算法设计与分析

蒋婷婷

通知

- 请同学们按照分班名单在网上选小班课

上节课回顾

- 函数渐进的界
- 数学基础
  - 对数函数
  - 阶乘
  - 取整函数
  - 求和
  - 估计和式上界

递推方程的求解

设序列$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$，简记为$\{a_n\}$，一个把$a_n$与某些个$a_i(i<n)$联系起来的等式叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程

求解方法：

迭代法

直接迭代：插入排序最坏情况下时间分析

换元迭代：二分归并排序最坏情况下时间分析

差消迭代：快速排序平均情况下的时间分析

迭代模型：递归树

尝试法：快速排序平均情况下的时间分析

主定理：递归算法的分析

迭代：Hanoi塔

$T(n) = 2\,T(n-1) + 1$，$T(1) = 1$，

迭代

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n-1) + 1 \\
&= 2[2T(n-2) + 1] + 1 = 2^2T(n-2) + 2 + 1 \\
&= 2^3T(n-3) + 2^2 + 2 + 1 = \ldots \\
&= 2^{n-1}T(1) + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^n-1
\end{aligned}
$$

插入排序

算法1.4 InsertSort(A,n) // A为n个数的数组

1. for $j \leftarrow 2$ to n
2. $x \leftarrow A[j]$
3. $i \leftarrow j-1$ // 行3到行7把$A[j]$插入$A[1..j-1]$之中
4. while $i>0$ and $x<A[i]$ do
5. $A[i+1] \leftarrow A[i]$
6. $i \leftarrow i-1$
7. $A[i+1] \leftarrow x$

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

$W(n)=W(n-1)+n-1$

$=[W(n-2)+n-2]+n-1=W(n-2)+(n-2)+(n-1)$

$=[W(n-3)+n-3]+(n-2)+(n-1)=\ldots$

$=W(1)+1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)$

$=1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)=n(n-1)/2$

二分归并排序

算法1.5 **MergeSort(A,p,r)** // 归并排序数组$A[p..r]$

1. if $p<r$
2. then $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3. MergeSort(A,p,q)
4. MergeSort($A,q+1,r$)
5. Merge(A,p,q,r)

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

归并过程

算法1.6 Merge(A,p,q,r) // 将排序数组$A[p..q]$与$A[q+1,r]$合并

$x \leftarrow q-p+1$, $y \leftarrow r-q$ // x, y分别为两个子数组的元素数

将$A[p..q]$复制到$B[1..x]$, 将 $A[q+1..r]$复制到 $C[1..y]$

$i \leftarrow 1$, $j \leftarrow 1$, $k \leftarrow p$

While $i \leq x$ **and** $j \leq y$ **do**

    if $B[i] \leq C[j]$ // B的首元素不大于C 的首元素

        $A[k] \leftarrow B[i]$ // 将B 的首元素放到 A中

        $i \leftarrow i+1$

    else

        $A[k] \leftarrow C[j]$

        $j \leftarrow j+1$

    $k \leftarrow k+1$

if $i > x$ **then** 将$C[j..y]$复制到$A[k..r]$ // B已经是空数组

else 将$B[i..x]$复制到$A[k..r]$ // C已经是空数组

换元迭代

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1, & n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

$$W(n) = 2W(2^{k-1}) + 2^k - 1$$
$$= 2[2W(2^{k-2}) + 2^{k-1} - 1] + 2^k - 1$$
$$= 2^2 W(2^{k-2}) + 2^k - 2 + 2^k - 1$$
$$= 2^2[2W(2^{k-3}) + 2^{k-2} - 1] + 2^k - 2 + 2^k - 1$$
$$= \ldots$$
$$= 2^k W(1) + k2^k - (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1)$$
$$= k2^k - 2^k + 1$$
$$= n\log n - n + 1$$

使用迭代法，对解可以通过数学归纳法验证

差消化简后迭代

$$\begin{cases} T(n)=\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+O(n), & n\ge 2 \\ T(1)=0 \end{cases}$$

快速排序平均时间分析

$$nT(n)=2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+cn^2,$$ c为某个常数

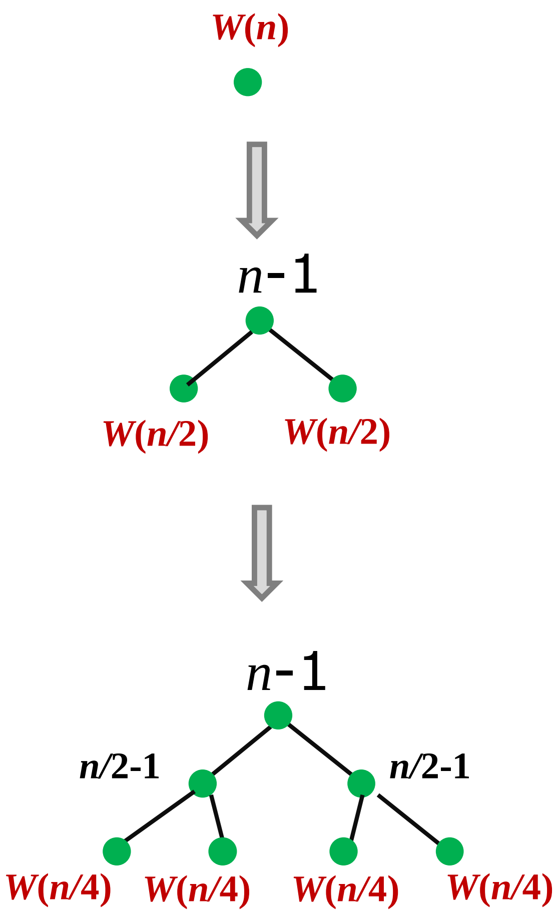
$$(n-1)T(n-1)=2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)+c(n-1)^2$$

$$nT(n)=(n+1)T(n-1)+O(n)$$

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{c_1}{n+1}=\cdots=c_1[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}]+\frac{T(1)}{2}$$

$$=c_1\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}\right]=\Theta(\log n),\quad T(n)=\Theta(n\log n)$$

迭代模型：递归树



$$W(n)=2W(n/2)+n-1$$

$$W(n/2)=2W(n/4)+n/2-1$$

递归树的迭代生成

递归树

$$W(n) = 2W(n/2) + n - 1,\ n = 2^k,\quad W(1) = 0$$

$$n-1 \qquad\qquad n-1$$

$$\frac{n}{2}-1 \quad \frac{n}{2}-1 \qquad\qquad n-2$$

$$\frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \quad \frac{n}{4}-1 \qquad\qquad n-4$$

$$\cdots\cdots$$

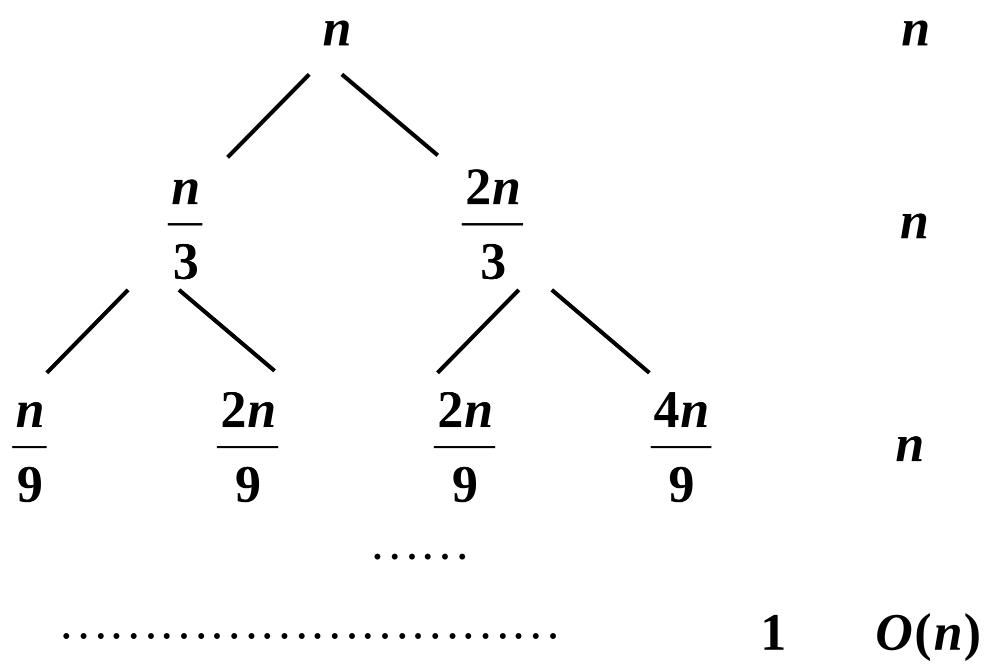
$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \cdots\cdots\cdots 1 \quad 1 \quad 1 \qquad\qquad n-2^{k\text{-}1}$$

$$W(n) = n - 1 + n - 2 + \ldots + n - 2^{k\text{-}1}$$

$$= kn - (2^k - 1) = n\log n - n + 1$$

递归树的应用实例

$T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n$



层数 k: $n(2/3)^k=1 \Rightarrow (3/2)^k=n \Rightarrow k=O(\log_{3/2}n)$

$T(n)=O(n\log n)$

尝试法：快速排序

$$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+O(n)$$

(1) $T(n)=C$为常函数，左边$=O(1)$

右边$=\dfrac{2}{n}C(n-1)+O(n)$

$$=2C-\frac{2C}{n}+O(n)$$

(2) $T(n)=cn$，左边$=cn$

右边$=\dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}ci+O(n)$

$$=\frac{2c}{n}\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+O(n)$$

$$=cn-c+O(n)$$

尝试法：快速排序

$$\begin{cases} T(n) = \dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} T(i) + O(n), & n \ge 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

(3) $T(n)=cn^2$，左边$=cn^2$

$$右边= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} ci^2 + O(n)$$

$$= \frac{2}{n}[\frac{cn^3}{3} + O(n^2)] + O(n) = \frac{2c}{3}n^2 + O(n)$$

(4) $T(n)=cnlogn$，左边$=cnlogn$

$$右边= \frac{2c}{n}\sum_{i=1}^{n-1} ilogi + O(n)$$

$$= \frac{2c}{n}[\frac{n^2}{2}logn - \frac{n^2}{4ln2} + O(1)] + O(n)$$

$$= cnlogn + O(n)$$

以积分作为求和的近似

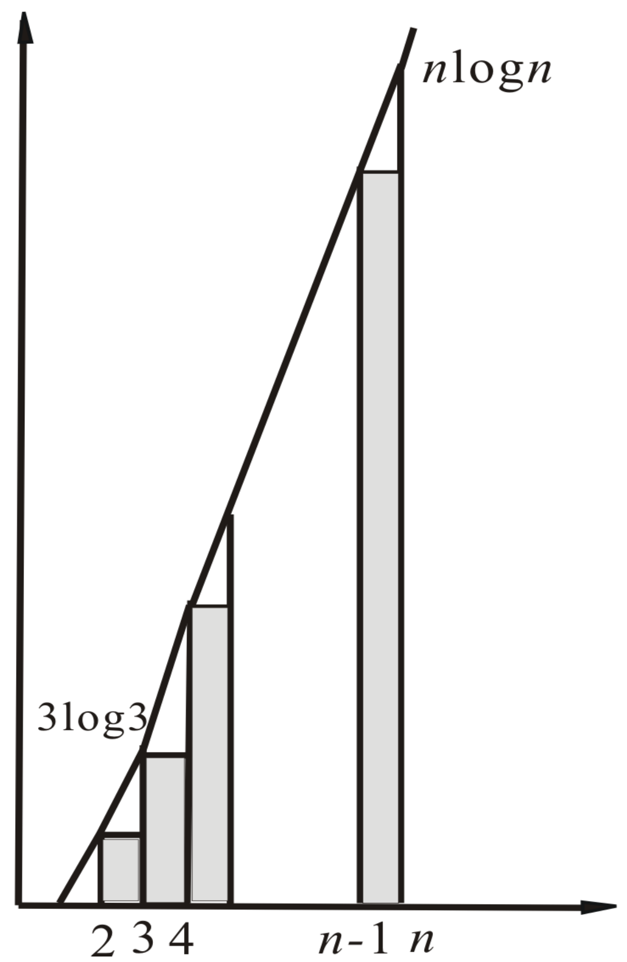
$$\int_2^n x\log x\,dx = \int_2^n \frac{x}{\ln 2}\ln x\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]\Bigg|_2^n$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4}\right) - \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} ilogi$$

$$= \frac{n^2}{2}logn - \frac{n^2}{4ln2} + O(1)$$



主定理

主定理： 设$a\geq 1$, $b>1$为常数，$f(n)$为函数，$T(n)$为非负整数，且

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

则有以下结果：

1. 若$f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon}), \varepsilon > 0$, 那么$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. 若$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, 那么$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$
3. 若$f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}), \varepsilon > 0$, 且对于某个常数 $c < 1$和充分大的n有 $a f(n/b) \leq cf(n)$，那么 $T(n)=\Theta(f(n))$

迭代

设$n=b^k$

$$T(n)=aT(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=a[aT(\frac{n}{b^2})+f(\frac{n}{b})]+f(n)=a^2T(\frac{n}{b^2})+af(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=\ldots$$

$$=a^kT(\frac{n}{b^k})+a^{k-1}f(\frac{n}{b^{k-1}})+\ldots+af(\frac{n}{b})+f(n)$$

$$=a^kT(1)+\sum_{j=0}^{k-1}a^jf(\frac{n}{b^j})$$

$$=c_1n^{\log_b a}+\sum_{j=0}^{k-1}a^jf(\frac{n}{b^j}) \qquad T(1)=c_1$$

情况1

$$f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$$

$$T(n)=c_1 n^{\log_b a}+\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a-\varepsilon})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1} \frac{a^j}{(b^{\log_b a-\varepsilon})^j})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\sum_{j=0}^{\log_b n-1} (b^{\varepsilon})^j)$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon}\frac{b^{\varepsilon\log_b n}-1}{b^{\varepsilon}-1})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+O(n^{\log_b a-\varepsilon} n^{\varepsilon})=O(n^{\log_b a})$$

情况2

$$f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$$

$$T(n)=c_1 n^{\log_b a}+\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+\Theta(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j (\frac{n}{b^j})^{\log_b a})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+\Theta(n^{\log_b a}\sum_{j=0}^{\log_b n-1} \frac{a^j}{a^j})$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+\Theta(n^{\log_b a}\log n)$$

$$=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$$

情况3

$$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$$

$$T(n)=c_1 n^{\log_b a}+\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

$$\le c_1 n^{\log_b a}+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n) \qquad (af(\frac{n}{b})\le cf(n))$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+f(n)\frac{c^{\log_b n}-1}{c-1}$$

$$=c_1 n^{\log_b a}+\Theta(f(n)) \qquad （c<1）$$

$$=\Theta(f(n)) \qquad (f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}))$$

主定理的应用

例　求解递推方程　$T(n)=9T(n/3)+n$

解　上述递推方程中的 $a=9, b=3, f(n)=n,$ 那么

$$n^{\log_3 9}=n^2, \quad f(n)=O(n^{\log_3 9-1}),$$

相当于主定理的第一种情况，其中ε=1. 根据定理得到

$$T(n)=\Theta(n^2)$$

例　求解递推方程　$T(n)=T(2n/3)+1$

解　上述递推方程中的 a=1, b=3/2, $f(n)$=1，那么

$$n^{\log_{3/2} 1}=n^0=1, \quad f(n)=1$$

相当于主定理的第二种情况. 根据定理得到 .

$$T(n)=\Theta(n^0\log n)=\Theta(\log n)$$

实例

例 求解递推方程 $T(n)=3T(n/4)+n\log n$

上述递推方程中的a=3, b=4, $f(n)$=$n\log n$，那么

$$n\log n=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})=\Omega(n^{0.793+\varepsilon})\qquad \varepsilon\approx 0.2$$

此外，要使 $a\,f(n/b)\le cf(n)$成立，代入 $f(n)$=$n\log n$，得到

$$\frac{3n}{4}\log\frac{n}{4}\le cn\log n$$

显然只要 $c\ge 3/4$，上述不等式就可以对充分大的n成立. 相当于主定理的第三种情况. 因此有

$$T(n)=\Theta(f(n))=\Theta(n\log n)$$

不能使用主定理的例子

$$T(n) = 2T(n/2) + n\log n$$

$$T(1) = 1$$

- 不能使用主定理

  $a = 2,\ b = 2,\ n^{\log_b a} = n, \quad f(n) = n\log n$

  不存在c<1使得 $2\,(n/2)\log(n/2) \le c\, n\log n$

  不存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(n) = n\log n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$

- 只能使用递归树，结果等于

$$T(n) = n\log^2 n$$

递归树求解：$T(n)=2T(n/2)+O(n\log n)$

$$n\log n \qquad\qquad n\log n$$

$$n/2\log(n/2) \quad n/2\log(n/2) \qquad\qquad n(\log n-1)$$

$$n/4\log(n/4) \quad n/4\log(n/4) \quad n/4\log(n/4) \quad n/4\log(n/4) \qquad n(\log n-2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$n(\log n-k)$$

$$(n\log n)\log n - n(1+2+\ldots+k)$$
$$= n\log^2 n - nk(k+1)/2 = O(n\log^2 n)$$

$$k=\log n$$

递推方程中 $\lfloor x \rfloor$ 和 $\lceil x \rceil$ 的处理

先猜想解，然后用数学归纳法证明

例16　估计以下递推关系的阶

$$T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n$$

$$T(1) = 1$$

根据 $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

$$T(n) = O(n \log n)$$

猜想原递推方程的解的阶是 $O(n \log n)$

证明：$T(n) \le cn \log n$, 用数学归纳法

证明

归纳基础

对于$T(1)=1$，显然没有$T(1)\le c\,1\log 1$.

考虑$T(2)$

$$T(2) = 2T(\lfloor 1 \rfloor)+2 = 4 \le 2\times 2\log 2，\quad c=2$$

归纳步骤

假设对于小于n的正整数命题为真，那么

$$T(n) = 2T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n \le 2c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n$$

$$\le 2c\frac{n}{2}(\log n - \log 2) + n = c\,n\log n - c\,n + n$$

$$\le c\,n\log n, \qquad c = 2$$