$\frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

$T(n) = \frac{1}{n}[T(n-1)+T(n-2)+\cdots+T(\frac{n}{2}+1)+T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2}+1)+T(\frac{n}{2}+2)+\cdots+T(n-1)] + O(n)$

$\le \frac{2}{n}\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} T(i) + O(n)$

$T(1)=O(n)\le cn$ ✓

$n=k$ ✓

$n=k+1$ $T(k+1)=\frac{2}{n}\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} ci + O(n) = \frac{2}{n}c(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1+\cdots+n-1)+O(n)$

$=\frac{c}{n}(\frac{3n}{2}-1)(\frac{n}{2})+O(n) = \frac{(\frac{3}{2}n-1)c}{4}+O(n) \le c'n$

$T(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(T(i-1)+T(n-i))+(n-1)$

$=\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}T(i)+(n-1) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+(n-1)$

$n=1$, $T(1)=\frac{2}{n}T(0)+(n-1) = n-1=0\le 2n\ln n=0$

$n=k$ ✓

$n=k+1$, $T(k+1)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{k}2i\ln i+k$

$\le\frac{2}{n}\int_1^{k+1}2x\ln x\,dx+k$

$=\frac{2}{n}\int_1^{k+1}\ln x\,dx^2+k$

$=\frac{2}{n}(x^2\ln x\Big|_1^{k+1}-\int_1^{k+1}x^2\,d\ln x)+k$

$=\frac{2}{n}(n^2\ln n-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^{k+1})+k$

$=\frac{2}{n}(n^2\ln n-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2})+n-1$

$\le 2n\ln n$

随机算法

Las Vegas型随机算法

问题	算法	期望运行时间
排序问题	随机快速排序	$T(n) \le 2nlnn$
选择问题	RandSelect	$T(n) \le cn$
n皇后问题	BoolQueen -> QueenLV + 回溯	$t = s + e\frac{1-p}{p}$ $t=ps+(1-p)(e+t)$

$\Rightarrow t=ps+(1-p)e+(1-p)t$

$\Rightarrow t=s+e\frac{1-p}{p}$

Monte Carlo型随机算法

问题	算法	正确概率	时间复杂度	错误类型
主元素测试	Majority -> BoolMajority -> MCMajority	$> \frac{1}{2}$ 是 ✓ 否？ $> \frac{3}{4}$ 两次 $p+(1-p)p>\frac{3}{4}(p>\frac{1}{2})$ $> 1 - \epsilon$ 一次错误概率 $<\frac{1}{2}$, k次 $\frac{1}{2^k}\le\epsilon$	$2^k\ge\frac{1}{\epsilon}$ $k=\lceil\log\frac{1}{\epsilon}\rceil$	弃真型单侧错误
串相等测试	StringEqualityTest -> StringTest	$> 1 - \frac{1}{n}$ $\ge 1 - \frac{1}{n^k}$ k次	出错 ⇒ : x与y指纹相同 $\wedge\ p\mid I(x)-I(y)$ $\Rightarrow I(x) \bmod p = I(y) \bmod p$ $\Rightarrow x=y$ (实际 $x\neq y$) ① $\pi(t)\ge\frac{t}{\ln t}$ ② $k\le 2^n$, 整除k的素数个数 $\le\pi(n)$ $I(x), I(y)\le 2^n$ 取 $M\ge 2n^2$ $\frac{\lvert P\rvert}{\pi(M)}\le\frac{\pi(n)}{\pi(M)}=\frac{n}{\ln n}\frac{\ln 2n^2}{2n^2}<\frac{1}{n}$	取伪型
模式匹配*	PatternMatching	$> 1 - \frac{1}{n}$	$O(m + n)$	取伪型
素数测试*	PremalityTest	$\ge 1 - \frac{1}{n}$	$O(log^4n)$	取伪型单侧错误

两种算法的比较

- Las Vegas型随机算法
  - 如果得到解，总是给出正确的结果，区别只在于运行时间的长短. 不一定一次给出答案
  - 拉斯维加斯型随机算法的运行时间本身是一个随机变量
  - ① 期望运行时间是输入规模的多项式且 ② 总是给出正确答案的随机算法称为有效的拉斯维加斯型算法.
- Monte Carlo型随机算法
  - 这种算法有时会给出错误的答案. 总是给出解，但不一定对.
  - 其运行时间和出错概率都是随机变量，通常需要分析算法的出错概率. △ Las Vegas 没有
  - 多项式时间内运行且出错概率不超过1/3的随机算法称为有效的蒙特卡洛型算法

随机算法的分类与局限性

- 拉斯维加斯型随机算法 了解
  - 零错误概率多项式时间算法(有效的)，ZPP
- 蒙特卡洛型随机算法
  - 错误概率有界的有效算法(多项式时间)，BPP
  - 弃真型单侧错误概率有界的有效算法，RP
  - 取伪型单侧错误概率有界的有效算法，coRP
- 随机算法的局限性
  - 错误概率有界的多项式时间随机算法不太可能解决NP完全问题

快，简单
可应用