

# 北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目：算法设计与分析（实验班）姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_

考试时间：2020 年 6 月 8 日 小班教师：\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
阅卷人										

## 北京大学考场纪律

1、考生要按规定的考试时间提前 5 分钟进入考场，隔位就坐或按照监考人员的安排就座，将学生证放在桌面。无学生证者不能参加考试；迟到超过 15 分钟不得入场；与考试无关人员不得进入考场。考生在考试开始 30 分钟后方可交卷出场；未交卷擅自离开考场，不得重新进入考场继续答卷；交卷后应离开考场，不得在考场内逗留或在考场附近高声交谈。

2、除非开卷考试中教师另有说明，除必要的文具和主考教师允许的工具书、参考书、计算器以外，其它所有物品（包括空白纸张、手机等）不得带入座位，已经带入考场的手机等电子设备必须关机，不得随身携带或放在座位旁边，应与其他物品一起放在监考人员指定的位置。

3、考试使用的试题、答卷、草稿纸由监考人员统一发放，考试结束时收回，一律不准带出考场。若有试题印制问题应向监考人员提出，不得向其他考生询问。考生提前答完试卷，应举手示意请监考人员收卷后方可离开；考试结束监考人员宣布收卷时，考生应立即停止答卷，在座位上等待监考人员收卷清点后，方可离场。

4、考生要严格遵守考场规则，在规定时间内独立完成答卷。不准旁窥、交头接耳、打暗号或做手势，不准携带与考试内容相关的材料参加考试，不准使用手机、非教师允许的计算器等具有信息发送、接受、存储功能的设备，不准抄袭或协助他人抄袭试题答案或者与考试内容相关的资料，不准传、接或者交换试卷、答卷、草稿纸，不准由他人代替考试或替他人参加考试等。凡违反考试纪律或作弊者，按《北京大学本科考试工作与学习纪律管理规定》给予相应处分。

5、考生须确认自己填写的个人信息真实、准确，并承担信息填写错误带来的一切责任与后果。

学校倡议所有考生诚信答卷，共同维护北京大学的学术声誉。

**答题要求：**解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树等、约束条件；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。

## 一、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 假设某算法的计算时间表示为递推关系式

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$T(1)=1$$

则算法的时间复杂度为（\_\_\_\_\_）

- A.  $O(n)$       B.  $O(\sqrt{n})$       C.  $O(\sqrt{n} \log n)$       D.  $O(n^2)$
2. （\_\_\_\_\_）的平均和最坏时间复杂度为  $\Theta(n^2)$ ，其中  $n$  是待排序的元素个数。  
A. 快速排序      B. 插入排序      C. 冒泡排序      D. 排序
3. （\_\_\_\_\_）属于 NP 类问题。  
A. 不存在一个 P 类问题。  
B. 任何一个 P 类问题。  
C. 任何一个不属于 P 类的问题。  
D. 任何一个不属于 NPC 类的问题。
4. 以下哪个论述是正确的？（\_\_\_\_\_）  
A. 单纯形法在最坏情况下是多项式时间的。  
B. 在线算法的竞争比越大，算法的性能越好。  
C. 拉斯维加斯算法的输出有可能是错误的。  
D. 使用回溯算法的必要条件是问题要满足多米诺性质。
5. 关于网络流，以下哪个论述是错误的？（\_\_\_\_\_）  
A. 如果可行流  $f$  是最大流，那么不存在关于  $f$  的  $s$ - $t$  增广链。  
B. 最大流一定是极大流。  
C. 极大流一定是最大流。  
D. 容量网络的最大流的流量等于最小割集的容量。

## 二、算法设计（共 10 分）

疫情期间，小明买了  $n$  种不同的口罩，对于第  $i$  种口罩，其单价为  $p_i$ ，最大使用时间为  $t_i$  小时，个数为  $K_i$  个。假设小明下周计划外出  $m$  个小时，在保证安全的前提下（每个口罩的实际使用时间要小于等于其最大使用时间），如何使用口罩能使小明使用代价最小？如果一个口罩的实际使用时间为  $t$  小时，并小于其最大使用时间，则认为其使用代价为  $\frac{t}{t_i} \times p_i$ 。请设计一个算法帮助小明。

### 三、算法设计（共9分）

设  $n$  为正整数，有  $n$  个男生和  $n$  个女生，开始男生和女生随机站成一排，现在需要通过一系列相邻同学的交换，把  $n$  个男生换到  $n$  个女生的右边。以下是  $n=4$  的一个实例。

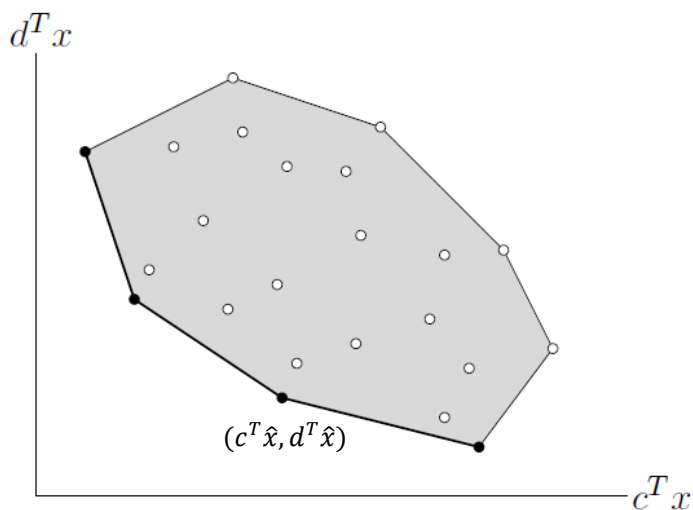
输入：女 男 男 女

输出：女 女 男 男

- (1) 请设计一个交换算法，说明算法的主要思想并计算在最坏情况下的交换次数。
- (2) 假设一种特殊情况是男生和女生开始是交替出现的，即：男 女 男 女 ...。请问在这种输入情况下，任何求解该问题的算法都至少需要交换多少次？
- (3) 考虑所有可能的输入是等概率发生的，请分析任何求解该问题的算法都至少需要做的交换次数的期望。

### 四、线性规划（共6分）

在某些应用中，在超多面体  $\mathcal{P} = \{x \mid Ax \leq b\}$  的约束下，我们需要同时最小化两个目标函数 ( $c^T x$  和  $d^T x$ )。对于通常的  $c$  和  $d$ ，两个目标间存在竞争关系，即不可能同时最小化它们，但可以在它们之间进行权衡 (trade-off)。该问题可用下图示意：

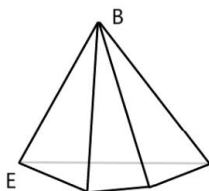


图中的阴影部分是所有可能的  $x \in \mathcal{P}$  确定的点对  $(c^T x, d^T x)$  构成的集合。图中的圆圈表示了  $\mathcal{P}$  上的极值点对应的  $(c^T x, d^T x)$  值，而加粗的线（位于边界的下部）被称为权衡曲线 (trade-off curve)。假设该曲线上的点  $(c^T \hat{x}, d^T \hat{x})$  满足通常情况：不可能选取一个可行的  $x$ ，使得两个目标在该点同时被最小化。

假设  $\hat{x}$  是一个  $\mathcal{P}$  上的非退化极值点<sup>\*</sup>，且  $(c^T \hat{x}, d^T \hat{x})$  在权衡曲线上（如上图所示）。

请列出计算非退化极值点( $c^T \hat{x}, d^T \hat{x}$ )在权衡曲线上的左斜率和右斜率的线性规划描述。

\* 注：在  $n$  维空间中，退化点位于  $n+1$  条及以上的线的交点，一般的极值点均为非退化点，如下图中的 B 为退化点，其余为非退化点。



## 五、算法设计（共 20 分）

疫情期间，挨踢男小马在家工作，他有一批频率各不相同的通信收发芯片，其中有  $n$  个接收芯片， $n$  个发送芯片接。如果接收芯片和发送芯片的频率相同，就可以配对用来做实验，频率不同的收发芯片连到一起会报错（提示接收或发送芯片哪个频率更高）。接收芯片和发送芯片的接口不同，所以很容易区分，但接收芯片之间和发送芯片之间的外表完全相同，只能通过把一对收发芯片接到一起进行测试看是否报错来检验，且每次只能测试一对芯片。

（1）小马把已配对好的  $n$  对收发芯片按频率高低顺序摆在了桌上后，就走去阳台望向窗外，心里构思着如何进行实验。可当小马转身时却发现，他那淘气的儿子把所有的接收芯片都拿走当积木玩了起来。小马并没有生气，他很自信可以很快把这些芯片重新配对，因为发送芯片还按顺序摆在桌上没被动过。请问小马该如何用最快的时间把所有的收发芯片重新配对？请帮小马设计一个算法，用语言简要描述算法的设计思想，并分析该算法在最坏情况和平均情况下的复杂度。

（2）小马重新把  $n$  对芯片配对并按顺序排在桌上后，发现已经快到吃饭时间，就去做饭了。等做完饭回来一看，桌上的芯片又被淘气的儿子拿去当积木玩了，而且是所有的芯片！小马这下郁闷了，他该如何把所有的收发芯片重新配对呢？请再帮小马设计一个算法，用语言简要描述算法的设计思想，并分析该算法在最坏情况和平均情况下的复杂度。

## 六、算法设计（共 15 分）

凤鸣小城的街道很有特点，以中心广场为根，呈现为一颗满的二叉树。一条条街道是树中的边，街道口位置是树中的节点。极限广告公司通过招标拿下了凤鸣小城街道上的广告牌业务，但被要求只能在每个街道口（节点）处最多设置一个广告牌，并且同一条街道（边）的两端街道口（节点）不能都设置广告牌。为了获得最大化的广告收益，极限广告公司对在每个街道口（节点）处设置广告牌能获得的收益都进行了评估。请帮助极限广告公司根据评估结果做出规划，应该在哪些街道口

(节点) 设置广告牌。(注: 中心广场处也可以最多设置一个广告牌)

## 七、平摊分析 (共 10 分)

考虑用两个普通的栈来实现一个队列。

- (1) 在只有 `dequeue(List l)` 和 `enqueue(List l, Object o)` 操作时, 如何用势函数证明, 这两个操作的平摊代价都是  $O(1)$ ?
- (2) 如果我们增加了一个 `multidequeue(List l, int k)` 操作, 可以一次最多从队列中移除  $k$  个对象, 该如何设计势函数, 使得 `multidequeue` 操作的平摊代价也是  $O(1)$ ?

## 八、近似算法 (共 10 分)

找到图  $G$  中一个度数最大的顶点  $u_1$ , 找出所有与  $u_1$  相邻的顶点, 构成顶点集  $U_1$ , 构造图  $G$  的  $U_1$  导出子图  $G_1$ 。再对图  $G_1$  用上述方法找出度数最大的顶点  $u_2$ , 继而构造导出子图  $G_2$ 。以此类推, 最终得到  $u_1, u_2, \dots$ , 构成一个团。该近似算法是否是一个常数近似比的算法? 如果是, 求其近似比, 并尝试构造其紧实例; 如果不是, 举反例证明你的结论。

## 九、NP 完全性 (共 10 分)

证明最小平方和问题是 NP 完全的。

输入: 一个有  $n$  个整数的集合  $A$ 、待划分的子集个数  $K$ 、以及整数  $L$ 。

输出: 能否将  $A$  划分成  $K$  个不相交的子集  $A_1, A_2, \dots, A_K$  且  $A = \bigcup_{i=1}^K A_i$ , 使得

$$\sum_{i=1}^K (\sum_{a \in A_i} a)^2 \leq L。$$

