作业1

1.2 解：最坏情况为A递减排序

(1) 比较运算次数 $= (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$= \frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

(2) A中n个数不等且递减排序为最坏情况，

交换次数也为 $\frac{n(n-1)}{2}$

1.6 解：设 $P=[a_0, a_1, \cdots, a_n]$，

则该算法求解 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，即求解以P中元素为系数

的多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

乘法运算次数：$2n$

加法运算次数：n

1.7 解：(1) 比较次数：$1+2\times(n-3+1) = 1+2(n-2) = 2n-3$

(2) 考虑位置 i

若 $S[i]$ 为 $S[1\cdots i]$ 中较小的2个数之一

则在 i 处需比较2次；否则只需比较1次。

由于所有输入等概率分布，故平均情况下比较

次数为

$$1+\sum_{i=3}^{n}\left(2\times\frac{2}{i}+1\times\frac{i-2}{i}\right)$$

$$=1+\sum_{i=3}^{n}\left(\frac{4}{i}+1-\frac{2}{i}\right)$$

$$=1+(n-3+1)+2\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i}$$

$$=1+n-2+2(\ln n+O(1))$$

-3

$$= n-1+2\ln n+O(1)$$

$$= n+2\ln n+O(1)$$

(-4)

1.15 解：(1) $g(n)=O(f(n))$

(2) $f(n)=O(g(n))$

(3) $f(n)=O(g(n))$

(4) $g(n)=O(f(n))$

(5) $f(n)=O(g(n))$

1.18 解：$n!$，2^{2n}，$n2^n$，$n^{\log\log n}=\theta(\log n^{\log n})$

n^3，$\log(n!)=\theta(n\log n)$，$\log 10^n=\theta(n)$，$2^{\log\sqrt{n}}$，$2^{\sqrt{2\log n}}$?

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\theta(\log n)$，$\log\log n$

1.19 解：(2) $T(n)=9T(\frac{n}{3})+n$

$$=9\left[9T(\tfrac{n}{3^2})+\tfrac{n}{3}\right]+n$$

$$=9^2T(\tfrac{n}{3^2})+3n+n$$

$$=9^2\left[9T(\tfrac{n}{3^3})+\tfrac{n}{3^2}\right]+3n+n$$

$$=9^3T(\tfrac{n}{3^3})+9n+3n+n$$

$$=\cdots$$

(设 $n=3^k$) $=9^kT(1)+(3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots+1)n$

$$=9^k+\frac{1-3^k}{1-3}n$$

$$=n^2+\frac{n-1}{2}n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\theta(n^2)$$

(4) $T(n)=T(n-1)+\log 3^n$

$$=T(n-2)+\log 3^{n-1}+\log 3^n$$

$$=\cdots$$

$$=T(1)+\log 3^2+\log 3^3+\cdots+\log 3^n$$

$$=1+\log 3^{2+3+\cdots+n}$$

$$=1+\log 3^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$$

$$=1+\frac{n^2+n-2}{2}\log 3$$

(6) $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n^2\log n$

$a=2, b=2$，$n^{\log_b a}=n$

$f(n)=n^2\log n=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$，$\varepsilon>0$，

取 $c=\frac{1}{2}<1$

$2f(\frac{n}{2})=2(\frac{n^2}{4}\log\frac{n}{2})=\frac{n^2}{2}\log\frac{n}{2}\le cn^2\log n$，$n\to+\infty$。

故 $T(n)=\theta(f(n))=\theta(n^2\log n)$

(8) $T(n)=T(n-1)+\log n$

$$=T(n-2)+\log(n-1)+\log n$$

$$=T(n-3)+\log(n-2)+\log(n-1)+\log n$$

$$=\cdots$$

$$=T(1)+\log\prod_{i=2}^{n} i$$

$$=T(1)+\log(n!)$$

$$=\theta(n\log n)$$

1.21 解：设问题规模为n

① 算法A：

$T(n)=5T(\frac{n}{2})+cn \quad (c>0)$

$a=5, b=2$，$f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$，$\varepsilon>0$ 存在

由主定理：

$T(n)=\theta(n^{\log_2 5})$

② 算法B：

$T(n)=2T(n-1)+c \quad (c>0)$

$$=2[2T(n-2)+c]+c$$

$$=2^2T(n-2)+2c+c$$

$$=2^2[2T(n-3)+c]+2c+c$$

$$=\cdots$$

$$=2^{n-1}T(1)+(2^{n-1}+\cdots+2+1)c$$

$$=2^{n-1}c'+\frac{1-2^n}{1-2}c \quad (c'>0)$$

$$=\theta(2^n)$$

③ 算法C：

$$T(n)=9T(\frac{n}{3})+cn^3\ (c>0)$$

$a=9,\ b=3,\ n^{\log_b a}=n^2$

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ 取 $\epsilon=\frac{1}{2}>0$,

$af(\frac{n}{b})=9f(\frac{n}{3})=9\cdot\frac{n^3}{27}\cdot c=\frac{c}{3}n^3$

取 $c'=\frac{1}{3}$

$af(\frac{n}{b})=c'f(n)=\frac{c}{3}n^3$, $n\to\infty$,

故 $T(n)=\theta(n^3)$

故应选择算法A.

补充题

1. 解：$T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\log n}$

设 $n=2^k$

$T(2^k)=2T(2^{k-1})+\frac{2^k}{k}$

$=2[2T(2^{k-2})+\frac{2^{k-1}}{k-1}]+\frac{2^k}{k}$

$=2^2T(2^{k-2})+2^k(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k})$

$=\cdots$

$=2^{k-1}T(1)+2^k\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i}$

$=c\cdot\frac{n}{2}+n(\ln k+O(1))$

$=\frac{c}{2}\cdot n+n\ln\log n+O(n)$

$=\theta(n\log\log n)$

故 $T(n)=\theta(n\log\log n)$

下用归纳法证明：(why?)

设 $T(k)=\theta(k\log\log k)$ 对 $n\le k$ 成立，$k\in\mathbb{Z}_+$

则当 $n=k+1$ 时

$T(k+1)=2T(\frac{k+1}{2})+\frac{k+1}{\log(k+1)}$

$=\theta((k+1)\log\log(k+1))+\frac{k+1}{\log(k+1)}$

$=\theta((k+1)\log\log(k+1))$

故对 $\forall k\in\mathbb{Z}_+$，$T(k)=\theta(k\log\log k)$

故 $T(n)=\theta(n\log\log n)$ ∎

2. 证：$T(n)=T(\frac{n}{2})+1$

$=T(\frac{n}{4})+1+1$

$=T(\frac{n}{2^3})+1+1+1$

$=\cdots$

(设 $n=2^k$) $=T(1)+k$

$=T(1)+\log n=O(\log n)$ ∎