第八、九、十章作业.

第八章

4. 证: "⇒" 用反证法.

若 $G-v_0$ 中含圈 C，则 $v_0\notin C$，令 $G'=G-E(C)$，

G 是欧拉图 $\Leftrightarrow \forall v\in V(G), d_G(v)\equiv 0 \pmod 2$

$\Rightarrow \forall v\in V(G), d_{G'}(v)\equiv 0 \pmod 2$（在图中删去圈的所有边不改变顶点奇偶性）

① G' 连通 ⇒ G' 也是欧拉图

v_0 可以任意行遍 ⇒ 在 G' 中从 v_0 出发可以遍历 G' 中所有边后回到 v_0.

$v_0\notin C$ ⇒ 无法再从 v_0 出发边不重地遍历 C 中的边

这与 v_0 是可以任意行遍的矛盾！

故 $G-v_0$ 中无圈.

? ② G' 不连通. 设 G' 有 p 个连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_p$. 显然,

$G_i\ (i=1,2,\cdots,p)$ 是欧拉图.

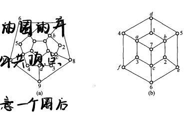
不妨设 $v_0\in G_1$，在从 v_0 开始行遍 G 的欧拉回路时，无行

遍 G_1 的所有边，由于不连通性以及 $v_0\notin G'$，所以 $G_2,\cdots,G_p$

和 C 均无法行遍，这与 v_0 是可以任意行遍的矛盾！

故 $G-v_0$ 中无圈.

"⇐" G 是欧拉图 ⇔ G 是若干个边不重的圈的并



$G-v_0$ 中无圈 ⇒ v_0 是 G 中所有圈的公共顶点.

⇒ 从 v_0 出发可以行遍任意一个圈后

再回到 v_0

⇒ v_0 是可以任意行遍的.

7. 证.

图 G 是无向哈密顿图 ⇒ $\forall V\subseteq V(G)$，$p(G-V)\le |V|$

(a) 取 $V=\{a,b,c,d,e\}$

$p(G-V)=7>5$

故图(a)不是哈密顿图.

(b) 取 $V=\{a,b,c,d,e,f\}$

$p(G-V)=7>6$

故图(b)不是哈密顿图.

13. 证: 建模如下: 令 $G=\langle V,E\rangle$

在图 G 中，每个顶点代表一个人，两人认识则在 G 中对应的

两顶点之间连一条边.

依题知: $\forall u,v\in V(G)$，$d_G(u)+d_G(v)\ge n-2$.

只需证: 当 $n\ge 3$ 时，G 为半哈密顿图

当 $n\ge 4$ 时，G 为哈密顿图.

$\forall u,v\in V(G)$，$d(u)+d(v)\ge n-2$.

① u 与 v 认识 ⇒ $d(u)+d(v)\ge n-2+2=n$（不影响是否为哈密顿图的判断）

② u 与 v 不认识，则 $\forall w\in V(G)\wedge w\ne u\wedge w\ne v$ ⇒ u,v 都认识 w.

否则必出现以下三种情况:

a. u 认识 w，v 不认识 w

⇒ u 和 w 合起来至多只能认识 $n-3$ 人（他们都不认识 v）

b. v 认识 w，u 不认识 w

⇒ v 和 w 合起来至多只能认识 $n-3$ 人（他们都不认识 u）

c. u, v 都不认识 w

⇒ u 和 v 合起来至多只能认识 $n-3$ 人（他们都不认识 w）

均矛盾.

$\Rightarrow d(v_i)+d(v_j)\ge 2(n-2)=2n-4$

当 $n\ge 3$ 时，$d(v_i)+d(v_j)\ge n-1$ ⇒ G 是半哈密顿图.

当 $n\ge 4$ 时，$d(v_i)+d(v_j)\ge n$ ⇒ G 是哈密顿图.

第九章

2. 解: 设度数为 i 的顶点数为 n_i.

$\Rightarrow n_1=9,\ n_3=3,\ n=n_1+n_3+n_4$

$\Rightarrow n=12+n_4$

$2m=3\times 3+4n_4+9$

$\Rightarrow m=\dfrac{9+4n_4}{2}=n-1$

$\Rightarrow 9+9+4n_4=24+2n_4-2$

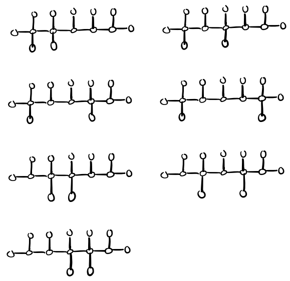
$\Rightarrow 2n_4=4$

$\Rightarrow n_4=2,\ n=14$

∴ T 中有 2 个 4 度顶点

T 的度数列为 $\{4,4,3,3,3,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

非同构的无向树有



6. 证: 用反证法证明.

假设 G 或 $\bar{G}$ 中均无圈.

设 $G=\langle V,E\rangle$，$\bar{G}=\langle V,E'\rangle$

$n=|V|$，$m=|E|$，$m'=|E'|$

设 G 的连通分支数为 s，G' 的连通分支数为 s'.

则 G 和 G' 的每一个连通分支均为树.

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle \sum_{i=1}^{s} m_i+\sum_{i=1}^{s'} m_i'}{\underset{\shortparallel}{m+m'}}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{s} m_i+\sum_{i=1}^{s'} m_i' = (n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_s-1) + (n_1'-1)+(n_2'-1)+\cdots+(n_s'-1)$$

$$= n-s+n-s'$$

$$= 2n-(s+s')\le 2n-2.$$

$\Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}\le 2n-2$

$\Rightarrow n^2-n\le 4n-4$

$\Rightarrow n^2-5n+4\le 0$

$\Rightarrow 1\le n\le 4$

这与 $n\ge 5$ 矛盾！

⇒ G 或 $\bar{G}$ 中必含圈.

11. 证: 用反证法证明:

假设 T 至多有 $k-1$ 片树叶，设 $|V(T)|=n$，则至少有

$n-k+1$ 个结点度数大于等于 2

设 $v\in V(T)\wedge d_T(v)=\Delta(T)$.

⇒ 除 v 与树叶外至少还有 $n-k$ 个结点度数大于等于 2

$\Rightarrow 2(n-1)\ge \Delta(T)+k-1+(n-k)\cdot 2$

$\ge 2k-1+2n-2k=2n-1$

$\Rightarrow 2n-2\ge 2n-1$，矛盾！

故 T 至少有 k 片树叶.

第十章

2. 解: 图的关联矩阵如下:

$$M_f=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

$$令\ M_f'=\begin{array}{c} \\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

观察到生成树必含 e_6，故有以下情况:

① e_1, e_2, e_3, e_6

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

∴ $G[\{e_1,e_2,e_3,e_6\}]$ 是生成树

② e_1, e_2, e_4, e_6

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

∴ $G[\{e_1,e_2,e_4,e_6\}]$ 不是生成树

③ e_1, e_2, e_5, e_6

④ e_1, e_3, e_4, e_6

⑤ e_1, e_3, e_5, e_6

⑥ e_2, e_3, e_4, e_6

⑦ e_2, e_3, e_5, e_6

⑧ e_2, e_4, e_5, e_6

⑨ e_3, e_4, e_5, e_6

⑩ e_1, e_4, e_5, e_6

同理可得:

是生成树的为 ③, ④, ⑤

⑥, ⑧, ⑨, ⑩

4. 解:

$$A(D)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\qquad B^4(D)=\begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 2\\ 8 & 8 & 6 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2(D)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3(D)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4(D)=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 各为 0, 0, 2, 2 条

(2) 为 2 条

(3) 分别为 1, 1, 3, 5 条

(4) 1 条

(5) 33 条

(6) 11 条

(7) 88 条，其中有 22 条回路.

(8)

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$