第三章作业

一、证：用反证法证明。

f 满射 $\Rightarrow \forall b(b\in B \rightarrow g(b)\neq\emptyset)$

若 g 不为单射，即

$\exists b_1\exists b_2\exists y(b_1\in B\wedge b_2\in B\wedge b_1\neq b_2\wedge y\in P(A)\wedge b_1 g y\wedge b_2 g y)$

$\Rightarrow \{x\mid x\in A\wedge f(x)=b_1\}=\{x\mid x\in A\wedge f(x)=b_2\}$

$\Rightarrow \forall x(x\in A\wedge f(x)=b_1\rightarrow f(x)=b_2)$

$\Rightarrow b_1=b_2$

这与 $b_1\neq b_2$ 矛盾！

$\therefore g$ 为单射。

二、解：(1) $f(A_1)=\{1,2,3\}$

$f^{-1}(B_1)=\{4,0,5,6\}$

(2) $g(A_2)=N$

$g^{-1}(B_2)=\{2k+1\mid k\in N\}\cup\{6\}$

(3) f 有反函数，g 没有。

三、证：用反证法证明。

(1) 设 f 不是单射。

$\exists y_1\exists y_2\exists z(y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge y_1\neq y_2\wedge z\in C\wedge y_1 f z\wedge y_2 f z)$

$\Rightarrow \exists x_1\exists x_2(x_1\in A\wedge x_2\in A\wedge x_1 g y_1\wedge x_2 g y_2\wedge y_1 f z\wedge y_2 f z)$ （g 满射）

$\Rightarrow \exists x_1\exists x_2(x_1\in A\wedge x_2\in A\wedge x_1 f\circ g z\wedge x_2 f\circ g z)$

$\Rightarrow f\circ g$ 非单射

矛盾！

$\therefore f$ 是单射。

(2) 设 g 不是满射

$\mathrm{ran}\,g\subset B$

$\Rightarrow \exists y(y\in B\wedge y\notin \mathrm{ran}\,g)$

$\Rightarrow \exists y(y\in B\wedge y\notin \mathrm{ran}\,g\wedge\exists z(z\in C\wedge y f z))$

$\Rightarrow \exists y\exists z(y\in B\wedge y\notin \mathrm{ran}\,g\wedge z\in C\wedge y f z)$

$\Rightarrow z\notin \mathrm{ran}(f\circ g)$ （f 是单射）

矛盾！

$\therefore g$ 是满射。

第四章作业

一. 解: (1) $2\cup 3$

$=\{0,1\}\cup\{0,1,2\}$

$=\{0,1,2\}=3$

(2) $2\cap 3=\{0,1\}=2$

(3) $\cup 5$

$=\cup\{0,1,2,3,4\}$

$=\{0,1,2,3\}=4$

(4) $\cap 6=\cap\{0,1,2,3,4,5\}$

$=\phi=0.$

(5) $\cup\cup 7=\cup 6=5$

二. 证: 用数学归纳法证明:

令 $S'=\{n\mid n\in N\wedge\exists x(x\in N\wedge x^+=n)\}$.

$S=S'\cup\{0\}$.

① $0=\phi\in S$, 显然

② 下证 $\forall n(n\in S\to n^+\in S)$

a. $n=0$, $n^+=1\Rightarrow 1\in S'\Rightarrow 1\in S$

b. $n\neq 0\Rightarrow n\in S'$

$\Rightarrow\exists x(x\in N\wedge x^+=n)$

$\Rightarrow n^+=x^{++}$

$\Rightarrow n^+\in S$

$\therefore\forall n(n\in S\to n^+\in S)$

综上, $N=S$.

证毕.

三. 证: $A^+=A\cup\{A\}$

$\forall x\in A^+$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in\{A\}$

$\Rightarrow x\in A\vee x=A$

$\Rightarrow x\in A\vee x\subseteq A^+$ $(A\subseteq A^+)$

$\Rightarrow x\subseteq A\vee x\subseteq A^+$ (A为传递集)

$\Rightarrow x\subseteq A^+\vee x\subseteq A^+$

$\Rightarrow x\subseteq A^+$

$\forall x(x\in A^+\to x\subseteq A^+)\Leftrightarrow A^+$ 为传递集

证毕.

四. 证: 用反证法证明:

假设 h 不是单射, 即

$\exists n_1,n_2(n_1\in N\wedge n_2\in N\wedge n_1\neq n_2\wedge h(n_1)=h(n_2))$

不妨设 $n_1<n_2$, 即

$\exists n_1,n_2(n_1\in N\wedge n_2\in N\wedge n_1<n_2\wedge h(n_1)=h(n_2))$

① $n_1=0\Rightarrow n_2\geq 1$

$\Rightarrow h(0)=h(n_2)=a$

$\Rightarrow a=h(n_2)=f(h(n_2-1))\in \mathrm{ran}f$

矛盾!

$\therefore n_1=n_2$.

② $n_1>0$.

$h(n_1)=f(h(n_1-1))=f(h(n_2-1))=h(n_2)$

$\Rightarrow h(n_1-1)=h(n_2-1)$ (f 单射)

$\Rightarrow h(n_1-2)=h(n_2-2)$

$\Rightarrow\cdots$

$\Rightarrow h(0)=h(n_2-n_1)=a=f(h(n_2-n_1-1))\in \mathrm{ran}f$

矛盾!

$\therefore n_1=n_2$.

证毕.

第五章作业

一. 证：(1) $\forall f$,

$f\in(A\to A)$

$\Rightarrow f\in(A\to A)\land \mathrm{ran}f=\mathrm{ran}f$

$\Rightarrow \langle f,f\rangle\in R$

$\therefore R$ 自反

$\forall f,g\in(A\to A)$,

fRg

$\Rightarrow \mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$

$\Leftrightarrow \mathrm{ran}g=\mathrm{ran}f$

$\Leftrightarrow gRf$

$\therefore R$ 对称

$\forall f,g,h\in(A\to A)$

$fRg\land gRh$

$\Rightarrow \mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g\land \mathrm{ran}g=\mathrm{ran}h$

$\Rightarrow \mathrm{ran}f=\mathrm{ran}h$

$\Rightarrow \langle f,h\rangle\in R$

$\therefore R$ 传递

$\therefore R$ 是 $A\to A$ 上的等价关系

(2) 令 $F:(A\to A)/_R\to P(A)$

$\therefore \forall f\in A\to A$, $[f]_R\in(A\to A)/R$, $F([f]_R)=\mathrm{ran}f$

$\Rightarrow \mathrm{ran}f\in P(A)$

由 $f:A\to A\land A\neq\varnothing\Rightarrow \mathrm{ran}f\neq\varnothing$

$\therefore$ 令 $F:(A\to A)/R\to(P(A)-\{\varnothing\})$

下证 F 为双射

① $\forall [f]_R,[g]_R\in(A\to A)/R$,

$F([f]_R)=F([g]_R)$

$\Rightarrow \mathrm{ran}f=\mathrm{ran}g$

$\Rightarrow \langle f,g\rangle\in R$

$\Rightarrow [f]_R=[g]_R$.

$\therefore F$ 为单射

② $\forall B\in P(A)\land B\neq\varnothing\Rightarrow\exists b\in B$.

令 $f:A\to A$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\in B\\ b, & x\in A-B\end{cases}$

$\Rightarrow F([f]_R)=B$

$\Rightarrow F$ 满射

$\therefore F$ 双射, $(A\to A)/R\approx P(A)-\{\varnothing\}$.

二. 证： $c\subset n$

$\Rightarrow c\prec\cdot\, n$

$\Leftrightarrow \mathrm{card}\,c<\mathrm{card}\,n=n$

$\Rightarrow \exists n_0\,(n_0\in N\land n_0<n\land \mathrm{card}\,c=n_0)$

$\Leftrightarrow \exists n_0\,(n_0\in N\land n_0\in n\land c\approx n_0)$

证毕.

三. 证：(1) 令 $f:N\to A$, $\forall n\in N$, $f(n)=(n+1)^7$

显然 f 为双射

$\therefore \mathrm{card}A=\aleph_0$

(2) 同(1), $\mathrm{card}B=\aleph_0$.

(3) $\mathrm{card}(A\cup B)=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

(4) $C=\{n^{7\times109}\mid n\in N\land n\neq0\}$

$\mathrm{card}C=\aleph_0$

$C\subseteq A\cap B\subseteq A$

$\Rightarrow \mathrm{card}C\le\mathrm{card}(A\cap B)\le\mathrm{card}A$

$\Rightarrow \mathrm{card}(A\cap B)=\aleph_0$.

四. 证： $A\approx B\Leftrightarrow\exists f:A\to B$, f 是双射

令 $g:P(A)\to P(B)$, $\forall C\in P(A)$,

$g(C)=\{f(x)\mid x\in C\}$, 即 $g(C)=f(C)$

$\Rightarrow g(C)\in P(B)$

① g 是单射

$\forall C_1,C_2\in P(A)$,

$f(C_1)=f(C_2)\Rightarrow C_1=C_2$ (f 为双射)

$\Rightarrow g$ 是单射

② g 是满射

f 是双射 $\Rightarrow f^{-1}:B\to A$ 为双射

$\Rightarrow \forall D\in P(B)$, $f^{-1}(D)\in P(A)$

$\Rightarrow g(f^{-1}(D))=f(f^{-1}(D))=D$

$\Rightarrow g$ 满射.

综上, g 为双射, $\mathrm{card}(P(A))=\mathrm{card}(P(B))$

五. 证：(1) $\forall$ 集合 L, 设 $\mathrm{card}L=K$.

$0\to L=\varnothing\to L=\{\varnothing\}$.

$\Rightarrow \mathrm{card}(0\to L)=\mathrm{card}\,L^0=K^0=1$.

(2) $\forall L\neq\varnothing$, 设 $\mathrm{card}L=K$.

$L\to0=\varnothing$

$\Rightarrow \mathrm{card}(L\to0)=0=0^K$

(3) $K+K=\mathrm{card}(A\cup B)$, 其中 $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B=K\land A\cap B=\varnothing$.

$2\cdot K=\mathrm{card}(C\times D)$, 其中 $\mathrm{card}C=2$, $\mathrm{card}D=K$.

取 $A=\{a\}\times D$, $B=\{b\}\times D$. $C=\{a,b\}$

下证：$(A\cup B)\approx(C\cup D)$

设 $f:(A\cup B)\to(C\cup D)$,

$\forall\langle x,y\rangle\in(A\cup B)$,

$f(\langle x,y\rangle)=\begin{cases}\langle a,y\rangle, & \langle x,y\rangle\in A\\ \langle b,y\rangle, & \langle x,y\rangle\in B\end{cases}$

下证 f 是双射.

① $\forall\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in A\cup B\land\langle x_1,y_1\rangle\neq\langle x_2,y_2\rangle$.

a. $x_1=a\land x_2=a\Rightarrow y_1\neq y_2\Rightarrow f(\langle x_1,y_1\rangle)=\langle a,y_1\rangle\neq f(\langle x_2,y_2\rangle)=\langle a,y_2\rangle$

b. $x_1=x_2=b\Rightarrow y_1\neq y_2\Rightarrow f(\langle x_1,y_1\rangle)\neq f(\langle x_2,y_2\rangle)$

c. $(x_1=a\land x_2=b)\lor(x_1=b\land x_2=a)$

$\Rightarrow f(\langle x_1,y_1\rangle)\neq f(\langle x_2,y_2\rangle)$

$\therefore f$ 单射

② $\forall\langle x,y\rangle\in C\times D$

$\Rightarrow x=a\lor x=b$

a. $x=a$

$\Rightarrow\exists\langle a,y\rangle\in A\cup B$, $f(\langle a,y\rangle)=\langle a,y\rangle$

b. $x=b$

$\Rightarrow\exists\langle b,y\rangle\in A\cup B$, $f(\langle b,y\rangle)=\langle b,y\rangle$.

$\therefore f$ 是满射

$\therefore f$ 双射, $(A\cup B)\approx(C\cup D)$, $K+K=2\cdot K$.

证毕.