10.1 10.1 节中最小顶点覆盖问题的近似算法 MVC 任取一条边，把这条边的两个端点加入顶点覆盖集，现在改为只把这条边的一个端点加入顶点覆盖集，其余不变. 试分析这个修改后的算法的近似性能.

解：设改进后的算法为 I-MVC，显然是多项式时间算法．

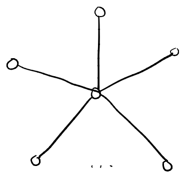
对∀实例 I，设 I 由无向图 $G=\langle V,E\rangle$，则

$$\text{I-MVC}(I) \le |V|-1$$

$$OPT(I) \ge 1$$

$$\Rightarrow \text{I-MVC}(I) \le (|V|-1)\, OPT(I)$$

紧实例为星形图，如下图：



10.3 装箱问题（优化形式）：任给 n 件物品，物品 j 的重量为 w_j，$1\le j\le n$. 限制每只箱子装入物品的总重量不超过 B，这里 w_j 和 B 都是正整数，且 $w_j\le B$，$1\le j\le n$. 要求用最少的箱子装入所有的物品，怎么装法？

考虑下述简单的装法.

首次适合算法(FF)：按照输入顺序装物品，对每一件物品，依次检查每一只箱子，只要能装得下就把它装入. 只有在所有已经打开的箱子都装不下这件物品时，才新打开一只箱子.

证明：对装箱问题的所有实例 I，

$$FF(I) < 2OPT(I)$$

证：对∀I，若 $FF(I)=1$，则 $FF(I)=OPT(I)<2OPT(I)$

若 $FF(I)>1$，

设 $W=\sum_{j=1}^{n} w_j$，则 $OPT(I)\ge \frac{W}{B}$

下证：$FF(I) < \frac{2W}{B}$

由题知：最终任意两只箱子重量之和大于 B．

⇒ ① $FF(I)$ 为偶数

$$W > FF(I)\cdot\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow FF(I) < \frac{2W}{B}.$$

② $FF(I)$ 为奇数

$$W > (FF(I)-1)\cdot\frac{B}{2} + M,\quad M > \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow W > FF(I)\cdot\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow FF(I) < \frac{2W}{B}.$$

综上，∀I，$FF(I) < 2OPT(I)$．

10.4 证明：装箱问题不存在近似比 $r<\frac{3}{2}$ 的多项式时间近似算法，除非 $\mathbf{P}=\mathbf{NP}$.

证：假设存在 $r<\frac{3}{2}$ 的多项式时间近似算法A

∀双机调度问题的实例 I，I 由 n 项作业 $j_1,j_2,\dots,j_n$

及其对应的时间 $t_1,t_2,\dots,t_n$，和截止时间 D 组成．

将 I 转化为装箱问题的实例 I'：

n 件物品，物品重量为 $t_1,t_2,\dots,t_n$．$B=D$

若对于 I，所有作业能在 D 内完成，则

$$A(I') < \frac{3}{2}OPT(I') = 3.$$

否则 $A(I') \ge OPT(I') \ge 3$

故可由A构造解决双机调度问题的多项式时间算法．

故 $P=NP$．

∎