近似算法

概念

P

1. 近似算法和最优化算法
2. 近似比和r-近似算法
3. 多项式时间近似方案、完全多项式时间近似方案

可近似性分类

近似性	问题
完全可近似	背包问题
可近似	最小顶点覆盖问题， 多机调度问题
不可近似	货郎问题

最小顶点覆盖

算法	近似比
MVC	2

① $O(E)$

② $|V| = 2k$

$OPT(I) \geq k$

$MVC(I) \leq 2k$

③ 紧实例

$G = <V, E>$

E中边互不关联

多机调度问题

算法	近似比
G-MPS	$2 - \frac{1}{m}$
DG-MPS	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}$

$G\text{-}MPS(I) - t_b \leq \frac{1}{m}(\sum t_i - t_b)$

$G\text{-}MPS(I) \leq \frac{1}{m}\sum t_i + (1-\frac{1}{m}) t_b$

$\leq OPT(I) + (1-\frac{1}{m}) OPT(I)$

紧实例： $\underline{m(m-1)} \times 1 + \underline{1} \times m$

$r = \frac{2m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m}$

$t_b \leq \underline{\underline{\frac{1}{2}}} OPT(I)$

① M_j上只有一个作业 $\Rightarrow b = 1$

② M_j上不只有一个作业 $\Rightarrow OPT(I) \geq t_m + t_{m+1} \geq 2t_b \; (m+1 \geq b)$

$\Rightarrow t_b \leq \frac{1}{2} OPT(I)$

满足三角不等式的货郎问题

算法	近似比
NN	$(\frac{1}{3}(log_2(n+1)+\frac{4}{3}), \frac{1}{2}(\lceil log_2 n\rceil + 1)]$
MST	2
MM	$\frac{3}{2}$

×

$w(T(I)) < OPT(I)$

$\Rightarrow MST(I) < 2w(T(I)) < 2OPT(I)$

有紧实例

"最小生成树的奇度顶点在原图中导出子图的最小匹配"

$w(M) \leq \frac{1}{2} w(C) \leq \frac{1}{2} OPT(I)$

$MM(I) \leq w(M) + w(T)$

$\leq \frac{1}{2} OPT(I) + OPT(I)$

货郎问题

不可近似，除非P=NP

设A为近似算法.
HC ≤p TSP. ⇒ P = NP

0-1背包问题

算法	近似比	时间复杂度
G-KK	2	$O(n)$
PTAS_ε	$1+\epsilon$	$O(n^{\frac{1}{\epsilon}+2})$
FPTAS_ε	$1+\epsilon$	$O(n^3(1+\frac{1}{\epsilon}))$

① 都能装入 √
② 有一个不能装入，设第一个为 l

$G\text{-}KK(I) + v_l > OPT(I)$
$\Rightarrow G\text{-}KK(I) + v_{max} > OPT(I)$
$\Rightarrow 2G\text{-}KK(I) > OPT(I)$