北京大学信息科学技术学院试题

考试科目：算法设计与分析（实验班） 姓名：__________ 学号：__________

考试时间：2022 年 06 月 13 日 任课教师：____________

一．判断题（ 正确打✓，错误打× ）（每小题 2 分，共 10 分）

1. 给定无向图$G=(V,E)$，该图的最大匹配问题是多项式时间可解的。 [ ]

2. 0-1 背包问题可以用动态规划方法求解，因此应该不属于 NPC 类问题。 [ ]

3. 随机快速排序算法是蒙特卡洛（Monto-Carlo）型随机算法。 [ ]

4. 已知递推公式$T(n)=T(\sqrt{n})+1$，则$T(n)=\Theta(\log\log n)$ [ ]

5. $\log(n!)=\Theta(n\log(n))$ [ ]

二．不定项选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1. 对同时支持插入和删除操作的动态表，满时扩张一倍，小于 1/4 时收缩一半，令 $num[T]$ 表示表中元素数量，$size[T]$占用存储空间大小，则用势能法分析动态表的平摊代价时，其势函数应定义为： [ ]
   - A. $\Phi(T) = 2num[T] - size[T]$
   - B. $\Phi(T) = size[T]/2-num[T]$
   - C. $\Phi(T) = max(2num[T] - size[T], size[T]/2-num[T])$
   - D. $\Phi(T) = min(2num[T] - size[T], size[T]/2-num[T])$
2. 关于问题复杂度下界，以下描述正确的是（以比较作为基本运算） [ ]
   - A. 元素唯一性问题的复杂度为 $\Omega(n\log n)$
   - B. 计算平面直角坐标系中n个点的最邻近点对问题的复杂度是 $\Omega(n^2)$
   - C. n个元素中同时找最大和最小元素至少比较 $4n$次
   - D. n个元素中找中位数至少比较$n\log n$次
3. 关于 NPC 问题描述正确的是 [ ]
   - A. NPC 问题是优化问题
   - B. 如果存在 NPC 问题属于 P，则 P=NP
   - C. NP 难的问题一定是 NPC 问题
   - D. SAT 是 NPC 问题
4. 存在常数近似比近似算法的问题是 [ ]
   - A. 顶点覆盖问题
   - B. 货郎问题
   - C. 0-1 背包问题
   - D. 多机调度问题
5. 以下哪些算法属于随机算法？ [ ]
   - A. Dijkstra 算法
   - B. Prim 算法
   - C. Miller-Rabin 算法
   - D. Ford-Fulkerson 算法

三．线性规划（5 分）

在线性拟合中，线性模型$y = ax + b$的待拟合参数是a和b。现有一次实验得到n对数据(x_i, y_i)，$1 \le i \le n$。求参数a和b，使得$|ax_i + b - y_i|$（$1 \le i \le n$）的最大值最小。写出这个问题的线性规划模型。

四．网络流（15 分）

商品供应问题。有N个商店、M个供货商、K种商品。每个季度，第 n 个商店对第 k 种商品需求量共$C(n,k)$份，第 m 个供货商对第 k 种商品的最大供货量$S(m,k)$份，第n个商店从第 m 个供货商进第 k 种商品的费用是每份$D(m,n,k)$元。列出满足每个商店对每种商品需求的最小费用的网络流模型（模型能给出原问题最优解或者判断不存在可行解）；对于该模型，分析用最短路径求解最小费用流算法的时间复杂度的一个上界。

五．NP 完全与 NP 难（15 分）

由于疫情原因，小明所在校区被管控，所以小明每天都只能在校园里活动。按照要求，小明每天都要去学校门口做核酸检测。为了尽可能利用做核酸的机会多活动，小明想设计一条从小明所住的宿舍楼到核酸检测点的路线，使得路线的长度最长，并且不要走重复的地方。假定学校里的地图可以假设为一张无向简单图 G，边的权重代表长度，小明的宿舍楼和核酸检测点是其中的两个顶点。请问这个问题是否是 NP 难问题？并给出证明。

（提示：证明中可以使用的NPC问题是：顶点覆盖(VC)、哈密尔顿回路(HC)、团、SAT、多机调度）

六．近似算法（10 分）

最小顶点覆盖问题：给定图$G = (V,E)$，G 的顶点覆盖是顶点子集 $S \subseteq V$,使得每条边至少有一个端点属于S。求G的最小的顶点覆盖。

令 $V = \{1, 2, \dots, n\}$，$\forall e \in E$，存在 $i, j \in V$，使得$e = (i,j)$；$\forall i \in V$，定义变量 $x_i \in \{0,1\}$，且 $x_i = 1 \Leftrightarrow i \in S$。那么顶点覆盖问题其实可以转化为（如右图所示的）整数规划问题。

$$
\begin{array}{lll}
 & \min \sum_{i \in V} x_i & \\
s.t. & x_i + x_j \ge 1 & \forall e = (i,j) \in E \\
 & x_i \in \{0,1\} & \forall i \in V
\end{array}
$$

这个整数规划问题属于 NP 难问题。现在用线性规划来设计近似算法，思路如下：

1. 放松顶点$x_i = 0,1$ 的约束条件，令 x_i 为$[0,1]$区间任意实数，转化为线性规划问题。
2. 用线性规划算法找到一组 $x_i \in [0,1]$，$i = 1,2, \dots, n$，使得其和达到最小。
3. 令 $S = \{ i \mid x_i \ge 1/2\}$。

请证明上述近似算法的近似比为 2。

七．随机算法（15 分）

给出中位数问题的随机算法，并分析期望运行时间。根据课程讲解中对随机算法的分类，该算法属于什么类型的随机算法？

八．算法设计（15 分）

给定长度为n的序列$S = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，序列元素均为正整数。你可以删除序列的某些元素，剩下的未删除元素，按原序列的相对顺序组成新序列。

求删除的元素下标集合，形成最终序列$S' = (a'_1, a'_2, \cdots, a'_m)$，使尽可能多的$a'_i = i$。例如原序列$S = (7,2,5,11,3)$，删除下标$\{3,4\}$的元素后（即删除$a_3 = 5$ 和$a_4 = 11$），形成新序列$S' = (7,2,3)$，由于$a'_2 = 2$ 和$a'_3 = 3$，新序列满足$a'_i = i$的数目为 2。（提示：可考虑分析序列中$i - a_i$值的含义和关系。）