《人工智能引论》课后练习-5

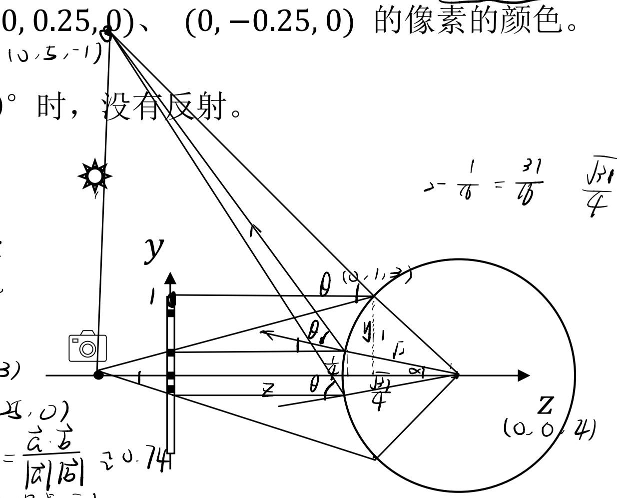
内容：仿真与多智能体 **提交时间：**2023-06-10 **姓名：**刘沛雨 **学号：**2100012289

一、（40 分）假设有三维场景如下图所示（注意，仅为示意图）。相机坐标为 $(0,0,-1)$，屏幕平面中心位于原点，且与 z 轴垂直。空间中有一球体，球心坐标为 $(0,0,4)$ ，半径为$\sqrt{2}$。球体本身的颜色数值为 0.2 。光源位置为 $(0,5,-1)$ ，颜色为0.8。其他空间为全黑，颜色为0 。

（1）计算透视投影下屏幕上三维坐标为$(0,1,0)$ 、$(0,0.25,0)$、 $(0,-0.25,0)$ 的像素的颜色。

（2）计算在正交投影下，上述三个像素的颜色。

提示：光线在反射面背侧，即光线法线夹角超过 90° 时，没有反射。



$2-\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$ $\frac{\sqrt{31}}{4}$

解：(1) 如图，从 $(0,1,0)$ 发出的射线不与球体相交，故颜色为0，从 $(0,0.25,0)$ 发出的射线与球体相交于 $(0,1,3)$，此时光源直射 $(0,1,3)$，故 $(0,0.25,0)$ 的颜色为 $0.2+0.8=1$（理想漫反射），从 $(0,-0.25,0)$ 发出的射线与球体相交于 $(0,-1,3)$，此时无光线反射，故 $(0,-0.25,0)$ 的颜色为0.2，

(2) 如图，① $(0,1,3)$ 投影到 $(0,1,0)$，由(1)知 $(0,1,3)$ 像素的颜色为1.0 ② $(0,0.25,4-\frac{\sqrt{31}}{4})$ 投影到 $(0,0.25,0)$ 设 $\vec{a}=(0,0.25,-\frac{\sqrt{31}}{4})$，$\vec{b}=(0,\frac{19}{4},\frac{\sqrt{31}}{4}-5)\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\approx 0.74$

$\Rightarrow$ 颜色为 $0.2+0.8\times\cos\theta=0.792$，③ $(0,-0.25,4-\frac{\sqrt{31}}{4})$ 投影到 $(0,-0.25,0)$，设 $\vec{a}=(0,-0.25,-\frac{\sqrt{31}}{4})$，$\vec{b}=(0,\frac{21}{4},\frac{\sqrt{31}}{4}-5)\Rightarrow$

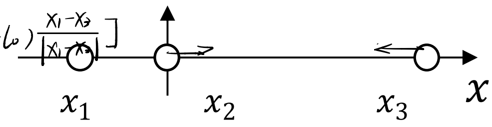
$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\approx 0.41\Rightarrow$ 颜色为0.528

二、（40 分）有一维三体问题如下图所示。三个物体 (x_1,x_2,x_3) 质量均为$m=1$，在$t=0$时刻坐标分别为 $(-1,\ 0,\ 3)$，速度(v_1,v_2,v_3)分别为 $(0,1,-1)$ 。假设任意两点间有原长为$l_0=1$，劲度系数$k=1$的弹簧连接。不考虑质点之间的碰撞。取时间步长为 $h=1$。

（1）写出$t=0$时，三个质点的运动方程，请用上述符号(x,v,m,t,l_0,k)表示。

（2）使用半隐式欧拉积分，计算 $t=1$ 时三个质点的位置和速度

（3）使用隐式欧拉积分，计算 $t=1$ 时三个质点的位置和速度



解：(1) x_1：$v_1=\frac{dx_1}{dt}$

$$a_1=\frac{dv_1}{dt}=\frac{-k}{m}\left[(|x_1-x_2|-l_0)\frac{x_1-x_2}{|x_1-x_2|}+(|x_1-x_3|-l_0)\frac{x_1-x_3}{|x_1-x_3|}\right]$$

x_2：$v_2=\frac{dx_2}{dt}$

$$a_2=\frac{dv_2}{dt}=-\frac{k}{m}\left[(|x_1-x_2|-l_0)\frac{x_2-x_1}{|x_1-x_2|}+(|x_2-x_3|-l_0)\frac{x_2-x_3}{|x_2-x_3|}\right]$$

x_3：$v_3=\frac{dx_3}{dt}$

$$a_3=\frac{dv_3}{dt}=-\frac{k}{m}\left[(|x_1-x_3|-l_0)\frac{x_3-x_1}{|x_1-x_3|}+(|x_2-x_3|-l_0)\frac{x_3-x_2}{|x_2-x_3|}\right]$$

(2) x_1：$v_1(1)=0+\frac{k(x_3-x_1-l_0)}{m}h=3$.

$x_1(1)=x_1+v_1(1)h=-1+3=2$.

x_2：$v_2(1)=1+2=3$

$x_2(1)=x_2+v_2(1)h=3$

x_3：$v_3(1)=-1+(-1-6+2)\times 1=-6$.

$x_3(1)=x_3+v_3(1)h=-3$.

(3)
$$\begin{cases} v_1(1)=v_1(0)+a_1(1)h \\ x_1(1)=x_1(0)+v_1(1)h \\ v_2(1)=v_2(0)+a_2(1)h \\ x_2(1)=x_2(0)+v_2(1)h \\ v_3(1)=v_3(0)+a_3(1)h \\ x_3(1)=x_3(0)+v_3(1)h \end{cases}$$

$\Rightarrow v_1(1)=x_2(1)+x_3(1)-2x_1(1)-2$

$x_1(1)=-1+v_1(1)$

$v_2(1)=1+[-(x_2(1)-x_1(1)-l_0)]+(x_3(1)-x_2(1)-l_0)]$

$=1-x_2(1)+x_1(1)+1+x_3(1)-x_2(1)-1$

$=x_1(1)+x_3(1)-2x_2(1)+1$

$x_2(1)=v_2(1)$

$v_3(1)=-1-(x_3(1)-x_1(1)-1)-(x_3(1)-x_2(1)-1)$

$=-1-x_3(1)+x_1(1)+1-x_3(1)+x_2(1)+1$

$=x_1(1)+x_2(1)-2x_3(1)+1$

$x_3=3+v_3(1)$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1(1)=\frac{3}{4},\ x_1(1)=-\frac{1}{4} \\ v_2(1)=\frac{3}{4},\ x_2(1)=\frac{3}{4} \\ v_3(1)=-\frac{3}{2},\ x_3(1)=\frac{3}{2} \end{cases}$

三、（20 分）

（1）给出非合作博弈问题的收益矩阵如下：

	$B: x$	$B: y$	$B: z$
$A: u$	$A=0, B=4$ ×	$A=5, B=6$ ×	$A=8, B=7$ ○
$A: v$	$A=2, B=9$ ○	$A=6, B=5$ ×	$A=5, B=1$ ×

是否有纯策略纳什均衡？如有，写出所有的纳什均衡点。

（2）给出非合作博弈问题的收益矩阵如下：

		q	$1-q$
		$B: x$	$B: y$
p	$A: u$	$A=2, B=-2$	$A=-5, B=5$
$1-p$	$A: v$	$A=-3, B=3$	$A=3, B=-3$

是否有纯策略纳什均衡？如有，写出所有的纳什均衡点。 $2q-5(1-q)$

混合策略纳什均衡是什么，A 的收益是多少？

解:(1) 有，所有纳什均衡点为 $\{(v, x), (u, z)\}$

(2) 无纯策略纳什均衡.

注意到这是一个双人零和博弈

设 A 选 u 的概率为 p，B 选 x 的概率为 q

对 B: $\arg\min_q \{2p-3(1-p), -5p+3(1-p)\}$.

$=\arg\min_q \{5p-3, -8p+3\}$ $\qquad \frac{30}{13}-3$

该函数最大值在 $p=\frac{6}{13}$ 时取到，此时 A 收益为 $-\frac{9}{13}$

对 A: $\arg\max_p \{2q-5(1-q), -3q+3(1-q)\}$

该函数最小值在 $q=\frac{8}{13}$ 时取到，此时 A 收益为 $-\frac{9}{13}$.

故混合策略均衡为 $\{u: \frac{6}{13}, x: \frac{8}{13}\}$.