

2017 春季 算法设计与分析 期中考试

1 在下表中填入“是”或“否”，其中 $k > 0$ 和 $c > 1$ 是常数。(15 分)

$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$	$f(n) = \Theta(g(n))$
n^2	$\log(c^n)$			
\sqrt{n}	$n^{\sin n}$			
2^{2n}	$n2^n$			
$n^{\log \log n}$	$c^{\log n}$			
$\log n!$	$\log n^n$			

2 求解下列递归式。(10 分)

1)

$$T(n) = T(n-1) + \log(5^n)$$

$$T(1) = 1$$

2)

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2 \log n$$

$$T(1) = 1$$

3 下面是算法 Determine 的伪码，输入 S 是有 n 个元素且元素严格递减的数组， a 是给定的正整数。(15 分)

1) 算法的输出是什么?

2) 分析算法最坏情况下做多少比较运算。(代码见下页)

4 Z 国有一条笔直的河流，恰好流经 Z 国的 n 个城市。按河水的流经顺序可以把 n 个城市分别编号为 $1, 2, \dots, n$ 。我们将河看作 x 轴，将 n 个城市看成 x 轴上的 n 个点，坐标分别记为 $x[1], x[2], \dots, x[n]$ (其中 $x[i] < x[i+1]$)。现在 Z 国的工程师需要在城市之间铺设线缆。

如果某根线缆的长度为 0，意味着该线缆只铺设在一座城市中。Z 国国王希望将这一成果

Algorithm 1 第 3 题代码

```
1: function DETERMINE( $S, a$ )
2:    $i \leftarrow n$ 
3:   while  $i \geq 2$  do
4:      $x \leftarrow S[i] * a$ 
5:      $j \leftarrow \text{BiSEARCH}(S, 1, i - 1, x)$ 
6:     if  $j \text{ exists}$  then
7:       return  $i$ 
8:     else
9:        $i \leftarrow i - 1$ 
10:    end if
11:  end while
12:  return "No"
13: end function
```

惠及全国，使 n 座城市全部铺上线缆；但由于技术所限，Z 国铺设的线缆数不能超过 M 。请你设计一种铺设线缆的方法，使得 Z 国铺设的线缆总长度最小。(15 分)

注：当 $M \geq n$ 时，需要铺设的线缆总长度为 0。

5 Z 国有一条笔直的河流，恰好流经 Z 国的 n 个城市。按河水的流经顺序可以把 n 个城市分别编号为 1, 2, ..., n 。我们将河看作 x 轴，将 n 个城市看成 x 轴上的 n 个点，坐标分别记为 $x[1], x[2], \dots, x[n]$ （其中 $x[i] < x[i + 1]$ ）。现在 Z 国国王需要从 n 个城市中选一些城市来建设通讯基站。

每个基站的覆盖范围为半径为 R 的圆。如果城市 i 在基站 j 的覆盖范围内，则城市 i 的居民可以利用基站 j 进行通信。认为两个基站是互通的，如果两个基站的覆盖范围不相离。基站间的互通具有传递性。现在国王想知道，给定城市个数 $n, x[1], x[2], \dots, x[n]$ ，以及基站覆盖半径 R ，至少需要建设多少个基站才能使得第 1 座城市和第 n 座城市互通。(15 分)

注 1：假设可行方案一定存在。

注 2：每个基站一定建在城市上，但不是每个城市上都有基站。

6 Z 国在原油需求旺季，需要从国外进口油。Z 国在海港处设有一个容量为 L 的储油库，在旺季开始时库中油量为 0。如有需要，Z 国可以通过远洋油轮向库中运油。远洋油轮足够大，以至于可以向油库中加入任意数量（总量不超过上限 L ）的油，且每次的运输费为恒定的 P 。根据以往的经验，Z 国已经知道了旺季长为 n 天，且每天的原油需求量为 $g[i]$ 吨。

第 i 天早上，如有加油需求，油轮来到储油库附近，为库中运入一定数量的油；晚上， $g[i]$

吨的油被从油库中运走。另外，如果在运走油后，油库中还剩额外的原油，则这些原油按照每晚每吨 C 的价格产生存储费。

如果 Z 国要求在旺季结束时油库恰好为空，则 Z 国应该在旺季的哪些天通过远洋油轮运油，才能使得（运输 + 存储）费用最小？（15 分）

7 Z 国有 n 个城市，由于国家发展，城市不再沿河分布，而是呈二维结构。城市之间的相邻关系由邻接矩阵 C 给出， $C[i][j] = 1$ 等价于城市 i 和 j 相邻，数据保证构成平面图。注意：可能有某些城市不和其他任何城市相邻。

现在 Z 国希望应用新的 xG 技术为城市构建手机信号网络，但是为了防止信号频段互相干扰，要求相邻的城市必须在不同的频段。 Z 国国王希望知道，至少用多少种信号频段就能满足所有城市的需求。（15 分）

注：下面是一组城市的示例

1	2
3	4

它对应的邻接矩阵 C 是

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

一种设置频段的方案为

1	2
2	1