

2021 年算法设计与分析期中考试试卷

答题要求：解答算法设计题目时，请先用一段话描述算法思想。若用动态规划算法，请写出递推方程、边界条件、标记函数等设计要素；贪心法需给出证明；回溯法需给出解向量、搜索树、约束条件、优化算法等；线性规划给出形式化描述即可；各种算法需分析时间复杂度。阅卷时会根据算法的正确性和效率评分。

一、(10 分) 设原问题的规模是 n ，从下述三个算法中选择一个最坏情况下时间复杂度最低的算法，简要说明你的理由。

算法 A：将原问题划分规模减半的 6 个子问题，递归求解每个子问题，然后在线性时间将子问题的解合并得到原问题的解。

算法 B：先递归求解 2 个规模为 $n-1$ 的子问题，然后在常量时间内将子问题的解合并。

算法 C：将原问题划分规模为 $n/3$ 的 9 个子问题，递归求解每个子问题，然后在 $O(n^3)$ 时间将子问题的解合并得到原问题的解。

二、(15 分) 有一种有趣的堆栈 S ，它只支持一个叫做 `flipping_push()` 的函数操作，首先将对象压栈，若栈中的对象数目为 2 的幂次，则将所有对象翻转，例如按顺序放入四个对象，自底向上看的压栈结果为 $(1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,1,3) \rightarrow (4,3,1,2)$ 。求在一个空的 S 中连续进行 n 次操作的复杂度。

三、(10 分) 环球影城开业在即，小明提前做攻略。环球影城一共有 n 个游乐项目，每个项目都要排队，假定每个项目预期的排队时间为 t_i ，实际游玩时间为 p_i 。假定小明可以在游乐场停留的最长时间为 M 。小明的目标是在 M 时间内尽可能

多玩一些项目，同时总排队时间不能超过总实际游玩时间的 $1/2$ ，请你帮他设计一个攻略。假设其他时间（如从一个项目到另外一个项目的时间）忽略不计。

四、(15 分) 小明前往游乐园游玩，游乐园共有 n 个游戏项目，每个游戏项目有两个属性 a_i 和 b_i 。小明希望玩遍所有项目，他可以自由安排顺序，玩一个游戏项目所需要付出的精力为这个游戏项目之前所有项目的 a_i 的乘积除以当前游戏项目的 b_i ，第一个项目不消耗精力。小明不希望在一个项目上花过多的精力，他希望付出的精力最多的项目所需要的精力最小。求满足小明要求的安排顺序及对应的最多精力。请设计算法，并证明算法正确性，分析算法复杂度。假设 a_i 都大于等于 1， b_i 都大于 0。

五、(15 分) 数独游戏是一种十分简单且受欢迎的游戏。如下图所示，假定给一个 9×9 的棋盘，其中有些方格已经填上了数字。游戏规则是每一行、每一列、每一个小九宫内的数字均含 1-9，且不重复。

- (1) (12 分) 请设计一个正确的算法对这个问题求解，并分析复杂度。
- (2) (3 分) 在保证正确性的前提下，尝试优化算法。

	8					5	3	
			5	4				
5	9		8	3			4	
3		9				4	2	
7		4		2		8		5
	2	8				7		3
	3			7	4		5	2
				8	1			
	4	2					8	

六、(15 分) 考虑 n 个互不相等的整数排列在一个环上, 请设计一个尽可能高效的算法, 找出环上的一个极小点, 即数值小于其左右相邻的两个整数的某个整数。

七、(20 分) 有 N 个城市, 连接这些城市的道路组成了一个树形的结构, 每条道路的长度为 c_i 。现在想在一些城市建立消防站来防火, 每个消防站可以负责任意多个城市的防火工作。如果选择在城市 i 建立消防站, 需要的费用是 w_i , 这个消防站负责该城市的防火工作; 如果不选择建立消防站, 那需要在距离为 d_i 的范围内要有一个消防站来负责城市 i 的防火工作。现在想让所有城市都能保证安全, 求最小的费用及达到最小费用的建造方案。