第 14 章 格与布尔代数

14.1 内容提要

14.1.1 格的定义及性质

格的偏序集定义

定义 14.1.1 设 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 是偏序集,如果 $\forall x, y \in S, \{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界,那么称 S 关于偏序 $\preccurlyeq$ 构成一个格.

格的代数刻画

定理 14.1.1 设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统,且 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换律、结合律、吸收律,则可以适当定义 S 中的偏序 $\preccurlyeq$,使得 $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ 构成一个格,且 $\forall a, b \in S$ 有 $a \wedge b = a * b, a \vee b = a \circ b$.

格的实例

集合的幂集格、正整数的正因子格、群的子群格.

对偶原理

定义 14.1.2 设 p 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 p^* 是将 p 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题,则称 p^* 为 p 的对偶命题.

设 p 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题. 若 p 对一切格为真,则 p 的对偶命题 p^* 也对一切格为真.

格的运算性质

设 $\langle L, \preccurlyeq \rangle$ 是格,则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、幂等律和吸收律,即

(1) $\forall a, b \in L$ 有 $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$.

(2) $\forall a, b, c \in L$ 有 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(3) $\forall a \in L$ 有 $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$.

(4) $\forall a, b \in L$ 有 $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a$.

偏序与运算的关系

设 L 是格,则 $\forall a, b \in L$ 有 $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$.

保序性质

设 L 是格, $\forall a, b, c, d \in L$. 若 $a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$,则 $a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d, a \vee c \preccurlyeq b \vee d$.

子格的定义

定义 14.1.3 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格, S 是 L 的非空子集,若 S 关于 L 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 仍构成格,则称 S 为 L 的子格.

子格判别

S 非空,且 S 关于格 L 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 封闭.

14.1.2 分配格、有界格和有补格

分配格的定义

定义 14.1.4 设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格,若 $\forall a,b,c\in L$ 有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$
$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

成立,则称 L 为分配格.

分配格的判别

(1) 根据定义判别:注意在证明 L 为分配格时,只需证明其中的一个等式即可.

(2) 设 L 是格,则 L 是分配格当且仅当 L 不含有与钻石格或五角格同构的子格.

(3) 格 L 是分配格当且仅当 $\forall a,b,c\in L$,若 $a\wedge b=a\wedge c$ 且 $a\vee b=a\vee c$,则有 $b=c$. 消去

有界格

定义 14.1.5 设 L 是格,若存在 $a\in L$ 使得 $\forall x\in L$ 有 $a\preccurlyeq x$,则称 a 为 L 的全下界. 若存在 $b\in L$ 使得 $\forall x\in L$ 有 $x\preccurlyeq b$,则称 b 为 L 的全上界.

由于全下界和全上界的唯一性,一般将格 L 的全下界记为 0,全上界记为 1.

定义 14.1.6 设 L 是格,若 L 存在全下界和全上界,则称 L 为有界格,并将 L 记作 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$.

有补格

定义 14.1.7 设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界格,$a\in L$,若存在 $b\in L$ 使得

$$a\wedge b=0 \text{和} a\vee b=1$$

成立,则称 b 为 a 的补元.

定理 14.1.2 设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界分配格,若 $a\in L$,且对于 a 存在补元 b,则 b 是 a 的唯一补元.

定义 14.1.8 设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界格,若 $\forall a\in L$,a 在 L 中都存在补元,则称 L 为有补格.

14.1.3 布尔代数

布尔代数的定义

定义 14.1.9 如果一个格是有补分配格,那么称它为布尔格或布尔代数.

布尔代数也有下述等价定义.

定义 14.1.10 设 $\langle B,*,\circ\rangle$ 是代数系统,$*$ 和 $\circ$ 是二元运算. 若 $*$ 和 $\circ$ 运算满足:

(1) 交换律,即 $\forall a,b\in B$ 有

$$a*b=b*a,\ a\circ b=b\circ a;$$

(2) 分配律,即 $\forall a,b,c\in B$ 有

$$a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c),$$
$$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c);$$

(3) 同一律,即存在 $0,1\in B$ 使得 $\forall a\in B$ 有

$$a*1=a,\ a\circ 0=a;$$

(4) 补元律,即 $\forall a\in B$,存在 $a'\in B$ 使得

$$a*a'=0,\ a\circ a'=1,$$

则称 $\langle B,*,\circ\rangle$ 为一个布尔代数.

布尔代数的性质

定理 14.1.3 设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ 是布尔代数,则

(1) $\forall a \in B,\ (a')' = a$.

(2) $\forall a, b \in B,\ (a \wedge b)' = a' \vee b',\ (a \vee b)' = a' \wedge b'$. (德摩根律)

有限布尔代数的结构

定义 14.1.11 设 L 是格,$0 \in L, 0 \neq a \in L$. 若 $\forall b \in L$,当 $0 \prec b \preccurlyeq a$ 时,总有 $b = a$, 则称 a 为 L 中的原子.

定理 14.1.4 (有限布尔代数的表示定理) 设 B 是有限布尔代数,A 是 B 的全体原子构成的集合,则 B 同构于 A 的幂集代数 $P(A)$.

推论 14.1.1

(1) 任何有限布尔代数的基数为 $2^n, n \in \mathbb{N}$.

(2) 任何等势的有限布尔代数都是同构的.

1. 图 14.4.1 给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格,说明理由.

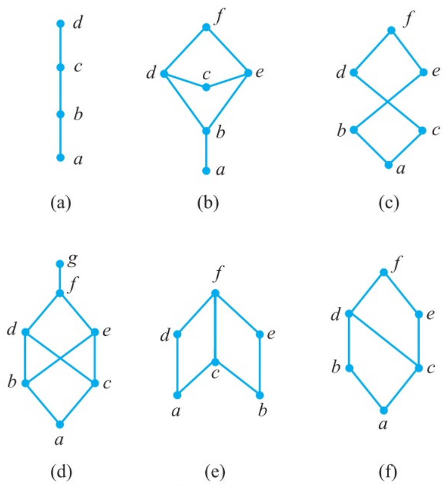

图 14.4.1

(a) 是格.

(b) 不是格, $\{d,e\}$ 无最大下界

(c) 是格

(d) 不是格, $\{d,e\}$ 无最大下界

(e) 不是格, $\{d,e\}$ 无最大下界

(f) 是格.

2. 下列集合对于整除关系都构成偏序集,判断哪些偏序集是格.

(1) $L=\{1,2,3,4,5\}$. ×

(2) $L=\{1,2,3,6,12\}$. √

(3) $L=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$. √

(4) $L=\{1,2,2^2,\cdots\}$. √

4. 设 L 是格,求下列公式的对偶式.

(1) $a\wedge(a\vee b)\preccurlyeq a$.

(2) $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$.

(3) $b\vee(c\wedge a)\preccurlyeq(b\vee c)\wedge a$.

(1) $a\vee(a\wedge b)\succcurlyeq a$

(2) $a\wedge(b\vee c)\succcurlyeq(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

(3) $b\wedge(c\vee a)\succcurlyeq(b\wedge c)\vee a$

5. 设 L 为格, $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in L$, 如果 $a_1\wedge a_2\wedge a\cdots\wedge a_n=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$, 证明 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

设 L 关于 $\preccurlyeq$ 为格.

用数归证,

$n=1$ √

$n=k$, $a_1=a_2=\cdots=a_k$

$n=k+1$, $a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_k\wedge a_{k+1}=a_k\wedge a_{k+1}=a_k\vee a_{k+1}$

若 $a_k\neq a_{k+1}$. 设 $a_k\wedge a_{k+1}=m$

$a_k\vee a_{k+1}=M$

① a_k 与 a_{k+1} 不可比 ② $a_k\prec a_{k+1}$ ③ $a_k\succ a_{k+1}$

$\Rightarrow m\prec a_k\prec M$ $\quad\Rightarrow m=a_k$ $\quad\Rightarrow m=a_{k+1}$

$m\prec a_{k+1}\prec M$ $\quad M=a_{k+1}$ $\quad M=a_k$

矛盾!

$\forall i$,

$a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n\preccurlyeq a_i\preccurlyeq a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$

$i=1,2,\cdots,n$

$\Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n$

6. 设 L 是格, $a,b,c\in L$, 且 $a\preccurlyeq b\preccurlyeq c$, 证明 $a\vee b=b\wedge c$.

$a\vee b=b$, $b\wedge c=b$.

7. 针对图 14.4.2 中的格 L,求出 L 的所有子格.

$\neq\varnothing$

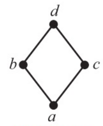

图 14.4.2

$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,d\},\{c,d\}$

$\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}$

8. 设 $\langle L,\preccurlyeq\rangle$ 是格,任取 $a\in L$,令

$$S=\{x\in L|x\preccurlyeq a\}.$$

证明 $\langle S,\preccurlyeq\rangle$ 是 L 的子格.

$a\in S$, $S\neq\varnothing$

$\forall x_1,x_2\in S$,

$x_1\vee x_2\preccurlyeq a\vee a\preccurlyeq a$

$x_1\vee x_2\preccurlyeq a\Rightarrow x_1\vee x_2\in S$

$x_1\wedge x_2\preccurlyeq x_1\preccurlyeq a\Rightarrow x_1\wedge x_2\in S$

■

9. 针对图 14.4.1 中的每个格,若格中的元素存在补元,则求出这些补元.

10. 说明图 14.4.1 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格,并说明理由.

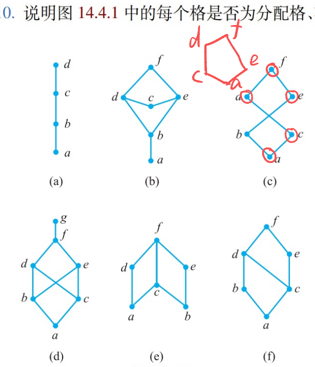

图 14.4.1

9. (a) $a:d$

$d:a$

(c) $a:f$

$b:c,d$

$c:b,e$

$d:e,b$

$e:d,c$

$f:a$

(f) $a:f$

$b:e$

$e:b$

$f:a$

10. (a) √, ×, ×

(c) ~~√~~ ×, √, ~~√~~ ×

(f) √, ×, ×