算法设计与分析

蒋婷婷

上节课回顾

- 递归方程的求解
  - 迭代法
    - 直接迭代
    - 换元迭代
    - 差消化简后迭代
  - 递归树
  - 主定理

主定理

主定理：设$a \geq 1$, $b>1$为常数，$f(n)$为函数，$T(n)$为非负整数，且

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

则有以下结果：

1. 若$f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon}), \varepsilon > 0$, 那么$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. 若$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, 那么$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. 若$f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}), \varepsilon > 0$, 且对于某个常数 $c < 1$和充分大的n有 $a f(n/b) \leq cf(n)$，那么 $T(n)=\Theta(f(n))$

递推方程中 $\lfloor x \rfloor$ 和 $\lceil x \rceil$ 的处理

先猜想解，然后用数学归纳法证明

例16　估计以下递推关系的阶

$$T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n$$

$$T(1) = 1$$

根据 $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

$$T(n) = O(n \log n)$$

猜想原递推方程的解的阶是 $O(n \log n)$

证明：$T(n) \le cn \log n$, 用数学归纳法

证明

归纳基础

对于$T(1)=1$，显然没有$T(1)\le c\ 1\log 1$.

考虑$T(2)$

$$T(2) = 2T(\lfloor 1 \rfloor)+2 = 4 \le 2\times 2\log 2,\quad c=2$$

归纳步骤

假设对于小于n的正整数命题为真，那么

$$T(n) = 2T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n \le 2c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n$$

$$\le 2c\frac{n}{2}(\log n - \log 2) + n = c\,n\log n - c\,n + n$$

$$\le c\,n\log n,\qquad c = 2$$

顺序算法的设计技术

- 分治策略
- 动态规划算法
- 回溯法与分支估界
- 贪心算法
- 概率算法

分治策略（Divide and Conquer）

- 分治策略的基本思想
  - 实例、主要思想、算法描述、注意问题
- 递归算法与递推方程
  - 两类递推方程的求解
- 降低递归算法复杂性的途径
  - 代数变换减少子问题个数
  - 预处理减少递归的操作
- 典型实例分析

分治策略的基本思想

分治策略的实例----二分检索、归并排序

主要思想----划分、求解子问题、综合解

算法描述

Divide-and-Conquer(P)

1. if $|P| \le c$ then $S(P)$.

2. divide P into $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

3. for i = 1 to k

4. y_i = Divide-and-Conquer(P_i)

5. Return Merge($y_1, y_2, \ldots, y_k$)

注意问题----连续划分　平衡原则

递归算法与递推方程

- 分治策略的算法分析工具----递推方程
- 两类递推方程

$$f(n)=\sum_{i=1}^{k}a_i f(n-i)+g(n)$$

$$f(n)=af(\frac{n}{b})+d(n)$$

- 求解方法

  迭代法、递归树、Master定理

典型的递推方程

$$f(n) = af(\frac{n}{b}) + d(n)$$

当 $d(n)$为常数 时

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

当 $d(n) = cn$ 时

$$f(n) = \begin{cases} O(n) & a < b \\ O(n\log n) & a = b \\ O(n^{\log_b a}) & a > b \end{cases}$$

实例

例1 芯片测试

A 报告	*B* 报告	结论
*B*是好的	*A*是好的	*A*,*B* 都好或 *A*,*B* 都坏
*B*是好的	*A*是坏的	至少一片是坏的
*B*是坏的	*A*是好的	至少一片是坏的
*B*是坏的	*A*是坏的	至少一片是坏的

条件：有 *n* 片芯片，(好芯片至少比坏芯片多**1**片),

问题：使用最少测试次数，从中挑出1片好芯片

要求：说明测试算法，进行复杂性分析

算法

```
k ← n
while  k > 3  do
      将芯片分成⌊k/2⌋组
      for  i =1  to ⌊k/2⌋ do
            if  2片好，则任取1片留下
            else  2 片同时丢掉
            k ← 剩下的芯片数
 if  k = 3
 then  任取2片芯片测试
      if  至少1坏，取没测的芯片
      else  任取1片被测芯片
 if   k =2  or  1  then  任取1片
```

分析

- 说明

  上述算法只是一个概要说明，对于n为奇数的情况需要进一步处理, 处理时间为$O(n)$.

- 复杂性分析

  设$W(n)$表示n片芯片测试的次数，则

$$W(n) = W(n/2) + O(n)$$

$$W(1) = 0$$

  由Master定理，$W(n) = O(n)$

实例

例2　求一个数的幂

问题：计算 a^n, n为自然数

传统算法： $\Theta(n)$

分治法

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \times a^{n/2} & n \text{ 为偶数} \\ a^{(n-1)/2} \times a^{(n-1)/2} \times a & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) = \Theta(\log n) .$$

计算 Fibonacci 数

Fibonacci 数的定义

$$F_n = \begin{cases} 0 & if \ \ n = 0 \\ 1 & if \ \ n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & if \ \ n > 1 \end{cases}$$

0 1 1 2 3 5 8 13 21 …

通常算法：从 $F_0, F_1, \ldots,$ 根据定义陆续相加

时间为$\Theta(n)$

利用数幂乘法的分治算法

定理1 设 $\{F_n\}$为 Fibonacci 数构成的数列，那么

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

证明：对 n 进行归纳

算法：令矩阵 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，用分治法计算 M^n

$T(n) = \Theta(\log n)$.

提高算法效率的途径1

方法一：代数变换 减少子问题个数

例3 位乘问题

设X ,Y 是两个n 位二进制数， $n = 2^k$, 求 XY.

传统算法 $W(n)=O(n^2)$

分治法 令$X= A2^{n/2} +B$, $Y= C2^{n/2} +D$.

$$XY= AC\,2^n + (AD + BC)\,2^{n/2} + BD$$

$$W(n) = 4W(n/2) + cn,$$

$$W(1) = 1$$

解得 $W(n) = O(n^{\log 4}) = O(n^2)$

代数变换

$AD + BC = (A - B)(D - C) + AC + BD$

递推方程

$$W(n) = 3\,W(n/2) + cn$$

$$W(1) = 1$$

解

$$W(n) = O(n^{\log 3}) = O(n^{1.59})$$

矩阵乘法

例4　A, B 为两个n 阶矩阵，$n = 2^k$, 计算$C = AB$.

传统算法　$W(n) = O(n^3)$

分治法　将矩阵分块，得

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \qquad C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \qquad C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

递推方程　$W(n) = 8\,W(n/2) + cn^2$

$W(1) = 1$

解　　$W(n) = O(n^3)$.

变换方法

$$M_1 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$
$$M_2 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$
$$M_3 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$
$$M_5 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$
$$M_6 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$
$$M_7 = (A_{11} - A_{21})(B_{11} + B_{12})$$

$$C_{11} = M_5 + M_4 - M_2 + M_6$$
$$C_{12} = M_1 + M_2$$
$$C_{21} = M_3 + M_4$$
$$C_{22} = M_5 + M_1 - M_3 - M_7$$

Strassen 矩阵乘法

递推方程是

$$W(n) = 7W(\tfrac{n}{2}) + 18(\tfrac{n}{2})^2$$

$$W(1) = 1$$

由Master定理得

$$W(n) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.8075})$$

提高算法效率的途径2

算法中的处理尽可能提到递归外面作为预处理

例6 平面点对问题

输入：集合S 中有n 个点，$n>1$，

输出：所有的点对之间的最小距离.

通常算法：$C(n,2)$个点对计算距离，比较最少需$O(n^2)$时间

分治策略：子集P 中的点划分成两个子 集 P_L和 P_R

$$|P_L|=\left\lceil \frac{|P|}{2} \right\rceil \qquad |P_R|=\left\lfloor \frac{|P|}{2} \right\rfloor$$

平面最近点对算法

MinDistance(P,X,Y)

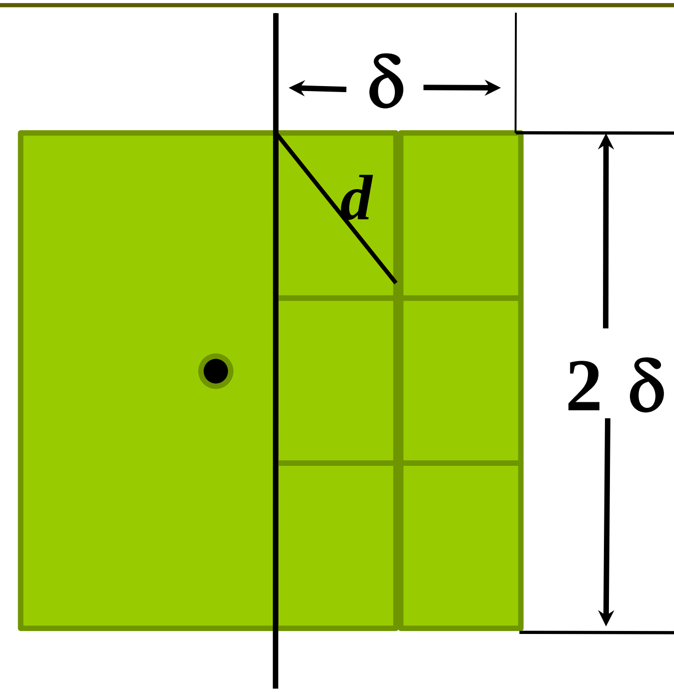
输入：n 个点的集合P，X 和Y 分别为横、纵坐标数组

输出：最近的两个点及距离

1. 如果P 中点数小于等于3，则直接计算其中的最小距离
2. 排序X,Y
3. 做垂直线 l 将P划分为P_L和P_R，P_L的点在 l 左边，P_R的点在 l 右边
4. MinDistance(P_L,X_L,Y_L); $\delta_L = P_L$中的最小距离
5. MinDistance(P_R,X_R,Y_R); $\delta_R = P_R$中的最小距离
6. $\delta = \min(\delta_L,\delta_R)$
7. 对于在垂直线两边距离δ范围内的每个点，检查是否有点与它的距离小于δ，如果存在则将δ修改为新值

跨边界的最近点

$$d = \sqrt{(\delta/2)^2 + (2\delta/3)^2}$$
$$= \sqrt{\delta^2/4 + 4\delta^2/9}$$
$$= \sqrt{25\delta^2/36} = 5\delta/6$$



右边每个小方格至多1个点，每个点至多比较对面的6个点，

只需考察常数个点。将边界区域内的点按照纵坐标进行扫描，对于每个点进行检查，考察在另一侧相关区域内的点（不超过6个），检查1个点是常数时间，***O*(*n*)** 个点需要***O*(*n*)**时间

算法分析

分析：步1　　$O(1)$

步2　　$O(n\log n)$

步3　　$O(1)$

步4-5　$2T(n/2)$

步6　　$O(1)$

步7　　$O(n)$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n\log n)$$

$$T(n) = O(1) \qquad\qquad n \le 3$$

由递归树估计$T(n) = O(n\log^2 n)$

预排序的处理方法

在每次调用时将已经排好的数组分成两个排序的子集，每次调用这个过程的时间为$O(n)$

$W(n)$总时间，$T(n)$算法递归过程，$O(n\log n)$预处理排序

$$W(n) = T(n) + O(n\log n)$$

$$T(n) = 2T(\tfrac{n}{2}) + O(n)$$

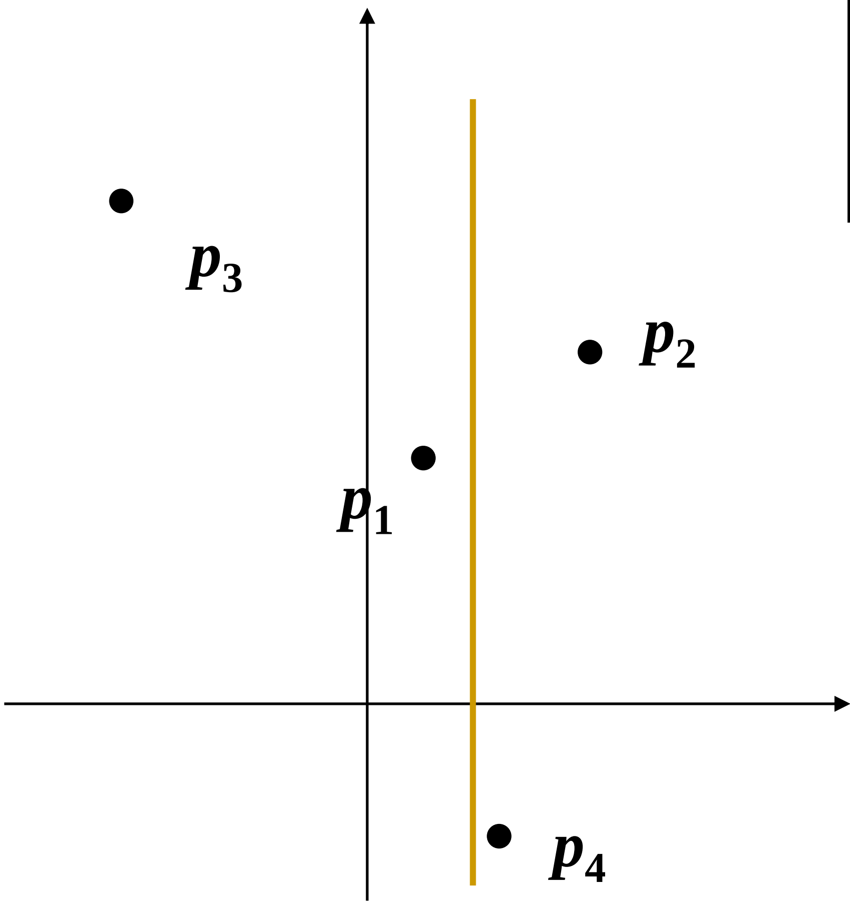
$$T(n) = O(1) \qquad n \le 3$$

解得

$$T(n)=O(n\log n)$$

$$W(n) = O(n\log n)$$

实例：递归中的拆分



P	1	2	3	4
x	0.5	2	-2	1
y	2	3	4	-1

X	-2(3)	0.5(1)	1(4)	2(2)
Y	-1(4)	2(1)	3(2)	4(3)

X_L	-2(3)	0.5(1)
X_R	1(4)	2(2)
Y_L	2(1)	4(3)
Y_R	-1(4)	3(2)

典型实例分析

算法　快速排序

输入：数组$A[p..r]$

输出：排好序的数组A

Quicksort(A,p,r)

1. **if** $p < r$
2. **then** $q \leftarrow$ **Partition**(A, p, r)
3. $A[p] \leftrightarrow A[q]$
4. **Quicksort**($A,p,q-1$)
5. **Quicksort**($A,q+1,r$)

划分过程

Partition(A,p,r)

$x \leftarrow A[p]$
$i \leftarrow p$
$j \leftarrow r+1$
while true do
    repeat $j \leftarrow j-1$
    until $A[j] \leq x$
    repeat $i \leftarrow i+1$
    until $A[i] > x$
    if $i < j$
    then $A[i] \leftrightarrow A[j]$
    else return j

实例

27	99	0	8	13	64	86	16	7	10	88	25	90
	i										*j*	
27	25	0	8	13	64	86	16	7	10	88	99	90
					i				*j*			
27	25	0	8	13	10	86	16	7	64	88	99	90
						i		*j*				
27	25	0	8	13	10	7	16	86	64	88	99	90
							j	*i*				
16	25	0	8	13	10	7	27	86	64	88	99	90

复杂度分析

最坏情况

$$W(n) = W(n-1) + O(n)$$

$$W(1) = 0$$

$$W(n) = \frac{1}{2} n(n-1) = \Theta(n^2)$$

最好划分

$$T(n) = 2T(\tfrac{n}{2}) + O(n)$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

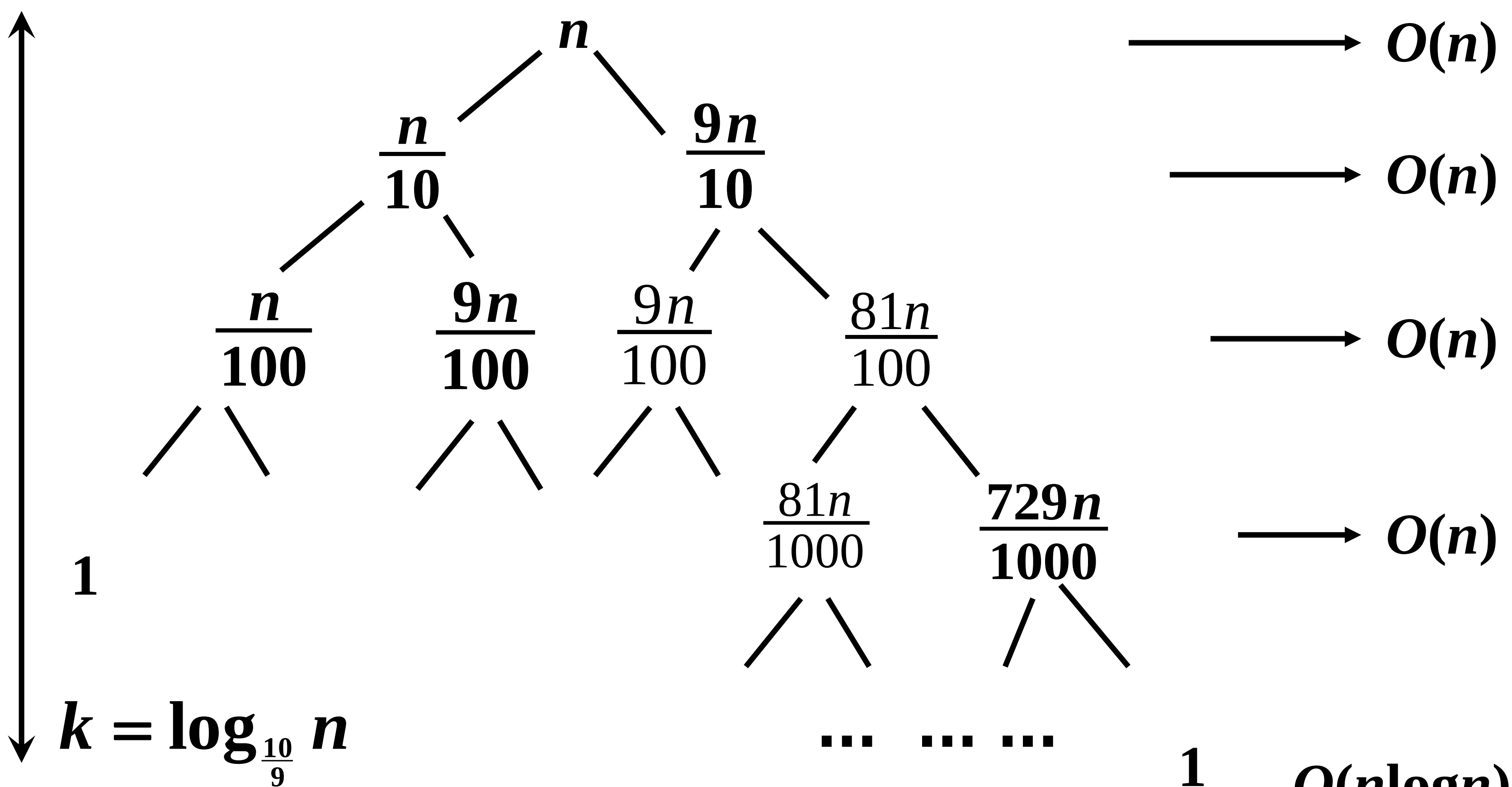
均衡划分

$$T(n) = T(\tfrac{9n}{10}) + T(\tfrac{n}{10}) + O(n)$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

均衡划分



n
$\frac{n}{10}$
$\frac{9n}{10}$
$\frac{n}{100}$
$\frac{9n}{100}$
$\frac{9n}{100}$
$\frac{81n}{100}$
$\frac{81n}{1000}$
$\frac{729n}{1000}$
1
$k = \log_{\frac{10}{9}} n$
… … …
1
$O(n)$
$O(n)$
$O(n)$
$O(n)$
$O(n\log n)$

平均情况

假设输入数组首元素排好序后的正确位置处在**1,2,…,*n*** 各种情况是等可能的

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(T(k) + T(n-k-1)) + O(n)$$

$$T(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}T(k) + O(n)$$

$$T(1) = 0$$

利用差消法求得 ***T*(*n*)=*O*(*n*log*n*)**