课后练习 1

一. 解：设 $B_1=\{$选到一级射手$\}$

$B_2=\{$选到二级射手$\}$

$B_3=\{$选到三级射手$\}$

$B_4=\{$选到四级射手$\}$

$A=\{$一次射击中射中十环$\}$.

$P(B_1)=\frac{1}{5}$, $P(B_2)=\frac{3}{10}$, $P(B_3)=\frac{7}{20}$, $P(B_4)=\frac{3}{20}$

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)+P(AB_4)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{7}{20}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{20}\times\frac{3}{10}$$

$$=0.18+0.24+0.175+0.045$$

$$=0.64$$

故一次射击中能中十环的概率为0.64.

二. 解：设 $B_1=\{$一个人是男性$\}$, $B_2=\{$一个人是女性$\}$

$A=\{$一个人是色盲$\}$

$P(B_1)=0.5$, $P(B_2)=0.5$, $P(A|B_1)=0.04$, $P(A|B_2)=0.002$.

$P(A)=0.5\times0.04+0.5\times0.002=0.021$

由 Bayes 公式：

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$=\frac{0.5\times0.04}{0.021}=\frac{20}{21}.$$

故此人为男性的概率是 $\frac{20}{21}$.

三. 解：设 $B_1=\{$第一次作业合格$\}$

$B_2=\{$第二次作业合格$\}$

$P(B_1)=p$, $P(B_2|B_1)=p$

$P(B_2|\overline{B_1})=\frac{p}{3}$.

(1) 设 $A=\{$至少有一次作业合格$\}$

$$P(A)=P(B_1B_2)+P(\overline{B_1}B_2)+P(B_1\overline{B_2})$$

$$=P(B_1B_2)+P(B_2|\overline{B_1})\cdot P(\overline{B_1})+P(B_1)-P(B_1B_2)$$

$$=p+\frac{p}{3}(1-p)=-\frac{p^2}{3}+\frac{4}{3}p$$

故可以参加期末考试的概率为 $-\frac{p^2}{3}+\frac{4}{3}p$.

(2) 由 Bayes 公式：

$$P(B_1|B_2)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_2)}$$

$$=\frac{P(B_1)P(B_2|B_1)}{P(B_2B_1)+P(B_2\overline{B_1})}$$

$$=\frac{p^2}{p^2+\frac{p}{3}(1-p)}=\frac{p^2}{\frac{p}{3}+\frac{2}{3}p^2}=\frac{3p}{2p+1}$$

故第一次作业合格的概率为 $\frac{3p}{2p+1}$

四. 解：(1)

Z	1	2	3	$\cdots$	$2n-1$	$2n$
P	0.6	0.28	0.072	$\cdots$	$0.12^{n-1}\cdot0.6$	$0.12^{n-1}\cdot0.28$

$P(Z=2k-1)=0.12^{k-1}\times0.6$, $k=1,2,\cdots$

$P(Z=2k)=0.12^{k-1}\times0.28$, $k=1,2,\cdots$

(2) $$P(X=k)=0.12^{k-1}\times0.6+0.12^{k-1}\times0.4\times0.7$$

$$=0.12^{k-1}\times0.88,\quad k=1,2,\cdots$$

(3) $$P(Y=k)=0.4^k\times0.3^{k-1}\times0.7$$

$$+0.4^k\times0.3^k\times0.6$$

$$=0.12^{k-1}\times0.28+0.12^{k-1}\times0.072$$

$$=0.12^{k-1}\times0.352.$$

五. 解：(1) $$1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx$$

$$=2A\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$$

$$=2A(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}$$

$$=2A[0-(-1)]$$

$$=2A$$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}$.

(2) $$F(x)=\int_{-\infty}^{x}Ae^{-|t|}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{-|t|}dt$$

当 $x\geq0$ 时，

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt+\frac{1}{2}\int_0^{x}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{2}e^t\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}(-e^{-t})\Big|_0^{x}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}+1.$$

当 $x<0$ 时

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{t}dt=\frac{1}{2}(e^x-0)=\frac{1}{2}e^x.$$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, & x<0\\ -\frac{1}{2}e^{-x}+1, & x\geq0.\end{cases}$$

(3) $$P(-1<X<2)=F(2)-F(-1)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2}+1-\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2e^2}+1-\frac{1}{2e}$$

$$=1-\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^2}.$$

六. 解:

$$P(X=0) = \frac{C_{12}^5}{C_{15}^5} = \frac{11\times 9\times 8}{13\times 11\times 7\times 3} = \frac{24}{91}$$

$$P(X=1) = \frac{C_{12}^4\ C_3^1}{C_{15}^5} = \frac{45}{91}$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^3\ C_3^2}{C_{15}^5} = \frac{11\times 10\times 2\times 3}{13\times 11\times 7\times 3} = \frac{20}{91}$$

$$P(X=3) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^5} = \frac{11\times 6}{13\times 11\times 7\times 3} = \frac{2}{91}$$

X的分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{24}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{45}{91} + \frac{40}{91} + \frac{6}{91} = \frac{91}{91} = 1.$$

七. 解:(1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|}\cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} x e^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} x e^{-x}\,dx\right)$$

$= 0$ (奇函数)

(2) $D(X) = E([X-E(X)]^2)$

$$= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X)$$

$$= E(X^2) - E^2(X)$$

$$= E(X^2)$$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

$$= \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} x^2\,de^{-x}$$

$$= -\left(x^2 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx^2\right)$$

$$= -\left(0 - 2\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx\right) = 2$$

$\Rightarrow D(X) = 2.$