第七章作业

1. 解：设G中至少有k个顶点，

$v_1, v_2, \cdots, v_k$,

则 $\sum_{i=1}^{k} d(v_i) = 2\times 16 = 32$.

不妨设 v_1, v_2, v_3 为4度顶点，

v_4, v_5, v_6, v_7 为3度顶点，

$\Rightarrow \sum_{i=8}^{k} d(v_i) = 32-3\times 4-4\times 3 = 8$.

$\Delta(G) < 3$,

$\Rightarrow$ 当 $d(v_i)=2$，$i=8,9,\cdots,k$ 时

G中顶点数最小

$\Rightarrow (k-8+1)\times 2 = 8$

$\Rightarrow k=11$.

即G中至少有11个顶点。

2. 解：设 $G=\langle V,E\rangle$，$n=|V|=9$

设有 x 个5度顶点、$(9-x)$ 个6度顶点，

则 x 为偶数，如下表，

x	9-x
0	9
2	7
4	5
6	3
8	1

证毕.

3. 证：建模如下：将多面体的每个面看作无向图G中一点，若两个面相交（有在一条棱）则在两个面对应顶点之间连一条边.

设 $G=\langle V,E\rangle$，则由握手定理：

$\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = 2|E|$

若存在有奇数个面且每个面均有奇数条棱的多面体，

则 $|V|$ 与 $d(v_i)$ 均为奇数，故 $\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i)$ 为奇数，而 $2|E|$ 为偶数，矛盾！

∎

5. 解：2种，证明如下：

$G=\langle V,E\rangle$，$|V|=n$,

$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$d(v_i)=3$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 3n = 2m$ ①.

又 $2n-3=m$ ②

$\Rightarrow \begin{cases} n=6 \\ m=9 \end{cases}$.

引理：$G_1\cong G_2 \Leftrightarrow \overline{G_1}\cong\overline{G_2}$.

证明如下：$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$.

$G_1\cong G_2$

$\Leftrightarrow$ ∃双射 $f: V_1\to V_2$,

$\forall v_i,v_j\in V_1$，$(v_i,v_j)\in E_1 \Leftrightarrow (f(v_i),f(v_j))\in E_2$.

$\Leftrightarrow \forall v_i,v_j\in V_1$，$(v_i,v_j)\notin E_1 \Leftrightarrow (f(v_i),f(v_j))\notin E_2$.

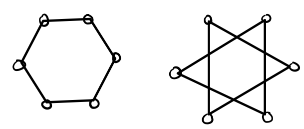
$\Leftrightarrow \forall v_i,v_j\in V_1$，$(v_i,v_j)\in \overline{E_1} \Leftrightarrow (f(v_i),f(v_j))\in \overline{E_2}$,

$\Leftrightarrow \overline{G_1}\cong\overline{G_2}$.

考虑 $n=6$，$m=9$ 的无向简单图G的补图 $\overline{G}=\langle V',E'\rangle$.

$|V'|=6$，$|E'| = \frac{6\times 5}{2}-9 = 6$.

易知：$\overline{G}$ 为2-正则图，故 $\overline{G}$ 有且仅有如下两种非同构的情况.



$\Rightarrow$ G有2种非同构的情况.

11. 证：设 $G=\langle V,E\rangle$，$|E(G)|=m\,(m\geq 0)$

$G\cong\overline{G}$

$\Rightarrow |E(\overline{G})|=m \wedge |E(G)|+|E(\overline{G})| = \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow 2m = \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow n(n-1)=4m$

由于 n 与 $n-1$ 互素

$\Rightarrow n=4k \vee n-1=4k$，$k\in Z+$.

$\Rightarrow n=4k$ 或 $n=4k+1$，$k\in Z+$.

∎

14. 证：用反证法证明：$G=\langle V,E\rangle$.

假设 $\forall u,v,w\in V(G)$，$(u,v),(v,w)\in E(G)$

$\Rightarrow (u,w)\in E(G)$

$\forall v_1,v_k\in V(G)\wedge v_1\neq v_k$.

G连通

$\Rightarrow v_1,v_k$之间有在一条通路$\Gamma=v_1v_2\cdots v_k$.

$\Rightarrow (v_1,v_k)\in E(G)$ （假设）

$\Rightarrow G$为完全图K_n.

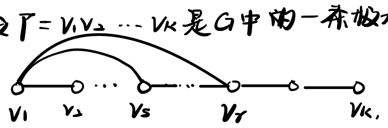
矛盾！

∎

16. 证：用扩大路径法证明：

不妨设G为连通的，否则可分别对G的各个连通分支进行讨论.

设$\Gamma=v_1v_2\cdots v_k$是G中的一条极大路径.



由$\delta(G)\geq 3$知：

$\exists\ 2<s<r$，(v_1,v_s)，$(v_1,v_r)\in E(G)$.

其中，$v_s, v_r\in V(\Gamma)$.

$\Rightarrow C_1=v_1v_2\cdots v_sv_1$

$C_2=v_1v_2\cdots v_rv_1$

$C_3=v_1v_s\cdots v_rv_1$

$\Rightarrow |C_1|=s$

$|C_2|=r$

$|C_3|=1+r-s+1=r-s+2$.

设$\gcd(s,r,r-s+2)=k$.

即 $s=m_1k$，$r=m_2k$，$r-s+2=m_3k$

$\Rightarrow k\mid r-s\wedge k\mid r-s+2$.

$\Rightarrow k=1\vee k=2$.

即$|C_1|,|C_2|,|C_3|$的最大公约数为1或2.

$\Rightarrow$ 各圈长度的最大公约数为1或2.

∎

18. 证：(1) 用反证法证明：

设G不连通，不妨令$G=G_1\cup G_2$，$G_1\cap G_2=\emptyset$.

$|V(G_1)|=n_1$，$|V(G_2)|=n_2$，$n=n_1+n_2$.

设$G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.

$\delta(G)\geq\frac{n}{2}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\geq n\cdot\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$.

G不连通 $\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\leq\frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{n_2(n_2-1)}{2}$

$=\frac{1}{2}(n_1^2-n_1+n_2^2-n_2)$

$=\frac{1}{2}((n_1+n_2)^2-2n_1n_2-n)$

$=\frac{1}{2}(n^2-2n_1n_2-n)<\frac{n^2}{2}$.

这与$\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\geq\frac{n^2}{2}$矛盾！

故G为连通图.

∎

(2) 只需证：$\forall V'\subset V(G)$，$|V'|=k-1$，$G-V'$仍连通.

$\delta(G-V')\geq\delta(G)-(k-1)\geq\frac{1}{2}(n+k-1)-k+1=\frac{1}{2}(n-k+1)$

$=\frac{|V(G')|}{2}$

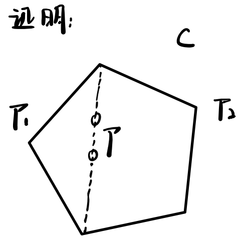
由(1)知：$G-V'$连通.

∎

22、证：先证明如下命题：

若 C 为一个奇圈，则 $\forall u,v \in V(C)$，$u \neq v$，u 与 v 之间与 C 边不重的路径 Γ 与 C 所构成的图中必有在偶圈.

证明：



Γ 将 C 划分为两部分 Γ_1、Γ_2，

C 为奇圈.

$\Rightarrow |V(\Gamma_1)|$、$|V(\Gamma_2)|$ 一个为奇数一个为偶数

$\Rightarrow$ Γ 与 Γ_1 或 Γ 与 Γ_2 形成的图中必有一个为偶圈

下证原命题：

设 B 为 G 中任意一个块.

① B 为 K_2 符合题意.

② B 不为 $K_2 \Rightarrow |V(B)| \geq 3$.

由块的定义知：B 中无 B 的割点，

$\Rightarrow$ B 一定为 2-连通图.

$\Leftrightarrow$ B 中任意两顶点共圈.

$\Rightarrow$ B 中含圈.

$\Rightarrow$ 设 C' 为 B 中奇圈（G 中无偶圈）

a. 若 $G = C'$ 则符合题意.

b. 若 $G \neq C'$，即 $C' \subset G$

则 C' 上存在两不同顶点 u,v，$u,v \in V(G)$

且 u,v 之间有与 C' 边不交的路径 Γ（否则会出现割点）

由命题知：G 中存在偶圈，从而矛盾.

故 $G = C'$ 为奇圈.

综上 故得证.

25、证：$n=2$，3 时显然 D 不可能是强连通的.

当 $n \geq 4$ 时，用反证法证明：

假设 D 为强连通图，设 $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

则存在由 v_1 到 v_n 的通路 $\Gamma = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_j e_j v_n$

由 D 的传递性 $\Rightarrow \langle v_1, v_n \rangle \in E(D)$.

同理可推出 $\langle v_n, v_1 \rangle \in E(D)$

与 D 是竞赛图矛盾！

故 D 不可能强连通.

∎