或Y的长度，时间$\Theta(m+n)$

空间：$\Theta(mn)$

实例

输入：X=<A,B,C,B,D,A,B>, Y=<B,D,C,A,B,A>，

标记函数：

	1	2	3	4	5	6
1	$B[1,1]=\uparrow$	$B[1,2]=\uparrow$	$B[1,3]=\uparrow$	$B[1,4]=\nwarrow$	$B[1,5]=\leftarrow$	$B[1,6]=\nwarrow$
2	$B[2,1]=\nwarrow$	$B[2,2]=\leftarrow$	$B[2,3]=\leftarrow$	$B[2,4]=\uparrow$	$B[2,5]=\nwarrow$	$B[2,6]=\leftarrow$
3	$B[3,1]=\uparrow$	$B[3,2]=\uparrow$	$B[3,3]=\nwarrow$	$B[3,4]=\leftarrow$	$B[3,5]=\uparrow$	$B[3,6]=\uparrow$
4	$B[4,1]=\uparrow$	$B[4,2]=\uparrow$	$B[4,3]=\uparrow$	$B[4,4]=\uparrow$	$B[4,5]=\nwarrow$	$B[4,6]=\leftarrow$
5	$B[5,1]=\uparrow$	$B[5,2]=\uparrow$	$B[5,3]=\uparrow$	$B[5,4]=\uparrow$	$B[5,5]=\uparrow$	$B[5,6]=\uparrow$
6	$B[6,1]=\uparrow$	$B[6,2]=\uparrow$	$B[6,3]=\uparrow$	$B[6,4]=\nwarrow$	$B[6,5]=\uparrow$	$B[6,6]=\nwarrow$
7	$B[7,1]=\uparrow$	$B[7,2]=\uparrow$	$B[7,3]=\uparrow$	$B[7,4]=\uparrow$	$B[7,5]=\uparrow$	$B[7,6]=\uparrow$

解：$X[2],X[3], X[4], X[6]$，即 B, C, B, A

3.3.4 图像压缩

像素点灰度值：0~255，表示为 8 位二进制数

像素点灰度值序列：$< p_1, p_2, \ldots, p_n >$，$p_i$为第 i个像素点灰度值

变位压缩存储格式：将$< p_1, p_2, \ldots, p_n >$分割 m 段 $S_1, S_2, \ldots, S_m$

i 段有$L[i]$个像素，每个像素 $b[i]$位，h_i 为 该段最大像素的位数

$$h_i \le b[i] \le 8, \quad h_i = \left\lceil \log(\max_{p_k \in S_i} p_k + 1) \right\rceil$$

约束条件：每段像素个数 $L[i] \le 256$

段头11位： $b[i]$的二进制表示(3 位) + $L[i]$的二进制表示(8位)

i 段占用空间：$b[i] \times L[i] + 11$

问题：给定像素序列$< p_1, p_2, \ldots, p_n >$，确定最优分段，即

$$\min_T \{ \sum_{i=1}^{j} (b[i] \times L[i] + 11) \}, \quad T = \{S_1, S_2, \ldots, S_j\}$$为分段

实例

灰度值序列 P=<10,12,15,255,1,2,1,1,2,2,1,1>

分法1： S_1=<10,12,15>， S_2=<255>, S_3=<1,2,1,1,2,2,1,1>

分法2： S_1=<10,12,15,255,1,2,1,1,2,2,1,1>

分法3： 分成12组，每组一个数

存储空间

分法1：11×3+4×3+8×1+2×8=69

分法2：11×1+8×12=107

分法3：11×12+4×3+8×1+1×5+2×3=163

结论：分法1是其中最优的分法

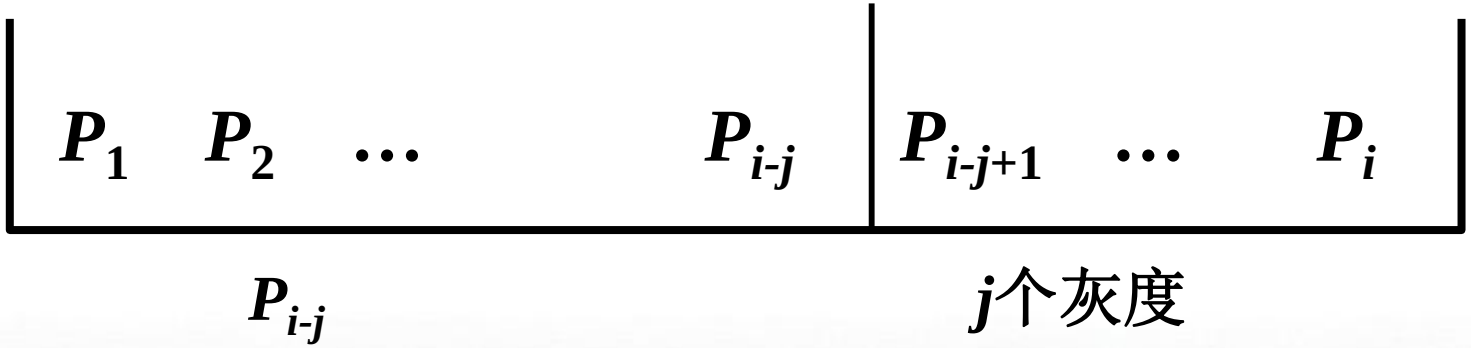
算法设计

递推方程

设$s[i]$是像素序列$<p_1, p_2, \ldots, p_i>$的最优分段所需存储位数

$$s[i] = \min_{1 \le j \le \min\{i,256\}} \{s[i-j] + j \times b[i-j+1, i] + 11\}$$

$$b[i-j+1, i] = \left\lceil \log(\max_{p_k \in S_m} p_k + 1) \right\rceil \le 8$$



算法

```
Compress (P,n)                    //计算最小位数S[n]
1. Lmax←256; header←11; S[0]←0    //最大段长Lmax, 头header
2. for i←1 to n do
3.     b[i]←length(P[i])          //b[i]是第i个灰度P[i]的二进制位数
4.     bmax←b[i]                  //3-6行分法的最后一段只有P[i]自己
5.     S[i]←S[i–1]+bmax
6.     l[i]←1
7.     for j←2 to min{i,Lmax} do  //最后段含 j 个像素
8.         if bmax<b[i–j+1]       //统一段内表示像素的二进制位数
9.         then bmax←b[i–j+1]
10.        if S[i]>S[i–j]+j*bmax
11.        then S[i]←S[i–j]+j*bmax
12.                l[i]←j
13. S[i]←S[i]+header
```

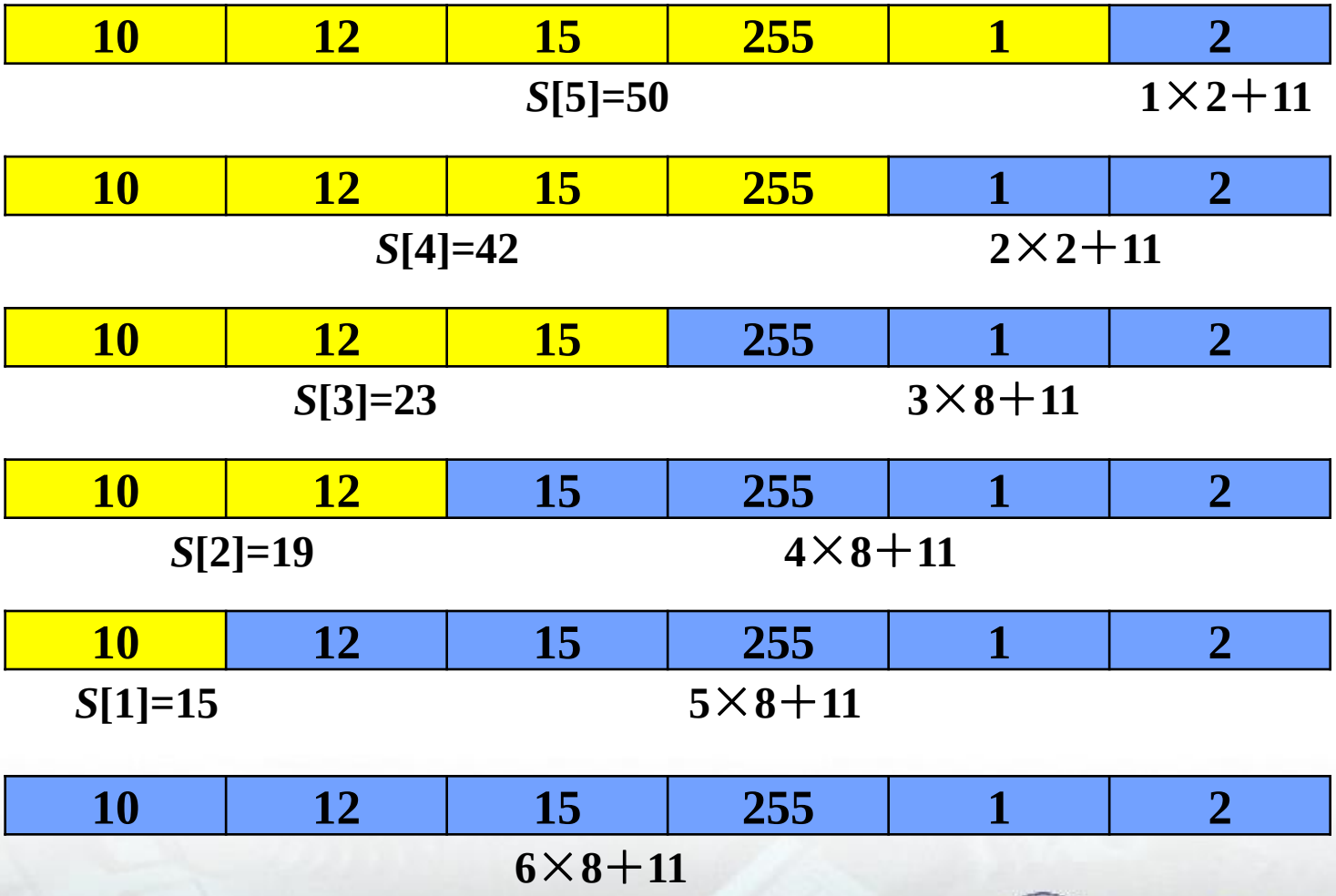
时间复杂度 $T(n)=O(n)$

P = <10, 12, 15, 255, 1, 2>.

$S[1]=15$, $S[2]=19$, $S[3]=23$, $S[4]=42$, $S[5]=50$

$l[1]=1$, $l[2]=2$, $l[3]=3$, $l[4]=1$, $l[5]=2$

实例



北京大学

追踪解

算法 Traceback(*n*,*l*)

输入：数组*l*

输出：数组*C*　　// *C*[*j*]是从后向前追踪的第*j*段的长度

1. *j*←1　　// *j*为正在追踪的段数
2. while *n*≠0 do
3. 　*C*[*j*]←*l*[*n*]
4. 　*n*←*n* −*l*[*n*]
5. 　*j*←*j*+1

时间复杂度：*O*(*n*)

3.3.5 最大子段和

问题：给定n个整数（可以为负数）的序列

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$

求 $\max\{0, \max\limits_{1\le i\le j\le n}\sum\limits_{k=i}^{j} a_k\}$

实例： (-2, 11, -4, 13, -5, -2)

解：最大子段和 $a_2+a_3+a_4= 20$

算法1---顺序求和+比较

算法2---分治策略

算法3---动态规划

算法1 顺序求和+比较

算法 Enumerate

输入：数组$A[1..n]$

输出：*sum, first, last*

```
1.  sum←0
2.  for i←1 to n do          // i为当前和的首位置
3.    for j←i to n do        // j为当前和的末位置
4.      thissum←0            // thissum为A[i]到A[j]之和
5.      for k←i to j do
6.        thissum←thissum+A[k]
7.      if thissum > sum
8.      then sum←thissum
9.           first←i         // 记录最大和的首位置
10.          last←j          // 记录最大和的末位置
```

时间复杂度：$O(n^3)$

算法2 分治策略

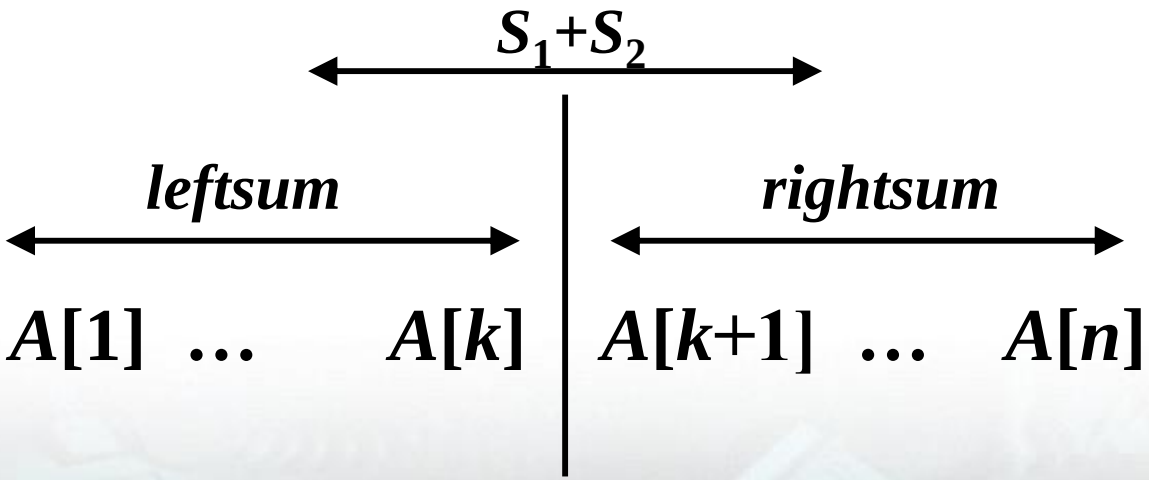
将序列分成左右两半，中间分点*center*

递归计算左段最大子段和 *leftsum*

递归计算右段最大子段和 *rightsum*

$a_{center} \rightarrow a_1$的最大和$S_1$，$a_{center+1} \rightarrow a_n$的最大和$S_2$

max { *leftsum*, *rightsum*, S_1+S_2}



分治算法

算法 MaxSubSum(*A, left, right*）

输入：数组*A*，*left*，*right*分别是*A*的左、右边界
输出：*A*的最大子段和*sum*及其子段的前后边界

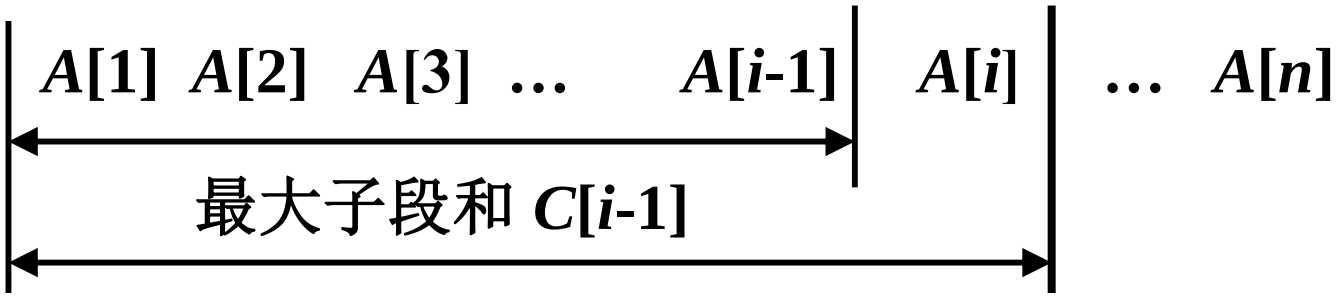
1. if $|A|=1$ then 输出元素值（当值为负时输出0）
2. $center \leftarrow \lfloor (left+right)/2 \rfloor$
3. $leftsum \leftarrow$ MaxSubSum($A, left, center$)　　//子问题A_1
4. $righsum \leftarrow$ MaxSubSum($A, center+1, right$)　//子问题A_2
5. $S_1 \leftarrow$从$A[center]$向左的最大和　//从*center*向左的最大和
6. $S_2 \leftarrow$从$A[center+1]$向右的最大和　//从*center*+1向右的最大和
7. $sum \leftarrow S_1+S_2$
8. if $leftsum > sum$ then $sum \leftarrow leftsum$
9. if $rightsum > sum$ then $sum \leftarrow rightsum$

时间：$T(n)=2T(n/2)+O(n)$, $T(c)=O(1)$
$T(n)=O(n\log n)$

算法3：动态规划

令$C[i]$ 是 $A[1..i]$中必须包含元素$A[i]$的最大子段和

$$C[i]=\max_{1\le k\le i}\{\sum_{j=k}^{i}A[j]\}$$



递推方程：　$C[i]=\max\{C[i-1]+A[i], A[i]\}$　$i=1,\ldots,n$

$C[0]=0$

解：　$\mathrm{OPT}(A)=\max_{0\le i\le n}\{C[i]\}$

算法 MaxSum

算法3.10 MaxSum(*A*, *n*)

输入：数组*A*

输出：最大子段和*sum*, 子段的最后位置*c*

```
1.  sum←0
2.  b←0     // b是前一个最大子段和
3.  for i←1 to n do
4.      if b>0
5.      then b←b+A[i]
6.      else b←A[i]
7.      if b>sum
8.      then sum←b
9.          c←i     // 记录最大和的末项标号
10. return sum，c
```

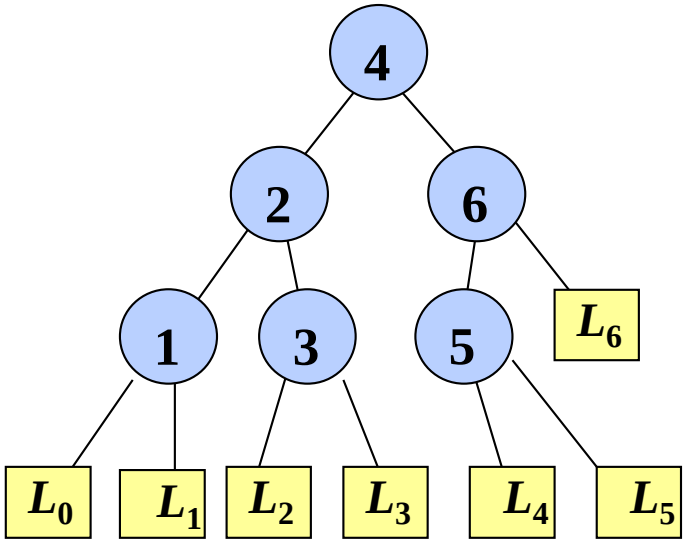
时间复杂度$O(n)$；空间复杂度$O(n)$

3.3.6 最优二叉检索树

设集合 S 为排序的 n 个元素 $x_1<x_2<\ldots<x_n$，将这些元素存储在一棵二叉树的结点上，以查找 x 是否在这些数中. 如果 x 不在，确定 x 在那个空隙.

检索方法：

1. 初始，x与根元素比较；
2. x<根元素，递归进入左子树；
3. x>根元素，递归进入右子树；
4. x=根元素，算法停止，输出x；
5. x到达叶结点，算法停止，输出x不在数组中.



S=< 1, 2, 3, 4, 5, 6>

存取概率不等情况

空隙： $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, +\infty)$,

$x_0 = -\infty$， $x_{n+1} = \infty$

给定序列 $S = <x_1, x_2, \ldots, x_n>$,

x 在 x_i 的概率为b_i， x 在 (x_i, x_{i+1}) 的概率为a_i,

S的存取概率分布如下：

$$P = <a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_n, a_n>$$

实例

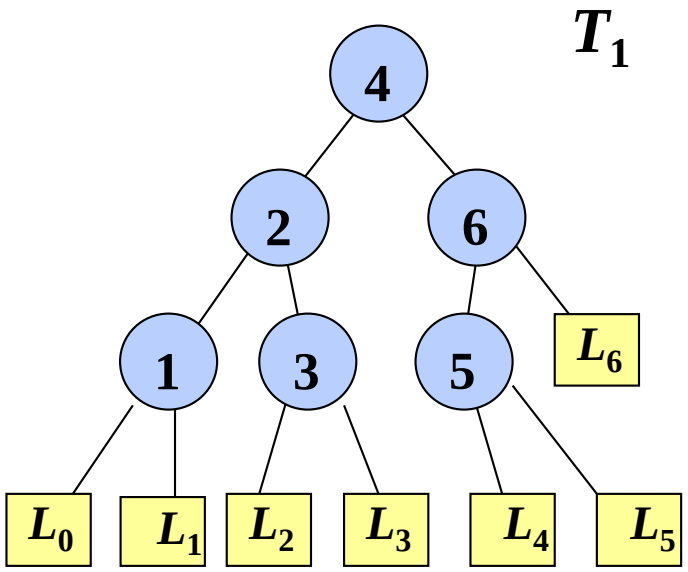
S=<1,2,3,4,5,6>

P=<0.04,0.1,0.01,0.2,0.05,0.2,0.02,0.1,0.02,0.1,0.07, 0.05,0.04>

实例

S = < 1, 2, 3, 4, 5, 6 >

P = < 0.04, 0.1, 0.01, 0.2, 0.05, 0.2,
0.02, 0.1, 0.02, 0.1, 0.07, 0.05,
0.04 >

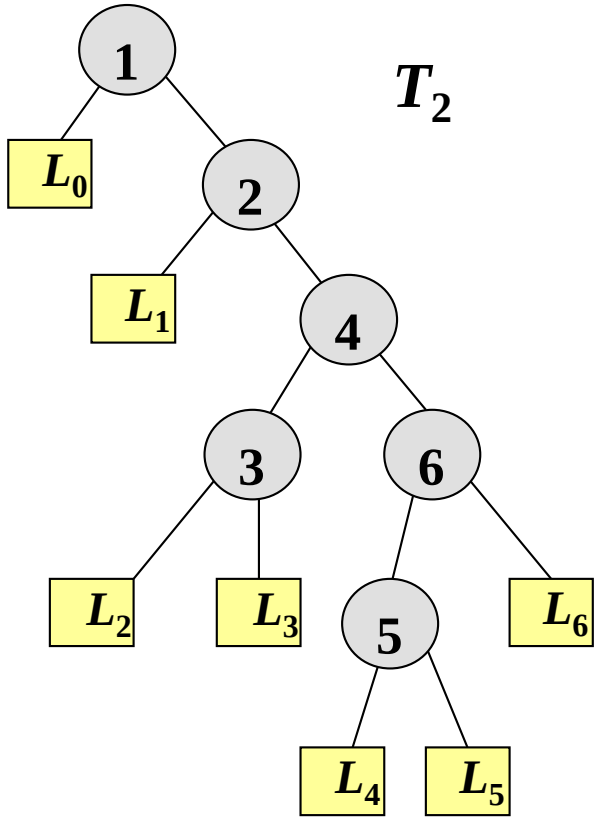


$m(T_1)$=[1*0.1+2*(0.2+0.05)+3*(0.1+0.2+0.1)]
+[3*(0.04+0.01+0.05+0.02+0.02+0.07)+2*0.04]
= 1.8+0.71=2.51

实例

S = < 1, 2, 3, 4, 5, 6 >

P = < 0.04, 0.1, 0.01, 0.2, 0.05, 0.2,
0.02, 0.1, 0.02, 0.1, 0.07, 0.05,
0.04 >



$m(T_2)$ = [1*0.1+2*0.2 + 3*0.1
+ 4*(0.2+0.05) + 5*0.1]
+ [1*0.04 + 2*0.01
+ 4*(0.05 + 0.02 + 0.04)
+ 5*(0.02 + 0.07)]
= 2.3 + 0.95 = 3.25

问题

数据集 $S=<x_1,x_2,\ldots,x_n>$

存取概率分布 $P=<a_0, b_1, a_1, b_2, \ldots, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_n, a_n>$

结点 x_i 在 T 中的深度是 $d(x_i)$, $i=1,2,\ldots,n$,

空隙 L_j 的深度为 $d(L_j)$, $j=0,1,\ldots,n$,

平均比较次数为:

$$t=\sum_{i=1}^{n} b_i(1+d(x_i))+\sum_{j=0}^{n} a_j d(L_j)$$

问题：给定数据集 S 和相关存取概率分布 P，求一棵最优的(即平均比较次数最少的) 二分检索树.

算法设计:子问题划分

$S[i,j] = \langle x_i, x_{i+1}, \dots, x_j \rangle$ 是S 以 i 和 j 作为边界的子数据集

$P[i,j] = \langle a_{i-1}, b_i, a_i, b_{i+1}, \dots, b_j, a_j \rangle$是对应$S[i,j]$存取概率分布

例：$S=\langle A, B, C, D, E \rangle$

$P=\langle 0.04, 0.1, 0.02, 0.3, 0.02, 0.1, 0.05, 0.2, 0.06, 0.1, 0.01 \rangle$

$S[2,4]=\langle B, C, D \rangle$

$P[2,4]=\langle 0.02, 0.3, 0.02, 0.1, 0.05, 0.2, 0.06 \rangle$

子问题划分：以 x_k 作为根，划分成两个子问题：

$S[i,k-1]$, $P[i,k-1]$

$S[k+1,j]$, $P[k+1,j]$

例：以B为根，划分成以下子问题：

$S[1,1]=\langle A \rangle$， $P[1,1]=\langle 0.04, 0.1, 0.02 \rangle$

$S[3,5]=\langle C,D,E \rangle$, $P[3,5]=\langle 0.02, 0.1, 0.05, 0.2, 0.06, 0.1, 0.01 \rangle$

递推方程

设 $m[i,j]$ 是相对于输入 $S[i,j]$ 和 $P[i,j]$ 的最优二叉搜索树的平均比较次数，令

$$w[i,j]=\sum_{p=i-1}^{j}a_p+\sum_{q=i}^{j}b_q$$

是 $P[i,j]$ 中所有概率（包括数据元素与空隙）之和

递推方程：

$$m[i,j]=\min_{i\le k\le j}\{m[i,k-1]+m[k+1,j]+w[i,j]\},\quad 1\le i\le j\le n$$

$$m[i,i-1]=0,\quad i=1,2,\ldots,n$$

证明

$m[i,j]_k$：根为 x_k 时的二分检索树平均比较次数的最小值

$$
\begin{aligned}
& m[i,j]_k \\
&= (m[i,k-1]+w[i,k-1])+(m[k+1,j]+w[k+1,j])+1\times b_k \\
&= (m[i,k-1]+m[k+1,j])+(w[i,k-1]+b_k+w[k+1,j]) \\
&= (m[i,k-1]+m[k+1,j])+(\sum_{p=i-1}^{k-1}a_p+\sum_{q=i}^{k-1}b_q)+b_k+(\sum_{p=k}^{j}a_p+\sum_{q=k+1}^{j}b_q) \\
&= (m[i,k-1]+m[k+1,j])+\sum_{p=i-1}^{j}a_p+\sum_{q=i}^{j}b_q \\
&= m[i,k-1]+m[k+1,j]+w[i,j]
\end{aligned}
$$

平均比较次数：在所有 k 的情况下 $m[i,j]_k$ 的最小值，

$m[i,j]=\min\{m[i,j]_k \mid i\le k\le j\}$

实例

$$m[i,j]=\min_{i\le k\le j}\{m[i,k-1]+m[k+1,j]+w[i,j]\} \quad 1\le i\le j\le n$$

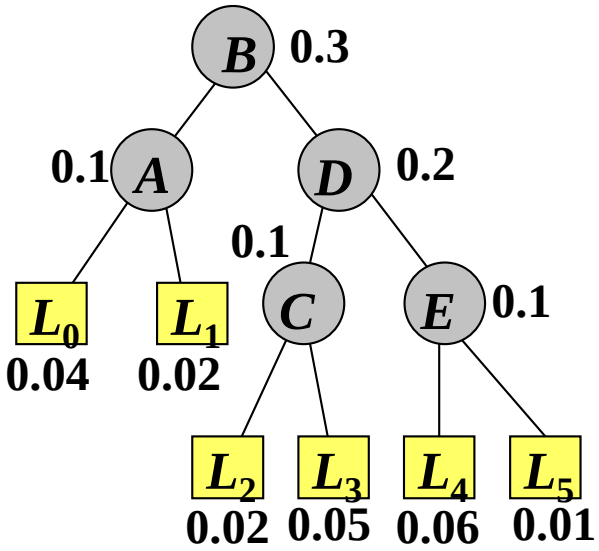
$$m[i,i-1]=0$$

$$m[1,1]=0.16, \quad m[3,5]=0.88$$

$$m[1,5]=1+\min_{k=2,3,4}\{m[1,k-1]+m[k+1,5]\}$$

$$=1+\{m[1,1]+m[3,5]\}$$

$$=1+\{0.16+0.88\}=2.04$$



复杂性估计：

$T(n)=O(n^3)$ $S(n)=O(n^2)$

小结

(1) 引入参数来界定子问题的边界.

(2) 判断该优化问题是否满足优化原则.

(3) 注意子问题的重叠程度.

(4) 给出带边界参数的优化函数定义与优化函数的递推关系
考虑标记函数. 找到递推关系的初值.

(5) 采用自底向上的实现技术，从最小的子问题开始迭代计算，计算中用备忘录保留优化函数和标记函数的值.

(6) 动态规划算法的时间复杂度是对所有子问题(备忘录)的计算工作量求和(可能需要追踪解的工作量)

(7) 动态规划算法一般使用较多的存储空间，这往往成为限制动态规划算法使用的瓶颈因素.