

一、(10分) 填空题 (每空1分)

1. 请将下列5个关于 n 的函数 $(\sqrt{2})^{\lg n}$, n^2 , $\lg^2 n$, $(\lg n)!$, $2^{\sqrt{2} \lg n}$ 按渐进增长的关系排序, 使得 $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, \dots , $g_4 = \Omega(g_5)$ 。

2. 对于 n 个元素的数组, 插入排序、归并排序和快速排序的最坏情形运行时间分别是_____和_____。

3. 对于某种快速排序算法, 如果每两次连续选取的划分元素, 一次会把数组划分为基本等长的两个部分, 另一次则会划分为长度为1和 $n-2$ 的两个部分 (n 表示当前数组长度)。则该快速排序算法的时间复杂度是_____。

4. 如果图 $G=(V, E)$ 中的每条边的长度均为1, 则求给定起点的单源最短路径问题的时间复杂性为_____。

得分

二、(10 分) 求解递推方程。要求给出求解过程或依据。每题 5 分。

$$(1) T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$T(1) = 1$$

$$(2) T(n) = 2T(n/2) + n/\log n,$$

$$T(1) = 1$$

得分

10

三、(10分)下面是算法 Find 的伪码,输入 S 是 n 个不等的数构成的数组。请问该算法的输出是什么?该算法在最坏情况下执行了多少次比较运算?

算法 Find(S, n)

1. if $S[1] > S[2]$
2. then $x \leftarrow S[1]; y \leftarrow S[2]$
3. else $y \leftarrow S[1]; x \leftarrow S[2]$
4. for $i \leftarrow 3$ to n do
5. if $S[i] > y$
6. then if $S[i] > x$
7. then $y \leftarrow x; x \leftarrow S[i]$
8. else $y \leftarrow S[i]$
9. $n y$

四、(15 分) 矩阵上的快速查找问题

假设有一个 n 维的方形矩阵 $a(1..n, 1..n)$, 满足 $a(i, j) < a(i, j+1)$,

$a(i, j) < a(i+1, j)$ 。现已经将矩阵读入内存, 需要在矩阵中查找某一个特定的数 x 的位置。设计尽可能快的查找算法完成这个任务。(注: x 可能不出

现在方阵中)

(1) 写出查找算法, 伪码或文字描述均可 (5 分)。

(2) 分析算法的正确性 (5 分)

(3) 说明算法的时间复杂度 (5 分)。

五、(20 分)五一假期,小江同学计划开车从 A 地出发,到相距为 L 公里的 B 地探险。在 A 地到 B 地的途中有 n 个加油站,它们分别分布在距离 A 地 d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 公里的位置,每个加油站可以提供 V_i 升的汽油。一开始时小江同学的汽车上有 S 升汽油,汽车每行驶一公里需要耗油一升,假设汽车油箱容量无穷。

请问小江同学在途中至少要加几次油?她要在哪些加油站加油?请设计一个算法解决上述问题。

得分

六、(20 分) 五一假期, 小江同学计划开车从 A 地出发, 到相距为 L 公里的 B 地探险。在 A 地到 B 地的途中有 n 个加油站, 它们分别分布在距离 A 地 d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 公里的位置, 每个加油站可以提供 V_i 升的汽油。一开始时小江同学的汽车上有 S 升汽油, 汽车每行驶一公里需要耗油一升, 假设汽车油箱容量无穷。

小江同学希望在从 A 地和 B 地的途中用汽油换购一些土特产。在 A 地到 B 地的途中有 m 个售卖土特产的商店, 它们分别分布在距离 A 地 e_j ($j = 1, 2, \dots, m$) 公里的位置。在每一个商店, 小江同学可以使用 p_j 升的汽油换购一件价值为 c_j 的商品, 或者选择什么都不换购。在小江同学能够顺利到达 B 地的前提下, 请问她最多能换购多少价值的土特产? 请设计一个算法解决上述问题。

得分

七、(15 分) 有了五一假期的探险经验, 小江同学计划在暑假期间去更多的地方探险。小江同学的目标地点有 n 个, 分别为 A_1, A_2, \dots, A_n , 其中每个地点都有一个可以提供 V_i 升油的加油站, 任意两个地点 A_i 和 A_j 之间有一条长度为 d_{ij} 的道路。一开始时小江同学的汽车上有 S 升汽油, 汽车每行驶一公里需要耗油一升, 假设汽车油箱容量无穷。

小江同学希望能从某一地点出发, 在不重复地经过所有其它地点之后回到这一地点, 请问她能够完成这一心愿吗? 请设计一个算法解决上述问题。