Nguyễn Thị Bạch Kim

Giáo trình
Các Phương pháp Tối ưu
Lý thuyết và Thuật toán

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA - HÀ NỘI

Nguyễn Thị Bạch Kim

Giáo trình
Các Phương pháp Tối ưu
Lý thuyết và Thuật toán

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA – HÀ NỘI

Mã số: 285-2008/CXB/08-57/BKHN

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid n chiều
$x \in D$	x thuộc tập D
$x \notin D$	x không thuộc tập D
$\emptyset$	tập rỗng
$C \setminus D$	hiệu của tập C và D
$C \cup D$	hợp của tập C và tập D
$C \cap D$	giao của tập C và tập D
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của x và y
$\|x\|$	chuẩn Euclid của x
$|x|$	giá trị tuyệt đối của x
$\mathrm{aff}E$	bao afin của tập E
$\mathrm{conv}E$	bao lồi của tập E
$\mathrm{dim}E$	thứ nguyên (hoặc số chiều) của tập E
$|X|$	số phần tử của tập X
$[x^1, x^2]$	đoạn nối hai điểm x^1 và x^2
$\mathrm{int}X$	phần trong của tập X
$\mathrm{ri}X$	phần trong tương đối của tập X
$\mathrm{rec}X$	nón lùi xa của tập X
$\mathrm{cone}\{v^1, \cdots, v^k\}$	nón sinh bởi các véc tơ $v^1, \cdots, v^k$
$T(X, x^*)$	nón tiếp xúc với tập X tại điểm x^*
$F(X, x^*)$	tập các hướng chấp nhận được của tập X tại x^*
$\mathrm{dom}f$	miền xác định hữu hiệu của f
$\mathrm{epi}(f)$	epigraph của hàm f
$\mathrm{hypo}(f)$	hypograph của hàm f
$f'(x^0, d)$	đạo hàm theo hướng của hàm f theo hướng d tại x^0
$\nabla f(x)$	véc tơ gradient của hàm f tại điểm x
$\nabla^2 f(x)$	ma trận Hesse của hàm f tại điểm x
f'_{x_i}	đạo hàm riêng của f theo biến x_i

A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	ma trận nghịch đảo của ma trận khả nghịch A
I_m	ma trận đơn vị cấp m
rank$A$	hạng của ma trận A
$\mathbb{L}$	hàm Lagrange
v.đ.k.	viết tắt của cụm từ "với điều kiện"
t.ư.	viết tắt của chữ "tương ứng"

Lời mở đầu

"Vì thế giới được thiết lập một cách hoàn hảo
và vì nó là sản phẩm của đấng sáng tạo tinh thông
nên không thể tìm thấy một cái gì mà không mang tính chất cực đại hay cực tiểu nào đó."
Leonhard Euler

Có nhiều tình huống trong xã hội, từ cuộc sống đời thường đến các hoạt động kinh tế, kỹ thuật, công nghệ và quản lý hiện đại... người ta phải quan tâm tới bài toán tìm ra phương án tốt nhất để đạt mục tiêu mong muốn trong những điều kiện ràng buộc nhất định. Đó là các *bài toán tối ưu*. Chính những nỗ lực nhằm giải các bài toán tối ưu đã góp phần kích thích sự phát triển của Giải tích Toán học thế kỷ XVII - XVIII với sự đóng góp to lớn của những nhà toán học lỗi lạc của mọi thời đại: Fermat[1], Leibniz[2], Euler[3]... Tuy nhiên, phải đến những năm 30, 40 của thế kỷ XX, Quy hoạch toán học (Mathematical Programming) hay còn gọi là Toán Tối ưu (Optimization) mới hình thành với tư cách là một lý thuyết độc lập với nhiều hướng nghiên cứu khác nhau: đầu tiên là Quy hoạch tuyến tính (Linear Programming), tiếp đó là Quy hoạch lồi (Convex Programming), Quy hoạch toàn cục (Global Programming), Lý thuyết điều khiển Tối ưu (Optimization Control).

Ngày nay, với sự trợ giúp của cuộc cách mạng công nghệ thông tin, quy hoạch toán học ngày càng phát triển mạnh mẽ. Các phương pháp tối ưu đã được ứng dụng rộng rãi trong mọi lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, công nghệ, quản lý, kinh tế, khai thác dữ liệu (data mining), viễn thông, v.v. .

Giáo trình này trình bày các phương pháp tối ưu tiêu biểu và có nhiều ứng dụng để giải quyết các bài toán nảy sinh trong thực tế. Để nắm được nội dung của giáo trình người đọc chỉ cần có những kiến thức cơ bản của đại số tuyến tính và giải tích cổ điển. Giáo trình gồm sáu chương. Chương 1 trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản của giải tích lồi cần dùng đến trong các chương sau. Mô hình toán học

[1]Pierre De FERMAT (1601 - 1665): Nhà toán học Pháp. Ông nổi tiếng về những định lý số học (không có chứng minh) được ông ghi bên lề một cuốn sách. Định lý lớn của Fermat "*Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên khi $n > 2$*" mới được chứng minh năm 1995 bởi nhà toán học Anh Andrew Wiles.

[2]Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716): Nhà toán học Đức. Cùng với Newton, ông được coi là cha đẻ của phép tính vi phân và tích phân.

[3]Leonhard EULER (1707 - 1783): Nhà toán học và vật lý học người Thụy Sĩ. Ông là nhà toán học có nhiều công trình nhất trong lịch sử. Nhà toán học thiên tài người Đức Gauss (1777 - 1855) nói rằng: "Nghiên cứu các công trình của Euler là trường học tốt nhất về những lĩnh vực khác nhau của toán học mà không gì có thể thay thế được".

của bài toán tối ưu và điều kiện tồn tại nghiệm được trình bày ở Chương 2. Chương 3 trình bày Quy hoạch tuyến tính. Một trường hợp đặc biệt của quy hoạch tuyến tính nhưng được ứng dụng rất nhiều là Bài toán vận tải được trình bày ở Chương 4. Chương 5 dành cho Quy hoạch nguyên. Các phương pháp giải bài toán quy hoạch phi tuyến được đề cập ở Chương 6. Phần cuối của cuốn sách là Danh mục từ khóa, trong đó tên các khái niệm được sắp xếp theo thứ tự chữ cái đầu kèm theo trang cần tìm. Một số ký hiệu và chữ viết tắt được đặt ngay sau Mục lục.

Giáo trình được biên soạn theo chương trình môn học "Các phương pháp tối ưu", với thời lượng là 6 đơn vị học trình, do Bộ môn Toán ứng dụng xây dựng và đã được Hội đồng Khoa học của Khoa Toán Tin ứng dụng, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội thông qua. Tác giả trân trọng cảm ơn Ban Chủ nhiệm Khoa Toán Tin ứng dụng đã luôn tạo điều kiện thuận lợi, động viên, khích lệ để giáo trình này được hoàn thành.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, GS. TSKH. Đỗ Hồng Tân và GS. TS. Trần Vũ Thiệu đã dành không ít thời gian để đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu về nội dung cuốn sách. Chân thành cảm ơn các em sinh viên Nguyễn Xuân Quang (K42), Tăng Thị Hà Yên (K46, lớp KSTN), Nguyễn Thị Hà (K46), Nguyễn Thị Lê Trang, Đặng Đình Công (K48, lớp KSTN), Nguyễn Thùy Linh (K48), Nguyễn Thị Mai Thương (K49), giảng viên Tạ Anh Sơn, Nguyễn Quang Thuận và Lê Quang Thủy (Khoa Toán Tin ứng dụng) đã giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình soạn thảo.

Giáo trình này chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Tác giả mong rằng sẽ nhận được những góp ý của các đồng nghiệp và học viên, sinh viên nhằm làm cho việc trình bày nội dung cuốn sách tốt hơn. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: Nguyễn Thị Bạch Kim, Khoa Toán Tin ứng dụng, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, số 1, đường Đại Cồ Việt, Hà Nội. Xin trân trọng cảm ơn.

Hà Nội, tháng 3 năm 2008

Nguyễn Thị Bạch Kim

Chương 1

Một số khái niệm và kết quả cơ bản từ giải tích lồi

Giải tích lồi đóng vai trò rất quan trọng trong việc nghiên cứu, phân tích và xây dựng các thuật toán giải các bài toán tối ưu. Mục đích chính của chương này là giới thiệu một số khái niệm và kiến thức cơ bản về giải tích lồi sẽ dùng đến trong các chương sau. Những chứng minh không được đưa vào chương này có thể tìm thấy trong [42], [43].

1.1 Không gian Euclid $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Điểm hay véc tơ trong $\mathbb{R}^n$

Trong giáo trình này chúng ta sẽ làm việc trên không gian Euclid[1] $\mathbb{R}^n$. Mỗi *điểm* x trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một bộ n số thực được sắp có thứ tự và được viết dưới dạng cột số

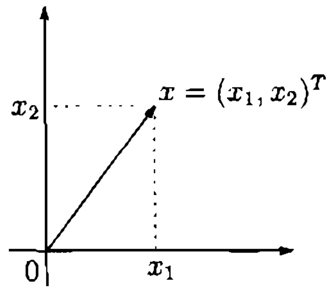
$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mỗi số x_i , $i \in \{1, \cdots, n\}$, được gọi là *tọa độ thứ i* của điểm x. Để thuận tiện khi viết, ta qui ước

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

[1]EUCLID (330 trước CN - 275 trước CN): Người đời sau chỉ biết mơ hồ hình như nhà toán học thiên tài này là người Hy Lạp, sống và làm việc tại Athènes. Euclid nổi tiếng với bộ sách "Cơ sở" gồm 13 tập trình bày một cách hệ thống toàn bộ kiến thức toán học thời bấy giờ. Không gian Euclid ban đầu được hiểu như không gian thực 3 chiều với hệ tiên đề Euclid. Sau đó nhà toán học Ba lan là Banach (1892 - 1945) đã mở rộng nó sang không gian nhiều chiều trong luận án tiến sĩ (1920) của ông.

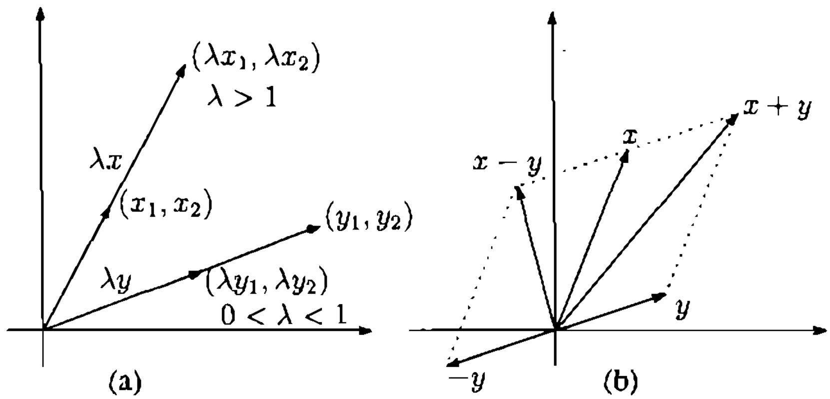
Ký hiệu $0 = (0, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ là điểm với tất cả các thành phần đều bằng 0 và gọi nó là *điểm gốc tọa độ*. Mỗi điểm $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ còn được đồng nhất với *một véc tơ* mà điểm gốc là 0 và điểm ngọn là x (xem Hình 1.1).



Hình 1.1. *Véc tơ*

Cho $\lambda \in \mathbb{R}$ và $x, y \in \mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ và $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$. Tổng $x + y$ và tích của số thực λ với x được định nghĩa là

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)^T, \quad \lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)^T.$$



Hình 1.2. *(a) - Tích của một véc tơ và một số thực; (b) - Tổng và hiệu hai véc tơ*

1.1.2 Véc tơ độc lập tuyến tính

Một véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *tổ hợp tuyến tính* của các véc tơ $x^1, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$ nếu x có thể viết được dưới dạng

$$x = \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k \text{ với } \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Nếu $\lambda_i > 0$ (tương ứng[2], $\lambda_i \geq 0$) với mọi $i = 1, \cdots, k$ thì ta nói x là tổ hợp tuyến tính *dương* (t.u., *không âm*) của các véc tơ $x^1, \cdots, x^k$.

Các véc tơ $x^1, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu

$$\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k = 0 \text{ với } \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Các véc tơ $x^1, \cdots, x^k$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu chúng không độc lập tuyến tính, tức tồn tại các số thực $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k = 0.$$

Chẳng hạn, hai véc tơ x và $-x$ là phụ thuộc tuyến tính vì $1.x + 1.(-x) = 0$. Một véc tơ $x \neq 0$ bao giờ cũng là độc lập tuyến tính vì $\lambda x = 0$ khi và chỉ khi $\lambda = 0$. Nếu trong các véc tơ $x^1, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$ có một véc tơ bằng 0 thì chúng là phụ thuộc tuyến tính.

1.1.3 Cơ sở

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, n véc tơ độc lập tuyến tính lập thành một *cơ sở* của nó. Giả sử $c^1, c^2, \cdots, c^n$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó bất kỳ véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$ đều là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $c^1, c^2, \cdots, c^n$. Cơ sở lập nên bởi các véc tơ $e^1, e^2, \cdots, e^n$, trong đó $e^i = (0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, \cdots, 0)^T$ là *véc tơ đơn vị thứ i* (với 1 đứng ở vị trí thứ i và 0 ở các vị trí khác), được gọi là *cơ sở chính tắc* hay *cơ sở đơn vị* của $\mathbb{R}^n$.

1.1.4 Tích vô hướng

Tích vô hướng của hai véc tơ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ và $y = (y_1, \cdots, y_n)^T$ là một số thực, ký hiệu là $\langle x, y\rangle$, được xác định như sau

$$\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Với mọi $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, tích vô hướng thỏa mãn:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\\
&\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle,\\
&\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle,\\
&\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \text{và } \langle x, x\rangle = 0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad x = 0.
\end{aligned}$$

Hai véc tơ x và y *trực giao* (vuông góc) với nhau nếu $\langle x, y\rangle = 0$.

---

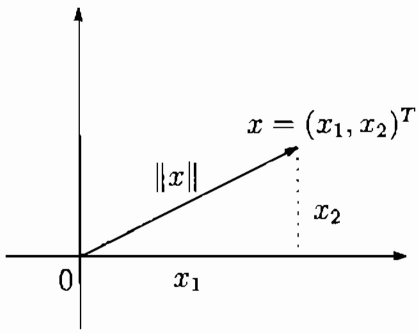
[2]Từ đây đến hết giáo trình, ta sẽ viết tắt chữ "tương ứng" là "t.u.".

1.1.5 Chuẩn Euclid của véc tơ

Chuẩn Euclid (hay *độ dài*) của véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\|x\|$, là một số thực xác định bởi

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Khái niệm chuẩn mở rộng khái niệm độ dài thông thường lên không gian nhiều chiều (xem Hình 1.3). Trường hợp $n = 1$, ký hiệu $\|x\|$ được thay bằng $|x|$ và gọi là *giá trị tuyệt đối* của x.



Hình 1.3. *Chuẩn (hay độ dài) của véc tơ $x \in \mathbb{R}^2$*

Có thể dễ dàng thấy chuẩn của một véc tơ có những tính chất cơ bản sau:

$$\|x\| \geq 0 \quad \text{và } \|x\| = 0 \text{ khi và chỉ khi } x = 0,$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \text{ với mọi } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1.1.6 Bất đẳng thức Cauchy-Bunjakowski-Schwarz

Cho x và y là hai véc tơ thuộc $\mathbb{R}^n$. Khi đó ta có *bất đẳng thức Cauchy-Bunjakowski-Schwarz*[3]

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|.$$

[3]Bất đẳng thức này được nhà toán học Pháp Augustin Louis CAUCHY (1789 - 1857) chứng minh năm 1821, nhà toán học Nga Wiktor Jakowlewitch BUNJAKOWSKI (1804 - 1889) chứng minh năm 1859, nhà toán học Đức Hermann Amandus SCHWARZ (1843 - 1921) chứng minh năm 1884. Vì vậy, nó được gọi ở các nước Pháp, Nga và Đức theo tên các nhà toán học đó.

1.1.7 Góc giữa hai véc tơ

Cho x và y là hai véc tơ khác không thuộc $\mathbb{R}^n$. *Góc giữa hai véc tơ x và y* là góc α $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ với

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|.\|y\|}.$$

1.1.8 Sự hội tụ

Dãy các điểm $x^1, x^2, x^3, \cdots$ trong $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\{x^n\}$, được gọi là *hội tụ đến một điểm x^** $\in \mathbb{R}^n$ nếu, với mỗi số $\varepsilon > 0$, tìm được số tự nhiên N sao cho $\|x^* - x^n\| < \varepsilon$ khi $n > N$. Khi đó ta cũng nói rằng x^* là *giới hạn của dãy* $\{x^n\}$, hay dãy $\{x^n\}$ *có giới hạn là x^**, ký hiệu

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x^* \quad \text{hoặc} \quad \{x^n\} \to x^*.$$

Một dãy được gọi là *hội tụ* nếu nó hội tụ đến một điểm nào đó.

1.1.9 Tập đóng, tập mở, tập compac

Một hình cầu có tâm x^0 và bán kính ε ($0 < \varepsilon < +\infty$) trong không gian $\mathbb{R}^n$ là tập

$$B(x^0, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^0\| < \varepsilon\}.$$

Hình cầu có tâm x^0 và bán kính ε cũng được gọi là một *ε-lân cận* của điểm x^0. Một tập chứa một ε- lân cận của điểm x^0 được gọi là một *lân cận* của x^0. Để đơn giản ta coi một ε-lân cận của điểm x^0 là một lân cận của nó.

Xét một tập A bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$ và một điểm $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Ta gọi $\bar{x}$ là *điểm trong* của A nếu có một ε-lân cận của $\bar{x}$ nằm trọn trong A. Điểm $\bar{x}$ được gọi là *điểm biên* của tập A nếu bất kỳ một ε-lân cận của $\bar{x}$ cũng đều chứa cả những điểm thuộc A và những điểm không thuộc A. Ta gọi $\bar{x}$ là *điểm tụ* của A nếu mọi ε-lân cận của $\bar{x}$ đều chứa vô số điểm của A. Có thể thấy ngay rằng $\bar{x}$ là điểm tụ của A khi và chỉ khi mỗi ε-lân cận của $\bar{x}$ có chứa ít nhất một điểm của A khác với $\bar{x}$. Như vậy, một điểm biên hay điểm tụ của A có thể thuộc A hay không thuộc A.

Một tập $A \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *mở* nếu tất cả các điểm của A đều là điểm trong của nó. Hiển nhiên rằng hình cầu $B(x^0, \varepsilon)$ là tập mở và ta gọi nó là *hình cầu mở*.

Nếu A là tập mở thì phần bù của A, tức tập $\mathbb{R}^n \setminus A$, là *tập đóng* và ngược lại. Tập đóng chứa tất cả các điểm biên của nó. Có thể chứng minh rằng, một tập $A \subseteq \mathbb{R}^n$ là đóng khi và chỉ khi giới hạn của mọi dãy hội tụ $\{x^n\} \subset A$ đều thuộc về A, tức là: $\{x^n\} \subset A$ và $\{x^n\} \to x^0$ luôn luôn kéo theo $x^0 \in A$.

Tập rỗng $\emptyset$ và $\mathbb{R}^n$ là hai tập vừa mở vừa đóng. Thật vậy, vì mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^n$ đều là điểm trong nên $\mathbb{R}^n$ là tập mở và $\emptyset$ là tập đóng. Nhưng vì $\mathbb{R}^n$ chứa điểm giới hạn của mọi dãy hội tụ $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^n$ nên $\mathbb{R}^n$ là tập đóng và $\emptyset$ là tập mở.

Hợp của tất cả các tập mở nằm trong $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gọi là *phần trong* của A và được ký hiệu là $\text{int}A$. *Bao đóng* của tập A, ký hiệu là $c\ell A$, là hợp của A và các điểm biên của A.

Một tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại số dương λ sao cho $\|x\| \leq \lambda$ với mọi $x \in A$. Tập A là tập *compac* nếu nó vừa đóng vừa bị chặn. Nếu A là tập compac thì mọi dãy $\{x^n\} \subset A$ đều chứa một dãy con $\{x^{n_k}\}$ hội tụ đến một điểm thuộc A.

Ví dụ 1.1. Xét các tập

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, \qquad A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\},$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, \qquad A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}.$$

Ta có A_1 là tập mở và không bị chặn; A_2 là tập đóng và không bị chặn; A_3 là tập bị chặn và không phải tập mở cũng không phải tập đóng còn A_4 là tập đóng, bị chặn hay A_4 là tập compac.

1.1.10 Thứ tự

Như đã biết, hai số thực bất kỳ trong $\mathbb{R}$ luôn so sánh được với nhau. Nhưng trong $\mathbb{R}^n$, với $n \geq 2$, hai véc tơ bất kỳ không phải lúc nào cũng so sánh được với nhau. Chẳng hạn, trong $\mathbb{R}^2$ ta không thể so sánh được hai véc tơ $x = (1,2)^T$ và $y = (2,1)^T$. Thông thường, trong $\mathbb{R}^n$ người ta sử dụng thứ tự sau: Cho hai véc tơ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ và $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ thuộc $\mathbb{R}^n$, ta viết

$x = y$ nếu $x_i = y_i$ với mọi $i = 1, \cdots, n$;
$x \geq y$ nếu $x_i \geq y_i$ với mọi $i = 1, \cdots, n$.

1.2 Hàm nhiều biến

1.2.1 Định nghĩa

Hàm số f từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ là một quy tắc ứng mỗi điểm x thuộc $\mathbb{R}^n$ với một số thực nào đó và kí hiệu số thực đó là $f(x)$. Cách viết $f : X \to \mathbb{R}$, với $X \subseteq \mathbb{R}^n$, nói rằng $f(x)$ chỉ xác định với các điểm $x \in X$. Khi đó, ta gọi X là *miền xác định* của hàm f. Vì *biến số* ở đây là các phần tử thuộc $\mathbb{R}^n$ nên nó có n thành phần và mỗi thành phần có thể được xem như một *biến độc lập*. Do đó người ta thường gọi hàm xác định trên $\mathbb{R}^n$, với $n \geq 2$, là *hàm nhiều biến*.

Đồ thị của hàm n biến là tập

$$\text{Graph}(f) := \left\{ \Big(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x)\Big)^T \mid x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in X \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

trong đó X là miền xác định của hàm số. Đồ thị của hàm một biến là một đường cong trong $\mathbb{R}^2$. Đồ thị của hàm hai biến là một mặt cong trong $\mathbb{R}^3$.

Cho hàm số f xác định trên tập $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Với mỗi số thực $\alpha \in \mathbb{R}$, tập $L(\alpha, f) := \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ được gọi là một *tập mức* của hàm f ứng với giá trị α. Trong trường hợp hàm hai biến, người ta quen gọi tập mức là *đường mức*. Qua mỗi điểm $x \in X$ chỉ có duy nhất một tập mức của hàm f. Với mỗi số thực α, tập $L_\alpha(f) := \{x \in X \mid f(x) \le \alpha\}$ được gọi là *tập mức dưới* của hàm f. Tương tự, tập $L^\alpha(f) := \{x \in X \mid f(x) \ge \alpha\}$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là *tập mức trên* của hàm f.

Hàm f được gọi là *bị chặn dưới* (t.ư., *bị chặn trên*) trên X nếu tồn tại số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \ge \alpha$ (t.ư., $f(x) \le \alpha$) với mọi $x \in X$. Hàm f được gọi là *bị chặn* trên X nếu tồn tại số thực $\mu > 0$ sao cho $|f(x)| \le \mu$ với mọi $x \in X$.

Ví dụ 1.2. Xét hàm hai biến $f(x) = x_1^2 + x_2^2$. Miền xác định của hàm f là cả không gian $\mathbb{R}^2$. Đồ thị của hàm số này,

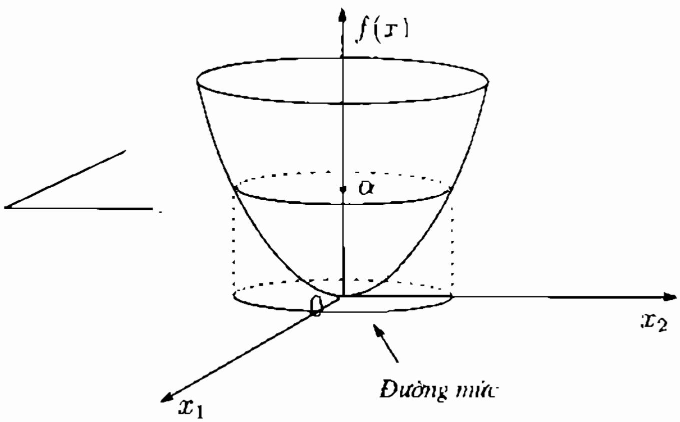
$$\text{Graph}(f) = \{(x_1, x_2, f(x))^T \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = x_1^2 + x_2^2\},$$

là mặt cong paraboloit tròn xoay quen thuộc (xem Hình 1.4). Dễ thấy hàm số này không bị chặn trên và bị chặn dưới bởi 0. Với mỗi số không âm $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có:

- Đường mức $L(\alpha, f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x_1^2 + x_2^2 = \alpha\}$ là đường tròn có tâm 0 và bán kính $\sqrt{\alpha}$;

- Tập mức dưới $L_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le \alpha\}$ là hình tròn đóng có tâm 0 và bán kính $\sqrt{\alpha}$;

- Tập mức trên $L^\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \ge \alpha\}$ là phần bù của hình tròn mở có tâm 0 và bán kính $\sqrt{\alpha}$, tức $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \ge \alpha\} = \mathbb{R}^2 \setminus B(0, \sqrt{\alpha})$.



Hình 1.4. *Đồ thị của hàm* $f(x) = x_1^2 + x_2^2$

1.2.2 Tính liên tục

Cho hàm số f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Hàm f được gọi là *liên tục tại điểm* $x^0 \in X$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$ thỏa mãn $\|x - x^0\| < \delta$. Nói cách khác, hàm f là liên tục tại $x^0 \in X$ nếu với mọi dãy $\{x^n\} \subset X$ hội tụ đến x^0, ta có $\{f(x^n)\} \to f(x^0)$.

Hàm f được gọi là *nửa liên tục dưới* (t.ư., *nửa liên tục trên*) *tại điểm* $x^0 \in X$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) \geq f(x^0) - \varepsilon \quad (\text{t.ư.}, \ f(x) \leq f(x^0) + \varepsilon)$$

với mọi $x \in X$ thỏa mãn $\|x - x^0\| < \delta$. Nói cách khác, hàm f là nửa liên tục dưới (t.ư., nửa liên tục trên) tại $x^0 \in X$ nếu với mọi dãy $\{x^n\} \subset X$ hội tụ đến x^0 và dãy $\{f(x^n)\} \subset \mathbb{R}$ hội tụ, ta có

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) \geq f(x^0) \quad (\text{t.ư.}, \ \lim_{n\to\infty} f(x^n) \leq f(x^0)).$$

Rõ ràng, nếu f là nửa liên tục dưới tại x^0 thì $-f$ là nửa liên tục trên tại x^0. Hàm f vừa nửa liên tục trên vừa nửa liên tục dưới tại x^0 thì liên tục tại điểm đó.

Hàm f được gọi là *liên tục* (t.ư., *nửa liên tục dưới, nửa liên tục trên*) *trên* X nếu nó liên tục (t.ư., nửa liên tục dưới, nửa liên tục trên) tại mọi điểm của X.

Ví dụ 1.3. i) Hàm một biến

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2x & \text{nếu } x > 1 \\ 0.5 & \text{nếu } x = 1 \end{cases} \qquad \text{xác định trên } \ X = \mathbb{R}$$

liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$. Tại $x = 1$, hàm f là nửa liên tục dưới.

ii) Xét hàm một biến

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = 0 \\ x & \text{nếu } 0 < x \leq 2 \end{cases} \qquad \text{trên } \ X = [0, 2].$$

Ta có $f(x)$ là liên tục trên $X \setminus \{0\}$. Hàm f là nửa liên tục trên tại $x = 0$.

1.2.3 Đạo hàm riêng

Cho hàm số f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$ và $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)^T$ là một điểm thuộc X. Khi đó với mỗi số $h \in \mathbb{R}$ đủ nhỏ, điểm

$$(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0)^T$$

cũng nằm trong X. Giới hạn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0) - f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0)}{h},$$

nếu tồn tại, được gọi là *đạo hàm riêng của f theo biến x_i tại điểm x^0*, ký hiệu là

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \quad \text{hay} \quad f'_{x_i}(x^0).$$

Đối với hàm một biến $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ký hiệu ∂ được thay bằng d. Vì vậy, người ta viết $\frac{d\cos x}{dx}$ mà không viết $\frac{\partial \cos x}{\partial x}$.

Đạo hàm riêng $f'_{x_i}(x)$ của hàm nhiều biến có thể tính được bằng cách lấy đạo hàm theo biến x_i như với hàm một biến khi coi các biến còn lại là hằng số.

Giả sử đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ tồn tại với mọi $x \in X$. Khi đó, phép tương ứng $x \mapsto \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ xác định một hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i} : X \to \mathbb{R}$. Nếu tại x^0, đạo hàm riêng theo biến x_j của hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tồn tại thì ta gọi đó là *đạo hàm riêng cấp hai theo các biến x_i và x_j* của hàm f tại x^0 và ký hiệu là $\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}$ hoặc $f''_{x_i x_j}(x^0)$. Một cách tương tự, ta định nghĩa được đạo hàm riêng cấp k

$$\frac{\partial^k f(x^0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$$

theo các biến $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ của f tại điểm x^0.

1.2.4 Gradient và ma trận Hesse

Cho hàm f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng tại x^0, các đạo hàm riêng của hàm f theo mọi biến tồn tại. Khi đó, véc tơ

$$\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right)^T$$

được gọi là *gradient* của f tại x^0 và ký hiệu là $\nabla f(x^0)$. Nếu các đạo hàm riêng cấp hai theo mọi biến của f tại x^0 đều tồn tại thì ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

được gọi là *ma trận Hesse*[4] của f tại x^0 và ký hiệu là $\nabla^2 f(x^0)$.

Ví dụ 1.4. Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^5 + 3x_1^3 x_2^2 + 6x_1^2 x_2 + 5x_2$. Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15x_1^4 + 9x_1^2 x_2^2 + 12x_1 x_2 \\ 6x_1^3 x_2 + 6x_1^2 + 5 \end{pmatrix}$$

[4]Ludwig Otto HESSE (1811-1874): Nhà toán học Đức. Hesse nghiên cứu về lý thuyết hàm đại số và lý thuyết bất biến (theory of invariants). Ông là người đưa ra khái niệm ma trận Hesse.

và

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60x_1^3 + 18x_1x_2^2 + 12x_2 & 18x_1^2x_2 + 12x_1 \\ 18x_1^2x_2 + 12x_1 & 6x_1^3 \end{pmatrix}$$

Tại $x^0 = (1,0)^T$,

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 60 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.5 Tính khả vi

Cho hàm số f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Hàm f là *khả vi tại* $x^0 \in X$ nếu tồn tại các đạo hàm riêng của hàm f theo mọi biến và với mọi $d \in \mathbb{R}^n$, $\|d\|$ đủ nhỏ và $x^0 + d \in X$, ta có

$$f(x^0 + d) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), d \rangle + o(\|d\|), \tag{1.1}$$

trong đó $o(\|d\|)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn $\|d\|$ khi $\|d\| \to 0$. Biểu thức (1.1) tương đương với

$$\lim_{\|d\| \to 0} \frac{f(x^0 + d) - f(x^0) - \langle \nabla f(x^0), d \rangle}{\|d\|} = 0. \tag{1.2}$$

Hàm f được gọi là *khả vi trên* X nếu f khả vi tại mọi điểm $x \in X$. Nếu hàm f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$ có các đạo hàm riêng tại mọi điểm $x \in X$ và các hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i} : X \to \mathbb{R}$ liên tục trên X thì ta nói hàm f *khả vi liên tục trên* X.

Kết quả sau được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Mệnh đề 1.1. *Nếu hàm f khả vi tại x^0 thì liên tục tại điểm đó.*

Chú ý 1.1. Trường hợp hàm một biến, nếu tại x^0 tồn tại đạo hàm hữu hạn $f'(x^0)$ thì ta có

$$f(x^0 + p) = f(x^0) + f'(x^0)p + o(|p|),$$

trong đó $o(|p|)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn $|p|$ khi $|p| \to 0$, tức là $f(x)$ khả vi tại $x = x^0$. Điều này không còn đúng với hàm nhiều biến ($n \geq 2$), nghĩa là sự tồn tại các đạo hàm riêng hữu hạn theo mọi biến tại x^0 không đảm bảo cho (1.2) được thỏa mãn, tức chưa chắc hàm f đã khả vi tại x^0. Hơn nữa, hàm có đạo hàm riêng hữu hạn cũng không nhất thiết là liên tục.

Ví dụ 1.5. Hàm hai biến $f(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1x_2}$ có đạo hàm riêng theo cả biến x_1 và x_2 tại điểm $x^0 = (0,0)^T$ nhưng không khả vi tại $x^0 = (0,0)^T$. Thật vậy, theo định nghĩa,

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Với $d = (\varepsilon, \varepsilon)^T$ và $\varepsilon \to 0$, bằng tính toán trực tiếp ta có

$$\frac{f(x^0+d) - f(x^0) - \langle \nabla f(x^0), d\rangle}{\|d\|} = \frac{f(0+\varepsilon, 0+\varepsilon) - f(0,0)}{\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{\varepsilon^2}}{\sqrt{2\varepsilon^2}} = \frac{(\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}|\varepsilon|} \to \infty.$$

Điều này chứng tỏ (1.2) không thỏa mãn, tức f không khả vi tại $x^0 = (0,0)^T$.

Ví dụ 1.6. Hàm hai biến

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{nếu } (x_1,x_2)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{nếu } (x_1,x_2)^T = (0,0)^T \end{cases}$$

có đạo hàm riêng tại mọi điểm. Tuy nhiên hàm không liên tục tại điểm $(x_1, x_2)^T = (0,0)^T$. Thật vậy, nếu chọn dãy $\{x^n\}$ với $x^n = (x_1^n, x_2^n)^T = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^T$ thì

$$\{x^n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)^T \text{ nhưng } \lim_{n\to\infty} f(x_1^n, x_2^n) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0.$$

Do không liên tục tại $(0,0)^T$ nên hiển nhiên f cũng không khả vi tại đó.

Chú ý 1.2. Hàm f khả vi trên X chưa chắc đã là khả vi liên tục.

Ví dụ 1.7. Hàm số một biến số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

khả vi tại mọi điểm nhưng đạo hàm $f'(x)$ không liên tục tại $x = 0$. Thật vậy,

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \text{ khi } x \neq 0.$$

Tại điểm $x = 0$, theo định nghĩa đạo hàm ta nhận được

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Vậy

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Rõ ràng hàm $f'(x)$ liên tục tại mọi $x \neq 0$. Tại $x = 0$, các giới hạn một phía

$$\lim_{\Delta x \to 0^{\pm}} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

không tồn tại. Vì vậy, hàm $f'(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

1.2.6 Khả vi hai lần

Cho hàm số f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ta nói hàm f *khả vi hai lần tại* x^0 nếu tồn tại các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f theo mọi biến và với mọi $d \in \mathbb{R}^n$, $\|d\|$ đủ nhỏ và $x^0 + d \in X$, ta có

$$f(x^0 + d) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), d\rangle + \frac{d^T\nabla^2 f(x^0)d}{2} + o(\|d\|^2),$$

trong đó $(o(\|d\|^2)$ là vô cùng bé cấp cao hơn $\|d\|^2$ khi $\|d\|^2 \to 0$. Hàm f được gọi là *khả vi hai lần trên* X nếu f khả vi hai lần tại mọi điểm $x \in X$. Nếu hàm f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$ có các đạo hàm riêng cấp một và cấp hai tại mọi điểm $x \in X$ và các hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i} : X \to \mathbb{R}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : X \to \mathbb{R}$ liên tục trên X thì ta nói hàm f *khả vi liên tục hai lần trên* X.

Tương tự, hàm f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *khả vi liên tục k lần* trên X nếu tất cả các đạo hàm riêng các cấp nhỏ hơn hoặc bằng k đều liên tục. Tập tất cả các hàm khả vi liên tục k lần trên X được ký hiệu bởi $C^k(X)$.

Nếu f là hàm khả vi liên tục hai lần trên X thì ta có ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ là ma trận đối xứng, tức

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall\, i, j = 1, \cdots, n.$$

1.2.7 Khai triển Taylor

Khai triển Taylor[5] cho ta xấp xỉ một hàm số khả vi tại lân cận của một điểm x^0 bởi một hàm đa thức. Xét hàm n biến $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục tại lân cận nào đó của điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, với $p \in \mathbb{R}^n$ và $\|p\|$ đủ nhỏ, ta có thể khai triển

$$f(x^0 + p) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), p\rangle + o(\|p\|),$$

[5] Brook TAYLOR (1685 - 1731): Nhà toán học người Anh. Ông khám phá ra công thức mang tên ông năm 1715. Theo nhà toán học nổi tiếng người Pháp Lagrange (1736 - 1813), khai triển Taylor là *nguyên lý cơ bản của phép tính vi phân*.

trong đó $o(\|p\|)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn $\|p\|$ khi $\|p\| \to 0$. Khai triển này được gọi là *khai triển Taylor cấp một của hàm f tại x^0*. Nếu f khả vi hai lần tại lân cận này của x^0 thì đại lượng $o(\|p\|)$ có thể đánh giá như sau

$$o(\|p\|) = \frac{1}{2!}p^T\nabla^2 f(\xi)p,$$

với $\xi = \lambda x^0 + (1-\lambda)p$ và $0 < \lambda < 1$. Tổng

$$f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), p\rangle$$

được gọi là *xấp xỉ Taylor cấp một của hàm f tại x^0* và ta sẽ viết

$$f(x^0 + p) \approx f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), p\rangle.$$

1.2.8 Đạo hàm hàm hợp

Cho hàm số f xác định trên tập mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$ và các hàm số một biến $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ xác định trên khoảng mở $I \subseteq \mathbb{R}$ sao cho véc tơ $x(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)) \in X$ với mọi $t \in I$. Khi đó, ta có hàm hợp một biến $f(x(t))$ xác định trên I.

Định lý 1.1. *Giả sử hàm số f xác định và khả vi trên tập mở $X \subset \mathbb{R}^n$ và các hàm số một biến $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ xác định và khả vi trên khoảng mở $I \subset \mathbb{R}$ sao cho véc tơ $x(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)) \in X$ với mọi $t \in I$. Khi đó hàm hợp $f(x(t))$ khả vi trên I và đạo hàm của nó được tính theo công thức*

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \Big\langle \nabla f(x(t)), x'(t) \Big\rangle,$$

trong đó $x'(t) := (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \cdots, \varphi_n'(t))$.

Chứng minh. Xem [27], trang 49. □

Nhận xét 1.1. Tập các điểm $\{x(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)) \mid t \in I\}$ là một đường cong trong $X \subseteq \mathbb{R}^n$, để đơn giản ta gọi nó là đường cong $x(t)$. Giả sử $L(\alpha, f) = \{x \in X | f(x) = \alpha\}$ là một tập mức của hàm f và $x^0 \in L(\alpha, f)$. Nếu $x(t)$ là một đường cong qua x^0, $x^0 = x(t_0)$, và nằm trọn trong $L(\alpha, f)$ thì $f(x(t)) \equiv \alpha$ với mọi t. Lấy đạo hàm hai vế và áp dụng Định lý 1.1, ta có

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \Big\langle \nabla f(x(t)), x'(t) \Big\rangle = 0.$$

Do đó

$$\Big\langle \nabla f(x^0), x'(t_0) \Big\rangle = 0. \tag{1.3}$$

Nếu coi t là biến thời gian thì $x'(t_0)$ là *véc tơ vận tốc* hay còn gọi là *véc tơ tiếp xúc* của đường cong $x(t)$ tại x^0. Tập tất cả các véc tơ tiếp xúc tại điểm x^0 của tất cả các đường cong nằm trên tập mức $L(\alpha, f)$ đi qua x^0 được gọi là *không gian tiếp xúc* với $L(\alpha, f)$ tại x^0. Như vậy theo công thức (1.3) **véc tơ gradient $\nabla f(x^0)$ vuông góc với không gian tiếp xúc với tập mức $L(\alpha, f)$ tại x^0.** Trong trường hợp hàm hai biến, tập mức là một đường cong trong mặt phẳng và véc tơ gradient $\nabla f(x^0)$ vuông góc với tiếp tuyến của đường mức đi qua x^0.

1.2.9 Đạo hàm theo hướng

Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}^n$ và một véc tơ $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Giới hạn

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^0 + td) - f(x^0)}{t},$$

nếu tồn tại (hữu hạn hoặc vô cùng), được gọi là *đạo hàm theo hướng* d của hàm f tại điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và ký hiệu là $f'(x^0, d)$. Nếu véc tơ $d = e^i$, trong đó $e^i = (0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, \cdots, 0)^T$, thì

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^0 + te^i) - f(x^0)}{t} = f'(x^0, e^i).$$

Dễ thấy, nếu $f(x)$ là hàm một biến thì

$$f'(x^0, 1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^0 + t) - f(x^0)}{t} = f'_+(x^0),$$

trong đó $f'_+(x^0)$ là đạo hàm phải của f tại x^0, và

$$f'(x^0, -1) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x^0 + t.(-1)) - f(x^0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x^0 + t) - f(x^0)}{-t} = -f'_-(x^0),$$

với $f'_-(x^0)$ là đạo hàm trái của f tại x^0.

Mệnh đề 1.2. *Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}^n$ và điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Nếu f khả vi tại x^0 thì*

$$f'(x^0, d) = \langle \nabla f(x^0), d\rangle \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Chứng minh. Vì f khả vi tại x^0 nên với mọi $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ta có

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^0 + td) - f(x^0) - \langle \nabla f(x^0), td\rangle}{t\|d\|} = 0.$$

Do đó

$$\frac{f'(x^0, d) - \langle \nabla f(x^0), d\rangle}{\|d\|} = 0$$

và ta nhận được điều phải chứng minh. □

Nhận xét 1.2. Đặt $\varphi(t) := f(x^0 + td)$. Khi đó, theo định nghĩa ta có

$$\varphi'(0) = \frac{d\varphi(t)}{dt}|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x^0 + td) - f(x^0)}{t} = f'(x^0, d).$$

Như vậy đạo hàm theo hướng của hàm f tại x^0 phản ánh tốc độ biến thiên của hàm f tại x^0 theo hướng đó. Hơn nữa, theo bất đẳng thức Cauchy-Bunjakowski-Schwarz, trong tất cả các hướng $d \in \mathbb{R}^n$ có $\|d\| = 1$, ta có

$$|\langle \nabla f(x^0), d\rangle| \le \|\nabla f(x^0)\|\|d\| = \|\nabla f(x^0)\|$$

$$\Rightarrow -\|\nabla f(x^0)\| \le \langle \nabla f(x^0), d\rangle \le \|\nabla f(x^0)\|.$$

Do đó, đạo hàm theo hướng của hàm f tại điểm x^0 đã cho là lớn nhất khi hướng $d = \frac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|}$ và nhỏ nhất khi $d = -\frac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|}$ hay giá trị hàm tăng nhanh nhất theo hướng gradient và giảm nhanh nhất theo hướng ngược với gradient.

1.2.10 Hàm tuyến tính, hàm afin

Một hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là *tuyến tính* nếu

$$f(\lambda x^1 + \mu x^2) = \lambda f(x^1) + \mu f(x^2)$$

với mọi x^1, $x^2 \in \mathbb{R}^n$ và với mọi λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Một hàm tuyến tính xác định trên $\mathbb{R}^n$ luôn có dạng $f(x) = \langle c, x\rangle$, trong đó véc tơ $c \in \mathbb{R}^n$ cho trước.

Hàm tuyến tính có các tính chất rất đặc sắc và hữu ích sau đây:

Mệnh đề 1.3. *i) Các mặt mức của hàm tuyến tính song song với nhau;*

ii) Gradient của hàm tuyến tính $f(x) = \langle c, x\rangle$ tại mọi điểm là như nhau và bằng chính véc tơ c. Véc tơ c cũng chính là véc tơ pháp tuyến của các mặt mức.

Ví dụ 1.8. Xét hàm hai biến $f(x) = 3x_1 + 5x_2$. Ta có $\nabla f(x) = (3, 5)^T$ là véc tơ pháp tuyến của mỗi đường mức

$$L(\alpha, f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 5x_2 = \alpha\} \text{ với } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Với bất kỳ $\alpha_1 \ne \alpha_2$, $L(\alpha_1, f)$ và $L(\alpha_2, f)$ là hai đường thẳng song song với nhau.

Hàm số có dạng $f(x) = \langle c, x\rangle + \alpha$, trong đó véc tơ $c \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ cho trước, được gọi là *hàm afin* hay *hàm tuyến tính afin*. Dễ thấy, nếu $f(x)$ là afin thì

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mà } \lambda + \mu = 1 \text{ ta có } f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

1.3 Tập lồi

1.3.1 Tập afin

Cho x^1, x^2 là hai điểm trong $\mathbb{R}^n$. *Đường thẳng* qua x^1 và x^2 là tập các điểm

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = x^2 + \lambda(x^1 - x^2) \quad \text{với } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập afin* nếu M chứa trọn cả đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của M, tức là

$$\forall x^1, x^2 \in M,\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M.$$

Nói cách khác M là tập afin nếu nó chứa tổ hợp tuyến tính của hai điểm bất kỳ thuộc M với tổng các hệ số bằng 1. Ta gọi một điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \quad \text{với } \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R} \ \text{ và } \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

là *tổ hợp afin* của các điểm $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$. Nếu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập afin và $x^0 \in M$ thì tập

$$L = M - x^0 = \{x - x^0 \mid x \in M\}$$

là một không gian con, tức nếu $a, b \in L$ thì mọi điểm $c = \lambda a + \mu b$ với $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ cũng thuộc L (L đóng với phép cộng và phép nhân vô hướng). Vì vậy, một tập afin có thể được biểu diễn bởi

$$M = x^0 + L = \{x^0 + v \mid v \in L\},$$

trong đó $x^0 \in M$ và L là không gian con. Không gian con L tương ứng với tập afin M không phụ thuộc vào cách chọn x^0, tức x^0 là điểm bất kỳ thuộc M. Hơn nữa, không gian con L này xác định duy nhất (Bài tập). Ta gọi L là *không gian con song song* với M. *Thứ nguyên* (dimension) hay còn gọi là *số chiều* của tập afin M là thứ nguyên của không gian con song song với nó.

Bao afin (affine hull) của một tập $E \subseteq \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập afin chứa E. Đó là tập afin nhỏ nhất chứa E, ký hiệu là aff$E$.

Ví dụ 1.9. Tập nghiệm M của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$, là một tập afin. Thật vậy, với hai điểm tùy ý x^1, $x^2 \in M$, và số thực bất kỳ $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} A(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \lambda A x^1 + (1-\lambda)A x^2 \\ &= \lambda b + (1-\lambda) b \\ &= b. \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$. Theo định nghĩa, M là một tập afin. Không gian con song song với M là $L = \mathrm{Ker}A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$. Vì vậy, thứ nguyên của tập M bằng thứ nguyên của không gian con $L = \mathrm{Ker}A$ và bằng $n - \mathrm{rank}A$, trong đó $\mathrm{rank}A$ là hạng của ma trận A.

Ví dụ 1.10. i) Bao afin của tập $E_1 = \{a, b\}$ gồm hai điểm phân biệt $a,\ b \in \mathbb{R}^3$ là đường thẳng đi qua a và b, tức $\mathrm{aff}E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$;

ii) Bao afin của tập $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1,\ x_3 = 0\}$ là cả mặt phẳng chứa hình vuông E_2, cụ thể $\mathrm{aff}E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$;

iii) Bao afin của hình cầu $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \le 1\}$ là cả không gian $\mathbb{R}^3$.

1.3.2 Số chiều và điểm trong tương đối

Số chiều (hay *thứ nguyên*) của một tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là số chiều của bao afin của nó, ký hiệu là $\dim M$. Cho tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ có $\dim M < n$. Một điểm $a \in M$ được gọi là *điểm trong tương đối* (relative interior point) của M nếu tồn tại hình cầu mở $B(a, \varepsilon)$ sao cho

$$\Big(B(a,\varepsilon) \cap \mathrm{aff}M\Big) \subset M.$$

Phần trong tương đối của tập M, ký hiệu là $\mathrm{ri}M$, là tập chứa tất cả các điểm trong tương đối của M. Một tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là có *thứ nguyên đầy đủ* nếu $\dim M = n$. Dễ thấy rằng tập M có phần trong khác rỗng ($\mathrm{int}M \neq \emptyset$) khi và chỉ khi nó có thứ nguyên đầy đủ.

Ví dụ 1.11. Xét tập E_1, E_2, E_3 như ở Ví dụ 1.10. Ta có:

i) $\mathrm{int}E_1 = \emptyset$, $\mathrm{ri}E_1 = \emptyset$, $\dim E_1 = 1$;

ii) $\mathrm{int}E_2 = \emptyset$, $\mathrm{ri}E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ x_3 = 0\}$ và $\dim E_2 = 2$;

iii) $\mathrm{int}E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\}$, $\dim E_3 = 3$, tức tập E_3 có thứ nguyên đầy đủ.

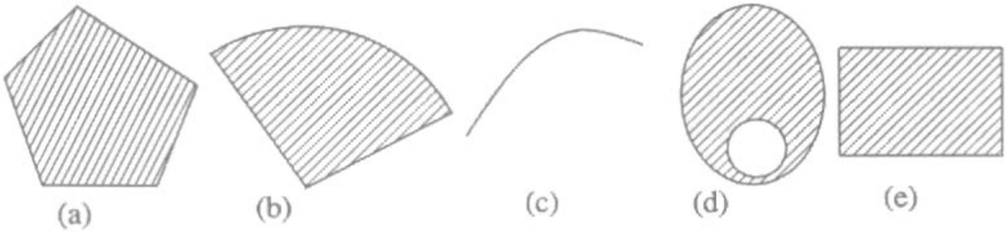
1.3.3 Tập lồi và điểm cực biên

Cho hai điểm x^1 và x^2 thuộc $\mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm có dạng

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 = x^2 + \lambda(x^1 - x^2) \quad \text{với } 0 \le \lambda \le 1,$$

được gọi là *đoạn thẳng* nối x^1 và x^2, ký hiệu là $[x^1, x^2]$.

Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* (convex set) nếu nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó, tức với mọi $x^1, x^2 \in M$ và $0 \le \lambda \le 1$ ta có $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$. Hình 1.5 cho ta một số ví dụ đơn giản về tập lồi và tập không lồi.



Hình 1.5. *(a), (b), (e) - Tập lồi; (c), (d) - Tập không lồi*

Từ định nghĩa dễ thấy rằng giao của một họ bất kỳ các tập lồi là tập lồi. Tuy nhiên, hợp của các tập lồi chưa chắc là tập lồi.

Ta gọi điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ với } \lambda_1, \cdots, \lambda_k \geq 0 \text{ và } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

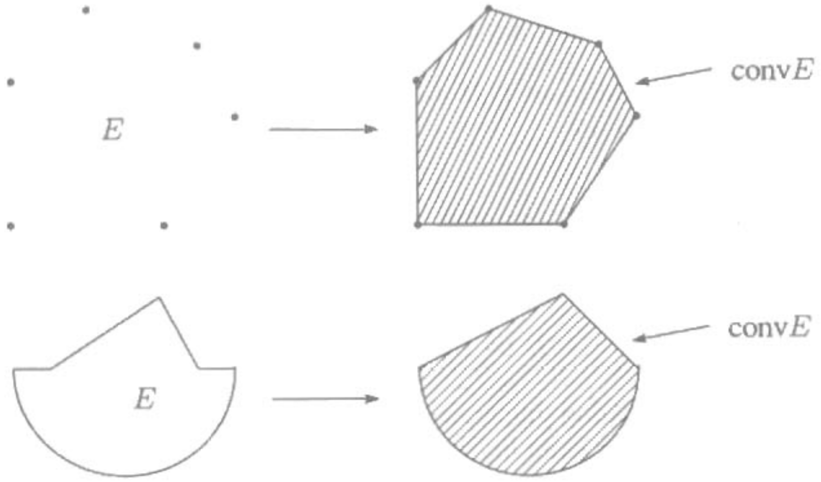
là *tổ hợp lồi* của các điểm $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\lambda_i > 0$ với mọi $i = 1, \cdots, k$ thì ta nói x là *tổ hợp lồi chặt* của $x^1, x^2, \cdots, x^k \in \mathbb{R}^n$.

Mệnh đề 1.4. *Một tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của những phần tử thuộc nó.*

Mệnh đề 1.5. i) *Nếu $M \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\alpha M = \{y \mid y = \alpha x,\ x \in M\}$ cũng là tập lồi;*

ii) *Nếu $M_1,\ M_2 \subset \mathbb{R}^n$ là hai tập lồi thì $M_1 + M_2 = \{x \mid x = x^1 + x^2,\ x^1 \in M_1, x^2 \in M_2\}$ cũng là tập lồi.*

Bao lồi (convex hull) của tập $E \subset \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập lồi chứa E và được ký hiệu là $\mathrm{conv}E$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E. Hai ví dụ về bao lồi được minh họa ở Hình 1.6.



Hình 1.6. *Ví dụ về bao lồi*

Mệnh đề 1.6. *Bao lồi của tập $E \subset \mathbb{R}^n$ chứa tất cả các tổ hợp lồi của các phần tử thuộc nó.*

Cho tập lồi $M \subset \mathbb{R}^n$. Một điểm $x \in M$ được gọi là *điểm cực biên* (extreme point) của M nếu x không thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp lồi chặt của hai điểm phân biệt bất kỳ nào của M, tức

$$\nexists y, z \in M, y \neq z \text{ sao cho } x = \lambda y + (1-\lambda)z \text{ với } 0 < \lambda < 1.$$

Theo định nghĩa, một điểm cực biên không thể là điểm trong của tập lồi. Vì vậy, tất cả các điểm cực biên đều là các điểm biên. Nếu tập hợp không chứa biên thì nó không có điểm cực biên.

Hình 1.7. *(a) - Hình vuông có 4 điểm cực biên; (b) - Hình tròn có vô số điểm cực biên*

Nhận xét 1.3. Số điểm cực biên của tập lồi có thể hữu hạn hoặc vô hạn (xem Hình 1.7). Khi tập lồi có hữu hạn điểm cực biên thì chúng thường được gọi là *các đỉnh*. Chú ý rằng ta không nói về điểm cực biên của các tập không lồi.

Mệnh đề 1.7. *Một tập lồi đóng khác rỗng $M \subset \mathbb{R}^n$ có điểm cực biên khi và chỉ khi nó không chứa trọn một đường thẳng nào.*

Một đặc trưng rất quan trọng của tập lồi đóng và bị chặn là có im cc biên

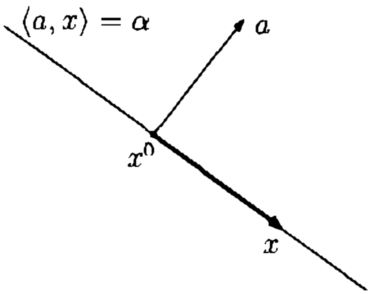
Định lý 1.2. (Krein[6]-Milman[7]) *Một tập lồi đóng, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ là bao lồi của các điểm cực biên của nó.*

1.3.4 Siêu phẳng, nửa không gian

Cho $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Tập

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n |\ \langle a, x\rangle = \alpha\}$$

được gọi là một *siêu phẳng* (hyperplane). Đó là một tập afin có số chiều bằng $n-1$. Ta gọi véc tơ a là *véc tơ pháp tuyến* của siêu phẳng này.



Hình 1.8. *Siêu phẳng trong $\mathbb{R}^2$ với véc tơ pháp tuyến a và một điểm x^0 thuộc siêu phẳng. Véc tơ $x - x^0$ (véc tơ in đậm) vuông góc với a, trong đó x là một điểm tùy ý thuộc siêu phẳng*

Ta gọi tập

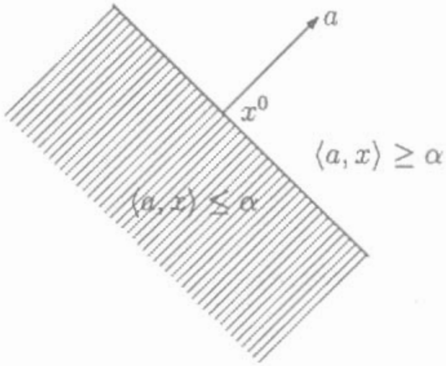
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \le \alpha\} \text{ (hoặc } \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \ge \alpha\})$$

với $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ là *nửa không gian đóng* và tập

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle < \alpha\} \text{ (hoặc } \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle > \alpha\})$$

là *nửa không gian mở* xác định bởi siêu phẳng $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = \alpha\}$.

[6] Mark Grigorievich KREIN (1907 - 1989): Nhà toán học Xô Viết gốc Do Thái.
[7] David Pinhusovich MILMAN (1912 - 1982): Nhà toán học người Ukraina.



Hình 1.9. *Siêu phẳng* $\{x \in \mathbb{R}^2 | \langle a, x\rangle = \langle a, x^0\rangle = \alpha\}$ *xác định hai nửa không gian: i) nửa không gian* $\{x \in \mathbb{R}^2 | \langle a, x\rangle \geq \alpha\}$ *nằm về phía theo hướng véc tơ a; ii) nửa không gian* $\{x \in \mathbb{R}^2 | \langle a, x\rangle \leq \alpha\}$ *nằm về phía ngược hướng véc tơ a*

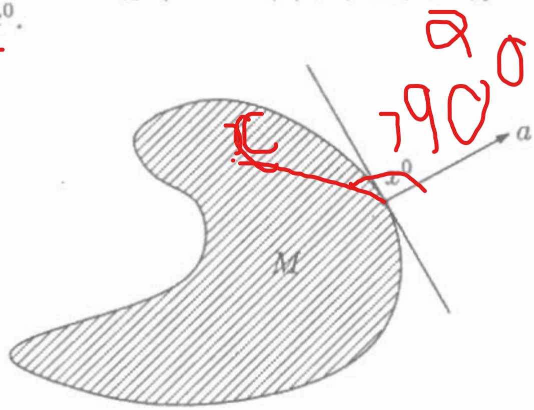
Cho tập $M \subset \mathbb{R}^n$, véc tơ $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và số thực α. Ta gọi siêu phẳng

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x\rangle = \alpha\}$$

là *siêu phẳng tựa* (supporting hyperplane) của M tại $x^0 \in M$ nếu $x^0 \in H$ và M nằm trọn trong nửa không gian đóng xác định bởi H, tức

$$\langle a, x^0\rangle = \alpha \quad \text{và} \quad \langle a, x\rangle \leq \alpha \ \text{ với mọi } x \in M.$$

Xem minh họa ở Hình 1.10. Tập $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq \langle a, x^0\rangle\}$ được gọi là *nửa không gian tựa* của M tại x^0.



Hình 1.10. *Siêu phẳng* $\{x \mid \langle a, x\rangle = \langle a, x^0\rangle\}$ *là siêu phẳng tựa của M tại* x^0

Khi có một siêu phẳng tựa của M tại $x^0 \in M$ thì x^0 phải là một điểm biên của M. Ngược lại,

Định lý 1.3. *Qua mỗi điểm biên x^0 của tập lồi $M \subset \mathbb{R}^n$ tồn tại ít nhất một siêu phẳng tựa của M tại x^0.*

Định lý 1.4. *Một tập lồi đóng khác rỗng $M \subset \mathbb{R}^n$ là giao của họ các nửa không gian tựa của nó.*

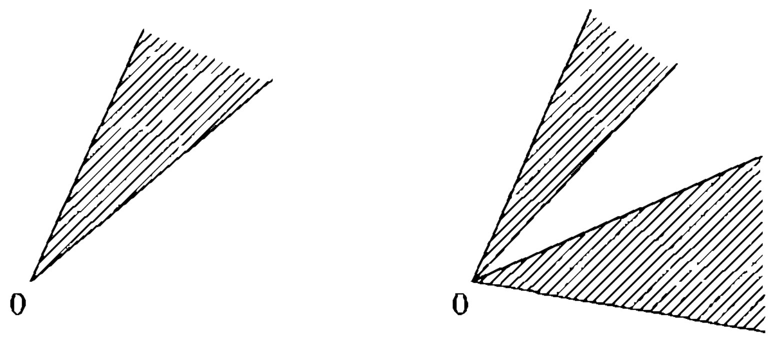
1.3.5 Nón

Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *nón* (cone) nếu

$$x \in M, \ \lambda \geq 0 \ \Rightarrow \ \lambda x \in M.$$

Một nón luôn chứa điểm gốc $0 \in \mathbb{R}^n$. Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *nón lồi* nếu M vừa là nón vừa là tập lồi, nghĩa là với bất kỳ $x^1, x^2 \in M$ và $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ta có

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in M.$$



Hình 1.11. *(a) - nón lồi; (b) - nón không lồi*

Mệnh đề 1.8. *Tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là nón lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp tuyến tính không âm của các phần tử của nó.*

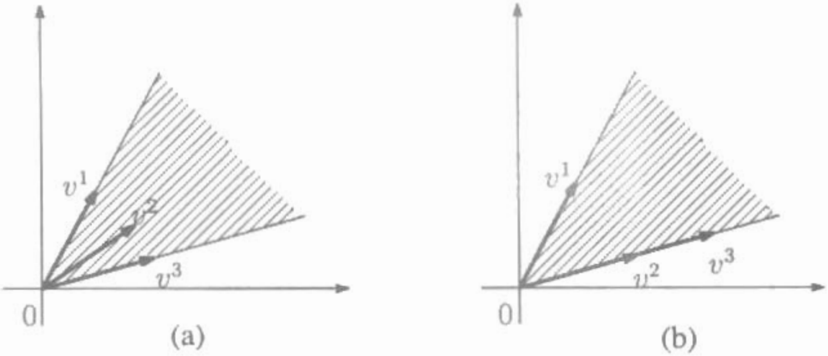
Cho tập k vec tơ $\{v^1, \cdots, v^k\} \subset \mathbb{R}^n$. Tập

$$\text{cone}\{v^1, \cdots, v^k\} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i, \ \lambda_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, k\}$$

được gọi là *nón sinh bởi* tập $\{v^1, \cdots, v^k\}$. Véc tơ $v^h \in \{v^1, \cdots, v^k\}$ là *không thiết yếu* (non essential) nếu

$$\text{cone}\{v^1, \cdots, v^{h-1}, v^{h+1}, \cdots, v^k\} = \text{cone}\{v^1, \cdots, v^k\}.$$

Xem minh họa ở Hình 1.12.



Hình 1.12. *(a) - Véc tơ v^2 là không thiết yếu vì* $\text{cone}\{v^1, v^2, v^3\} = \text{cone}\{v^1, v^3\}$; *(b) - Hoặc véc tơ v^2, hoặc véc tơ v^3 là không thiết yếu vì* $\text{cone}\{v^1, v^2, v^3\} = \text{cone}\{v^1, v^3\} = \text{cone}\{v^1, v^2\}$

1.3.6 Phương lùi xa, phương cực biên

Cho tập lồi khác rỗng $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Véc tơ $d \neq 0$ được gọi là *phương lùi xa* (recession direction) của D nếu

'kí hiu rec

$$\{x + \lambda d \mid \lambda \geq 0\} \subset D \quad \text{với mỗi } x \in D.$$

Mọi nửa đường thẳng song song với một phương lùi xa d xuất phát từ một điểm bất kỳ của D đều nằm trọn trong D. Rõ ràng rằng tập D không bị chặn khi và chỉ khi D có một phương lùi xa.

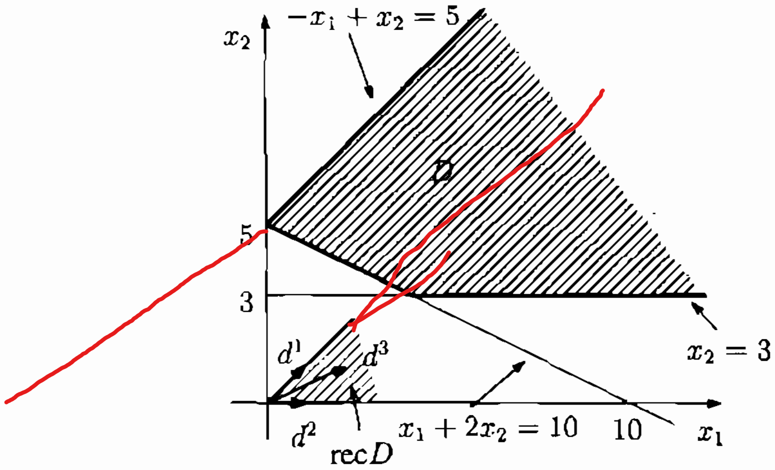
Tập tất cả các phương lùi xa của tập lồi $D \subseteq \mathbb{R}^n$ cùng véc tơ 0 tạo thành một nón lồi (Bài tập). Nón lồi đó được gọi đó là *nón lùi xa* của tập D và ký hiệu là $\text{rec}D$.

Ta nói hai phương d^1 và d^2 là *khác biệt* (distinct) nếu $d^1 \neq \alpha d^2$ với $\alpha > 0$. Phương lùi xa d của tập D được gọi là *phương cực biên* (extreme direction) của D nếu không tồn tại các phương lùi xa khác biệt d^1 và d^2 của D sao cho $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ với $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Ví dụ 1.12. Xét tập

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 \leq 5, x_1 + 2x_2 \geq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 3\}.$$

Ta có $\text{rec}D = \text{cone}\{(1,1)^T, \ (1,0)^T\}$; véc tơ $d^1 = (1,1)^T$ và $d^2 = (1,0)^T$ là hai phương cực biên của D. Véc tơ $d^3 = (2,1)^T$ là một phương lùi xa nhưng không phải là phương cực biên của D. Xem minh họa ở Hình 1.13.



Hình 1.13. *Tập D và nón lùi xa* rec$D$

1.3.7 Các định lý tách tập lồi

Đây là những định lý cơ bản nhất của giải tích lồi, là công cụ hữu hiệu của lý thuyết tối ưu.

Cho hai tập $C,\ D \subset \mathbb{R}^n$ và siêu phẳng $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = \alpha\}$ với $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta nói siêu phẳng H *tách hai tập* C và D nếu

$$\langle a, x\rangle \le \alpha \le \langle a, y\rangle \quad \forall x \in C,\ \forall y \in D;$$

tách hẳn (hay *tách chặt*) hai tập $C,\ D$ nếu

$$\langle a, x\rangle < \alpha < \langle a, y\rangle \quad \forall x \in C,\ \forall y \in D.$$

Định lý 1.5. (Định lý tách I) *Nếu hai tập lồi $C,\ D \subset \mathbb{R}^n$ không rỗng và rời nhau thì có một siêu phẳng tách chúng.*

Định lý 1.6. (Định lý tách II) *Nếu hai tập lồi đóng $C,\ D \subset \mathbb{R}^n$ không rỗng, rời nhau và một trong hai tập ấy là compac thì có một siêu phẳng tách hẳn chúng.*

Chú ý 1.3. Nếu thiếu giả thiết "một trong hai tập là compac" thì Định lý 1.6 không còn đúng. Ví dụ $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \ge e^{x_1}\}$ và $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \le 0\}$ là hai tập lồi đóng, rời nhau nhưng không tách hẳn được (xem Hình 1.14(b)).

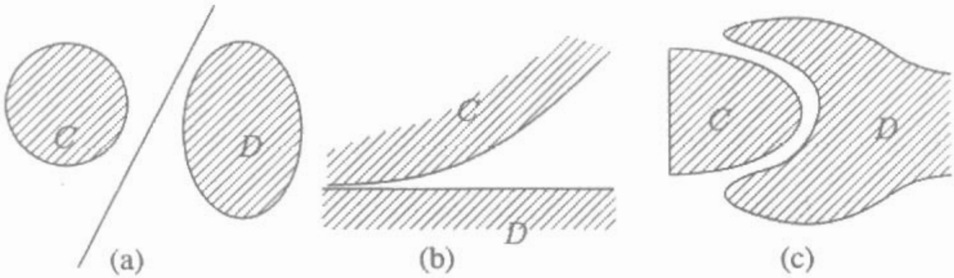
Hệ quả 1.1. (Bổ đề Farkas) *Cho véc tơ $a \in \mathbb{R}^n$ và ma trận A cấp $m \times n$. Khi đó,*

$$\langle a, x\rangle \ge 0 \textit{ với mọi } x \textit{ thỏa mãn } Ax \ge 0$$

khi và chỉ khi

$$\exists\ y \in \mathbb{R}^m_+ = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \ge 0\} \textit{ sao cho } a = A^T y.$$

Bổ đề Farkas có rất nhiều ứng dụng. Về mặt hình học, bổ đề này chỉ ra rằng: nón $K = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq 0\}$ nằm hẳn trong nửa không gian $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x\rangle \geq 0\}$ khi và chỉ khi véc tơ pháp tuyến của siêu phẳng $\{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x\rangle = 0\}$ nằm trong nón sinh bởi các hàng của ma trận A.



Hình 1.14. *(a) - Hai tập lồi C và D được tách hẳn bởi một siêu phẳng; (b) - Hai tập lồi C và D được tách bởi siêu phẳng $\{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ nhưng không tách hẳn được; (c) - Tập C và D giao nhau bằng rỗng nhưng không thể tách được vì D không phải tập lồi*

1.3.8 Tập lồi đa diện

Tập lồi đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng. Nói cách khác nó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính

$$\langle a^i, x\rangle \geq b_i, \quad i = 1, \cdots, \ell. \tag{1.4}$$

Mỗi bất đẳng thức trong hệ (1.4) được gọi là *một ràng buộc*. Ràng buộc $k \in \{1, \cdots, \ell\}$ là *ràng buộc thừa* nếu

$$\{x \mid \langle a^i, x\rangle \geq b_i, i = 1, \cdots, \ell\} = \{x \mid \langle a^i, x\rangle \geq b_i, i \in \{1, \cdots, \ell\} \setminus \{k\}\}.$$

Nếu ta kí hiệu A là ma trận cấp $\ell \times n$ với các hàng là $a^i = (a_{i1}, \cdots, a_{in}), i = 1, \cdots, \ell$; véc tơ $b = (b_1, \cdots, b_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$, $x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ thì hệ (1.4) được viết dưới dạng ma trận như sau

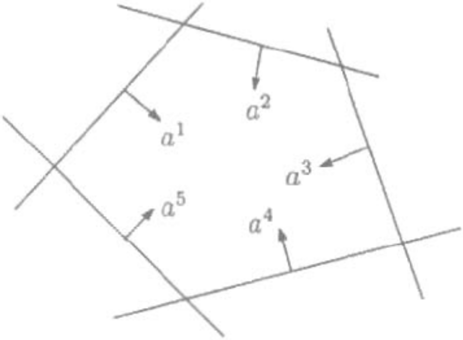
$$Ax \geq b.$$

Vì một phương trình tuyến tính có thể biểu diễn tương đương với hai bất phương trình tuyến tính nên tập nghiệm của hệ phương trình và bất phương trình tuyến tính

$$\langle a^i, x\rangle = b_i, \quad i = 1, \cdots, \ell_1$$
$$\langle a^i, x\rangle \geq b_i, \quad i = \ell_1 + 1, \cdots, \ell.$$

cũng là một tập lồi đa diện.

Dễ thấy rằng tập lồi đa diện là một tập lồi, đóng. Một tập lồi đa diện bị chặn được gọi là *đa diện lồi* hay gọi tắt là *đa diện*.



Hình 1.15. *Đa diện này là giao của 5 nửa không gian* $\{x | \langle a^i, x\rangle \geq b_i, i = 1, \cdots, 5\}$

Cho tập lồi đa diện P xác định bởi (1.4). Nếu điểm $x^0 \in P$ thỏa mãn

$$\langle a^{i_0}, x^0\rangle = b_{i_0}, \quad i_0 \in \{1, \cdots, \ell\}$$

thì ta nói điểm x^0 *thỏa mãn chặt* ràng buộc i_0. Tập

$$I(x^0) := \{i \in \{1, 2, \cdots, \ell\} \mid \langle a^i, x^0\rangle = b_i\}$$

là *tập hợp các chỉ số của những ràng buộc thỏa mãn chặt* tại $x^0 \in P$.

Mỗi điểm cực biên của tập lồi đa diện được gọi là một *đỉnh* của nó. Một tập con lồi khác rỗng F của tập lồi đa diện P được gọi là một *diện* của P nếu hễ F chứa một điểm trong tương đối của một đoạn thẳng nào đó thuộc P thì F chứa trọn cả đoạn thẳng đó, nghĩa là

$$y \in P, z \in P, \ x = \lambda y + (1-\lambda)z \in F \text{ với } 0 < \lambda < 1 \ \Rightarrow \ y \in F, z \in F.$$

Mệnh đề 1.9. *Cho tập lồi đa diện P xác định bởi hệ (1.4). Khi đó, tập con lồi khác rỗng $F \subseteq P$ là một diện của P khi và chỉ khi tồn tại một tập chỉ số $I \subseteq \{1, 2, \cdots, \ell\}$ sao cho F là tập nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} \langle a^i, x\rangle = b_i, & i \in I \\ \langle a^j, x\rangle \geq b_j, & j \in \{1, 2, \cdots, \ell\} \backslash I. \end{cases}$$

Hơn nữa, ta có $\dim F = n - \operatorname{rank}\{a^i, i \in I\}$.

Nhắc lại rằng $\operatorname{rank}\{a^i, i \in I\}$ bằng số véc tơ độc lập tuyến tính lớn nhất trong bộ véc tơ $\{a^i, i \in I\}$.

Đỉnh của tập lồi đa diện P là một diện có thứ nguyên bằng 0. *Cạnh* của P là một diện có thứ nguyên bằng 1. Mỗi cạnh vô hạn của tập lồi đa diện P tương ứng với một phương cực biên của nó.

Hệ quả 1.2. *Cho tập lồi đa diện P xác định bởi hệ (1.4).*

i) *Một điểm $x^0 \in P$ là đỉnh của P khi và chỉ khi x^0 thoả mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính của hệ (1.4);*

ii) *Một đoạn thẳng (hoặc nửa đường thẳng, hoặc đường thẳng) $\Gamma \subset P$ là một cạnh của P khi và chỉ khi nó là tập các điểm của P thoả mãn chặt $(n-1)$ ràng buộc độc lập tuyến tính của hệ (1.4).*

Hệ quả 1.3. *Một diện của tập lồi đa diện P cũng là một tập lồi đa diện. Hơn nữa mỗi đỉnh của một diện của P cũng là một đỉnh của P.*

Cho x^0 là một đỉnh của tập lồi đa diện P xác định bởi hệ (1.4). Đỉnh x^0 được gọi là đỉnh *không suy biến* nếu nó thỏa mãn chặt đúng n ràng buộc của hệ (1.4), tức $|I(x^0)| = n$. Ta nói x^0 là *đỉnh suy biến* nếu $|I(x^0)| > n$. Hai đỉnh x^1 và x^2 được gọi là *kề nhau* nếu đoạn thẳng nối chúng là một cạnh.

Ví dụ 1.13. i) Đa diện $P \subset \mathbb{R}^3$ ở Hình 1.16(a) là giao của 5 nửa không gian, có $\dim P = 3$, có một đỉnh suy biến và bốn đỉnh không suy biến;

ii) Tam giác (phần gạch chéo) ở Hình 1.16(b) là đa diện xác định bởi hệ

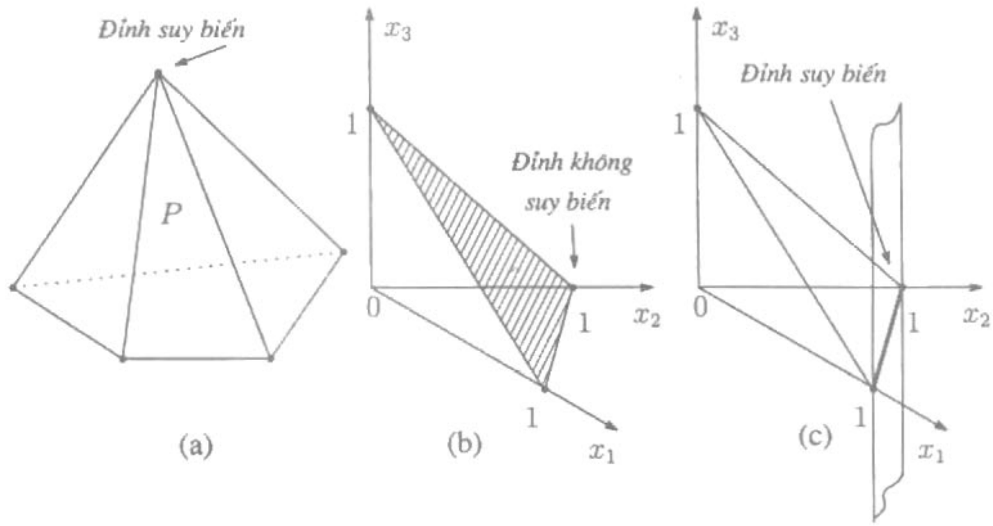
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0.$$

Tam giác này có thứ nguyên là 2 và ba đỉnh không suy biến;

iii) Đa diện xác định bởi hệ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 \qquad &= 1 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

chính là đoạn thẳng nối điểm $(1,0,0)^T$ và $(0,1,0)^T$ (xem Hình 1.16(c)). Đa diện này có thứ nguyên bằng 1 và cả hai đỉnh của nó đều suy biến.



Hình 1.16. *Đỉnh suy biến và không suy biến*

Định lý 1.7. (Định lý biểu diễn tập lồi đa diện) *Giả sử $\{v^1, \cdots, v^N\}$ là tập các đỉnh và $\{d^1, \cdots, d^M\}$ là tập các phương cực biên của tập lồi đa diện P. Khi đó, mỗi điểm $x \in P$ đều có thể biểu diễn dưới dạng*

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^{M} \mu_j d^j, \tag{1.5}$$

trong đó $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, N,\ \mu_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, M$ và $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$.

Nhận xét 1.4. Nếu P là đa diện lồi thì tập các phương cực biên bằng rỗng. Do đó trong (1.5) chỉ còn lại tổng thứ nhất, tức là mỗi điểm của P đều được biểu diễn bằng tổ hợp lồi của các đỉnh của nó.

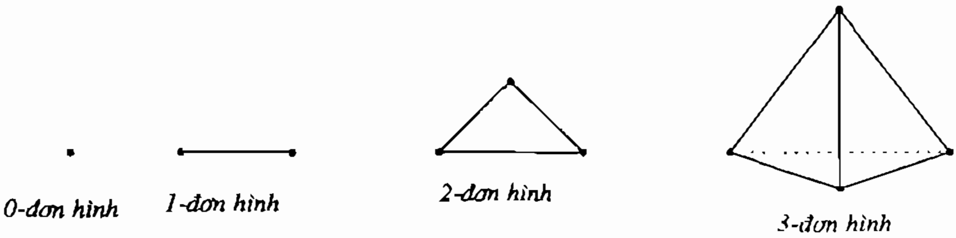
1.3.9 Đơn hình

Ta nói $k+1$ điểm (hay véc tơ) $v^0, v^1, \cdots, v^k \in \mathbb{R}^n$ là *độc lập afin* (affinely independent) nếu k véc tơ $v^1 - v^0, \cdots, v^k - v^0$ là độc lập tuyến tính. Bao lồi của $k+1$ điểm độc lập afin trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là đơn hình k chiều hay $k-$*đơn hình*. Tập

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1,\ x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n\}$$

được gọi là *đơn hình chuẩn* trong $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.14. Một điểm là 0-đơn hình, đoạn thẳng là 1-đơn hình, tam giác là 2-đơn hình và tứ diện là 3-đơn hình (xem Hình 1.17). Đơn hình chuẩn trong $\mathbb{R}^3$ là tứ diện với 4 đỉnh là $(0,0,0)^T$, $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ và $(0,0,1)^T$.



Hình 1.17. *Các đơn hình trong* $\mathbb{R}^3$

1.4 Hàm lồi

1.4.1 Định nghĩa

Hàm f được gọi là *hàm lồi* (convex function) xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nếu

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$$

với bất kỳ $x^1, x^2 \in X$ và số thực $\lambda \in [0,1]$. Ta gọi f là *hàm lồi chặt* (strictly convex function) trên tập lồi X nếu

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$$

với bất kỳ $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$ và $0 < \lambda < 1$. *Miền xác định hữu hiệu* của hàm f là

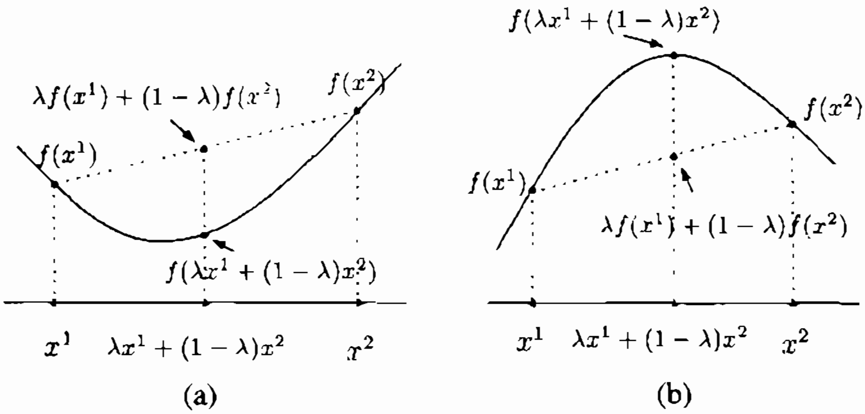
$$\mathrm{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}.$$

Epigraph của hàm lồi f là tập

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,\xi) \in X \times \mathbb{R} \mid \xi \ge f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Hàm lồi $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ có thể được mở rộng thành một hàm lồi trên toàn không gian $\mathbb{R}^n$ bằng cách đặt $f(x) = +\infty$ nếu $x \notin \mathrm{dom} f$. Vì vậy, để đơn giản, ta thường xét f là hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$.

Hàm f được gọi là *hàm lõm* (concave function) (t.ư., *hàm lõm chặt* (strictly concave function)) nếu $-f$ là hàm lồi (t.ư., hàm lồi chặt).



Hình 1.18. *(a) - Hàm lồi; (b) - Hàm lõm*

Dễ chứng minh rằng f là hàm lồi trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ khi và chỉ khi với mọi điểm $x^0 \in X$ và mọi hướng $v \in \mathbb{R}^n$, hàm một biến $\varphi(t) := f(x^0 + tv)$ là hàm lồi trên tập lồi $\{t \in \mathbb{R} \mid x^0 + tv \in X\} \subseteq \mathbb{R}$ (Bài tập). Tính chất này rất hữu ích. Nó cho phép ta kiểm tra một hàm có phải là hàm lồi hay không bằng việc hạn chế xét nó trên một đường thẳng.

Mệnh đề 1.10. *i) Hàm số f xác định trên tập lồi khác rỗng $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là hàm lồi khi và chỉ khi* epi(f) *là tập lồi;*

ii) Hàm số g xác định trên tập lồi khác rỗng $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là hàm lõm khi và chỉ khi tập hypograph của nó

$$\text{hypo}(g) := \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R} \mid \xi \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

là tập lồi.

Chứng minh: i) Do tính tương tự, ta chỉ cần chứng minh khẳng định i).

($\Rightarrow$) Giả sử f là hàm lồi trên tập lồi X. Lấy hai điểm bất kỳ (x^1, ξ_1) và (x^2, ξ_2) thuộc epi(f). Theo định nghĩa

$$\xi_1 \geq f(x^1) \text{ và } \xi_2 \geq f(x^2). \tag{1.6}$$

Với mọi $0 \leq \lambda \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &\leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \quad (\text{do } f \text{ là hàm lồi}) \\ &\leq \lambda \xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \quad (\text{do } (1.6)). \end{aligned}$$

$f(x)$

ξ

Suy ra

$$\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2\right) = \lambda(x^1, \xi_1) + (1-\lambda)(x^2, \xi_2) \in \text{epi}(f).$$

x ξ

($\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử $\text{epi}(f)$ là tập lồi. Vì $(x^1, f(x^1))$ và $(x^2, f(x^2))$ đều thuộc $\text{epi}(f)$ nên với mọi $0 \leq \lambda \leq 1$,

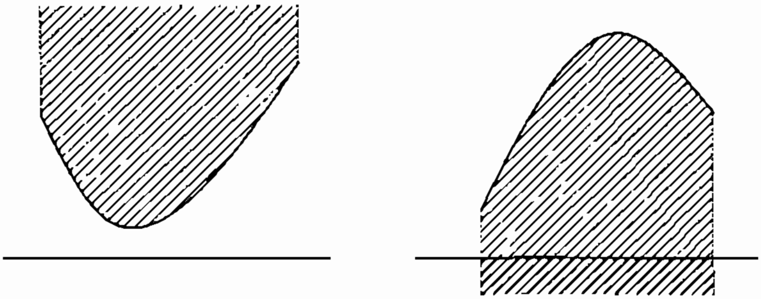
$$\lambda\Big(x^1, f(x^1)\Big) + (1-\lambda)\Big(x^2, f(x^2)\Big) =$$

$$= \Big(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)\Big) \in \text{epi}(f).$$

Theo định nghĩa ta có

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \;\; \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Điều đó chứng tỏ f là hàm lồi. □



(a) (b)

Hình 1.19. *(a) - Epigraph của một hàm lồi (b) - Hypograph của một hàm lõm*

Mệnh đề 1.11. *i) Nếu hàm số f xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ là hàm lồi thì tập mức dưới $L_\alpha(f) := \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;*

ii) Nếu g là hàm lõm xác định trên tập lồi khác rỗng $X \subseteq \mathbb{R}^n$ thì tập mức trên $L^\alpha(g) := \{x \in X \mid g(x) \geq \alpha\}$ là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Chứng minh: Ta chỉ cần chứng minh i). Lấy bất kỳ $x^1, x^2 \in L_\alpha(f)$ và $0 \leq \lambda \leq 1$. Khi đó

tp

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &\leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) && \text{(do } f \text{ là hàm lồi)} \\ &\leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha && \text{(do } x^1, x^2 \in L_\alpha(f)) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Suy ra $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in L_\alpha(f)$. Vậy $L_\alpha(f)$ là một tập lồi. □

tp li $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$

Chú ý 1.4. Mệnh đề 1.11 chỉ là điều kiện cần, không phải là điều kiện đủ. Nghĩa là nếu tập mức dưới $L_\alpha(f)$ của hàm f là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì hàm f chưa chắc đã là hàm lồi. Nếu tập mức trên $L^\alpha(g)$ của hàm g là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì hàm g chưa chắc đã là hàm lõm.

Một hàm mà mọi tập mức dưới là tập lồi được gọi là một hàm *tựa lồi*. Tương tự, một hàm mà mọi tập mức trên là tập lồi được gọi là một hàm *tựa lõm*.

Ví dụ 1.15. Hàm một biến $f(x) = x^3$ có tập mức dưới $L_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R} |\ x^3 \le \alpha\}$ là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và tập mức trên $L^\beta(f) = \{x \in \mathbb{R} |\ x^3 \ge \beta\}$ là tập lồi với mọi $\beta \in \mathbb{R}$, nhưng $f(x)$ không phải là hàm lồi cũng không phải hàm lõm trên $\mathbb{R}$. Đó là hàm vừa tựa lồi, vừa tựa lõm.

1.4.2 Các phép toán về hàm lồi

Cho hàm lồi f_1 xác định trên tập lồi $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, hàm lồi f_2 xác định trên tập lồi $X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ và số thực $\lambda > 0$. Các phép toán λf_1, $f_1 + f_2$, $\max\{f_1, f_2\}$ được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}(\lambda f_1)(x) &:= \lambda f_1(x), \quad x \in X_1;\\ (f_1+f_2)(x) &:= f_1(x) + f_2(x), \quad x \in X_1 \cap X_2;\\ \max\{f_1, f_2\}(x) &:= \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad x \in X_1 \cap X_2.\end{aligned}$$

Kết quả sau dễ dàng suy ra từ định nghĩa

Mệnh đề 1.12. *Cho f_1 là hàm lồi trên tập lồi X_1, f_2 là hàm lồi trên tập lồi X_2 và các số thực $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Khi đó các hàm $\alpha f_1 + \beta f_2$ và $\max\{f_1, f_2\}$ là lồi trên $X_1 \cap X_2$.*

1.4.3 Tính liên tục của hàm lồi

Một hàm lồi f xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ không nhất thiết là hàm liên tục. Tuy nhiên, khi X là tập lồi mở ta có

Định lý 1.8. *Nếu f là hàm lồi xác định trên tập lồi mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$ thì f liên tục trên X.*

Chứng minh. Xem [28], trang 62 - 63. ☐

Nhận xét 1.5. Sự gián đoạn của hàm lồi chỉ có thể xảy ra tại biên của tập xác định.

Ví dụ 1.16. Xét hàm một biến

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x < 1,\\ 2 & \text{nếu } x = 1.\end{cases} \qquad \text{trên tập } X = (-\infty, 1].$$

Dễ thấy $\operatorname{epi}(f) \subset \mathbb{R}^2$ là tập lồi. Do đó, theo Mệnh đề 1.10, f là hàm lồi trên X. Hàm f là liên tục trên $X \setminus \{1\}$. Tại $x = 1$, hàm f là nửa liên tục trên.

1.4.4 Đạo hàm theo hướng của hàm lồi

Định lý 1.9. *Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}^n$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tại mọi điểm $x^0 \in \operatorname{dom} f$ và*

$$f'(x^0, d) \leq f(x^0 + d) - f(x^0).$$

Chứng minh: Cho véc tơ $d \in \mathbb{R}^n$. Do f là hàm lồi nên hàm một biến $\varphi(t) = f(x^0 + td)$ là hàm lồi trên $\{t \mid x^0 + td \in X\}$. Theo định nghĩa của đạo hàm theo hướng,

$$\begin{aligned} f'(x^0, d) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^0 + td) - f(x^0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \\ &= \varphi'_+(0). \end{aligned}$$

Nếu với mọi $t > 0$ mà $x^0 + td \notin \operatorname{dom} f$ thì ta có

$$f(x^0 + td) = \varphi(t) = +\infty \text{ và } \varphi'_+(0) = +\infty.$$

Do đó, kết luận của Định lý là đúng.

Nếu tồn tại $t > 0$ để $x^0 + td \in \operatorname{dom} f$ thì với mọi t_1 mà $0 < t_1 < t$ ta có

$$\frac{t_1}{t} < 1 \quad \text{và} \quad t_1 = \frac{t_1}{t} t + \left(1 - \frac{t_1}{t}\right) 0.$$

Vì φ là hàm lồi nên

$$\varphi(t_1) \leq \frac{t_1}{t} \varphi(t) + \left(1 - \frac{t_1}{t}\right) \varphi(0).$$

Suy ra

$$\frac{\varphi(t_1) - \varphi(0)}{t_1} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t},$$

tức dãy $\{\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\}$ không tăng khi $t \to 0^+$. Do đó tồn tại giới hạn (có thể hữu hạn hoặc $-\infty$)

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'_+(0).$$

Điều đó có nghĩa là với $t > 0$ ta luôn có

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq \varphi'_+(0) = f'(x^0, d).$$

Lấy $t = 1$ ta có $\varphi(1) - \varphi(0) = f(x^0 + d) - f(x^0) \geq f'(x^0, d)$. □

Sau đây là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 1.2 và Định lý 1.9.

Hệ quả 1.4. *Nếu f là hàm lồi khả vi xác định trên tập lồi mở X thì f có đạo hàm theo mọi hướng $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tại mọi điểm $x^0 \in \operatorname{dom} f$ và*

$$\langle \nabla f(x^0), d \rangle = f'(x^0, d) \leq f(x^0 + d) - f(x^0).$$

1.4.5 Tiêu chuẩn nhận biết hàm lồi khả vi

Định lý 1.10. *Cho f là hàm khả vi trên tập lồi mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó:*

i) Hàm f là hàm lồi trên X khi và chỉ khi

$$f(y) - f(x) \geq \left\langle \nabla f(x), y - x \right\rangle \quad \forall\, x, y \in X;$$

ii) Hàm f là hàm lõm trên X khi và chỉ khi

$$f(y) - f(x) \leq \left\langle \nabla f(x), y - x \right\rangle \quad \forall\, x, y \in X.$$

Chứng minh. Xem [28], trang 83-85. □

Với hàm một biến f xác định trên tập lồi $X \subseteq \mathbb{R}$ ta đã biết: *f là hàm lồi trên X khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in X$.* Chẳng hạn: i) Hàm $f(x) = e^x$ là lồi trên $\mathbb{R}$; ii) Hàm $g(x) = -\ln x$ là lồi trên $(0, +\infty)$; iii) Hàm $h(x) = \sin x$ không lồi, không lõm trên $\mathbb{R}$. Tương tự, với hàm n biến ta có

Định lý 1.11. *Cho f là hàm khả vi hai lần trên tập lồi mở $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Khi đó,*

i) Hàm f là hàm lồi trên X khi và chỉ khi ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ là nửa xác định dương trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Hàm f là hàm lồi chặt trên X nếu $\nabla^2 f(x)$ xác định dương trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

ii) Hàm f là hàm lõm trên X khi và chỉ khi ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ là nửa xác định âm trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y \leq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Hàm f là hàm lõm chặt trên X nếu $\nabla^2 f(x)$ xác định âm trên X, tức với mỗi $x \in X$,

$$y^T \nabla^2 f(x) y < 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Chứng minh. Xem [28], trang 90-91. □

Hệ quả 1.5. *Cho hàm toàn phương*

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx \rangle + \langle x, a \rangle + \alpha,$$

trong đó Q là ma trận đối xứng cấp $n \times n$. Khi đó:

i) f là hàm lồi (t.ư., lồi chặt) trên $\mathbb{R}^n$ nếu Q là ma trận nửa xác định dương (t.ư., xác định dương);

ii) f là lõm (t.ư., lõm chặt) trên $\mathbb{R}^n$ nếu Q là ma trận nửa xác định âm (t.ư., xác định âm).

Ví dụ 1.17. Cho $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$. Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vì ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ xác định dương nên hàm f đã cho là hàm lồi chặt trên $\mathbb{R}^2$.

Bài tập Chương 1

1. Cho tập $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng

$$x \in \text{aff}E \quad \Leftrightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i;\ \ x^1, x^2, \cdots, x^k \in E,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

2. Chứng minh rằng không gian con song song với tập afin M là xác định duy nhất.

3. Chứng minh rằng: i) giao của một họ hữu hạn các tập lồi là tập lồi; ii) hợp của hai tập lồi chưa chắc đã là tập lồi, cho ví dụ cụ thể.

4. Cho A là ma trận cấp $m \times n$ và $b \in R^m$. Chứng minh rằng, tập $M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geq 0\}$ là tập lồi.

5. Cho $\{d^1, \cdots, d^k\}$ là các hướng lùi xa của tập

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

với A là ma trận cấp $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng véc tơ

$$0 \neq d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d^i \ \text{ với } \alpha_i \geq 0$$

cũng là một hướng lùi xa của D.

6. Cho $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geq 0\}$. Chứng minh rằng nếu $d \neq 0$ thỏa mãn

$$Ad = 0 \quad \text{và} \quad d \geq 0$$

thì d là một hướng lùi xa của tập P.

7. Cho $p \neq 0$ là một hướng lùi xa của tập

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

với A là ma trận cấp $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng $-p$ không thể là một hướng lùi xa của D.

8. Cho tập $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 1;\ -x_1 + x_2 \leq 2;\ x_1, x_2 \geq 0\}$. Tìm các phương cực biên của M và xác định nón lùi xa $\text{rec}M$.

9. Cho ví dụ: i) tập lồi không có điểm cực biên; ii) tập lồi có hữu hạn điểm cực biên; iii) tập lồi có vô hạn điểm cực biên; iv) Chứng minh rằng tập $D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax < b\}$ không có một điểm cực biên nào.

10. Cho tập lồi đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^6 | Ax = b,\ x \geq 0\}$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Điểm $x = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$ có phải là điểm cực biên của P không? Giải thích.

11. Cho tập $P = \{x \in \mathbb{R}^2 | -3x_1 + 2x_2 \leq 30,\ -2x_1 + x_2 \leq 12,\ x_1, x_2 \geq 0\}$.

    i) Vẽ tập P; ii) Xác định các điểm cực biên và chỉ ra hai hướng lùi xa độc lập tuyến tính của P.

12. Cho hàm số

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2 + 9$$

và điểm $x^0 = (1, 2)^T$. Hãy viết khai triển Taylor bậc nhất của hàm số này tại điểm x^0.

13. Hãy biểu diễn điểm $(2, 2)^T$ như một tổ hợp lồi của ba điểm $(0, 0)^T$, $(1, 4)^T$ và $(3, 1)^T$.

14. Vẽ bao lồi của tập các điểm sau: $(0, 0)^T$, $(1, 0)^T$, $(-1, 2)^T$, $(3, 1)^T$, $(2, 6)^T$, $(-2, 1)^T$, $(-3, -2)^T$, $(3, 3)^T$. Chỉ rõ các điểm cực biên và các điểm trong của bao lồi này.

15. Cho $g_i, i = 1, \cdots, m$ là các hàm lồi và $h_j,\ j = 1, \cdots, k$ là các hàm tuyến tính afin xác định trên $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng tập hợp sau đây là lồi

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, m;\ h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, k\}.$$

16. Các hàm số sau có phải hàm lồi không? Hãy giải thích bằng ít nhất hai cách:

   i) $f(x) = |x|$ với $x \in \mathbb{R}$;

   ii) $f(x) = e^x + 1 + 5x$ với $x \in \mathbb{R}$;

   iii) $f(x) = -\ln x + 3x^3$ với $0 < x < +\infty$;

   iv) $f(x) = \text{arctg}x$ với $0 < x < +\infty$;

   v) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \le 1 \\ (x-2)^2 - 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ với $x \in \mathbb{R}$;

   vi) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{nếu } x < 0 \\ 3 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ với $-\infty < x \le 0$.

17. Trong các hàm số sau, hàm nào là hàm lồi, hàm lõm hay không lồi, không lõm. Vì sao?

   i) $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1 + x_2)}$;

   ii) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 + 5x_2$;

   iii) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 + 9x_1 - 8x_2$;

   iv) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_3 + 3x_2x_3$;

   v) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

   vi) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_2x_3 + 6x_3^2$;

   vii) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

18. Chứng minh rằng hàm tuyến tính afin bị chặn trên (hay bị chặn dưới) trên một tập afin thì chỉ có thể đồng nhất bằng hằng số.

19. Chứng minh rằng hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm afin khi và chỉ khi f vừa là hàm lồi, vừa là hàm lõm.

20. Cho tập lồi khác rỗng $D \subset \mathbb{R}^n$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

   i) f là hàm lõm khi và chỉ khi $\text{hypo}(f)$ là tập lồi;

   ii) Nếu f là hàm lõm thì tập $L^\alpha(f) = \{x \in D \mid f(x) \ge \alpha\}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, là tập lồi.

21. Hãy xác định siêu phẳng đi qua các điểm $(1, 1, 1, 1)^T$, $(2, 0, 1, 0)^T$, $(0, 2, 0, 1)^T$ và $(1, 1, -1, 0)^T$ thuộc $\mathbb{R}^4$.

22. Cho C là tập lồi đóng và $y \notin C$. Chứng minh rằng $x^* \in C$ là điểm gần y nhất khi và chỉ khi $\langle x - y, x^* - y\rangle \ge \|x^* - y\|^2$ với mọi x thuộc C.

23. Cho C_1 và C_2 là hai tập lồi trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng tồn tại một siêu phẳng tách chặt C_1 và C_2 khi và chỉ khi

$$\inf\{\|x - y\| \mid x \in C_1,\ y \in C_2\} > 0.$$

24. Cho A là ma trận cấp $m \times n$ và $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Chứng minh rằng có một và chỉ một hệ phương trình trong hai hệ phương trình sau có nghiệm

i) $Ax = c$;

ii) $A^T y = 0,\ \langle c, y \rangle = 1.$

25. Cho S là tập lồi khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng hàm f được định nghĩa như sau

$$f(y) := \inf\{\|y - x\| \ |x \in S\}$$

là hàm lồi.

Chương 2

Bài toán tối ưu

Nội dung chính của chương này là giới thiệu mô hình toán học của bài toán tối ưu và điều kiện tồn tại nghiệm. Trước hết, ta xét một số bài toán thực tế có thể đưa về bài toán tối ưu.

2.1 Một số ví dụ

Ví dụ 2.1. *(Bài toán thuê lạc đà[1])*

Một đoàn lữ hành cần thuê những con lạc đà một bướu và hai bướu để chở hàng từ Baghdad đến Mecca. Mỗi con lạc đà hai bướu có thể chở được 1000 lbs[2] hàng và mỗi con lạc đà một bướu có thể chở được 500 lbs hàng. Trong chuyến đi, mỗi con lạc đà hai bướu dùng 3 bó cỏ khô và 100 galon[3] nước, còn mỗi con lạc đà một bướu dùng 4 bó cỏ khô và 80 galon nước. Chỉ có 1600 galon nước và 60 bó cỏ khô được dự trữ sẵn ở các ốc đảo trên dọc đường đi. Mỗi con lạc đà hai bướu thuê với giá là 11\$, mỗi con lạc đà một bướu thuê với giá là 5\$. Nếu đoàn lữ hành này phải chở ít nhất là 10000 lbs hàng hóa từ Baghdad đến Mecca thì cần bao nhiêu lạc đà một bướu và bao nhiêu lạc đà hai bướu để số tiền thuê là ít nhất.

Gọi $x_1 \geq 0$ là số lạc đà một bướu và $x_2 \geq 0$ là số lạc đà hai bướu mà đoàn lữ hành cần thuê. Để thuê số lạc đà này người ta phải mất số tiền là:

$$f(x) = 5x_1 + 11x_2.$$

Số lạc đà được thuê phải chở được ít nhất 10000 lbs hàng, tức

$$500x_1 + 1000x_2 \geq 10000.$$

Nước và cỏ khô không được sử dụng quá trữ lượng dự trữ trong các ốc đảo nên

$$\begin{aligned} 4x_1 + \quad 3x_2 &\leq \quad 60 && \textit{(cỏ khô)} \\ 80x_1 + 100x_2 &\leq 1600 && \textit{(nước)}. \end{aligned}$$

[1] theo [4], trang 182.

[2] 1 kg = 2.205 lbs.

[3] 1 galon = 3.79 lít.

Và bài toán được phát biểu như sau:

$$\begin{aligned} \min \quad f(x) = \quad & 5x_1 + \quad 11x_2 \\ \text{với điều kiện} \quad & 500x_1 + 1000x_2 \geq 10000 \\ & 4x_1 + \quad 3x_2 \leq \quad 60 \\ & 80x_1 + \quad 100x_2 \leq \quad 1600 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.2. *(Bài toán lập kế hoạch sản xuất)*

Một xí nghiệp dự định sản xuất n loại sản phẩm từ m loại nguyên liệu. Bài toán đặt ra là xí nghiệp nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm mỗi loại để doanh thu lớn nhất. Biết rằng: Lượng nguyên liệu loại i cần thiết để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j là a_{ij}, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$; Trữ lượng nguyên liệu loại i mà xí nghiệp có là b_i, $i = 1, \cdots, m$; Giá bán một đơn vị sản phẩm loại j là c_j, $j = 1, \cdots, n$.

Gọi x_j là số đơn vị sản phẩm loại j mà xí nghiệp sẽ sản xuất, $j = 1, \cdots, n$. Hiển nhiên là $x_j \geq 0$ với mọi j. Doanh thu của xí nghiệp là

$$f(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n.$$

Tổng chi phí nguyên liệu loại i mà xí nghiệp sẽ sử dụng để sản xuất không được vượt quá trữ lượng, tức

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

Sau đây là mô hình toán học của bài toán lập kế hoạch sản xuất

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{v.đ.k.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n, \end{aligned}$$

trong đó "v.đ.k." là viết tắt của cụm từ "với điều kiện".

Ví dụ 2.3. *(Bài toán lập kế hoạch sản xuất hai mục tiêu)*

Ta xét bài toán lập kế hoạch sản xuất với các số liệu được cho như ở Ví dụ 2.2. Giả sử ngoài mục tiêu cực đại doanh thu, người ta còn muốn cực đại số lượng sản phẩm sản xuất được. Khi đó, bài toán trở thành

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (\textit{doanh thu})$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad (\textit{tổng sản phẩm})$$

$$\text{v.đ.k.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \cdots, n.$$

Ví dụ 2.4. *(Bài toán xác định khẩu phần thức ăn)*

Một nông trường chăn nuôi cần mua n loại thức ăn cho gia súc. Người ta cần xác định khẩu phần rẻ nhất cho gia súc mà vẫn đảm bảo được yêu cầu về m loại chất dinh dưỡng cho bữa ăn của chúng. Biết rằng: Trong khẩu phần thức ăn của gia súc phải có ít nhất b_i đơn vị chất dinh dưỡng loại i, $i = 1, \cdots, m$; Lượng chất dinh dưỡng loại i có trong một đơn vị khối lượng thức ăn loại j là a_{ij}, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$; Giá một đơn vị thức ăn loại j là p_j, $j = 1, \cdots, n$.

Gọi $x_j \geq 0$ là lượng thức ăn loại j trong khẩu phần của gia súc, $j = 1, \cdots, n$. Mô hình toán học của bài toán này là

$$\min \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\text{v.đ.k.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \; i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \cdots, n.$$

Với mỗi $i \in \{1, \cdots, m\}$, ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ nghĩa là lượng chất dinh dưỡng loại i có trong khẩu phần thức ăn của gia súc phải đảm bảo không ít hơn yêu cầu tối thiểu.

Ví dụ 2.5. *(Bài toán vận tải)*

Người ta cần vận chuyển một loại hàng hóa từ m kho chứa hàng (gọi là *điểm phát*) đến n điểm tiêu thụ (gọi là *điểm thu*). Biết rằng: Điểm phát thứ i chứa a_i đơn vị hàng, $i = 1, \cdots, m$; Điểm thu thứ j cần b_j đơn vị hàng, $j = 1, \cdots, n$. Chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ điểm phát i đến điểm thu j là c_{ij}, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Vấn đề đặt ra là cần xác định lượng hàng cần chuyển từ mỗi điểm phát đến từng điểm tiêu thụ như thế nào để chi phí vận chuyển là cực tiểu.

Ký hiệu x_{ij} là số lượng hàng cần vận chuyển từ điểm phát thứ i đến điểm thu thứ j, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Các đại lượng x_{ij} tạo thành *ma trận phân phối hàng hóa*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Và ma trận $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận chi phí*.

Để đơn giản, người ta thường xét bài toán vận tải với giả thiết:

i) $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Điều đó có nghĩa là hàng hóa được chuyển theo một hướng từ các điểm phát đến các điểm thu, tức là các điểm thu không được trả lại hàng. Dễ thấy rằng $x_{i_0 j_0} = 0$ có nghĩa là hàng không được chuyển từ điểm phát i_0 đến điểm thu j_0;

ii) Hàng có thể chuyển từ một điểm phát đến một điểm thu bất kỳ và ngược lại, một điểm thu cũng có thể nhận hàng từ một điểm phát tùy ý sao cho các điểm phát phải phát hết hàng và các điểm thu thỏa mãn nhu cầu cần có, tức

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \cdots, n;$$

iii) Tổng lượng hàng ở m điểm phát đúng bằng tổng lượng hàng cần có ở n điểm thu (tổng cung bằng tổng cầu), tức

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Người ta thường gọi đây là *điều kiện cân bằng thu phát*.

Vì chi phí vận chuyển hàng từ điểm phát i đến điểm thu j là $c_{ij}x_{ij}$ nên tổng chi phí vận chuyển hàng từ tất cả các điểm phát đến tất cả các điểm thu là

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Vậy, mô hình toán học của bài toán vận tải như sau:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{v.đ.k.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,\cdots,m,\ j = 1,\cdots,n.$$

Như sẽ chứng minh chặt chẽ trong Chương 4 (Định lý 4.1), điều kiện cân bằng thu phát chính là điều kiện cần và đủ để bài toán vận tải có nghiệm tối ưu.

Ví dụ 2.6. *(Bài toán cắt gọt kim loại)*

Giả sử có m máy gia công cắt gọt kim loại. Mỗi máy này có thể thực hiện được n công việc khác nhau (chẳng hạn: tiện, phay, bào ...) và có nhiệm vụ gia công một loạt phôi để sản xuất các chi tiết máy. Gọi x_{ij} là thời gian máy i thực hiện công việc j, $i = 1,\cdots,m$, $j = 1,\cdots,n$. Bài toán đặt ra là phải phân phối thời gian cho từng máy làm công việc nào để hiệu quả chung của sản xuất là cực đại. Biết:

i) w_{ij} là hiệu quả (tính bằng tiền) của máy thứ i thực hiện công việc thứ j, chẳng hạn tính trong một giờ, và được cho dưới dạng *ma trận năng suất*

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{pmatrix};$$

ii) Mỗi máy i, $i \in \{1,\cdots,m\}$, trong thời gian mà toàn bộ quá trình được xem xét (một ngày đêm chẳng hạn) có một thời gian công tác cực đại là a_i. Như vậy, tổng thời gian công tác của máy i để thực hiện các công việc j, $j = 1,\cdots,n$ phải bằng a_i, tức

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\cdots,m.$$

Nếu được phép không sử dụng hết thời gian làm việc (công tác) tối đa của máy thì ta có thể thay thế các phương trình trên bởi các bất phương trình

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1,\cdots,m;$$

iii) Mỗi công việc loại j, $j \in \{1, \cdots, n\}$ có thể được thực hiện trên bất cứ máy nào nhưng với thời gian quy định trước là b_j, tức

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \cdots, n.$$

Vì đại lượng đo hiệu quả của máy i khi thực hiện công việc j là $w_{ij}x_{ij}$ nên hiệu quả tổng cộng của tất cả các máy là

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij}.$$

Mô hình toán học của bài toán này là:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij} \\ \text{v.đ.k.}\quad &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = (\le) a_i,\ i = 1, \cdots, m \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \cdots, n \\ &\qquad x_{ij} \ge 0,\ i = 1, \cdots, m,\quad j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

Mô hình toán học này cũng có thể áp dụng cho các bài toán thực tế khác, chẳng hạn bài toán phân phối diện tích đất đai có độ phì nhiêu khác nhau để trồng các loại cây khác nhau như: lúa, ngô, cà chua, sắn, khoai tây...

Ví dụ 2.7. *(Bài toán người du lịch (Travelling Salesman Problem))*

Giả sử một người du lịch muốn đi thăm n thành phố, đánh số từ 1 đến n. Cho biết chi phí đi từ thành phố i đến thành phố j là c_{ij}. Người du lịch xuất phát từ một trong n thành phố này, chẳng hạn thành phố 1, để đi đến thăm $n-1$ thành phố còn lại, mỗi nơi chỉ đến đúng một lần, sau đó lại quay về nơi xuất phát. Như vậy, nếu coi mỗi thành phố là một đỉnh của một đồ thị vô hướng thì mỗi *hành trình* của người du lịch là phải là một chu trình Hamilton[4]. Bài toán đặt ra là tìm một hành trình sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất. Giả thiết rằng $c_{ij} > 0$ với mọi $i \ne j$, $c_{ii} = \infty$ với mọi i và có thể $c_{ij} \ne c_{ji}$.

Đặt

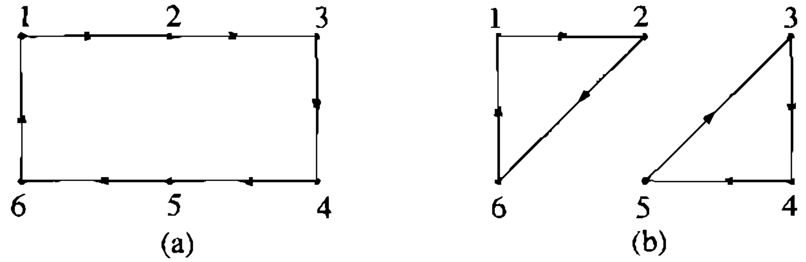
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu người du lịch đi từ } i \text{ đến } j \\ 0 & \text{nếu người du lịch không đi từ } i \text{ đến } j, \end{cases} \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{2.1}$$

[4]Mỗi đường đi khép kín (chu trình) trong một đồ thị vô hướng liên thông được gọi là một *chu trình Hamilton* nếu nó đi qua mọi đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần.

Điều kiện người du lịch đi đến mọi điểm và mỗi điểm chỉ đi qua đúng một lần có nghĩa là

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{2.3}$$



Hình 2.1

Hình 2.1 minh họa hai cách đi đều thỏa mãn điều kiện (2.1)-(2.3) trong trường hợp có $n = 6$ thành phố nhưng cách đi như ở Hình 2.1(b) không thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Vì vậy, điều kiện sau đây được đưa vào để đảm bảo cho mỗi hành trình của người du lịch chỉ chứa một chu trình duy nhất

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \;\; 2 \leq i \neq j \leq n, \tag{2.4}$$

trong đó các biến u_i, u_j nhận các giá trị nguyên hay thực. Thật vậy, nếu trong hành trình nào đó của người du lịch thỏa mãn (2.1)-(2.3) có chứa nhiều chu trình con (Hình 2.1(b)) thì phải có một chu trình con không đi qua thành phố 1 (nếu cần thì ta đánh số lại). Giả sử đó là chu trình đi qua các thành phố $i_1, i_2, \cdots, i_r, i_1$, trong đó $i_k > 1$ với mọi $k = 1, \cdots, r$. Do đó

$$x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_3} = \cdots = x_{i_r i_1} = 1.$$

Từ (2.4) ta có

$$\begin{aligned}
u_{i_1} - u_{i_2} + nx_{i_1 i_2} &\leq n - 1 \\
u_{i_2} - u_{i_3} + nx_{i_2 i_3} &\leq n - 1 \\
&\vdots \\
u_{i_r} - u_{i_1} + nx_{i_r i_1} &\leq n - 1.
\end{aligned}$$

Lấy tổng các bất đẳng thức này, ta sẽ nhận được điều mâu thuẫn là $nr \leq r(n-1)$. Vậy mỗi hành trình thỏa mãn (2.1)-(2.4) chỉ chứa đúng một chu trình duy nhất. Mặt khác, mọi hành trình gồm đúng một chu trình duy nhất đều thỏa mãn điều kiện (2.4).

Thật vậy, xét một hành trình như thế. Đặt $u_i = t$ nếu thành phố i được đi tới ở bước thứ t (đánh số theo thứ tự cách đi) trong hành trình, $t = 2, 3, \cdots, n$. Ta có

$$u_i - u_j \leq n - 1 \ \ \forall \ \ i, j.$$

Do đó điều kiện (2.4) được thỏa mãn với mọi $x_{ij} = 0$. Với $x_{ij} = 1$, điều kiện (2.4) trở thành đẳng thức vì

$$u_i - u_j + nx_{ij} = t - (t + 1) + n = n - 1.$$

Vậy, bài toán người du lịch được phát biểu như sau

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad \textit{(Lộ phí của người du lịch)}$$

$$\begin{aligned} \text{v.đ.k.} \ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \ i = 1, \cdots, n, \ \ j = 1, \cdots, n \\ & u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \ 2 \leq i \neq j \leq n, \end{aligned}$$

trong đó các biến u_i nhận các giá trị nguyên hay thực.

Từ những năm 80 của thế kỷ 20, bài toán này đã trở thành bài toán thường ngày trong công nghệ sản xuất vi mạch với số điểm phải đi qua lên tới mấy chục vạn, thậm chí cả triệu. Còn nhiều bài toán thực tế có mô hình toán học là bài toán này. Chẳng hạn: bài toán tìm hành trình tối ưu cho việc phân phối hay thu gom sản phẩm (thư từ, báo chí, thu tiền dịch vụ nào đó...), bài toán lập trình tự kiểm tra định kỳ máy móc, lập trình tự gia công các chi tiết máy...

Ví dụ 2.8. *(Bài toán ba lô (Knapsack Problem))*

Có một tập hợp gồm n loại đồ vật khác nhau. Đồ vật j có trọng lượng là a_j và có giá trị sử dụng là c_j, $j = 1, \cdots, n$. Bài toán đặt ra là cần lựa chọn một tập con các đồ vật để cho vào một cái ba lô sao cho tổng giá trị sử dụng của chúng là lớn nhất và tổng trọng lượng không được vượt quá tải trọng b cho trước của ba lô. Sau đây là một số dạng bài toán ba lô thường gặp.

◇ *Bài toán ba lô* $0 - 1$: Nếu mỗi loại đồ vật j chỉ có thể lựa chọn hoặc mang theo hoặc không mang theo thì đặt biến số

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu đồ vật } j \text{ được chọn mang theo} \\ 0 & \text{nếu đồ vật } j \text{ không được chọn mang theo.} \end{cases}$$

Khi đó, bài toán ba lô có thể diễn đạt thành

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1\}, \ j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

◇ *Bài toán ba lô nguyên bị chặn*: Nếu đồ vật j có thể chọn với số lượng tối đa là m_j thì bài toán trở thành

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0, 1, \cdots, m_j\}, \ j = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned}$$

trong đó x_j là số lượng đồ vật loại j được chọn xếp vào ba lô để được giá trị hàm mục tiêu lớn nhất.

◇ *Bài toán ba lô nguyên không bị chặn*: Trong bài toán mỗi đồ vật có thể chọn với số lượng không hạn chế. Cụ thể, bài toán được phát biểu là

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ & x_j \geq 0 \text{ và nguyên}, \ j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

Vì trọng lượng của một đồ vật loại j là $a_j > 0$ nên biến nguyên x_j nào của bài toán này cũng sẽ bị chặn bởi tải trọng b của ba lô.

◇ *Một số dạng khác:* Ngoài các dạng vừa trình bày, còn một vài dạng khác của bài toán ba lô như: Bài toán ba lô đa lựa chọn (chọn đồ vật j trong một nhóm a_i nào đó) hay Bài toán tổng trên tập con (chọn một tập con của tập các số $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sao cho tổng các số thuộc tập con được chọn là lớn nhất, miễn là không vượt quá b cho trước) ...

◇ *Phạm vi ứng dụng:* Bất chấp tên gọi, những ứng dụng thực tiễn của bài toán ba lô không bị hạn chế trong phạm vi các vấn đề sắp xếp. Chẳng hạn, bài toán đổi tiền:

"Một thủ quỹ phải trả lại số tiền b cho khách hàng bằng cách dùng một số lượng ít nhất các tờ giấy bạc với trị giá lần lượt là $a_1, a_2, \cdots, a_n$" cũng có mô hình toán học là bài toán ba lô $0 - 1$

$$\min \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$

$$x_j \geq 0 \text{ và nguyên}, \; j = 1, 2, \cdots, n,$$

trong đó a_j là trị giá tờ bạc loại j, x_j là số tờ giấy bạc loại j cần sử dụng.

Rất nhiều vấn đề nảy sinh trong một số ngành công nghiệp như: xếp dỡ hàng hóa lên tàu, pha cắt nguyên liệu, điều khiển ngân sách, quản lý tài chính... đều có thể diễn đạt như bài toán ba lô ở dạng này hay dạng khác.

Ngoài ra, bài toán ba lô xuất hiện như bài toán con trong bài toán phân việc mở rộng (bài toán được dùng thường xuyên khi giải các bài toán tìm hành trình tối ưu cho các loại xe cộ) trong các bài toán xếp lịch bay cho hàng không, trong các bài toán lập kế hoạch sản xuất, bài toán gộp và tách trên đồ thị, trong thiết kế một số vi mạch điện tử...

Ví dụ 2.9. *(Bài toán phân bổ tài nguyên)*

Cần phân phối một loại tài nguyên nào đó với trữ lượng b cho n nhà máy. Biết rằng nếu phân phối cho nhà máy thứ j một lượng tài nguyên là x_j thì hiệu quả mang lại là $\varphi_j(x_j)$. Bài toán đặt ra là nên phân phối cho mỗi nhà máy bao nhiêu tài nguyên này để hiệu quả thu được lớn nhất.

Dễ thấy bài toán này được phát biểu như sau

$$\max \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j) \qquad \textit{(Tổng hiệu quả thu được)}$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq b;$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \; j = 1, \cdots, n.$$

Ví dụ 2.10. *(Bài toán Heron[5])*

Cho hai điểm a^1, a^2 và một đường thẳng ℓ trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Tìm điểm x^* trên đường thẳng ℓ sao cho tổng khoảng cách từ x^* đến a^1 và a^2 là nhỏ nhất.

[5]HERON (hoặc HERON ở Alexandria) (khoảng 10 - 75): Nhà toán học và kỹ thuật người Hy Lạp. Ông nổi tiếng về công thức tính diện tích tam giác khi biết độ dài ba cạnh của nó.

Giả sử phương trình của đường thẳng ℓ là $5x_1 + 6x_2 = 30$. Khi đó, bài toán có dạng

$$\begin{aligned} \min \ & f(x) = \|a^1 - x\| + \|a^2 - x\| \\ \text{v.đ.k.} \ & 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{aligned}$$

Có thể xem bài toán này như mô hình toán học của một số vấn đề xuất hiện trong thực tế: Ta coi đường thẳng ℓ là "một đoạn thẳng" của một tuyến đường sắt; hai điểm a^1 và a^2 là hai cụm dân cư; điểm x^* là vị trí cần đặt ga xe lửa. Vấn đề là cần xây ga xe lửa ở đâu để tổng quãng đường từ đó đến hai cụm dân cư a^1 và a^2 là bé nhất.

Ví dụ 2.11. *(Bài toán thiết kế mạng điện[6])*

Giả sử có 4 khu chung cư là K_1, K_2, K_3 và K_4 như minh họa ở Hình 2.2. Khu K_1 có dạng hình tròn,

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-4)^2 \le 4\}.$$

Khu K_2 cũng có dạng hình tròn,

$$K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-9)^2 + (y-5)^2 \le 1\}.$$

Khu K_3 có dạng hình chữ nhật,

$$K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 \le x \le 8, \ -2 \le y \le 2\}.$$

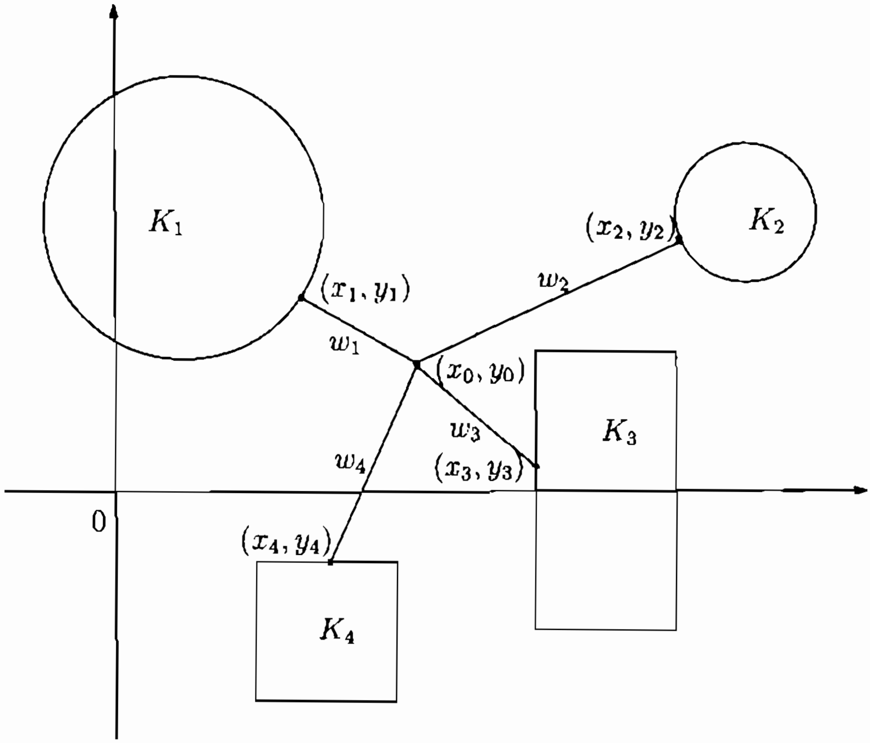
Khu K_4 có dạng hình vuông,

$$K_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x \le 4, \ -3 \le y \le -1\}.$$

Bài toán đặt ra là cần xác định vị trí để xây dựng một trạm biến áp tổng để cung cấp điện cho 4 khu chung cư này và vị trí $(x_i, y_i) \in K_i$ để đặt trạm biến áp phân phối của mỗi khu chung cư K_i, $i = 1, \cdots, 4$, sao cho tổng số dây dẫn điện nối từ trạm biến áp tổng đến trạm biến áp phân phối của bốn khu chung cư này là nhỏ nhất.

---

[6] theo [32], trang 11.



Hình 2.2

Ký hiệu (x_0, y_0) là vị trí sẽ xây dựng trạm biến áp tổng và $(x_i,\ y_i) \in K_i$ là vị trí đặt trạm biến áp phân phối của khu chung cư K_i, $i = 1, \cdots, 4$. Như vậy, độ dài của dây dẫn điện nối từ mỗi điểm $(x_i,\ y_i)$ đến (x_0, y_0) là

$$w_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, \quad i = 1, \cdots, 4.$$

Bài toán này có mô hình toán học như sau:

$$\begin{aligned}
&\min\ z = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \\
\text{v.đ.k.}\quad & w_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
& (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 4)^2 \le 4 \\
& (x_2 - 9)^2 + (y_2 - 5)^2 \le 1 \\
& 6 \le x_3 \le 8 \\
& -2 \le y_3 \le 2 \\
& 2 \le x_4 \le 4 \\
& -3 \le y_4 \le -1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2.12. *(Tìm tâm cụm)*

Cho tập hợp k điểm $\{a^1, \cdots, a^k\} \subset \mathbb{R}^n$. Tìm điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$ sao cho tổng khoảng cách từ mỗi a^i, $i = 1, \cdots, k$, đến x^* là nhỏ nhất.

Mô hình toán học của bài toán này như sau

$$\min f(x), \text{ v.đ.k. } x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó

$$f(x) = \|x - a^1\| + \cdots + \|x - a^k\|$$

là hàm tổng khoảng cách.

Nếu ta coi mỗi a^i là một trung tâm dân cư còn x^* là địa điểm cần xây dựng một cơ sở dịch vụ (trường học, siêu thị, bệnh viện, v.v...) thì đây là bài toán lựa chọn địa điểm xây dựng một cơ sở dịch vụ sao cho tổng độ dài các đường đi từ mỗi khu dân cư đến cơ sở dịch vụ đó là ngắn nhất có thể.

2.2 Bài toán tối ưu và các khái niệm cơ bản

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau:

$$\min\ f(x) \text{ v.đ.k. } x \in D, \tag{P_1}$$

hoặc

$$\max\ f(x) \quad \text{v.đ.k. } x \in D, \tag{P_2}$$

trong đó $D \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập nghiệm chấp nhận được* hay *tập ràng buộc* và $f : D \to \mathbb{R}$ là *hàm mục tiêu*. Mỗi điểm $x \in D$ được gọi là *một nghiệm chấp nhận được* hay *một phương án chấp nhận được* (có thể gọi tắt là *một phương án*).

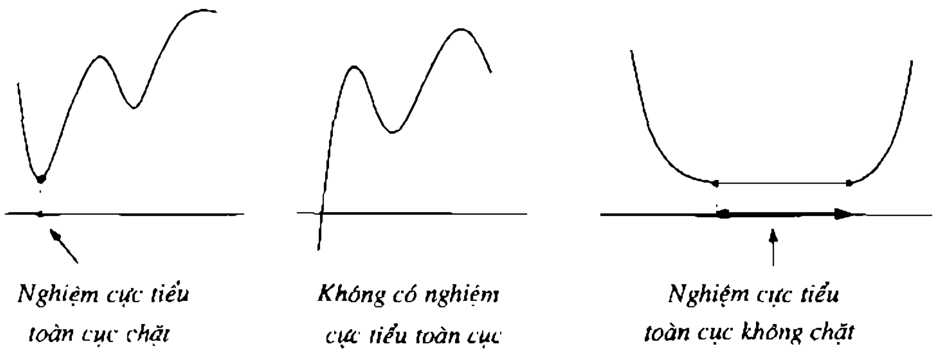
Điểm $x^* \in D$ mà

$$f(x^*) \le f(x) \ \forall x \in D$$

được gọi là *nghiệm tối ưu*, hoặc *nghiệm tối ưu toàn cục*, hoặc *nghiệm cực tiểu toàn cục* (global minimizer), hoặc chỉ đơn giản là *nghiệm* của bài toán (P_1). Người ta còn gọi một nghiệm tối ưu là một *phương án tối ưu* hay *lời giải* của bài toán đã cho. Điểm $x^* \in D$ được gọi là *nghiệm cực tiểu toàn cục chặt* (strictly global minimizer) nếu

$$f(x^*) < f(x) \ \forall x \in D \text{ và } x \neq x^*.$$

Không phải bài toán (P_1) nào cũng có nghiệm cực tiểu toàn cục và nếu bài toán có nghiệm cực tiểu toàn cục thì cũng chưa chắc có nghiệm cực tiểu toàn cục chặt. Xem minh họa ở Hình 2.3 (trường hợp hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm một biến).



Hình 2.3

Giá trị tối ưu (hay *giá trị cực tiểu*) của bài toán (P_1) được kí kiệu là

$$\min_{x \in D} f(x) \quad \text{hoặc} \quad \min\{f(x) \mid x \in D\}.$$

Nếu bài toán (P_1) có nghiệm tối ưu là x^* thì

$$f(x^*) = \min\{f(x) \mid x \in D\}.$$

Ta ký hiệu $\operatorname{Argmin}\{f(x)|x \in D\}$ là *tập nghiệm tối ưu* của bài toán (P_1). Nếu bài toán chỉ có một nghiệm tối ưu x^* thì có thể viết $x^* = \operatorname{argmin}\{f(x)|x \in D\}$.

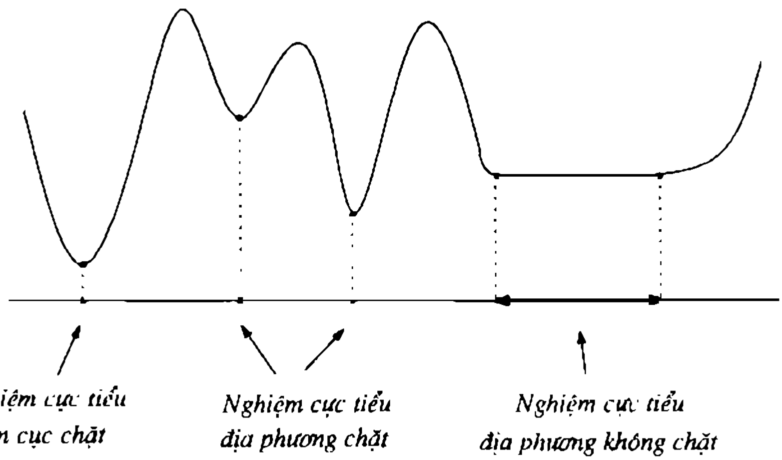
Điểm $x^* \in D$ được gọi là *nghiệm tối ưu địa phương* hoặc *nghiệm cực tiểu địa phương* của bài toán (P_1) nếu tồn tại một ε-lân cận $B(x^*, \varepsilon)$ của điểm $x^* \in D$ sao cho

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap D.$$

Điểm $x^* \in D$ được gọi là *nghiệm tối ưu địa phương chặt* hoặc *nghiệm cực tiểu địa phương chặt* của bài toán (P_1) nếu tồn tại một ε-lân cận $B(x^*, \varepsilon)$ của điểm $x^* \in D$ sao cho

$$f(x^*) < f(x) \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap D \text{ và } x \neq x^*.$$

Hình 2.4 minh họa ví dụ về nghiệm cực tiểu địa phương, nghiệm cực tiểu địa phương chặt và nghiệm cực tiểu toàn cục chặt của hàm một biến f trên tập $D \subset \mathbb{R}$.



Hình 2.4

Lưu ý rằng, người ta cũng thường phát biểu bài toán (P_1) dưới dạng

$$\min\{f(x) \mid x \in D\} \qquad \text{hoặc} \qquad f(x) \longrightarrow \min \qquad \text{hoặc} \qquad \min_{x \in D} f(x).$$
$$\text{v.đ.k. } x \in D$$

Tương tự, bài toán (P_2) cũng thường được phát biểu dưới dạng

$$\max\{f(x) \mid x \in D\} \qquad \text{hoặc} \qquad f(x) \longrightarrow \max \qquad \text{hoặc} \qquad \max_{x \in D} f(x).$$
$$\text{v.đ.k. } x \in D$$

Các khái niệm tương tự cũng được định nghĩa cho bài toán (P_2). Cụ thể, nếu tồn tại một ε-lân cận $B(x^*, \varepsilon)$ của điểm $x^* \in D$ sao cho

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap D$$

thì x^* được gọi là *nghiệm tối ưu địa phương* hay *nghiệm cực đại địa phương* của bài toán (P_2). Nếu tồn tại một ε-lân cận $B(x^*, \varepsilon)$ của điểm $x^* \in D$ sao cho

$$f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap D \ \text{ và } \ x \neq x^*$$

thì x^* được gọi là *nghiệm tối ưu địa phương chặt* hay *nghiệm cực đại địa phương chặt* của bài toán (P_2).

Điểm $x^* \in D$ thỏa mãn $f(x^*) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$ được gọi là *nghiệm tối ưu*, hoặc *nghiệm tối ưu toàn cục*, hoặc *nghiệm cực đại toàn cục* (global maximizer) hoặc chỉ đơn giản là *nghiệm* của bài toán (P_2). Nếu $x^* \in D$ thỏa mãn

$$f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in D \ \text{ và } \ x \neq x^*$$

thì ta gọi x^* là *nghiệm tối ưu toàn cục chặt* (strictly global maximizer) của bài toán (P_2). *Giá trị tối ưu* (hay *giá trị cực đại*) của bài toán (P_2) được kí kiệu là

$$\max\{f(x) \mid x \in D\} \quad \text{hoặc} \quad \max_{x \in D} f(x).$$

Tương tự như đối với bài toán (P_1), ta ký hiệu $\mathrm{Argmax}\{f(x)|x \in D\}$ là *tập nghiệm tối ưu* của bài toán (P_2). Trường hợp bài toán chỉ có một nghiệm tối ưu x^* thì ta cũng có thể viết $x^* = \mathrm{argmax}\{f(x)|x \in D\}$.

Chú ý 2.1. i) Bài toán (P_1) tương đương với bài toán

$$\max \; -f(x) \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in D$$

theo nghĩa tập nghiệm tối ưu của hai bài toán này là trùng nhau và giá trị tối ưu của chúng thì ngược dấu, tức

$$\min\{f(x) \mid x \in D\} = -\max\{-f(x) \mid x \in D\}.$$

Vì vậy, không giảm tổng quát, ta chỉ cần xét bài toán (P_1) hoặc bài toán (P_2).

ii) Nếu $D \equiv \mathbb{R}^n$ thì ta nói (P_1) là bài toán *tối ưu không ràng buộc*. Ngược lại, nếu $D \subset \mathbb{R}^n$ thì ta nói (P_1) là bài toán *tối ưu có ràng buộc*. Trong các bài toán tối ưu có ràng buộc, tập D thường được xác định bởi

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \; i = 1, \cdots, p\}, \tag{2.5}$$

với g_i, $i = 1, \cdots, p$, là các hàm thực xác định trên tập $A \supset D$ (thông thường $A = \mathbb{R}^n$). Ta gọi $g_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$, là các *hàm ràng buộc*. Mỗi hệ thức $g_i(x) \leq 0$, $i \in \{1, \cdots, p\}$, được gọi là một *ràng buộc* của bài toán. Vì ràng buộc

$$g_i(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -g_i(x) \leq 0$$

và

$$g_i(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \;\; g_i(x) \leq 0 \\ -g_i(x) \leq 0 \end{cases}$$

nên rõ ràng biểu diễn (2.5) bao gồm hết các loại ràng buộc.

Chú ý 2.2. Nghiệm tối ưu toàn cục cũng là nghiệm tối ưu địa phương nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng. Tuy nhiên, nếu D là tập lồi và $f(x)$ là hàm lồi thì nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1) cũng là nghiệm tối ưu toàn cục. Cụ thể,

Mệnh đề 2.1. *Cho hàm lồi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và tập lồi khác rỗng $D \subset \mathbb{R}^n$. Xét bài toán* $\min\{f(x) \mid x \in D\}$. *Khi đó:*

i) Nếu x^* là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán này thì x^* cũng là nghiệm tối ưu toàn cục;

ii) Nếu x^* là nghiệm tối ưu địa phương chặt hoặc f là hàm lồi chặt thì x^* là nghiệm tối ưu toàn cục duy nhất của bài toán.

Chứng minh. i) Giả sử $x^* \in D$ là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán $\min\{f(x) | x \in D\}$. Theo định nghĩa, tồn tại một ϵ-lân cận $B(x^*, \epsilon)$ của điểm $x^* \in D$ sao cho

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x^*, \epsilon) \cap D.$$

Với bất kỳ $x \in D$, ta có

$$\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)x^* = x^* + \lambda(x - x^*) \in B(x^*, \epsilon) \cap D$$

khi $0 < \lambda < 1$ và λ đủ nhỏ. Do x^* là nghiệm cực tiểu địa phương và f là hàm lồi nên

$$f(x^*) \leq f(\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x^*) \Rightarrow f(x^*) \leq f(x).$$

Điều đó chứng tỏ x^* là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán đang xét.

ii) Giả sử x^* là nghiệm tối ưu địa phương chặt. Theo i), x^* cũng là nghiệm tối ưu toàn cục. Bây giờ, ta giả thiết phản chứng rằng x^* không phải nghiệm tối ưu toàn cục duy nhất của bài toán, tức tồn tại $\bar{x} \in D$, $\bar{x} \neq x^*$ và $f(\bar{x}) = f(x^*)$. Ký hiệu $x_\lambda = \lambda\bar{x} + (1 - \lambda)x^*$ với $0 \leq \lambda \leq 1$. Vì D là tập lồi và f là hàm lồi trên D nên

$$x_\lambda \in D \text{ và } f(x_\lambda) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda) f(x^*) = f(x^*) \text{ với mọi } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.6)$$

Cho $\lambda \to 0_+$. Ta có thể chọn được $x_\lambda \in B(x^*, \varepsilon) \cap D$ với một $\varepsilon > 0$. Điều này và (2.6) mâu thuẫn với giả thiết x^* là nghiệm tối ưu địa phương chặt. Vì vậy x^* phải là nghiệm tối ưu toàn cục duy nhất.

Cuối cùng, giả sử rằng x^* là nghiệm tối ưu địa phương và hàm mục tiêu f là lồi chặt. Vì hàm lồi chặt là hàm lồi nên từ i) ta có x^* là nghiệm tối ưu toàn cục. Ta cũng giả thiết phản chứng rằng x^* không phải là nghiệm tối ưu toàn cục duy nhất, tức tồn tại $\bar{x} \in D$, $\bar{x} \neq x^*$ và $f(\bar{x}) = f(x^*)$. Do f là hàm lồi chặt nên

$$f\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}x^*\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f(x^*) = f(x^*).$$

Do D là tập lồi nên $(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}x^*) \in D$ và bất đẳng thức trên mâu thuẫn với giả thiết x^* là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán, chứng tỏ x^* là nghiệm tối ưu toàn cục duy nhất. □

Chú ý 2.3. Nếu bài toán (P_1) không có nghiệm tối ưu thì giá trị tối ưu của bài toán này, ký hiệu là $\inf f(D)$, là cận dưới lớn nhất (hay giá trị infimum) hàm f trên D. Giả sử $t_0 = \inf f(D)$ với $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Khi đó,

$$f(x) \geq t_0 \quad \forall x \in D \text{ và } \exists\{x^n\} \subset D \text{ sao cho } \lim_{n\to\infty} f(x^n) = t_0.$$

Tương tự, nếu bài toán (P_2) không có nghiệm tối ưu thì giá trị tối ưu của bài toán này, ký hiệu là $\sup f(D)$, là cận trên nhỏ nhất (hay giá trị supremum) hàm f trên D. Nếu $t_* = \sup f(D)$, $t_* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thì

$$f(x) \leq t_* \quad \forall x \in D \text{ và } \exists\{x^n\} \subset D \text{ sao cho } \lim_{n\to\infty} f(x^n) = t_*.$$

Ví dụ 2.13. i) Cho $f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$. Khi đó, bài toán (P_1) tương ứng có vô số nghiệm tối ưu toàn cục,

$$\operatorname{Argmin}\{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\bar{x} = (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

và giá trị tối ưu là $\min\{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\} = -1$.

Tập nghiệm tối ưu của bài toán (P_2) tương ứng là:

$$\operatorname{Argmax}\{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\hat{x} = 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

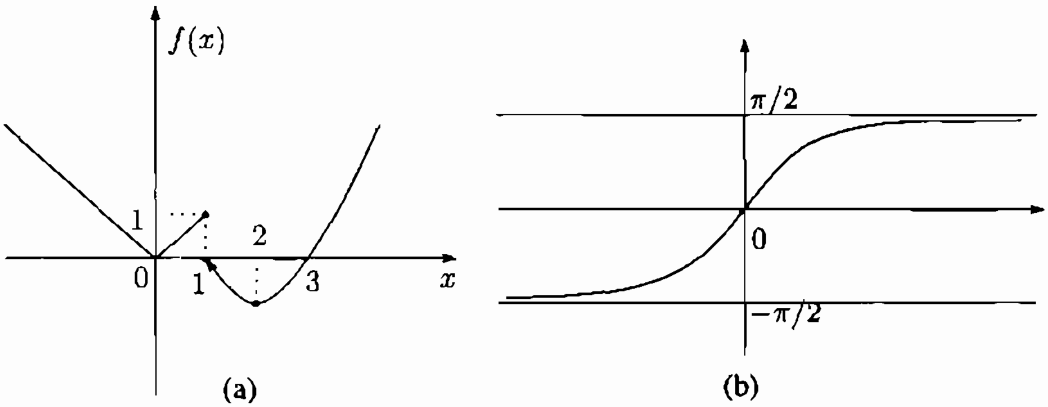
và giá trị tối ưu là $\max\{\cos x \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$.

ii) Cho

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu } x \le 1 \\ (x-2)^2 - 1 & \text{nếu } x > 1, \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}.$$

Đồ thị của hàm này được minh họa ở Hình 2.5(a). Dễ thấy $x = 2$ là nghiệm cực tiểu toàn cục duy nhất. Điểm $x = 0$ là nghiệm cực tiểu địa phương của f trên D. Giá trị tối ưu $\min\{f(x) | x \in D\} = f(2) = -1$.

Điểm $x = 1$ là nghiệm cực đại địa phương. Không tồn tại nghiệm cực đại toàn cục của f trên D và $\sup f(D) = +\infty$.



Hình 2.5

iii) Cho $f(x) = \operatorname{arctg} x$ và $D = \mathbb{R}$. Dễ thấy, trên $\mathbb{R}$, hàm f không có một nghiệm cực tiểu địa phương, cực đại địa phương, cực tiểu toàn cục hoặc cực đại toàn cục nào. Và ta có $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$ và $\sup f(D) = +\frac{\pi}{2}$ (xem Hình 2.5(b)).

iv) Cho $f(x) = x_1$ và

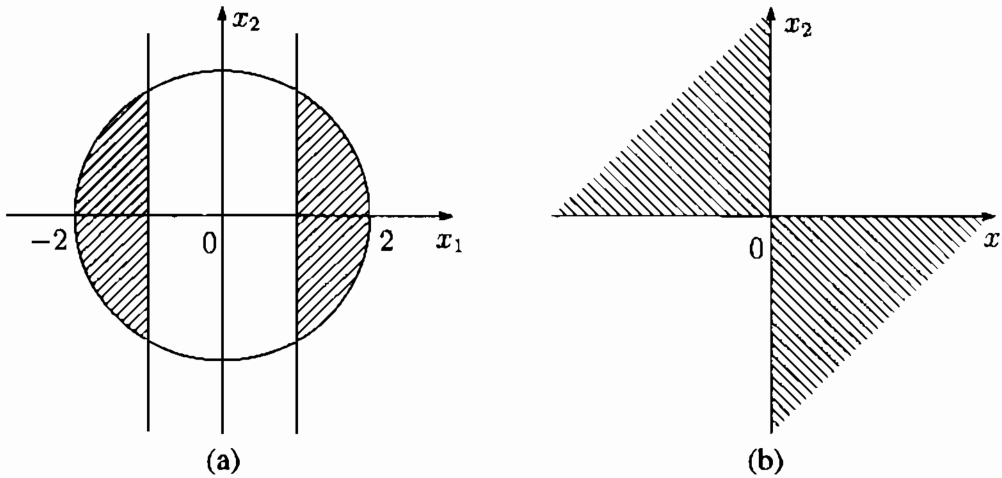
$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1^2 \ge 1\}.$$

Hình 2.6(a) biểu diễn tập D (phần gạch chéo). Hàm f có một nghiệm cực tiểu toàn cục trên D là $x = (-2, 0)^T$ và vô số nghiệm cực tiểu địa phương, đó là cả đoạn thẳng nối $(1, \sqrt{3})^T$ và $(1, -\sqrt{3})^T$. Giá trị tối ưu của bài toán (P_1) tương ứng là $\min_{x \in D} f(x) = -2$.

Tương tự, $x = (2, 0)^T$ là nghiệm cực đại toàn cục duy nhất của bài toán (P_2) tương ứng; tất cả những điểm nằm trên đoạn thẳng nối $(-1, \sqrt{3})^T$ và $(-1, -\sqrt{3})^T$ đều là nghiệm cực đại địa phương và giá trị tối ưu $\max_{x \in D} f(x) = 2$.

v) Cho $f(x) = x_1$ và $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \leq 0\}$ (xem Hình 2.6(b)). Khi đó, bài toán (P_1) tương ứng có vô số nghiệm cực tiểu địa phương, đó là tập các điểm $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 < 0\}$; không có nghiệm cực tiểu toàn cục và $\inf f(D) = -\infty$.

Bài toán (P_2) tương ứng có vô số nghiệm cực đại địa phương, đó là tập các điểm $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0,\ x_2 > 0\}$; không có nghiệm cực đại toàn cục và $\sup f(D) = +\infty$.



Hình 2.6

2.3 Các loại bài toán tối ưu

Để tiện cho việc nghiên cứu, người ta thường chia các bài toán tối ưu thành một số lớp dựa trên tính chất của hàm mục tiêu và tập chấp nhận được.

- *Quy hoạch tuyến tính*: hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm tuyến tính và tập chấp nhận được $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện (tức các hàm ràng buộc $g_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$ là các hàm afin).

- *Quy hoạch nguyên* (hay *Tối ưu rời rạc (tổ hợp)*): tập chấp nhận được $D \subset \mathbb{R}^n$ có cấu trúc rời rạc. Một trường hợp riêng quan trọng của quy hoạch nguyên là bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên, đó là bài toán quy hoạch tuyến tính mà các biến số chỉ lấy giá trị nguyên.

- *Quy hoạch phi tuyến*: hàm mục tiêu $f(x)$ hoặc một trong các hàm ràng buộc $g_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$ không phải hàm afin. Trong các bài toán tối ưu phi tuyến có hai lớp đặc biệt quan trọng, đó là:

+ *Quy hoạch lồi*: là bài toán cực tiểu một hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm lồi trên tập chấp nhận được $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi (hay cực đại một hàm lõm trên tập lồi). Theo Mệnh đề 2.1, các bài toán quy hoạch lồi có một tính chất rất đẹp là nghiệm tối ưu địa phương (nếu có) cũng là nghiệm tối ưu toàn cục.

+ *Quy hoạch lõm*: là bài toán cực tiểu một hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm lõm trên tập chấp nhận được $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi. Đây là lớp bài toán tiêu biểu của *Quy hoạch toàn cục*. Một bài toán là bài toán quy hoạch toàn cục nếu nghiệm tối ưu địa phương của nó chưa chắc là nghiệm tối ưu toàn cục.

- *Quy hoạch động*: bài toán quy hoạch động xét các đối tượng là các quá trình có thể chia ra thành nhiều giai đoạn hoặc các quá trình phát triển theo thời gian. Trong nhiều trường hợp, người ta đưa bài toán quy hoạch động về dạng bài toán quy hoạch tuyến tính với kích thước lớn.

- *Quy hoạch đa mục tiêu*: bài toán này không phải chỉ có một hàm mục tiêu duy nhất như bài toán (P_1) (hoặc (P_2)) mà ta phải cực tiểu (hoặc cực đại) đồng thời p (với $p \geq 2$) hàm mục tiêu trên tập chấp nhận được khác rỗng $D \subset \mathbb{R}^n$ và các mục tiêu này có thể không tương thích với nhau.

- Ngoài ra còn có *Quy hoạch d.c* (hàm mục tiêu hay các hàm ràng buộc là hiệu của hai hàm lồi), *Quy hoạch ngẫu nhiên* (các tham số của bài toán không có giá trị xác định mà nó được mô tả bởi các phân phối xác suất), *Quy hoạch tham số* (các hệ số của hàm mục tiêu hay hàm ràng buộc phụ thuộc vào một hay nhiều tham số) ...

Trong giáo trình này, chúng ta trình bày cơ sở lý thuyết và một số phương pháp giải các bài toán thuộc:

- Quy hoạch tuyến tính (Chương 3) và một trường hợp riêng quan trọng của nó là Bài toán vận tải (Chương 4);

- Quy hoạch nguyên (Chương 5);

- Quy hoạch phi tuyến, bao hàm cả bài toán tối ưu không có ràng buộc, bài toán tối ưu có ràng buộc và quy hoạch lồi (Chương 6).

2.4 Điều kiện tồn tại nghiệm

Mục đích của Quy hoạch toán học là nghiên cứu các tính chất của tập nghiệm và xây dựng các thuật toán để tìm nghiệm của bài toán tối ưu. Câu hỏi đầu tiên đặt ra là "bài toán cần giải có nghiệm tối ưu hay không?".

Xét bài toán tối ưu

$$\min\ f(x) \text{ với điều kiện } x \in D, \qquad (P_1)$$

trong đó $D \subseteq \mathbb{R}^n$ và $f(x)$ là một hàm thực xác định trên một tập mở chứa D. Khi đó, có một trong bốn khả năng sau có thể xảy ra:

i) Bài toán (P_1) không có phương án chấp nhận được, tức $D = \emptyset$;

ii) Bài toán có nghiệm tối ưu, tức tồn tại $x^* \in D$ sao cho

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in D,$$

và giá trị tối ưu của bài toán là $f(x^*) = \min_{x \in D} f(x)$ (Ví dụ 2.13(i), 2.13(ii) và 2.13(iv));

iii) Bài toán không có nghiệm tối ưu và giá trị hàm mục tiêu $f(x)$ giảm vô hạn trên tập chấp nhận được D, tức giá trị tối ưu $\inf\{f(x)|x \in D\} = -\infty$ (Ví dụ 2.13(v));

iv) Bài toán không có nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu $\inf\{f(x)|x \in D\}$ là hữu hạn (Ví dụ 2.13(iii)).

Như vậy, trừ trường hợp tập chấp nhận được bằng rỗng, giá trị tối ưu của bài toán (P_1) luôn tồn tại nhưng nghiệm tối ưu thì không nhất thiết tồn tại. Việc tìm kiếm điều kiện đảm bảo để bài toán có nghiệm tối ưu là vấn đề quan trọng.

Mệnh đề 2.2. *Điều kiện cần và đủ để bài toán (P_1) có nghiệm tối ưu là tập*

$$f(D)_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq f(x), \text{với } x \in D\}$$

đóng và có một cận dưới hữu hạn.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử x^0 là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1). Khi đó, ta có

$$f(x^0) = \min_{x \in D} f(x) \quad \text{và} \quad f(D)_+ = [f(x^0), +\infty).$$

Hiển nhiên $f(D)_+$ là tập đóng và nhận $f(x^0)$ là một cận dưới.

($\Leftarrow$) Ngược lại, nếu tập $f(D)_+$ có một cận dưới hữu hạn thì cận dưới lớn nhất (hay infimum) của tập này là hữu hạn và ta ký hiệu nó là t_0. Theo định nghĩa của infimum, $t \geq t_0$ với mọi $t \in f(D)_+$ và tồn tại một dãy $\{t_n\} \subset f(D)_+$ hội tụ đến t_0. Vì $f(D)_+$ là tập đóng nên $t_0 \in f(D)_+$. Theo định nghĩa của tập $f(D)_+$, tồn tại $x^0 \in D$ sao cho $t_0 \geq f(x^0)$. Hiển nhiên là $f(x^0)$ cũng thuộc $f(D)_+$ và vì t_0 là cận dưới lớn nhất của tập $f(D)_+$ nên ta có $f(x^0) \geq t_0$. Suy ra, $t_0 = f(x^0)$. Điều đó chứng tỏ x^0 là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1). □

Định lý 2.1. *Cho D là tập compac khác rỗng. Khi đó:*

i) *Nếu hàm f nửa liên tục dưới trên D thì bài toán (P_1) có nghiệm tối ưu;*

ii) *Nếu hàm f nửa liên tục trên trên D thì bài toán (P_2) có nghiệm tối ưu.*

Chứng minh. Do tính tương tự, ta chỉ cần chứng minh phần (i). Giả sử giá trị tối ưu của bài toán (P_1) là $t_0 = \inf f(D)$. Theo định nghĩa,

$$f(x) \geq t_0 \ \forall x \in D \tag{2.7}$$

và

$$\exists \text{ dãy } \{x^n\} \subset D \ \text{ sao cho } \lim_{n \to \infty} f(x^n) = t_0.$$

Do D là tập compac nên có một dãy con của dãy $\{x^n\}$ hội tụ đến một điểm $x^0 \in D$. Để đơn giản, ta có thể giả thiết luôn rằng $\lim_{n\to\infty} x^n = x^0 \in D$. Do f nửa liên tục dưới tại $x^0 \in D$ nên $f(x^0) \le \lim_{n\to\infty} f(x^n) = t_0$. Kết hợp sự kiện này với (2.7) ta có

$$t_0 = \inf f(D) = f(x^0),$$

chứng tỏ x^0 là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1). □.

Hệ quả 2.1. (Định lý Weierstrass[7]) *Nếu tập D là compac và hàm f liên tục trên D thì cả hai bài toán (P_1) và (P_2) đều có nghiệm tối ưu.*

Chứng minh. Hàm liên tục là hàm vừa nửa liên tục trên vừa nửa liên tục dưới. Kết luận của Hệ quả được suy trực tiếp từ Định lý 2.1. □

Nếu tập khác rỗng D chỉ đóng mà không bị chặn và hàm f nửa liên tục dưới trên D thì, nói chung, có thể hàm f không đạt cực tiểu trên D, tức bài toán (P_1) không có nghiệm tối ưu. Tuy nhiên,

Định lý 2.2. *Cho tập đóng khác rỗng $D \subset \mathbb{R}^n$. Nếu hàm f là nửa liên tục dưới trên D và thỏa mãn điều kiện bức (coercive) trên D,*

$$f(x) \to +\infty \text{ khi } x \in D, \text{ và } \|x\| \to +\infty$$

thì bài toán (P_1) có nghiệm tối ưu.

Chứng minh. Lấy một điểm bất kỳ $x^0 \in D$. Trước hết, ta chứng minh rằng tập mức dưới

$$\bar{D} = \{x \in D \mid f(x) \le f(x^0)\}$$

là tập compac. Thật vậy, do f là nửa liên tục dưới trên D nên với mỗi dãy $\{x^n\} \subset \bar{D}$, $\{x^n\} \to \bar{x}$ mà dãy $\{f(x^n)\}$ hội tụ, ta có

$$f(\bar{x}) \le \lim_{n\to\infty} f(x^n) \le f(x^0).$$

Suy ra $\bar{x} \in \bar{D}$, chứng tỏ D là tập đóng. Hơn nữa, nếu $\bar{D}$ không bị chặn thì phải tồn tại một dãy $\{x^k\} \subset \bar{D}$, tức $f(x^k) \le f(x^0)$, sao cho $\|x^k\| \to +\infty$. Do điều kiện bức nên $f(x^k) \to +\infty$, mâu thuẫn với sự kiện $\{x^k\} \subset \bar{D}$. Vậy $\bar{D}$ là tập compac. Theo Định lý 2.1(i), hàm f đạt cực tiểu trên $\bar{D}$, tức tồn tại $x^* \in \bar{D}$ sao cho $f(x^*) \le f(x)$ với mọi $x \in \bar{D}$. Dễ thấy, x^* cũng chính là nghiệm cực tiểu của bài toán (P_1). □

[7]Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (1815 - 1897): Nhà toán học Đức. Ông nổi tiếng về sự cẩn thận trong các chứng minh toán học và được mệnh danh là "*cha đẻ của Giải tích hiện đại*". Ông là người phát hiện ra khái niệm hội tụ đều và giải thích một cách chặt chẽ các khái niệm hàm số, cực trị, đạo hàm, và đặc biệt là khái niệm giới hạn.

Bài tập Chương 2

1. Cho ví dụ về hàm số f và tập $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sao cho: i) Hàm f có một cực tiểu địa phương nhưng không có cực tiểu toàn cục trên D; ii) Hàm f không có cả cực tiểu địa phương và cực tiểu toàn cục trên D; iii) Hàm f có các điểm cực tiểu địa phương và một điểm cực tiểu toàn cục với giá trị hàm mục tiêu khác nhau trên D; iv) Hàm f có nhiều điểm cực tiểu toàn cục trên D. Đặt câu hỏi tương tự cho cực đại.

2. Xét một bài toán tối ưu có tập chấp nhận được xác định bởi các ràng buộc
$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0,\ 1 - x_1 - x_2 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$
Xác định trong các điểm sau đây, điểm nào là không chấp nhận được, điểm nào là chấp nhận được và nếu là điểm chấp nhận được thì đó là điểm trong hay điểm biên: $x_a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, x_b = (1,1)^T, x_c = (-1,0)^T, x_d = (-\frac{1}{2}, 0)^T$ và $x_e = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

3. Cho hàm một biến
$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x.$$
i) Vẽ đồ thị của hàm số này?

ii) Xác định nghiệm tối ưu địa phương và nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán $\{\min f(x) | x \in \mathbb{R}\}$.

4. Xét bài toán
$$\min\ x_1 \ \text{ v.đ.k. } \ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1,\ \ (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1.$$
i) Vẽ tập chấp nhận được;

ii) Có hay không cực tiểu địa phương và cực tiểu toàn cục ?

5. Cho f là hàm lồi (t.ư., hàm lõm) trên tập đa diện D. Chứng minh rằng hàm f đạt cực đại (t.ư., cực tiểu) toàn cục tại ít nhất một đỉnh của D.

6. Giải bài toán sau
$$\max\{x_1^2 + x_2^2 \mid 3x_1 + x_2 \leq 15,\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6,\ x_2 \leq 10,\ x_1, x_2 \geq 0\}.$$
(*Gợi ý: Xem bài tập 5*)

7. Xét bài toán min $\{f(x) \mid x \in D\}$, trong đó D là tập các số nguyên. Chứng minh rằng mỗi điểm $x \in D$ đều là nghiệm cực tiểu địa phương.

8. Cho $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ và f là hàm thực xác định trên X. Chứng minh rằng:

i) Nếu f đạt cực tiểu địa phương tại $x = a$ và tồn tại $f_+'(a)$ thì $f'_+(a) \geq 0$;

ii) Nếu f đạt cực tiểu địa phương tại $x = b$ và tồn tại $f'_-(b)$ thì $f'_-(b) \leq 0$.

9. Điểm $(0,0)^T$ có phải là nghiệm cực tiểu địa phương, nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán $\min\{f(x) | x \in \mathbb{R}^2\}$ không, trong đó

   i) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;

   ii) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2(2 - x_1)^3$.

   Giải thích?

10. Một xí nghiệp có thể sử dụng tối đa 550 giờ máy cán, 430 giờ máy tiện và 200 giờ máy mài để sản xuất ba loại sản phẩm. Biết rằng: Để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại thứ nhất cần 9 giờ máy cán, 5 giờ máy tiện và 1 giờ máy mài. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại thứ ba cần 8 giờ máy cán, 3 giờ máy tiện và 3 giờ máy mài. Mất 5 giờ máy cán và 3 giờ máy tiện để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại thứ hai. Giá bán mỗi sản phẩm loại thứ nhất, thứ hai và thứ ba tương ứng là 100\$, 120\$ và 55\$. Xí nghiệp cần quyết định sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu đơn vị để doanh thu lớn nhất. Hãy thiết lập mô hình toán học cho bài toán trên?

Chương 3

Quy hoạch tuyến tính

Năm 1939, nhà xuất bản của Đại học Leningrad đã in cuốn sách [14] của Kantorovich[1] với tựa đề: *"Phương pháp toán học về tổ chức và kế hoạch hóa sản xuất"*, trong đó tập trung vào xây dựng công thức của các vấn đề kinh tế cơ bản, những biểu thức toán học của chúng, một phác thảo về phương pháp giải và thảo luận về ý nghĩa kinh tế của nó. Về thực chất, nó chứa đựng những ý tưởng chính về lý thuyết và thuật toán giải quy hoạch tuyến tính. Tuy nhiên, phương Tây đã không biết đến công trình này trong nhiều năm. Sau đó, năm 1947, Dantzig[2] và các cộng sự phát hiện lại mô hình quy hoạch tuyến tính khi nghiên cứu bài toán lập kế hoạch cho không quân Mỹ. Cùng năm 1947, Dantzig đã công bố thuật toán đơn hình (simplex algorithm) nổi tiếng để giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Quy hoạch tuyến tính là một bộ phận quan trọng của quy hoạch toán học. Theo bản tin của Liên đoàn Toán học thế giới 1/2005: Một trong các thành tựu vĩ đại của thế kỷ XX là đã phát minh và phát triển lý thuyết quy hoạch tuyến tính. Đây là mô hình toán của nhiều bài toán thực tế thuộc các lĩnh vực khác nhau như kinh tế, viễn thông, xây dựng... Hiệu quả của việc ứng dụng quy hoạch tuyến tính giải quyết các bài toán trong kinh tế đã được ghi nhận bằng sự kiện L.V. Kantorovich và T. C. Koopmans được nhận giải thưởng Nobel dành cho khoa học kinh tế (1975). Hơn nữa quy hoạch tuyến tính là một mô hình toán đơn giản và dễ giải. Các thuật toán giải quy hoạch tuyến tính còn là công cụ để giải các bài toán phức tạp hơn như tối ưu phi tuyến, tối ưu đa mục tiêu...

[1]Leonid Vitaliyevich KANTOROVICH (19/1/1912 - 7/4/1986): Nhà toán học và kinh tế học người Nga. Cùng với Tjalling Koopmans, ông được nhận giải thưởng Nobel dành cho Khoa học Kinh tế năm 1975 "*vì những đóng góp của họ cho lý thuyết phân bố tối ưu các nguồn lực.*"

[2]Geogre Bernard DANTZIG (8/11/1914 - 13/5/2005): Nhà toán học người Mỹ. Năm 1975, ông là người đầu tiên được nhận giải thưởng mang tên nhà toán học John von Neumann vì đóng góp quan trọng cho lý thuyết vận trù học (operations research) và khoa học quản trị (management sciences).

3.1 Định nghĩa quy hoạch tuyến tính

Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát được phát biểu như sau:

$$\min\{f(x) = \langle c, x\rangle \mid x \in D\}, \tag{LP}$$

trong đó $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ và $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện được xác định bởi hệ phương trình và bất phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i, \quad i \in L_1\\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\le b_i, \quad i \in L_2\\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\ge b_i, \quad i \in L_3 \end{aligned}$$

trong đó $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ là tập các chỉ số, các hệ số a_{ij} và b_i, $i = 1, \cdots, \ell$, $j = 1, \cdots, n$ là các hằng số cho trước.

Nhắc lại rằng, trong bài toán trên, ta gọi

$f(x) = \langle c, x\rangle = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$	là *hàm mục tiêu*;
$c_j,\ j = 1, \cdots, n$	là *các hệ số của hàm mục tiêu*;
$x_j,\ j = 1, \cdots, n$	là *các biến*;
$\langle a^i, x\rangle = (\le, \ge)\ b_i \quad i = 1, \cdots, \ell$	là *các ràng buộc*;

Tập lồi đa diện D được gọi là *tập nghiệm chấp nhận được* hay *tập ràng buộc*. Mỗi điểm $x \in D$ được gọi là một *nghiệm chấp nhận được* hay một *phương án chấp nhận được* (có thể gọi tắt là *phương án*). Điểm $x^* \in D$ mà

$$f(x^*) = \langle c, x^*\rangle \le f(x) = \langle c, x\rangle \quad \text{với mọi } x \in D$$

được gọi là *nghiệm tối ưu* hoặc *phương án tối ưu* hay *lời giải* của bài toán. Giá trị tối ưu của bài toán này được ký hiệu là $\min\{\langle c, x\rangle \mid x \in D\}$.

Ta nói phương án $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T$ *thỏa mãn chặt ràng buộc* i_0, $i_0 \in \{1, \cdots, \ell\}$ nếu

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}\bar{x}_j = b_{i_0}.$$

Một phương án thỏa mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính được gọi là một *phương án cực biên*. Như vậy, phương án cực biên chính là một đỉnh của tập lồi đa diện chấp nhận được (xem Mục 1.3.8, Chương 1). Phương án cực biên thỏa mãn chặt đúng n ràng buộc được gọi là *phương án cực biên không suy biến*; thỏa mãn chặt hơn n ràng buộc gọi là *phương án cực biên suy biến*.

Khi nghiên cứu quy hoạch tuyến tính cũng như khi áp dụng nó, người ta thường dùng hai dạng đặc thù sau:

3.1.1 Dạng chuẩn tắc

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{v.đ.k.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,\ i = 1, \cdots, m, \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

Mỗi ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, $i \in \{1, \cdots, m\}$ được gọi là một *ràng buộc chính*. Ràng buộc $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ được gọi là *ràng buộc dấu*. Đặt A là ma trận cấp $m \times n$ với các hàng là $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, $i = 1, \cdots, m$; véc tơ $b = (b_1, \cdots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn tắc được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = \langle c, x\rangle \\ \text{v.đ.k.}\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

3.1.2 Dạng chính tắc

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{v.đ.k.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

Tương tự như dạng chuẩn tắc, ta gọi ràng buộc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i \in \{1, \cdots, m\}$ là ràng buộc chính và ràng buộc $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ là ràng buộc dấu. Dạng ma trận của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = \langle c, x\rangle \\ \text{v.đ.k.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

trong đó ma trận A và véc tơ b được định nghĩa tương tự như ở dạng chuẩn tắc. Tuy nhiên, cần chú ý rằng, trong bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc ta luôn viết các ràng buộc chính ở dạng sao cho $b = (b_1, \cdots, b_m)^T \geq 0$, tức $b_i \geq 0$ với mọi $i = 1, \cdots, m$. Nếu tồn tại $b_{i_0} < 0$ với $i_0 \in \{1, \cdots, m\}$ thì ta nhân hai vế của ràng buộc chính $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j = b_{i_0}$ với -1.

Ví dụ 3.1. Bài toán

$$\begin{aligned}\min\ f(x) = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3&\\ \text{v.đ.k}\quad 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 5\\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 7\\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

là một bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc, trong đó

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bài toán này có $n = 3$ biến và $m = 2$ ràng buộc chính.

Chú ý 3.1. Trong bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc và chính tắc, tất cả các biến đều không âm. Do đó tập chấp nhận được của bài toán không chứa một đường thẳng nào. Theo Mệnh đề 1.7, tập chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc và chính tắc luôn có ít nhất một đỉnh.

3.1.3 Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ về dạng chuẩn tắc hay chính tắc

Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc hoặc chuẩn tắc bằng các phép biến đổi sơ cấp sau:

◇ Một biến x_j không bị ràng buộc dấu có thể thay bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt $x_j = \bar{x}_j - \bar{\bar{x}}_j$ với $\bar{x}_j \geq 0$ và $\bar{\bar{x}}_j \geq 0$;

◇ Thay biến $x_j \leq 0$ bởi biến $\bar{x}_j = -x_j \geq 0$;

◇ Mỗi ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum a_{ij}x_j \leq b_i \text{ hoặc } \sum a_{ij}x_j \geq b_i$$

có thể chuyển về ràng buộc đẳng thức nhờ đưa thêm vào một *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$:

$$\sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \text{ hoặc } \sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i;$$

◇ Mỗi ràng buộc $\sum a_{ij}x_j \leq b_i$ có thể viết lại thành $-\sum a_{ij}x_j \geq -b_i$;

◇ Mỗi ràng buộc đẳng thức $\sum a_{ij}x_j = b_i$ có thể thay bằng hai ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum a_{ij}x_j \geq b_i \text{ và } -\sum a_{ij}x_j \geq -b_i;$$

◇ Bài toán tìm cực đại

$$\max\{f(x) \mid x \in D\}$$

được đưa về bài toán tìm cực tiểu tương đương là

$$\min\{-f(x) \mid x \in D\}$$

theo nghĩa: tập nghiệm tối ưu của hai bài toán này là như nhau nhưng giá trị tối ưu trái dấu nhau,

$$\max\{f(x) \mid x \in D\} = -\min\{-f(x) \mid x \in D\}.$$

Ví dụ 3.2. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min\ f(x) &= 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ \text{v.đ.k.}\quad & 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \le 5, \\ & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ & -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \le -4, \\ & x_1 \ge -2,\ 0 \le x_2 \le 4,\ x_3 \text{ tự do.} \end{aligned}$$

Để chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính này về dạng chính tắc, trước hết thực hiện:

- Nhân hai vế của ràng buộc chính thứ ba với -1 ta được

$$4x_1 + 9x_2 - 4x_3 \ge 4;$$

- Đổi biến x_1 thành $\bar{x}_1$ với

$$\bar{x}_1 := x_1 + 2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \bar{x}_1 - 2;$$

- Ràng buộc cận trên của biến thứ hai $x_2 \le 4$ được xem như ràng buộc chính thứ tư;

- Biến thứ ba được đổi thành

$$x_3 = \bar{x}_3 - \bar{\bar{x}}_3 \text{ với } \bar{x}_3 \ge 0,\ \bar{\bar{x}}_3 \ge 0.$$

Sau khi thay thế các biến đổi trên vào bài toán ban đầu ta nhận được bài toán

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3\bar{x}_1 + 5x_2 - 4\bar{x}_3 + 4\bar{\bar{x}}_3 - 6 \\ \text{v.đ.k.}\quad & 3\bar{x}_1 - 5x_2 + 3\bar{x}_3 - 3\bar{\bar{x}}_3 \le 11, \\ & 2\bar{x}_1 + 4x_2 + 6\bar{x}_3 - 6\bar{\bar{x}}_3 = 12, \\ & 4\bar{x}_1 + 9x_2 - 4\bar{x}_3 + 4\bar{\bar{x}}_3 \ge 12, \\ & x_2 \le 4, \\ & \bar{x}_1,\ x_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{\bar{x}}_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Cuối cùng, sau khi bỏ hằng số -6 ở hàm mục tiêu và thêm các biến phụ $x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0$ lần lượt vào các ràng buộc chính thứ nhất, thứ ba, thứ tư của bài toán này ta nhận được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sau

$$\begin{array}{lllr}
\min & f'(x) = 3\bar{x}_1 + 5x_2 - 4\bar{x}_3 + 4\bar{\bar{x}}_3 & & \\
\text{v.đ.k.} & 3\bar{x}_1 - 5x_2 + 3\bar{x}_3 - 3\bar{\bar{x}}_3 + x_4 & & = 11, \\
& 2\bar{x}_1 + 4x_2 + 6\bar{x}_3 - 6\bar{\bar{x}}_3 & & = 12, \\
& 4\bar{x}_1 + 9x_2 - 4\bar{x}_3 + 4\bar{\bar{x}}_3 \quad - x_5 & & = 12, \\
& \qquad x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 & & = 4, \\
& \qquad \bar{x}_1,\ x_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{\bar{x}}_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 & & \geq 0.
\end{array}$$

Giả sử $(\bar{x}_1^*,\ x_2^*,\ \bar{x}_3^*,\ \bar{\bar{x}}_3^*,\ x_4^*,\ x_5^*,\ x_6^*)^T$ là nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc này. Khi đó nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu là $x^{opt} = (x_1^{opt},\ x_2^{opt},\ x_3^{opt})^T$ và giá trị tối ưu là $f(x^{opt}) = 3x_1^{opt} + 5x_2^{opt} - 4x_3^{opt}$, trong đó $x_1^{opt} = \bar{x}_1^* - 2$, $x^{opt} = x_2^*$ và $x_3^{opt} = \bar{x}_3^* - \bar{\bar{x}}_3^*$.

3.2 Sự tồn tại nghiệm và tính chất tập nghiệm của quy hoạch tuyến tính

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

$$\min\{\langle c, x\rangle \mid x \in D\}, \qquad (LP)$$

trong đó $c \in \mathbb{R}^n$ và $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện khác rỗng.

3.2.1 Sự tồn tại nghiệm

Định lý 3.1. *Nếu tập nghiệm chấp nhận được D khác rỗng và bị chặn thì bài toán quy hoạch tuyến tính (LP) luôn có nghiệm tối ưu.*

Chứng minh. Theo định nghĩa, tập lồi đa diện là tập đóng. Thêm tính bị chặn nên ta có D là tập compac. Hàm tuyến tính là hàm liên tục. Theo Định lý Weierstrass (Hệ quả 2.1) ta có điều phải chứng minh. □

Trong trường hợp tập nghiệm chấp nhận được D khác rỗng và không bị chặn, bài toán (LP) có thể không có nghiệm. Tuy nhiên, nếu hàm mục tiêu $f(x) = \langle c, x\rangle$ bị chặn dưới trên D thì bài toán (LP) luôn có nghiệm tối ưu.

Định lý 3.2. *Nếu tập chấp nhận được D khác rỗng và hàm mục tiêu $f(x) = \langle c, x\rangle$ bị chặn dưới trên D thì bài toán quy hoạch tuyến tính (LP) luôn có nghiệm tối ưu.*

Chứng minh. Vì mọi quy hoạch tuyến tính đều có thể chuyển về dạng chuẩn tắc hoặc chính tắc nên không giảm tổng quát ta giả thiết tập D có đỉnh (Chú ý 3.1). Theo Định lý biểu diễn tập lồi đa diện (Định lý 1.7), bất kỳ $x \in D$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^{M} \mu_j d^j, \tag{3.1}$$

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, N,\ \mu_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, M, \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,$$

trong đó $v^1, \cdots, v^N$ là các đỉnh và $d^1, \cdots, d^M$ là các phương cực biên của D. Do hàm mục tiêu $f(x) = \langle c, x \rangle$ bị chặn dưới trên D nên

$$\langle c, d^j \rangle \geq 0 \quad \forall d^j,\ j = 1, \cdots, M. \tag{3.2}$$

Thật vậy, giả sử tồn tại $j_0 \in \{1, \cdots, M\}$ sao cho $\langle c, d^{j_0} \rangle < 0$. Vì d^{j_0} là một phương cực biên nên

$$x + td^{j_0} \in D \ \ \forall x \ \in D, \quad \forall t \geq 0$$

và

$$\langle c, x + td^{j_0} \rangle = \langle c, x \rangle + t\langle c, d^{j_0} \rangle \longrightarrow -\infty \text{ khi } \ t \to +\infty.$$

Điều này mâu thuẫn với tính bị chặn dưới của hàm $f(x) = \langle c, x \rangle$ và chứng tỏ khẳng định (3.2) là đúng.

Chọn một đỉnh v^{i_0} của D sao cho $\langle c, v^{i_0} \rangle = \min\{\langle c, v^i \rangle \mid i = 1, \cdots, N\}$. Theo (3.1) và (3.2), với bất kỳ $x \in D$, ta có

$$\langle c, x \rangle \overset{(3.1)}{=} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle c, v^i \rangle + \sum_{j=1}^{M} \mu_j \langle c, d^j \rangle \overset{(3.2)}{\geq} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle c, v^i \rangle \geq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \langle c, v^{i_0} \rangle = \langle c, v^{i_0} \rangle.$$

Điều đó chứng tỏ v^{i_0} là nghiệm tối ưu của bài toán (LP). □

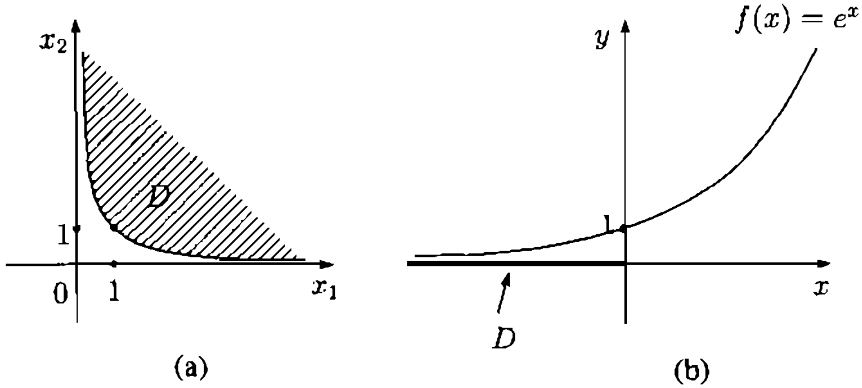
Chú ý 3.2. Kết luận của Định lý 3.2 nói chung không còn đúng đối với bài toán phi tuyến. Ví dụ:

i) Bài toán

$$\inf\{f(x) = x_2 \mid x \in D\},$$

trong đó $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 \geq 1,\ x_1,\ x_2 \geq 0\}$, có hàm mục tiêu là tuyến tính và bị chặn dưới bởi 0. Tập nghiệm chấp nhận được D là tập lồi khác rỗng nhưng không phải tập lồi đa diện. Đây không phải là bài toán quy hoạch tuyến tính và dễ thấy, $x = (x_1, 0)^T \notin D$ với mọi $x_1 \geq 0$. Vì thế bài toán này không có nghiệm tối ưu (Xem Hình 3.1(a)) và $\inf f(D) = 0$;

ii) Bài toán
$$\min\{f(x) = e^x \mid x \in D\},$$
trong đó $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$, có tập chấp nhận được là tập lồi đa diện nhưng hàm mục tiêu là phi tuyến và cũng bị chặn dưới bởi 0. Rõ ràng cũng không tồn tại một điểm $x \in D$ để $e^x = 0$ và bài toán này không có nghiệm tối ưu (Xem Hình 3.1(b)), giá trị tối ưu $\inf f(D) = 0$.



Hình 3.1

3.2.2 Tính chất tập nghiệm

Định lý 3.3. *Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính (LP) có nghiệm tối ưu thì tập nghiệm tối ưu của nó là một diện của tập lồi đa diện chấp nhận được.*

Chứng minh. Nhắc lại, tập con lồi khác rỗng $F \subset D$ được gọi là một diện của tập lồi đa diện D nếu
$$y, z \in D \text{ và } x \in F,\ x = \lambda y + (1-\lambda)z,\ 0 < \lambda < 1 \implies y \in F,\ z \in F.$$

Ký hiệu tập nghiệm tối ưu của bài toán (LP) là $F_* = \operatorname{argmin}\{\langle c, x\rangle \mid x \in D\}$. Cho $y, z \in D$, $x \in F_*$ với $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ và $0 < \lambda < 1$. Ta phải chứng minh $y \in F_*$, $z \in F_*$. Giả sử $\langle c, y\rangle \ge \langle c, z\rangle$. Khi đó
$$\langle c, x\rangle = \lambda\langle c, y\rangle + (1-\lambda)\langle c, z\rangle \ge \lambda\langle c, z\rangle + (1-\lambda)\langle c, z\rangle = \langle c, z\rangle. \tag{3.3}$$

Vì $z \in D$ và $x \in F_*$, tức x là một nghiệm tối ưu của bài toán (LP), nên
$$\langle c, x\rangle \le \langle c, z\rangle. \tag{3.4}$$

Từ (3.3) và (3.4) suy ra $\langle c, x\rangle = \langle c, z\rangle$, hay $z \in F_*$. Hơn nữa ta có
$$\langle c, x\rangle = \lambda\langle c, y\rangle + (1-\lambda)\langle c, z\rangle = \lambda\langle c, y\rangle + (1-\lambda)\langle c, x\rangle.$$

Do đó $\langle c, y\rangle = \langle c, x\rangle$, hay $y \in F_*$. Theo định nghĩa, F_* là một diện của D. $\square$

Hệ quả 3.1. *Nếu một quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu và tập lồi đa diện ràng buộc có đỉnh thì nghiệm tối ưu phải đạt tại ít nhất một đỉnh, tức đạt tại ít nhất một phương án cực biên.*

Chứng minh. Theo định nghĩa, phương án cực biên chính là một đỉnh của tập lồi đa diện chấp nhận được của bài toán quy hoạch tuyến tính. Hệ quả được suy trực tiếp từ Định lý 3.3 và sự kiện là đỉnh của một diện của một tập lồi đa diện cũng chính là đỉnh của tập lồi đa diện đó (Hệ quả 1.3). □

Định lý 3.4. *Nếu x^* là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán quy hoạch tuyến tính (LP) thì x^* cũng là nghiệm tối ưu toàn cục.*

Chứng minh. Hiển nhiên rằng định lý này là một trường hợp đặc biệt của Định lý 2.1. Tuy nhiên, để người đọc tiện theo dõi, ở đây ta vẫn trình bày chứng minh trực tiếp.

Giả sử $x^* \in D$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (LP). Theo định nghĩa, tồn tại một hình cầu mở $B(x^*, \varepsilon)$ sao cho

$$\langle c, x^* \rangle \le \langle c, x \rangle \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap D.$$

Giả sử phản chứng rằng x^* không phải nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán (LP), tức tồn tại $\bar{x} \in D$ thỏa mãn $\langle c, \bar{x} \rangle < \langle c, x^* \rangle$. Do D là tập lồi đa diện nên nó chứa cả đoạn thẳng nối x^* và $\bar{x}$. Lấy điểm x^0 nằm trong đoạn thẳng này và $x^0 \in B(x^*, \varepsilon)$, tức $x^0 = \lambda x^* + (1-\lambda)\bar{x}$ với $0 < \lambda < 1$. Ta có

$$\langle c, x^0 \rangle = \lambda \langle c, x^* \rangle + (1-\lambda)\langle c, \bar{x} \rangle < \lambda \langle c, x^* \rangle + (1-\lambda)\langle c, x^* \rangle = \langle c, x^* \rangle.$$

Điều này mâu thuẫn với tính cực tiểu địa phương của x^* và chứng tỏ giả thiết phản chứng là sai. □

3.3 Giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến bằng phương pháp hình học

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến

$$\min\{f(x) = \langle c, x \rangle \mid x \in D\}, \qquad (LP^{2b})$$

trong đó $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ và $D \subset \mathbb{R}^2$ là tập lồi đa diện.

Như đã biết, qua mỗi điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T \in \mathbb{R}^2$ chỉ có duy nhất một đường mức $L(\alpha, f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle c, x \rangle = \alpha\}$ của hàm $f(x) = \langle c, x \rangle$ với mức $\alpha = \langle c, \bar{x} \rangle$. Do $f(x)$ là hàm tuyến tính nên gradient $\nabla f(x) = c$ tại mọi $x \in \mathbb{R}^2$ và c là véc tơ pháp tuyến của mọi đường mức.

Bài toán (LP^{2b}) có thể được phát biểu theo ngôn ngữ hình học như sau: *Trong số các đường mức cắt tập D, hãy tìm đường mức có giá trị mức nhỏ nhất.*

Thuật toán hình học (Thuật toán 3.1) giải bài toán (LP^{2b}) dựa trên hai sự kiện là:

i) Các đường mức của hàm tuyến tính song song với nhau;

ii) Giá trị hàm $f(x) = \langle c, x\rangle$ tăng theo hướng véc tơ gradient $\nabla f(x) = c$ và giảm theo hướng ngược véc tơ c (Nhận xét 2.1).

Thuật toán 3.1

Bước 1. Vẽ tập chấp nhận được D, véc tơ c và đường mức $L(0, f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle c, x\rangle = 0\}$ đi qua điểm gốc 0 và vuông góc với c.

Bước 2. Lấy một điểm bất kỳ $\bar{x} \in D$. Vẽ đường thẳng L đi qua $\bar{x}$ và song song với đường mức $L(0, f)$. (*Đường thẳng L là đường mức* $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle c, x\rangle = \langle c, \bar{x}\rangle\}$).

Bước 3. Dịch chuyển song song đường mức L theo hướng ngược với hướng véc tơ c đến khi việc dịch chuyển tiếp theo làm cho đường mức không còn cắt D nữa thì dừng. Các điểm của D nằm trên đường mức cuối cùng này là các nghiệm tối ưu của bài toán (LP^{2b}), còn giá trị mức này chính là giá trị tối ưu của bài toán.

Nhận xét 3.1. Để giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến

$$\max\{\langle c, x\rangle \mid x \in D\} \qquad (LP^{2b}_{max})$$

với $D \subset \mathbb{R}^2$ là tập lồi đa diện khác rỗng và $c \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ta vẫn dùng Thuật toán 3.1 với Bước 3 được thay bởi Bước 3′ như sau:

Bước 3′ : Dịch chuyển song song đường mức L *theo hướng véc tơ c* đến khi việc dịch chuyển tiếp theo làm cho đường mức không còn cắt D nữa thì dừng. Các điểm của D nằm trên đường mức cuối cùng này là các nghiệm tối ưu của bài toán (LP^{2b}_{max}), còn giá trị mức này chính là giá trị tối ưu của bài toán (LP^{2b}_{max}).

Sau đây là một số ví dụ minh họa cho Thuật toán 3.1.

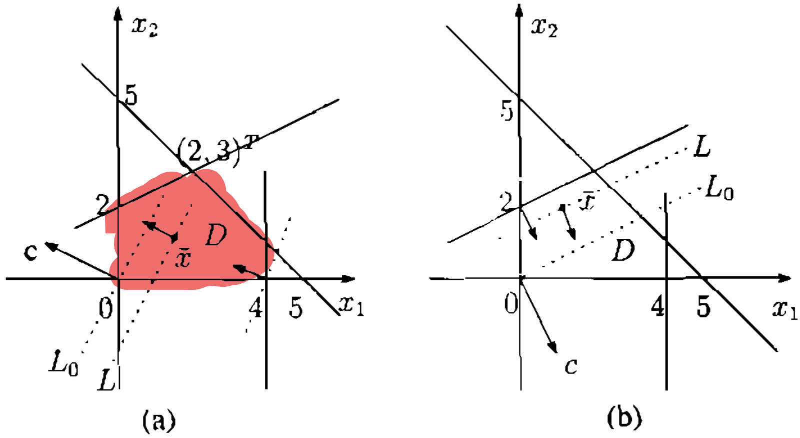
Ví dụ 3.3. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min\ f(x) = -2x_1 + {}& x_2 \\ \text{v.đ.k.} \quad -x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 \qquad &\le 4 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Tập chấp nhận được của bài toán này là đa diện $D = \text{conv}\{v^1, \cdots, v^5\}$ với $v^1 = (0,\ 0)^T$, $v^2 = (0,\ 2)^T$, $v^3 = (2,\ 3)^T$, $v^4 = (4,\ 1)^T$, $v^5 = (4,\ 0)^T$; hướng của véc tơ $c = (-2, 1)^T$; đường mức L_0 và L (đi qua một điểm $\bar{x} \in D$) của hàm mục tiêu f được minh họa ở Hình 3.2(a).

Theo Thuật toán 3.1, dịch chuyển song song đường mức L theo hướng ngược véc tơ c ta thấy đường mức cuối cùng của hàm f mà còn cắt tập D là đường mức đi qua đỉnh $(4, 0)^T$. Vậy, bài toán này có một nghiệm tối ưu duy nhất là đỉnh $(4, 0)^T$.

Nếu thay hàm mục tiêu của bài toán này bởi $f'(x) = x_1 - 2x_2$ thì ta nhận được tập nghiệm tối ưu là cả cạnh $[(0,2)^T, (2,3)^T]$. Trường hợp này, bài toán có vô số nghiệm. Ta có thể lấy một nghiệm tối ưu đại diện là đỉnh $(0,2)^T$ (Xem Hình 3.2(b)).



Hình 3.2. *(a) - Bài toán có duy nhất nghiệm; (b) - Bài toán có vô số nghiệm.*

Ví dụ 3.4. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min\ f(x) = &\ x_1 + x_2 \\ \text{v.đ.k.}\quad & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Các thông tin về bài toán này như tập chấp nhận được, hướng của véc tơ mục tiêu $c = (1,1)^T$, đường mức L_0 và đường mức L đi qua điểm $\bar{x} \in D$ được minh họa ở Hình 3.3(a). Tập chấp nhận được của bài toán là không bị chặn. Theo Thuật toán 3.1, ta thấy bài toán có nghiệm tối ưu duy nhất là $x^* = (0,1)^T$.

Nếu thay hàm mục tiêu của bài toán này bởi $f'(x) = -x_1 - x_2$ thì bài toán vô nghiệm, hàm mục tiêu giảm vô hạn trên tập phương án (Xem Hình 3.3(b)).

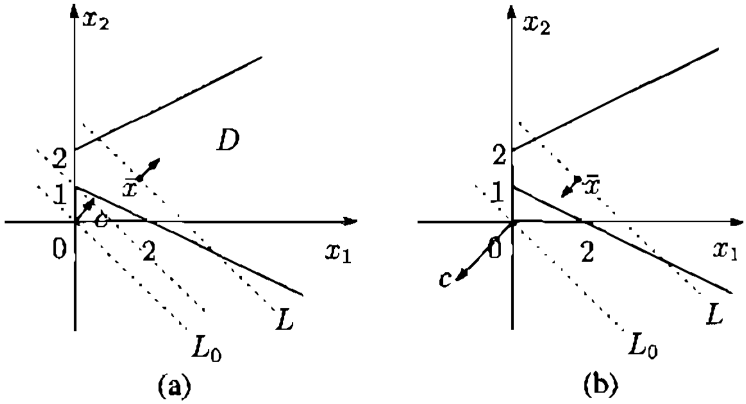
Ví dụ 3.5. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min\ f(x) = &\ 2x_1 - 3x_2 \\ \text{v.đ.k.}\quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6. \end{aligned}$$

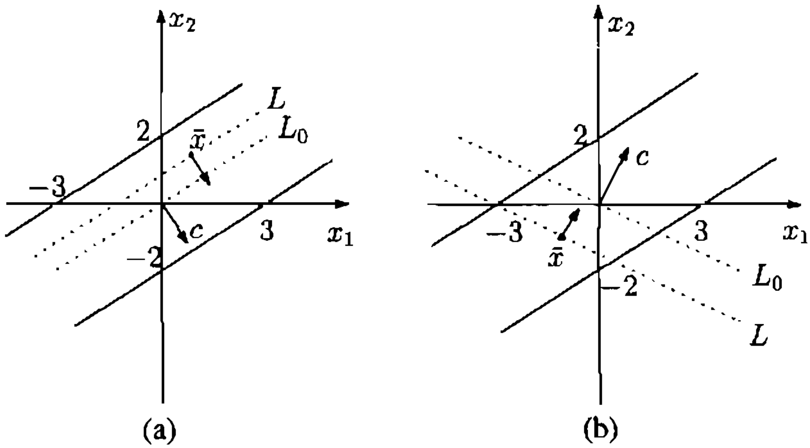
Tập nghiệm tối ưu của bài toán là cả đường thẳng (xem Hình 3.4(a)) xác định bởi phương trình

$$-2x_1 + 3x_2 = 6.$$

Nếu thay hàm mục tiêu của bài toán này bởi $f'(x) = x_1 + x_2$ thì bài toán vô nghiệm, hàm mục tiêu giảm vô hạn trên tập phương án (xem Hình 3.4(b)).



Hình 3.3. *(a) - Bài toán có duy nhất nghiệm; (b) - Bài toán vô nghiệm*



Hình 3.4. *(a) - Tập nghiệm tối ưu là cả đường thẳng; (b) - Bài toán vô nghiệm*

Nhận xét. Qua các ví dụ trên ta thấy:

i) Nếu tập chấp nhận được khác rỗng và bị chặn thì chắc chắn quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu;

ii) Nếu quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu và tập chấp nhận được D có đỉnh thì nghiệm tối ưu đạt trên ít nhất một đỉnh của D (Ví dụ 3.3 và 3.4);

iii) Trường hợp bài toán không có nghiệm tối ưu và tập chấp nhận được khác rỗng, ta có hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên D (Ví dụ 3.4);

iv) Nếu tập chấp nhận được D không có đỉnh thì quy hoạch tuyến tính có thể không có nghiệm hoặc có nghiệm. Trường hợp có nghiệm thì nghiệm tối ưu không phải là đỉnh (Ví dụ 3.5).

3.4 Phương pháp đơn hình giải quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Như đã biết, phương pháp đơn hình giải quy hoạch tuyến tính do G.B. Danzig đề xuất vào năm 1947. Mặc dù, về mặt lý thuyết, thuật toán đơn hình có độ phức tạp mũ (xem ví dụ của Klee-Minty [20]) và cho đến nay, đã có nhiều thuật toán với độ phức tạp đa thức để giải quy hoạch tuyến tính như thuật toán elipsoid [17] của Khachiyan[3](1979), thuật toán điểm trong [15] của Karmarkar[4] (1984), nhưng trong thực tế, đơn hình vẫn là phương pháp được sử dụng nhiều nhất trong việc giải các bài toán quy hoạch tuyến tính. Theo báo SIAM (5/2000), thuật toán đơn hình được đánh giá là một trong mười thuật toán có ảnh hưởng nhất trong sự phát triển và ứng dụng của khoa học kỹ thuật trong thế kỷ 20.

Vì mọi quy hoạch tuyến tính đều có thể chuyển về dạng chính tắc (Mục 3.1.3) nên, không giảm tổng quát, mục này sẽ trình bày thuật toán đơn hình giải quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Bạn đọc quan tâm đến các thuật toán khác giải quy hoạch tuyến tính như: phương pháp đơn hình đối ngẫu, phương pháp đơn hình cải biên, phương pháp gốc - đối ngẫu và các phương pháp điểm trong ... có thể tham khảo trong [2], [8], [15], [16], [17], [19], [33], [36] và [39].

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min\{\langle c, x\rangle \mid x \in D\}, \qquad (LP^{ct})$$

trong đó $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện xác định bởi

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \qquad (3.5)$$

với A là ma trận cấp $m \times n$, $m < n$ và $b = (b_1, \cdots, b_m)^T \geq 0$.

Kết quả sau cho phép ta xét bài toán (LP^{ct}) với giả thiết rằng: Ma trận A có $\text{rank}A = m$, tức m véc tơ hàng của A là độc lập tuyến tính.

Định lý 3.5. *Cho tập lồi đa diện khác rỗng $D = \{x \mid Ax = b, \ x \geq 0\}$, trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ với các hàng $a^1, \cdots, a^m$. Giả sử rằng* $\text{rank}A = k < m$ *và các hàng $a^{i_1}, \cdots, a^{i_k}$ độc lập tuyến tính. Khi đó $D = D'$, trong đó D' là tập lồi đa diện xác định bởi*

$$D' = \{x \mid \langle a^{i_1}, x\rangle = b_{i_1}, \cdots, \langle a^{i_k}, x\rangle = b_{i_k}, x \geq 0\}.$$

---

[3]Leonid G. KHACHIYAN (3/5/1952 - 29/4/2005): Nhà toán học Nga. Ông nổi tiếng vì là người đầu tiên (1979) xây dựng được một thuật toán có độ phức tạp đa thức (thuật toán elipsoid) để giải bài toán quy hoạch tuyến tính. Mặc dù thuật toán không có nhiều ý nghĩa ứng dụng vì nó tính toán rất nhanh so với thuật toán đơn hình trong trường hợp xấu nhất nhưng lại rất chậm khi giải các bài toán nảy sinh từ thực tế nhưng phát minh này đã giúp các nhà toán học vững tâm trong việc xây dựng các thuật toán đa thức khác.

[4]Narendra KARMARKAR (sinh năm 1957): Nhà toán học Ấn Độ đã đưa ra phương pháp điểm trong giải quy hoạch tuyến tính.

Chứng minh. Để đơn giản việc trình bày, giả sử rằng $i_1 = 1, \cdots, i_k = k$, tức k véc tơ hàng đầu tiên của ma trận A độc lập tuyến tính.

Hiển nhiên rằng $D \subset D'$ vì bất kỳ điểm nào thuộc D cũng thỏa mãn hết các ràng buộc của D'. Ta chỉ cần chứng minh $D' \subset D$.

Vì rank$A = k$ nên không gian sinh bởi k véc tơ hàng $a^1, \cdots, a^k$ có thứ nguyên là k và cơ sở $\{a^1, \cdots, a^k\}$. Do đó, mỗi véc tơ hàng a^i của A đều có thể biểu diễn là tổ hợp tuyến tính của $a^1, \cdots, a^k$.

$$a^i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} a^j, \quad \text{với} \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Với $x \in D$ ta có

$$b_i = \langle a^i, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \langle a^j, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j, \quad i = 1, \cdots, m.$$

Bây giờ, ta xét một điểm bất kỳ $y \in D'$. Ta sẽ chỉ ra rằng $y \in D$. Thật vậy, với bất kỳ chỉ số $i \in \{1, \cdots, m\}$, ta có

$$\langle a^i, y\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \langle a^j, y\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j = b_i,$$

chứng tỏ $y \in D$ và $D' \subset D$. $\square$

Ví dụ 3.6. Xét tập lồi đa diện khác rỗng xác định bởi hệ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Dễ thấy ma trận A tương ứng với hệ này có rank$A = 2$ vì véc tơ hàng thứ nhất độc lập tuyến tính với véc tơ hàng thứ ba, nhưng véc tơ hàng thứ hai là tổng của véc tơ hàng thứ nhất và thứ ba. Do đó, ta có thể bỏ ràng buộc chính thứ hai mà không làm thay đổi tập lồi đa diện D đang xét.

Phương pháp đơn hình của Dantzig giải bài toán quy hoạch tuyến tính dựa trên hai sự kiện sau:

i) Nếu bài toán (LP^{ct}) có nghiệm tối ưu thì nghiệm tối ưu phải đạt trên ít nhất một đỉnh của tập lồi đa diện chấp nhận được D (Hệ quả 3.1);

ii) Nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (LP^{ct}) là nghiệm tối ưu toàn cục (Định lý 3.4).

3.4.1 Mô tả hình học của phương pháp đơn hình

Thuật toán đơn hình xuất phát từ một đỉnh $x^0 \in D$. Tại đỉnh x^0 chỉ có một trong ba trường hợp sau có thể xảy ra:

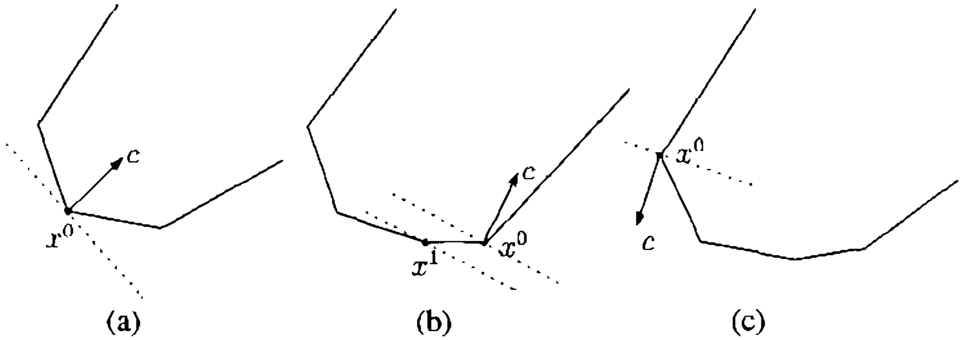
i) Trên mọi cạnh của tập nghiệm chấp nhận được xuất phát từ x^0 giá trị hàm mục tiêu đều không giảm. Khi đó x^0 là nghiệm tối ưu toàn cục của (LP^{ct}) (Bài tập) (xem Hình 3.5(a));

ii) Mọi cạnh xuất phát từ x^0, theo đó giá trị hàm mục tiêu giảm, đều là cạnh hữu hạn. Đi theo một cạnh như thế, ta sẽ đến một đỉnh x^1 kề với x^0 mà

$$\langle c, x^1 \rangle < \langle c, x^0 \rangle.$$

Gán $x^0 := x^1$ và lặp lại quá trình tính toán với đỉnh x^0 mới (xem Hình 3.5(b));

iii) Có một cạnh vô hạn xuất phát từ x^0, theo đó giá trị hàm mục tiêu giảm. Khi đó giá trị hàm mục tiêu sẽ tiến đến $-\infty$ theo cạnh này và bài toán không có nghiệm tối ưu (xem Hình 3.5(c)).



Hình 3.5

3.4.2 Cơ sở lý thuyết của phương pháp đơn hình

a. Phương án cực biên

Do quy hoạch tuyến tính chính tắc đạt nghiệm tối ưu tại ít nhất một phương án cực biên nên ta quan tâm đến các tính chất của nó.

Xét tập nghiệm chấp nhận được D (xác định bởi (3.5)) của quy hoạch tuyến tính chính tắc (LP^{ct}). Ký hiệu A_j là cột thứ j của ma trận A, $j = 1, \cdots, n$. Khi đó hệ (3.5) được viết dưới dạng véc tơ như sau

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b, \quad x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n. \tag{3.6}$$

Xét một phương án chấp nhận được $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^T \in D$, tức x^0 thoả mãn (3.6). Ký hiệu

$$J(x^0) := \{j \in \{1, \cdots, n\} \mid x_j^0 > 0\}.$$

Sau đây là điều kiện cần và đủ để x^0 là phương án cực biên.

Định lý 3.6. *Phương án chấp nhận được $x^0 \in D$ là phương án cực biên khi và chỉ khi các véc tơ $\{A_j \mid j \in J(x^0)\}$ độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Không giảm tổng quát, có thể giả thiết rằng $J(x^0) = \{1, \cdots, k\}$, tức $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_k^0, 0, \cdots, 0)^T$ với $x_j^0 > 0$ với mọi $j = 1, \cdots, k$.

($\Rightarrow$) Giả sử $x^0 \in D$ là phương án cực biên. Ta có

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 A_j = \sum_{j=1}^{k} x_j^0 A_j = b. \tag{3.7}$$

Giả thiết phản chứng rằng các véc tơ $A_1, \cdots, A_k$ phụ thuộc tuyến tính. Theo định nghĩa, tồn tại một tổ hợp tuyến tính của các véc tơ này bằng véc tơ 0, tức

$$d_1 A_1 + \cdots + d_k A_k = 0,$$

trong đó $d_j \in \mathbb{R}$ với $j = 1, \cdots, k$ và có ít nhất một hệ số $d_j \neq 0$. Với mọi $t > 0$ ta luôn có

$$t d_1 A_1 + \cdots + t d_k A_k = 0. \tag{3.8}$$

Từ (3.7) và (3.8) suy ra

$$(x_1^0 - t d_1) A_1 + \cdots + (x_k^0 - t d_k) A_k = b,$$

$$(x_1^0 + t d_1) A_1 + \cdots + (x_k^0 + t d_k) A_k = b,$$

hay

$$Ay = b \text{ và } Az = b,$$

trong đó

$$y = (x_1^0 - t d_1, \cdots, x_k^0 - t d_k, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$z = (x_1^0 + t d_1, \cdots, x_k^0 + t d_k, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Vì $x_j^0 > 0$ với mọi $j = 1, \cdots, k$ nên có thể chọn $t > 0$ đủ nhỏ sao cho k thành phần đầu của y và z không âm, tức $y \geq 0$ và $z \geq 0$. Do đó $y, z \in D$ và $y \neq z$. Hơn nữa, dễ thấy rằng $x^0 = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, tức x^0 là tổ hợp lồi chặt của hai điểm phân biệt thuộc D. Điều này mâu thuẫn với giả thiết x^0 là phương án cực biên của D. Vậy các véc tơ $A_1, \cdots, A_k$ phải độc lập tuyến tính.

($\Leftarrow$) Bây giờ ta giả sử các véc tơ $A_1, \cdots, A_k$ độc lập tuyến tính. Giả thiết phản chứng rằng x^0 không phải phương án cực biên, tức tồn tại $y, z \in D$, $y \neq z$ sao cho

$$x^0 = \lambda y + (1 - \lambda) z, \ 0 < \lambda < 1. \tag{3.9}$$

Kết hợp (3.9) với sự kiện $y \geq 0, z \geq 0$ và $(n - k)$ thành phần cuối của x^0 đều bằng 0 ta có $(n - k)$ thành phần cuối của y và z cũng phải bằng 0. Vì $y, z \in D$ nên

$$y_1A_1 + \cdots + y_kA_k = b,$$
$$z_1A_1 + \cdots + z_kA_k = b.$$

Do các véc tơ $A_1, \cdots, A_k$ độc lập tuyến tính nên chỉ có duy nhất một biểu diễn của b qua chúng. Vì vậy $y_j = z_j$ với mọi $j = 1, \cdots, k$, tức $y = z$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết phản chứng là $y \neq z$ và chứng tỏ x^0 phải là phương án cực biên. □

Theo Định lý 3.6, một véc tơ $x^0 \in \mathbb{R}^n$ là phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính (LP^{ct}) nếu nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $x^0 \in D$ (tức x^0 có thoả mãn hệ (3.6));

ii) Các véc tơ $\{A_j \mid j \in J(x^0)\}$ là độc lập tuyến tính.

Ví dụ 3.7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với tập ràng buộc được xác định bởi hệ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 2\\ -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 4\\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 5\\ x_1, x_2, \cdots, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

và các véc tơ $x^1 = (0,2,2,0,5)^T$, $x^2 = (1,1,1,3,4)^T$ và $x^3 = (2,0,0,6,5)^T$. Cần xác định xem các véc tơ đó có phải là phương án cực biên của bài toán đã cho không?

Giải. ◇ Xét $x^1 = (0,2,2,0,5)^T$. Dễ thấy x^1 là một phương án chấp nhận được vì nó thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán. Ta có

$$J(x^1) = \{j \in \{1, \cdots, 5\} \mid x_j^1 > 0\} = \{2,3,5\}$$

và ba véc tơ

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \ A_5 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

độc lập tuyến tính. Vậy x^1 là một phương án cực biên của bài toán đang xét.

◇ Xét $x^2 = (1,1,1,3,4)^T$. Ta cũng có x^2 là một phương án chấp nhận được với $J(x^2) = \{1,2,3,4,5\}$. Nhưng hiển nhiên là năm véc tơ $A_1, \cdots, A_5 \in \mathbb{R}^3$ là phụ thuộc tuyến tính. Vậy x^2 không phải là phương án cực biên của bài toán.

◇ Xét $x^3 = (2,0,0,6,5)^T$. Vì x^3 vi phạm ràng buộc chính thứ ba của bài toán nên nó không là phương án chấp nhận được. Do đó x^3 cũng không phải là phương án cực biên của bài toán.

Sau đây là các hệ quả trực tiếp của Định lý 3.6.

Hệ quả 3.2. *Số thành phần dương trong mỗi phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc không vượt quá m.*

Chứng minh. Vì A là ma trận cấp $m \times n$ và $\operatorname{rank} A = m$ nên số véc tơ cột độc lập tuyến tính của A không thể vượt quá m. Kết luận của Hệ quả được suy ra trực tiếp từ Định lý 3.6. □

Hệ quả 3.3. *Số phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.*

Chứng minh. Theo Định lý 3.6, mỗi phương án cực biên của bài toán tương ứng với $k \leq m$ véc tơ độc lập tuyến tính của A và k véc tơ độc lập tuyến tính của A xác định nhiều nhất một phương án cực biên. Vì ma trận A có n cột nên số hệ gồm k véc tơ cột của A là C_n^k. Vậy số phương án cực biên của bài toán không lớn hơn $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$. □

Nhận xét 3.2. Kết hợp Hệ quả 3.2 và định nghĩa phương án cực biên suy ra: phương án cực biên x^0 của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (LP^{ct}) là *phương án cực biên không suy biến nếu nó có đúng m thành phần dương*, tức $|J(x^0)| = m$ và phương án cực biên x^0 là *phương án cực biên suy biến nếu nó có ít hơn m thành phần dương, tức* $|J(x^0)| < m$.

Bài toán quy hoạch tuyến tính (LP^{ct}) được gọi là *không suy biến* nếu tất cả các phương án cực biên của tập chấp nhận được là không suy biến, được gọi là *suy biến* nếu có ít nhất một phương án cực biên suy biến.

Ví dụ 3.8. Xét quy hoạch tuyến tính có tập chấp nhận được là tập nghiệm của hệ sau

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3. \end{aligned}$$

Ta có $n = 3$ và $m = 2$. Dễ thấy $v^1 = (2,1,0)^T$ và $v^2 = (0,0,1)^T$ là hai phương án cực biên của bài toán này. Vì

$$J(v^1) = \{j \in \{1,2,3\} \mid v_j^1 > 0\} = \{1,2\}$$

có số phần tử $|J(v^1)| = 2 = m$ nên v^1 là phương án cực biên không suy biến. Còn v^2 là phương án cực biên suy biến do

$$J(v^2) = \{j \in \{1,2,3\} \mid v_j^2 > 0\} = \{3\}$$

có số phần tử $|J(v^2)| = 1 < m$. Bài toán này là bài toán quy hoạch tuyến tính suy biến.

Nhận xét 3.3. Với bài toán quy hoạch tuyến tính có số ràng buộc m và số biến n nhỏ, theo Định lý 3.6 ta có thể xác định được tất cả các phương án cực biên của bài toán đó. Vì nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính đạt tại ít nhất một phương án cực biên (Hệ quả 3.1) nên nếu thêm giả thiết là tập chấp nhận được bị chặn, tức nó là đa diện lồi, thì ta có thể tìm nghiệm tối ưu của bài toán bằng cách so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại các phương án cực biên vừa tìm được.

Ví dụ 3.9. Xác định tất cả các phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính với tập chấp nhận được xác định bởi hệ

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \; - \; x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_j \geq 0, \; j &= 1,2,3. \end{aligned}$$

Giải. Bài toán này có $n = 3$ biến và $m = 2$ ràng buộc chính.

◇ *Xác định các phương án cực biên không suy biến:* Theo định nghĩa, một phương án cực biên không suy biến có đúng $m = 2$ thành phần dương. Vì vậy, từ hệ trên ta có

- Nếu $x_1 = 0$ thì $x_2 = \frac{13}{14}$, $x_3 = \frac{5}{7}$ và $x^1 = (0, \frac{13}{14}, \frac{5}{7})^T$ là một phương án chấp nhận được;

- Nếu $x_2 = 0$ thì hệ trên vô nghiệm;

- Nếu $x_3 = 0$ thì $x_1 = \frac{5}{9}$, $x_2 = \frac{11}{18}$ và $x^2 = (\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, 0)^T$ là một phương án chấp nhận được.

Vì $J(x^1) = \{2, 3\}$ và hai véc tơ $A_2 = (4, 2)^T$ và $A_3 = (-1, 3)^T$ độc lập tuyến tính nên x^1 là phương án cực biên không suy biến. Tương tự, x^2 cũng là phương án cực biên không suy biến vì $J(x^2) = \{1, 2\}$ và hai véc tơ $A_1 = (1, 5)^T$; $A_2 = (4, 2)^T$ độc lập tuyến tính.

◇ *Xác định các phương án cực biên suy biến:* Một phương án cực biên không suy biến có ít hơn $m = 2$ thành phần dương, tức nó phải có ít nhất $n - m + 1 = 2$ thành phần bằng 0. Dễ thấy bài toán này không có phương án cực biên suy biến. Vì vậy, nó là bài toán quy hoạch tuyến tính không suy biến.

b. Điều kiện tối ưu

Ta đang xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min\{\langle c, x\rangle \mid x \in D\}, \qquad (LP^{ct})$$

trong đó $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, và tập chấp nhận được

$$D = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

trong đó $b = (b_1, \cdots, b_m)^T \geq 0$, A là ma trận cấp $m \times n$ với các cột $A_1, \cdots, A_n$, $\text{rank}A = m$ và $m < n$.

Định nghĩa. Một bộ gồm m véc tơ cột độc lập tuyến tính $B = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m}\}$ của ma trận A cấp $m \times n$ có $\text{rank}A = m$ được gọi là một *cơ sở* của ma trận A.

Cho $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)^T$ là một phương án cực biên của bài toán (LP^{ct}). Theo Định lý 3.6, các véc tơ $\{A_j \mid j \in J(x^0)\}$ độc lập tuyến tính. Vì $\text{rank}A = m$ nên:

◇ Nếu x^0 là phương án cực biên không suy biến, tức $|J(x^0)| = m$, thì $B = \{A_j \mid j \in J(x^0)\}$ là cơ sở duy nhất của A tương ứng với x^0.

◇ Nếu x^0 là phương án cực biên suy biến, tức $|J(x^0)| < m$, thì ta bổ sung thêm các véc tơ cột của A thuộc tập $\{A_j \mid j \notin J(x^0)\}$ vào bộ véc tơ $\{A_j \mid j \in J(x^0)\}$ để nhận được bộ m véc tơ độc lập tuyến tính $\{A_j \mid j \in J\}$ với $J \supset J(x^0)$ và $|J| = m$. Khi đó, $\bar{B} = \{A_j \mid j \in J\}$ là một cơ sở của ma trận A. Dễ thấy, ứng với một phương án cực biên suy biến x^0 có thể có nhiều cơ sở của A. Đây chính là lý do làm cho thuật toán giải quy hoạch tuyến tính trở nên phức tạp khi xuất hiện các phương án cực biên suy biến.

Ví dụ 3.10. Xét quy hoạch tuyến tính như ở Ví dụ 3.8. Ta đã biết $v^1 = (2, 1, 0)^T$, với $J(v^1) = \{1, 2\}$, là phương án cực biên không suy biến nên có duy nhất một cơ sở tương ứng với nó là $\{A_1, A_2\} = \left\{(3, 1)^T, (4, -1)^T\right\}$.

Phương án cực biên suy biến $v^2 = (0, 0, 1)^T$ có tập $J(v^2) = \{3\}$ chỉ có một phần tử $(1 < m = 2)$ nên ta bổ sung thêm một véc tơ cột của A để nhận được cơ sở của A tương ứng với v^2. Dễ thấy tương ứng với v^2 có hai cơ sở là:

i) Cơ sở $\bar{B}^1 = \{A_1, A_3\} = \left\{(3, 1)^T, (10, 1)^T\right\}$;

ii) Cơ sở $\bar{B}^2 = \{A_2, A_3\} = \left\{(4, -1)^T, (10, 1)^T\right\}$.

Bây giờ, để đơn giản việc trình bày, ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (LP^{ct}) với giả thiết thêm rằng: *Bài toán (LP^{ct}) là không suy biến và biết trước một phương án cực biên của bài toán này*. Cách xác định một phương án cực biên xuất phát được trình bày ở Mục 3.5. Chú ý 3.6 sẽ chỉ rõ dấu hiệu nhận biết và cách khắc phục khi gặp phải các phương án cực biên suy biến.

Giả sử ta đã biết phương án cực biên không suy biến $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^T$ có $|J(x^0)| = m$. Hệ các véc tơ độc lập tuyến tính $\{A_j \mid j \in J(x^0)\}$ là cơ sở duy nhất của ma trận A tương ứng với x^0. Ta gọi:

$J(x^0) = \{j \mid x_j^0 > 0\}$	là *tập chỉ số cơ sở*,
$\{1, \cdots, n\} \setminus J(x^0)$	là *tập chỉ số phi cơ sở*,
$\{x_j \mid j \in J(x^0)\}$	là các *biến cơ sở*,
$\{A_j \mid j \in J(x^0)\}$	là các *véc tơ cơ sở*,
$\{x_j \mid j \notin J(x^0)\}$	là các *biến phi cơ sở*,
$\{A_j \mid j \notin J(x^0)\}$	là các *véc tơ phi cơ sở*.

Do $\{A_j | j \in J(x^0)\}$ là cơ sở của ma trận A nên mỗi véc tơ cột A_k, $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, được biểu diễn dưới dạng

$$A_k = \sum_{j \in J(x^0)} z_{jk} A_j, \tag{3.10}$$

$$\text{tức} \quad \sum_{j \in J(x^0)} a_{ij} z_{jk} = a_{ik}, \; i = 1, \cdots, m$$

và bộ số thực z_{jk}, $j \in J(x^0)$ là được xác định duy nhất. Vì $x_j^0 = 0$ với mọi $j \notin J(x^0)$ nên

$$\sum_{j \in J(x^0)} x_j^0 A_j = b. \tag{3.11}$$

Giá trị hàm mục tiêu tại x^0 là

$$f(x^0) = \langle c, x^0 \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j^0 c_j = \sum_{j \in J(x^0)} x_j^0 c_j. \tag{3.12}$$

Đại lượng

$$\Delta_k = \sum_{j \in J(x^0)} z_{jk} c_j - c_k, \quad k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \tag{3.13}$$

được gọi là *ước lượng* của biến x_k.

Nhận xét 3.4. Dễ chứng minh được rằng $\Delta_k = 0$ với mọi $k \in J(x^0)$ (Bài tập).

Ký hiệu: B là ma trận có các cột là các véc tơ $\{A_j, \; j \in J(x^0)\}$,
Z_{B_k} là véc tơ cột có các thành phần là z_{jk}, $j \in J(x^0)$,
C_B là véc tơ hàng có các thành phần là c_j, $j \in J(x^0)$,
X_B là véc tơ cột có các thành phần là x_j, $j \in J(x^0)$.

Khi đó các công thức (3.10) – (3.13) được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$A_k = BZ_{B_k} \quad \Rightarrow \quad Z_{B_k} = B^{-1} A_k, \tag{3.10'}$$

$$BX_B = b \quad \Rightarrow \quad X_B = B^{-1} b, \tag{3.11'}$$

$$f(x^0) = C_B X_B, \tag{3.12'}$$

và

$$\Delta_k = C_B Z_{B_k} - c_k = C_B B^{-1} A_k - c_k. \tag{3.13'}$$

Như vậy, các đại lượng z_{jk}, $\{x_j, j \in J(x^0)\}$ và Δ_k đều được tính thông qua ma trận nghịch đảo B^{-1}. Trong nhiều việc tính toán, cách biểu diễn này rất tiện lợi.

Sau đây là điều kiện đủ để phương án cực biên x^0 là phương án tối ưu của bài toán (LP^{a}).

Định lý 3.7. *Nếu phương án cực biên x^0 thỏa mãn*

$$\Delta_k \leq 0 \text{ với mọi } k \notin J(x^0)$$

thì x^0 là một phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (LP^{ct}).

Chứng minh. Vì phương án cực biên $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)^T$ có $x_k^0 = 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$ nên

$$f(x^0) = \langle c, x^0 \rangle = \sum_{j \in J(x^0)} c_j x_j^0$$

và

$$b = \sum_{j \in J(x^0)} x_j^0 A_j. \tag{3.14}$$

Để chứng tỏ x^0 là phương án tối ưu, với phương án chấp nhận được bất kỳ $y \in D$, ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x) = \langle c, x^0 \rangle \leq f(y) = \langle c, y \rangle.$$

Thật vậy, vì $y \in D$ nên

$$\begin{aligned} b = \sum_{j=1}^{n} y_j A_j &= \sum_{j \in J(x^0)} y_j A_j + \sum_{k \notin J(x^0)} y_k A_k \\ &\overset{(3.10)}{=} \sum_{j \in J(x^0)} y_j A_j + \sum_{k \notin J(x^0)} y_k \Big(\sum_{j \in J(x^0)} z_{jk} A_j \Big) \\ &= \sum_{j \in J(x^0)} \Big(y_j + \sum_{k \notin J(x^0)} y_k z_{jk} \Big) A_j. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Do phép biểu diễn b qua cơ sở là duy nhất nên từ (3.14) và (3.15) ta có

$$x_j^0 = y_j + \sum_{k \notin J(x^0)} y_k z_{jk}, \ \forall j \in J(x^0).$$

Suy ra

$$y_j = x_j^0 - \sum_{k \notin J(x^0)} y_k z_{jk}, \ \forall j \in J(x^0) \tag{3.16}$$

và

$$\begin{aligned}
f(y) = \langle c, y\rangle &= \sum_{j\in J(x^0)} c_j y_j + \sum_{k\notin J(x^0)} c_k y_k \\
&\overset{(3.16)}{=} \sum_{j\in J(x^0)} c_j\Big(x_j^0 - \sum_{k\notin J(x^0)} y_k z_{jk}\Big) + \sum_{k\notin J(x^0)} c_k y_k \\
&= \sum_{j\in J(x^0)} c_j x_j^0 - \sum_{k\notin J(x^0)} \Big(\sum_{j\in J(x^0)} c_j z_{jk} - c_k\Big) y_k \\
&\overset{(3.13)}{=} f(x^0) - \sum_{k\notin J(x^0)} \Delta_k y_k. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Theo giả thiết $\Delta_k \leq 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$ và $y_k \geq 0$ với mọi $k = 1, \cdots, n$ nên $\sum_{k\notin J(x^0)} \Delta_k y_k \leq 0$. Do đó $f(y) \geq f(x^0)$. Ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.4. *Giả sử x^0 là phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính (LP^{ct}). Nếu $\Delta_k < 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$ thì x^0 là phương án tối ưu duy nhất. Ngược lại, nếu tồn tại $k \notin J(x^0)$ sao cho $\Delta_k = 0$ thì x^0 không phải là phương án tối ưu duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử x^0 là phương án tối ưu thỏa mãn $\Delta_k < 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$. Khi đó x^0 là phương án tối ưu duy nhất của bài toán (LP^{ct}). Thật vậy, giả thiết phản chứng rằng x^0 không phải phương án tối ưu duy nhất, tức bài toán (LP^{ct}) có thêm ít nhất một phương án tối ưu $x^1 \neq x^0$. Ta có

$$f(x^1) = f(x^0). \qquad (3.18)$$

Theo (3.17) trong chứng minh Định lý 3.7, vì x^1 là phương án chấp nhận được nên

$$f(x^1) = f(x^0) - \sum_{k\notin J(x^0)} \Delta_k x_k^1. \qquad (3.19)$$

Kết hợp (3.18) và (3.19) suy ra

$$\sum_{k\notin J(x^0)} \Delta_k x_k^1 = 0.$$

Do $\Delta_k < 0$ và $x_k^1 \geq 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$ nên phải có $x_k^1 = 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$. Vì x^0 và x^1 đều là các phương án chấp nhận được nên

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 A_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^1 A_j$$

hay

$$\sum_{j\in J(x^0)} x_j^0 A_j = \sum_{j\in J(x^0)} x_j^1 A_j.$$

Do $\{A_j, j \in J(x^0)\}$ là cơ sở nên phải có $x_j^0 = x_j^1$ với mọi $j \in J(x^0)$. Vậy, $x_j^1 = x_j^0$ với mọi $j = 1, \cdots, n$ hay $x^0 = x^1$.

Điều ngược lại là hiển nhiên. □

Định lý sau đây cho ta biết dấu hiệu bài toán không có lời giải hoặc từ phương án cực biên x^0 có thể chuyển đến phương án cực biên mới tốt hơn.

Định lý 3.8. *Cho x^0 là một phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (LP^{ct}). Khi đó,*

i) *Nếu tồn tại $k \notin J(x^0)$ sao cho*

$$\Delta_k > 0 \text{ và } z_{jk} \leq 0 \ \forall j \in J(x^0)$$

thì hàm mục tiêu giảm vô hạn trên tập chấp nhận được và bài toán không có lời giải;

ii) *Nếu tồn tại $k \notin J(x^0)$ sao cho*

$$\Delta_k > 0 \text{ và } \exists j \in J(x^0) \text{ sao cho } z_{jk} > 0 \tag{3.20}$$

thì ta có thể chuyển được tới phương án cực biên x^1 tốt hơn phương án cực biên x^0 nghĩa là $\langle c, x^1\rangle < \langle c, x^0\rangle$.

Chứng minh. Xét chỉ số $k \notin J(x^0)$ sao cho $\Delta_k > 0$. Ta có

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 A_j = \sum_{j \in J(x^0)} x_j^0 A_j = b \tag{3.21}$$

và

$$\sum_{j \in J(x^0)} z_{jk} A_j = A_k \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in J(x^0)} \theta z_{jk} A_j = \theta A_k \text{ với } \theta > 0. \tag{3.22}$$

Trừ (3.21) cho (3.22) và chuyển vế θA_k, ta được

$$\sum_{j \in J(x^0)} (x_j^0 - \theta z_{jk}) A_j + \theta A_k = b. \tag{3.23}$$

Đặt $z^k = (z_1^k, \cdots, z_n^k)^T$, với

$$z_j^k = \begin{cases} -z_{jk}, & \forall j \in J(x^0) \\ 0, & j \notin J(x^0) \text{ và } j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \tag{3.24}$$

và

$$\bar{x}(\theta) = x^0 + \theta z^k.$$

Khi đó (3.23) có thể viết được dưới dạng

$$A\bar{x}(\theta) = b. \tag{3.25}$$

Ta xét hai trường hợp:

• *Trường hợp 1: Có $z_{jk} \leq 0$ với mọi $j \in J(x^0)$.* Trong trường hợp này

$$\bar{x}(\theta) = x^0 + \theta z^k \geq 0, \ \forall \theta \geq 0. \tag{3.26}$$

Hệ thức (3.25) và (3.26) chứng tỏ tất cả các điểm $\bar{x}(\theta)$, với $\theta \geq 0$, nằm trên tia xuất phát từ x^0 theo hướng z^k đều thuộc tập chấp nhận được. Do $\Delta_k > 0$, tính toán trực tiếp ta có

$$\begin{aligned} f(\bar{x}(\theta)) &= \sum_{j \in J(x^0)} (x_j^0 - \theta z_{jk})c_j + \theta c_k \\ &= \sum_{j \in J(x^0)} x_j^0 c_j - \theta\Big(\sum_{j \in J(x^0)} z_{jk}c_j - c_k\Big) \\ &= \langle c, x^0 \rangle - \theta \Delta_k = f(x^0) - \theta\Delta_k \to -\infty \text{ khi } \theta \to +\infty, \end{aligned}$$

tức giá trị hàm mục tiêu giảm vô hạn trên tập phương án. Bài toán không có nghiệm tối ưu.

• *Trường hợp 2: Tồn tại $z_{jk} > 0$ với ít nhất một $j \in J(x^0)$.* Rõ ràng rằng, trong trường hợp này ta không có $\bar{x}(\theta) \geq 0$ với mọi $\theta > 0$. Tuy nhiên, ta vẫn có hệ thức (3.25) và $\Delta_k > 0$ nên

$$f(\bar{x}(\theta)) = f(x^0) - \theta\Delta_k < f(x^0) \ \text{ với mỗi } \theta > 0. \tag{3.27}$$

Vấn đề là cần chọn số $\theta_0 > 0$ để $\bar{x}(\theta_0) \geq 0$, tức $\bar{x}(\theta_0)$ là phương án chấp nhận được, và hơn nữa nó còn phải là phương án cực biên kề với x^0 theo hướng z^k.

Đặt

$$\theta_0 = \min\left\{ \frac{x_j^0}{z_{jk}} \;\middle|\; z_{jk} > 0,\ j \in J(x^0) \right\} = \frac{x_r^0}{z_{rk}} \ \text{ với } r \in J(x^0). \tag{3.28}$$

Vì $\bar{x}(\theta) = x^0 + \theta z^k$ nên $\bar{x}(\theta) \geq 0$ với $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Kết hợp sự kiện này với (3.25) ta có các véc tơ $\bar{x}(\theta)$ với $0 \leq \theta \leq \theta_0$ là các phương án chấp nhận được của bài toán (LP^{ct}). Cụ thể, chúng thuộc cạnh hữu hạn của tập chấp nhận được xuất phát từ x^0 theo hướng z^k. Đặt $x^1 := \bar{x}(\theta_0)$. Các tọa độ của x^1 được xác định bởi

$$x_j^1 = \begin{cases} x_j^0 - \theta_0 z_{jk}, & \forall j \in J(x^0) \\ 0, & \forall j \notin J(x^0) \text{ và } j \neq k \\ \theta_0, & j = k. \end{cases}$$

Kết hợp công thức trên và (3.28) ta có

$$x_r^1 = x_r^0 - \theta_0 z_{rk} = 0 \ \text{ và } \ x_k^1 = \theta_0 > 0.$$

Ký hiệu $J(x^1) = \{j \in \{1, \cdots, n\} \mid x_j^1 > 0\}$. Dễ thấy $J(x^1) = (J(x^0) \setminus \{r\}) \cup \{k\}$ và $|J(x^1)| = |J(x^0)| = m$. Có thể kiểm tra được hệ $\{A_j \mid j \in J(x^1)\}$ độc lập tuyến tính. Theo Định lý 3.6, ta có x^1 là phương án cực biên với bộ chỉ số cơ sở $J(x^1)$. □

Chú ý 3.3. Từ chứng minh Định lý 3.8 ta thấy, nếu tồn tại chỉ số $k \notin J(x^0)$ sao cho (3.20) thỏa mãn thì ta có thể chuyển được đến phương án cực biên mới x^1 tốt hơn x^0. Khi đó, biến x_k (biến phi cơ sở đối với x^0) trở thành biến cơ sở đối với x^1 và biến x_r (biến cơ sở đối với x^0) trở thành biến phi cơ sở đối với x^1. Hai phương án cực biên x^0 và x^1 *kề nhau* nếu *cơ sở của chúng chỉ sai khác nhau đúng một véc tơ.*

Khi có nhiều chỉ số $k \notin J(x^0)$ mà (3.20) được thỏa mãn thì, về nguyên tắc, ta có thể chọn một chỉ số k tùy ý trong số đó đều có thể cải thiện được giá trị hàm mục tiêu. Với mỗi chỉ số k như vậy, theo (3.27), giá trị hàm mục tiêu tại phương án cực biên mới giảm một lượng so với giá trị hàm mục tiêu tại x^0 là $\theta_0\Delta_k$, trong đó θ_0 được xác định ở (3.28). Như vậy mức độ giảm giá trị hàm mục tiêu tại phương án cực biên mới phụ thuộc vào cả θ_0 và Δ_k. Với mong muốn chọn được chỉ số k sao cho giá trị $\theta_0\Delta_k$ lớn nhất có thể (tức giá trị hàm mục tiêu giảm được nhiều nhất) và để đơn giản trong tính toán, người ta thường chọn chỉ số $k = s$ với s là chỉ số thỏa mãn

$$\Delta_s = \max\{\Delta_k \mid \Delta_k > 0\}.$$

Ta gọi s là *chỉ số của véc tơ đưa vào cơ sở mới.*

Khi đó, đưa véc tơ A_s vào cơ sở và đưa A_r ra khỏi cơ sở, với chỉ số r (*chỉ số của véc tơ đưa ra khỏi cơ sở cũ*) được xác định bởi

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{x_j^0}{z_{js}} \,\Big|\, z_{js} > 0,\ j \in J(x^0)\right\} = \frac{x_r^0}{z_{rs}} \quad \text{với } r \in J(x^0) \tag{3.29}$$

và nhận được phương án cực biên mới $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \cdots, x_n^1)^T$ với

$$x_j^1 = \begin{cases} x_j^0 - \dfrac{x_r^0}{z_{rs}} z_{js}, & \forall j \in J(x^0) \text{ (trong đó } x_r^1 = 0) \\ 0, & \forall j \notin J(x^0) \text{ và } j \neq s \\ \dfrac{x_r^0}{z_{rs}}, & j = s. \end{cases} \tag{3.30}$$

Chú ý 3.4. Giả sử bài toán quy hoạch tuyến tính cần giải là

$$\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}. \tag{LP_{max}}$$

Khi đó,

i) Hoặc ta giải bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc tương đương

$$\min\{\langle -c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

với lưu ý rằng tập nghiệm của hai bài toán này là trùng nhau nhưng giá trị tối ưu phải trái dấu;

ii) Hoặc giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính (LP_{max}) khi đã biết một phương án cực biên x^0 và cơ sở tương ứng $\{A_j \mid j \in J(x^0)\}$ với $J(x^0) = \{j \in \{1, 2, \cdots, n\} \mid x_j^0 > 0\}$. Khi đó, với các ký hiệu như đã trình bày ở trên,

- Nếu $\Delta_k \geq 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$ thì x^0 là nghiệm tối ưu của bài toán (LP_{max});
- Nếu tồn tại $k \notin J(x^0)$ để $\Delta_k < 0$ và $z_{jk} \leq 0$ với mọi $j \in J(x^0)$ thì giá trị hàm mục tiêu tăng vô hạn trên miền chấp nhận được. Bài toán không có nghiệm tối ưu;
- Nếu tồn tại $k \notin J(x^0)$ sao cho $\Delta_k < 0$ và tồn tại $j \in J(x^0)$ sao cho $z_{jk} > 0$ thì ta chuyển tới phương án cực biên x^1 tốt hơn phương án cực biên x^0, tức

$$\langle c, x^1 \rangle > \langle c, x^0 \rangle.$$

3.4.3 Thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

Mục này dành để trình bày thuật toán đơn hình (Thuật toán 3.2) giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\min\{f(x) = \langle c, x \rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad (LP^{ct})$$

trong đó $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, A là ma trận cấp $m \times n$ và véc tơ $b = (b_1, \cdots, b_m)^T \geq 0$ với các giả thiết[5] như đã nêu ở Mục 3.4.2.

Thuật toán 3.2

Bước khởi tạo. Xuất phát từ một phương án cực biên x^0 và cơ sở $\{A_j,\ j \in J(x^0)\}$ tương ứng của nó (*Cách xác định phương án cực biên này sẽ được trình bày ở Mục 3.5*).

Bước 1. Tính giá trị hàm mục tiêu

$$f(x^0) = \sum_{j \in J(x^0)} c_j x_j^0.$$

Bước 2. Với mỗi $k \notin J(x^0)$, xác định các số z_{jk} bằng việc giải hệ

$$\sum_{j \in J(x^0)} z_{jk} A_j = A_k$$

và tính các ước lượng

$$\Delta_k = \sum_{j \in J(x^0)} z_{jk} c_j - c_k.$$

[5]Giả thiết: i) $\text{rank}A = m$; ii) $m < n$; iii) Bài toán quy hoạch tuyến tính (LP^{ct}) không suy biến và iv) Biết trước một phương án cực biên x^0.

Bước 3. (*Kiểm tra điều kiện tối ưu*).
If $\Delta_k \le 0$ với mọi $k \notin J(x^0)$ **Then** Dừng thuật toán (x^0 *là nghiệm tối ưu*)
Else Chuyển sang Bước 4.

Bước 4. (*Kiểm tra bài toán không có lời giải*)
If Tồn tại $k \notin J(x^0)$ sao cho $\Delta_k > 0$ và $z_{jk} \le 0$ với mọi $j \in J(x^0)$
Then Dừng thuật toán (*Bài toán không có nghiệm tối ưu hay hàm mục tiêu giảm vô hạn trên tập chấp nhận được*).
Else Chuyển Bước 5.

Bước 5. (*Xây dựng phương án cực biên mới*)

- Tìm véc tơ A_s để đưa vào cơ sở mới, trong đó chỉ số s được chọn theo tiêu chuẩn
$$\Delta_s = \max\{\Delta_k \mid \Delta_k > 0\}.$$
- Tìm véc tơ A_r để đưa ra khỏi cơ sở cũ với chỉ số r được xác định bởi (công thức (3.29))
$$\theta_0 = \min\left\{\frac{x_j^0}{z_{js}} \;\middle|\; z_{js} > 0\right\} = \frac{x_r^0}{z_{rs}}.$$
- Xây dựng phương án cực biên mới là x^1 theo công thức (3.30) với cơ sở mới là $J(x^1) = (J(x^0) \setminus \{r\}) \cup \{s\}$.
- Đặt $x^0 := x^1$ và quay lại Bước 1.

Trong Thuật toán 3.2, sau khi ta tính được phương án cực biên mới x^1 ở Bước 5 ta sẽ quay lại Bước 1 và phải tính các đại lượng z_{jk}^1 và Δ_k^1 tương ứng với cơ sở mới của x^1. Công việc này trở nên dễ dàng hơn rất nhiều nếu ta thực hiện theo thuật toán đơn hình dạng bảng (Thuật toán 3.3) dựa trên công thức đổi cơ sở được trình bày ở mục tiếp theo đây.

3.4.4 Công thức đổi cơ sở và thuật toán đơn hình dạng bảng

a. Công thức đổi sơ sở

Giả sử phương án cực biên x^0 có tập chỉ số cơ sở là $J(x^0)$. Phương án cực biên mới x^1 kề với x^0 và được xác định bởi (3.30) có tập chỉ số cơ sở là

$$J(x^1) = (J(x^0) \setminus \{r\}) \cup \{s\}.$$

Bây giờ ta trình bày cách tính các hệ số trong biểu diễn các véc tơ A_k qua cơ sở mới $\{A_j \mid j \in J(x^1)\}$. Theo (3.10), ta có

$$A_s = \sum_{j \in J(x^0)} z_{js} A_j \;\Rightarrow\; A_r = \frac{1}{z_{rs}}\Big(A_s - \sum_{j \in J(x^0), j \ne r} z_{js} A_j\Big). \tag{3.31}$$

Với mỗi $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$A_k = \sum_{j\in J(x^0)} z_{jk}A_j = \sum_{j\in J(x^0), j\neq r} z_{jk}A_j + z_{rk}A_r. \tag{3.32}$$

Thay A_r được tính theo (3.31) vào (3.32), ta được

$$\begin{aligned}
A_k &= \sum_{j\in J(x^0), j\neq r} z_{jk}A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Big(A_s - \sum_{j\in J(x^0), j\neq r} z_{js}A_j\Big)\\
&= \sum_{j\in J(x^0), j\neq r} \Big(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}z_{js}\Big)A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}A_s\\
&= \sum_{j\in J(x^1)} z^1_{jk}A_j,
\end{aligned}$$

trong đó $J(x^1) = (J(x^0)\backslash\{r\}) \cup \{s\}$ là cơ sở mới tương ứng với x^1 và

$$z^1_{jk} = \begin{cases} z_{jk} - \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}}z_{js}, & j \in J(x^1) \text{ và } j \neq s\\ \dfrac{z_{rk}}{z_{rs}}, & j = s. \end{cases} \tag{3.33}$$

Đây chính là công thức biểu diễn A_k qua cơ sở mới $\{A_j | j \in J(x^1)\}$.

Các ước lượng mới (tương ứng với phương án cực biên x^1) có thể xác định bởi

$$\Delta^1_k = \sum_{j\in J(x^1)} z^1_{jk}c_j - c_k$$

hoặc có thể được tính theo công thức (3.34) sau đây

$$\begin{aligned}
\Delta^1_k &= \sum_{j\in J(x^1)} z^1_{jk}c_j - c_k\\
&= \sum_{j\in J(x^1)\backslash\{s\}} z^1_{jk}c_j - c_k + z^1_{sk}c_s\\
&\overset{(3.33)}{=} \sum_{j\in J(x^1)\backslash\{s\}} \Big(z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}z_{js}\Big)c_j - c_k + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}c_s\\
&= \sum_{j\in J(x^0)\backslash\{r\}} z_{jk}c_j - c_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Big(\sum_{j\in J(x^0)\backslash\{r\}} z_{js}c_j - c_s\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad (\text{vì } J(x^1)\setminus\{s\} = J(x^0)\setminus\{r\})\\
&= \sum_{j\in J(x^0)\backslash\{r\}} z_{jk}c_j + z_{rk}c_r - c_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Big(\sum_{j\in J(x^0)\backslash\{r\}} z_{js}c_j + z_{rs}c_r - c_s\Big)\\
&\overset{(3.13)}{=} \Delta_k - \frac{z_{rk}}{z_{rs}}\Delta_s.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

b. Bảng đơn hình

Bảng đơn hình gồm $n+4$ cột, dành để được ghi các thông tin về một bước lặp tính toán tương ứng với một phương án cực biên. Giả sử $x = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^T$ là phương án cực biên tương ứng với bộ chỉ số cơ sở $J_B = J(x^0) = \{j_1, \cdots, j_m\}$ và cơ sở đơn vị $B = \{A_{j_1}, \cdots, A_{j_m}\}$. Các thông tin về x^0 được ghi ở bảng đơn hình xuất phát (Bảng 3.1).

Bảng 3.1

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	c_1 A_1	$\cdots$	c_k A_k	$\cdots$	c_n A_n	θ
c_{j_1}	A_{j_1}	$x_{j_1}^0$	$z_{j_1 1}$	$\cdots$	$z_{j_1 k}$	$\cdots$	$z_{j_1 n}$	θ_{j_1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_j	A_j	x_j^0	z_{j1}	$\cdots$	z_{jk}	$\cdots$	z_{jn}	θ_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{j_m}	A_{j_m}	$x_{j_m}^0$	$z_{j_m 1}$	$\cdots$	$z_{j_m k}$	$\cdots$	$z_{j_m n}$	θ_{j_m}
		$f(x^0)$	Δ_1	$\cdots$	Δ_k	$\cdots$	Δ_n	

Bảng đơn hình gồm $n+4$ cột.

Cột 1. (Hệ số C_B) Ghi giá trị hệ số hàm mục tiêu tương ứng với các biến cơ sở.

Cột 2. (Cơ sở B) Ghi tên các véc tơ cơ sở. Chú ý rằng, tên các véc tơ này phải được ghi theo thứ tự $A_{j_1}, \cdots, A_{j_m}$ sao cho ma trận lập $B = (A_{j_1}, \cdots, A_{j_m})$ là ma trận đơn vị I_m.

Cột 3. (Phương án cực biên) Ghi giá trị của các biến cơ sở của phương án cực biên đang xét.

n cột tiếp theo. Cột thứ $3+k$ ứng với tên véc tơ A_k, $k = 1, \cdots, n$. Phía trên tên mỗi cột A_k ghi giá trị hệ số hàm mục tiêu c_k tương ứng. Trong cột A_k, ghi giá trị các hệ số $z_{jk}, j \in J_B$ trong biểu diễn véc tơ A_k theo các véc tơ cơ sở đang xét

$$\sum_{j \in J_B} z_{jk} A_j = A_k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Cột cuối cùng. Dành để ghi tỷ số $\theta_j, j \in J_B$ (xem Bước 3 - Thuật toán 3.3).

Dòng cuối cùng. Tại vị trí dưới cột 3, ghi giá trị hàm mục tiêu tại phương án cực biên đang xét

$$f(x^0) = \sum_{j \in J_B} c_j x_j^0.$$

Tại vị trí dưới cột ứng với véc tơ A_k, $k \in \{1, \cdots, n\}$, ghi ước lượng

$$\Delta_k = \sum_{j \in J_B} z_{jk} c_j - c_k.$$

Ta có $\Delta_j = 0$ với mọi $j \in J_B$ (Nhận xét 3.4).

c. Thuật toán đơn hình dạng bảng

Thuật toán 3.3

Bước 0. (*Bước chuẩn bị*) Xây dựng bảng đơn hình xuất phát tương ứng với phương án cực biên x^0;

Bước 1. (*Kiểm tra điều kiện tối ưu*) Xét dòng cuối của bảng

If $\Delta_k \leq 0$ với mọi $k = 1, \cdots, n$ **Then** Dừng thuật toán

(*Nghiệm tối ưu là phương án cực biên tương ứng với bảng này*)

Else chuyển sang Bước 2.

Bước 2. (*Kiểm tra bài toán không có lời giải*)

If Tồn tại $k \notin J_B$ sao cho $\Delta_k > 0$ và $z_{jk} \leq 0$ với mọi $j \in J_B$

Then Dừng thuật toán (*Bài toán không có lời giải*)

Else chuyển sang Bước 3.

Bước 3. Thực hiện:

- *Tìm cột quay.* Xác định véc tơ A_s để đưa vào cơ sở mới với chỉ số s thỏa mãn $\Delta_s = \max\{\Delta_k \mid \Delta_k > 0\}$. Cột tương ứng với véc tơ A_s được gọi là *cột quay*.

- *Tìm dòng quay.* Tính các $\theta_j, j \in J_B$, như sau

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{x_j}{z_{js}} & \text{nếu } z_{js} > 0,\ j \in J_B \\ +\infty & \text{nếu } z_{js} \leq 0,\ j \in J_B \end{cases}$$

  và xác định

$$\theta_r = \min\{\theta_j \mid j \in J_B\}.$$

  Dòng r được gọi là *dòng quay*. Phần tử z_{rs} nằm trên giao của dòng quay và cột quay được gọi là *phần tử chính* của phép quay. Các phần tử z_{js} $(j \neq r)$ được gọi là các *phần tử quay*.

Bước 4. (*Chuyển bảng mới tương ứng với phương án cực biên mới*) Thực hiện:

- Trong cột 1 (cột hệ số C_B) thay giá trị c_r bởi c_s. Trong cột 2 (cột cơ sở), thay tên A_r bởi A_s.

- Chia các phần tử của dòng quay cho phần tử chính ta được dòng mới (có số 1 tại vị trí của z_{rs} cũ) gọi là *dòng chính*, tức ta có quy tắc là

$$\textbf{Dòng chính (mới)} := \frac{\textbf{Dòng quay (cũ)}}{\textbf{phần tử chính}};$$

- ◦ Biến đổi mỗi dòng còn lại theo quy tắc

Dòng mới := Dòng cũ tương ứng - Dòng chính × Phần tử quay tương ứng.

Ta được số 0 ở mọi vị trí còn lại của cột quay cũ. (*Sau phép quay thì trong bảng mới ta có $\Delta_s = 0$ vì lúc này s là chỉ số cơ sở của phương án cực biên mới và A_s trở thành véc tơ đơn vị cơ sở*).

- ◦ Quay lại Bước 1 với bảng mới.

Sau đây là một số ví dụ để minh họa cho thuật toán.

Ví dụ 3.11. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_6 \\ \text{v.đ.k.} \quad & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ & x_1, \cdots, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Dễ thấy $x^0 = (0, 0, 0, 7, 4, 5)^T$ là phương án chấp nhận được của bài toán đang xét và $J(x^0) = \{4, 5, 6\}$. Vì các véc tơ A_4, A_5, A_6 độc lập tuyến tính và tạo thành ma trận cơ sở đơn vị $B = \{A_5, A_6, A_4\} = I_3$ nên x^0 là phương án cực biên và A_1 chính là véc tơ các hệ số khai triển của nó theo các véc tơ cơ sở, cụ thể

$$A_1 = (-1)A_5 + 1A_6 + 2A_4.$$

Tương tự, ta có

$$A_2 = 2A_5 + 1A_6 + 0A_4 \text{ và } A_3 = 2A_5 + 1A_6 + 2A_4.$$

Ta có Bảng 3.2 là bảng đơn hình xuất phát tương ứng với phương án cực biên x^0 này.

Bảng 3.2

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	-2 A_1	2 A_2	1 A_3	3 A_4	0 A_5	1 A_6	θ
0	A_5	4	-1	2	2	0	1	0	∞
1	A_6	5	1	1	1	0	0	1	5
3	A_4	7	[2]	0	2	1	0	0	$\frac{7}{2}$
	Bảng 1	26	9	-1	6	0	0	0	

Vì dòng cuối cùng còn $\Delta_1 = 9 > 0$ và $\Delta_3 = 6 > 0$ nên x^0 chưa phải phương án tối ưu. Véc tơ đưa vào cơ sở là A_1 (ứng với $\Delta_1 = 9$ lớn nhất). Véc tơ loại ra khỏi cơ sở là A_4 (ứng với $\theta_4 = \min\{+\infty, 5, \frac{7}{2}\} = \frac{7}{2} = \frac{x_4^0}{z_{41}}$). Phần tử chính là $z_{41} = 2$ (được ghi trong ngoặc vuông [.]). Biến đổi bảng đơn hình theo Bước 4 (Thuật toán 3.1) (sau đây ta sẽ gọi tắt là biến đổi bảng đơn hình) ta được bảng đơn hình mới (Bảng 3.3)

Bảng 3.3

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	-2 A_1	2 A_2	1 A_3	3 A_4	0 A_5	1 A_6	θ
0	A_5	$\frac{15}{2}$	0	2	3	$\frac{1}{2}$	1	0	
1	A_6	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	
-2	A_1	$\frac{7}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	
	Bảng 2	$-\frac{11}{2}$	0	-1	-3	$-\frac{9}{2}$	0	0	

Trong Bảng 3.3, ta có $\Delta_k \leq 0$ với mọi $k = 1, \cdots, 6$. Do đó, phương án cực biên $x^* = (\frac{7}{2}, 0, 0, 0, \frac{15}{2}, \frac{3}{2})^T$ tương ứng với bảng này là phương án tối ưu và giá trị tối ưu là $f_{min} = f(x^*) = -\frac{11}{2}$. Bài toán này có nghiệm tối ưu duy nhất vì $\Delta_k < 0$ với mọi chỉ số phi cơ sở $k \notin J_B = \{5, 6, 1\}$.

Ví dụ 3.12. *(Bài toán có nghiệm tối ưu không duy nhất)*

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$
\begin{aligned}
\min \quad f(x) = \; & x_1 - 2x_2 \\
\text{v.đ.k.} \quad & -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 4 \\
& x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 5 \\
& 2x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad = 7 \\
& x_1, \cdots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 7, 4, 5)^T$ và cơ sở đơn vị $B = \{A_4, A_5, A_3\}$, các bước tính toán theo Thuật toán 3.3 giải bài toán này được trình bày ở Bảng 3.4.

Bảng 3.4

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	1 A_1	-2 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	θ
0	A_4	4	-1	[2]	0	1	0	2
0	A_5	5	1	1	0	0	1	5
0	A_3	7	2	0	1	0	0	∞
	Bảng 1	0	-1	2	0	0	0	
-2	A_2	2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	∞
0	A_5	3	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	2
0	A_3	7	2	0	1	0	0	$\frac{7}{2}$
	Bảng 2	-4	0	0	0	-1	0	

Trong bảng đơn hình cuối cùng của Bảng 3.4 có $\Delta_k \leq 0$ với mọi $k = 1, \cdots, 5$ nên phương án $x^* = (0,\ 2,\ 7,\ 0,\ 3)^T$ tương ứng với bảng này là phương án tối ưu với giá trị tối ưu là $f_{min} = f(x^*) = -4$. Vì có $\Delta_1 = 0$ ứng với chỉ số phi cơ sở $1 \notin J_B = \{2, 5, 3\}$ nên x^* không phải là phương án cực biên tối ưu duy nhất của bài toán này. Muốn tìm phương án cực biên tối ưu khác, ta đưa véc tơ A_1 vào cơ sở mới. Thực hiện biến đổi bảng đơn hình, ta chuyển sang được Bảng 3.5 tương ứng một phương án cực biên tối ưu $\bar{x}^* = (2,\ 3,\ 3,\ 0,\ 0)^T$. Nếu tiếp tục tính toán với việc đưa véc tơ A_5 (tương ứng với $\Delta_5 = 0$ và $5 \notin J_B = \{2, 1, 3\}$) vào cơ sở v.v. , ta lại chuyển được sang bảng đơn hình tương ứng với phương án cực biên tối ưu x^*. Như vậy, tập nghiệm của bài toán này là

$$
\begin{aligned}
F_* &= \{x = \lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{x}^* \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}. \\
&= \{x = \lambda(0,\ 2,\ 7,\ 0,\ 3)^T + (1 - \lambda)(2,\ 3,\ 3,\ 0,\ 0)^T \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \\
&= \{x = (2 - 2\lambda,\ 3 - \lambda,\ 3 + 4\lambda,\ 0,\ 3\lambda)^T \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.
\end{aligned}
$$

Bảng 3.5

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	1 A_1	-2 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	θ
-2	A_2	3	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
1	A_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
0	A_3	3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	
	Bảng 3	-4	0	0	0	-1	0	

Ví dụ 3.13. *(Bài toán không có lời giải)*

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$
\begin{aligned}
\min \quad f(x) = {} & x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
\text{v.đ.k.} \quad & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 16 \\
& -4x_1 + 2x_3 \le 8 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 \le 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Trước hết, cộng lần lượt các biến bù x_4, x_5, x_6 vào ràng buộc chính thứ nhất, thứ hai, thứ ba, ta nhận được bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tương ứng với bài toán này là

$$
\begin{aligned}
\min \quad f(x) = {} & x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
\text{v.đ.k.} \quad & 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 16 \\
& -4x_1 + 2x_3 + x_5 = 8 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 12 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Quá trình thực hiện giải bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc này bằng Thuật toán 3.3 xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 16,\ 8,\ 12)^T$ và cơ sở đơn vị $\{A_4, A_5, A_6\}$ được trình bày ở Bảng 3.6.

Bảng 3.6

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	1 A_1	-4 A_2	-3 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6	θ
0	A_4	16	2	1	-2	1	0	0	16
0	A_5	8	-4	0	2	0	1	0	∞
0	A_6	12	1	[2]	-1	0	0	1	6
	Bảng 1	0	-1	4	3	0	0	0	
0	A_4	10	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	∞
0	A_5	8	-4	0	[2]	0	1	0	4
-4	A_2	6	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	∞
	Bảng 2	-24	-3	0	5	0	0	-2	
0	A_4	16	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	
-3	A_3	4	-2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	
-4	A_2	8	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
	Bảng 3	-44	7	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	- 2	

Bảng đơn hình cuối cùng của Bảng 3.6 tương ứng với phương án cực biên $\bar{x} = (0,\ 8,\ 4,\ 16,\ 0,\ 0)^T$ có $\Delta_1 = 7 > 0$, chỉ số 1 không phải là chỉ số cơ sở và $z_{j1} < 0$ với mọi chỉ số cơ sở nên dừng thuật toán và kết luận bài toán không có phương án tối ưu. Giá trị hàm mục tiêu giảm vô hạn trên tập chấp nhận được.

Dựa vào bảng đơn hình cuối cùng này, theo chứng minh Định lý 3.8, ta có thể xác định được hướng z^1 của cạnh vô hạn xuất phát từ $\bar{x} = (0,\ 8,\ 4,\ 16,\ 0,\ 0)^T$ mà theo đó giá trị hàm mục tiêu giảm mãi. Cụ thể, theo (3.24) ta có, $z^1 = (z_1^1, \cdots, z_6^1)^T$ với

$$z_j^1 = \begin{cases} -z_{j1}, & \forall j \in \{2,3,4\} = J(\bar{x}) \\ 0, & j = 5,6 \\ 1, & j = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad z^1 = \left(1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)^T.$$

Tập các điểm thuộc cạnh vô hạn xuất phát từ $\bar{x}$ theo hướng z^1 là

$$x(\theta) = \bar{x} + \theta z^1 = \left(0,\ 8,\ 4,\ 16,\ 0,\ 0\right)^T + \theta\left(1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)^T, \quad \text{với } \theta \geq 0$$

và giá trị hàm mục tiêu của chúng bằng (theo (3.27))

$$f(x(\theta)) = f(\bar{x}) - \theta\Delta_1 = -44 - 7\theta.$$

Giả sử cần tìm một phương án chấp nhận được $\hat{x}$ của bài toán mà tại đó giá trị hàm mục tiêu $f(\hat{x}) = -100$. Khi đó, giải phương trình

$$-44 - 7\theta = -100 \quad \Rightarrow \quad \theta = 8 \quad \text{và}$$

$$\hat{x} = x(8) = \left(0,\ 8,\ 4,\ 16,\ 0,\ 0\right)^T + 8\left(1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)^T = \left(8,\ 12,\ 20,\ 28,\ 0,\ 0\right)^T.$$

Ví dụ 3.14. *(Bài toán dạng* max*)* Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{array}{lrl} \max & f(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 & \\ \text{v.đ.k.} & x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \leq 12 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0. \end{array}$$

Cộng thêm biến bù x_5 vào ràng buộc chính thứ nhất, bài toán trở thành

$$\begin{array}{lrl} \max & f(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 & \\ \text{v.đ.k.} & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad + x_5 & = 12 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0. \end{array}$$

Bảng 3.7 trình bày quá trình tính toán giải trực tiếp bài toán này theo thuật toán đơn hình với điều kiện tối ưu và các dấu hiệu nhận biết khác như đã trình bày ở Chú ý 3.4(ii)

Bảng đơn hình đầu tiên của Bảng 3.7 tương ứng với phương án cực biên xuất phát $x^0 = (0,\ 0,\ 0, 4,\ 12)^T$ và cơ sở $\{A_5,\ A_4\}$. Cột 3 được chọn là cột quay vì $\Delta_3 = -3 = \min\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\} = \{-1, -3, -1\}$. Sau ba lần biến đổi bảng đơn hình ta được bảng cuối cùng (Bảng 4) có $\Delta_k \geq 0$ với mọi $k = 1, \cdots, 6$. Dừng thuật toán và ta nhận được phương án cực biên $x^* = (12,\ 0,\ 0,\ 16)^T$ và giá trị tối ưu $f_{max} = 12$.

Bảng 3.7

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	1 A_1	3 A_2	1 A_3	0 A_4	0 A_5	θ
0	A_5	12	1	4	3	0	1	3
0	A_4	4	-1	[2]	-1	1	0	2
	Bảng 1	0	-1	-3	-1	0	0	
0	A_5	4	[3]	0	5	-2	1	$\frac{4}{3}$
3	A_2	2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	∞
	Bảng 2	6	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	
1	A_1	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	∞
3	A_2	$\frac{8}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$[\frac{1}{6}]$	$\frac{1}{6}$	16
	Bảng 3	$\frac{28}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	
1	A_1	12	1	4	3	0	1	
0	A_4	16	0	6	2	1	1	
	Bảng 4	12	0	1	2	0	1	

Chú ý 3.5. Giả sử có phương án cực biên xuất phát $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)^T$ tương ứng với cơ sở $\{A_j, j \in J(x^0)\}$ và các véc tơ $\{A_j, j \in J(x^0)\}$ không tạo thành ma trận đơn vị. Khi đó, ta viết ma trận mở rộng $[\ A \mid b\ ]$ và thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng[6] của ma trận mở rộng để biến đổi các véc tơ cơ sở thành các véc tơ đơn vị khác nhau,

$$[\,A \mid b\,] \xrightarrow{\text{các phép biến đổi sơ cấp trên hàng}} [\,\bar{A} \mid \bar{b}\,]$$

và lập bảng đơn hình xuất phát tương ứng với phương án cực biên x^0 và cơ sở đơn vị $B = \{\bar{A}_j, j \in J(x^0)\}$. Chú ý rằng, các thành phần của véc tơ $\bar{b}$ phải trùng với các thành phần cơ sở của phương án cực biên x^0.

Ví dụ 3.15. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$\begin{array}{rl}
\min \; f(x) = & x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_5 + 5x_6 \\
\text{v.đ.k.} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\
& x_2 + 3x_3 + x_5 = 4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\
& x_1, \cdots, x_6 \geq 0.
\end{array}$$

i) Chứng minh rằng $x^0 = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T$ là một phương án cực biên của bài toán;

ii) Xuất phát từ x^0, giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

Giải: i) Vì x^0 thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán nên x^0 là một phương án chấp nhận được. Ta có $J(x^0) = \{1, 2, 3\}$ và các véc tơ A_1, A_2, A_3 độc lập tuyến tính nên x^0 là phương án cực biên (theo Định lý 3.6).

ii) Do các véc tơ cơ sở A_1, A_2, A_3 tương ứng với x^0 không tạo thành ma trận đơn vị nên ta thực hiện phép biến đổi ma trận mở rộng như sau

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{r} \frac{1}{2}h_1 \to h_1 \\ h_2 \to h_2 \\ -h_1 + h_3 \to h_3 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{r} -\frac{1}{2}h_2 + h_1 \to h_1 \\ h_2 \to h_2 \\ \frac{1}{2}h_3 \to h_3 \end{array}$$

[6]Các phép biến đổi sơ cấp về hàng: i) Nhân một hàng của ma trận với một số khác không; ii) Đổi chỗ hai hàng; iii) Cộng bội k của một hàng vào một hàng khác.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} 2h_3 + h_1 \rightarrow h_1 \\ -3h_3 + h_2 \rightarrow h_2 \\ h_3 \rightarrow h_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) = [\bar{A}|\bar{b}].$$

Ta có $B = \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}$ là ma trận đơn vị I_3,

$$\bar{b}_1 = x_1^0 = 1; \quad \bar{b}_2 = x_2^0 = 1; \quad \bar{b}_3 = x_3^0 = 1.$$

Xuất phát từ x^0 với cơ sở $B = \{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3\}$ ta lập bảng đơn hình xuất phát tương ứng với $[\bar{A}|\bar{b}]$. Quá trình tính toán xem ở Bảng 3.8.

Trong bảng đơn hình cuối cùng của Bảng 3.8, có $\Delta_k < 0$ với mọi chỉ số phi cơ sở k. Vậy phương án cực biên $x^* = (\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)^T$ tương ứng với bảng này là phương án tối ưu duy nhất của bài toán với giá trị tối ưu là $f_{min} = f(x^*) = 0$.

Chú ý 3.6. *(Dấu hiệu để nhận biết phương án cực biên suy biến và cách khắc phục)* Khi thực hiện thuật toán đơn hình, việc chọn véc tơ A_r để loại ra khỏi cơ sở cũ căn cứ vào việc tính

$$\theta_0 = \min\left\{\frac{x_j}{z_{js}} \,\middle|\, z_{js} > 0\right\} = \frac{x_r}{z_{rs}}.$$

Phương án cực biên tiếp theo sẽ là phương án suy biến nếu xuất hiện $\theta_0 = 0$ hoặc θ_0 đạt tại nhiều chỉ số.

⋄ Trường hợp $\theta_0 = 0$ ta thực hiện thuật toán bình thường, tức véc tơ A_r ứng với θ_0 vẫn bị loại khỏi cơ sở. Trong trường hợp này, phương án cực biên và giá trị hàm mục tiêu không đổi, chỉ có cơ sở của nó thay đổi (vì giá trị hàm mục tiêu giảm một lượng $\theta_0\Delta_s$ mà $\theta_0 = 0$). Vì thế sau một số phép biến đổi đơn hình ta có thể gặp lại cơ sở cũ. Đó là *hiện tượng xoay vòng* (xem Mục 3.7).

⋄ Trường hợp θ_0 đạt tại cùng nhiều chỉ số, ta loại khỏi cơ sở cũ một véc tơ trong các véc tơ ứng với θ_0 theo quy tắc ngẫu nhiên.

Bảng 3.8

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	$\overset{1}{A_1}$	$\overset{2}{A_2}$	$\overset{-1}{A_3}$	$\overset{0}{A_4}$	$\overset{3}{A_5}$	$\overset{5}{A_6}$	θ
1	A_1	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	∞
2	A_2	1	0	1	0	$\left[\frac{3}{2}\right]$	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
-1	A_3	1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	∞
	Bảng 1	2	0	0	0	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$	
1	A_1	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	
0	A_4	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	-1	
-1	A_3	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	
	Bảng 2	0	0	-2	0	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	

3.5 Tìm phương án cực biên xuất phát và cơ sở xuất phát

3.5.1 Trường hợp bài toán có dạng chuẩn tắc

Trong nhiều trường hợp, bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc có tập chấp nhận được là nghiệm của hệ

$$Ax \leq b,\ x \geq 0,$$

trong đó $b \geq 0, b \in \mathbb{R}^m$ và A là ma trận cấp $m \times n$. Khi đó, bằng việc thêm biến phụ $u \geq 0$ ta đưa bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn tắc đang xét về dạng chính tắc, tức tập ràng buộc có dạng

$$Ax + u = b,\ x, u \geq 0,$$

và nhận được phương án cực biên $(0, b)$ của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc này tương ứng với cơ sở đơn vị (Xem Ví dụ 3.13).

3.5.2 Trường hợp bài toán có dạng chính tắc

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\min \{\langle c, x\rangle \mid x \in D\}, \qquad (LP^{ct})$$

trong đó tập lồi đa diện $D \subset \mathbb{R}^n$ xác định bởi $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, với A là ma trận cấp $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ và $b \geq 0$.

a. Trường hợp đặc biệt

Nếu mỗi ràng buộc chính đều có một biến số với hệ số bằng 1 đồng thời biến số này không có mặt trong các phương trình khác (gọi là biến số cô lập với hệ số bằng 1) thì ta có ngay một phương án cực biên với cơ sở đơn vị. Chẳng hạn, tập chấp nhận được của quy hoạch tuyến tính đang xét là tập nghiệm của hệ

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & + a_{1\,m+1}x_{m+1} & + a_{1\,m+2}x_{m+2} & + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & x_2 & + a_{2\,m+1}x_{m+1} & + a_{2\,m+2}x_{m+2} & + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ & x_m & + a_{m\,m+1}x_{m+1} & + a_{m\,m+2}x_{m+2} & + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \\ & & & & x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0, & \end{array}$$

trong đó $b_i \geq 0$ với mọi $i = 1, \cdots, m$. Trong trường hợp may mắn này, ta có ngay một phương án cực biên với cơ sở đơn vị, cụ thể $x^0 = (b_1, \cdots, b_m, 0, 0, \cdots, 0)^T$ ứng với cơ sở $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\} = I_m$ (Xem Ví dụ 3.11, 3.12).

b. Trường hợp tổng quát

Đưa thêm $u = (u_1, \cdots, u_m)^T \geq 0$ và xét tập lồi đa diện

$$D' = \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + u = b,\ (x, u) \geq 0\}.$$

Mệnh đề 3.1. *Điểm x^0 là phương án cực biên của D khi và chỉ khi $(x^0, 0)$ là phương án cực biên của D'.*

Chứng minh. Bài tập. □

Để tìm một phương án cực biên của D, ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính phụ

$$\begin{array}{ll} \min & g(x,u) = u_1 + u_2 + \cdots + u_m \\ \text{v.đ.k.} & x \in D'. \end{array} \qquad (LP_*^{ct})$$

Các biến $u_1, \cdots, u_m$ được gọi là các *biến giả*, các véc tơ cột của ma trận ràng buộc tương ứng với các biến giả được gọi là các *véc tơ giả*.

Nhận xét 3.5. i) Bài toán quy hoạch tuyến tính (LP_*^{ct}) luôn có phương án cực biên tối ưu vì hàm mục tiêu $g(x, u) = u_1 + \cdots + u_m$ bị chặn dưới trên D', cụ thể $g(x, u) \geq 0$ với mọi $(x, u) \in D'$, và $D' \subset \mathbb{R}^{n+m}$;

ii) Ta có một phương án cực biên xuất phát của bài toán này là $(0, b)$ tương ứng với cơ sở đơn vị $\{e^1, \cdots, e^m\}$. Vì vậy có thể áp dụng ngay thuật toán đơn hình (Thuật toán 3.3) để giải bài toán (LP_*^{ct}).

Định lý 3.9. *Giả sử (x^0, u^0) là phương án cực biên tối ưu của bài toán phụ (LP_*^{ct}). Khi đó:*

i) *Nếu $g(x^0, u^0) > 0$ thì $D = \emptyset$;*

ii) *Nếu $g(x^0, u^0) = 0$ thì x^0 là một phương án cực biên của bài toán ban đầu (LP^{ct}).*

Chứng minh. i) Giả sử phản chứng rằng giá trị tối ưu của bài toán phụ là $g(x^0, u^0) > 0$ nhưng $D \neq \emptyset$, tức tồn tại phương án chấp nhận được $x' \in D$. Theo định nghĩa, $(x', 0) \in D'$. Giá trị hàm mục tiêu của bài toán phụ (LP_*^{ct}) tại $(x', 0)$ là $g(x', 0) = 0$ nhỏ hơn giá trị tối ưu. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ $D = \emptyset$.

ii) Do $u^0 \geq 0$ nên $g(x^0, u^0) = 0$ khi và chỉ khi $u^0 = 0$. Vậy trong trường hợp này, phương án cực biên tối ưu của bài toán phụ có dạng $(x^0, 0)$. Theo Mệnh đề 3.1, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Trong trường hợp tổng quát, ta phải giải bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (LP^{ct}) bằng thuật toán đơn hình hai pha.

Thuật toán đơn hình hai pha

Pha 1. (*Tìm phương án cực biên xuất phát cho thuật toán đơn hình giải (LP^{ct})*)
Giải bài toán quy hoạch tuyến tính phụ (LP_*^{ct})

$$\min \{g(x, u) \mid Ax + u = b, \ (x, u) \geq 0\},$$

nhận được phương án cực biên tối ưu (x^0, u^0).

If $g(x^0, u^0) > 0$ **Then** $D = \emptyset$, Dừng thuật toán
Else (x^0 *là phương án cực biên của bài toán* (LP^{ct})). Chuyển sang Pha 2;

Pha 2. Giải bài toán (LP^{ct}) đang xét bằng phương pháp đơn hình xuất phát từ phương án cực biên x^0 với chú ý rằng bảng đơn hình đầu tiên của Pha 2 là bảng đơn hình cuối cùng ở Pha 1 nhưng với một số sửa đổi như sau:

- ◇ Xóa tất cả các cột tương ứng với các biến giả;
- ◇ Thay cột C_B bởi hệ số mục tiêu cơ sở tương ứng của bài toán gốc;
- ◇ Thay các hệ số mục tiêu của bài toán phụ ở dòng 1 bằng hệ số mục tiêu của bài toán gốc;
- ◇ Nếu trong cơ sở tương ứng với phương án tối ưu của bài toán phụ (LP_*^{ct}) không có véc tơ giả thì cơ sở ứng với phương án này cũng chính là cơ sở tương ứng với x^0. Để có bảng đơn hình xuất phát cho bài toán ban đầu, ta chỉ cần tính lại giá trị hàm mục tiêu tại x^0 và tính lại các ước lượng theo công thức

$$f(x^0) = \sum_{j \in J(x^0)} c_j x_j^0 \quad \text{và} \quad \Delta_k = \sum_{j \in J(x^0)} z_{jk} c_j - c_k$$

(xem Ví dụ 3.17);

- Nếu trong cơ sở của phương án cực biên tối ưu của bài toán phụ (LP_*^{ct}) có ít nhất một véc tơ giả thì ta nhận được một phương án cực biên suy biến của bài toán ban đầu, tức $J(x^0) = \left\{ j \in \{1, \cdots, n\} |\ x_j^0 > 0 \right\} < m$. Khi đó, để đẩy hết biến giả ra khỏi cơ sở ta thực hiện thêm một vài bước lặp đơn hình nữa như sau: Chọn cột quay là cột ứng với véc tơ phi cơ sở A_k với $k \le n$ (tức A_k không phải véc tơ giả) mà nó có phần tử khác 0 ở dòng tương ứng với véc tơ giả và dòng này được chọn là dòng quay. Chú ý, phần tử chính lúc này có thể dương hoặc âm (khác 0). Do giả thiết rank$A = m$ nên nếu có biến giả trong cơ sở thì chắc chắn sẽ tìm được cột quay như thế. Sau khi bổ sung véc tơ để nhận được cơ sở $B = \{A_j,\ j \in J\}$ với $J \supset J(x^0)$, ta bỏ các cột tương ứng với biến giả rồi tiếp tục thuật toán (xem Ví dụ 3.18).

Chú ý 3.7. i) Khi xây dựng bài toán phụ, ta chỉ cộng thêm biến giả vào những phương trình cần thiết để tạo ra ma trận m cột là các véc tơ đơn vị khác nhau;

ii) Khi một véc tơ giả bị loại ra khỏi cơ sở thì cột tương ứng với nó không cần tính ở các bước tiếp theo;

ii) Để tiện trong việc tính toán, đặt tên biến giả thứ i là x_{n+i}^g thay vì u_i, và véc tơ tương ứng với biến giả này gọi là *véc tơ giả* A_i^g.

Ví dụ 3.16. Giải bài toán sau bằng thuật toán đơn hình hai pha

$$\begin{aligned} \min\quad & f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{v.đ.k.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Giải. Quá trình tính toán như sau:
Pha I. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính phụ

$$\begin{aligned} \min\quad & f^p(x) = x_4^g + x_5^g \\ \text{v.đ.k.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4^g = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5^g = 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4^g,\ x_5^g \ge 0. \end{aligned}$$

Dễ thấy $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 6)^T$ là một phương án cực biên của bài toán phụ tương ứng với cơ sở đơn vị $\{A_4^g, A_5^g\} = \{e^1, e^2\}$. Xuất phát từ x^0, kết quả tính toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính phụ theo thuật toán đơn hình được ghi ở Bảng 3.9.

Bài toán phụ có giá trị tối ưu là $f_{min}^p = 3 > 0$. Vì vậy, theo Định lý 3.9, bài toán quy hoạch tuyến tính ban đầu có tập chấp nhận được bằng rỗng.

Bảng 3.9

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	0 A_1	0 A_2	0 A_3	1 A_4^g	1 A_5^g	θ
1	A_4^g	1	1	1	[1]	1	0	1
1	A_5^g	6	1	2	3	0	1	2
	Bảng 1	7	2	3	4	0	0	
0	A_3	1	1	1	1	1	0	
1	A_5^g	3	-2	-1	0	-3	1	
	Bảng 2	3	-2	-1	0	-4	0	

Ví dụ 3.17. Giải bài toán sau bằng thuật toán đơn hình hai pha.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{v.đ.k.} \quad & 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Giải. Trước hết, ta đưa bài toán này về dạng chính tắc sau

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{v.đ.k.} \quad & 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 19 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Pha I. Để ý rằng, ràng buộc chính thứ hai của bài toán dạng chính tắc có biến x_4 với hệ số bằng 1 và biến x_4 không xuất hiện trong hai ràng buộc chính còn lại nên ta chỉ cần thêm hai biến giả x_5^g và x_6^g trong bài toán phụ. Sau đây là bài toán phụ tương ứng với bài toán đang xét

$$\begin{aligned} \min \quad & f^p(x) = x_5^g + x_6^g \\ \text{v.đ.k.} \quad & 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_5^g = 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 19 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_6^g = 14 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^g, x_6^g \geq 0. \end{aligned}$$

Bảng 3.10

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	0 A_1	0 A_2	0 A_3	0 A_4	1 A_5^g	1 A_6^g	θ
1	A_5^g	2	[2]	-4	-1	0	1	0	1
0	A_4	19	4	3	0	1	0	0	$\frac{19}{4}$
1	A_6^g	14	3	2	0	0	0	1	$\frac{14}{3}$
	Bảng 1	16	5	-2	-1	0	0	0	
0	A_1	1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0		0	∞
0	A_4	15	0	[11]	2	1		0	$\frac{15}{11}$
1	A_6^g	11	0	8	$\frac{3}{2}$	0		1	$\frac{11}{8}$
	Bảng 2	11	0	8	$\frac{3}{2}$	0		0	
0	A_1	$\frac{41}{11}$	1	0	$-\frac{3}{22}$	$\frac{2}{11}$		0	∞
0	A_2	$\frac{15}{11}$	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$		0	$\frac{15}{2}$
1	A_6^g	$\frac{1}{11}$	0	0	$[\frac{1}{22}]$	$-\frac{8}{11}$		1	2
	Bảng 3	$\frac{1}{11}$	0	0	$\frac{1}{22}$	$-\frac{8}{11}$		0	
0	A_1	4	1	0	0	-2			
0	A_2	1	0	1	0	3			
0	A_3	2	0	0	1	-16			
	Bảng 4	0	0	0	0	0			

Xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 19,\ 2,\ 14)^T$ tương ứng với cơ sở $\{A_5^g, A_4, A_6^g\}$, quá trình tính toán giải bài toán phụ theo Pha I được ghi ở Bảng 3.10.

Bài toán phụ có giá trị tối ưu $f_{min}^p = 0$. Không có các biến giả trong cơ sở của phương án cực biên tối ưu $x^0 = (4,\ 1,\ 2,\ 0)^T$. Ta chuyển sang Pha II.

Pha II. Xuất phát từ phương án cực biên không suy biến x^0 tương ứng với cơ sở đơn vị $\{A_1, A_2, A_3\}$, quá trình tính được trình bày ở Bảng 3.11.

Chú ý rằng bảng xuất phát ở Pha II (Bảng đơn hình đầu tiên của Bảng 3.11) chỉ khác bảng cuối cùng của Pha I (Bảng đơn hình cuối cùng của Bảng 3.10) ở cột hệ số hàm mục tiêu, dòng 1 (được thay bằng hệ số hàm mục tiêu của bài toán ban đầu) và dòng ước lượng (dòng cuối cùng).

Bảng đơn hình cuối cùng của Bảng 3.11 tương ứng với phương án cực biên tối ưu duy nhất $x^* = (\frac{14}{3},\ 0,\ \frac{22}{3},\ \frac{1}{3})^T$ của bài toán ban đầu vì ước lượng tương ứng với biến phi cơ sở duy nhất $\Delta_2 = -\frac{5}{3} < 0$.

Bảng 3.11

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	2 A_1	3 A_2	0 A_3	0 A_4	θ
2	A_1	4	1	0	0	-2	∞
3	A_2	1	0	1	0	[3]	$\frac{1}{3}$
0	A_3	2	0	0	1	-16	∞
	Bảng 1	11	0	0	0	5	
2	A_1	$\frac{14}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	
0	A_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	
0	A_3	$\frac{22}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	1	0	
	Bảng 2	$\frac{28}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	

Ví dụ 3.18. *(Bảng cuối của Pha I còn véc tơ giả trong cơ sở)* Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng thuật toán đơn hình hai pha

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = 2x_1 + 4x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 3x_4 \\ \text{v.đ.k.}\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 50 \\ & 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 80 \\ & 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Giải.

Pha I. Bài toán phụ tương ứng với bài toán này là

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = x_6^g + x_7^g \\ \text{v.đ.k.}\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 50 \\ & 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6^g = 80 \\ & 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7^g = 40 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Giải bài toán phụ xuất phát từ phương án cực biên $(0,\ 0,\ 0,\ 0, 50,\ 80,\ 40)^T$. Quá trình tính toán được trình bày ở Bảng 3.12.

Sau một bước biến đổi đơn hình ta nhận được phương án tối ưu

$$(0,\ 10,\ 0,\ 0, 30,\ 0,\ 0)^T$$

nhưng trong cơ sở của phương án này còn véc tơ giả A_6^g (bảng thứ hai). Để loại véc tơ giả A_6^g ra khỏi cơ sở, ta đưa véc tơ phi cơ sở A_1 vào cơ sở (vì $z_{61} = -4 \neq 0$) và thực hiện một bước biến đổi đơn hình chuyển sang bảng cuối cùng của Bảng 3.12. Bảng cuối cùng này không còn véc tơ giả trong cơ sở của phương án cực biên tương ứng vì vậy ta chuyển sang Pha II.

Pha II. Trong bảng cuối cùng của Pha I, ta loại bỏ cột ứng với véc tơ giả A_6^g. Thay cột hệ số C_B, thay dòng đầu tiên bởi các hệ số mục tiêu của bài toán gốc, tính lại các ước lượng, ta nhận được bảng xuất phát của Pha II. Sau hai bước biến đổi đơn hình ta nhận được phương án cực biên suy biến tối ưu $x^* = (0,\ 7,\ 12,\ 0,\ 0)^T$ và giá trị tối ưu $f_{min} = 34$ (xem bảng cuối cùng của Bảng 3.13)

Ta để ý rằng, bảng đơn hình thứ nhất của Bảng 3.13 tương ứng với phương án cực biên suy biến $(0,\ 10,\ 0,\ 0, 30)^T$ có cơ sở là $\{A_5, A_1, A_2\}$ và giá trị hàm mục tiêu tại đây bằng 40. Ta chọn véc tơ A_1 đưa ra cơ sở tương ứng với $\theta_1 = \min\{15, 0, 40\} = 0$ nên bảng đơn hình thứ hai vẫn tương ứng với phương án này nhưng với cơ sở thứ hai của nó là $\{A_5, A_4, A_2\}$, còn giá trị hàm mục tiêu hiển nhiên là không đổi.

Bảng 3.12

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	0 A_1	0 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	1 A_6^g	1 A_7^g	θ
0	A_5	50	2	2	3	3	1	0	0	25
1	A_6^g	80	4	8	2	3	0	1	0	10
1	A_7^g	40	4	[4]	1	2	0	0	1	10
	Bảng 1	120	8	12	3	5	0	0	0	
0	A_5	30	0	0	$\frac{5}{2}$	2	1	0		
1	A_6^g	0	[−4]	0	0	- 1	0	1		
0	A_2	10	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0		
	Bảng 2	0	- 4	0	0	-1	0	0		
0	A_5	30	0	0	$\frac{5}{2}$	2	1			
0	A_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0			
0	A_2	10	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0			
	Bảng 3	0	0	0	0	0	0			

Bảng 3.13

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	2 A_1	4 A_2	1/2 A_3	- 3 A_4	0 A_5	θ
0	A_5	30	0	0	$\frac{5}{2}$	2	1	15
2	A_1	0	1	0	0	$[\frac{1}{4}]$	0	0
4	A_2	10	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	40
	Bảng 1	40	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	
0	A_5	30	-8	0	$[\frac{5}{2}]$	0	1	12
- 3	A_4	0	4	0	0	1	0	∞
4	A_2	10	-1	1	$\frac{1}{4}$	0	0	40
	Bảng 2	40	-18	0	$\frac{1}{2}$	0	0	
1/2	A_3	12	$-\frac{16}{5}$	0	1	0	$\frac{2}{5}$	
-3	A_4	0	4	0	0	1	0	
4	A_2	7	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	
	Bảng 3	34	$-\frac{82}{5}$	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	

3.5.3 Phương pháp đánh thuế hay phương pháp bài toán (M)

Trong thuật toán đơn hình hai pha ta phải thực hiện thuật toán đơn hình hai lần: một lần để giải bài toán quy hoạch tuyến tính phụ (LP_*^{ct}) và một lần để giải bài toán quy hoạch tuyến tính gốc (nếu tập nghiệm chấp nhận được của nó khác rỗng). Phương pháp đánh thuế cho phép kết hợp cả hai pha này lại.

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\min\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad (LP^{ct})$$

với ma trận A cấp $m \times n$, véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$ và $b \geq 0$.

Để giải bài toán (LP^{ct}) ta xét bài toán mở rộng sau đây (thường gọi là *bài toán (M)*)

$$\begin{array}{lll} \min & F(x,u) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + M(u_1 + \cdots + u_m) & (M) \\ \text{v.đ.k.} & Ax + u = b & \\ & (x,u) \geq 0, & \end{array}$$

trong đó M là một hằng số dương đủ lớn (lớn hơn bất cứ số cụ thể nào mà ta cần so sánh với nó). Về trực quan có thể thấy rằng cách làm này giống như "đánh thuế" rất nặng vào các biến giả $u_1, \cdots, u_m$ khiến cho nếu bài toán chính (LP^{ct}) có phương án chấp nhận được thì phương án tối ưu (x^*, u^*) của bài toán (M) phải có $u^* = 0$ và x^* là phương án tối ưu của bài toán chính.

Bài toán (M) có m ràng buộc chính và $n+m$ biến. Dễ thấy $(0,b)$ là một phương án cực biên của bài toán này với cơ sở tương ứng là cơ sở đơn vị. Do đó ta có thể xây dựng được ngay bảng đơn hình xuất phát và giải bài toán này bằng Thuật toán 3.3. Tuy nhiên, để ý rằng, do hàm mục tiêu F phụ thuộc tuyến tính vào M nên các ước lượng Δ_k của các biến x_k cũng phụ thuộc tuyến tính vào M. Do đó, ta có thể viết

$$F = \alpha_0 + \beta_0 M \quad \text{và} \quad \Delta_k = \alpha_k + \beta_k M, \ k = 1, \cdots, n+m.$$

Khi giải bài toán (M) theo Thuật toán 3.3, ta không cần xác định giá trị cụ thể của số M mà chỉ cần tách dòng ước lượng (dòng cuối cùng của mỗi bảng đơn hình) thành hai dòng: dòng đầu ghi các hệ số α_k, dòng sau ghi các hệ số β_k, $k = 0, 1, \cdots, n+m$. Vì M là hằng số dương đủ lớn nên:

◇ Với mỗi $k \in \{1, \cdots, n\}$ ta có:

$$\Delta_k > 0 \text{ nếu } \beta_k > 0 \text{ và } \alpha_k \text{ bất kỳ } \ (\textit{hoặc } \beta_k = 0 \textit{ và } \alpha_k > 0);$$

◇ Với cặp $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$, ta có:

$$\Delta_i > \Delta_j \text{ nếu } \beta_i > \beta_j \text{ và } \alpha_i, \alpha_j \text{ bất kỳ } \ (\textit{hoặc } \beta_i = \beta_j \textit{ và } \alpha_i > \alpha_j).$$

Khi thuật toán kết thúc:

i) Nếu bài toán (M) có phương án tối ưu là (x^*, u^*) với $u^* \neq 0$ thì bài toán gốc (LP^{ct}) không có phương án chấp nhận được;

ii) Nếu bài toán (LP^M) có phương án tối ưu là $(x^*, 0)$ thì x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc (LP^{ct});

iii) Nếu bài toán (LP^M) không có phương án tối ưu thì bài toán gốc (LP^{ct}) cũng không có phương án tối ưu (giá trị hàm mục tiêu giảm vô hạn).

Ví dụ 3.19. Xét lại bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc như ở Ví dụ 3.17

$$\begin{array}{lllll} \min & f(x) = 2x_1 + 3x_2 & & & \\ \text{v.đ.k.} & 2x_1 - 4x_2 - x_3 & & = 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 & + x_4 & = 19 \\ & 3x_1 + 2x_2 & & = 14 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & & \end{array}$$

Cũng lập luận tương tự như khi giải Ví dụ 3.17, ta chỉ cần thêm hai biến giả x_5^g và x_6^g trong bài toán phụ. Sau đây là bài toán (M) tương ứng

$$\begin{array}{rl} \min\ f^p(x) = & 2x_1 + 3x_2 \qquad + (x_5^g + x_6^g)M \\ \text{v.đ.k.} & 2x_1 - 4x_2 - x_3 \quad + x_5^g \qquad = 2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \qquad = 19 \\ & 3x_1 + 2x_2 \qquad + x_6^g \quad = 14 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5^g,\ x_6^g \geq 0. \end{array}$$

Quá trình tính toán giải bài toán này theo Thuật toán 3.3, xuất phát từ phương án cực biên ban đầu $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 19,\ 2,\ 14)^T$ tương ứng với cơ sở đơn vị $\{A_5^g, A_4, A_6^g\}$ được trình bày ở Bảng 3.14. Như sẽ thấy, bảng đơn hình cuối cùng của Bảng 3.14 cho ta phương án cực biên tối ưu $(\frac{14}{3},\ 0,\ \frac{22}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0)^T$. Như vậy, phương án cực biên tối ưu của bài toán ban đầu là $x^* = (\frac{14}{3},\ 0,\ \frac{22}{3},\ \frac{1}{3})^T$. Ta có kết quả trùng hợp với kết quả nhận được khi giải bài toán này bằng thuật toán đơn hình hai pha ở Ví dụ 3.17.

Bảng 3.14

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	2 A_1	3 A_2	0 A_3	0 A_4	M A_5	M A_6	θ
M	A_5^g	2	[2]	-4	-1	0	1	0	1
0	A_4	19	4	3	0	1	0	0	$\frac{19}{4}$
M	A_6^g	14	3	2	0	0	0	1	$\frac{14}{3}$
	α	0	-2	-3	0	0	0	0	
Bảng 1	β	16	5	-2	-1	0	0	0	
2	A_1	1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	∞
0	A_4	15	0	[11]	2	1	-2	0	$\frac{15}{11}$
M	A_6^g	11	0	8	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{11}{8}$
	α	2	0	-7	-1	0	1	0	
Bảng 2	β	11	0	8	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	

Bảng 3.14 (*tiếp theo*)

Hệ số C_B	Cơ sở B	Phương án	2 A_1	3 A_2	0 A_3	0 A_4	M A_5	M A_6	θ
2	A_1	$\frac{41}{11}$	1	0	$-\frac{3}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{22}$	0	∞
3	A_2	$\frac{15}{11}$	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	$\frac{15}{2}$
M	A_6^g	$\frac{1}{11}$	0	0	$[\frac{1}{22}]$	$-\frac{8}{11}$	$-\frac{1}{22}$	1	2
	α	$\frac{127}{11}$	0	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	0	
Bảng 3	β	$\frac{1}{11}$	0	0	$\frac{1}{22}$	$-\frac{8}{11}$	$-\frac{23}{22}$	0	
2	A_1	4	1	0	0	- 2	0	3	∞
3	A_2	1	0	1	0	[3]	0	- 4	$\frac{1}{3}$
0	A_3	2	0	0	1	- 16	- 1	22	∞
	α	11	0	0	0	5	0	-6	
Bảng 4	β	0	0	0	0	0	- 1	-1	
2	A_1	$\frac{14}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	
0	A_4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	
0	A_3	$\frac{22}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	1	0	- 1	$\frac{2}{3}$	
	α	$\frac{28}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	
Bảng 5	β	0	0	0	0	0	- 1	-1	

3.6 Tính hữu hạn của thuật toán đơn hình

Định nghĩa. Thuật toán giải một bài toán tối ưu được gọi là *hữu hạn* nếu như nó cho phép tìm được phương án tối ưu của bài toán sau một số hữu hạn phép tính.

Định lý 3.10. *Giả sử một bài toán quy hoạch tuyến tính không thoái hóa và có phương án tối ưu. Khi đó, với mọi phương án cực biên xuất phát, thuật toán đơn hình là hữu hạn.*

Chứng minh. Giả sử bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (LP^{ct}) có phương án cực biên x^0 tương ứng với cơ sở B_0. Xuất phát từ x^0, quá trình thực hiện thuật toán đơn hình để giải bài toán này sẽ sinh ra một dãy các phương án cực biên x^k và dãy cơ sở tương ứng B_k, $k = 1, 2, \cdots$. Do bài toán không suy biến nên tất cả các phương án cực biên đều không suy biến và khi chuyển từ x^k sang x^{k+1} thì giá trị hàm mục tiêu giảm thực sự (xem công thức (3.27)). Ta có

$$f(x^k) \overset{(3.12')}{=} C_{B_k} X_{B_k} \overset{(3.11')}{=} C_{B_k} B_k^{-1} b.$$

Do đó trong quá trình thực hiện thuật toán không có một ma trận cơ sở nào bị lặp lại. Mặt khác, số cơ sở của ma trận A không vượt quá C_n^m nên sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ nhận được một phương án cực biên thỏa mãn điều kiện dừng của thuật toán. □

Nhận xét 3.6. Trong trường hợp một bài toán thoái hóa thì tính hữu hạn của thuật toán đơn hình không đảm bảo nữa. Người ta gọi đó là *hiện tượng xoay vòng.*

3.7 Hiện tượng xoay vòng

Hiện tượng xoay vòng là hiện tượng sau một số phép biến đổi đơn hình ta lại quay lại phương án cực biên suy biến trước đó với cơ sở tương ứng đã gặp. Trong trường hợp này, thuật toán đơn hình không thể kết thúc. Ví dụ đầu tiên về hiện tượng xoay vòng do Hoffman [12] đưa ra năm 1953. Năm 1969, Marshall- Suurballe [29] chứng minh rằng một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc xoay vòng thì phải có ít nhất sáu biến và ba ràng buộc. Sau đây là ví dụ bài toán quy hoạch tuyến tính xoay vòng do GS. Trần Vũ Thiệu [38] (Viện Toán học Hà Nội) đưa ra năm 1964

$$\begin{aligned}
\min\ f(x) = 4x_1 & \qquad - 6x_5 - 5x_6 + 64x_7 \\
\text{v.đ.k.} \quad x_1 & \qquad + \frac{1}{3}x_4 - 2x_5 - x_6 + 12x_7 = 0 \\
x_2 + & \qquad + \frac{1}{2}x_4 - x_5 - \frac{1}{6}x_6 + \frac{2}{3}x_7 = 0 \\
x_3 & \qquad + x_5 + x_6 - 9x_7 = 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geq 0.
\end{aligned}$$

Giải bài toán này theo thuật toán đơn hình xuất phát từ phương án cực biên suy biến $(0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0, 0)^T$ với quy tắc: tại một bảng đơn hình nào đó, nếu có nhiều véc tơ cùng đạt tiêu chuẩn ra khỏi cơ sở đang xét thì ta chọn để đưa ra khỏi cơ sở véc tơ có chỉ số nhỏ nhất. Kết quả là bảng đơn hình ở bước lặp thứ bảy trùng với bảng đơn hình ở bước đầu tiên. Như vậy, nếu cứ tiếp tục tính ta sẽ lâm vào tình trạng xoay vòng.

Sau hơn nửa thế kỷ áp dụng phương pháp đơn hình giải quy hoạch tuyến tính, người ta thấy rằng hiện tượng xoay vòng rất ít xảy ra đến mức các chương trình phần mềm giải quy hoạch tuyến tính đều không chú ý đến phòng ngừa xoay vòng. Tuy nhiên, về mặt lý thuyết, người ta vẫn phải đưa ra các biện pháp để tránh hiện tượng xoay vòng như: quy tắc R.G. Bland, phương pháp từ điển, phương pháp nhiễu loạn. Bạn đọc quan tâm đến các phương pháp này có thể tham khảo trong [2], [8], [19], [33], [39] hoặc [41].

3.8 Đối ngẫu

Đối ngẫu là một phương pháp xây dựng cho bài toán quy hoạch tuyến tính đang xét (gọi là *bài toán gốc*) một bài toán quy hoạch tuyến tính "đối" với nó (gọi là *bài toán đối ngẫu*) sao cho từ nghiệm tối ưu của bài toán này ta sẽ thu được các thông tin về nghiệm tối ưu của bài toán kia.

3.8.1 Cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu

Cho A là ma trận cấp $m \times n$ và véc tơ $b = (b_1, \cdots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Ký hiệu

a^i, $i = 1, \cdots, m$ là các hàng của ma trận A;

A_j, $j = 1, \cdots, n$ là các cột của ma trận A.

- *Đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát*

Giả sử bài toán quy hoạch tuyến tính có cấu trúc ở bên trái Bảng 3.15. Khi đó, bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu của nó tương ứng ở bên phải Bảng 3.15.

Nhận xét 3.7. Số ràng buộc chính của bài toán quy hoạch tuyến tính gốc (P) bằng số biến của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu (D); Số biến của bài toán (P) bằng số ràng buộc chính của bài toán (D). Ta gọi các biến của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu là các *biến đối ngẫu*. Các biến đối ngẫu tương ứng 1-1 với các ràng buộc chính của bài toán gốc (P). Các ràng buộc chính của bài toán đối ngẫu (D) tương ứng 1-1 với các biến của bài toán gốc (P). Tính chất này được sử dụng rất nhiều khi nghiên cứu các bài toán quy hoạch tuyến tính thông qua các bài toán đối ngẫu của chúng.

Bảng 3.15

Gốc (P)	min $\langle c, x\rangle$	max $\langle b, y\rangle$	Đối ngẫu (D)
Ràng buộc	$\langle a^i, x\rangle = b_i,\quad i \in M_1$ $\langle a^i, x\rangle \le b_i,\quad i \in M_2$ $\langle a^i, x\rangle \ge b_i,\quad i \in M_3$	y_i tự do, $i \in M_1$ $y_i \le 0,\quad i \in M_2$ $y_i \ge 0,\quad i \in M_3$	Biến
Biến	$x_j \ge 0,\quad j \in N_1$ $x_j \le 0,\quad j \in N_2$ x_j tự do $\quad j \in N_3$	$\langle A_j, y\rangle \le c_j,\quad j \in N_1$ $\langle A_j, y\rangle \ge c_j,\quad j \in N_2$ $\langle A_j, y\rangle = c_j,\quad j \in N_3$	Ràng buộc

$$(|M_1| + |M_2| + |M_3| = m, \qquad |N_1| + |N_2| + |N_3| = n)$$

Để thuận tiện, ta quy ước rằng bài toán gốc luôn được viết bên trái và bài toán đối ngẫu được viết ở bên phải.

- *Đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính chuẩn tắc*

$$\begin{array}{ll} \min z = \langle c, x\rangle & \qquad\qquad \max w = \langle b, y\rangle \\ \text{v.đ.k.}\;\; Ax \ge b & \qquad\qquad \text{v.đ.k.}\;\; A^T y \le c \\ \qquad\quad x \ge 0 & \qquad\qquad \qquad\quad y \ge 0. \end{array}$$

- *Đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc*

$$\begin{array}{ll} \min z = \langle c, x\rangle & \qquad\qquad \max w = \langle b, y\rangle \\ \text{v.đ.k.}\;\; Ax = b & \qquad\qquad \text{v.đ.k.}\;\; A^T y \le c \\ \qquad\quad x \ge 0 & \qquad\qquad \qquad\quad y \text{ tự do.} \end{array}$$

Mệnh đề 3.2. *Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu là bài toán gốc.*

Chứng minh. Không giảm tổng quát, ta xét bài toán gốc (P) là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc. Ta có cặp bài toán đối ngẫu sau

$$\begin{array}{ll} \min z = \langle c, x\rangle \quad (P) & \qquad\qquad \max w = \langle b, y\rangle \quad (D) \\ \text{v.đ.k.}\;\; Ax \ge b & \qquad\qquad \text{v.đ.k.}\;\; A^T y \le c \\ \qquad\quad x \ge 0 & \qquad\qquad \qquad\quad y \ge 0. \end{array}$$

Bài toán (D) tương đương với bài toán

$$\begin{aligned} &\min w' = -\langle b, y\rangle && (D')\\ &\text{v.đ.k.} \quad -A^T y \geq -c \\ &\qquad\qquad y \geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán đối ngẫu của (D') là

$$\begin{array}{lll} \max z' = -\langle c, x\rangle \quad (P') & & \min z = \langle c, x\rangle \quad (P)\\ \text{v.đ.k.} \ -Ax \leq -b & \Leftrightarrow & \text{v.đ.k.} \quad Ax \geq b \\ \qquad x \geq 0 & & \qquad x \geq 0. \end{array}$$

Mệnh đề đã được chứng minh. □

Ví dụ 3.20. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min \quad f(x) = -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 & \\ \text{v.đ.k.} \quad 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 &\geq 23 \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0, \ x_4 \text{ tự do.} & \end{aligned}$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán này là

$$\begin{aligned} \max \quad g(y) = \ 11y_1 + 23y_2 + 12y_3 & \\ \text{v.đ.k.} \quad 4y_1 + 3y_2 + 7y_3 &\leq -6 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 &\leq 3 \\ -8y_1 + 7y_2 + 3y_3 &\geq 2 \\ 7y_1 + 6y_2 + 2y_3 &= -5 \\ y_1 \text{ tự do}, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \leq 0. & \end{aligned}$$

Viết lại bài toán đối ngẫu này dưới dạng bài toán min tương đương và nhân cả hai vế của bốn ràng buộc chính của nó với -1 ta có bài toán

$$\begin{aligned} \min \quad g'(y) = -11y_1 - 23y_2 - 12y_3 & \\ \text{v.đ.k.} \quad -4y_1 - 3y_2 - 7y_3 &\geq 6 \\ -3y_1 - 2y_2 - 4y_3 &\geq -3 \\ 8y_1 - 7y_2 - 3y_3 &\leq -2 \\ -7y_1 - 6y_2 - 2y_3 &= 5 \\ y_1 \text{ tự do}, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \leq 0. & \end{aligned}$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán này là

$$\begin{aligned} \max \quad & f'(x) = 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{v.đ.k.} \quad & -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 7x_4 = -11 \\ & -3x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 6x_4 \le -23 \\ & -7x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 \ge -12 \\ & x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0, \ \ x_3 \le 0, x_4 \text{ tự do}. \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng, bằng cách viết lại bài toán này dưới dạng bài toán min tương đương và nhân cả hai vế của ba ràng buộc chính của nó với -1 ta nhận lại được bài toán gốc ban đầu.

3.8.2 Các định lý về đối ngẫu

Các định lý sau đúng với cặp bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu dạng bất kỳ.

Định lý 3.11. (Đối ngẫu yếu) *Nếu x là phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán gốc (P) và y là phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán đối ngẫu (D) thì*

$$\langle b, y\rangle \le \langle c, x\rangle.$$

Chứng minh. Do mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về dạng chuẩn tắc nên, không giảm tổng quát, ta chứng minh cho cặp đối ngẫu với bài toán gốc có dạng chuẩn tắc

$$\begin{aligned} \min z &= \langle c, x\rangle \quad (P) & \qquad \max w &= \langle b, y\rangle \quad (D) \\ \text{v.đ.k.} \ \ Ax &\ge b & \text{v.đ.k.} \ \ A^T y &\le c \\ x &\ge 0 & y &\ge 0. \end{aligned}$$

Vì x là phương án chấp nhận được của bài toán (P) nên $Ax \ge b$, $x \ge 0$, và do y là phương án chấp nhận được của bài toán (D) nên $A^T y \le c$, $y \ge 0$. Ta có

$$\langle b, y\rangle \le \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle \le \langle c, x\rangle. \qquad \square$$

Sau đây là hệ quả trực tiếp của Định lý 3.11.

Hệ quả 3.5. i) *Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính (P) không bị chặn dưới trong tập chấp nhận được thì bài toán đối ngẫu (D) không có phương án chấp nhận được;*

ii) *Nếu hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu (D) không bị chặn trên trong tập chấp nhận được thì bài toán gốc (P) không có phương án chấp nhận được.*

Chứng minh. Do tính tương tự, ta chỉ cần chứng minh (i). Giả sử rằng bài toán (D) có một phương án chấp nhận được y^0. Theo Định lý 3.11 ta có

$$\langle b, y^0\rangle \le \langle c, x\rangle$$

với mọi phương án chấp nhận được x của bài toán (P). Điều này mâu thuẫn với tính không bị chặn dưới của hàm mục tiêu $f(x) = \langle c, x\rangle$ và chứng tỏ tập chấp nhận được của bài toán (D) là rỗng. □

Hệ quả 3.6. *Giả sử $\bar{x}$ là phương án chấp nhận được của bài toán gốc (P) và $\bar{y}$ là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu (D) và*

$$\langle b, \bar{y}\rangle = \langle c, \bar{x}\rangle.$$

Khi đó $\bar{x}$ là một phương án tối ưu của bài toán (P) và $\bar{y}$ là một phương án tối ưu của bài toán (D).

Chứng minh. Giả sử x là phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán gốc (P) và y là phương án chấp nhận được bất kỳ của bài toán đối ngẫu (D). Theo Định lý 3.11 ta có

$$\langle b, y\rangle \le \langle c, \bar{x}\rangle = \langle b, \bar{y}\rangle \le \langle c, x\rangle.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.12. (Đối ngẫu mạnh) *Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu của nó cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của hai bài toán này bằng nhau.*

Chứng minh. Không giảm tổng quát, giả sử bài toán gốc là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và có phương án tối ưu x^* tương ứng với cơ sở B_*. Để tiện theo dõi, ta viết lại cặp bài toán đối ngẫu này,

$$\begin{array}{ll} \min z = \langle c, x\rangle & \qquad\qquad \max w = \langle b, y\rangle \\ \text{v.đ.k. } Ax = b & \qquad\qquad \text{v.đ.k. } A^T y \le c \\ \qquad x \ge 0 & \qquad\qquad\qquad y \text{ tự do.} \end{array}$$

Nhắc lại rằng,

B_* là ma trận có các cột là các véc tơ $\{A_j,\ j \in J(x^*)\}$,
C_{B_*} là véc tơ hàng có các thành phần là $c_j,\ j \in J(x^*)$,
X_{B_*} là véc tơ cột có các thành phần là $x_j^*,\ j \in J(x^*)$.

Theo (3.11') và (3.12') ta có

$$X_{B_*} = B_*^{-1} b \ge 0 \ \text{ và } \ f_{min} = f(x^*) = C_{B_*} B_*^{-1} b.$$

Vì x^* là phương án tối ưu nên

$$\Delta_k \overset{(3.13')}{=} C_{B_*} B_*^{-1} A_k - c_k \le 0 \quad \forall k = 1, \cdots, n$$

hay

$$A^T [C_{B_*} B_*^{-1}]^T - c \le 0. \tag{3.35}$$

Ta sẽ chứng minh rằng bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu. Thật vậy, đặt

$$y^* = [C_{B_*} B_*^{-1}]^T.$$

Theo (3.35) ta có

$$A^T y^* \leq c,$$

chứng tỏ y^* là một phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu. Hơn nữa,

$$\langle b, y^* \rangle = [y^*]^T b = C_{B_*} B_*^{-1} b = C_{B_*} X_{B_*} = \langle c, x^* \rangle.$$

Theo Hệ quả 3.6 ta có y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. □

Hệ quả 3.7. *Điều kiện cần và đủ để cặp phương án chấp nhận được $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ của bài toán (P) và (D) là phương án tối ưu là*

$$\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle.$$

Các kết quả trên cho thấy mối quan hệ sau đây giữa bài toán quy hoạch tuyến tính gốc và bài toán đối ngẫu.

Định lý 3.13. (Định lý tồn tại) *Xét một cặp quy hoạch tuyến tính đối ngẫu (P) và (D). Khi đó chỉ xảy ra một trong bốn trường hợp sau:*

i) *Cả hai bài toán đều không có phương án chấp nhận được ;*

ii) *Cả hai bài toán đều có phương án chấp nhận được. Khi đó cả hai bài toán đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của hai bài toán này bằng nhau ;*

iii) *Bài toán (P) có phương án chấp nhận được và bài toán (D) không có. Khi đó hàm mục tiêu $f(x) = \langle c, x \rangle$ của bài toán (P) không bị chặn dưới trong tập chấp nhận được;*

iv) *Bài toán (D) có phương án chấp nhận được và bài toán (P) không có. Khi đó hàm mục tiêu $g(y) = \langle b, y \rangle$ của bài toán (D) không bị chặn trên trong tập chấp nhận được.*

Sau đây là một số ví dụ minh họa cho bốn trường hợp đã nêu trong Định lý 3.13.

Ví dụ 3.21. *(Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều không có phương án chấp nhận được)*

$$\begin{array}{llll}
\min & f(x) = 2x_1 + x_2 & \qquad \max & g(y) = 5y_1 + 3y_2 \\
\text{v.đ.k.} & x_1 + x_2 = 5 & \qquad \text{v.đ.k.} & y_1 - y_2 = 2 \\
& -x_1 - x_2 = 3 & & y_1 - y_2 = 1 \\
& x_1, x_2 \text{ tự do} & & y_1, y_2 \text{ tự do.}
\end{array}$$

Ví dụ 3.22. *(Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều có phương án chấp nhận được)*

$$\begin{array}{llll}
\min & f(x) = 6x_1 + 5x_2 & \max & g(y) = 4y_1 + 10y_2 \\
\text{v.đ.k.} & x_1 + 2x_2 \geq 4 & \text{v.đ.k.} & y_1 + 2y_2 \leq 6 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 & & 2y_1 + y_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0.
\end{array}$$

Ví dụ 3.23. *(Bài toán gốc không có phương án chấp nhận được và giá trị hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu tăng vô hạn trong miền ràng buộc)*

$$\begin{array}{llll}
\min & f(x) = 2x_1 + x_2 & \max & g(y) = 5y_1 + 2y_2 \\
\text{v.đ.k.} & x_1 - x_2 \geq 5 & \text{v.đ.k.} & y_1 + y_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 = 2 & & -y_1 + y_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & y_1, y_2 \text{ tự do.}
\end{array}$$

Ví dụ 3.24. *(Giá trị hàm mục tiêu của bài toán gốc giảm vô hạn trong miền ràng buộc và bài toán đối ngẫu không có phương án chấp nhận được)*

$$\begin{array}{llll}
\min & f(x) = -x_1 - x_2 & \max & g(y) = 2y_1 + 3y_2 \\
\text{v.đ.k.} & -2x_1 + x_2 \leq 2 & \text{v.đ.k.} & -2y_1 + y_2 \leq -1 \\
& x_1 - 3x_2 \leq 3 & & y_1 - 3y_2 \leq -1 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & y_1, y_2 \leq 0\ .
\end{array}$$

3.8.3 Định lý về độ lệch bù

Hệ quả 3.7 cho ta điều kiện tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính thông qua giá trị hàm mục tiêu. *Điều kiện độ lệch bù* (complementary slackness) sau đây biểu thị điều kiện tối ưu qua các dữ liệu của bài toán.

Định lý 3.14. (Định lý về độ lệch bù) *Giả sử x là phương án chấp nhận được của bài toán gốc (P) và y là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu (D). Khi đó, x là một phương án tối ưu của bài toán (P) và y là một phương án tối ưu của bài toán (D) khi và chỉ khi*

$$\begin{cases} \langle Ax - b, y\rangle = 0 & (3.36) \\ \langle c - A^T y, x\rangle = 0. & (3.37) \end{cases}$$

Chứng minh. Từ (3.36) và (3.37) ta viết được

$$\langle b, y\rangle = \langle Ax, y\rangle \quad \text{và} \quad \langle c, x\rangle = \langle A^T y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle.$$

Do đó

$$\langle b, y\rangle = \langle c, x\rangle.$$

Theo Hệ quả 3.7, ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý 3.8. Ta vẫn ký hiệu a^i là hàng thứ i và A_j là cột thứ j của ma trận A. Vì $Ax \geq b$ và $A^T y \leq c$ nên $Ax - b \geq 0$ và $c - A^T y \geq 0$. Hơn nữa ta có $y \geq 0$ và $x \geq 0$. Do đó điều kiện (3.36) và (3.37) được diễn tả chi tiết như sau:

$$(3.36) \Leftrightarrow \left(\langle a^i, x\rangle - b_i\right) y_i = 0 \ \forall i \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \text{Nếu} & y_i > 0 & \text{thì } \langle a^i, x\rangle = b_i, \\ \text{Nếu} & \langle a^i, x\rangle > b_i & \text{thì } y_i = 0. \end{array}\right.$$

và

$$(3.37) \Leftrightarrow (c_j - \langle y, A_j\rangle)\, x_j = 0 \ \forall j \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \text{Nếu} & x_j > 0 & \text{thì } \langle A_j, y\rangle = c_j, \\ \text{Nếu} & \langle y, A_j\rangle < c_j & \text{thì } x_j = 0. \end{array}\right.$$

Điều đó có nghĩa là nếu ràng buộc "lệch" khỏi thỏa mãn chặt thì biến phải bằng 0 (tức "bù lại") để "không lệch" khỏi thỏa mãn chặt và ngược lại.

Nhận xét 3.8. i) Nếu bài toán gốc có dạng chính tắc

$$\min\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad (P)$$

thì (3.36) luôn thỏa mãn với mọi phương án chấp nhận được nên điều kiện độ lệch bù cho bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là điều kiện (3.37);

ii) Điều kiện độ lệch bù có thể cho ta ngay nghiệm tối ưu của quy hoạch tuyến tính khi biết nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu của nó.

Ví dụ 3.25. Xét bài toán

$$\begin{array}{lrcl} \min & f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 & & \\ \text{v.đ.k.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 2 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \\ & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Chứng minh rằng $x^* = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ là phương án cực biên tối ưu của bài toán trên. Viết bài toán đối ngẫu và tìm nghiệm tối ưu của nó.

Giải. Dễ thấy x^* thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán nên nó là một phương án chấp nhận được. Hơn nữa, x^* thỏa mãn chặt ràng buộc thứ nhất, thứ hai và thứ ba, tức tập chỉ số các ràng buộc thỏa mãn chặt tại x^* là

$$I(x^*) = \{1, 2, 3\}$$

và $a^1 = (2, 1, 2)$, $a^2 = (4, 2, 1)$, $a^3 = (1, 0, 0)$ độc lập tuyến tính. Do đó x^* là một đỉnh không suy biến của tập lồi đa diện chấp nhận được hay là một phương án cực biên không suy biến (xem Hệ quả 1.2).

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên là

$$\begin{aligned} \max \quad & g(y) = 2y_1 + 2y_2 \\ \text{v.đ.k.} \quad & 2y_1 + 4y_2 \le -1 \\ & y_1 + 2y_2 \le -1 \\ & 2y_1 + y_2 \le -1 \\ & y_1 \le 0 \\ & y_2 \le 0. \end{aligned}$$

Giả sử x^* là phương án tối ưu của bài toán đã cho và y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Theo Định lý về độ lệch bù (Định lý 3.14), vì $x_2^* = \frac{2}{3} > 0$ và $x_3^* = \frac{2}{3} > 0$ nên

$$\begin{cases} \langle A_2, y^* \rangle = c_2 \\ \langle A_3, y^* \rangle = c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^* + 2y_2^* = -1 \\ 2y_1^* + y_2^* = -1. \end{cases}$$

Suy ra $y^* = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})^T$. Dễ thấy y^* thỏa mãn các ràng buộc của bài toán đối ngẫu. Vì vậy, phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là y^* và x^* là phương án tối ưu của bài toán ban đầu.

Ví dụ 3.26. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 \\ \text{v.đ.k.} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 152 \\ & 4x_2 + 2x_3 + + 3x_5 = 60 \\ & 3x_2 + x_4 + x_5 = 36 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

Không dùng thuật toán, chứng minh rằng $x^0 = (104,\ 12,\ 6,\ 0,\ 0)^T$ là phương án tối ưu của bài toán này.

Giải Kiểm tra trực tiếp ta thấy x^0 thỏa mãn mọi ràng buộc, do đó nó là một phương án chấp nhận được của bài toán trên. Bài toán đối ngẫu của bài toán này là

$$\begin{aligned} \max \quad & g(y) = 152y_1 + 60y_2 + 36y_3 \\ \text{v.đ.k.} \quad & y_1 \le 2 \\ & 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le 5 \\ & 4y_1 + 2y_2 \le 4 \\ & y_3 \le 3 \\ & 3y_1 + 3y_2 +. \ y_3 \le 5. \end{aligned}$$

Giả sử x^0 là phương án tối ưu của bài toán gốc, y^0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Vì $x_1^0 = 104 > 0$, $x_2^0 = 12 > 0$, $x_3^0 = 6 > 0$, theo Định lý về độ lệch bù ta có

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad\quad &= 2 \\ 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 &= 5 \\ 4y_1 + 2y_2 \qquad &= 4 \end{aligned}$$

Giải hệ này ta được $y^0 = (2, \ , -2, \ 3)^T$. Dễ thấy y^0 thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán đối ngẫu. Vậy y^0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và x^0 đúng là phương án tối ưu của bài toán đã cho.

Nhận xét 3.9. Trường hợp bài toán suy biến thì điều kiện độ lệch bù giúp rất ít cho việc xác định nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính.

3.8.4 Một số ứng dụng của lý thuyết đối ngẫu

a. Tìm nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính

• Ta có thể sử dụng Pha I của thuật toán đơn hình hai pha để tìm nghiệm không âm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, tức tìm nghiệm của hệ

$$Ax = b, \ x \geq 0, \tag{3.38}$$

trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$. Cụ thể giải bài toán quy hoạch tuyến tính (xem Mục 3.5.2(b))

$$\begin{aligned} \min \ g(x,u) = \quad & u_1 + \cdots + u_m \\ \text{v.đ.k.} \quad & Ax + u = b \\ & (x,u) \geq 0, \end{aligned}$$

được nghiệm tối ưu (x^*, u^*). Nếu $u^* = 0$ thì x^* là nghiệm của hệ (3.38), còn nếu $u^* \neq 0$ thì hệ (3.38) vô nghiệm.

• Ngược lại, ta cũng có thể đưa việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính về việc tìm nghiệm không âm của một hệ phương trình tuyến tính. Thật vậy, không giảm tổng quát ta xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc và bài toán đối ngẫu của nó

$$\begin{aligned} \min z = \langle c, x\rangle \qquad\qquad & \max w = \langle b, y\rangle \\ \text{v.đ.k.} \ Ax \geq b \qquad\qquad & \text{v.đ.k.} \ A^T y \leq c \\ x \geq 0 \qquad\qquad & y \geq 0. \end{aligned}$$

Theo Hệ quả 3.7, phương án chấp nhận được x là phương án tối ưu của bài toán gốc và phương án chấp nhận được y là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu khi và chỉ khi

$$\langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle.$$

Điều đó có nghĩa là cặp nghiệm tối ưu x^* và y^* nghiệm đúng hệ phương trình, bất phương trình sau

$$\begin{cases} \langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle \\ Ax \geq b, \quad x \geq 0 \\ A^T y \leq c, \quad y \geq 0\,. \end{cases}$$

Bằng cách đưa thêm biến phụ $u \geq 0, v \geq 0$, hệ trên được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} \langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle \\ Ax - u = b, \quad A^T y + v = c, \\ y \geq 0, \quad y \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0\,. \end{cases}$$

Do đó mọi thuật toán tìm nghiệm không âm của một hệ phương trình tuyến tính đều có thể áp dụng trực tiếp vào việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

b. Chứng minh Bổ đề Farkas

Bổ đề Farkas là một kết quả cơ bản của giải tích lồi và có nhiều ứng dụng trong quy hoạch toán học. Nó có thể được chứng minh như là hệ quả trực tiếp của định lý tách các tập lồi. Trong phần này, ta sẽ chứng minh bổ đề này dựa vào lý thuyết đối ngẫu. Để tiện theo dõi, ta nhắc lại

Bổ đề Farkas. *Cho véc tơ $a \in \mathbb{R}^n$ và ma trận A cấp $m \times n$. Khi đó $\langle a, x\rangle \geq 0$ với mọi x thỏa mãn $Ax \geq 0$ khi và chỉ khi tồn tại véc tơ $y \geq 0$ thuộc $\mathbb{R}^m$ sao cho $a = A^T y$.*

Chứng minh. ($\Leftarrow$) Điều kiện đủ là hiển nhiên. Thật vậy, giả sử tồn tại véc tơ $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$ và $a = A^T y$. Suy ra $\langle a, x\rangle = \langle A^T y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \geq 0$ với mọi x thỏa mãn $Ax \geq 0$.

($\Rightarrow$) Xét quy hoạch tuyến tính

$$\min\{\langle a, x\rangle \mid Ax \geq 0\}.$$

Tập chấp nhận được của bài toán này khác rỗng vì nó chứa ít nhất một phương án $x = 0$. Theo giả thiết $\langle a, x\rangle \geq 0$ với mọi x thỏa mãn $Ax \geq 0$. Điều đó chứng tỏ hàm mục tiêu của bài toán này bị chặn dưới trên tập chấp nhận được. Theo Định lý 3.2, bài toán có nghiệm tối ưu. Vậy bài toán đối ngẫu của nó là

$$\max\{\langle 0, y\rangle \mid A^T y = a, \ y \geq 0\}$$

cũng có nghiệm tối ưu (Định lý 3.13). Và hiển nhiên là tập chấp nhận được của bài toán đối ngẫu khác rỗng, tức tồn tại $y \geq 0$ sao cho $A^T y = a$. □

c. Ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu

Ta trình bày vấn đề này thông qua một bài toán thực tế: Người ta dự định sản xuất m loại sản phẩm bằng n phương pháp khác nhau. Biết rằng nhu cầu của xã hội về từng loại sản phẩm i là b_i, $i = 1, \cdots, m$. Nếu sử dụng một đơn vị thời gian theo phương pháp j thì thu được a_{ij} đơn vị sản phẩm loại i và phải trả một chi phí bằng c_j. Bài toán đặt ra là xác định thời gian t_j sử dụng mỗi phương pháp j, $j = 1, \cdots, n$, sao cho số sản phẩm loại i sản xuất được không ít hơn nhu cầu b_i, $i = 1, \cdots, m$ đồng thời tổng chi phí sản xuất là thấp nhất.

Sau đây là mô hình toán học của bài toán

$$\min \ f(x) = c_1 t_1 + \cdots + c_n t_n$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \geq b_i, \quad i = 1, \cdots, m,$$

$$t_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán này là

$$\max \ g(y) = b_1 z_1 + \cdots + b_m z_m$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \leq c_j, \quad j = 1, \cdots, n,$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m.$$

Nếu gọi z_i, $i = 1, \cdots, m$ là giá trị (qui ước) của một đơn vị sản phẩm loại i thì hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu là hàm tổng giá trị toàn bộ sản phẩm theo yêu cầu của xã hội. Ràng buộc chính thứ j của bài toán đối ngẫu có nghĩa là: tổng giá trị m loại sản phẩm được sản xuất theo phương pháp thứ j trong một đơn vị thời gian không vượt quá chi phí sản xuất c_j, $j = 1, \cdots, n$. Mục đích của bài toán đối ngẫu là xác định giá trị z_i cho mỗi đơn vị sản phẩm loại i sao cho tổng giá trị toàn bộ sản phẩm theo yêu cầu của xã hội là lớn nhất.

Ta có thể phân tích một số ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu trên như sau: Gọi t^* là phương án sản xuất tối ưu của bài toán gốc và z^* là phương án định giá trị tối ưu của bài toán đối ngẫu. Từ Định lý về độ lệch bù (Định lý 3.14) ta suy ra:

i) Nếu phương pháp thứ j được áp dụng (tức $t_j^* > 0$) thì tổng giá trị m loại sản phẩm được sản xuất theo phương pháp này phải vừa đúng bằng chi phí

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i^* = c_j$$

hoặc phương pháp thứ j sẽ không được áp dụng (tức $t_j^* = 0$) nếu tổng giá trị m loại sản phẩm được sản xuất theo phương pháp đó thấp hơn chi phí

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i^* < c_j;$$

ii) Nếu sản phẩm loại i có giá trị $z_i^* > 0$ thì tổng số sản phẩm loại đó sản xuất được phải vừa đúng bằng nhu cầu xã hội

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j^* = b_i$$

hoặc sản phẩm loại i không có giá trị (tức $z_i^* = 0$) nếu tổng số sản phẩm loại đó sản xuất được lại vượt quá nhu cầu xã hội

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j^* > b_i.$$

Bài tập Chương 3

1. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau về dạng chính tắc:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ \text{v.đ.k.} & 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 3 \\ & 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq 1, x_2 \leq 7, x_3 \geq 0. \end{array}$$

2. Chuyển bài toán quy hoạch tuyến tính sau về dạng chính tắc:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 5x_1 - x_2 - 7x_3 \\ \text{v.đ.k} & 7x_1 + 4x_2 - 11x_3 \geq 12 \\ & x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \\ & 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq -2, x_2 \text{ tự do}, \ x_3 \geq 0. \end{array}$$

3. Khi nào bài toán quy hoạch tuyến tính $\min\{\langle c, x\rangle | x \in M\}$ có nghiệm. Cấu trúc của tập nghiệm của bài toán này?

4. Giả sử rằng một quy hoạch tuyến tính với tập chấp nhận được bị chặn có ℓ phương án cực biên tối ưu $v^1, \cdots, v^\ell$. Chứng minh rằng một phương án là tối ưu khi và chỉ khi nó là tổ hợp lồi của $v^1, \cdots, v^\ell$.

5. Cho x^1, x^2 là hai phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính $\min\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, x \geq 0\}$ và x^0 là tổ hợp lồi của x^1, x^2. Chứng minh rằng x^0 cũng là nghiệm của bài toán này.

6. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp hình học

i)

$$\begin{aligned}\min\quad & z = 3x_1 + x_2\\ \text{v.đ.k.}\quad & x_1 - x_2 \leq 1\\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12\\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3\\ & -2x_1 + 3x_2 \geq 9\\ & x_1,\ x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\min\quad & z = x_1 + 2x_2\\ \text{v.đ.k.}\quad & 2x_1 + x_2 \geq 12\\ & x_1 + x_2 \geq 5\\ & -x_1 + 3x_2 \leq 3\\ & 6x_1 - x_2 \geq 12\\ & x_1,\ x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

7. Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây và trả lời xem các bài toán này có nghiệm không? Vì sao?

i)

$$\begin{aligned}\min f(x) &= 2x_1 + 4x_2 - 3x_3\\ \text{v.đ.k.}\quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1\\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3\\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\max f(x) &= 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 3x_4\\ \text{v.đ.k.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10\\ & 2x_2 + x_3 - x_4 = 6\\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.\end{aligned}$$

8. Xét bài toán

$$\begin{aligned} \min\ & z = 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 \\ \text{v.đ.k.}\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 4x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán này và giải nó bằng phương pháp hình học.

ii) Sử dụng điều kiện độ lệch bù để tìm nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu.

9. Xét bài toán $\min\{z = \langle c, x\rangle \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$. Giả sử bài toán này và bài toán đối ngẫu của nó đều chấp nhận được. Cho x^* là một nghiệm tối ưu của bài toán gốc với giá trị tối ưu tương ứng là z_* và y^* là một nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu. Chứng minh rằng

$$z_* = y^{*T} A x^*.$$

10. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \max\ & z = 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{v.đ.k.}\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

i) Bài toán này có nghiệm không? Vì sao? Tìm một bài toán thực tế có thể mô tả bởi quy hoạch tuyến tính này?

ii) Chứng minh rằng tập nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính là tập lồi.

11. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 \\ \text{v.đ.k}\ & x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_5 - x_6 = -4 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_7 = 24 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 46 \\ & x_1, \cdots, x_7 \geq 0. \end{aligned}$$

i) Chứng minh rằng $x^* = (0, 2, 0, 20, 0, 2, 0)^T$ là phương án cực biên không suy biến.

ii) Xuất phát từ x^*, giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

iii) Tìm một phương án chấp nhận được $\bar{x}$ có $f(\bar{x}) = -87$.

12. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \min\ z = x_1 - 4x_2 + \alpha.x_3 \qquad + 3x_5& \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 \qquad &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 \qquad + x_5 &= 4 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

i) Lập bảng đơn hình tương ứng với phương án cực biên $x^0 = (0, 3, 0, 2, 4)^T$.

ii) Tìm điều kiện của tham số α để phương án trên là tối ưu.

13. Chứng minh rằng nếu bài toán $\min\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ có phương án tối ưu thì các bài toán $\min\{\langle c, x\rangle \mid Ax = \bar{b},\ x \geq 0\}$ cũng có phương án tối ưu, trong đó $\bar{b}$ là véc tơ vế phải bất kỳ miễn là tập chấp nhận được $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \bar{b},\ x \geq 0\}$ khác rỗng.

14. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \max\ z = -4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4& \\ \text{v.đ.k.}\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 1 \\ 4x_2 - 2x_3 \qquad &\leq 4 \\ -3x_2 \qquad + x_4 &= 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

i) Viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên;

ii) Dùng đối ngẫu kiểm tra xem $x^* = (0,\ 0,\ 1,\ 5)^T$ có phải là phương án tối ưu của bài toán trên không?

15. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng thuật toán đơn hình hai pha

i)

$$\begin{aligned} \min\ z = -4x_1 - 2x_2& \\ \text{v.đ.k.}\quad 3x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ -2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \min\ z = -x_1 - 3x_2& \\ \text{v.đ.k.}\quad x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -x_1 + x_2 &\leq -1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

16. Một nhà máy sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian lao động để làm ra một mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian để làm xong một mũ kiểu thứ hai. Nếu sản xuất toàn mũ kiểu thứ hai thì nhà máy làm được 500 mũ một ngày. Thị trường tiêu thụ được trong mỗi ngày không quá 200 mũ kiểu thứ nhất và 300 mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi một mũ kiểu thứ nhất là 10$ và một mũ kiểu thứ hai là 5$. Nhà máy cần sản xuất mỗi kiểu mũ bao nhiêu chiếc để tổng tiền lãi là lớn nhất?

17. Hãng hàng không Universal Aviation quyết định đầu tư 4000000$ để mua ba loại máy bay A, B, C. Biết rằng:

    Loại A giá 80000$, có tải trọng 10 *tấn*, tốc độ $350km/h$ và có thể bay $18h$ trong một ngày.

    Loại B giá 130000$, có tải trọng 20 *tấn* và tốc độ $300km/h$ và có thể bay $18h$ trong một ngày .

    Loại C giá 150000$, có tải trọng 18 *tấn* và tốc độ $300km/h$ và có thể bay $21h$ trong một ngày .

    Máy bay loại A và loại C có thể bay 3 ca một ngày. Máy bay loại B có thể bay 6 ca một ngày.

    Hãng hàng không chỉ có thể thực hiện bay nhiều nhất là 150 ca trong một ngày, và hãng chỉ mua tối đa 30 máy bay.

    Số tiền thu được từ mỗi máy bay loại A, B, C khi chúng chuyên chở 1 *tấn* hàng và bay quãng đường $1km$ (gọi tắt là 1 *tấn - km*) lần lượt là 5$, 8$ và 120$.

    Mỗi ngày, hãng hàng không phải thực hiện hợp đồng chuyên chở cho tập đoàn RIO là 3500000 *tấn - km*. Nếu máy bay của hãng Universal Aviation không hoàn thành hợp đồng với tập đoàn RIO thì hãng hàng không này có thể thuê một hãng hàng không khác chở hàng mà vẫn lãi 0.2$ trên 1 *tấn - km*. Bài toán đặt ra là cần mua bao nhiêu máy bay mỗi loại sao cho hãng hàng không có thể thu được số tiền lớn nhất mỗi ngày. Hãy thiết lập mô hình quy hoạch tuyến tính cho bài toán này.

18. Mỗi tháng công ty Hoàng Anh cần $90000m^3$ gỗ xẻ đã sấy khô để đóng đồ gia dụng. Công ty mua gỗ xẻ theo hai cách sau:

    Cách 1: Mua hai loại gỗ đã được xẻ sẵn (chưa sấy) của các công ty khác rồi đem sấy. Biết rằng gỗ đã xẻ loại thứ nhất giá $30\$/m^3$ và sau khi sấy khô $1m^3$ chỉ còn $0.7m^3$, loại thứ hai giá $70\$/m^3$ và sau khi sấy khô $1m^3$ chỉ còn $0.9m^3$. Mỗi tháng, công ty có thể mua nhiều nhất $40000m^3$ gỗ xẻ loại thứ nhất và $60000m^3$ gỗ xẻ loại thứ hai.

    Cách 2: Mua gỗ hộp (chưa xẻ) sau đó xẻ tại xưởng cưa của công ty và đem sấy, chi phí vận chuyển $1m^3$ gỗ hộp đến nhà máy cưa mất 25$. Tiền mua và xẻ

$1m^3$ gỗ hộp là 30\$ và $1m^3$ gỗ này chỉ còn $0.8m^3$ sau khi sấy khô. Phân xưởng cưa có thể cưa $35000m^3$ gỗ trong 1 tháng.

Chi phí để sấy gỗ xẻ là 4 $\$/m^3$. Tổng thời gian làm khô gỗ tối đa là 40 giờ, trong đó thời gian làm khô $1m^3$ gỗ loại thứ nhất (gỗ xẻ sẵn) là 2 phút, loại thứ hai (gỗ xẻ sẵn) là 0.8 phút và loại gỗ hộp là 1.3 phút.

Hãy xây dựng mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính để giúp công ty có thể cực tiểu chi phí mua nguyên liệu hàng tháng.

Chương 4

Bài toán vận tải

Một trong những ứng dụng thành công của quy hoạch tuyến tính là giải bài toán vận tải. Theo thống kê của Mỹ, có đến 85% các bài toán quy hoạch tuyến tính gặp trong các ứng dụng thực tế có dạng bài toán vận tải hoặc các dạng mở rộng của nó.

Bài toán vận tải được biết đến đầu tiên trong công trình của Hitchcock [11]. Sau đó được nghiên cứu chi tiết và phát triển bởi Dantzig [6] và Koopmans[1][22], [23].

4.1 Bài toán vận tải

4.1.1 Mô hình toán học

Bài toán vận tải (xem Ví dụ 2.5) là tìm phương án vận chuyển một loại hàng hóa từ m điểm phát với trữ lượng tương ứng là $a_1, a_2, \cdots, a_m$ tới n điểm thu với nhu cầu tại các điểm lần lượt là $b_1, b_2, \cdots, b_n$. Hàng có thể chuyển từ mỗi điểm phát đến các điểm thu tùy ý và một điểm thu có thể nhận hàng tại các điểm phát bất kỳ. Mỗi điểm thu có thể không nhận hàng ở một điểm phát nào đó nhưng đã nhận rồi thì không được trả lại.

Ký hiệu x_{ij} (t.ư., c_{ij}) là lượng hàng vận chuyển (t.ư., cước phí vận chuyển một đơn vị hàng) từ điểm phát i đến điểm thu j, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Bài toán vận tải được phát biểu là

[1]Tjalling C. KOOPMANS (28/8/1910 - 26/2/1985): Nhà toán học Mỹ. Ông và Leoid V. Kantorovich đã được Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Thụy Điển trao tặng giải Nobel kinh tế năm 1975.

$$\min\ f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (PT)$$

$$\text{v.đ.k.}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m \qquad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n \qquad (4.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n. \qquad (4.3)$$

Như đã biết, điều kiện (4.1) có nghĩa là các điểm phát phải phát hết hàng và điều kiện (4.2) có nghĩa là các điểm thu nhận đủ lượng hàng như mong muốn.

Véc tơ $x = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, \cdots, x_{mn})^T$ thỏa mãn các ràng buộc (4.1)-(4.3) được gọi là *một phương án* chấp nhận được của bài toán vận tải. Để đơn giản, ta thường viết là $x = (x_{ij})$. Cách biểu diễn phương án x dưới dạng ma trận phân phối hàng hóa và các cước phí c_{ij}, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, dưới dạng ma trận chi phí C,

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

cũng thường được sử dụng. Ta định nghĩa ma trận A cấp $(m+n) \times (m \times n)$ và véc tơ $b \in \mathbb{R}^{m+n}$ như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó bài toán vận tải (PT) được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = \langle c, x \rangle \\ \text{v.đ.k.}\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

trong đó $c = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}, c_{21}, \cdots, c_{2n}, \cdots, c_{m1}, \cdots, c_{mn})^T$ là véc tơ hệ số mục tiêu của bài toán vận tải. Như vậy, bài toán vận tải là một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Biểu diễn dạng ma trận này tuy ít ý nghĩa thực tế nhưng giúp ta phân tích các tính chất lý thuyết của bài toán vận tải.

Mệnh đề 4.1. *Ma trận A có* $\mathrm{rank}A = m + n - 1$.

Chứng minh. Gọi a^k là véc tơ hàng thứ k của ma trận A, $k = 1, \cdots, m+n$. Dễ thấy rằng

$$\sum_{k=1}^{m} a^k = \sum_{k=m+1}^{m+n} a^k = e,$$

trong đó $e \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là véc tơ có tất cả các thành phần đều bằng 1. Do đó $\mathrm{rank}A \leq m + n - 1$. Bất kỳ $m + n - 1$ hàng nào của A cũng độc lập tuyến tính. Thật vậy, chẳng hạn ta chứng minh $\{a^2, a^3, \cdots, a^{m+n}\}$ độc lập tuyến tính, tức chứng minh rằng nếu

$$\sum_{i=2}^{m} u_i a^i + \sum_{j=1}^{n} v_j a^{m+j} = 0$$

thì $u_k = 0$, $k = 2, \cdots, m$ và $v_j = 0$, $j = 1, \cdots, n$. Thật vậy, xét n tọa độ đầu tiên của đẳng thức véc tơ này ta được

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0.$$

Xét các tọa độ $n+1$, $2n+1$, $\cdots$, $(m-1)n+1$ của đẳng thức véc tơ này, ta lại có

$$u_2 + v_1 = u_3 + v_1 = \cdots = u_m + v_1 = 0.$$

Suy ra $u_2 = u_3 = \cdots = u_m = 0$. Vậy $\mathrm{rank}A = m + n - 1$. $\square$

Ký hiệu $A_{ij}, i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n$ là các véc tơ cột của A. Ta có,

$$A_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \prec i \\ \\ \\ \\ \prec m+j \\ \\ \\ \\ \end{array} = e^i + e^{m+j} \in \mathbb{R}^{m+n}, \qquad (4.4)$$

trong đó $e^i = (0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, \cdots, 0)^T$ và $e^{m+j} = (0, \cdots, \underbrace{1}_{m+j}, \cdots, 0)^T$ là hai véc tơ đơn vị của không gian $\mathbb{R}^{m+n}$. Vì bài toán vận tải là một quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc mà $\text{rank}A = m + n - 1$ nên:

◦ Phương án cực biên của bài toán vận tải không có nhiều hơn $(m + n - 1)$ thành phần dương;

◦ Ta nói phương án cực biên của bài toán vận tải là *không suy biến* nếu nó có đúng $(m + n - 1)$ thành phần dương và là *suy biến* nếu nó có ít hơn $(m + n - 1)$ thành phần dương;

◦ Mỗi phương án cực biên $x^0 = (x^0_{ij})$ tương ứng với ít nhất một cơ sở gồm $(m+n-1)$ véc tơ A_{ij} độc lập tuyến tính. Trong trường hợp $x^0 = (x^0_{ij})$ là phương án cực biên không suy biến thì nó tương ứng với một cơ sở duy nhất là hệ $\{A_{ij} \mid x^0_{ij} > 0\}$ gồm $(m + n - 1)$ véc tơ độc lập tuyến tính.

Hiển nhiên rằng ta có thể giải bài toán vận tải bằng các phương pháp chung để giải quy hoạch tuyến tính. Tuy nhiên, nếu bài toán có m điểm phát và n điểm thu thì số biến là $m \times n$, và dễ thấy là số biến tăng rất nhanh mỗi khi ta tăng số điểm thu, phát. Vì vậy, nếu áp dụng các thuật toán giải quy hoạch tuyến tính thông thường để giải bài toán vận tải sẽ tốn chi phí tính toán. Mục 4.1.3 sẽ trình bày thuật toán thế vị giải bài toán này dựa vào cấu trúc đặc biệt của ma trận ràng buộc của nó.

Nhận xét 4.1. Bài toán vận tải (PT) là một trường hợp đặc biệt của bài toán dòng trên mạng. Nhắc lại rằng, *mạng* là một đồ thị có hướng $G = (V, E)$, trong đó V là *tập đỉnh (nút)*, E là *tập cạnh (cung)* có hướng,

$$E = \{(i, j) \mid i,\ j \in V\}.$$

Mỗi nút của mạng được gán một số thực d_i, $i \in V$. Nếu $d_i > 0$ thì nút i được gọi là một *nguồn* (source) và d_i được gọi là *nguồn cung* hoặc gọi tắt là *nguồn* (supply). Nếu $d_i < 0$ thì nút i được gọi là một *điểm hút* (sink) và $|d_i|$ được gọi là *nhu cầu* (demand) của nút i.

Ký hiệu x_{ij} biểu thị lượng của dòng vận chuyển trên cung (i, j). Véc tơ x có các thành phần là x_{ij}, $(i, j) \in E$, được gọi là một *dòng* (flow) trên mạng. Một dòng được gọi là *chấp nhận được* nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

◦ *Luật bảo toàn dòng*: (tổng lượng) dòng vào nút i phải bằng (tổng lượng) dòng ra khỏi nút i:

$$\sum_{j \in I(i)} x_{ji} + d_i = \sum_{j \in O(i)} x_{ij}, \quad \forall i \in V, \tag{4.5}$$

trong đó

$I(i) := \{j \in V \mid (j, i) \in E\}$ là tập tất cả các nút j có cung xuất phát từ đó tới i,
$O(i) := \{j \in V \mid (i, j) \in E\}$ là tập tất cả các nút j có cung từ i tới.

◇ *Dòng trên cung là không âm* (với giả thiết cung có tải năng không hạn chế):

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E. \tag{4.6}$$

Gọi c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị dòng trên cung $(i,j) \in E$. Bài toán *dòng trên mạng* được phát biểu là:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

với điều kiện $x = (x_{ij})$ thỏa mãn (4.5) và (4.6).

Chú ý rằng, lấy tổng hai vế của (4.5) theo mọi $i \in V$ ta có

$$\sum_{i\in V} d_i = 0, \tag{4.7}$$

tức tổng dòng từ ngoài vào mạng phải bằng tổng dòng từ mạng ra ngoài. Bài toán dòng trên mạng có nghiệm khi và chỉ khi điều kiện (4.7) được thỏa mãn.

Với ngôn ngữ dòng trên mạng, bài toán vận tải là một bài toán dòng trên mạng với tập các nút được chia làm hai phần rời nhau $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ sao cho mọi cung đều xuất phát từ một nút ở V_1 và đến mọi nút ở V_2, tức ta có tập cung

$$E = \{(i,j) \mid i \in V_1,\ j \in V_2\}.$$

Như vậy, đồ thị trong trường hợp này là đồ thị hai phía (bipartite). Dễ thấy

$$I(i) = \emptyset \text{ và } O(i) = V_2 \qquad \forall i \in V_1$$

và

$$I(i) = V_1 \text{ và } O(i) = \emptyset \qquad \forall i \in V_2.$$

Mỗi nút $i \in V_1$ là một điểm phát, mỗi nút $j \in V_2$ là một điểm thu trong bài toán vận tải. Ta gán

$$d_i := a_i \text{ với mọi } i \in V_1 \quad \text{và} \quad d_j := -b_j \text{ với mọi } j \in V_2.$$

Khi đó bài toán vận tải được phát biểu như một bài toán dòng trên mạng: tìm dòng $x = (x_{ij})$ sao cho

$$\min f(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{v.đ.k.} \sum_{j\in V_2} x_{ij} = a_i,\ i \in V_1,$$

$$\sum_{i\in V_1} x_{ij} = b_j,\ j \in V_2,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in E.$$

Vì vậy, ta có thể áp dụng các thuật toán giải bài toán dòng trên mạng, chẳng hạn thuật toán đơn hình mạng (network simplex algorithm) (xem [2], [8], [18]) để giải.

Như sẽ chứng minh ngay sau đây (Định lý 4.1), bài toán vận tải có nghiệm tối ưu khi và chỉ khi tổng lượng phát bằng tổng lượng thu

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Đây chính là điều kiện (4.7) tương ứng cho bài toán vận tải.

4.1.2 Sự tồn tại phương án tối ưu

Định lý sau cho phép ta dễ dàng nhận biết xem bài toán vận tải có phương án tối ưu hay không?

Định lý 4.1. (Định lý tồn tại) *Bài toán vận tải có phương án tối ưu khi và chỉ khi tổng tất cả các lượng phát bằng tổng tất cả các lượng thu, tức là*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4.8}$$

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử bài toán vận tải có phương án tối ưu $x^* = (x^*_{ij})$. Do đó x^* phải thỏa mãn các ràng buộc (4.1) và (4.2), tức

$$\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Và ta nhận được biểu thức (4.8),

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

$(\Leftarrow)$ Giả sử điều kiện (4.8) thoả mãn, ta chứng minh bài toán vận tải có phương án tối ưu. Đặt

$$d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

và $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$, trong đó

$$\bar{x}_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}, \quad i = 1, \cdots, m, \ j = 1, \cdots, n.$$

Dễ thấy, $\bar{x}$ là một phương án chấp nhận được của bài toán vận tải vì nó thoả mãn các ràng buộc (4.1) – (4.3). Do đó tập chấp nhận được của bài toán khác rỗng. Do ràng buộc (4.1) và (4.2) nên phương án chấp nhận được bất kỳ $x = (x_{ij})$ luôn phải có $x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}$ với mọi $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Suy ra tập chấp nhận được là bị chặn. Theo Định lý 3.1 và Hệ quả 3.1, bài toán vận tải có phương án tối ưu và đạt tại ít nhất một phương án cực biên. □

Điều kiện (4.8) được gọi là *điều kiện cân bằng thu phát* và bài toán vận tải thoả mãn ràng buộc này gọi là *bài toán vận tải cân bằng* (balanced transportation problem). Từ đây trở đi, nếu không nói gì thêm thì bài toán vận tải được xét luôn thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát.

4.2 Bảng vận tải, chu trình

4.2.1 Bảng vận tải

Cách thuận tiện nhất là biểu diễn các số liệu của bài toán vận tải trong bảng (xem Bảng 4.1) gồm $m+1$ hàng (đánh số: $0, 1, \cdots, m$) và $(n+1)$ cột (đánh số: $0, 1, \cdots, n$). Ô nằm ở giao hàng i và cột j là ô (i, j), $i = 0, 1, \cdots, m$, $j = 0, 1, \cdots, n$. Lượng phát a_i được ghi vào ô $(i, 0)$, $i = 1, \cdots, m$; Lượng thu b_j được ghi vào ô $(0, j)$, $j = 1, \cdots, n$.

Bảng 4.1

a_i \ b_j	b_1	$\dots$	b_j	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}		c_{1j}		c_{1n}
$\vdots$			$\vdots$		
a_i	c_{i1}		c_{ij} x_{ij}		c_{in}
$\vdots$			$\vdots$		
a_m	c_{m1}		c_{mj}		c_{mn}

Tập các ô

$$T = \{(i, j) \mid i = 1, \cdots, m, \; j = 1, \cdots, n\}$$

được gọi là *phần chính* của bảng vận tải. Từ đây, ta dùng thuật ngữ *bảng vận tải* (transportation table) để chỉ phần chính này. Chi phí vận chuyển c_{ij} được ghi ở góc trên bên trái ô $(i,j) \in T$. Giả sử $x = (x_{ij})$ là một phương án của bài toán vận tải. Ta điền giá trị $x_{ij} > 0$ vào góc dưới, bên phải của ô $(i,j) \in T$.

Có thể thấy ngay rằng có sự tương ứng $1-1$ giữa các ô $(i,j) \in T$ và các véc tơ cột A_{ij} của ma trận A. Ký hiệu

$$G(x) = \{(i,j) \in T \mid x_{ij} > 0\}$$

và $|G(x)|$ là số phần tử của $G(x)$. Mỗi ô $(i,j) \in G(x)$ được gọi là một *ô chọn* hay *ô sử dụng* và gọi ô $(i,j) \notin G(x)$ là *ô loại*. Như vậy, một phương án cực biên có không quá $(m+n-1)$ ô chọn hay ô sử dụng. Phương án cực biên không suy biến có đúng $(m+n-1)$ ô chọn.

4.2.2 Chu trình

Khái niệm chu trình và các tính chất của nó rất hữu ích trong việc thiết lập cơ sở lý thuyết để giải bài toán vận tải.

Định nghĩa. Một tập được sắp thứ tự các ô của bảng vận tải được gọi là *chu trình* nếu nó thoả mãn đồng thời ba tính chất sau:

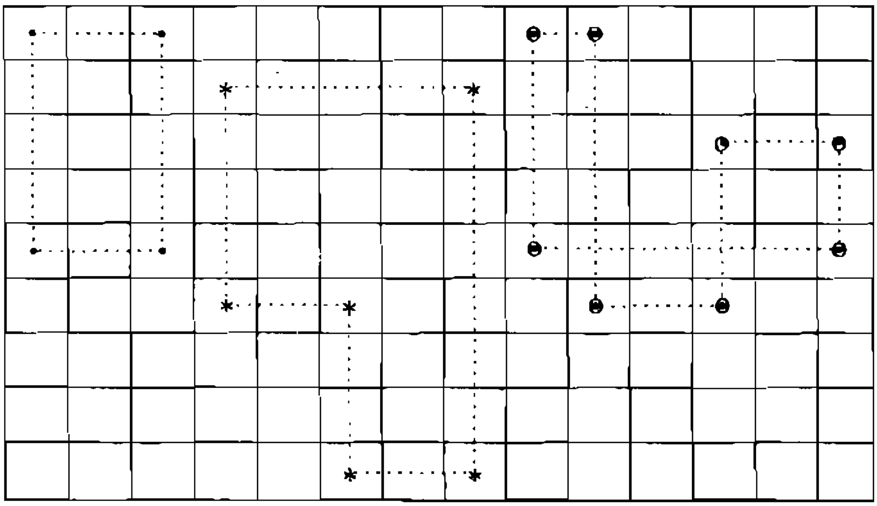
i) Hai ô cạnh nhau nằm trong cùng một hàng hay một cột;
ii) Không có ba ô nằm trên cùng một hàng hay một cột;
iii) Ô đầu tiên nằm trong cùng một hàng hay một cột với ô cuối cùng.

Ví dụ 4.1. Dãy các ô sau đây của bảng vận tải lập thành chu trình

i) $(i_1,j_1),(i_1,j_2),(i_2,j_2),(i_2,j_3),\cdots,(i_s,j_s),(i_s,j_1)$
ii) $(i_1,j_1),(i_2,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_2),\cdots,(i_s,j_s),(i_1,j_s)$

Một số dạng của chu trình được minh họa ở Bảng 4.2.

Bảng 4.2



Như vậy, chu trình là tập hợp ô trong bảng vận tải mà trong đó mỗi ô đều nằm trên cùng một hàng (hoặc cùng một cột) chỉ với một ô đứng trước, đồng thời nằm trên cùng một cột (hoặc cùng một hàng) chỉ với một ô đứng sau nó. Từ định nghĩa ta thấy một hàng hoặc một cột mà chu trình đi qua bao giờ cũng chỉ có hai ô thuộc chu trình, do đó, tổng số ô trên chu trình là chẵn và ít nhất là bốn ô.

Giả sử $G \subset T$ là một tập các ô nào đó của bảng vận tải.

Định nghĩa. Ta nói $G \subset T$ *chứa chu trình* nếu ta có thể xây dựng được ít nhất một chu trình gồm các ô thuộc $G^0 \subseteq G$. Trong trường hợp ngược lại, ta nói *G không chứa chu trình*.

Bổ đề sau cho ta dấu hiệu đơn giản để nhận biết một tập các ô G của bảng vận tải có chứa chu trình hay không?

Bổ đề 4.1. *Giả sử tập các ô G của bảng vận tải thoả mãn tính chất: trong mỗi hàng và mỗi cột của bảng vận tải hoặc không chứa ô nào của G hoặc có ít nhất là hai ô của G. Khi đó G chứa chu trình.*

Chứng minh. Gọi các ô trong tập G là các ô chọn. Theo giả thiết, trong mỗi hàng và mỗi cột của bảng vận tải hoặc không có ô chọn nào hoặc có ít nhất hai ô chọn. Bắt đầu từ một ô chọn nào đó, chẳng hạn ô (i_1, j_1) ta đánh dấu ô này bởi dấu $(+)$. Theo giả thiết, trên hàng i_1, có ít nhất một ô chọn khác, giả sử (i_1, j_2), ta đánh dấu ô này bởi $(-)$. Vì (i_1, j_2) không phải ô chọn duy nhất trên cột j_2 nên đi theo cột này ta đến được ô chọn khác là (i_2, j_2) và đánh dấu $(+)$. Tiếp tục dịch chuyển tiếp trên hàng i_2 đến (i_2, j_3) và đánh dấu $(-)$ v.v... Quá trình này không thể kéo dài vô tận vì số ô của bảng vận tải là hữu hạn. Vì vậy đến một lúc nào đó ta sẽ quay trở lại một ô nào đó mà trước đó ta đã đi qua tức đã phát hiện ra một chu trình. $\square$

Kết quả sau mô tả mối quan hệ giữa các véc tơ cột của ma trận A và các ô tương ứng với chúng trong bảng vận tải.

Định lý 4.2. *Cho tập các ô $G \subset T$. Khi đó, hệ véc tơ $\{A_{ij} \mid (i, j) \in G\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi G không chứa chu trình.*

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử hệ véc tơ $\{A_{ij} | (i, j) \in G\}$ độc lập tuyến tính. Ta chứng minh G không chứa chu trình. Giả thiết phản chứng rằng G chứa một chu trình, chẳng hạn chu trình đó là

$$(i_1, j_1)(i_1, j_2)(i_2, j_2)(i_2, j_3), \cdots, (i_s, j_s)(i_s, j_{s+1} = j_1).$$

Ta có

$$A_{i_1j_1} - A_{i_1j_2} + A_{i_2j_2} - A_{i_2j_3} + \cdots + A_{i_sj_s} - A_{i_sj_1} \overset{(4.4)}{=}$$

$$(e^{i_1} + e^{m+j_1}) - (e^{i_1} + e^{m+j_2}) + \cdots + (e^{i_s} + e^{m+j_s}) - (e^{i_s} + e^{m+j_1}) = 0,$$

trong đó e^k, $k \in \{i_1, \cdots, i_s, m+j_1, \cdots, m+j_s\}$ là véc tơ đơn vị thứ k trong không gian $\mathbb{R}^{m+n}$. Theo định nghĩa, hệ véc tơ $\{A_{i_1j_1}, A_{i_1j_2}, \cdots, A_{i_sj_s}, A_{i_sj_1}\}$ phụ thuộc tuyến tính. Vì

$$\{A_{i_1j_1}, A_{i_1j_2}, \cdots, A_{i_sj_s}, A_{i_sj_1}\} \subseteq \{A_{ij} \mid (i,j) \in G\}$$

nên hệ $\{A_{ij}|(i,j) \in G\}$ phụ thuộc tuyến tính. Mâu thuẫn này chứng tỏ G không chứa chu trình.

($\Leftarrow$) Giả sử các ô thuộc G không chứa chu trình. Ta sẽ chứng minh hệ $\{A_{ij}|(i,j) \in G\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét đẳng thức

$$\sum_{(i,j)\in G} \alpha_{ij} A_{ij} = 0. \tag{4.9}$$

Vì G không chứa chu trình, theo Bổ đề 4.1, tồn tại một ô $(r,s) \in G$ mà nó là ô duy nhất trên hàng r hoặc trên cột s. Chẳng hạn, (r,s) mà nó là ô duy nhất trên hàng r, tức trong hệ $\{A_{ij}|(i,j) \in G\}$ có duy nhất một véc tơ A_{ij} với $i = r$.

Mặt khác,

$$A_{rs} = e^r + e^{m+s} = (0, \cdots, \underbrace{1}_{r}, \cdots, 0, \cdots, \underbrace{1}_{m+s}, \cdots, 0)^T$$

nên từ (4.9) suy ra $\alpha_{rs} = 0$. Loại ô (r,s) khỏi G, đặt $G' = G \setminus (r,s)$. Tập G' cũng không chứa chu trình ... Tương tự, ta chứng minh được $\alpha_{ij} = 0$ với mọi $(i,j) \in G$, chứng tỏ $\{A_{ij}|(i,j) \in G\}$ độc lập tuyến tính. □

Hệ quả 4.1. *Phương án $x = (x_{ij})$ là phương án cực biên khi và chỉ khi tập các ô chọn $G(x) = \{(i,j) \mid x_{ij} > 0\}$ không chứa chu trình.*

Chứng minh. Bài toán vận tải là một quy hoạch tuyến tính nên phương án $x = (x_{ij})$ là một phương án cực biên khi và chỉ khi các véc tơ $\{A_{ij} \mid x_{ij} > 0\}$ độc lập tuyến tính (Định lý 3.6). Theo Định lý 4.2, điều đó xảy ra khi và chỉ khi tập các ô sử dụng $G(x)$ không chứa chu trình. □

Do các kết quả trên, người ta còn hay gọi phương án cực biên của bài toán vận tải là *phương án không chứa chu trình*.

Ví dụ 4.2. Cho bài toán vận tải với véc tơ lượng phát $a = (50, 70, 55)^T$; véc tơ lượng thu $b = (30, 60, 60, 25)^T$ và ma trận chi phí

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 & 7 \\ 5 & 9 & 6 & 1 \\ 8 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bài toán này có nghiệm không?

ii) Chứng minh rằng

$$x^0 = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{là phương án cực biên.}$$

iii) Tính chi phí phải trả nếu thực hiện theo phương án x^0 này.

Giải. Bài toán có $m = 3$ điểm phát và $n = 4$ điểm thu.

i) Vì $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 175$, tức điều kiện cân bằng thu phát được thỏa mãn, nên bài toán có nghiệm tối ưu (Định lý 4.1).

ii) Vì $x^0 \geq 0$ và

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j}^0 = 30 + 20 + 0 + 0 = 50 = a_1, \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i1}^0 = 30 + 0 + 0 = 30 = b_1$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{2j}^0 = 0 + 40 + 30 + 0 = 70 = a_2, \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i2}^0 = 20 + 40 + 0 = 60 = b_2$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{3j}^0 = 0 + 0 + 30 + 25 = 55 = a_3, \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i3}^0 = 0 + 30 + 30 = 60 = b_3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4}^0 = 0 + 0 + 25 = 25 = b_4.$$

nên x^0 là một phương án chấp nhận được. Ta có

$$G(x^0) = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4)\}$$

và dễ thấy $G(x^0)$ không chứa chu trình. Theo Hệ quả 4.1, phương án x^0 là một phương án cực biên.

iii) Chi phí phải trả nếu thực hiện theo phương án này là

$$\begin{aligned} f(x^0) &= \sum_{(i,j)\in G(x^0)} c_{ij} x_{ij}^0 \\ &= 4 \times 30 + 7 \times 20 + 9 \times 40 + 6 \times 30 + 9 \times 30 + 1 \times 25 \\ &= 1095. \end{aligned}$$

Hệ quả 4.2. *Cho bảng vận tải $T = \{(i,j) \mid i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n\}$ với $m \geq 2$, $n \geq 2$. Mọi tập $G \subset T$ có $|G| \geq m + n$ đều chứa chu trình.*

Chứng minh. Vì $\operatorname{rank} A = m + n - 1$ và $|G| \geq m + n$ nên hệ các véc tơ $\{A_{ij} \mid (i,j) \in G\}$ phụ thuộc tuyến tính. Theo Định lý 4.2, tập G phải chứa chu trình. $\square$

Hệ quả 4.3. *Cho tập $P \subset T$ là tập gồm $(m+n-1)$ ô. Giả sử P không chứa chu trình và $(i_0, j_0) \notin P$. Khi đó $P \cup (i_0, j_0)$ sẽ chứa một chu trình duy nhất.*

Chứng minh. Vì tập $P \cup \{(i_0, j_0)\}$ có $m+n$ ô nên, theo Hệ quả 4.2, nó phải chứa chu trình. Vì tập P không chứa chu trình nên chu trình này phải đi qua (i_0, j_0) và đó là chu trình duy nhất. Thật vậy, giả sử phản chứng là $P \cup \{(i_0, j_0)\}$ chứa hai chu trình khác nhau K và K', chẳng hạn

$$K = \{(i_0, j_0)(i_0, j_1)(i_1, j_1), \cdots, (i_k, j_k)(i_k, j_0)\}$$

$$K' = \{(i_0, j_0)(i_0, \bar{j}_1)(\bar{i}_1, \bar{j}_1), \cdots, (\bar{i}_k, \bar{j}_k)(\bar{i}_k, j_0)\}.$$

Từ K và K' ta lập được chu trình mới

$$K^* = \{(i_0, j_1)(i_1, j_1), \cdots, (i_k, j_k)(i_k, j_0)(\bar{i}_k, j_0)(\bar{i}_k, \bar{j}_k), \cdots, (i_0, \bar{j}_1)\}$$

không đi qua (i_0, j_0). Điều này trái với giả thiết là P không chứa chu trình và chứng tỏ giả thiết phản chứng sai. □

4.3 Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải

Có nhiều phương pháp được đề xuất để giải bài toán vận tải và có thể chia chúng thành hai loại: các phương pháp cải thiện dần phương án (đại diện là phương pháp thế vị) và các phương pháp giảm dần độ lệch khỏi ràng buộc (đại diện là phương pháp Hungary (xem [18], [36]).

Mục này dành để giới thiệu phương pháp thế vị[2] (theo cách thường gọi của một số nước như Việt Nam, Nga...) giải bài toán vận tải. Tương tự thuật toán đơn hình giải quy hoạch tuyến tính, thuật toán thế vị giải bài toán vận tải cũng xuất phát từ một phương án cực biên x^0. Do bài toán vận tải luôn có nghiệm nên từ x^0 chỉ có một trong hai trường hợp sau xảy ra:

i) Nếu x^0 thỏa mãn tiêu chuẩn tối ưu (Định lý 4.3) thì dừng thuật toán;

ii) Ngược lại, ta chuyển đến phương án cực biên x^1 thỏa mãn $f(x^1) \le f(x^0)$; Gán $x^0 := x^1$ và lặp lại quá trình tính toán với x^0 mới.

[2]Phương pháp thế vị chính là phương pháp nhân tử (method of multipliers). Nó cũng có tên là phương pháp đơn hình vận tải (transportation simplex method).

4.3.1 Cơ sở lý thuyết

Xét bài toán vận tải

$$\min \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{PT}$$

$$\text{v.đ.k.} \; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m, \; j = 1, \cdots, n.$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải (PT) là

$$\max \; g(y) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \tag{DT}$$

$$\text{v.đ.k.} \; u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n,$$

trong đó $y = (u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n)^T$.

Để đơn giản việc trình bày, giả sử rằng bài toán vận tải (PT) là không suy biến, tức các phương án cực biên của nó đều không suy biến. Cách nhận biết và khắc phục khi gặp phương án cực biên suy biến sẽ trình bày chi tiết ở Chú ý 4.3.

Cho phương án x^0. Như thường lệ, ký hiệu $G(x^0) = \{(i,j) \in T \mid x^0_{ij} > 0\}$. Sau đây là điều kiện cần và đủ để phương án $x = (x^0_{ij})$ là phương án tối ưu.

Định lý 4.3. *Phương án $x^0 = (x^0_{ij})$ của bài toán vận tải (PT) là phương án tối ưu khi và chỉ khi tồn tại các số u_i, $i = 1, \cdots, m$, và v_j, $j = 1, \cdots, n$ thỏa mãn*

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \;\; \forall (i,j) \in T \tag{4.10}$$

$$u_i + v_j = c_{ij}, \;\; \forall (i,j) \in G(x^0). \tag{4.11}$$

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử phương án $x^0 = (x^0_{ij})$ là phương án tối ưu của bài toán vận tải (PT). Theo Định lý đối ngẫu mạnh (Định lý 3.12), bài toán đối ngẫu (DT) có phương án tối ưu $y^0 = (u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n)^T$. Do y^0 phải là phương án chấp nhận được của bài toán đối ngẫu nên nó thỏa mãn mọi ràng buộc của bài toán, tức

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, \cdots, m, \;\; j = 1, \cdots, n.$$

Và đây chính là điều kiện (4.10). Hơn nữa, vì x^0 là phương án tối ưu của bài toán gốc (PT) và y^0 là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (DT) nên theo Định lý về độ lệch bù (Định lý 3.14) ta có

$$\langle c - A^T y^0, x^0 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{nếu } x^0_{ij} > 0 \text{ thì } u_i + v_j = c_{ij},$$

hay điều kiện (4.11) được thỏa mãn.

($\Leftarrow$) Cho phương án $x^0 = (x^0_{ij})$. Giả sử tồn tại các số u_i, $i = 1, \cdots, m$, và v_j, $j = 1, \cdots, n$ thỏa mãn (4.10) và (4.11). Ta phải chứng minh x^0 là phương án tối ưu. Thật vậy, do có (4.11) và do $x^0_{ij} = 0$ với $(i,j) \notin G(x^0)$ nên giá trị hàm mục tiêu tại x^0 là

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^0_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j)x^0_{ij}. \tag{4.12}$$

Giả sử $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$ là một phương án bất kỳ của bài toán vận tải. Ta có

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\bar{x}_{ij} &\overset{(4.10)}{\geq} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j)\bar{x}_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \qquad \text{(vì } \bar{x} \text{ là một phương án)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x^0_{ij} \qquad \text{(vì } x^0 \text{ là một phương án)} \\
&\overset{(4.12)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j)x^0_{ij} = f(x^0).
\end{aligned}$$

Vậy x^0 là phương án tối ưu của bài toán vận tải đang xét. □

Chú ý 4.1. Giả sử x^0 là phương án cực biên không suy biến. Ta có các véc tơ $\{A_{ij} \mid (i,j) \in G(x^0)\}$ độc lập tuyến tính và $|G(x^0)| = m + n - 1$. Do đó hệ (4.11) tương ứng

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i,j) \in G(x^0)$$

có $m+n-1$ phương trình độc lập tuyến tính với nhau và $m+n$ biến u_i, $i = 1, \cdots, m$ và v_j, $j = 1, \cdots, n$. Do đó để giải hệ này, có thể cho một biến giá trị tùy ý (thông thường cho $u_1 = 0$) và các ẩn còn lại được xác định duy nhất bằng phương pháp thế. Như vậy, mỗi phương án cực biên không suy biến $x^0 = (x^0_{ij})$ tương ứng với một bộ số u_i, $i = 1, \cdots, m$ và v_j, $j = 1, \cdots, n$ (sai khác một hằng số) thỏa mãn (4.11). Ta gọi các số u_i, v_j này là các *thế vị*. Các đại lượng $\Delta_{ij} := u_i + v_j - c_{ij}$ là được gọi là các *ước lượng*. Khi đó, điều kiện (4.10) được viết lại là

$$\Delta_{ij} \leq 0 \text{ với mọi } (i,j) \in T.$$

Định lý sau đây và nội dung chứng minh của nó cho ta biết dấu hiệu nhận biết phương án cực biên không suy biến x^0 chưa phải tối ưu và từ đó chuyển sang một phương án cực biên x^1 mà tại đó giá trị hàm mục tiêu tốt hơn tại x^0.

Định lý 4.4. *Giả sử x^0 là phương án cực biên không suy biến của bài toán vận tải và $u_i, v_j, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$ là bộ các thế vị tương ứng với nó. Nếu*

$$\exists \text{ ô } (i_k, j_k) \notin G(x^0) \text{ sao cho } \Delta_{i_k j_k} > 0 \tag{4.13}$$

thì x^0 không phải phương án tối ưu và từ x^0 ta chuyển đến được một phương án cực biên x^1 tốt hơn x^0, tức

$$f(x^1) < f(x^0).$$

Chứng minh. Giả sử có điều kiện (4.13). Ta sẽ chứng minh rằng, từ x^0 có thể chuyển sang được phương án cực biên x^1 thỏa mãn $f(x^1) < f(x^0)$.

Do x^0 là phương án cực biên không suy biến nên $|G(x^0)| = m + n - 1$ và $G(x^0)$ không chứa chu trình (Hệ quả 4.1). Theo Hệ quả 4.3, tập $G(x^0) \cup \{(i_k, j_k)\}$ chứa một chu trình K duy nhất đi qua (i_k, j_k). Đánh dấu các ô trong K bởi các dấu + và −, xuất phát từ ô (i_k, j_k) với dấu +, sao cho không có hai ô nào cạnh nhau trong K lại được đánh dấu bởi cùng một dấu. Ký hiệu

$$K^+ := \{ \text{ các ô trong } K \text{ được đánh dấu } + \},$$
$$K^- := \{ \text{ các ô trong } K \text{ được đánh dấu } - \}.$$

Xây dựng phương án $x^1 = (x^1_{ij})$ theo công thức

$$x^1_{ij} = \begin{cases} x^0_{ij} + \theta & \text{nếu } (i,j) \in K^+ \\ x^0_{ij} - \theta & \text{nếu } (i,j) \in K^- \\ x^0_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin K, \end{cases} \tag{4.14}$$

với

$$\theta = \min\{x^0_{ij} \mid (i,j) \in K^-\} = x^0_{i_r j_r}. \tag{4.15}$$

Vì x^0 là phương án cực biên không suy biến nên $\theta > 0$. Theo cách xây dựng chu trình K và phương án x^1 ta có

$$x^1_{i_k j_k} = \theta > 0. \tag{4.16}$$

Từ (4.14) và (4.15) rõ ràng $x^1_{ij} \geq 0$ với mọi (i,j). Vì các ô trong K từng đôi thuộc K^+ và K^- xen kẽ nhau nên

$$\sum_{j=1}^{n} x^1_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x^1_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x^0_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Do đó x^1 là một phương án chấp nhận được của bài toán vận tải. Dễ thấy

$$G(x^1) = \big(G(x^0) \setminus \{(i_r, j_r)\}\big) \cup \{(i_k, j_k)\}.$$

Vì K là chu trình duy nhất chứa trong $G(x^0) \cup \{(i_k, j_k)\}$, mà theo cách chọn thì $(i_r, j_r) \in K$ nên ô chọn mới là (i_k, j_k) không thể tạo thành chu trình với các ô thuộc $G(x^0) \setminus \{(i_r, j_r)\}$, tức $G(x^1)$ không chứa chu trình. Điều đó chứng tỏ x^1 là phương án cực biên (Hệ quả 4.1).

Do $u_i + v_j = c_{ij}$ với mọi $(i,j) \in G(x^0)$ và $x^0_{ij} = 0$ với mọi $(i,j) \notin G(x^0)$ nên giá trị hàm mục tiêu tại x^0 là

$$\begin{aligned} f(x^0) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^0_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j)x^0_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x^0_{ij}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Do $G(x^0)\setminus\{(i_r, j_r)\} = G(x^1)\setminus\{(i_k, j_k)\}$ nên

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{với} \quad (i,j) \in G(x^1)\setminus\{(i_k, j_k)\}. \tag{4.18}$$

Để cho đơn giản cách viết, ta ký hiệu $\widehat{G} := G(x^1) \setminus \{(i_k, j_k)\}$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x^1) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^1_{ij} \\ &= \sum_{(i,j)\in\widehat{G}} c_{ij}x^1_{ij} + c_{i_kj_k}x^1_{i_kj_k} + \sum_{(i,j)\notin G(x^1)} c_{ij}x^1_{ij} \\ &= \underbrace{\sum_{(i,j)\in\widehat{G}} (u_i + v_j)x^1_{ij}}_{(theo\ (4.18))} + \underbrace{(u_{i_k} + v_{j_k} - \Delta_{i_kj_k})}_{(do\ \Delta_{i_kj_k} = u_{i_k} + v_{j_k} - c_{i_kj_k})} x^1_{i_kj_k} + \underbrace{\sum_{(i,j)\notin G(x^1)} (u_i + v_j)x^1_{ij}}_{(do\ x^1_{ij} = 0\ \forall (i,j)\notin G(x^1))} \\ &\overset{(4.16)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j)x^1_{ij} - \theta\Delta_{i_kj_k} \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j - \theta\Delta_{i_kj_k} \qquad \text{(do } x^1 \text{ là một phương án)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x^0_{ij} - \theta\Delta_{i_kj_k} \qquad \text{(do } x^0 \text{ là một phương án)} \\ &\overset{(4.17)}{=} f(x^0) - \theta\Delta_{i_kj_k}. \end{aligned}$$

Vì $\theta > 0$ và $\Delta_{i_k j_k} > 0$ nên

$$f(x^1) = f(x^0) - \theta\Delta_{i_k j_k} < f(x^0). \tag{4.19}$$

Định lý đã được chứng minh. □

Chú ý 4.2. Cho phương án cực biên không suy biến x^0 và bộ thế vị u_i, v_j tương ứng với x^0. Theo chứng minh Định lý 4.4, nếu x^0 chưa phải phương án tối ưu thì ta chuyển sang được phương án cực biên x^1 và giá trị hàm mục tiêu tại x^1 giảm được một lượng là $\theta\Delta_{i_k j_k}$ (xem (4.19)), tức phụ thuộc cả vào θ và $\Delta_{i_k j_k}$, trong đó θ được tính theo (4.15). Với mong muốn giá trị hàm mục tiêu giảm được nhiều nhất có thể và vừa đơn giản việc tính toán, trong trường hợp có nhiều ô $(i, j) \notin G(x^0)$ cùng có $\Delta_{ij} > 0$ thuật toán thế vị giải bài toán vận tải chọn ô (i_s, j_s) sao cho

$$\Delta_{i_s j_s} = \max\{\Delta_{ij} > 0 \mid (i, j) \notin G(x^0)\}$$

và gọi ô (i_s, j_s) là *ô điều chỉnh*. Sau đó xây dựng phương án cực biên x^1 theo (4.14) với ô (i_k, j_k) được thay bởi (i_s, j_s). Chu trình K được gọi là *chu trình điều chỉnh*. Chi tiết thuật toán thế vị sẽ được trình bày ở mục tiếp theo.

4.3.2 Thuật toán thế vị

Như đã nói, thuật toán thế vị giải bài toán vận tải xuất phát từ một phương án cực biên. Việc xác định một phương án cực biên của bài toán vận tải đơn giản hơn rất nhiều so với việc tìm phương án cực biên của một bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và sẽ được trình bày trong Mục 4.4. Mục này dành để giới thiệu thuật toán thế vị giải bài toán vận tải không suy biến, tức các phương án cực biên đều có đúng $(m + n - 1)$ thành phần dương, với giả thiết đã biết trước một phương án cực biên.

Thuật toán 4.1. (*Thuật toán thế vị*)

Bước khởi tạo. Giả sử đã biết phương án cực biên không suy biến $x^0 = (x^0_{ij})$. Tập ô chọn tương ứng với x^0 là $G(x^0) = \{(i, j) \mid x^0_{ij} > 0\}$ gồm $(m + n - 1)$ phần tử và không chứa chu trình.

Bước 1. Xác định các thế vị u_i, $i = 1, \cdots, m$ và v_j, $j = 1, \cdots, n$ tương ứng với phương án cực biên x^0 bằng việc giải hệ phương trình (*xem Chú ý 4.1*)

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in G(x^0).$$

Bước 2. Tính các ước lượng

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall (i, j) \notin G(x^0) \quad (\textit{Luôn có } \Delta_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in G(x^0)).$$

Điền ước lượng Δ_{ij} với $(i, j) \notin G(x^0)$ vào góc dưới bên phải của ô (i, j).

Bước 3. (*Kiểm tra điều kiện tối ưu*)

If $\Delta_{ij} \leq 0$ với mọi $(i, j) \notin G(x^0)$ **Then** Dừng thuật toán
(x^0 *là phương án tối ưu (Định lý 4.3)*)

Else Chuyển Bước 4.

Bước 4. (*Điều chỉnh phương án*)

(4.1) Xác định ô điều chỉnh (i_s, j_s) với

$$\Delta_{i_s j_s} = \max\{\Delta_{ij} > 0 \mid (i, j) \notin G(x^0)\}.$$

(4.2) Tìm chu trình điều chỉnh duy nhất K trong tập $G(x^0) \cup (i_s, j_s)$.

(4.3) Đánh dấu lần lượt các ô trong chu trình bởi dấu $(+)$ và $(-)$ với $(i_s, j_s) \in K^+$.

(4.4) Xây dựng phương án mới $x^1 = (x^1_{ij})$ với

$$x^1_{ij} = \begin{cases} x^0_{ij} + \theta & \text{nếu } (i,j) \in K^+ \\ x^0_{ij} - \theta & \text{nếu } (i,j) \in K^- \\ x^0_{ij} & \text{nếu } (i,j) \notin K, \end{cases}$$

trong đó $\theta = x^0_{i_r j_r} = \min\{x^0_{ij} \mid (i, j) \in K^-\}$. Ta có

$$G(x^1) := \Big(G(x^0) \setminus (i_r, j_r)\Big) \cup (i_s, j_s)$$

và $G(x^1)$ không chứa chu trình (tức x^1 là phương án cực biên mới).

(4.5) Gán $x^0 := x^1$; $G(x^0) := G(x^1)$ và quay lại Bước 1.

Định lý 4.5. *Nếu bài toán vận tải không suy biến thì thuật toán thế vị là hữu hạn, tức sau hữu hạn phép tính ta sẽ nhận được nghiệm tối ưu.*

Chứng minh. Bài toán vận tải thoả mãn điều kiện cân bằng thu phát nên luôn có nghiệm tối ưu (Định lý 4.1). Do bài toán không suy biến nên tại mỗi bước lặp ta đều có $\theta > 0$ và giá trị hàm mục tiêu giảm thực sự (xem (4.19)). Vì vậy, sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ nhận được phương án tối ưu. □

Mệnh đề 4.2. *Nếu các lượng phát* a_i, $i = 1, \cdots, m$ *và các lượng thu* b_j, $j = 1, \cdots, n$ *đều là các số nguyên thì bài toán vận tải* (PT) *sẽ có nghiệm tối ưu với các thành phần đều nguyên.*

Chứng minh. Trong các bước tính toán của thuật toán thế vị ta không phải dùng phép chia. Do đó, nếu dữ liệu ban đầu a_i, b_j là các số nguyên thì theo các cách tìm phương án cực biên xuất phát như sẽ trình bày ở Mục 4.4, phương án xuất phát cũng sẽ có các thành phần nguyên. Vì thế qua các bước lặp, cho đến phương án tối ưu ta luôn có các thành phần của phương án đều là số nguyên. □

Chú ý 4.3. *(Dấu hiệu nhận biết phương án cực biên suy biến và cách khắc phục)* Tương tự như khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính, trong trường hợp bài toán vận tải suy biến, có hai dấu hiệu để nhận biết:

i) $\theta = 0$. Khi đó, ta vẫn thực hiện thuật toán một cách bình thường, nghĩa là ô điều chỉnh (i_s, j_s) sẽ trở thành ô chọn của phương án cực biên mới x^1 với $x^1_{i_s j_s} = \theta$, còn ô (i_r, j_r) ứng với $x^0_{i_r j_r} = \theta$ ở trên chu trình điều chỉnh sẽ trở thành ô loại đối với phương án x^1. Tuy nhiên, kết quả điều chỉnh không làm thay đổi phương án cực biên (xem (4.14)) mà chỉ thay đổi tập véc tơ cơ sở ứng với phương án đó;

ii) *θ đạt tại nhiều ô khác nhau*. Khi đó, ta sẽ loại một trong những ô này theo quy tắc ngẫu nhiên.

Chú ý 4.4. *(Dấu hiệu bài toán có phương án tối ưu duy nhất và không duy nhất)*

i) Nếu phương án cực biên không suy biến x^0 thoả mãn tiêu chuẩn

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} < 0 \quad \forall (i, j) \notin G(x^0)$$

thì đó là phương án tối ưu duy nhất của bài toán vận tải;

ii) Ngược lại, nếu phương án cực biên không suy biến x^0 là phương án tối ưu và tồn tại ô $(i_p, j_p) \notin G(x^0)$ có $\Delta_{i_p j_p} = 0$ thì x^0 không phải phương án tối ưu duy nhất của bài toán vận tải. Tương tự thuật toán đơn hình giải quy hoạch tuyến tính, muốn tìm một phương án cực biên tối ưu khác x^0, ta chọn (i_p, j_p) làm ô điều chỉnh và thực hiện tiếp một số bước lặp theo thuật toán thế vị (xem kết quả giải bài toán mở rộng (PT_0) trong Ví dụ 4.6).

Sau đây sẽ trình bày một số ví dụ minh họa cho thuật toán thế vị.

Ví dụ 4.3. Giải bài toán vận tải bằng thuật toán thế vị với véc tơ lượng phát a, véc tơ lượng thu b, ma trận chi phí $C = (c_{ij})$ và phương án cực biên xuất phát x^0 như sau:

$$a = (50, 70, 80)^T, \qquad b = (60, 30, 40, 70)^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 30 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 70 \end{pmatrix}.$$

Giải. Bài toán này có $m = 3$ điểm phát và $n = 4$ điểm thu và thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát. Phương án cực biên x^0 có tập ô chọn tương ứng là

$$G(x^0) = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4)\}$$

và giá trị hàm mục tiêu $f(x^0) = 690$.

Vòng lặp thứ nhất. Các số liệu tính toán tương ứng với phương án cực biên x^0 được ghi ở Bảng 4.3. Cụ thể

Bước 1. Xác định các thế vị: Giải hệ phương trình (4.11) ứng với các ô $(i, j) \in G(x^0)$ sau khi đã gán $u_1 := 0$ như sau:

$$\begin{array}{ll}
\text{ô } (1,1): & u_1 + v_1 = c_{11} = 2 \Rightarrow v_1 = 2 - 0 = 2; \\
\text{ô } (2,1): & u_2 + v_1 = c_{21} = 3 \Rightarrow u_2 = 3 - 2 = 1; \\
\text{ô } (2,2): & u_2 + v_2 = c_{22} = 6 \Rightarrow v_2 = 6 - 1 = 5; \\
\text{ô } (2,3): & u_2 + v_3 = c_{23} = 4 \Rightarrow v_3 = 4 - 1 = 3; \\
\text{ô } (3,3): & u_3 + v_3 = c_{33} = 5 \Rightarrow u_3 = 5 - 3 = 2; \\
\text{ô } (3,4): & u_3 + v_4 = c_{34} = 3 \Rightarrow v_4 = 3 - 2 = 1.
\end{array}$$

Bước 2. Tính các ước lượng tương ứng với các ô $(i, j) \notin G(x^0)$.

$$\begin{array}{ll}
\text{ô } (1,2): & \Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 5 - 4 = \ \ 1; \\
\text{ô } (1,3): & \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 3 - 5 = -2; \\
\text{ô } (1,3): & \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 1 = \ \ 0; \\
\text{ô } (2,4): & \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 1 + 1 - 8 = -6; \\
\text{ô } (3,1): & \Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 2 + 2 - 1 = \ \ 3; \\
\text{ô } (3,2): & \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 2 + 5 - 2 = \ \ 5;
\end{array}$$

Bước 3. Vì còn có $\Delta_{12} = 1 > 0$, $\Delta_{31} = 3 > 0$ và $\Delta_{32} = 5 > 0$ và các ô $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$ không thuộc $G(x^0)$ nên phương án cực biên x^0 chưa phải là phương án tối ưu.

Bảng 4.3

	v_j	2	5	3	1
u_i	a_i \ b_j	60	30	40	70
0	50	2 **50**	4 1	5 -2	1 0
1	70	3 **10**	6 − **30**	4 + **30**	8 -6
2	80	1 3	2 + 5	5 − **10**	3 **70**

Bước 4. (*Điều chỉnh phương án*) Ta chọn ô $(i_s, j_s) = (3, 2)$ làm ô điều chỉnh vì

$$\Delta_{32} = \max\{\Delta_{12}, \Delta_{31}, \Delta_{32}\} = \max\{1, 3, 5\} = 5.$$

Ghép ô $(3, 2)$ vào tập $G(x^0)$ ta được chu trình $K = \{(3,2), (3,3), (2,3), (2,2)\}$ với $K^+ = \{(3,2), (2,3)\}$ và $K^- = \{(3,3), (2,2)\}$. Khi đó

$$\theta = \min\{x_{ij}^0 \mid (i,j) \in K^-\} = \min\{x_{33}^0, x_{22}^0\} = \min\{10, 30\} = 10 = x_{33}^0.$$

Do đó $(i_r, j_r) = (3, 3)$. Tiến hành điều chỉnh phương án ta chuyển sang phương án cực biên mới x^1 với giá trị hàm mục tiêu bằng

$$f(x^1) = f(x^0) - \theta\Delta_{32} = 690 - 10 \times 5 = 640$$

và sang Vòng lặp thứ hai với $x^0 := x^1$.

Bảng 4.4

v_j		2	5	3	6
u_i	a_i \ b_j	60	30	40	70
0	50	2 (−) **50**	4 1	5 -2	1 (+) 5
1	70	3 (+) **10**	6 (−) **20**	4 **40**	8 -1
-3	80	1 -2	2 (+) **10**	5 -5	3 (−) **70**

Vòng lặp thứ hai. Các số liệu tính toán tương ứng với phương án cực biên x^0 mới được biểu diễn ở Bảng 4.4. Vì còn $\Delta_{12} = 1 > 0$, $\Delta_{14} = 5 > 0$ và các ô $(1, 2)$, $(1, 4)$ không thuộc $G(x^0)$ nên x^0 chưa phải phương án tối ưu. Dễ thấy, trong bước lặp này ta có $(i_s, j_s) = (1, 4)$. Chu trình K thuộc tập $G(x^0) \cup \{(1, 4)\}$ là

$$K = \{(1, 4), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 4)\}$$

với $K^+ = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2)\}$ và $K^- = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$. Vậy

$$\theta = \min\{x^0_{ij} \mid (i, j) \in K^-\} = \min\{x^0_{11}, x^0_{22}, x^0_{34}\} = \min\{50, 20, 70\} = 20 = x^0_{22}.$$

Do đó $(i_r, j_r) = (2, 2)$. Tiếp tục điều chỉnh phương án theo Bước 4.4 của thuật toán, ta chuyển sang phương án cực biên x^1 mới với giá trị hàm mục tiêu là

$$f(x^1) = f(x^0) - \theta\Delta_{14} = 640 - 20 \times 5 = 540.$$

Gán $x^0 := x^1$ và chuyển sang Vòng lặp thứ ba.

Vòng lặp thứ ba. Các số liệu tính toán tương ứng với phương án x^0 mới tại vòng lặp này được trình bày ở Bảng 4.5.

Bảng 4.5

u_i \ v_j	a_i \ b_j	2: 60	0: 30	3: 40	1: 70
0	50	2 (−) **30**	4 -4	5 -2	1 (+) **20**
1	70	3 **30**	6 -5	4 **40**	8 -6
2	80	1 (+) 3	2 **30**	5 0	3 (−) **50**

Do còn có $\Delta_{31} = 3 > 0$ và $(3,1) \notin G(x^0)$ nên phương án x^0 này chưa phải phương án tối ưu. Ta có ô điều chỉnh $(i_s, j_s) = (3,1)$; chu trình điều chỉnh $K = \{(3,1),(3,4),(1,4),(1,1)\}$ với

$$K^+ = \{(3,1),(1,4)\}, \qquad K^- = \{(3,4),(1,1)\}$$

và $\theta = \min\{x^0_{34}, x^0_{11}\} = x^0_{11} = 30$. Tiếp tục điều chỉnh, ta chuyển sang phương án cực biên x^1 mới với giá trị hàm mục tiêu là

$$f(x^1) = f(x^0) - \theta\Delta_{31} = 540 - 30 \times 3 = 450.$$

Gán $x^0 = x^1$ và chuyển sang bảng vận tải tương ứng với x^0 mới này là Bảng 4.6.

Vòng lặp thứ tư. Các số liệu tính toán tương ứng với phương án cực biên x^0 mới được trình bày ở Bảng 4.6. Vì các ước lượng $\Delta_{ij} < 0$ với mọi $(i,j) \notin G(x^0)$ nên kết thúc thuật toán và ta nhận được phương án tối ưu duy nhất là

$$x^* = x^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 30 & 0 & 40 & 0 \\ 30 & 30 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

và giá trị tối ưu là $f(x^*) = 450$.

Bảng 4.6

	v_j	-1	0	0	1
u_i	a_i \ b_j	60	30	40	70
0	50	2 -3	4 -4	5 -5	1 **50**
4	70	3 **30**	6 -2	4 **40**	8 -3
2	80	1 **30**	2 **30**	5 -3	3 **20**

4.4 Tìm phương án xuất phát cho bài toán vận tải

Có nhiều phương pháp đã được đưa ra để xác định một phương án cực biên của bài toán vận tải. Mục này sẽ trình bày hai phương pháp đơn giản nhất, thường được sử dụng để tìm phương án cực biên xuất phát cho bài toán vận tải thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát: Phương pháp góc tây bắc và phương pháp cực tiểu chi phí. Sau đây ta trình bày các thuật toán, tính đúng đắn của chúng sẽ được chứng minh trong Mệnh đề 4.3.

4.4.1 Phương pháp góc tây bắc (northwest - conner rule)

Trước hết, ta lập bảng vận tải T với các số liệu $a_i, b_j, c_{ij}, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$.
• Bắt đầu từ ô ở vị trí góc tây bắc của bảng T (ô $(1, 1)$), ta điền lượng hàng x_{11} lớn nhất có thể vào đó, tức cho chuyển một lượng hàng lớn nhất có thể từ điểm phát 1 đến điểm thu 1. Dễ thấy

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\}.$$

Có một trong ba khả năng sau có thể xảy ra:

◇ **If** $x_{11} = a_1 < b_1$

Then (*điểm phát* 1 *đã hết hàng , điểm thu 1 còn cần* $b_1 - a_1$ *đơn vị hàng*) Xoá hàng thứ nhất của bảng T ta thu được bảng T' gồm $(m-1)$ hàng và n cột với lượng phát, thu tương ứng:

$$a'_i = a_i \quad i = 2, 3, \cdots, m,$$

$$b'_1 = b_1 - x_{11} = b_1 - a_1; \quad b'_j = b_j, \quad j = 2, 3, \cdots, n;$$

◇ **If** $x_{11} = b_1 < a_1$

Then (*điểm phát* 1 *còn* $a_1 - b_1$ *đơn vị hàng, điểm thu 1 đã thỏa mãn nhu cầu*) Xoá cột thứ nhất của bảng T ta thu được bảng T' gồm m hàng và $n-1$ cột với lượng phát, thu tương ứng:

$$a'_1 = a_1 - x_{11} = a_1 - b_1; \quad a'_i = a_i \quad i = 2, 3, \cdots, m,$$
$$b'_j = b_j, \quad j = 2, 3, \cdots, n;$$

◇ **If** $x_{11} = b_1 = a_1$

Then (*điểm phát* 1 *đã hết hàng, điểm thu 1 đã thỏa mãn nhu cầu*) Ta quy ước chỉ xoá cột thứ nhất của bảng T ta thu được bảng T' gồm m hàng và $n-1$ cột với lượng phát, thu tương ứng:

$$a'_1 = 0, \quad a'_i = a_i \quad i = 2, 3, \cdots, m,$$
$$b'_j = b_j, \quad j = 2, 3, \cdots, n;$$

• Đối với bảng T', ta lại thực hiện thủ tục chuyển hàng như đã áp dụng đối với bảng T: Bắt đầu từ ô ở góc tây bắc của bảng T', xác định khối lượng vận chuyển lớn nhất có thể (khối lượng hàng này có thể bằng 0) từ điểm phát đến điểm thu tương ứng, tức điền lượng hàng vận chuyển lớn nhất có thể vào ô này... Cứ tiếp tục đến khi loại hết được tất cả các hàng và các cột của bảng vận tải. Những ô (i, j) không được phân phối hàng có $x_{ij} = 0$.

Ví dụ 4.4. Xét bài toán vận tải với véc tơ lượng phát a, lượng thu b và ma trận chi phí C như ở Ví dụ 4.3.

Bảng 4.7

a_i \ b_j	60	30	40	70
50	2 **50**	4	5	1
70	3 **10**	6 **30**	4 **30**	8
80	1	2	5 **10**	3 **70**

Kết quả tìm phương án cực biên xuất phát x^0 theo phương pháp góc tây bắc được trình bày ở Bảng 4.7. Các thành phần dương của phương án x^0 được ghi vào góc dưới bên phải mỗi ô tương ứng (các thành phần bằng 0 bỏ qua không ghi). Trình tự phân phối hàng theo chiều mũi tên (đường đứt nét). Ta thấy rằng, phương án x^0 này chính là phương án cực biên đã cho trong Ví dụ 4.3.

Nhận xét 4.2. Theo phương pháp góc tây bắc, sau mỗi lần phân phối hàng, ta sẽ xoá đi được 1 hàng (hoặc 1 cột) của bảng. Do đó, đúng sau $m+n-1$ lần phân phối thủ tục trên phải kết thúc (do ở lần cuối ta xoá được cả hàng lẫn cột) và phương án xây dựng theo phương pháp góc tây bắc sẽ có không quá $(m+n-1)$ thành phần dương.

4.4.2 Phương pháp cực tiểu chi phí (The least-cost method)

Trong phương pháp góc tây bắc, khi tiến hành phân phối các lượng vận chuyển, ta luôn chọn ô ở góc tây bắc mà không chú ý đến cước phí vận chuyển. Với phương pháp cực tiểu chi phí, ta sẽ điền một lượng hàng lớn nhất có thể vào ô có cước phí nhỏ nhất toàn bảng vận tải. Chẳng hạn, với bảng đầu tiên là bảng T, ta điền một lượng hàng lớn nhất có thể vào ô (i_0, j_0) mà

$$c_{i_0 j_0} = \min\{c_{ij} \mid (i,j) \in T\},$$

tức cho chuyên chở một lượng hàng lớn nhất có thể từ điểm phát i_0 đến điểm thu j_0 tương ứng. Nếu nhiều ô có cước phí bằng $c_{i_0 j_0}$ thì ta phân hàng vào ô nào có thể nhận lượng hàng lớn nhất. Nếu lượng hàng lớn nhất có thể phân phối vào mỗi ô này như nhau thì chọn phân hàng vào một ô bất kỳ. Các quá trình biến đổi bảng còn lại theo phương pháp cực tiểu chi phí được thực hiện như phương pháp góc tây bắc.

Ví dụ 4.5. Ta vẫn xét bài toán vận tải với số liệu về lượng phát, lượng thu và chi phí như ở Ví dụ 4.3.

Quá trình tính toán (xem Bảng 4.8) như sau: Dễ thấy ô $(3,1)$ và ô $(1,4)$ có cùng cước phí nhỏ nhất toàn bảng, cụ thể $c_{31} = c_{14} = 1$. Ta phân phối 60 đơn vị hàng vào ô $(3,1)$ vì

$$\min\{a_3, b_1\} = 60 > \min\{a_1, b_4\} = 50.$$

Bảng 4.8

a_i \ b_j	60	30	40	70
50	2	4	5	1 **50**
70	3	6 **10**	4 **40**	8 **20**
80	1 **60**	2 **20**	5	3

Điểm thu thứ nhất đã thu đủ lượng hàng theo yêu cầu, do đó ta xóa cột 1. Điểm phát thứ ba còn một lượng hàng là $a'_3 = 80 - 60 = 20$. Trong bảng còn lại (ba cột cuối), ô $(1, 4)$ có cước phí nhỏ nhất là $c_{14} = 1$. Do đó ta phân vào ô này một lượng hàng là $\min\{a_1, b_4\} = 50$. Khi đó, điểm phát thứ nhất đã hết hàng và ta xóa hàng thứ nhất của bảng. Điểm thu thứ tư còn thiếu một lượng hàng là $b'_4 = 70 - 50 = 20$.

Trong bảng còn lại (ba ô cuối của hàng 2 và ba ô cuối của hàng 3), ta chọn ô $(3, 2)$ vì nó có cước phí nhỏ nhất là $c_{32} = 2$ và phân vào ô này một lượng hàng là $\min\ \{a'_3, b_2\} = 20$. Điểm phát thứ ba đã hết hàng nên ta xóa hàng 3. Điểm thu thứ hai còn thiếu một lượng hàng là $b'_2 = 30 - 20 = 10$. Lúc này, chỉ còn lại ba ô phải xem xét là $(2, 2)$, $(2, 3)$ và $(2, 4)$.

Ta tiếp tục phân hàng vào ô $(2, 3)$ một lượng hàng là $\min\ \{a_2, b_3\} = 40$ vì đó là ô có cước phí nhỏ nhất trong các ô còn lại ($c_{23} = 4$). Điểm thu thứ ba đã nhận đủ hàng theo yêu cầu nên ta xóa cột 3. Điểm phát thứ hai còn lượng hàng bằng $a'_2 = 70 - 40 = 30$. Còn lại hai ô $(2, 2)$ và $(2, 4)$ cần xét. Ta phân vào ô $(2, 2)$ một lượng hàng là $\min\ \{a'_2, b'_2\} = 10$ vì $c_{22} = 6 < c_{24} = 8$. Cuối cùng, ta phân vào ô $(2, 4)$ lượng hàng là $a'_2 = b'_4 = 20$. Mọi điểm phát đã phát hết hàng, mọi điểm thu đã nhận đủ hàng như mong muốn. Ta đặt $x_{ij} = 0$ tương ứng với mọi ô (i, j) còn lại. Giá trị hàm mục tiêu tương ứng với phương án này bằng 530.

Nếu xuất phát từ phương án cực biên vừa tìm ở Bảng 4.8, tiếp tục tính toán giải bài toán theo thuật toán thế vị giải bài toán vận tải ta nhận được phương án tối ưu sau hai lần điều chỉnh. Cụ thể, từ bảng vận tải xuất phát là Bảng 4.9 (tương ứng với phương án cực biên tìm được ở Bảng 4.8), sau lần điều chỉnh thứ nhất ta chuyển sang Bảng 4.10. Tiếp tục quá trình điều chỉnh từ Bảng 4.10 ta lại nhận lại được kết quả như Bảng 4.6 tương ứng với phương án cực biên tối ưu duy nhất

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 \\ 30 & 0 & 40 & 0 \\ 30 & 30 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

và giá trị tối ưu là $f(x^*) = 450$ (đúng như kết quả đã tính ở Ví dụ 4.3).

Bảng 4.9

	v_j	-2	-1	-3	1
u_i	a_i \ b_j	60	30	40	70
0	50	2; -4	4; -5	5; -8	1; **50**
7	70	3; + ; 2	6; − ; **10**	4; **40**	8; **20**
3	80	1; − ; **60**	2; + ; **20**	5; -5	3; 1

Bảng 4.10

	v_j	-4	-3	-3	1
u_i	a_i \ b_j	60	30	40	70
0	50	2; -6	4; -7	5; -8	1; **50**
7	70	3; + ; **10**	6; -2	4; **40**	8; − ; **20**
5	80	1; − ; **50**	2; **30**	5; -3	3; + ; 3

Nhận xét 4.3. Tìm phương án cực biên xuất phát bằng phương pháp góc tây bắc đơn giản hơn so với phương pháp cực tiểu cước phí. Tuy nhiên, tìm phương án cực biên xuất phát bằng phương pháp cực tiểu chi phí ta có thể rút gọn được các bước lặp tính toán. Chẳng hạn với bài toán vận tải cho ở Ví dụ 4.3: nếu xuất phát từ phương án cực biên được xác định theo phương pháp góc tây bắc thì mất 3 lần điều chỉnh phương án ta sẽ nhận được phương án tối ưu (Ví dụ 4.3), và sẽ chỉ mất 2 lần điều chỉnh nếu xuất phát từ phương án cực biên được xác định theo phương pháp cực tiểu chi phí (Ví dụ 4.5).

Chú ý 4.5. Thay vì chọn ô có cước phí nhỏ nhất toàn bảng, ta có thể chọn ô có cước phí nhỏ nhất ở hàng (hoặc cột) đầu tiên của bảng vận tải đang xét. Trong trường hợp này, phương pháp có tên là *phương pháp cực tiểu cước phí theo hàng* (the row minimum method) (hoặc *theo cột* (the column minimum method)). Ngoài các phương pháp trên, phương pháp Vogel hay còn gọi là phương pháp VAM (Vogel's approximation method) để tìm phương án cực biên xuất phát cho bài toán vận tải cũng thường được sử dụng (xem [18], [39]).

Cả hai phương pháp tìm phương án cơ sở xuất phát trên đây đều thực sự cho ta một phương án chấp nhận được. Tính chấp nhận được là rõ ràng vì ta đã đảm bảo các ràng buộc thoả mãn khi phân phối các lượng hàng vào ô. Sau đây ta sẽ chứng minh nó là phương án cực biên.

Mệnh đề 4.3. *Phương án tìm được theo phương pháp góc tây bắc hoặc phương pháp cực tiểu cước phí là phương án cực biên của bài toán vận tải.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh mệnh đề này bằng quy nạp theo $k = m + n$ (tổng số hàng và số cột của bảng vận tải).

Hiển nhiên là Mệnh đề đúng nếu $m = n = 1$, tức đúng với $k = m + n = 2$. Giả sử Mệnh đề đúng với bảng vận tải có tổng số hàng và cột là $k = m + n - 1$ (khi đó bảng có $m - 1$ hàng và n cột hoặc bảng có m hàng và $n - 1$ cột), tức phương án tìm được theo một trong hai phương pháp này có không quá $m + n - 2$ thành phần dương và không chứa chu trình. Ta phải chứng minh nó đúng với bảng vận tải T có m hàng và n cột, nghĩa là $k = m + n$.

Ta xét ô được phân phối hàng đầu tiên là (i_1, j_1). Theo cả hai phương pháp, sau khi phân hàng vào ô này, ta xoá hàng i_1 (hoặc cột j_1). Giả sử là hàng i_1 được xoá. Khi đó, bảng tiếp theo (gọi là bảng T') có $k = m + n - 1$. Kí kiệu G là tập các ô chọn của bảng T'. Theo giả thiết quy nạp, G gồm $m + n - 2$ ô và không chứa chu trình. Rõ ràng là $G \cup \{(i_1, j_1)\}$ không chứa chu trình vì (i_1, j_1) là ô duy nhất trong tập các ô đang xét ở bảng T nằm trên hàng i_1. Do đó, phương án được xác định theo một trong hai phương pháp này là phương án cực biên. □

4.5 Các bài toán vận tải mở rộng

Mục này trình bày một số bài toán khác phức tạp hơn nhưng đều có thể giải được bằng cách đưa về xét một bài toán vận tải thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát tương ứng.

4.5.1 Bài toán không cân bằng thu phát

Trong thực tế, ta thường phải làm việc với các mô hình không thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát. Có hai trường hợp.

a. Tổng lượng phát lớn hơn tổng lượng thu (*cung lớn hơn cầu*)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

tức tồn tại điểm phát không phát hết hàng. Khi đó, ràng buộc (4.1) trong phát biểu bài toán (PT) phải đổi lại là

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i. \tag{4.1$'$}$$

Ta đưa bài toán này về bài toán vận tải cân bằng thu phát như sau: Thêm vào điểm thu giả $(n+1)$ với lượng thu là

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0.$$

Dễ thấy rằng đây chính là lượng hàng còn tồn lại ở các trạm phát sau khi thoả mãn yêu cầu của tất cả các trạm thu nên cước phí $c_{i(n+1)} = 0$ với mọi $i = 1, \cdots, m$ (hàm mục tiêu không đổi). Bài toán vận tải mở rộng với m điểm phát và $(n+1)$ điểm thu là

$$\min\ f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}.x_{ij}$$

$$\text{v.đ.k.}\quad \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i,\quad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\quad j = 1, \cdots, n+1$$

$$x_{ij} \geq 0,\quad i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n+1.$$

Bài toán này thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát và ta có thể giải nó bằng Thuật toán 4.1 nhận được phương án tối ưu $x^* = (x^*_{ij})$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n+1$.

Nếu $x^*_{i(n+1)} > 0$ thì ở điểm phát thứ i còn đọng lại lượng hàng là $x^*_{i(n+1)}$. Giả sử một đơn vị hàng tồn ở điểm phát i phải chịu cước phí lưu kho là s_i, $i = 1, \cdots, m$. Khi đó ta có thể tính cước phí lưu kho cho từng điểm phát. Cụ thể, chi phí lưu kho ở điểm phát i, $i \in \{1, \cdots, m\}$, là

$$f^{storage}(i) = s_i x^*_{i(n+1)}.$$

Phương án vận chuyển tối ưu của bài toán gốc là $x^{opt} = (x^{opt}_{ij})$ với $x^{opt}_{ij} = x^*_{ij}$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$. Chi phí vận chuyển tối ưu là

$$f_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x^*_{ij}.$$

Ví dụ 4.6. Xét bài toán vận tải với các dữ liệu về lượng phát a, lượng thu b và ma trận chi phí C cho ở Bảng 4.11. Bài toán này có $m = 3$ điểm phát, $n = 4$ điểm thu và tổng lượng phát lớn hơn tổng lượng thu

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 400 > \sum_{j=1}^{4} = 340.$$

Bảng 4.11

a_i \ b_j	80	70	100	90
100	6	5	3	1
160	9	7	5	8
140	2	9	4	6

Vì vậy, ta thêm trạm thu giả $n + 1 = 5$ với yêu cầu là $b_5 = 400 - 340 = 60$ và đặt $c_{15} = c_{25} = c_{35} = 0$. Khi đó ta nhận được bài toán mở rộng cân bằng thu phát với 3 điểm phát và 5 điểm thu và gọi là bài toán (PT_0). Phương án cực biên x^0 xác định theo phương pháp cực tiểu chi phí của bài toán (PT_0) và các kết quả tính toán tương ứng với phương án này được trình bày ở Bảng 4.12.

Bảng 4.12

u_i	v_j	-4	0	-2	1	0
	a_i \ b_j	80	70	100	90	60
0	100	6 / -10	5 / -5	3 / -5	1 + **40**	0 − **60**
7	160	9 / -6	7 **70**	5 **40**	8 − **50**	0 + / 7
6	140	2 **80**	9 / -3	4 **60**	6 / 1	0 / 6

Từ Bảng 4.12, chọn $(i_s, j_s) = (2, 5)$ làm ô điều chỉnh, tiếp tục thuật toán thế vị ta chuyển sang phương án cực biên mới x^1. Các số liệu tương ứng với x^1 được biểu diễn ở Bảng 4.13.

Bảng 4.13

u_i	v_j	3	7	5	1	0
	a_i \ b_j	80	70	100	90	60
0	100	6 / -3	5 / 2	3 / 2	1 **90**	0 **10**
0	160	9 / -6	7 **70**	5 **40**	8 / -7	0 **50**
-1	140	2 **80**	9 / -3	4 **60**	6 / -6	0 / -1

Nhận xét rằng, trong Bảng 4.13 có

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = 2 = \max\{\Delta_{ij} > 0 \mid (i, j) \notin G(x^1)\}.$$

Về nguyên tắc, ta có thể chọn bất kỳ một trong hai ô này làm ô điều chỉnh. Sau đây, ta xét cả hai cách chọn này.

◇ *Cách thứ nhất.* Từ Bảng 4.13, nếu chọn ô điều chỉnh là ô $(1, 3)$ và thực hiện biến đổi tiếp thì ta nhận được Bảng 4.14 tương ứng với phương án cực biên tối ưu x^* của bài toán (PT_0),

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 90 & 0 \\ 0 & 70 & 30 & 0 & 60 \\ 80 & 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bảng 4.14

u_i	v_j \ b_j / a_i	1	5	3	1	-2
		80	70	100	90	60
0	100	6 (-5)	5 (0)	3 **10**	1 **90**	0 (-2)
2	160	9 (-6)	7 **70**	5 **30**	8 (-5)	0 **60**
1	140	2 **80**	9 (-3)	4 **60**	6 (-4)	0 (-1)

Trở lại bài toán ban đầu, ta có phương án vận chuyển tối ưu là

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 90 \\ 0 & 70 & 30 & 0 \\ 80 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

với giá trị tối ưu là $f(x^{opt}) = 1160$. Điểm phát thứ nhất và điểm phát thứ ba đã phát hết hàng. Điểm phát thứ hai còn 60 đơn vị hàng.

Vì Bảng 4.14 còn có $\Delta_{12} = 0$ và ô $(1, 2) \notin G(x^*)$ nên phương án x^* không phải phương án cực biên tối ưu duy nhất của bài toán (PT_0). Muốn tìm phương án cực biên tối ưu khác, ta chọn ô $(1, 2)$ làm ô điều chỉnh. Thực hiện biến đổi theo thuật toán thế vị, ta nhận được Bảng 4.15 tương ứng với phương án cực biên tối ưu thứ hai $\bar{x}^*$ của bài toán (PT_0) và phương án cực biên tối ưu thứ hai $\bar{x}^{opt}$ của bài toan ban đầu là

$$\bar{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 60 & 40 & 0 & 60 \\ 80 & 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \bar{x}^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 90 \\ 0 & 60 & 40 & 0 \\ 80 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bảng 4.15

u_i	v_j	1	5	3	1	-2
	$a_i \backslash b_j$	80	70	100	90	60
0	100	6 (-5)	5 **10**	3 (0)	1 **90**	0 (-2)
2	160	9 (-6)	7 **60**	5 **40**	8 (-5)	0 **60**
1	140	2 **80**	9 (-3)	4 **60**	6 (-4)	0 (-1)

Từ Bảng 4.15, nếu tiếp tục chọn ô $(1,3) \notin G(\bar{x}^*)$ có $\Delta_{13} = 0$ làm ô điều chỉnh và biến đổi theo thuật toán thế vị ta lại quay lại Bảng 4.14. Như vậy, bài toán (PT_0) chỉ có hai phương án cực biên tối ưu và tập nghiệm tối ưu của nó là

$$
\begin{aligned}
F_* &= \{x = \lambda x^* + (1-\lambda)\bar{x}^* \quad \text{với} \quad 0 \le \lambda \le 1\} \\
&= \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 & 10-10\lambda & 10\lambda & 90 & 0 \\ 0 & 60+10\lambda & 40-10\lambda & 0 & 60 \\ 80 & 0 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{với} \ \ 0 \le \lambda \le 1 \right\}.
\end{aligned}
$$

$\circ$ *Cách thứ hai.* Từ Bảng 4.13, nếu chọn ô điều chỉnh là ô $(1,2)$ và biến đổi tiếp thì ta nhận được Bảng 4.15 tương ứng với phương án cực biên tối ưu $\bar{x}^*$ của bài toán (PT_0). Tiếp tục thực hiện biến đổi tiếp từ Bảng 4.15 với ô điều chỉnh là $(1,3)$ có $\Delta_{13} = 0$, ta lại trở lại Bảng 4.14 với phương án cực biên tối ưu x^* đã biết.

b) **Tổng lượng thu lớn hơn tổng lượng phát** (*cầu lớn hơn cung*)

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

tức lượng hàng có ở các điểm phát không đáp ứng đủ nhu cầu ở mọi điểm thu. Khi đó, ràng buộc (4.2) trong phát biểu bài toán (PT) phải đổi lại là

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j. \tag{4.2'}$$

Đưa vào điểm phát giả $(m+1)$ với lượng phát

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0.$$

Giải bài toán vận tải mở rộng với $(m+1)$ điểm phát và n điểm thu

$$\min\ f(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{v.đ.k.}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = 1, \cdots, m+1$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j,\ \ j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1, \cdots, m+1,\ j = 1, \cdots, n$$

trong đó $c_{(m+1)j} = 0$, $j = 1, \cdots, n$. Bài toán này thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát và giải được bằng phương pháp thế vị. Giả sử phương án tối ưu của bài toán này là $x^* = (x^*_{ij})$, $i = 1, \cdots, m+1$, $j = 1, \cdots, n$. Nếu $x^*_{(m+1)j} > 0$ thì điểm thu thứ j còn thiếu một lượng hàng là $x^*_{(m+1)j}$ so với nhu cầu. Giả sử t_j là số tiền tổn thất của điểm phát thứ j khi thiếu 1 đơn vị hàng, $j = 1, \cdots, n$. Khi đó, số tiền tổn thất do thiếu hàng ở điểm thu thứ j, $j \in \{1, \cdots, n\}$, là

$$f^{loss}(j) = t_j x^*_{(m+1)j}.$$

Chi phí vận chuyển tối ưu tương ứng là

$$f_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x^*_{ij}.$$

4.5.2 Bài toán vận tải với ràng buộc bất đẳng thức

Trong thực tế, nhiều mô hình bài toán vận tải có dạng

$$\min\ f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4.20}$$

$$\text{v.đ.k.}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i,\ \ i = 1, \cdots, m \tag{4.21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j,\ \ j = 1, \cdots, n \tag{4.22}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n. \tag{4.23}$$

Điều kiện (4.21) có nghĩa là các điểm phát có thể không phát hết hàng. Điều kiện (4.22) có nghĩa là các điểm thu thu quá nhu cầu có thể tiêu thụ được. Sau đây là điều kiện cần và đủ để bài toán (4.20)-(4.23) có phương án tối ưu.

Định lý 4.6. *Bài toán* (4.20) – (4.23) *có phương án tối ưu khi và chỉ khi tổng lượng phát không bé hơn tổng lượng thu, nghĩa là*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4.24}$$

Chứng minh. Bài tập. □

Việc áp dụng thuật toán thế vị để giải bài toán (4.20) – (4.23) được chia làm hai trường hợp, phụ thuộc vào điều kiện (4.24). Cụ thể:

Trường hợp 1: Ta có

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

tức bài toán thỏa mãn điều kiện cân bằng thu phát. Khi đó, dễ dàng chứng minh được rằng mọi phương án chấp nhận được của bài toán (4.20) – (4.23) đều thoả mãn (4.21) và (4.22) dưới dạng dấu đẳng thức, tức

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Vì vậy, trong trường hợp này bài toán (4.20) – (4.23) có dạng bài toán cân bằng thu phát thông thường và giải được bằng thuật toán thế vị.

Trường hợp 2: Ta có

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

tức tổng lượng phát lớn hơn tổng lượng thu. Có thể chứng minh được rằng: "*Nếu x^* là nghiệm tối ưu của* (4.20) – (4.23) *thì x^* thoả mãn chặt ràng buộc* (4.22)." Vì vậy, bài toán (4.20)-(4.23) tương đương với bài toán

$$\min\ f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{v.đ.k.}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\cdots,n$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,\cdots,m,\ j = 1,\cdots,n.$$

Mô hình này cũng phù hợp với thực tế vì các điểm thu có thể tự cân đối chỉ nhận đủ lượng hàng cần tiêu thụ. Sử dụng kỹ thuật thêm trạm thu giả $(n+1)$, ta có thể giải bài toán mới này bằng cách đưa thêm biến phụ $x_{i(n+1)} \ge 0$, $i = 1,\cdots,m$ tương ứng với hệ số mục tiêu $c_{i(n+1)} = 0$, $i = 1,\cdots,m$ và chuyển về bài toán cân bằng thu phát với m điểm phát và $(n+1)$ điểm thu. Lúc này, ta có thể giải bài toán bằng thuật toán thế vị và nhận được phương án tối ưu $x^* = (x^*_{ij})_{m\times(n+1)}$. Chú ý rằng, phương án tối ưu của bài toán ban đầu là $x^{opt} = (x^{opt}_{ij})$ với $x^{opt}_{ij} = x^*_{ij}$ với mọi $i = 1,\cdots,m$, $j = 1,\cdots,n$. Nếu $x^*_{i(n+1)} > 0$ thì có nghĩa là điểm phát thứ i còn thừa một lượng hàng là $x^*_{i(n+1)}$ đơn vị.

4.5.3 Bài toán lập kho nhận hàng

Giả sử một tập đoàn gồm m nhà máy sản xuất một loại hàng hóa với sản lượng tương ứng là a_i, $i = 1,\cdots,m$ và họ đã có sẵn n_{old} kho chứa hàng với trữ lượng là $b_1,\cdots,b_{n_{old}}$. Người ta định xây dựng n_{new} kho mới. Bài toán đặt ra là mỗi kho mới phải được thiết kế để chứa được bao nhiêu hàng và tìm phương án vận chuyển hết hàng từ m nhà máy đến $n = n_{old} + n_{new}$ kho sao cho chi phí vận chuyển là nhỏ nhất với giả thiết các kho mới có thể chứa được lượng hàng không hạn chế. Cho biết cước phí vận chuyển một đơn vị hàng từ nhà máy i đến kho j là c_{ij}, $i = 1,\cdots,m$, $j = 1,\cdots,n$.

Ta có thể đưa bài toán này về bài toán vận tải cầu vượt cung (tổng lượng thu lớn hơn tổng lượng phát) bằng cách gán lượng thu

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \forall j = n_{old}+1,\cdots,\underbrace{n_{old}+n_{new}}_{n}.$$

Như vậy, ta phải thêm điểm phát giả $(m+1)$ với lượng phát là

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

và $c_{m+1j} = 0$ với mọi $j = 1, \cdots, n$. Khi đó cung bằng cầu và bài toán lập kho hàng tương đương với bài toán vận tải cân bằng thu phát mở rộng sau

$$\min \ f(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = 1, \cdots, m+1$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \ i = 1, \cdots, m+1, \ j = 1, \cdots, n.$$

Giả sử phương án vận chuyển tối ưu của bài toán này là $x^* = (x^*_{ij})$. Khi đó, mỗi kho mới j, $j \in \{n_{old} + 1, \cdots, n\}$, phải được thiết kế với trữ lượng là

$$b^*_j = \sum_{i=1}^{m} x^*_{ij}.$$

Hiển nhiên là nếu $b^*_j = 0$ thì không cần lập kho j này. Phương án tối ưu của bài toán ban đầu là $x^{opt} = (x^{opt}_{ij})$ với $x^{opt}_{ij} = x^*_{ij}$ với mọi $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

Ví dụ 4.7. Một liên hợp sản xuất có ba nhà máy sản xuất xi măng và đã có hai kho. Họ dự định xây dựng thêm hai kho nữa (với lượng chứa tùy ý) sao cho bốn kho này có thể chứa hết lượng xi măng cần chuyển ra khỏi các nhà máy. Thông tin về lượng phát, lượng thu, và cước phí vận chuyển được cho ở Bảng 4.16. Hãy xác định trữ lượng hai kho cần xây dựng và phương án vận chuyển sau khi đã có hai kho này sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Bảng 4.16

a_i \ b_j	85	75		
80	8	2	5	4
110	7	5	6	8
90	1	3	7	5

Giải. Bài toán có $m = 3$, $n_{old} = 2$, $n_{new} = 2$ và $n = n_{old} + n_{new} = 4$. Gán lượng thu $b_3 = b_4 = \sum_{i=1}^{3} a_i = 280$. Đặt điểm phát giả là điểm phát $(m+1) = 4$ với lượng phát

$$a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 720 - 280 = 440$$

và các cước phí $c_{4j} = 0$ với mọi $j = 1, \cdots, 4$.

Giải bài toán mới với 4 điểm phát và 4 điểm thu với các số liệu ở Bảng 4.17. Phương án cực biên xuất phát xác định theo phương pháp cực tiểu chi phí và số liệu tương ứng cũng được trình bày ở bảng này. Từ Bảng 4.17, sau hai lần điều chỉnh phương án, ta nhận được phương án cực biên tối ưu x^* ở Bảng 4.18,

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 75 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 110 & 0 \\ 85 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 170 & 270 \end{pmatrix}.$$

Như vậy, kho thứ ba cần được xây dựng để chứa được $\sum_{i=1}^{3} x_{i3}^* = 0 + 110 + 0 = 110$ đơn vị hàng. Tương tự, kho thứ tư phải chứa được $\sum_{i=1}^{4} x_{i4}^* = 5 + 0 + 5 = 10$ đơn vị hàng. Sau khi đã xây được hai kho này, phương án vận chuyển hàng tối ưu là

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 75 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 110 & 0 \\ 85 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bảng 4.17

	v_j	-1	2	5	5
u_i	a_i \ b_j	85	75	280	280
0	80	8 / -9	2 / **75**	5 / **5**	4 / 1
1	110	7 / -7	5 / -2	6 / **110**	8 / -2
2	90	1 / **85**	3 / 1	7 (−) / **5**	5 (+) / 2
-5	440	0 / -6	0 / -3	0 (+) / **160**	0 (−) / **280**

Bảng 4.18

u_i	v_j	0	2	4	4
	b_j \ a_i	85	75	280	280
0	80	8 / (-8)	2 / **75**	5 / (-1)	4 / **5**
2	110	7 / (-5)	5 / (-1)	6 / **110**	8 / (-2)
1	90	1 / **85**	3 / (0)	7 / (-2)	5 / **5**
-4	440	0 / (-4)	0 / (-2)	0 / **170**	0 / **270**

Để ý rằng, trong Bảng 4.18 có ô $\Delta_{32} = 0$ và ô $(3, 2) \notin G(x^*)$ do đó phương án x^* không phải phương án cực biên tối ưu duy nhất của bài toán mở rộng tương ứng.

4.5.4 Bài toán vận tải có ô cấm

Trong thực tế, ta cũng có thể gặp các bài toán vận tải mà do những điều kiện thực tế đặt ra mà không chuyển hàng từ điểm phát thứ i đến điểm thu thứ j. Khi đó, ô (i, j) được gọi là *ô cấm*.

Có nhiều lý do về việc cấm vận từ điểm phát i đến điểm thu j. Chẳng hạn:

i) Từ điểm phát i đến điểm thu j không có đường vận chuyển hoặc có nhưng hàng được vận chuyển theo đường đó là không thích hợp hoặc theo hợp đồng không chuyển hàng từ điểm phát i đến điểm thu j;

ii) Một trạm thu nào đó được ưu tiên nhận đủ yêu cầu (tức không nhận hàng từ trạm phát giả) trong trường hợp bài toán không cân bằng thu phát mà tổng lượng thu lớn hơn tổng lượng phát.

iii) Do yêu cầu thực tế đặt ra mà một trạm phát nào đó chỉ được phép chuyển đi một lượng hàng quy định trước, ít hơn khả năng cung cấp của nó hoặc hàng ở trạm này được để tồn kho (khi tổng lượng phát lớn hơn tổng lượng thu).

Ta vẫn có thể sử dụng phương pháp thế vị để giải bài toán có ô cấm bằng cách đặt $c_{ij} = M$, trong đó (i, j) là ô cấm và M là số dương lớn tuỳ ý khi cần so sánh, tức ta đánh cước phí rất nặng ở ô cấm (i, j), khiến cho trong phương án tối ưu, ô (i, j) không thể được phân phối hàng. Lưu ý rằng, khi giải bài toán này ta nên dùng phương pháp cực tiểu chi phí để xây dựng phương án cực biên xuất phát.

Ví dụ 4.8. Người ta cần vận chuyển một loại hàng hóa từ ba điểm phát với lượng phát lần lượt là 70, 110, 120 đơn vị hàng đến ba điểm thu với nhu cầu tương ứng 80, 100, 160 đơn vị hàng. Biết rằng điểm thu thứ nhất được ưu tiên nhận đủ hàng; điểm thu thứ ba phải được nhận tối thiểu là 140 đơn vị hàng và không có đường vận chuyển hàng từ điểm phát thứ nhất đến điểm thu thứ hai. Hãy tìm phương án vận chuyển hàng tối ưu, biết cước phí vận chuyển được cho như sau:

$$\begin{array}{lll} c_{11} = 3; & & c_{13} = 2; \\ c_{21} = 8; & c_{22} = 5; & c_{23} = 6; \\ c_{31} = 5; & c_{32} = 4; & c_{33} = 1. \end{array}$$

Giải. Bài toán có $n = 3$ và $m = 3$. Vì $\sum_{i=1}^{3} a_i = 300 < \sum_{j=1}^{3} b_j = 340$ nên ta thêm trạm phát giả 4 với lượng phát $a_4 = 40$. Do không có đường vận chuyển từ điểm phát 1 đến điểm thu 2, tức $(1, 2)$ là ô cấm, nên ta đặt cước phí $c_{12} = M$. Điểm thu thứ ba phải được nhận tối thiểu 140 đơn vị hàng nên ta tạm tách điểm thu thứ ba thành hai điểm thu là điểm 3_1 với lượng thu là 140 và điểm 3_2 với lượng thu là 20 và cước phí tương ứng là $c_{43_1} = M$ (tức điểm 3_1 không nhận hàng từ điểm phát giả) và $c_{43_2} = 0$. Ô $(4, 1)$ cũng là ô cấm với $c_{41} = M$ vì điểm thu thứ nhất được nhận đủ hàng (không nhận hàng từ điểm phát giả). Đặt $c_{42} = 0$ vì điểm thu thứ hai có thể nhận hàng từ điểm phát giả. Khi đó ta nhận được bài toán cân bằng thu phát với số liệu như ở Bảng 4.19. Bảng 4.19 cũng cho ta phương án cực biên xuất phát xác định bằng phương pháp cực tiểu chi phí và các số liệu tính toán theo thuật toán thế vị tương ứng với nó.

Bảng 4.19

	v_j	3	0	2	2
u_i	a_i \ b_j	80	100	140	20
0	70	3; (+); **30**	M; -M	2; **20**	2; (−); **20**
5	110	8; (−); **50**	5; (+); **60**	6; 1	6; 1
-1	120	5; -3	4; -5	1; **120**	1; 0
0	40	M; 3-M	0; (−); **40**	M; 2-M	0; (+); 2

Từ Bảng 4.19, sau hai lần điều chỉnh phương án, ta nhận được phương án cực biên tối ưu x^* ở Bảng 4.20,

$$x^* = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 80 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Bảng 4.20

	v_j	3	0	1	0
u_i	a_i \ b_j	80	100	140	20
0	70	3 **70**	M -M	2 -1	2 -2
5	110	8 **10**	5 **80**	6 **20**	6 -1
0	120	5 -2	4 -4	1 **120**	1 -1
0	40	M 3-M	0 **20**	M 1-M	0 **20**

Như vậy, phương án tối ưu của bài toán ban đầu là

$$x^{opt} = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 10 & 80 & 20 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix}.$$

Điểm thu thứ nhất được nhận đủ 80 đơn vị hàng như yêu cầu. Điểm thu thứ hai chỉ được nhận 80 đơn vị hàng và điểm thu thứ ba nhận được số hàng theo yêu cầu tối thiểu là 140 đơn vị hàng.

4.5.5 Bài toán vận tải dạng max

Trong thực tế, đôi khi ta gặp bài toán có dạng bài toán vận tải nhưng cần tìm phương án để cực đại hàm mục tiêu (xem Ví dụ 2.6). Mô hình toán học của bài toán là

$$\max \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (PT^{max})$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n.$$

và điều kiện cân bằng thu phát được thỏa mãn, tức $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Khi đó:

i) Hoặc ta giải bài toán vận tải dạng min tương đương, nghĩa là giữ nguyên ràng buộc còn hàm mục tiêu là hàm $f' = -f$;

ii) Hoặc ta giải trực tiếp bài toán này như sau:

◇ Xây dựng phương án cực biên xuất phát x^0 bằng phương pháp góc tây bắc hoặc phương pháp cực đại chi phí, tức ưu tiên phân một lượng hàng lớn nhất có thể vào ô (i_0, j_0) sao cho $c_{i_0j_0}$ là lớn nhất trong các chi phí ứng với các ô đang cần xem xét;

◇ Việc xác định các thế vị tương tự bài toán tìm min, tức giải hệ

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \forall (i,j) \in G(x^0).$$

◇ Tính các ước lượng

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \forall (i,j) \notin G(x^0).$$

◇ (Kiểm tra điều kiện tối ưu)

If $\Delta_{ij} \geq 0$ với mọi $(i,j) \notin G(x^0)$ **Then** Dừng thuật toán

(x^0 *là phương án tối ưu*)

Else (*tức* $\exists\, \Delta_{ij} < 0$ *với* $(i,j) \notin G(x^0)$) Ta chọn ô (i_s, j_s) là ô điều chỉnh ứng với

$$\Delta_{i_sj_s} = \min\{\Delta_{ij} < 0 \mid (i,j) \notin G(x^0)\}.$$

Sau đó xác định chu trình điều chỉnh và xây dựng phương án cực biên x^0 mới giống như với bài toán tìm min.

Ví dụ 4.9. Giải bài toán vận tải (PT^{max}) với véc tơ lượng phát, véc tơ lượng thu và ma trận chi phí như sau

$$a = (50, 70, 80)^T, \quad b = (40, 60, 100)^T, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bảng 4.21 biểu diễn các thông tin tương ứng với phương án cực biên xuất phát x^0 được xác định theo "cực đại chi phí" và $f(x^0) = 920$. Vì còn $\Delta_{13} = -2 < 0$ và ô $(1,3) \notin G(x^0)$ nên x^0 chưa phải phương án cực biên. Chọn $(1,3)$ làm ô điều chỉnh, xác định chu trình điều chỉnh $K = \{(1,3), (2,3), (2,2), (1,2)\}$ và chuyển sang Bảng 4.22 tương ứng với phương án cực biên x^1 và $f(x^1) = 940$.

Bảng 4.22 còn ô $(3,1) \notin G(x^1)$ có $\Delta_{31} = -2 < 0$ nên x^1 cũng chưa là phương án tối ưu. Chọn ô $(3,1)$ làm ô điều chỉnh, xác định chu trình điều chỉnh

$$K = \{(3,1), (3,3), (1,3), (1,1)\}$$

và chuyển sang Bảng 4.23 tương ứng với phương án cực biên x^3.

Bảng 4.23 có $\Delta_{ij} > 0$ với mọi $(i,j) \notin G(x^2)$ nên

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 60 & 10 \\ 40 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

là phương án tối ưu của bài toán với giá trị tối ưu là $f_{max} = f(x^2) = 1020$.

Bảng 4.21

	v_j	9	8	3
u_i	b_j / a_i	40	60	100
0	50	9 **40**	8 − **10**	5 + -2
-2	70	4 3	6 + **50**	1 − **20**
-1	80	8 0	4 3	2 **80**

Bảng 4.22

u_i	v_j	9	10	5
	a_i \ b_j	40	60	100
0	50	9 − **40**	8 2	5 + **10**
-4	70	4 1	6 **60**	1 **10**
-3	80	8 + -2	4 3	2 − **80**

Bảng 4.23

u_i	v_j	11	10	5
	a_i \ b_j	40	60	100
0	50	9 2	8 2	5 **50**
-4	70	4 3	6 **60**	1 **10**
-3	80	8 **40**	4 3	2 **40**

4.5.6 Bài toán phân việc (The personnel-assignment problem)

Bài toán này là: Giả sử có có n người và n công việc. Để giao cho người i, $i \in \{1, \cdots, n\}$, làm công việc j, $j \in \{1, \cdots, n\}$, cần một chi phí là c_{ij}. Vấn đề là cần tìm phương án để phân công cho người nào làm việc gì (mỗi người chỉ làm một việc, mỗi việc chỉ do một người làm) sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất. Mô hình toán học của bài toán này là

$$\min \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (PT^{work})$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (4.25)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (4.26)$$

$$x_{ij} \in \{0,\ 1\}, \quad i = 1, \cdots, n, \ \ j = 1, \cdots, n. \qquad (4.27)$$

Đây chính là một trường hợp của bài toán vận tải cân bằng thu phát trong đó số trạm phát bằng số trạm thu và $a_i = b_j = 1$ với mọi $i, j = 1, \cdots, n$ nhưng các biến chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1. Vì vậy nó cũng thuộc lớp bài toán quy hoạch nguyên (xem Chương 5). Do có các điều kiện (4.25) và (4.26) nên điều kiện (4.27) có thể thay bằng điều kiện $x_{ij} \geq 0$ và nguyên với mọi $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, n$.

Bài toán phân việc (PT^{work}) cũng là mô hình toán học của nhiều bài toán thực tế khác (không liên quan gì đến việc phân công công việc), chẳng hạn: bài toán phân bố hỏa khí vào các mục tiêu cần tiêu diệt sao cho đỡ tốn chi phí nhất, bài toán phân công các cho các nhà máy sản xuất các sản phẩm khác nhau sao cho đạt hiệu quả cao nhất ...

Có nhiều thuật toán hiệu quả giải bài toán này dựa vào cấu trúc đặc biệt của nó. Một trong các phương pháp đó là phương pháp Hungary do hai nhà toán học Hungary là Konig và Egervăry đề xuất. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo trong [18], [36].

Bài tập Chương 4

1. Cho bài toán vận tải

$$\min \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \ i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n.$$

i) Chứng minh rằng nếu thực hiện phép biến đổi $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + e_i + d_j$ $(\forall i,\ j)$, với e_i và d_j là các hằng số thì phương án tối ưu của bài toán vận tải không thay đổi.

ii) Chứng minh rằng mọi cơ sở B của bài toán vận tải đều có $|\det B| = 1$, trong đó $\det B$ là định thức của ma trận B;

iii) Nếu lượng phát a_i, $i = 1, \cdots, m$ và lượng thu b_j, $j = 1, \cdots, n$ đều là các số nguyên thì mọi phương án tối ưu nhận được theo thuật toán thế vị đều có các thành phần nguyên.

2. Xét bài toán vận tải với

$$a = (110,\ 100,\ 60,\ 100)^T, \qquad b = (95,\ 80,\ 65,\ 35,\ 95)^T$$

và

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 14 & 9 & 13 \\ 10 & 2 & 9 & 8 & 10 \\ 5 & 5 & 9 & 6 & 12 \\ 14 & 3 & 12 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

i) Véc tơ
$x = (95,\ 0,\ 0,\ 0,\ 15,\ 0,\ 15,\ 5,\ 0,\ 80,\ 0,\ 0,\ 60,\ 0,\ 0,\ 0,\ 65,\ 0,\ 35,\ 0)^T$ có phải là một phương án cực biên của bài toán này không? Vì sao?

ii) Bài toán này có nghiệm tối ưu không? Véc tơ x đã cho ở (i) có phải nghiệm tối ưu của bài toán này không? Vì sao? Cho biết chi phí phải trả nếu thực hiện theo phương án này?

3. Xét bài toán vận tải với véc tơ lượng phát a, véc tơ lượng thu b và ma trận cước phí $C = (c_{ij})$ được xác định như sau:

$$a = (10,\ 15,\ 5+\beta)^T, \qquad b = (5,\ 10+\beta,\ 15)^T, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $f(\beta)$ là giá trị tối ưu của bài toán như là hàm số của tham số β. Hãy tìm tất cả các phương án tối ưu của bài toán với $\beta = 0$. Vẽ đồ thị của $f(\beta)$ khi $\beta \geq 0$.

4. Bài toán vận tải với véc tơ lượng phát a, véc tơ lượng thu b và ma trận cước phí $C = (c_{ij})$ được xác định như sau:

$$a = (100,\ 120,\ 140)^T, \quad b = (60,\ 80,\ 100)^T, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 7 & 9 & 5 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Biết tiền lưu kho mỗi đơn vị hàng tồn ở các điểm phát thứ nhất, thứ hai và thứ ba tương ứng là 1, 6 và 5. Tìm phương án vận chuyển tối ưu. Cho biết chi phí vận chuyển và chi phí lưu kho nếu thực hiện phương án này.

5. Bài toán vận tải với véc tơ lượng phát a, véc tơ lượng thu b và ma trận cước phí $C = (c_{ij})$ được xác định như sau:

$$a = (20,\ 10,\ 15)^T, \quad b = (5,\ 10,\ 15)^T, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Biết tiền phạt mỗi đơn vị hàng thiếu của các điểm thut thứ nhất, thứ hai và thứ ba tương ứng là là 9, 6 và 5. Tìm phương án vận chuyển tối ưu. Cho biết chi phí vận chuyển và lượng tiền phạt ở mỗi điểm thu (nếu có).

6. Xét bài toán vận tải với

$$a = (60,\ 40,\ 80)^T, \quad b = (40,\ 60,\ 40,\ 40)^T, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

i) Không cần tính toán, chứng minh rằng bài toán vận tải này có ít nhất một phương án tối ưu mà tất cả các thành phần của nó đều là số chẵn.

ii) Chứng minh rằng

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 40 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

là phương án tối ưu. Hỏi bài toán có còn phương án tối ưu nào khác không? Vì sao?

7. Cho bài toán vận tải với các số liệu

$$a = (70,\ 85,\ 35,\ 110)^T, \qquad b = (25,\ 80,\ 120,\ 45,\ 30)^T$$

và

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 & 12 & 6 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 9 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 10 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Xác định phương án cực biên của bài toán này bằng phương pháp góc tây bắc và phương pháp cực tiểu chi phí. Phương án nào tốt hơn.

ii) Xuất phát từ một phương án cực biên đã biết, giải bài toán bằng thuật toán thế vị?

i) Bài toán có nghiệm tối ưu duy nhất không? Vì sao?

8. Giải các bài toán vận tải sau

i) $a = (10,\ 15,\ 25),\qquad b = (5,\ 10,\ 20,\ 15),$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

ii) $a = (15,\ 25,\ 40,\ 15),\qquad b = (15,\ 20,\ 10,\ 35,\ 25),$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chương 5

Quy hoạch nguyên

5.1 Mô hình toán học

Bài toán quy hoạch nguyên (Integer Programming - IP) được phát biểu như sau

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\text{v.đ.k. } x = (x_1, \cdots, x_n) \in D, \end{aligned} \tag{5.1}$$

trong đó $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập các vectơ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ mà một số hoặc tất cả các thành phần của x chỉ nhận giá trị nguyên.

Thông thường, tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được xác định bởi một hệ các phương trình và bất phương trình với điều kiện bổ sung về tính nguyên của các biến số:

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m_1 \tag{5.2}$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = m_1 + 1, \cdots, m \tag{5.3}$$

$$x_j \ \text{ nguyên}, \quad j = 1, 2, \cdots, n_1. \tag{5.4}$$

Nếu $n_1 = n$ (tất cả các biến đều nguyên) thì bài toán (5.1) – (5.4) là *bài toán quy hoạch nguyên hoàn toàn* (Pure Integer Programming). Nếu $n_1 < n$ (chỉ có một số biến nguyên) thì ta gọi bài toán (5.1) – (5.4) là *bài toán quy hoạch nguyên bộ phận* (Mixed Integer Programming). Nếu các hàm $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$ là tuyến tính thì đó là *bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên*. Thuật ngữ "quy hoạch nguyên" thực tế chỉ dành cho lĩnh vực nghiên cứu lớp các bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên.

Các bài toán có vẻ đơn giản nhất mà cũng quan trọng nhất trong quy hoạch nguyên là các bài toán chọn quyết định ở dạng "có" hoặc "không" (yes or no decision). Chẳng hạn: Có thi vào trường Đại học Bách Khoa Hà Nội hay không? Có mua lô đất này không? Có nhận thực hiện dự án này không? ... Vì các biến (quyết định) chỉ nhận hai giá trị 0 hoặc 1 nên bài toán có tên là *Quy hoạch nguyên nhị phân* (Binary Integer Programming - BIP).

Bất kỳ bài toán quy hoạch nguyên nào với các biến nguyên bị chặn đều có thể quy về bài toán với các biến chỉ nhận giá trị $0-1$. Chẳng hạn, nếu biến u chỉ nhận giá trị thuộc tập $\{1, 2, \cdots, k\}$ thì đặt

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$$

với $u_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \cdots, k$. Điều này cho thấy quy hoạch nguyên $0-1$ giữ vai trò quan trọng trong quy hoạch nguyên.

Nếu bài toán có n biến và các ràng buộc cho thấy tập chấp nhận được là giới nội trong $\mathbb{R}^n$ thì bài toán chỉ có hữu hạn nghiệm chấp nhận được. Tuy nhiên sẽ rất sai lầm nếu nghĩ rằng quy hoạch nguyên dễ giải hơn quy hoạch tuyến tính hoặc hơn nữa, có thể điểm diện (enumeration) lần lượt các phương án chấp nhận được để chọn phương án tối ưu. Chẳng hạn, bài toán quy hoạch nguyên nhị phân n biến có 2^n phương án chấp nhận được (và đây là con số khổng lồ nếu n lớn).

Bài toán tối ưu tổ hợp (Combinatorial Optimization) (hay còn gọi là bài toán tối ưu rời rạc) cũng là bài toán quy hoạch nguyên. Lý do là bất cứ bài toán nào với các biến số chỉ nhận một số hữu hạn giá trị cho trước đều có thể quy về bài toán trong đó các biến số chỉ nhận giá trị nguyên (xem Ví dụ 5.4).

Quy hoạch nguyên là mô hình toán học của rất nhiều bài toán nảy sinh trong các lĩnh vực thực tế khác nhau (xem Mục 5.2). Tuy nhiên, khác với bài toán quy hoạch tuyến tính thông thường, bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên rất khó giải. Thực tế, chưa có một thuật toán nào thực sự hữu hiệu để giải tất cả các bài toán quy hoạch nguyên.

Năm 1954, Dantzig, Fulkerson và Johnson đề xuất ý tưởng của phương pháp mặt phẳng cắt (cutting plane method) [7] giải bài toán quy hoạch nguyên. Nhưng Gomory (1958) là người đầu tiên xây dựng được thuật toán cắt [9] đảm bảo sau hữu hạn bước cho phép nhận được nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch nguyên. Trước khi có phương pháp nhánh cận, phương pháp mặt phẳng cắt là công cụ chủ yếu để giải các bài toán quy hoạch nguyên.

Năm 1960, Land và Doig đưa ra một thuật toán mới [24] để giải quy hoạch tuyến tính nguyên. Năm 1963, Little, Murty, Sweeney và Karel [25] sử dụng ý tưởng đó để giải bài toán người du lịch (Ví dụ 2.7) - một bài toán điển hình và rất khó của tối ưu rời rạc. Từ đó, ý tưởng của Land - Doig đã được phát triển rộng rãi thành một hướng mới của tối ưu rời rạc. Đó là *phương pháp nhánh cận* (branch and bound method). Đến 1965, Dakin [5] hoàn thiện phương pháp nhánh cận và nó trở nên có ưu thế rõ rệt so với các phương pháp trước đó để giải quy hoạch nguyên. Hiện nay, phương pháp nhánh cận là một trong những công cụ chủ yếu để giải bài toán quy hoạch nguyên.

Các thuật toán theo phương pháp mặt phẳng cắt, phương pháp nhánh cận và các thuật toán theo phương pháp quy hoạch động[1] (dynamic programming method) thuộc loại các thuật toán cho phép tìm được nghiệm tối ưu chính xác của bài toán tuy có thể phải tính toán qua rất nhiều bước lặp. Ngoài ra, để giải quy hoạch nguyên còn có các thuật toán phán đoán (heuristic algorithm) (xem [2]). Tuy các thuật toán này không đảm bảo cho ta nghiệm tối ưu trong mọi trường hợp nhưng thường cũng hiệu quả, đặc biệt là khi giải các bài toán quy hoạch nguyên cỡ lớn.

Mục đích chính của chương này là giới thiệu phương pháp nhánh cận giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên hoàn toàn và bài toán quy hoạch nguyên nhị phân điển hình là bài toán ba lô $0-1$. Bạn đọc quan tâm đến các thuật toán khác có thể xem trong [2], [10], [18], [30], [33], [36].

5.2 Một số ví dụ

Trong Chương 2 và Chương 3 ta đã làm quen với bài toán người du lịch (Ví dụ 2.7), bài toán ba lô (Ví dụ 2.8) và bài toán phân việc (Mục 4.5.6). Đó là những bài toán quan trọng, điển hình trong quy hoạch nguyên. Sau đây là một số bài toán thực tế khác có mô hình toán học là bài toán quy hoạch nguyên.

Ví dụ 5.1. *(Bài toán pha cắt vật liệu)*

Trong xây dựng, người ta cần cắt các thanh thép nguyên dài $8m$ thành 50 đoạn loại $3.5m$ và 60 đoạn loại $1.8m$. Bài toán đặt ra là phải cắt thế nào để số thanh thép nguyên cần sử dụng ít nhất hoặc tổng phần thép thừa là nhỏ nhất.

Giả sử một thanh thép nguyên có thể được cắt theo ba mẫu sau:

Mẫu 1: 2 đoạn $3.5m$, thừa $1m$.

Mẫu 2: 1 đoạn $3.5m$, 2 đoạn $1.8m$, thừa $0.9m$.

Mẫu 3: 4 đoạn $1.8m$, thừa $0.8m$.

Gọi x_j là số thanh thép nguyên cắt theo mẫu thứ j, $j = 1, 2, 3$. Theo yêu cầu của đề bài, ta phải có:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & = & 50 \\ 0x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 60 \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \text{ nguyên},\ j = 1, 2, 3.$$

Tổng số thanh thép nguyên cần sử dụng là

$$f_1(x) = x_1 + x_2 + x_3.$$

[1] Phương pháp cơ bản của quy hoạch động là phương pháp liên hệ truy toán do nhà toán học Mỹ R. Bellmann đưa ra mà cơ sở của nó là nguyên lý tối ưu sau: "*Nếu một điều khiển của quá trình là tối ưu thì nó cũng tối ưu đối với quá trình còn lại sau khi đã thực hiện bước đầu tiên*" Nguyên lý này chỉ đúng cho các bài toán có cơ cấu phụ thuộc nhất định giữa các bước khác nhau của quá trình tính toán và đối với những hàm mục tiêu là hàm cộng tính chẳng hạn: bài toán ba lô (Ví dụ 2.8), bài toán phân bổ tài nguyên (Ví dụ 2.9) ...

Tổng số thép thừa bằng

$$f_2(x) = 1x_1 + 0.9x_2 + 0.8x_3.$$

Bài toán cần giải được phát biểu như sau:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x) \text{ (hoặc } f_2(x)) \\ \text{v.đ.k.} \quad & 2x_1 + x_2 \qquad = 50 \\ & 2x_2 \qquad + 4x_3 = 60 \\ & x_j \geq 0 \quad \text{và nguyên, } j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Tổng quát, người ta cần cắt các thanh thép nguyên có độ dài cố định bằng nhau thành m loại đoạn ngắn hơn. Giả sử có n mẫu cắt. Gọi

a_{ij} là số đoạn loại i thu được khi cắt theo mẫu j, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$;
b_i là số đoạn loại i cần có, $i = 1, \cdots, m$;
c_j là phần thép thừa khi cắt theo mẫu j, $j = 1, \cdots, n$;
x_j là số thanh thép nguyên được cắt theo mẫu j, $j = 1, \cdots, n$.

Khi đó,

$$f_1(x) = x_1 + \ldots + x_n$$

là tổng số thanh thép nguyên cần sử dụng và

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

là tổng số thép thừa. Mô hình toán học của bài toán pha cắt vật liệu là

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x) \text{ (hoặc } f_2(x)) \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, \cdots, m \\ & x_j \geq 0, \quad \text{và nguyên, } j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

Ví dụ 5.2. *(Các bài toán với điều kiện không chia cắt được)*

Trong việc mô hình hóa nhiều vấn đề ứng dụng, từ ý nghĩa thực tế, các biến số phải nhận giá trị nguyên. Chẳng hạn với bài toán lập kế hoạch sản xuất (Ví dụ 2.2), nếu như sản phẩm được sản xuất với số lượng lớn và giá thành rẻ thì việc bỏ qua tính nguyên của biến số không dẫn đến những sai lệch đáng kể nhưng nếu sản phẩm được sản xuất với số lượng không lớn và giá trị một sản phẩm là cao thì tính nguyên không thể bỏ qua. Khi đó, bài toán lập kế hoạch sản xuất phải phát biểu là

$$\max \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{và nguyên}, \ j = 1, \cdots, n,$$

trong đó n là số loại sản phẩm cần sản xuất, m là số loại nguyên vật liệu sử dụng, a_{ij} là chi phí nguyên liệu loại i để sản xuất một sản phẩm loại j, b_i là dự trữ nguyên liệu loại i và c_j là giá bán một sản phẩm loại j, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

Ví dụ 5.3. *(Các bài toán với điều kiện logic)*

Xét điều kiện logic dưới dạng "hoặc là - hoặc là" (either - or). Những điều kiện như vậy thường gặp khi chúng ta phải lựa chọn các phương án sản xuất, xây dựng ... Chẳng hạn khi quyết định áp dụng các phương thức sản xuất mới vào sản xuất, ta thường gặp tình huống sau: Đối với sản phẩm loại j, hoặc là không sản xuất loại sản phẩm này, hoặc là nếu chấp nhận sản xuất nó thì phải sản xuất với số lượng x_j không ít hơn d_j và không quá p_j, tức $d_j \leq x_j \leq p_j$.

Dễ thấy rằng d_j là số lượng sản phẩm loại j tối thiểu cần sản xuất để bù lại được những chi phí phải bỏ ra khi đưa phương thức sản xuất sản phẩm này vào hoạt động. Như vậy, ta gặp phải điều kiện "hoặc là $x_j = 0$, hoặc là $d_j \leq x_j \leq p_j$".

Giả sử biết cận trên p_j của biến x_j trong bài toán đang xét. Khi đó, đặt

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu chấp nhận sản xuất sản phẩm loại } j \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó, ràng buộc logic "hoặc là $x_j = 0$, hoặc là $d_j \leq x_j \leq p_j$" được đưa về hệ ràng buộc tương đương sau:

$$x_j - y_j d_j \geq 0$$

$$x_j - y_j p_j \leq 0$$

$$y_j \in \{0, 1\}.$$

Ví dụ 5.4. *(Các bài toán với biến số rời rạc)*

Trong thực tế, có trường hợp biến số x_j chỉ nhận một số giá trị nhất định. Chẳng hạn, ta cần xây dựng n nhà máy điện tại n địa điểm khác nhau. Gọi x_j là công suất của nhà máy điện cần xây dựng ở địa điểm j và x_j chỉ có thể lấy một trong các giá trị thuộc tập các mức công suất tiêu chuẩn là $Q_j = \{q_{1j}, q_{2j}, \ldots, q_{mj}\}$, $j = 1, \cdots, n$. Bằng cách đưa vào các biến phụ nhị phân t_{ij}, ta có ràng buộc

$$x_j \in \{q_{1j}, q_{2j}, \ldots, q_{mj}\}, \ \ j = 1, \cdots, n$$

tương đương với hệ

$$x_j = t_{1j}q_{1j} + t_{2j}q_{2j} + \cdots + t_{mj}q_{mj},$$

$$t_{1j} + t_{2j} + \cdots + t_{mj} = 1, \text{ và } t_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

Ví dụ 5.5. *(Bài toán có lệ phí cố định (Fixed - charge production))*

Giả sử một nhà máy sản xuất n loại sản phẩm. Chi phí sản xuất sản phẩm loại j gồm lệ phí cố định k_j (không phụ thuộc lượng sản phẩm j, chẳng hạn tiền trang bị máy móc, thiết bị sản xuất ...) và cước phí một đơn vị sản phẩm là c_j (tiền nguyên vật liệu, tiền thuê nhân công ...).

Gọi x_j là số lượng sản phẩm loại j sẽ sản xuất thì chi phí sản xuất sản phẩm loại j là

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{nếu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nếu } x_j = 0. \end{cases}$$

Hàm tổng chi phí để sản xuất n loại sản phẩm là

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Giả thiết rằng $k_j > 0$ với mọi $j = 1, \cdots, n$. Khi đó $f(x)$ là hàm phi tuyến. Bài toán cần giải là

$$\min \ f(x) \ \text{ v.đ.k. } \ x \in D,$$

trong đó D là tập các phương án sản xuất thỏa mãn các ràng buộc về nguyên liệu, thị trường ... Giả sử D là tập lồi đa diện hay nói cách khác tất cả các ràng buộc đều là tuyến tính thì bài toán phi tuyến này vẫn khó giải.

Ta có thể đưa bài toán này về bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận bằng cách đưa vào các biến phụ nhị phân

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nếu } x_j = 0. \end{cases}$$

Giả sử đã biết một cận trên p_j của biến x_j trong bài toán trên, nghĩa là

$$p_j \geq \max\{x_j \mid x \in D\}, \qquad j = 1, ..., n.$$

Khi đó, bài toán đặt ra có thể đưa về bài toán tương đương sau

$$\sum_{j=1}^{n} (k_j y_j + c_j x_j) \to \min$$

$$\text{v.đ.k. } x \in D, \quad 0 \leq x_j \leq p_j y_j, \quad y_j \in \{0, 1\}, \ j = 1, \cdots, n.$$

5.3 Ý tưởng của phương pháp nhánh cận

Xét bài toán quy hoạch nguyên

$$\max\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in D, \tag{IP}$$

trong đó $f(x) = \langle c, x\rangle$ với $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $D \subset \mathbb{R}^n$ là tập hữu hạn các phần tử $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ mà x_j, $j = 1, \cdots, n$, chỉ nhận giá trị nguyên hoặc $x_j \in \{0, 1\}$.

Do D có hữu hạn phần tử nên bài toán (IP) luôn có nghiệm tối ưu, tức tồn tại $x^{opt} \in D$ sao cho $f(x^{opt}) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$. Giá trị tối ưu của bài toán này là $f_{opt} = f(x^{opt})$. Trước hết, ta làm quen với một số khái niệm cơ bản.

5.3.1 Một số khái niệm cơ bản

◇ Một họ $\mathcal{P}$ chứa hữu hạn các tập con của D, $\mathcal{P} := \{D_i \subseteq D \mid i \in I\}$, trong đó I là tập hữu hạn các chỉ số, được gọi là một *phân hoạch* của D nếu

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i \quad \text{và} \quad D_i \cap D_j = \emptyset\ \forall i \neq j.$$

Nói rằng *ta phân hoạch tập D bởi các tập con D_i, $i \in I$* có nghĩa là ta có $\{D_i \subseteq D \mid i \in I\}$ là một phân hoạch của D. Phân hoạch $\mathcal{P}' := \{D'_j \subseteq D \mid j \in I'\}$ được gọi là *mịn hơn* phân hoạch $\mathcal{P} := \{D_i \subseteq D \mid i \in I\}$ nếu:

i) Với mọi $i \in I$ tồn tại ít nhất một $j \in I'$ sao cho $D'_j \subseteq D_i$.

ii) Tồn tại $i_0 \in I$, $j_0 \in I'$ sao cho $D'_{j_0} \subset D_{i_0}$.

◇ Bài toán

$$\max\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in D_i, \tag{IP_i}$$

với $D_i \subset D$ được gọi là *bài toán con* của bài toán quy hoạch nguyên (IP) (cùng hàm mục tiêu nhưng tập chấp nhận được bé hơn).

◇ Số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là một *cận dưới của bài toán* (IP) nếu

$$\alpha \leq f_{opt}.$$

Hiển nhiên rằng nếu tìm được một phương án chấp nhận được $\bar{x} \in D$ thì $f(\bar{x}) \leq f_{opt}$, tức $f(\bar{x})$ là một cận dưới của bài toán (IP). Khi đó $\bar{x}$ được gọi là một *kỷ lục* và $f(\bar{x})$ còn được gọi là một *giá trị kỷ lục*.

◇ Số thực $\beta \in \mathbb{R}$ được gọi là một *cận trên của bài toán* (IP) nếu

$$f_{opt} \leq \beta.$$

Trong quá trình tính toán, nếu tìm được một kỷ lục $\bar{x}$ và một cận trên β^{best} của bài toán (IP) sao cho $\beta^{best} = f(\bar{x})$ thì $x^{opt} = \bar{x}$ chính là nghiệm tối ưu và $f_{opt} = f(\bar{x})$ là giá trị tối ưu của bài toán.

5.3.2 Ý tưởng của phương pháp nhánh cận

Ý tưởng của phương pháp nhánh cận là "chia để trị", tức thay vì giải trực tiếp bài toán quy hoạch nguyên (IP) ta giải các bài toán con

$$\max\ f(x)\quad \text{v.đ.k.}\ x \in D_i, \tag{IP_i}$$

trong đó D_i thuộc một phân hoạch $\mathcal{P} := \{D_i \subseteq D \mid i \in I\}$. Hiển nhiên là việc giải các bài toán con (IP_i), $i \in I$, cũng sẽ mắc phải những khó khăn tương tự như giải bài toán quy hoạch nguyên (IP). Tuy nhiên, ta có thể xác định được cận trên $\beta(D_i)$ của các bài toán con này và nhờ đó, xác định được cận trên của bài toán ban đầu.

Giả sử tập chấp nhận được D của bài toán (IP) được phân hoạch bởi các tập con D_i, $i \in I$, và ta đã biết các cận trên $\beta(D_i)$ của các bài toán con (IP_i). Đặt

$$\beta = \max\{\beta(D_i) \mid i \in I\}.$$

Vì $D_i \subset D$ với mọi $i \in I$ nên

$$\max\{f(x) \mid x \in D\} \le \beta,$$

tức β là một cận trên của bài toán quy hoạch nguyên (IP). Rõ ràng là nếu ta phân hoạch D bởi các tập con càng nhỏ thì ta nhận được đánh giá cận trên β của bài toán ban đầu (IP) càng sát giá trị tối ưu hơn.

Đầu tiên, nếu chưa biết một phương án chấp nhận nào của bài toán (IP) thì ta đặt $\alpha = -\infty$ là một cận dưới của bài toán này. Trong quá trình tính toán, nếu tìm được nghiệm tối ưu của bài toán con (IP_k) nào đó (hiển nhiên $x^k \in D$) thì ta tính lại cận dưới $\alpha = \max\{\alpha, f(x^k)\}$ và ta có được kỷ lục $\bar{x} \in D$ với giá trị kỷ lục $\alpha = f(\bar{x})$.

Điểm đặc sắc của thuật toán nhánh cận là xuất phát từ tập chấp nhận được ban đầu D, qua các vòng lặp, bằng việc phân hoạch mịn dần tập D và xác định cận trên của các bài toán con ta sẽ loại dần được những tập con $D_k \subset D$ mà ta biết chắc chắn nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu (IP) không thể thuộc D_k hoặc ta đã biết một phương án tốt nhất trong D_k rồi (phương án đó chính là nghiệm tối ưu của bài toán con tương ứng). Đến khi đã "kiểm duyệt" được hết (tức đã loại hết) các tập con cần xét thì thuật toán kết thúc và ta nhận được nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu.

Một tập con $D_k \subset D$ sẽ được loại bỏ, tức không cần xem xét đến nó trong các vòng lặp tiếp theo, nếu nó thỏa mãn một trong ba tiêu chuẩn sau:

- *Tiêu chuẩn* 1. Tập D_k là tập rỗng;
- *Tiêu chuẩn* 2. Tìm được một nghiệm tối ưu $x^k \in D_k \subset D$ của bài toán con (IP_k). Vì vậy, tập D_k đã được xét xong. Tính lại giá trị kỷ lục

  $$\alpha = \max\{\alpha, f(x^k)\}$$

  và ta được kỷ lục hiện tại $\bar{x} \in D$ tương ứng với giá trị kỷ lục hiện tại này, tức $f(\bar{x}) = \alpha$;

- *Tiêu chuẩn* 3. Cận trên $\beta(D_k)$ của bài toán con (IP_k) không vượt quá giá trị kỷ lục hiện tại. Do đó tập D_k cũng không thể chứa phương án nào tốt hơn kỷ lục hiện tại và ta không cần phải xét đến tập con này nữa.

Tại mỗi vòng lặp, ta sẽ có một danh sách $\mathcal{D}$ các tập con của D cần phải xem xét. Như đã nói:

- Nếu $\mathcal{D} = \emptyset$ thì dừng thuật toán và ta nhận được nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu (IP).

- Ngược lại, ta *chọn* trong $\mathcal{D}$ một tập con $D_k \subset D$ mà ta cho rằng có nhiều khả năng chứa nghiệm tối ưu cần tìm nhất, rồi phân hoạch D_k bởi một số hữu hạn tập con của D_k (Công việc này gọi là "*chia nhánh*"). Tiếp đó, ta lại tính lại các cận trên, cận dưới (giá trị kỷ lục) và loại bỏ dần các tập con ...

Tùy theo cách tìm cận trên của các bài toán con, cách chọn tập để chia tiếp và cách phân hoạch tập cần chia mà có các thuật toán nhánh cận khác nhau. Mục 5.4 và 5.5 sau đây sẽ trình bày hai thuật toán nhánh cận cụ thể để giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên hoàn toàn và bài toán ba lô $0-1$.

5.4 Thuật toán nhánh cận Land - Doig giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên hoàn toàn

Xét bài toán quy hoạch nguyên tuyến tính (sau đây ta sẽ gọi tắt là quy hoạch nguyên)

$$\max\ f(x) = \langle c, x\rangle \ \text{ v.đ.k. }\ x \in D_0, \qquad (IP_0)$$

trong đó $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ xác định bởi

$$D_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \ \text{ và nguyên}\},$$

với A là ma trận cấp $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$ và $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Véc tơ $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ được gọi là *nguyên* nếu các thành phần x_j, $j = 1, \cdots, n$, đều là số nguyên. Ký hiệu

$$D_0^{n\ell} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$$

là tập lồi đa diện có ràng buộc như tập D_0 nhưng bỏ đi tính nguyên của biến x. Để đơn giản, giả thiết rằng tập $D_0^{n\ell}$ bị chặn. Khi đó D_0 có hữu hạn phần tử và bài toán (IP_0) luôn có nghiệm tối ưu.

Sau đây ta giới thiệu cách tính cận trên và chia nhánh của thuật toán nhánh cận Land-Doig.

5.4.1 Tính cận trên

Xét một phân hoạch $\mathcal{P} := \{D_i \subseteq D_0 \mid i \in I\}$ của tập chấp nhận được D_0. Với mỗi $i \in I$, bài toán

$$\max\{f(x) \mid x \in D_i^{n\ell}\}, \qquad (LP_i)$$

trong đó $D_i^{n\ell}$ là đa diện có các ràng buộc như D_i nhưng bỏ đi tính nguyên của biến x, được gọi là *bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng* (hay còn gọi tắt là *bài toán nới lỏng*) của bài toán con (IP_i). Ký hiệu $\beta(D_i)$ là giá trị tối ưu của bài toán nới lỏng này. Vì $D_i \subset D_i^{n\ell}$ nên $\beta(D_i)$ là một cận trên của bài toán quy hoạch nguyên (IP_i) tương ứng, tức $\max\{f(x) \mid x \in D_i\} \leq \beta(D_i)$. Như vậy, ta dễ dàng nhận được cận trên của các bài toán con bằng các kỹ thuật giải quy hoạch tuyến tính thông thường.

5.4.2 Chia nhánh

Ký hiệu $\mathcal{D}$ là tập danh sách các tập con cần phải xem xét tiếp. Thông thường, người ta *chọn* tập $D_k \in \mathcal{D}$ là tập chấp nhận được của bài toán con (IP_k) có cận trên lớn nhất trong các bài toán con tương ứng với các tập con thuộc $\mathcal{D}$ rồi *chia* tiếp (tức phân hoạch) D_k thành các tập nhỏ hơn. Gọi x^k là phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng (LP_k)

$$\max\left\{f(x) \mid x \in D_k^{n\ell}\right\}$$

(x^k có ít nhất một thành phần không nguyên). Giả sử $x_j^k = a$ là một thành phần không nguyên nào đó của x^k (ta quy ước chọn x_j^k là thành phần không nguyên đầu tiên của x^k). Ta gọi x_j^k là *biến chia nhánh*. Tập D_k được chia thành hai tập theo công thức

$$D_{k_1} := \{x \in D_k \mid x_j \leq [a]\}$$

và

$$D_{k_2} := \{x \in D_k \mid x_j \geq [a] + 1\},$$

trong đó $[a]$ là ký hiệu phần nguyên của số a. Khi đó danh sách các tập con cần xem xét tiếp là

$$\mathcal{D} = \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_k\}\Big) \cup \{D_{k_1}, D_{k_2}\}.$$

5.4.3 Thuật toán

Sau đây là chi tiết thuật toán nhánh cận Land - Doig giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên (IP_0).

Thuật toán 5.1

Bước chuẩn bị.

- ◦ Giải bài toán nới lỏng $\max\{f(x) | x \in D_0^{n\ell}\}$ được phương án tối ưu x^0;
- ◦ **If** x^0 nguyên **Then** Dừng thuật toán (x^0 *là nghiệm tối ưu của bài toán* (IP_0);
  Else Đặt $\beta(D_0) := f(x^0)$; (*cận trên của bài toán* (IP_0))

◇ **If** Biết một phương án $\bar{x} \in D$ **Then** Đặt $\alpha := f(\bar{x})$
Else Đặt $\alpha = -\infty$;

(α là giá trị kỷ lục, $\bar{x}$ là kỷ lục (nếu có))

◇ Đặt $\mathcal{D} = \{D_0\}$; *(danh sách các tập con của D_0 cần xem xét tiếp).*

Bước 1. (*Chọn tập để chia*)

◇ Chọn $D_k \in \mathcal{D}$ là tập chấp nhận được của bài toán quy hoạch nguyên (IP_k) mà bài toán này có cận trên $\beta(D_k)$ lớn nhất trong các bài toán con có tập chấp nhận được thuộc $\mathcal{D}$. Gọi x^k là phương án tối ưu của bài toán nới lỏng (LP_k) tương ứng với (IP_k) (có x^k không nguyên);

◇ Giả sử x_j^k là một thành phần không nguyên đầu tiên của x^k. Phân hoạch D_k thành hai tập:

$$D_{k_1} := \{x \in D_k \mid x_j \leq [x_j^k]\}$$

$$D_{k_2} := \{x \in D_k \mid x_j \geq [x_j^k] + 1\}.$$

◇ Đặt $\mathcal{D} := (\mathcal{D} \setminus \{D_k\}) \cup \{D_{k_1},\ D_{k_2}\}$ *(danh sách các tập con của D cần xem xét tiếp theo).*

Bước 2. (*Loại các tập con*)

(2_1) Với mỗi $i \in \{1, 2\}$, giải bài toán quy hoạch tuyến tính nới lỏng (LP_{k_i}). Có thể gặp một trong ba tình huống sau:

(2_{11}) Bài toán không chấp nhận được, tức $D_{k_i} = \emptyset$. Loại D_{k_i} khỏi việc xem xét tiếp theo (theo Tiêu chuẩn 1), tức

$$\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_{k_i}\}.$$

(2_{12}) Tìm được phương án tối ưu x^{k_i} nguyên. Khi đó, tính lại giá trị kỷ lục

$$\alpha = \max\{\alpha,\ f(x^{k_i})\} \quad - \textit{ giá trị kỷ lục hiện tại.}$$

Gọi $\bar{x}$ là *kỷ lục hiện tại* tương ứng với giá trị kỷ lục hiện tại $\alpha = f(\bar{x})$. Loại D_{k_i} khỏi việc xem xét tiếp theo (theo Tiêu chuẩn 2), tức

$$\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_{k_i}\}.$$

(2_{13}) Tìm được phương án tối ưu x^{k_i} là không nguyên. Đặt $\beta(D_{k_i}) = f(x^{k_i})$. Ta có $\beta(D_{k_i})$ là một cận trên của bài toán (IP_{k_i}).

(2_2) Loại bỏ khỏi $\mathcal{D}$ (theo Tiêu chuẩn 3) tất cả các tập là tập chấp nhận được của bài toán con có cận trên bé hơn hoặc bằng giá trị kỷ lục hiện tại α (nếu có).

Bước 3. (*Kiểm tra điều kiện dừng*)
If $\mathcal{D} = \emptyset$ **Then** Dừng thuật toán
($f_{opt} = \alpha$ *và* $x^{opt} = \bar{x}$ *- giá trị tối ưu là giá trị kỷ lục hiện tại và phương án tối ưu chính là kỷ lục hiện tại*)
Else Quay lại Bước 1.

Chú ý 5.1. Trong quá trình thực hiện thuật toán nhánh cận, ta thường xuyên phải giải các bài toán quy hoạch tuyến tính con. Chú ý rằng các bài toán quy hoạch tuyến tính trung gian đều có cùng hàm mục tiêu với bài toán ban đầu và có thể giải được bằng các phương pháp giải quy hoạch tuyến tính. Thông thường, người ta sử dụng phương pháp đơn hình.

5.4.4 Ví dụ

Mục này trình bày một số ví dụ đơn giản với hàm mục tiêu hai biến để minh họa cho Thuật toán 5.1. Vì vậy, các bài toán quy hoạch tuyến tính trung gian có thể giải được dễ dàng bằng phương pháp hình học (Thuật toán 3.1).

Ví dụ 5.6. Giải quy hoạch nguyên sau bằng phương pháp nhánh cận

$$\begin{aligned} \max\ f(x) = 15x_1 + 10x_2 & \\ \text{v.đ.k.} \qquad x_1 + \quad x_2 &\le 6 \\ 16x_1 + 9x_2 &\le 72 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \\ x_1,\ x_2 &\ \text{nguyên.} \end{aligned}$$

Ký hiệu tập chấp nhận được của bài toán này là D_0,

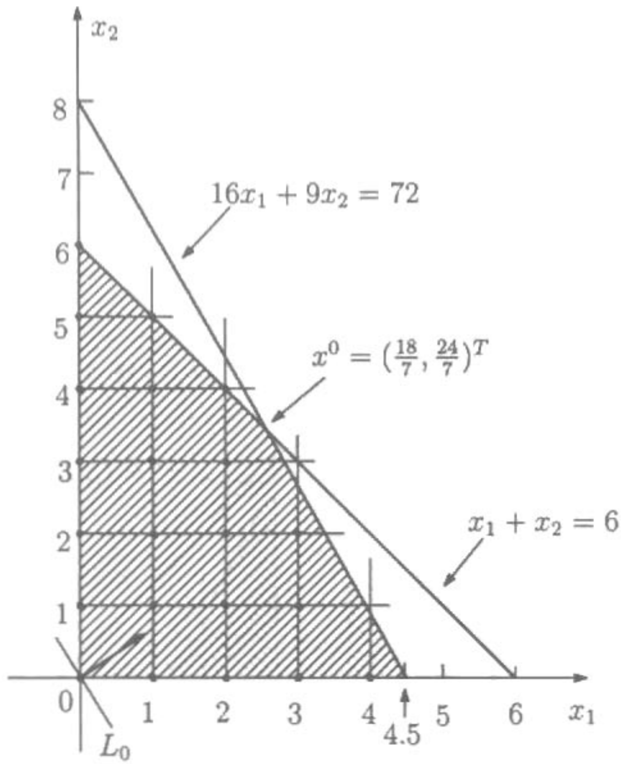
$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \le 6,\ 16x_1 + 9x_2 \le 72,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \text{ nguyên}\}.$$

Quá trình tính toán giải bài toán này theo thuật toán nhánh cận (Thuật toán 5.1) như sau:

Bước chuẩn bị. Giải bài toán nới lỏng (LP_0), với

$$D_0^{nl} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \le 6,\ \ 16x_1 + 9x_2 \le 72,\ \ x_1, x_2 \ge 0\}$$

được nghiệm tối ưu $x^0 = (\frac{18}{7},\ \frac{24}{7})^T$ (xem minh họa ở Hình 5.1). Vì x^0 không nguyên nên đặt
$\beta(D_0) := f(x^0) = \frac{510}{7} \approx 72.85714$; *(cận trên của bài toán* (IP_0)*)*
$\alpha := -\infty$;
$\mathcal{D} := \{D_0\}$; *(danh sách các tập con cần xem xét)*



Hình 5.1

Bước 1. (lần thứ nhất) Chọn tập D_0 để chia. Chia đôi tập D_0 bởi biến chia nhánh $x_1^0 = \frac{18}{7}$. Ta có $[x_1^0] = [\frac{18}{7}] = 2$ và

$$D_1 := \{x \in D_0 \mid x_1 \leq 2\}, \quad D_2 := \{x \in D_0 \mid x_1 \geq 3\}.$$

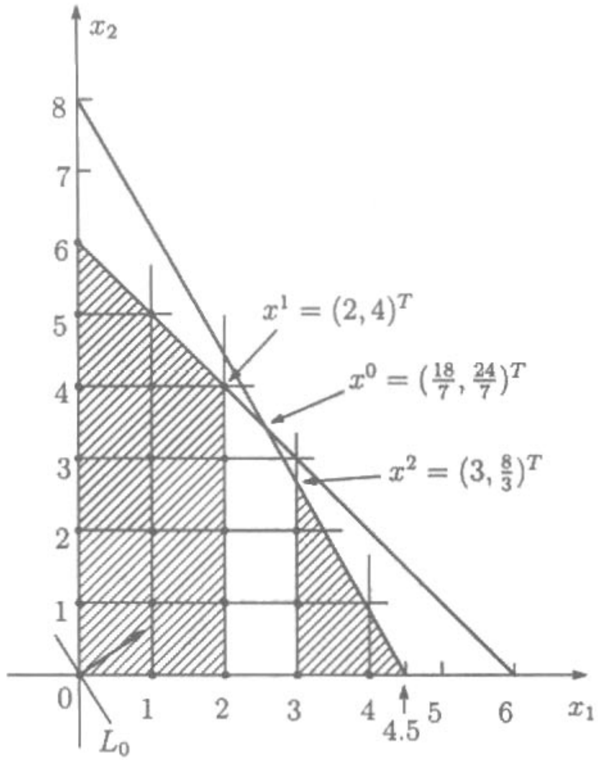
Dễ thấy $D_0 = D_1 \cup D_2$. Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_0\}\Big) \cup \{D_1,\ D_2\} = \{D_1,\ D_2\}$.

Bước 2. (lần thứ nhất) (xem Hình 5.2)

◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_1) với $D_1^{n\ell} := \{x \in D_0^{n\ell} \mid x_1 \leq 2\}$ được nghiệm tối ưu $x^1 = (2,4)^T$ và giá trị tối ưu $f(x^1) = 70$. Do x^1 nguyên nên đặt $\alpha := \max\{\alpha, f(x^1)\} = 70$. Ta có kỷ lục đầu tiên là $\bar{x} = x^1 = (2,4)^T$ tương ứng với giá trị kỷ lục $\alpha = 70$. Loại tập D_1 (theo Tiêu chuẩn 2). Khi đó,

$$\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_1\} = \{D_2\}.$$

◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_2) với $D_2^{n\ell} := \{x \in D_0^{n\ell} \mid x_1 \geq 3\}$ được nghiệm tối ưu $x^2 = (3, \frac{8}{3})^T$ và giá trị tối ưu $f(x^2) \approx 71.66667$. Ta có $\beta(D_2) := f(x^2) = 71.66667 > \alpha$.



Hình 5.2

Bước 3. (lần thứ nhất). Vì $\mathcal{D} = \{D_2\} \neq \emptyset$ nên chuyển về Bước 1.

Bước 1. (lần thứ hai) Chọn tập D_2 để chia. Chia đôi tập D_2 bởi biến chia nhánh $x_2^2 = \frac{8}{3}$. Ta có $[x_2^2] = [\frac{8}{3}] = 2$ và

$$D_3 := \{x \in D_2 \mid x_2 \leq 2\}, \quad D_4 := \{x \in D_2 \mid x_2 \geq 3\}.$$

Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_2\}\Big) \cup \{D_3,\ D_4\} = \{D_3,\ D_4\}$.

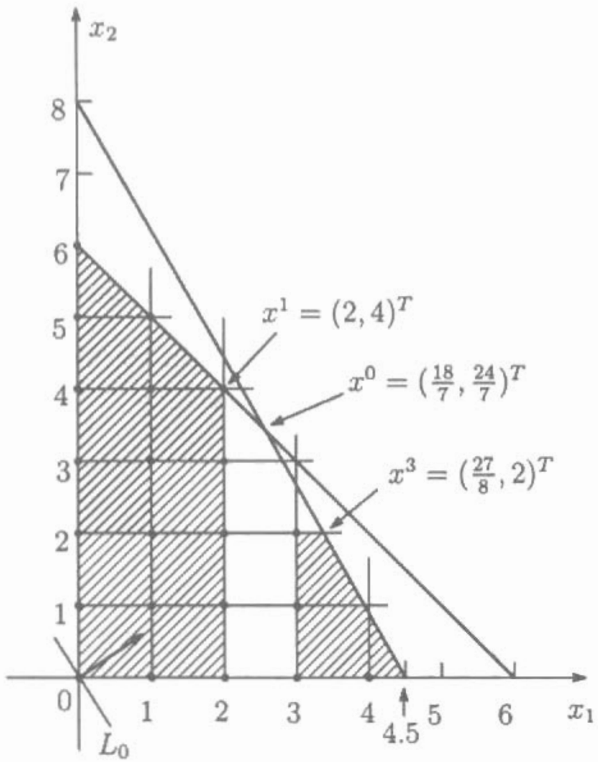
Bước 2. (lần thứ hai) (xem Hình 5.3)

◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_3) với $D_3^{n\ell} := \{x \in D_2^{n\ell} \mid x_2 \leq 2\}$ được nghiệm tối ưu $x^3 = (\frac{27}{8}, 2)^T$ và giá trị tối ưu $f(x^3) = 70.625$. Ta có cận trên của bài toán (IP_3) là $\beta(D_3) := f(x^3) = 70.625 > \alpha$.

◇ Bài toán nới lỏng (LP_4) không chấp nhận được vì

$$D_4^{n\ell} := \{x \in D_2^{n\ell} \mid x_2 \geq 3\} = \emptyset.$$

Vì vậy loại D_4 (theo Tiêu chuẩn 1) và $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_4\} = \{D_3\}$.



Hình 5.3

Bước 3. (lần thứ hai) Vì $\mathcal{D} = \{D_3\} \neq \emptyset$ nên chuyển về Bước 1.

Bước 1. (lần thứ ba) Chọn tập D_3 để chia. Chia đôi tập D_3 bởi biến chia nhánh $x_1^3 = \frac{27}{8}$. Ta có $[x_1^3] = [\frac{27}{8}] = 3$ và

$$D_5 := \{x \in D_3 \mid x_1 \leq 3\}, \quad D_6 := \{x \in D_3 \mid x_1 \geq 4\}.$$

Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_3\}\Big) \cup \{D_5,\ D_6\} = \{D_5,\ D_6\}$.

Bước 2. (lần thứ ba) (xem Hình 5.4)

◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_5) với

$$D_5^{n\ell} := \{x \in D_3^{n\ell} \mid x_2 \leq 3\} = \mathrm{conv}\{(3,2)^T,\ (3,0)^T\}$$

được nghiệm tối ưu $x^5 = (3,2)^T$ và giá trị tối ưu $f(x^5) = 65$. Vì x^5 nguyên nên đặt

$$\alpha := \max\{\alpha, f(x^5)\} = 70 = f(\bar{x}).$$

Vậy ta vẫn có kỷ lục là $\bar{x} = (2,4)^T$ với giá trị kỷ lục là $\alpha = 70$. Đặt

$$\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_5\} = \{D_6\} \quad \text{(theo Tiêu chuẩn 2)}.$$

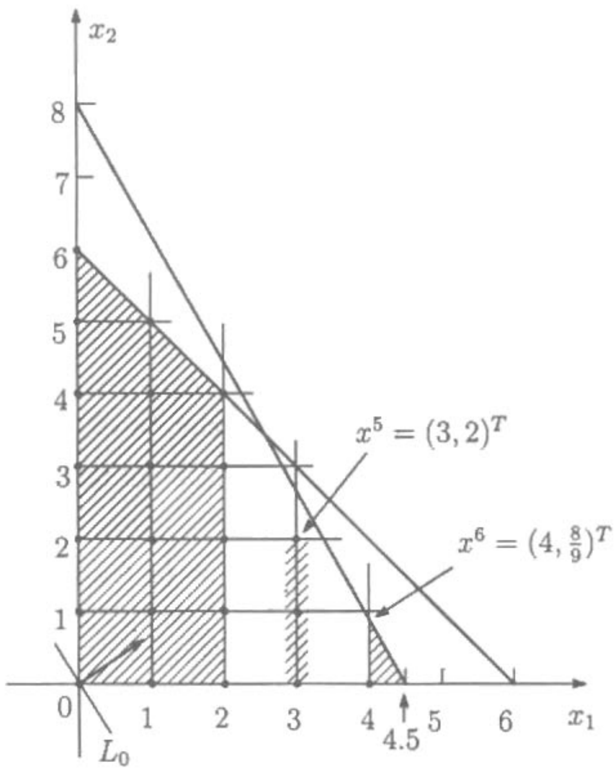
◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_6) với

$$D_6^{n\ell} := \{x \in D_3^{n\ell} \mid x_1 \geq 4\} = \text{conv}\left\{(4,0)^T,\ \left(4, \frac{8}{9}\right)^T,\ (4.5,0)^T\right\}$$

được nghiệm tối ưu $x^6 = (4, \frac{8}{9})^T$ và giá trị tối ưu $f(x^6) \approx 68.88888$. Ta có cận trên của bài toán (IP_6) là $\beta(D_6) := f(x^6) \approx 68.88888 < \alpha$ nên

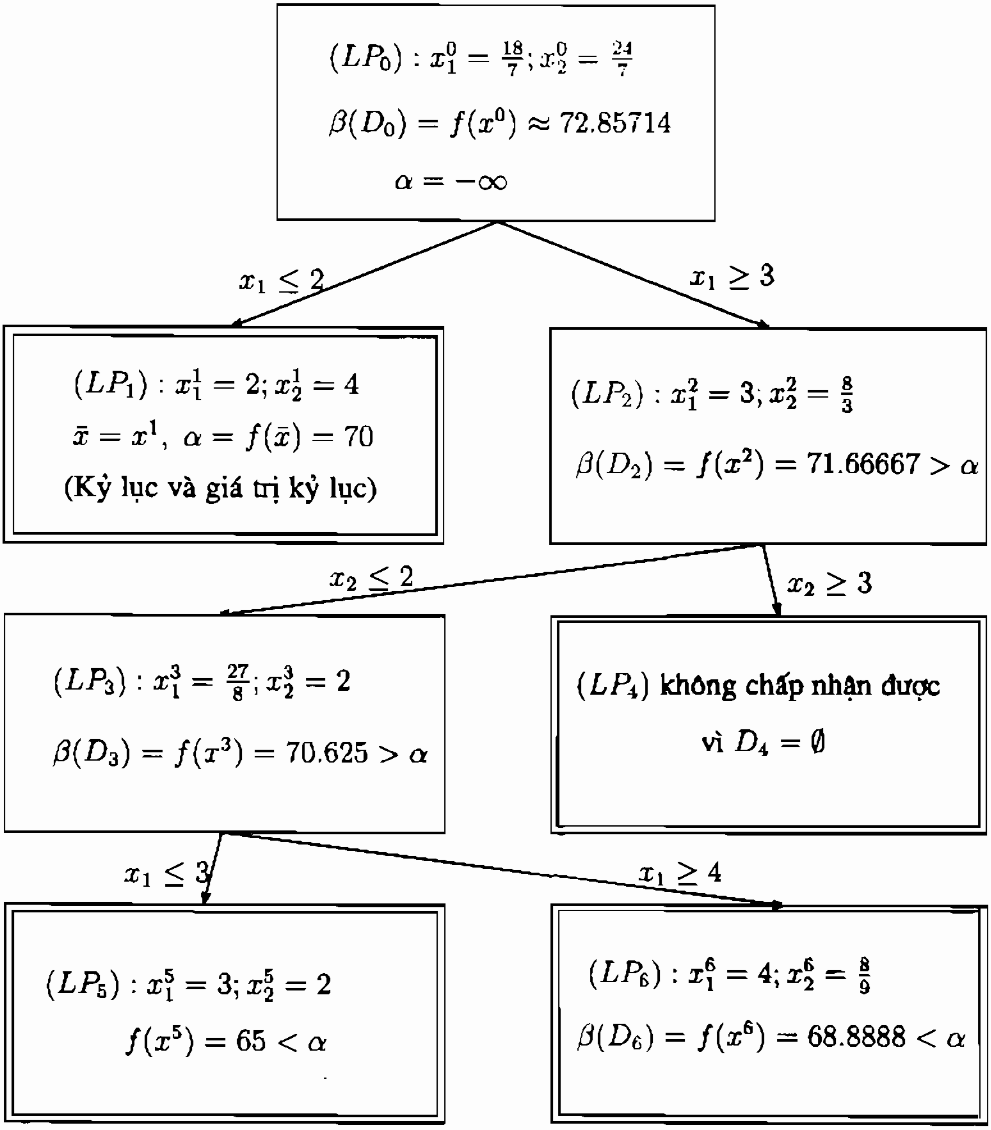
$$\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_6\} = \emptyset \quad \text{(theo Tiêu chuẩn 3).}$$

Bước 3 (lần thứ ba) Vì $\mathcal{D} = \emptyset$ nên thuật toán kết thúc. Ta có nghiệm tối ưu $x^{opt} := \bar{x} = (2,4)^T$ (*kỷ lục*) và giá trị tối ưu $f_{opt} := \alpha = 70$ (*giá trị kỷ lục*).



Hình 5.4

Cây phân nhánh ở Hình 5.5 mô tả quá trình tính toán giải Ví dụ 5.6. Thông tin về mỗi bài toán con (nghiệm tối ưu của bài toán nới lỏng, cận trên của bài toán con, kỷ lục, giá trị kỷ lục (nếu có) ...) được biểu diễn trong một khung hình chữ nhật. Bài toán con có tập chấp nhận được bị loại theo Tiêu chuẩn 1, 2, 3 được ghi trong khung với hai hình chữ nhật lồng nhau.



Hình 5.5

Ví dụ 5.7. Giải quy hoạch nguyên sau bằng phương pháp nhánh cận

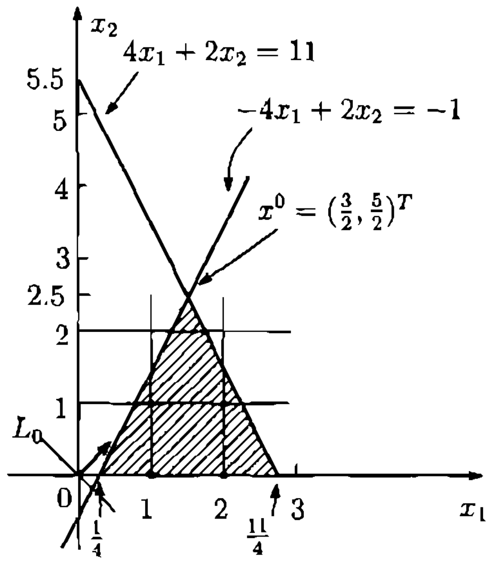
$$
\begin{aligned}
\max\ & f(x) = x_1 + x_2 \\
\text{v.đ.k.}\quad & -4x_1 + 2x_2 \leq -1 \\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0 \\
& x_1,\ x_2 \ \text{nguyên.}
\end{aligned}
$$

Bước chuẩn bị. Giải bài toán nới lỏng (LP_0) với tập chấp nhận được

$$\begin{aligned} D_0^{n\ell} &:= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -4x_1 + 2x_2 \le -1,\ 4x_1 + 2x_2 \le 11,\ x_1, x_2 \ge 0\} \\ &= \mathrm{conv}\{(0.25,\ 0)^T,\ (1.5,\ 2.5)^T,\ (2.75,\ 0)^T\} \end{aligned}$$

được phương án tối ưu $x^0 = (1.5\ , 2.5)^T$ (xem Hình 5.6). Vì x^0 không nguyên nên đặt:

$\beta(D_0) := f(x^0) = 4;$ *(cận trên của bài toán (IP_0))*
$\alpha := -\infty;$ *(giá trị kỷ lục)*
$\mathcal{D} = \{D_0\};$ *(danh sách các tập con cần xem xét)*



Hình 5.6

Bước 1. (lần thứ nhất) Chọn tập D_0 để chia. Chia tập D_0 bởi biến chia nhánh $x_1^0 = 1.5$. Ta có $[x_1^0] = 1$ và

$$D_1 := \{x \in D_0 \mid x_1 \le 1\}, \quad D_2 := \{x \in D_0 \mid x_1 \ge 2\}.$$

Dễ thấy $D_0 = D_1 \cup D_2$. Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_0\}\Big) \cup \{D_1,\ D_2\} = \{D_1,\ D_2\}.$

Bước 2. (lần thứ nhất) (xem Hình 5.7)

◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_1) với

$$D_1^{n\ell} := \{x \in D_0^{n\ell} \mid x_1 \le 1\} = \mathrm{conv}\{(0.25\ ,\ 0)^T,\ (1\ ,\ 1.5)^T,\ (1\ ,\ 0)^T\}$$

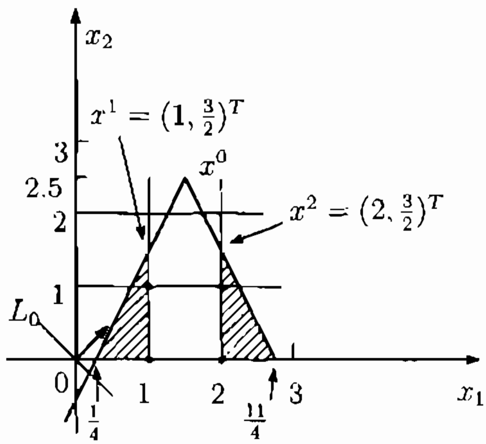
được nghiệm tối ưu $x^1 = (1\ , 1.5)^T$ và giá trị tối ưu $f(x^1) = 2.5$. Cận trên của bài toán (IP_1) là $\beta(D_1) := f(x^1) = 2.5 > \alpha$.

◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_2) với

$$D_2^{n\ell} := \{x \in D_0^{n\ell} \mid x_1 \geq 2\} = \text{conv}\{(2,0)^T,\ (2,\ 1.5)^T,\ (2.75\ ,\ 0)^T\}$$

được nghiệm tối ưu $x^2 = (2\ ,\ 1.5)^T$ và giá trị tối ưu $f(x^2) = 3.5$. Cận trên của bài toán (IP_2) là $\beta(D_2) := f(x^2) = 3.5 > \alpha$.

(Trong bước này, ta chưa loại bỏ được tập con nào và vẫn có $\mathcal{D} = \{D_1,\ D_2\}$)



Hình 5.7

Bước 3. (lần thứ nhất) Vì $\mathcal{D} \neq \emptyset$ nên quay lại Bước 1.

Bước 1 (lần thứ hai) Vì $\beta(D_2) = 3.5 > \beta(D_1) = 2.5$ nên ta chọn tập D_2 để chia. Chia đôi tập D_2 bởi biến chia nhánh $x_2^2 = 1.5$. Ta có $[x_2^2] = 1$ và

$$D_3 := \{x \in D_2 \mid x_2 \leq 1\}, \quad D_4 := \{x \in D_2 \mid x_2 \geq 2\}.$$

Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_2\}\Big) \cup \{D_3,\ D_4\} = \{D_1,\ D_3,\ D_4\}$.

Bước 2 (lần thứ hai) (xem Hình 5.8)

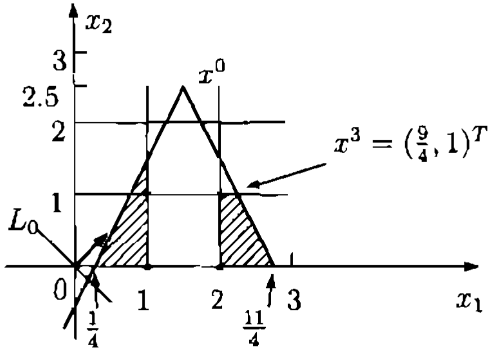
◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_3) với

$$D_3^{n\ell} := \{x \in D_2^{n\ell} \mid x_2 \leq 1\} = \text{conv}\{(2,0)^T,\ (2\ ,\ 1)^T,\ (2.25\ ,\ 1)^T,\ (2.75\ ,\ 0)^T\}$$

được nghiệm tối ưu $x^3 = (2.25\ ,\ 1)^T$ và giá trị tối ưu $f(x^3) = 3.25$. Ta có cận trên của (IP_3) là $\beta(D_3) = 3.25 > \alpha$.

◇ Bài toán nới lỏng (LP_4) không chấp nhận được vì $D_4^{n\ell} := \{x \in D_2^{n\ell} \mid x_2 \geq 3\} = \emptyset$. Do đó, $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_4\} = \{D_1,\ D_3\}$ (theo Tiêu chuẩn 1).

Bước 3 (lần thứ hai) Vì $\mathcal{D} \neq \emptyset$ nên quay lại Bước 1.



Hình 5.8

Bước 1 (lần thứ ba) Vì $\beta(D_3) = 3.25 > \beta(D_1) = 2.5$ nên ta chọn tập D_3 để chia. Chia đôi tập D_3 bởi biến chia nhánh $x_1^3 = 2.25$. Ta có $[x_1^3] = 2$ và

$$D_5 := \{x \in D_3 \mid x_1 \leq 2\}, \quad D_6 := \{x \in D_3 \mid x_1 \geq 3\}.$$

Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_3\}\Big) \cup \{D_5,\ D_6\} = \{D_1,\ D_5,\ D_6\}$.

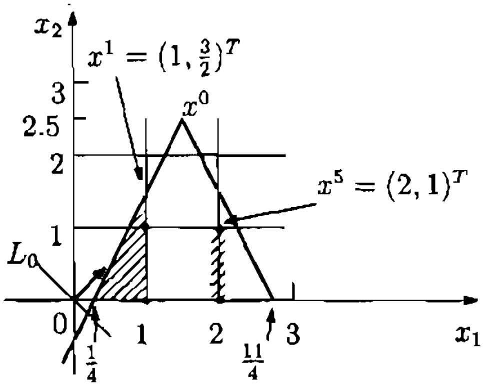
Bước 2 (lần thứ ba) (xem Hình 5.9)

◇ Giải bài toán nới lỏng (LP_5) với

$$D_5^{nl} := \{x \in D_3^{nl} \mid x_1 \leq 2\} = \text{conv}\{(2,0)^T,\ (2,\ 1)^T\}$$

được nghiệm tối ưu $x^5 = (2\ ,\ 1)^T$ và giá trị tối ưu $f(x^5) = 3$. Vì x^5 nguyên nên tính lại giá trị kỷ lục $\alpha := \max\{\alpha,\ f(x^5)\} = f(x^5) = 3$ tương ứng với kỷ lục $\bar{x} = x^5 = (2,\ 1)^T$. Đặt

$$\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_5\} = \{D_1,\ D_6\} \qquad \text{(theo Tiêu chuẩn 2)}$$



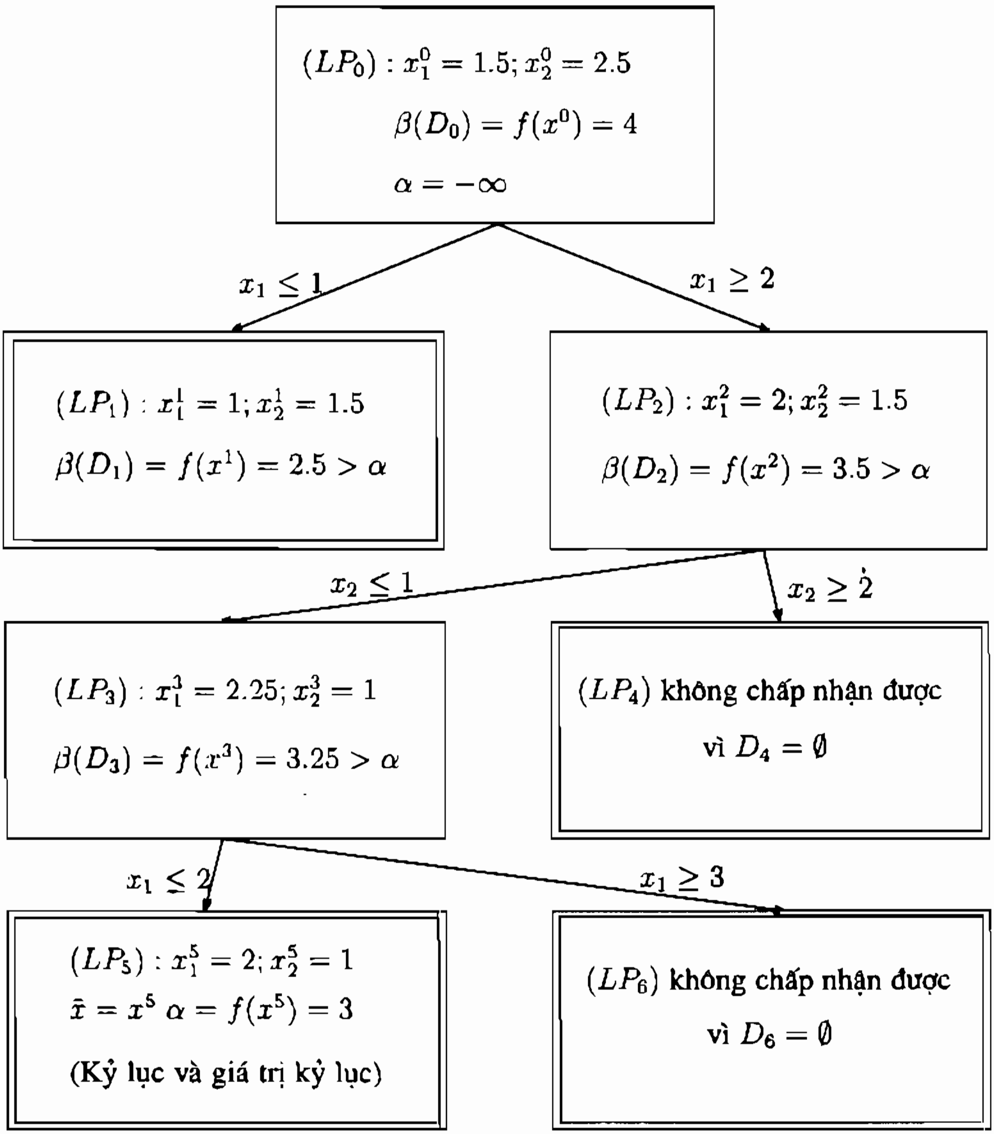
Hình 5.9

◇ Bài toán nới lỏng (LP_6) không chấp nhận được vì $D_6^{nl} := \{x \in D_3^{nl} \mid x_1 \geq 3\} = \emptyset$. Vì vậy $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_6\} = \{D_1\}$ (theo Tiêu chuẩn 1).

◇ Vì $\beta(D_1) = 2.5 < \alpha = 3$ nên $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_1\} = \emptyset$ (theo Tiêu chuẩn 3).

Bước 3 (lần thứ ba) Vì $\mathcal{D} = \emptyset$ nên kết thúc thuật toán. Ta có nghiệm tối ưu $x^{opt} = \bar{x} = (2, 1)^T$ (*kỷ lục*) và giá trị tối ưu $f_{opt} = \alpha = 3$ (*giá trị kỷ lục*).

Quá trình tính toán giải Ví dụ 5.7 được mô tả qua cây phân nhánh ở Hình 5.10.



Hình 5.10

5.5 Thuật toán nhánh cận giải bài toán ba lô $0-1$

Bài toán ba lô là bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên với một ràng buộc chính duy nhất dạng đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính. Về mặt hình thức, bài toán ba lô có vẻ đơn giản nhưng nó thuộc lớp bài toán NP - khó. Có thể nói bài toán ba lô là một trong các bài toán tối ưu rời rạc được nghiên cứu nhiều nhất và nó là mô hình toán học cho nhiều bài toán thực tế (xem Ví dụ 2.8). Cho đến nay, đã có nhiều thuật toán được đề xuất để giải bài toán ba lô sử dụng các phương pháp khác nhau như: phương pháp nhánh cận, phương pháp phương trình truy toán của quy hoạch động hay đưa bài toán ba lô về bài toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị... Mục này dành để trình bày thuật toán nhánh cận giải bài toán ba lô $0-1$. Thuật toán nhánh cận đầu tiên giải bài toán này được Koleser [21] đề xuất năm 1967. Bạn đọc quan tâm có thể tìm hiểu thêm về bài toán ba lô và các thuật toán khác để giải nó trong [2], [10], [30] ,[33].

Xét bài toán ba lô $0-1$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (KP)$$

$$\text{v.đ.k. } x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,\ x_j \in \{0,1\}\ j = 1, 2, \cdots, n\},$$

trong đó $c_j, a_j, j = 1, \cdots, n$ và b là các số thực cho trước. Từ ý nghĩa thực tiễn của bài toán, có thể giả thiết rằng

$$b > 0,\quad c_j > 0,\quad b > a_j > 0,\quad \text{với mọi } j = 1, 2, \cdots, n$$

và có thể đánh số các đồ vật sao cho

$$\frac{c_1}{a_1} \ge \frac{c_2}{a_2} \ge \cdots \ge \frac{c_n}{a_n}. \qquad (5.5)$$

Thuật toán nhánh cận giải bài toán ba lô $0-1$ cũng theo lược đồ chung như đã giới thiệu ở Mục 5.3. Trước hết, ta giới thiệu công thức tính cận trên của bài toán ba lô (KP) để từ đó suy ra công thức tính cận trên cho các bài toán con.

5.5.1 Công thức tính cận trên của bài toán ba lô (KP)

Bổ đề sau cho ta nghiệm tối ưu của bài toán ba lô (KP) trong một trường hợp đặc biệt. Hiển nhiên rằng giá trị tối ưu chính là cận trên đúng của bài toán. Hơn nữa, kết quả này còn là cơ sở để xây dựng công thức tính cận trên của bài toán ba lô trong trường hợp tổng quát.

Bổ đề 5.1. *Giả sử điều kiện* (5.5) *được thỏa mãn và tìm được số nguyên* r $(0 < r \leq n)$ *sao cho*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_r = b. \tag{5.6}$$

Khi đó, ta có một nghiệm tối ưu của bài toán ba lô (KP) là

$$x^* = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{r}, 0, 0, \cdots, 0)^T.$$

Chứng minh: Giả sử điều kiện (5.5) và (5.6) được thỏa mãn. Xét một phương án chấp nhận được bất kỳ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in D$ với $x_{j_1} = x_{j_2} = \cdots = x_{j_s} = 1$ và $x_j = 0$ với mọi $j \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \cdots, j_s\}$. Để chứng tỏ x^* là nghiệm tối ưu của bài toán (KP) ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x^*) = \sum_{k=1}^{r} c_k \geq f(x) = \sum_{i=1}^{s} c_{j_i}. \tag{5.7}$$

Thật vậy, đặt

$$J_1 = \{1, \cdots, r\}, \quad J_2 = \{j_1, j_2, \cdots, j_s\}, \quad J = J_1 \cap J_2.$$

Ta có $\Big(J_2 \setminus J\Big) \subset \{r+1, \cdots, n\}$ và

$$\sum_{j \in J_1 \setminus J} c_j = \sum_{j \in J_1 \setminus J} \frac{c_j}{a_j} a_j \overset{(5.5)}{\geq} \sum_{j \in J_1 \setminus J} \frac{c_r}{a_r} a_j = \frac{c_r}{a_r} \Big(\underbrace{\sum_{j \in J_1} a_j}_{=b} - \sum_{j \in J} a_j \Big)$$

$$\geq \frac{c_r}{a_r} \Big(\underbrace{\sum_{j \in J_2} a_j}_{\leq b} - \sum_{j \in J} a_j \Big) = \frac{c_r}{a_r} \sum_{j \in J_2 \setminus J} a_j \overset{(5.5)}{\geq} \sum_{j \in J_2 \setminus J} \frac{c_j}{a_j} a_j = \sum_{j \in J_2 \setminus J} c_j. \tag{5.8}$$

Rõ ràng, nếu thêm $\sum_{j \in J} c_j$ vào cả hai biểu thức ở đầu và cuối chuỗi biểu thức (5.8) ta sẽ nhận được biểu thức (5.7). □

Chú ý 5.2. Nếu giả thiết của Bổ đề 5.1 không thỏa mãn thì cấu trúc của nghiệm tối ưu có thể sẽ khác, tức các thành phần của nghiệm tối ưu sẽ có các số 0 và 1 xen kẽ nhau chứ không tuần tự như đã thấy ở Bổ đề 5.1.

Kết quả sau cho ta cách xác định một cận trên của bài toán ba lô (KP).

Bổ đề 5.2. *Giả sử bài toán ba lô (KP) thỏa mãn điều kiện (5.5) và*

$$\sum_{j=1}^{r} a_j < b < \sum_{j=1}^{r+1} a_j$$

với r là số nguyên thỏa mãn $0 < r < n$. Khi đó

$$f_* \leq \sum_{j=1}^{r} c_j + \left(b - \sum_{j=1}^{r} a_j\right)\frac{c_{r+1}}{a_{r+1}},$$

trong đó $f_* = \max\{f(x) \mid x \in D\}$ là giá trị tối ưu của bài toán (KP).

Chứng minh. Xét bài toán ba lô $0 - 1$ sau

$$\max \ \langle \bar{c}, y\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} \bar{c}_j y_j \qquad (KP')$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \bar{a}_j y_j \leq b$$

$$y_j \in \{0,1\}, \ j = 1, \cdots, n+1,$$

trong đó $\bar{c}_j = c_j$, $\bar{a}_j = a_j$ với mọi $j = 1, \cdots, r$,

$$\bar{c}_{r+1} = \left(b - \sum_{j=1}^{r} a_j\right)\frac{c_{r+1}}{a_{r+1}}, \qquad \bar{a}_{r+1} = (b - \sum_{j=1}^{r} a_j)$$

và $\bar{c}_{j+1} = c_j$, $\bar{a}_{j+1} = a_j$ với mọi $j = r+1, \cdots, n$. Ta có

$$\frac{\bar{c}_{r+1}}{\bar{a}_{r+1}} = \left(\left(b - \sum_{j=1}^{r} a_j\right)\frac{c_{r+1}}{a_{r+1}}\right)\Big/\left(b - \sum_{j=1}^{r} a_j\right) = \frac{c_{r+1}}{a_{r+1}} = \frac{\bar{c}_{r+2}}{\bar{a}_{r+2}}$$

và bài toán (KP') thỏa mãn điều kiện (5.5), cụ thể

$$\frac{\bar{c}_1}{\bar{a}_1} \geq \frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_2} \geq \cdots \geq \frac{\bar{c}_r}{\bar{a}_r} \geq \frac{\bar{c}_{r+1}}{\bar{a}_{r+1}} = \frac{\bar{c}_{r+2}}{\bar{a}_{r+2}} \geq \cdots \geq \frac{\bar{c}_{n+1}}{\bar{a}_{n+1}}.$$

Vì

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_{r+1} = \sum_{j=1}^{r} a_j + \left(b - \sum_{j=1}^{r} a_j\right) = b \quad \text{(điều kiện (5.6))}$$

nên theo Bổ đề 5.1, nghiệm tối ưu của bài toán (KP') là

$$y^* = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{r+1}, 0, 0, \cdots, 0)^T.$$

Gọi Y là tập nghiệm chấp nhận được của bài toán (KP'). Giá trị tối ưu của bài toán này là

$$\langle \bar{c}, y^* \rangle = \sum_{j=1}^{r+1} \bar{c}_j = \sum_{j=1}^{r} c_j + \left(b - \sum_{j=1}^{r} a_j\right)\frac{c_{r+1}}{a_{r+1}} = \max_{y \in Y}\langle \bar{c}, y\rangle \geq \max_{\substack{y \in Y \\ y_{r+1}=0}} \langle \bar{c}, y\rangle. \quad (5.9)$$

Nhận xét rằng, nếu bỏ đi biến y_{r+1} (tức cho $y_{r+1} = 0$) trong bài toán (KP') thì ta nhận lại được bài toán (KP). Do đó

$$\max_{\substack{y \in Y \\ y_{r+1}=0}} \langle \bar{c}, y\rangle = \max_{x \in D}\langle c, x\rangle. \quad (5.10)$$

Kết hợp (5.9) và (5.10) ta có điều phải chứng minh. □

5.5.2 Tính cận trên của bài toán con

Mỗi tập con của tập chấp nhận được D có dạng

$$D_{co} = \{x \mid x \in D,\ x_1 = \delta_1,\ x_2 = \delta_2, \cdots, x_s = \delta_s\},$$

trong đó $1 \leq s \leq n$ và $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ là các hằng số cho trước có giá trị 0 hoặc 1 thỏa mãn

$$b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j > 0.$$

Bài toán con

$$\max\{f(x) = \langle c, x\rangle \mid x \in D_{co}\}, \quad (KP_{co})$$

được viết tường minh như sau

$$\sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (KP_{co})$$

$$\text{v.đ.k.} \quad \sum_{j=s+1}^{n} a_j x_j \leq b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j$$

$$x_j \in \{0, 1\},\ j = s+1, s+2, \cdots, n.$$

Xét bài toán con (KP_{co}). Bài toán này chỉ có thể thuộc vào một trong sáu trường hợp sau.

Trường hợp 1. Bài toán không chấp nhận được, tức là $D_{co} = \emptyset$.

Trường hợp 2. Có

$$a_k > b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j, \ \forall k = s+1, s+2, \cdots, n.$$

Khi đó bài toán (KP_{co}) có phương án tối ưu duy nhất $x^* = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-s})^T$ và giá trị tối ưu (hay cận trên đúng) là

$$\beta(D_{co}) = \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j.$$

Trường hợp 3. Có

$$\sum_{k=s+1}^{n} a_k \le b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j.$$

Bài toán (KP_{co}) có phương án tối ưu $x^* = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-s})^T$ và giá trị tối ưu (hay cận trên đúng) của (KP_{co}) là

$$\beta(D_{co}) = \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{n} c_j.$$

Trường hợp 4. Tồn tại chỉ số r thỏa mãn $s+1 \le r \le n$ sao cho

$$a_{s+1} + \cdots + a_r = b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j.$$

Theo Bổ đề 5.1, bài toán (KP_{co}) có phương án tối ưu

$$x^* = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s, \underbrace{1, \cdots, 1}_{r-s}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-r})^T$$

và giá trị tối ưu (hay cận trên đúng) của (KP_{co}) là

$$\beta(D_{co}) = \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{r} c_j.$$

Trường hợp 5. Tập chỉ số $I^0 \neq \emptyset$ và $I^0 \subset \{s+1, \cdots, n\}$, trong đó

$$I^0 := \Big\{k \in \{s+1, \cdots, n\} \;\Big|\; a_k > b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j\Big\}.$$

Khi đó, thay vì bài toán (KP_{co}), ta xét bài toán con nhỏ hơn $(KP_{\overline{co}})$ với tập chấp nhận được tương ứng là

$$D_{\overline{co}} := \{x \mid x \in D,\ x_1 = \delta_1, \cdots, x_s = \delta_s,\ x_k = 0 \text{ với } k \in I^0\}.$$

Trường hợp 6. Tồn tại số nguyên q thỏa mãn $s + 1 \le q < n$ và

$$\sum_{j=s+1}^{q} a_j \le b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j < \sum_{j=s+1}^{q+1} a_j.$$

Đây chính là điều kiện (5.6) tương ứng với bài toán ba lô (KP_{co}). Theo Bổ đề 5.2, bài toán (KP_{co}) có một cận trên là

$$\beta(D_{co}) = \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{q} c_j + \left(b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j - \sum_{j=s+1}^{q} a_j\right)\frac{c_{q+1}}{a_{q+1}}. \tag{5.11}$$

Chú ý 5.3. Khi tính cận trên của các bài toán con, ta nên xét lần lượt Trường hợp 1, Trường hợp 2, Trường hợp 3, Trường hợp 4, Trường hợp 5 (để rút gọn số biến) rồi mới đến Trường hợp 6.

5.5.3 Thuật toán

Sau đây là chi tiết thuật toán nhánh cận giải bài toán ba lô $0 - 1$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{KP_0}$$

$$\text{v.đ.k. } x \in D_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,\ x_j \in \{0,1\}\ j = 1, 2, \cdots, n\right\},$$

trong đó $b,\ c_j > 0,\ b > a_j > 0,\ j = 1, \cdots, n$ là các số thực cho trước sao cho điều kiện (5.5) được thỏa mãn.

Thuật toán 5.2

Bước chuẩn bị.

◇ Xuất phát từ tập

$$D_0 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, x_j \in \{0,1\}, j = 1, \cdots, n\right\}$$

(Tại bước này, chưa biến nào được gán giá trị 0 *hay* 1).

◇ Đặt $\beta(D_0) = +\infty$; *(cận trên của bài toán (KP_0))*

◇ **If** Biết một phương án $\bar{x} \in D_0$ **Then** Đặt $\alpha := f(\bar{x})$
Else Đặt $\alpha = -\infty$;

(α là giá trị kỷ lục, $\bar{x}$ là kỷ lục (nếu có))

◇ Đặt $\mathcal{D} = \{D_0\}$; *(danh sách các tập con của D_0 cần xem xét tiếp)*

Bước 1. (*Chọn tập để chia*)

◇ Chọn $D_k \in \mathcal{D}$ là tập chấp nhận được của bài toán con (KP_k) mà bài toán này có cận trên $\beta(D_k)$ lớn nhất trong các bài toán con có tập chấp nhận được thuộc $\mathcal{D}$.

◇ Chia tập D_k thành hai tập con bằng cách gán cho biến tự do có chỉ số nhỏ nhất giá trị 0 hay 1. Chẳng hạn, nếu

$$D_k = \{x \in D_0 \mid x_1 = \delta_1,\ x_2 = \delta_2, \cdots,\ x_{s-1} = \delta_{s-1}\},$$

trong đó các δ_j, $j = 1, \cdots, s-1$, đã được gán cố định giá trị 0 hoặc 1, thì D_k được chia thành hai tập là

$$D_{k_1} := \{x \in D_k \mid x_s = 1\} = \{x \in D_0 \mid x_1 = \delta_1, \cdots, x_{s-1} = \delta_{s-1}, x_s = 1\};$$

$$D_{k_2} := \{x \in D_k \mid x_s = 0\} = \{x \in D_0 \mid x_1 = \delta_1, \cdots, x_{s-1} = \delta_{s-1}, x_s = 0\}.$$

◇ Đặt $\mathcal{D} = \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_k\}\Big) \cup \{D_{k_1}, D_{k_2}\}$; (*danh sách các tập con của D_0 cần xem xét tiếp theo*)

Bước 2. (*Loại bỏ các tập con*)

(2_1) Với mỗi $i \in \{1, 2\}$, xét bài toán con (KP_{k_i}). Có thể xảy ra một trong sáu khả năng sau:

(2_{11}) Bài toán không chấp nhận được (Trường hợp 1), tức $D_{k_i} = \emptyset$. Loại D_{k_i} khỏi việc xem xét tiếp theo (theo Tiêu chuẩn 1), tức $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_{k_i}\}$.

(2_{12}) Có

$$a_i > b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j,\ \forall i = s+1, s+2, \cdots, n,$$

tức bài toán con (KP_{k_i}) thuộc Trường hợp 2. Do đó bài toán này có phương án tối ưu duy nhất là

$$x^{k_i} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-s})^T$$

và giá trị tối ưu là

$$\beta(D_{k_i}) = \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j.$$

Tuy nhiên, trong trường hợp này ta không cải thiện được giá trị kỷ lục. Loại D_{k_i} theo Tiêu chuẩn 2, tức

$$\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_{k_i}\}.$$

(2_{13}) Có

$$\sum_{k=s+1}^{n} a_k \le b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j,$$

tức bài toán con (KP_{k_i}) thuộc Trường hợp 3. Vì vậy, nó có phương án tối ưu

$$x^{k_i} = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n-s})^T$$

và giá trị tối ưu là

$$f(x^{k_i}) = \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{n} c_j.$$

Tính lại giá trị kỷ lục $\alpha := \max\{\alpha,\ f(x^{k_i})\}$ và gọi $\bar{x}$ là kỷ lục tương ứng với giá trị này, tức $f(\bar{x}) = \alpha$. Loại D_{k_i} theo Tiêu chuẩn 2, tức $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_{k_i}\}$.

(2_{14}) Bài toán con (KP_{k_i}) thuộc Trường hợp 4, tức tồn tại chỉ số r thỏa mãn $s+1 \le r \le n$ sao cho

$$a_{s+1} + \cdots + a_r = b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j.$$

Khi đó nó có phương án tối ưu $x^{k_i} = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_s, \underbrace{1, \cdots, 1}_{r-s}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-r})^T$

và giá trị tối ưu (hay cận trên đúng) của (KP_{co}) là

$$\beta(D_{co}) = \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{r} c_j.$$

Tính lại giá trị kỷ lục $\alpha := \max\{\alpha,\ f(x^{k_i})\}$ và gọi $\bar{x}$ là kỷ lục tương ứng với giá trị này, tức $f(\bar{x}) = \alpha$. Loại D_{k_i} theo Tiêu chuẩn 2, tức $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_{k_i}\}$.

(2_{15}) Bài toán con (KP_{k_i}) thuộc Trường hợp 5, tức

$$I^0 := \left\{k \in \{s+1, \cdots, n\} \;\middle|\; a_k > b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j\right\} \neq \emptyset$$

và $I^0 \subset \{s+1, \cdots, n\}$. Đặt

$$\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_{k_i}\}\Big) \cup \{D_{\overline{k_i}}\},$$

trong đó

$$D_{\overline{k_i}} = \{x \in D_0 \mid x_1 = \delta_1, \cdots, x_s = \delta_s, x_k = 0 \text{ với } k \in I^0\} \subset D_{k_i}.$$

Quay lại Bước 2_1 xét bài toán con $(KP_{\overline{k_i}})$ với tập chấp nhận được tương ứng là $D_{\overline{k_i}}$.

(2_{16}) Tìm được số nguyên q, sao cho $s+1 \leq q < n$ và

$$\sum_{j=s+1}^{q} a_j < b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j < \sum_{j=s+1}^{q+1} a_j,$$

tức bài toán (KP_{k_i}) thuộc Trường hợp 6. Cận trên của bài toán này được tính theo công thức (5.11), cụ thể

$$\beta(D_{ki}) := \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{q} c_j + \Big(b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j - \sum_{j=s+1}^{q} a_j\Big)\frac{c_{q+1}}{a_{q+1}}.$$

(2_2) Loại bỏ khỏi $\mathcal{D}$ (theo Tiêu chuẩn 3) tất cả các tập con tương ứng với bài toán con có cận trên bé hơn hoặc bằng giá trị kỷ lục (nếu có).

Bước 3 (Kiểm tra điều kiện dừng)

If $\mathcal{D} = \emptyset$ **Then** Dừng thuật toán.

($x^{opt} := \bar{x}$ - *kỷ lục hiện tại, và*
giá trị tối ưu là $f_{opt} := f(\bar{x}) = \alpha$)

Else Chuyển Bước 1.

Chú ý 5.4. Trước khi giải bài toán ba lô $0-1$ theo Thuật toán 5.2 ta phải loại bỏ các đồ vật có trọng lượng lớn hơn tải trọng của ba lô và đổi biến (nếu cần) để điều kiện (5.5) được thỏa mãn.

5.5.4 Ví dụ

Ví dụ 5.8. Giải bài toán ba lô

$$7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max \qquad (KP_0^1)$$

$$\text{v.đ.k. } 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 12$$
$$x_j \in \{0,\ 1\},\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Các dữ liệu của bài toán này thỏa mãn điều kiện (5.5). Cụ thể

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{7}{5} > \frac{c_2}{a_2} = \frac{3}{3} > \frac{c_3}{a_3} = \frac{2}{6} > \frac{c_4}{a_4} = \frac{1}{4}.$$

Sau đây là chi tiết quá trình giải bài toán này theo Thuật toán 5.2.
Bước khởi đầu. Xuất phát từ tập

$$D_0 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 12,\ x_j \in \{0,\ 1\},\ j = 1, 2, 3, 4\}.$$

Đặt $\beta(D_0) := +\infty$; *(cận trên của bài toán (KP_0^1))*
$\alpha := -\infty$; *(cận dưới).*
$\mathcal{D} := \{D_0\}$; *(tập các tập con cần xem xét)*

Bước 1 (lần thứ nhất) Chọn tập D_0 để chia. Chia D_0 thành hai tập con

$$D_1 := \{x \in D_0 \mid x_1 = 1\} \text{ và } D_2 := \{x \in D_0 \mid x_1 = 0\}.$$

Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_0\}\Big) \cup \{D_1,\ D_2\}$.

Bước 2 (lần thứ nhất)
Bước 2_1.
◇ Xét bài toán (KP_1^1) *(có $s = 1,\ \delta_1 = 1$)*

$$7 \times 1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max \qquad (KP_1^1)$$

$$\text{v.đ.k.} \quad 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \le 12 - 5 \times 1 = 7$$
$$x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,\ 1\}.$$

Ta có

$$\sum_{j=s+1=2}^{q=2} a_j \le b - \sum_{j=1}^{s=1} a_j\delta_j < \sum_{j=s+1=2}^{q+1=3} a_j.$$

Cụ thể

$$a_2 < b - a_1\delta_1 < a_2 + a_3$$
$$3 \le 12 - 5 \times 1 < 3 + 6.$$

Như vậy, bài toán (KP_1^1) thuộc Trường hợp 6 và cận trên $\beta(D_1)$ của (KP_1^1) được xác định bởi

$$\begin{aligned}\beta(D_1) &:= \sum_{j=1}^{s} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{q=2} c_j + \Big(b - \sum_{j=1}^{s} a_j\delta_j - \sum_{j=s+1}^{q=2} a_j\Big)\frac{c_{q+1}}{a_{q+1}}\\ &= c_1 \times \delta_1 + c_2 + \Big(b - a_1 \times \delta_1 - a_2\Big)\frac{c_3}{a_3}\\ &= 7 \times 1 + 3 + \Big(12 - 5 \times 1 - 3\Big)\frac{2}{6} = 10 + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

◇ Xét bài toán (KP_2^1) (*có* $s = 1,\ \delta_1 = 0$)

$$7 \times 0 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max \qquad (KP_2^1)$$

$$\text{v.đ.k.} \qquad 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 12 - 5 \times 0 = 12$$

$$x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,\ 1\}.$$

Dễ thấy

$$\sum_{j=s+1=2}^{q=3} a_j \leq b - \sum_{j=1}^{s=1} a_j\delta_j < \sum_{j=s+1}^{q+1=4} a_j$$

$$a_2 + a_3 \leq b - a_1 \times \delta_1 < a_2 + a_3 + a_4$$

$$3 + 6 \leq 12 - 5 \times 0 < 3 + 6 + 4.$$

Do đó, bài toán (KP_2^1) thuộc Trường hợp 6. Cận trên $\beta(D_2)$ của bài toán này là

$$\begin{aligned}\beta(D_2) &:= \sum_{j=1}^{s=1} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{q=3} c_j + \Big(b - \sum_{j=1}^{s=1} a_j\delta_j - \sum_{j=s+1}^{q=3} a_j\Big)\frac{c_{q+1}}{a_{q+1}}\\ &= c_1 \times \delta_1 + (c_2 + c_3) + \Big(b - (a_1 \times \delta_1) - (a_2 + a_3)\Big)\frac{c_4}{a_4}\\ &= 7 \times 0 + (3 + 2) + \Big(12 - 5 \times 0 - (3 + 6)\Big)\frac{1}{4}\\ &= 5 + \frac{3}{4} > \alpha = -\infty.\end{aligned}$$

Bước 2_2. Vì $\beta(D_1) = 10 + \frac{4}{3} > \alpha = -\infty$ và $\beta(D_2) = 5 + \frac{3}{4} > \alpha = -\infty$ nên không loại được tập nào. Chuyển sang Bước 3.

Bước 3 (lần thứ nhất) Vì $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\} \neq \emptyset$ nên quay lại Bước 1.

Bước 1 (lần thứ hai) Chọn D_1 để chia vì $\beta(D_1) > \beta(D_2)$. Chia D_1 thành hai tập con

$$D_3 := \{x \in D_1 \mid x_2 = 1\} = \{x \in D_0 \mid x_1 = 1,\ x_2 = 1\}$$

và

$$D_4 := \{x \in D_1 \mid x_2 = 0\} = \{x \in D_0 \mid x_1 = 1,\ x_2 = 0\}.$$

Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_1\}\Big) \cup \{D_3,\ D_4\} = \{D_2,\ D_3,\ D_4\}.$

Bước 2 (lần thứ hai)
Bước 2_1.
◇ Xét bài toán (KP_3^1) (*có* $s = 2,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 1$)

$$7 \times 1 + 3 \times 1 + 2x_3 + x_4 \to \max \qquad (KP_3^1)$$

$$\text{v.đ.k.} \qquad 6x_3 + 4x_4 \le 12 - 5 \times 1 - 3 \times 1 = 4$$

$$x_3,\ x_4 \in \{0,\ 1\}.$$

Vì $a_3 = 6 > 4$ nên bài toán (KP_3^1) thuộc Trường hợp 5. Thay vì xét bài toán con (KP_3^1), ta xét bài toán con nhỏ hơn (KP_5^1) với

$$D_5 := \{x \in D_0 \mid x_1 = 1,\ x_2 = 1, x_3 = 0\} \subset D_3$$

và đặt

$$\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_3\}\Big) \cup \{D_5\} = \{D_2,\ D_4,\ D_5\}.$$

◇ Xét bài toán (KP_5^1)

$$7 \times 1 + 3 \times 1 + 2 \times 0 + x_4 \to \max \qquad (KP_5^1)$$

$$\text{v.đ.k.} \qquad 4x_4 \le 12 - 5 \times 1 - 3 \times 1 - 6 \times 0 = 4$$

$$x_4 \in \{0, 1\}.$$

Dễ thấy bài toán (KP_5^1) thuộc Trường hợp 3 và nó có nghiệm tối ưu $x^5 = (1, 1, 0, 1)^T$ và giá trị tối ưu là $f(x^5) = 11$.

Đặt

$$\alpha := \max\{\alpha, f(x^5)\} = f(x^5) = 11.$$

Ta có kỷ lục $\bar{x} := x^5 = (1, 1, 0, 1)^T$ và giá trị kỷ lục $\alpha := 11$.

$\Rightarrow$ Loại D_5 theo Tiêu chuẩn 2, tức

$$\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_5\}\Big) = \{D_2,\ D_4\}.$$

◇ Xét bài toán (KP_4^1) (*có* $s = 2,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0$)

$$7 \times 1 + 3 \times 0 + 2x_3 + x_4 \to \max \qquad (KP_4^1)$$

$$\text{v.đ.k.} \qquad 6x_3 + 4x_4 \le 12 - 5 \times 1 - 3 \times 0 = 7$$

$$x_3,\ x_4 \in \{0,\ 1\}.$$

Vì

$$a_3 = 6 < 7 < a_3 + a_4 = 10$$

nên bài toán (KP_4^1) thuộc Trường hợp 6 và

$$\begin{aligned}
\beta(D_4) &:= \sum_{j=1}^{s=2} c_j\delta_j + \sum_{j=s+1}^{q=3} c_j + \Big(b - \sum_{j=1}^{s=2} a_j\delta_j - \sum_{j=s+1}^{q=3} a_j\Big)\frac{c_{q+1}}{a_{q+1}} \\
&= (c_1 \times \delta_1 + c_2 \times \delta_2) + c_3 + \Big(b - (a_1 \times \delta_1 + a_2 \times \delta_2) - a_3\Big)\frac{c_4}{a_4} \\
&= (7 \times 1 + 3 \times 0) + 2 + (12 - (5 \times 1 + 3 \times 0) - 6\Big)\frac{1}{4} \\
&= 9 + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Bước 2_2. Vì $\beta(D_2) = 5 + \frac{3}{4} < \alpha = 11$ và $\beta(D_4) = 9 + \frac{1}{4} < \alpha = 11$ nên loại D_2 và D_4 theo Tiêu chuẩn 3, tức

$$\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_2\ \ D_4\}\Big) = \emptyset.$$

Bước 3 (lần thứ hai) Do $\mathcal{D} = \emptyset$ nên Thuật toán kết thúc. Ta có nghiệm tối ưu của bài toán ban đầu là $x^{opt} = \bar{x} = (1, 1, 0, 1)^T$ và giá trị tối ưu là $f_{opt} = \alpha = 11$.

Ví dụ 5.9. Giải bài toán ba lô

$$5x_1 + \ \ x_2 + 9x_3 + 3x_4 \to \max \qquad (KP_0^2)$$

$$\text{v.đ.k.}\ \ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 10$$

$$x_j \in \{0,\ 1\},\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Vì

$$\frac{c_3}{a_3} = \frac{9}{7} > \frac{c_1}{a_1} = \frac{5}{4} > \frac{c_4}{a_4} = \frac{3}{3} > \frac{c_2}{a_2} = \frac{1}{2}$$

nên ta đổi biến

$$x_1 := x_3, \quad x_2 := x_1, \quad x_3 := x_4, \text{ và } x_4 := x_2$$

và bài toán ba lô trên trở thành

$$9x_1 + 5x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 \to \max \qquad (KP_0^{2'})$$

$$\text{v.đ.k.}\ \ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_j \in \{0,\ 1\},\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Bài toán $(KP^{2'})$ thỏa mãn điều kiện (5.5). Quá trình giải bài toán này theo Thuật toán 5.2 như sau:

Bước khởi đầu. Xuất phát từ tập

$$D_0 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10,\ \ x_j \in \{0,\ 1\},\ j = 1,2,3,4\}.$$

Đặt $\beta(D_0) := +\infty$; *(cận trên của bài toán (KP_0^1))*
$\alpha := -\infty$; *(cận dưới).*
$\mathcal{D} := \{D_0\}$; *(tập các tập con cần xem xét)*

Bước 1. (lần thứ nhất) Chọn D_0 để chia. Chia D_0 thành hai tập con

$$D_1 := \{x \in D_0 \mid x_1 = 1\} \text{ và } D_2 := \{x \in D_0 \mid x_1 = 0\}.$$

Đặt $\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_0\}\Big) \cup \{D_1,\ D_2\}$.

Bước 2. (lần thứ nhất)
Bước 2_1.
◇ Xét bài toán $(KP_1^{2'})$ *(có $s = 1,\ \delta_1 = 1$)*

$$9 \times 1 + 5x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 \to \max \qquad (KP_1^{2'})$$

$$\text{v.đ.k.} \qquad 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10 - 7 \times 1 = 3$$

$$x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,\ 1\}.$$

Vì $a_2 = 4 > 3$ nên bài toán $(KP_1^{2'})$ thuộc Trường hợp 5. Thay vì xét bài toán con $(KP_1^{2'})$, ta xét bài toán con nhỏ hơn $(KP_3^{2'})$ với

$$D_3 := \{x \in D_0 \mid x_1 = 1,\ x_2 = 0\} \subset D_1$$

và đặt

$$\mathcal{D} := \Big(\mathcal{D} \setminus \{D_1\}\Big) \cup \{D_3\} = \{D_2,\ D_3\}.$$

◇ Xét bài toán $(KP_3^{2'})$ *(có $s = 2,\ \delta_1 = 1,\ \delta_2 = 0$)*

$$9 \times 1 + 5 \times 0 + 3x_3 + \ \ x_4 \to \max \qquad (KP_3^{2'})$$

$$\text{v.đ.k.} \qquad 3x_3 + 2x_4 \leq 10 - 7 \times 1 - 4 \times 0 = 3$$

$$x_3,\ x_4 \in \{0,\ 1\}.$$

Bài toán này thuộc Trường hợp 4 vì có $a_3 = 3$ (a_3 bằng đúng tải trọng còn lại của ba lô). Do đó nó có nghiệm tối ưu là $x^3 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$. Ta có kỷ lục đầu tiên $\bar{x} := x^3 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)^T$), tương ứng với giá trị kỷ lục $\alpha := f(\bar{x}) = 12$. Loại D_3 theo Tiêu chuẩn 2, tức $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_3\} = \{D_2\}$.

◇ Xét bài toán $(KP_2^{2'})$ (*có* $s = 1,\ \delta_1 = 0$)

$$9 \times 0 + 5x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 \to \max \qquad (KP_2^{2'})$$

$$\text{v.đ.k.} \quad 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 10 - 7 \times 0 = 10$$

$$x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,\ 1\}.$$

Dễ thấy $a_2 + a_3 + a_4 = 9$ vẫn nhỏ hơn tải trọng còn lại của ba lô là 10. Như vậy, bài toán này thuộc Trường hợp 3 và nghiệm tối ưu của nó là $x^2 = (0, 1, 1, 1)^T$, tương ứng với giá trị tối ưu $f(x^2) = 9$. Tính lại giá trị kỷ lục:

$$\alpha := \max\{\alpha, f(x^2)\} = \alpha = 12$$

với kỷ lục tương ứng vẫn là $\bar{x} = (1, 0, 1, 1)^T$. Loại D_2 theo Tiêu chuẩn 2, tức $\mathcal{D} := \mathcal{D} \setminus \{D_2\} = \emptyset$.

Bước 3 (lần thứ nhất)

Vì $\mathcal{D} = \emptyset$ nên Thuật toán kết thúc. Ta có nghiệm tối ưu của bài toán $(KP_0^{2'})$ là $x^* = \bar{x} = (1, 0, 1, 0)^T$ và giá trị tối ưu là $f_* = \alpha = 12$.

Để lấy nghiệm cho bài toán ban đầu (KP_0^2), ta đổi lại biến

$$x_1^{opt} := x_2^* = 0, \quad x_2^{opt} := x_4^* = 0, \quad x_3^{opt} := x_1^* = 1, \quad x_4^{opt} := x_3^* = 1.$$

Vậy, nghiệm tối ưu của bài toán (KP_0^2) là $x^{opt} = (0, 0, 1, 1)^T$ và $f_{opt} = 12$.

Bài tập Chương 5

1. Sử dụng thuật toán nhánh cận Land-Doig, giải các bài toán quy hoạch nguyên sau (đề nghị minh họa bằng hình học).

i)
$$\begin{aligned} & x_1 + \ x_2 \to \max \\ \text{v.đ.k.} \quad & 2x_1 + 5x_2 \le 16 \\ & 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \text{ và nguyên.} \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} & 2x_1 + 3x_2 \to \min \\ \text{v.đ.k.} \quad & x_1 + \ x_2 \ge 3 \\ & x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \text{ và nguyên.} \end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned} & 7x_1 + 3x_2 \to \max \\ \text{v.đ.k.}\quad & 2x_1 + 5x_2 \le 30 \\ & 8x_1 + 3x_2 \le 48 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \text{ và nguyên.} \end{aligned}$$

2. Hãy phát biểu *bài toán xếp hàng lên tầu* sau đây thành quy hoạch nguyên: Người ta cần chở 5 loại hàng bằng một tầu có tải trọng là 112 và thể tích 109. Mỗi đơn vị hàng loại j có trọng lượng a_j, thể tích b_j và giá trị sử dụng c_j, $j = 1, \cdots, 5$ được cho ở bảng sau.

Loại hàng	a_j	b_j	c_j
1	5	3	4
2	8	5	7
3	3	8	6
4	2	5	3
5	3	7	4

Hãy xác định lượng đơn vị các loại hàng xếp lên tầu sao cho tổng giá trị sử dụng lớn nhất mà không được vượt quá tải trọng và dung tích tầu.

3. Nêu một số mô hình thực tế có mô hình toán học là bài toán ba lô.

4. Giải các bài toán ba lô sau bằng phương pháp nhánh cận

i)
$$\begin{aligned} & z = 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + x_5 \to \max \\ \text{v.đ.k.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 7x_5 \le 14 \\ & x_1,\ x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} & z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 \to \max \\ \text{v.đ.k.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \le 10 \\ & x_1,\ x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned} & z = 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max \\ \text{v.đ.k.}\quad & 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \le 10 \\ & x_1,\ x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

iv)
$$
\begin{aligned}
&z = 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max\\
\text{v.đ.k.}\quad &4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \le 8\\
&x_1,\ x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

v)
$$
\begin{aligned}
&z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4 \to \max\\
\text{v.đ.k.}\quad &15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 \le 50\\
&x_1,\ x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Chương 6

Quy hoạch phi tuyến

"Vẻ đẹp của toán học cũng như của mọi vật khác chỉ có thể cảm nhận chứ không giải thích được."
Cayley[1]

6.1 Bài toán quy hoạch phi tuyến không ràng buộc

Bài toán quy hoạch phi tuyến không ràng buộc được phát biểu như sau:

$$\min\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (P^{krb})$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm phi tuyến.

6.1.1 Điều kiện tối ưu

Định lý 6.1. (Điều kiện bậc nhất) *Cho hàm f xác định, khả vi trên $\mathbb{R}^n$. Nếu $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P^{krb}) thì $\nabla f(x^*) = 0$.*

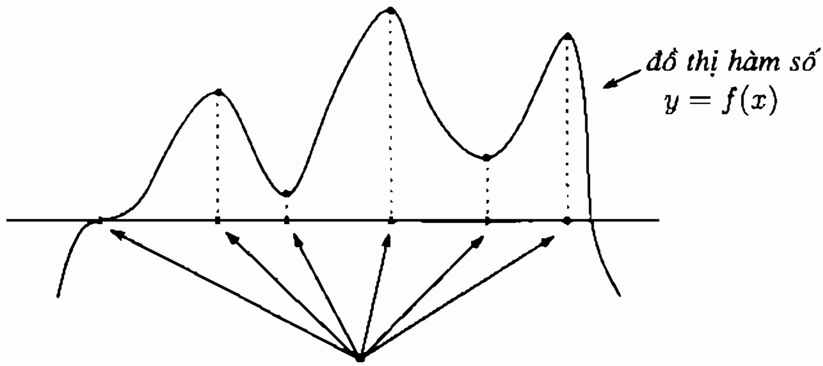
Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.2 và do x^* là nghiệm cực tiểu địa phương nên

$$f'(x^*, d) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t} = \langle \nabla f(x^*), d \rangle \geq 0 \ \ \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Suy ra $\nabla f(x^*) = 0$. □

Điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\nabla f(x^*) = 0$ được gọi *điểm dừng* của hàm f. Chú ý rằng, Định lý 6.1 chỉ là điều kiện cần cho nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P^{krb}) chứ không phải là điều kiện đủ (xem minh họa ở Hình 6.1). Nghiệm cực tiểu địa phương (t.ư., nghiệm cực tiểu hoặc nghiệm cực tiểu toàn cục) của bài toán (P^{krb}) còn được gọi là *điểm cực tiểu địa phương (t.ư., điểm cực tiểu hoặc điểm cực tiểu toàn cục) của hàm f trên $\mathbb{R}^n$.*

[1] Arthur CAYLEY (1821 - 1895): Nhà toán học Anh. Sau Euler và Cauchy thì ông là người có nhiều công trình nổi tiếng. Toàn bộ khối lượng công trình nghiên cứu toán học của ông gồm có 970 bài in thành 13 tập, mỗi tập dày 600 trang.



Hình 6.1. *Đồ thị và các điểm dừng của hàm một biến $f(x)$*

Định lý 6.2. *Giả sử f là hàm lồi khả vi trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P^{krb}) khi và chỉ khi $\nabla f(x^*) = 0$.*

Chứng minh. Do đã có Định lý 6.1, ta chỉ cần chứng minh rằng nếu $\nabla f(x^*) = 0$ thì x^* là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P^{krb}). Thật vậy, do f là hàm lồi khả vi trên $\mathbb{R}^n$ nên nó có đạo hàm theo mọi hướng $d \in \mathbb{R}^n$ tại x^* và theo Hệ quả 1.4, thì

$$\langle \nabla f(x^*), d\rangle = f'(x^*, d) \leq f(x^* + d) - f(x^*), \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Do đó, với điểm bất kỳ $x \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$0 = \langle \nabla f(x^*), x - x^*\rangle \leq f(x^* + (x - x^*)) - f(x^*) = f(x) - f(x^*).$$

Suy ra

$$f(x^*) \leq f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

tức x^* là điểm cực tiểu của f trên $\mathbb{R}^n$. □

Nhận xét 6.1. Ta đã biết, nếu A là ma trận cấp $n \times n$ đối xứng, nửa xác định dương, $b \in \mathbb{R}^n$ và $c \in \mathbb{R}$, thì hàm toàn phương $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$ là hàm lồi khả vi. Trong trường hợp này, vì $\nabla f(x) = Ax - b$ nên, theo Định lý 6.2, việc giải bài toán quy hoạch lồi

$$\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

tương đương với việc tìm nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính

$$Ax = b.$$

Định lý 6.3. (Điều kiện bậc hai) *Giả sử hàm f khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó:*

i) *Nếu $x^* \in \mathbb{R}^n$ là điểm cực tiểu địa phương của f trên $\mathbb{R}^n$ thì*

$$\begin{aligned}&\nabla f(x^*) = 0 \ \text{ và}\\ &\nabla^2 f(x^*) \ \text{ nửa xác định dương;}\end{aligned}$$

ii) *Ngược lại, nếu*

$$\begin{aligned}&\nabla f(x^*) = 0 \ \text{ và}\\ &\nabla^2 f(x^*) \ \text{ xác định dương}\end{aligned}$$

thì x^* là điểm cực tiểu địa phương chặt của f trên $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. i) Với mọi $d \in \mathbb{R}^n$ mà $0 < \|d\| < \varepsilon$ với ε đủ nhỏ, khai triển Taylor của hàm f tại x^* là

$$f(x^* + d) = f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), d\rangle + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\xi) d, \tag{6.1}$$

với $\xi = \lambda x^* + (1 - \lambda)d$ và $0 < \lambda < 1$ (hay $\|\xi - x^*\| \leq \|d\| < \varepsilon$). Vì x^* là điểm cực tiểu địa phương của f trên $\mathbb{R}^n$ nên, theo Định lý 6.1, $\nabla f(x^*) = 0$ và biểu thức (6.1) trở thành

$$f(x^* + d) = f(x^*) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\xi) d. \tag{6.2}$$

Bây giờ ta chứng minh $\nabla^2 f(x^*)$ nửa xác định dương, tức $v^T \nabla^2 f(x^*) v \geq 0$ với mọi $v \in \mathbb{R}^n$. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng tồn tại $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq 0$, sao cho $\bar{v}^T \nabla^2 f(x^*) \bar{v} < 0$. Ta có thể giả thiết là $\|\bar{v}\| < \varepsilon$. Khi đó, vì f là hàm khả vi liên tục hai lần tại x^* nên các thành phần của ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ là các hàm số liên tục tại x^*. Do đó $\bar{v}^T \nabla^2 f(x) \bar{v}$ cũng là hàm liên tục tại x^*. Theo tính chất của hàm liên tục ta có $\bar{v}^T \nabla^2 f(\xi) \bar{v} < 0$ với mọi ξ sao cho $\|\xi - x^*\|$ đủ nhỏ. Kết hợp điều này và (6.2) suy ra $f(x^* + \bar{v}) < f(x^*)$, mâu thuẫn với tính cực tiểu địa phương của x^*.

ii) Giả sử $\nabla f(x^*) = 0$ và $d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0$ với mọi $d \in \mathbb{R}^n$. Vì các thành phần của $\nabla^2 f(x)$ là các hàm liên tục tại x^* nên $d^T \nabla^2 f(x) d$ cũng là hàm liên tục tại x^*. Do đó ta có $d^T \nabla^2 f(\xi) d > 0$ với mọi ξ sao cho $\|\xi - x^*\| < \varepsilon$ với ε đủ nhỏ. Theo khai triển Taylor (6.1) của f tại x^*, ta có thể chọn ε đủ nhỏ sao cho $f(x^* + d) > f(x^*)$ với mọi $0 < \|d\| < \varepsilon$. Điều đó chứng tỏ x^* là điểm cực tiểu địa phương chặt của f trên $\mathbb{R}^n$. $\square$

Nhận xét 6.2. Vì hai bài toán $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ và $\max\{-f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ tương đương với nhau theo nghĩa tập nghiệm của hai bài toán là trùng nhau và giá trị tối ưu ngược dấu nên

i) Nếu $x^* \in \mathbb{R}^n$ là điểm cực đại địa phương của f trên $\mathbb{R}^n$ thì

$$\begin{aligned}&\nabla f(x^*) = 0 \text{ và}\\ &\nabla^2 f(x^*) \text{ nửa xác định âm;}\end{aligned}$$

ii) Ngược lại, nếu

$$\begin{aligned}&\nabla f(x^*) = 0 \text{ và}\\ &\nabla^2 f(x^*) \text{ xác định âm}\end{aligned}$$

thì x^* là điểm cực đại địa phương chặt của f trên $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 6.1. Xét hàm số $f(x_1, x_2) = e^{3x_2} - 3x_1e^{x_2} + x_1^3$. Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -3e^{x_2} + 3x_1^2 \\ 3e^{3x_2} - 3x_1e^{x_2} \end{pmatrix} \text{ và } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & -3e^{x_2} \\ -3e^{x_2} & 9e^{3x_2} - 3x_1e^{x_2} \end{pmatrix}.$$

Tại $x^0 = (1, 0)^T$,

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ và } \nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vì $\nabla f(x^0) = 0$ và $\nabla^2 f(x^0)$ là ma trận xác định dương nên, theo Định lý 6.3(ii), điểm $x^0 = (1, 0)^T$ là điểm cực tiểu địa phương chặt của f trên $\mathbb{R}^2$. Tính toán trực tiếp ta có $f(1, 0) = -1 > f(-3, 0) = -17$. Vậy x^0 không phải là điểm cực tiểu toàn cục của f trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 6.2. Cho hàm số $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 12$.

Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \text{ và } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ phương trình $\nabla f(x) = 0$ ta được hai điểm dừng là $x^1 = (1,\ 1)^T$, $x^2 = (-1,\ 1)^T$. Ta có

$$\nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \nabla^2 f(x^2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vì

i) $\nabla^2 f(x^1)$ là ma trận xác định dương nên x^1 là điểm cực tiểu địa phương chặt của hàm f trên $\mathbb{R}^2$;

ii) $\nabla^2 f(x^2)$ không là ma trận nửa xác định dương cũng không là ma trận nửa xác định âm nên x^2 là không phải là điểm cực đại địa phương cũng không phải là điểm cực tiểu địa phương của hàm f trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 6.3. Giải bài toán tối ưu không ràng buộc (P^{krb}) với $n = 2$ và hàm mục tiêu

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3(x_1 + x_2 - 2).$$

Giải. Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ phương trình $\nabla f(x) = 0$ ta nhận được điểm dừng của f trên $\mathbb{R}^2$ là $x^* = (-1,\ -1)^T$. Vì

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

là ma trận đối xứng, xác định dương nên $f(x)$ là hàm lồi chặt (Định lý 1.11(i)). Theo Định lý 6.2, điểm dừng $x^* = (-1,\ -1)^T$ là nghiệm cực tiểu của bài toán đang xét. Hơn nữa, x^* là nghiệm cực tiểu duy nhất của bài toán này (theo Mệnh đề 2.1(ii)).

6.1.2 Phương pháp hướng giảm

Xét bài toán quy hoạch không ràng buộc

$$\min\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{P^{krb}}$$

trong đó $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm phi tuyến, khả vi trên $\mathbb{R}^n$.

Theo Định lý 6.1, nếu f là hàm khả vi trên $\mathbb{R}^n$ thì điều kiện cần của nghiệm cực tiểu địa phương x^* là $\nabla f(x^*) = 0$. Hệ phương trình $\nabla f(x) = 0$ có n ẩn, n phương trình. Tuy nhiên, ngoại trừ một số trường hợp đơn giản, nói chung việc giải trực tiếp hệ này là khó thực hiện được. Ví dụ xét hàm một biến $f(x) = e^x + x^2 + \cos x$ và ta không có công thức tính nghiệm của phương trình $f'(x) = e^x + 2x - \sin x = 0$.

Ý tưởng cơ bản của *phương pháp hướng giảm* (descent method) để giải bài toán (P^{krb}) với hàm mục tiêu f khả vi là: Xuất phát một điểm bất kỳ $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ta xây dựng một dãy điểm $x^1, x^2, \cdots, x^k, \cdots$ sao cho

$$f(x^0) \geq f(x^1) \geq f(x^2) \geq \cdots$$

và dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến điểm dừng $x^* \in \mathbb{R}^n$ của hàm f, tức $\nabla f(x^*) = 0$. Trường hợp f là hàm lồi, thì điểm x^* cũng chính là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P^{krb}) (Định lý 6.2).

Mục này dành để trình bày lược đồ chung của phương pháp hướng giảm và các khái niệm liên quan.

a. Lược đồ chung

Bước khởi đầu. Xuất phát từ một điểm tùy ý $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Gán $k := 0$;
Bước lặp k, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

(k_1) **If** x^k thỏa mãn điều kiện dừng **Then** Dừng thuật toán
Else xác định $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$ sao cho $f(x^{k+1}) < f(x^k)$;

(k_2) Gán $k := k + 1$; Quay lại Bước lặp k.

Trong lược đồ trên, điều kiện dừng của thuật toán tại Bước (k_1) thường là

$$\nabla f(x^k) \approx 0 \ \text{ hoặc } \ \|x^k - x^{k-1}\| \text{ đủ nhỏ.}$$

Tại một bước lặp k điển hình, nếu điều kiện dừng chưa được thỏa mãn thì ta phải xác định điểm

$$x^{k+1} := x^k + t_k d^k \ \text{ sao cho } \ f(x^{k+1}) < f(x^k),$$

trong đó $d^k \in \mathbb{R}^n$ là *hướng giảm* của f tại x^k và số thực $t_k > 0$ là *độ dài bước*. Sự lựa chọn hướng dịch chuyển d^k và độ dài bước t_k khác nhau cho ta các thuật toán cụ thể tương ứng với các phương pháp hướng giảm khác nhau. Mục 1.3 và 1.4 sẽ trình bày một số thuật toán theo hai phương pháp hướng giảm được sử dụng nhiều nhất: i) Phương pháp gradient (Gradient method) hay còn gọi là Phương pháp giảm nhanh nhất[2] (Steepest descent method); ii) Phương pháp Newton[3] (Newton's method).

b. Hướng giảm

Định nghĩa. Cho $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Ta gọi $d \in \mathbb{R}^n$ là *hướng giảm* của hàm f tại x^0 nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi t thỏa mãn $0 < t < \varepsilon$ ta có $f(x^0 + td) < f(x^0)$.

Sau đây là điều kiện đủ để một véc tơ $d \in \mathbb{R}^n$ là hướng giảm của hàm khả vi f tại một điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Mệnh đề 6.1. *Cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}^n$, điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và hướng $d \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\langle \nabla f(x^0), d \rangle < 0$ thì d là hướng giảm của f tại x^0.*

Chứng minh. Vì f khả vi tại x^0 nên theo Mệnh đề 1.2 và giả thiết của Mệnh đề 6.1, ta có

$$f'(x^0, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^0 + td) - f(x^0)}{t} = \langle \nabla f(x^0), d \rangle < 0.$$

Do đó, $f(x^0 + td) - f(x^0) < 0$ với t đủ nhỏ. Mệnh đề đã được chứng minh. □

[2] Phương pháp này do Cauchy đề xuất năm 1847, sau phương pháp Newton khoảng 200 năm.

[3] Isaac NEWTON (1642 - 1727): Ông là nhà vật lý, nhà thiên văn học, nhà triết học và nhà toán học vĩ đại người Anh. Ông và Leibniz được người đời tôn vinh là hai nhà sáng lập ra phép tính vi phân và tích phân.

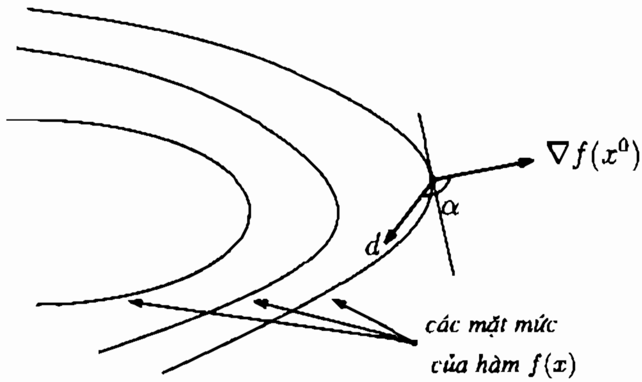
Ý nghĩa hình học: Cho hướng $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Kí hiệu α là góc giữa d và $\nabla f(x^0)$. Ta có

$$\langle \nabla f(x^0), d \rangle = \|\nabla f(x^0)\| \, \|d\| \cos \alpha.$$

Như vậy, nếu α là góc tù thì d là hướng giảm của hàm f tại x^0. Xem minh họa ở Hình 6.2.

Chú ý rằng Mệnh đề 6.1 chỉ là điều kiện đủ để $d \in \mathbb{R}^n$ là hướng giảm của hàm f tại điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ chứ không phải điều kiện cần, tức nếu ta có một hướng giảm d của hàm f tại x^0 thì không chắc có $\langle \nabla f(x^0), d \rangle < 0$.

Ví dụ 6.4. Xét hàm một biến $f(x) = x^3$. Dễ thấy $d = -1$ là hướng giảm của f tại $x^0 = 0$, nhưng ta luôn có $f'(0).d = 0$.



Hình 6.2. *Hướng giảm của hàm f tại x^0*

Mệnh đề 6.2. *Cho hàm lồi f khả vi trên $\mathbb{R}^n$, điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và hướng $d \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, $\langle \nabla f(x^0), d \rangle < 0$ khi và chỉ khi d là hướng giảm của f tại x^0.*

Chứng minh. Do đã có Mệnh đề 6.1, ta chỉ cần chứng minh điều kiện cần. Giả sử $d \in \mathbb{R}^n$ là hướng giảm của hàm f tại x^0, tức

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x^0 + td) < f(x^0) \;\; \forall t: \;\; 0 < t < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Vì hàm f lồi khả vi trên $\mathbb{R}^n$ nên theo Hệ quả 1.4, hàm f có đạo hàm theo mọi hướng d tại mọi điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và

$$f(x^0 + td) - f(x^0) \geq f'(x^0, td) = \langle \nabla f(x^0), td \rangle = t \langle \nabla f(x^0), d \rangle.$$

Kết hợp điều này và (6.3), với $0 < t < \varepsilon$ ta có

$$\langle \nabla f(x^0), d \rangle \leq \frac{f(x^0 + td) - f(x^0)}{t} < 0. \qquad \square$$

Sau đây là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 6.1.

Hệ quả 6.1. *Cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}^n$ và điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\nabla f(x^0) \neq 0$ thì $d = -\nabla f(x^0)$ là một hướng giảm của f tại x^0.*

Vấn đề đặt ra là, trong tất cả các hướng giảm d của hàm f tại x^0 (giả thiết $\nabla f(x^0) \neq 0$) thì hàm f giảm nhanh nhất theo hướng nào, tức với hướng giảm d nào thì có $\langle \nabla f(x^0), d \rangle$ là bé nhất. Muốn so sánh, ta cần chuẩn hóa các véc tơ d sao cho $\|d\| = 1$.

Mệnh đề 6.3. *Giả sử hàm f khả vi trên $\mathbb{R}^n$ và $\nabla f(x^0) \neq 0$. Trong các hướng giảm d của hàm f tại x^0 có $\|d\| = 1$ thì hàm f giảm nhanh nhất theo hướng $d = -\frac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|}$.*

Chứng minh. Xem Nhận xét 1.2 (Chương 1). □

c. Xác định độ dài bước

Giả sử ta đã biết hướng giảm d^k của hàm f tại điểm x^k. Theo lược đồ chung của phương pháp hướng giảm, điểm lặp tiếp theo được xác định bởi công thức

$$x^{k+1} := x^k + t_k d^k,$$

với t_k là một số thực dương. Như vậy, x^{k+1} là một điểm nằm trên tia $\{x^k + td^k,\ t > 0\}$. Vấn đề là xác định độ dài bước $t_k > 0$ như thế nào? Thông thường, có hai cách lựa chọn độ dài bước t_k tương ứng với hai thủ tục khác nhau là thủ tục tìm chính xác theo tia (Exact line search) và thủ tục quay lui (Backtracking).

- **Thủ tục tìm chính xác theo tia**

Cho điểm $x^k \in \mathbb{R}^n$ và hướng giảm d^k của hàm f tại x^k. Thủ tục này chọn *độ dài bước chính xác* $t_k > 0$ là nghiệm cực tiểu của hàm f theo tia $\{x^k + td^k,\ t \geq 0\}$. Đặt

$$\varphi_k(t) := f(x^k + td^k).$$

Khi đó, t_k là nghiệm cực tiểu của hàm một biến $\varphi_k(t)$ với $t \geq 0$, tức

$$t_k = \operatorname{argmin}\{\varphi_k(t) \mid t \geq 0\}.$$

Có nhiều cách (xem Mục 6.1.5) để giải bài toán cực tiểu hàm một biến. Trường hợp đơn giản, ta có thể dùng đánh giá $\varphi_k'(t)$ và $\varphi_k''(t)$ như đã biết để tìm cực tiểu hàm một biến. Đặc biệt, nếu hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm toàn phương lồi chặt thì với mọi hướng giảm d^k của hàm f tại x^k ta có công thức tường minh để xác định t_k như sau:

Mệnh đề 6.4. *Cho hàm toàn phương lồi chặt*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c,$$

trong đó A là ma trận cấp $n \times n$, đối xứng, xác định dương, véc tơ $b \in \mathbb{R}^n$ và $c \in \mathbb{R}$. Cho $x^k \in \mathbb{R}^n$ và hướng giảm d^k của hàm f tại x^k. Khi đó, độ dài bước chính xác t_k được xác định bởi

$$t_k = -\frac{(Ax^k - b)^T d^k}{(d^k)^T A d^k} > 0.$$

Chứng minh. Vì $f(x)$ là hàm lồi nên $\varphi_k(t) = f(x^k + td^k)$ là hàm lồi một biến. Nếu t_k là điểm cực tiểu của hàm $\varphi_k(t)$ thì

$$\begin{aligned}
\varphi_k'(t)|_{t=t_k} = \frac{d\varphi(t)}{dt}|_{t=t_k} &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t_k + t) - \varphi(t_k)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{f((x^k + t_k d^k) + td^k) - f(x^k + t_k d^k)}{t} \\
&= f'(\underbrace{x^k + t_k d^k}_{x^{k+1}}, d^k) = \langle \nabla f(x^{k+1}), d^k \rangle = 0. \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

Vì $\nabla f(x) = Ax - b$ nên

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(x^{k+1}), d^k \rangle &= \langle A(x^k + t_k d^k) - b, d^k \rangle \\
&= \langle Ax^k - b, d^k \rangle + t_k \langle Ad^k, d^k \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Do d^k là hướng giảm của hàm f tại x^k và $f(x)$ là hàm lồi nên theo Mệnh đề 6.2, $\langle \nabla f(x^k), d^k \rangle = \langle Ax^k - b, d^k \rangle < 0$. Hơn nữa, vì ma trận A xác định dương nên

$$\langle Ad^k, d^k \rangle = (d^k)^T A d^k > 0 \;\Rightarrow\; t_k = -\frac{(Ax^k - b)^T d^k}{(d^k)^T A d^k} > 0. \qquad \square$$

- **Thủ tục quay lui**

Trong nhiều trường hợp, việc giải bài toán cực tiểu hàm một biến để xác định độ dài bước theo thủ tục tìm chính xác theo tia cũng không dễ dàng và chi phí tính toán cao. Trong thực tế tính toán, người ta thường sử dụng thủ tục quay lui.

Mệnh đề sau là cơ sở của thủ tục quay lui xác định điểm x^{k+1} khi đã biết hướng giảm d^k của hàm f tại x^k.

Mệnh đề 6.5. *Cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}^n$, điểm $x^k \in \mathbb{R}^n$ và véc tơ $d^k \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\langle \nabla f(x^k), d^k \rangle < 0$. Cho số thực $m_1 \in (0, 1)$. Khi đó*

$$\exists t_0 > 0 \text{ sao cho } f(x^k + td^k) \le f(x^k) + m_1 t \langle \nabla f(x^k), d^k \rangle \;\; \forall t \in (0, t_0].$$

Chứng minh. Vì $\langle \nabla f(x^k), d^k \rangle < 0$ nên d^k là hướng giảm của f tại x^k (Mệnh đề 6.1). Theo Mệnh đề 1.2,

$$f'(x^k, d^k) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^k + td^k) - f(x^k)}{t} = \langle \nabla f(x^k), d^k \rangle$$

nên

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x^k + td^k) - f(x^k)}{t\langle \nabla f(x^k), d^k\rangle} = 1 > m_1.$$

Do đó, tồn tại số thực $t_0 > 0$ đủ nhỏ sao cho với mọi $t \in (0, t_0]$ ta có

$$\frac{f(x^k + td^k) - f(x^k)}{t\langle \nabla f(x^k), d^k\rangle} \geq m_1.$$

Kết hợp điều này với giả thiết $\langle \nabla f(x^k), d^k\rangle < 0$ ta có điều phải chứng minh. □

Điều kiện

$$f(x^k + t_k d^k) \leq f(x^k) + m_1 t_k \langle \nabla f(x^k), d^k\rangle \text{ với } m_1 \in (0,1) \text{ và } t_k > 0$$

được gọi là *điều kiện Armijo*. Mệnh đề 6.5 đã chỉ ra rằng điều kiện này được thỏa mãn với t_k đủ nhỏ.

Thủ tục quay lui sau đây cho phép xác định điểm lặp tiếp theo x^{k+1} sao cho điều kiện Armijo thỏa mãn nhưng độ dài bước t_k không quá bé.

Thủ tục quay lui (*Quy tắc Armijo*)

◇ *Đầu vào:* điểm $x^k \in \mathbb{R}^n$ và hướng giảm d^k của hàm f tại x^k;
◇ *Đầu ra:* điểm x^{k+1} trên tia $x^k + t_k d^k$, $t_k > 0$ thỏa mãn $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

Bước 1. Tùy chọn $m_1 \in (0,1)$ và $\alpha \in (0,1)$ (chẳng hạn, $\alpha = \frac{1}{2}$). Đặt $t_k := 1$;

Bước 2. Tính $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$ và $f(x^{k+1})$;

Bước 3. **If** $f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + m_1 t_k \langle \nabla f(x^k), d^k\rangle$
Then Dừng thủ tục (*ta có* x^{k+1})
Else $t_k := \alpha t_k$ và quay về Bước 2;

Nhận xét rằng, trong thủ tục quay lui, để xác định điểm tiếp theo, ta không cần phải giải bài toán cực tiểu hàm một biến.

d. Tốc độ hội tụ

Với các thuật toán sử dụng chiến lược xây dựng một dãy điểm tiến dần đến nghiệm, người ta thường phải trả lời hai câu hỏi:

- Thuật toán có hội tụ không? (tức dãy điểm do thuật toán sinh ra có hội tụ đến nghiệm cần tìm không?)
- Nếu thuật toán hội tụ thì hội tụ nhanh hay chậm thế nào?

Định nghĩa: Cho dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ đến $x^* \in \mathbb{R}^n$. Dãy $\{x^k\}$ được gọi là:

- hội tụ đến x^* với *tốc độ tuyến tính* (linear) nếu

$$\exists 0 \leq \gamma < 1,\ \exists k_0 \text{ sao cho } \forall k > k_0 : \|x^{k+1} - x^*\| \leq \gamma \|x^k - x^*\|;$$

- hội tụ đến x^* với *tốc độ trên tuyến tính* (super linear) nếu

$$\forall k: \quad \|x^{k+1} - x^*\| \le c_k\|x^k - x^*\| \;\text{ và }\; c_k \to 0;$$

- hội tụ đến x^* với *tốc độ hội tụ bậc hai* (quadratic) nếu

$$\exists\gamma > 0,\ \exists k_0 \text{ sao cho } \|x^{k+1} - x^*\| \le \gamma\|x^k - x^*\|^2 \ \forall k > k_0.$$

Nhận xét 6.3. Dễ thấy rằng, nếu dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến x^* với tốc độ trên tuyến tính thì nó hội tụ đến x^* với tốc độ tuyến tính nhưng điều ngược lại không đúng (Bài tập). Tương tự, nếu dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến x^* với tốc độ bậc hai thì nó hội tụ đến x^* với tốc độ trên tuyến tính vì

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le \gamma\|x^k - x^*\|\|x^k - x^*\| = c_k\|x^k - x^*\|,$$

trong đó $c_k = \gamma\|x^k - x^*\| \to 0$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Ví dụ, cho dãy $\{x^k\} \to x^*$ và

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le \gamma\|x^k - x^*\|^{\frac{3}{2}} = \gamma\|x^k - x^*\|^{\frac{1}{2}}\|x^k - x^*\|.$$

Vì $c_k = \gamma\|x^k - x^*\|^{\frac{1}{2}} \to 0$ nên dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến x^* với tốc độ trên tuyến tính nhưng rõ ràng đó không phải là hội tụ với tốc độ bậc hai.

6.1.3 Phương pháp gradient

Đây là phương pháp thông dụng nhất để giải bài toán cực tiểu không ràng buộc (P^{krb}) vì nó rất đơn giản và có thể áp dụng được cho những lớp hàm rất rộng.

Trong các thuật toán giải bài toán (P^{krb}) theo phương pháp gradient, tại mỗi bước lặp k, ta chọn hướng giảm d^k của hàm f tại điểm x^k là $d^k = -\nabla f(x^k)$. Như đã biết (Mệnh đề 6.3), đó chính là hướng mà theo đó hàm mục tiêu f giảm nhanh nhất tại x^k. Vì vậy, người ta còn gọi phương pháp gradient là *phương pháp giảm nhanh nhất*.

Sau đây là chi tiết thuật toán gradient tương ứng với hai cách xác định độ dài bước khác nhau.

a. Thuật toán gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia

Trong thuật toán này, tại mỗi bước lặp k, điểm lặp tiếp theo được xác định bởi

$$x^{k+1} := x^k - t_k\nabla f(x^k),$$

trong đó t_k là nghiệm cực tiểu của hàm một biến $\varphi(t) := f(x^k - t\nabla f(x^k))$ với $t > 0$.

Thuật toán 6.1 (*Thuật toán gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia*)

Bước khởi đầu Chọn trước số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Xuất phát từ một điểm tùy ý $x^0 \in \mathbb{R}^n$ có $\nabla f(x^0) \ne 0$; Đặt $k := 0$;

Bước lặp k ($k = 0, 1, 2, \cdots$)

(k_1) Tính $x^{k+1} := x^k - t_k \nabla f(x^k)$, trong đó

$$t_k = \text{argmin}\{\varphi_k(t),\ t > 0\};$$

(k_2) Tính $\nabla f(x^{k+1})$;

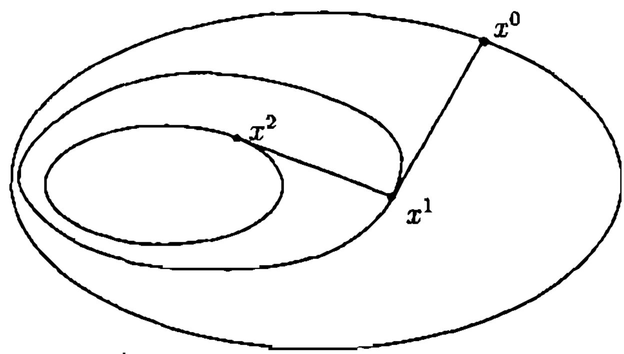
(k_3) **If** $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy điểm dừng* $x^* \approx x^{k+1}$)
Else $k := k + 1$ và quay lại Bước lặp k.

Chú ý 6.1. Theo Mệnh đề 6.4, nếu hàm mục tiêu của bài toán (P^{ktb}) là hàm toàn phương lồi chặt

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$$

thì ta có công thức tính độ dài bước chính xác t_k tại mỗi Bước lặp k là

$$t_k = \frac{(Ax^k - b)^T \nabla f(x^k)}{(\nabla f(x^k))^T A \nabla f(x^k)} > 0.$$



Hình 6.3. *Minh họa hình học Thuật toán 6.1*

Ý nghĩa hình học. Trong mỗi bước lặp k, độ dài bước t_k là nghiệm cực tiểu của hàm một biến

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi_k(t) := f(x^k - t\nabla f(x^k)). \end{aligned}$$

Theo điều kiện cần tối ưu, ta có

$$\varphi_k'(t)|_{t=t_k} \overset{(6.4)}{=} f'(\underbrace{x^k - t_k \nabla f(x^k)}_{x^{k+1}}, -\nabla f(x^k)) = \langle \nabla f(x^{k+1}), -\nabla f(x^k) \rangle = 0,$$

tức véc tơ $\nabla f(x^{k+1})$ và véc tơ $d^k = -\nabla f(x^k)$ là trực giao với nhau. Nói cách khác, xuất phát từ x^k, đi theo hướng $d^k = -\nabla f(x^k)$ đến một điểm nằm trên một đường mức nào đó của hàm f mà nhận d^k là tiếp tuyến thì dừng. Đó chính là điểm x^{k+1} cần xác định trong Bước lặp k. Xem minh họa ở Hình 6.3.

Ví dụ 6.5. Xét bài toán (P^{krb}) với hàm mục tiêu là như ở Ví dụ 6.2, tức

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 12.$$

Quá trình giải bài toán này theo Thuật toán 6.1, xuất phát từ $x^0 = (1,2)^T$, như sau: Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$x^0 - t\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 2t \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$\varphi_0(t) = f(x^0 - t\nabla f(x^0)) = f(1, 2 - 2t) = 4t^2 - 4t + 10.$$

Ta có $\varphi_0'(t) = 8t - 4$. Do đó

$$\varphi_0'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vì $\varphi_0''(t) = 8 > 0$ nên $t_0 = \frac{1}{2}$ là nghiệm cực tiểu của $\varphi_0(t)$ với $t \geq 0$. Do đó, ta có điểm lặp tiếp theo là

$$x^1 = x^0 - t_0\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vì $\nabla f(x^1) = (0,0)^T$ nên x^1 là điểm dừng của hàm $f(x)$. Dừng thuật toán. Như đã biết trong Ví dụ 6.2, điểm x^1 cũng là nghiệm cực tiểu địa phương chặt của hàm f.

Ví dụ 6.6. Giải bài toán $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$, trong đó

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Do A là ma trận đối xứng xác định dương nên $f(x)$ là hàm lồi chặt. Vì vậy, theo Nhận xét 6.1 và Mệnh đề 2.1, nghiệm cực tiểu duy nhất của bài toán này là

$$x^* = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1.00 \\ -0.20 \\ -0.04 \end{pmatrix}.$$

Bây giờ, ta sẽ tiến hành giải bài toán này theo Thuật toán 6.1, xuất phát từ điểm $x^0 = (0,\ 0,\ 0)^T$ và chọn $\varepsilon = 10^{-8}$. Tại mỗi điểm x^k, ta có $\nabla f(x^k) = Ax^k - b$. Theo Chú ý 6.1, độ dài bước chính xác t_k tại mỗi Bước lặp k được xác định bởi

$$t_k = \frac{(Ax^k - b)^T \nabla f(x^k)}{(\nabla f(x^k))^T A \nabla f(x^k)} > 0.$$

Tại x^0 ta có

$$f(x^0) = 0, \quad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\nabla f(x^0)\| = 1.732051.$$

Do đó $t_0 = 0.096774$ và

$$x^1 = \begin{pmatrix} -0.096774 \\ -0.096774 \\ -0.096774 \end{pmatrix}.$$

Tại x^1 ta có

$$f(x^1) = -0.145161, \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0.903226 \\ 0.516129 \\ -1.419355 \end{pmatrix}, \quad \|\nabla f(x^1)\| = 1.759765.$$

Do đó $t_1 = 0.058973$ và

$$x^2 = \begin{pmatrix} -0.150040 \\ -0.127212 \\ -0.013071 \end{pmatrix}.$$

Tại x^2 ta có

$$f(x^2) = -0.236474, \quad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.849960 \\ 0.363941 \\ 0.673226 \end{pmatrix}, \quad \|\nabla f(x^2)\| = 1.143730.$$

Sau 217 bước lặp, ta sẽ nhận được

$$x^{217} = \begin{pmatrix} -0.999999994 \\ -0.200000000 \\ -0.040000000 \end{pmatrix} \quad \text{với} \quad \|\nabla f(x^{217})\| < 10^{-8}.$$

Dừng thuật toán với điểm dừng $x^* \approx x^{217}$.

Định lý 6.4. (Định lý hội tụ) ([26], trang 41) *Cho $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và hàm f khả vi liên tục trên $\mathbb{R}^n$ và có tập mức dưới $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x^0)\}$ bị chặn. Khi đó mỗi điểm tụ x^* của dãy $\{x^k\}$ được chọn như trong Thuật toán 6.1 thỏa mãn $\nabla f(x^*) = 0$.*

b. Thuật toán gradient với thủ tục quay lui

Trong thuật toán này, tại mỗi bước lặp k, chọn hướng giảm $d^k = -\nabla f(x^k)$ và độ dài bước t_k được xác định theo thủ tục quay lui.

Thuật toán 6.2 (*Thuật toán gradient với thủ tục quay lui*)

Bước khởi đầu. Tùy chọn $m_1 \in (0,1)$ và $\alpha \in (0,1)$. Chọn số thực $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Xuất phát từ một điểm tùy ý $x^0 \in \mathbb{R}^n$ có $\nabla f(x^0) \neq 0$. Đặt $k := 0$;

Bước lặp k, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

(k_1) Đặt $t_k := 1$;

(k_2) Tính $x^{k+1} := x^k - t_k \nabla f(x^k)$ và $f(x^{k+1})$;

(k_3) **If** $f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq m_1 t_k \langle \nabla f(x^k), -\nabla f(x^k)\rangle = -m_1 t_k \|\nabla(x^k)\|^2$
  Then Chuyển Bước k_4
  Else $t_k := \alpha t_k$ và quay về Bước k_2;

(k_4) Tính $\nabla f(x^{k+1})$;

(k_5) **If** $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy điểm dừng* $x^* \approx x^{k+1}$)
  Else $k := k + 1$, quay về Bước lặp k

Ví dụ 6.7. Xét bài toán (P^{krb}) như ở Ví dụ 6.2, tức có

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 12.$$

Quá trình giải bài toán này theo Thuật toán 6.2 như sau: Chọn $m_1 = 0.01$, $\alpha = 0.5$. Cũng xuất phát từ điểm $x^0 = (1,2)^T$ và ta có

$$\nabla f(x^0) = (0,2)^T \neq (0,0)^T.$$

Đặt $t_0 = 1$. Suy ra

$$x^1 = x^0 - t_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(x^0) = f(x^1) = 10.$$

Vì

$$f(x^1) - f(x^0) = 10 - 10 = 0 > -m_1 t_0 \|\nabla f(x^0)\|^2 = -0.04$$

nên đặt

$$t_0 = \alpha . t_0 = 0.5.$$

Tính lại

$$x^1 = x^0 - t_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

và

$$f(x^1) - f(x^0) = 9 - 10 = -1 < -m_1 t_0 \|\nabla f(x^0)\| = -0.02.$$

Do đó ta chọn $x^1 = (1, 1)^T$. Vì $\nabla f(x^1) = (0, 0)^T$ nên dừng thuật toán với điểm dừng $x^1 = (1, 1)^T$.

Định lý 6.5. (Định lý hội tụ) *Giả sử hàm $f(x)$ bị chặn dưới, gradient $\nabla f(x)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz*[4], *tức tồn tại $L > 0$ sao cho*

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, với bất kỳ điểm xuất phát x^0, dãy $\{x^k\}$ được chọn như trong Thuật toán 6.2 có tính chất $\|\nabla f(x^k)\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Chứng minh. Xem [36], trang 375-376. □

6.1.4 Phương pháp Newton

Phương pháp Newton giải bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad (P^{krb})$$

với hàm mục tiêu phi tuyến f khả vi hai lần trên $\mathbb{R}^n$, chính là việc ứng dụng phương pháp Newton cổ điển giải hệ phương trình phi tuyến n ẩn, n phương trình để tìm điểm dừng của hàm f, tức giải hệ phương trình

$$\nabla f(x) = 0.$$

Để tiện theo dõi, phương pháp Newton giải hệ n ẩn, n phương trình sẽ được trình bày ngay sau đây.

a. Phương pháp Newton cổ điển giải hệ phương trình phi tuyến[5]

- *Trường hợp $n = 1$.* Xét phương trình một biến số

$$f(x) = 0.$$

[4]Rudolph Otto Sigismund LIPSCHITZ (1832 - 1903): Nhà toán học Đức. Chuyên ngành nghiên cứu của ông là Giải tích và Hình học

[5]Phương pháp này do Newton đưa ra vào những năm 60 của thế kỷ 17.

Giả sử nghiệm của phương trình này là $x^* \in \mathbb{R}$. Thuật toán Newton tìm nghiệm x^* sẽ xuất phát từ một điểm x^0 đủ gần x^* và sinh ra một dãy nghiệm xấp xỉ $x^0, x^1, x^2, \cdots$ hội tụ đến x^*.

Xét x^k là một điểm thuộc dãy này. Với $p \in \mathbb{R}$ và $|p|$ đủ bé, xấp xỉ Taylor bậc nhất của hàm $f(x)$ tại x^k là:

$$f(x^k + p) \approx f(x^k) + pf'(x^k).$$

Dễ thấy

$$y = f(x^k) + pf'(x^k)$$

là phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x^k, f(x^k))$ với đồ thị hàm $y = f(x)$. Giả sử $f'(x^k) \neq 0$. Khi đó, giải phương trình

$$f(x^k) + pf'(x^k) = 0$$

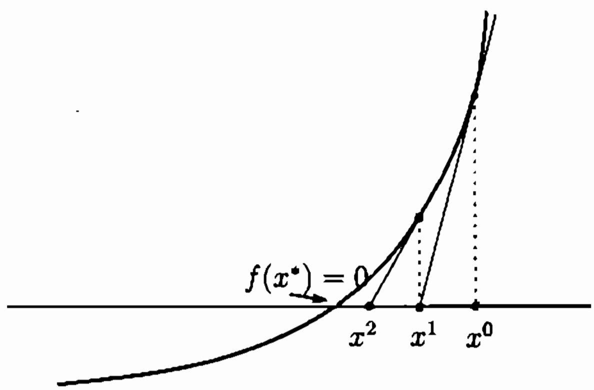
ta được

$$p = -\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Đặt

$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Rõ ràng x^{k+1} chính là giao điểm của tiếp tuyến này và trục hoành $0x$. Gán $k := k+1$ và lặp lại quá trình tính toán đối với điểm x^k mới... Hình 6.4 cho ta minh họa hình học của thuật toán trên.



Hình 6.4. *Biểu diễn hình học của thuật toán Newton giải phương trình* $f(x) = 0$

Định lý 6.6. (Sự hội tụ của thuật toán Newton) *Giả sử rằng:*

i) Hàm $f(x)$ khả vi liên tục cấp hai;

ii) x^* là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, tức $f(x^*) = 0$;

iii) $f'(x^*) \neq 0$.

Khi đó, nếu $|x^0 - x^*|$ đủ nhỏ thì dãy $\{x^k\}$ xác định bởi

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \tag{6.5}$$

hội tụ đến x^* với tốc độ bậc hai và hệ số $\gamma = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|$.

Chứng minh. Giả sử ta dừng thuật toán và lấy nghiệm xấp xỉ là x^k. Như vậy, sai số là $e^k = x^k - x^*$. Khai triển Taylor của hàm f tại x^k là

$$0 = f(x^*) = f(x^k - e^k) = f(x^k) - e^k f'(x^k) + \frac{1}{2}(e_k)^2 f''(\xi),$$

trong đó ξ là điểm giữa x^k và $x^k - e^k$. Nếu $f'(x^k) \neq 0$ thì

$$e^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = \frac{1}{2}(e^k)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x^k)}. \tag{6.6}$$

Thay $e^k = x^k - x^*$ vào phương trình (6.6) ta được

$$\underbrace{x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}}_{x^{k+1}} - x^* = \frac{1}{2}(x^k - x^*)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x^k)}.$$

Nếu dãy $\{x^k\}$ hội tụ thì $\xi \to x^*$. Do đó khi x^k đủ gần x^* ta có

$$x^{k+1} - x^* \approx \frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}(x^k - x^*)^2,$$

tức dãy $\{x^k\}$ hội tụ cấp hai đến x^* với hệ số $\gamma = \left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|$. □

Chú ý 6.2. i) Theo công thức (6.5), nếu $f'(x^k) = 0$ thì điểm x^{k+1} không được xác định. Về mặt hình học, sự kiện $f'(x^k) = 0$ có nghĩa là tiếp tuyến tại điểm $(x^k, f(x^k))$ với đồ thị hàm $y = f(x)$ song song với trục hoành $0x$;

ii) Nếu $f'(x^k) \neq 0\ \forall k = 0, 1, 2, \cdots$ và $f''(x^*) \neq 0$ nhưng $f'(x^*) = 0$ thì hệ số γ trong công thức đánh giá hội tụ tiến đến ∞ và thuật toán không có tốc độ hội tụ bậc hai;

iii) Trong chứng minh sự hội tụ của thuật toán Newton đòi hỏi điểm xuất phát ban đầu x^0 phải đủ gần nghiệm x^*. Nếu giả thiết này bị vi phạm, thuật toán có thể không hội tụ.

Ví dụ sau cho ta thấy giả thiết "*điểm xuất phát ban đầu x^0 phải đủ gần nghiệm x^** " quan trọng đến mức nào.

Ví dụ 6.8. Giải phương trình sau bằng thuật toán Newton

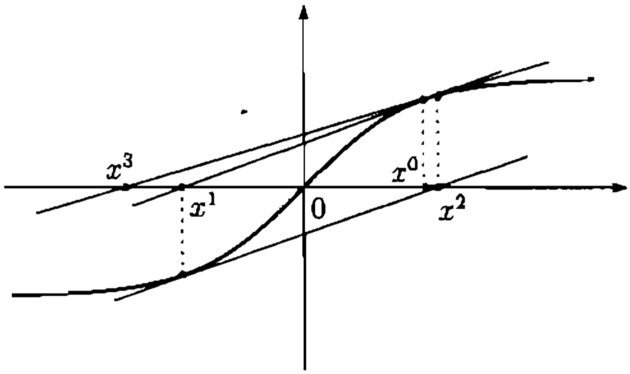
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 0.$$

Giải. Trước hết nhận xét rằng $f(x)$ chính là hàm tang hyperbolic[6], $f(x) = \text{th}x$, nên nghiệm của phương trình này là $x^* = 0$. Bây giờ ta sẽ giải phương trình này theo thuật toán Newton. Vì

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

nên công thức của thuật toán Newton là

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = x^k - \frac{e^{2x^k} - e^{-2x^k}}{4}.$$



Hình 6.5. *Trường hợp thuật toán Newton không hội tụ*

Xuất phát từ $x^0 = 1.0$, ta tính năm điểm tiếp theo,

$$\begin{array}{llllll} x^0 = & 1.0 & x^2 = & 0.409402313 & x^4 = & 7.0602 \times 10^{-5} \\ x^1 = & -0.813430203 & x^3 = & -0.047304915 & x^5 = & 1.95 \times 10^{-12}. \end{array}$$

Do đó dãy $x^0, \cdots, x^5$ hội tụ đến nghiệm. Tuy nhiên, nếu xuất phát từ $x^0 = 1.1$ thì

$$\begin{array}{llllll} x^0 = & 1.1 & x^2 = & 1.234131133 & x^4 = & 5.715360097 \\ x^1 = & -1.128552585 & x^3 = & -1.69516598 & x^5 = & -23021.35634 \end{array}$$

[6]Các hàm hyperbolic:

$$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \text{coth}x = \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

và càng tính tiếp, các điểm lặp tiếp theo càng xa nghiệm. Do đó, thuật toán Newton không hội tụ. Hình 6.5 minh họa đồ thị của hàm $f(x)$ và các điểm x^0, x^1, x^2, x^3 trong trường hợp "xấu" này.

• *Trường hợp tổng quát* $(n > 1)$ Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa hàm véc tơ. Hàm véc tơ F là một ánh xạ

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

trong đó $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, là các hàm thực n biến. Giả thiết rằng các hàm tọa độ f_i có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Khi đó, ma trận

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận Jacobi*[7] *của* F *tại* x. Nhận xét rằng, dòng thứ i của ma trận Jacobi chính là $[\nabla f_i(x)]^T$.

Bây giờ, ta xét hệ phương trình n ẩn, n phương trình

$$F(x) = 0, \tag{6.7}$$

trong đó $F(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x))^T$ là hàm véc tơ (tức $m = n$).

Giả sử $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm của hệ phương trình (6.7). Tương tự trường hợp $n = 1$, thuật toán Newton giải hệ (6.7) cũng xuất phát từ một điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ đủ gần nghiệm x^* và xây dựng một dãy các điểm $x^1, x^2, \cdots$ hội tụ đến nghiệm x^*.

Tại điểm $x^k \in \mathbb{R}^n$ thuộc dãy này, khai triển Taylor của F tại x^k là

$$F(x^k + p) = F(x^k) + DF(x^k).p + o(\|p\|),$$

trong đó véc tơ $p \in \mathbb{R}^n$ có $\|p\|$ đủ nhỏ, $DF(x^k)$ là ma trận Jacobian của F tại điểm $x^k \in \mathbb{R}^n$ và $o(\|p\|)$ là vô cùng bé so với $\|p\|$ khi $p \to 0$. Khi đó, xấp xỉ Taylor bậc nhất hàm F tại x^k là

$$F(x^k + p) \approx F(x^k) + DF(x^k)p.$$

[7] Carl Gustav Jacob JACOBI (1804-1851): Ông bảo vệ thành công luận án tiến sĩ năm 21 tuổi. Năm 24 tuổi, ông đã được coi là nhà toán học thứ hai của Đức (sau Gauss). Ông đưa ra khái niệm ma trận Jacobi năm 1829.

Giả sử ma trận Jacobi $DF(x^k)$ không suy biến. Giải hệ phương trình

$$F(x^k) + DF(x^k)p = 0$$

ta được véc tơ

$$p = -[DF(x^k)]^{-1}F(x^k)$$

và điểm lặp tiếp theo là

$$x^{k+1} := x^k + p = x^k - [DF(x^k)]^{-1}F(x^k).$$

Đặt $x^k := x^{k+1}$ và lặp lại quá trình tính toán đối với điểm x^k mới...

Chú ý 6.3. Để giải được hệ phương trình (6.7) theo thuật toán Newton thì phải xuất phát từ một điểm x^0 đủ gần nghiệm của hệ và giả thiết: *"ma trận Jacobi $DF(x^k)$ không suy biến tại mọi bước lặp k"* phải được thỏa mãn. Nếu không, thuật toán sẽ không thực hiện được.

b. Phương pháp Newton thuần túy (pure Newton) giải bài toán tối ưu không ràng buộc

Xét bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad (P^{krb})$$

trong đó f là hàm số khả vi hai lần trên $\mathbb{R}^n$ và $\nabla^2 f(x)$ xác định dương với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$.

Như đã nói, phương pháp Newton thuần túy chính là ứng dụng phương pháp Newton cổ điển để giải hệ n ẩn n phương trình

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^T = 0$$

để tìm điểm dừng của hàm f trên $\mathbb{R}^n$. Dễ thấy, ma trận Jacobi của ánh xạ $\nabla f(x)$ chính là ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ của hàm f,

$$D\nabla f(x) = \nabla^2 f(x).$$

Tại điểm x^k, nếu ma trận Hesse $\nabla^2 f(x^k)$ không suy biến thì ta có điểm tiếp theo

$$x^{k+1} := x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1}.\nabla f(x^k).$$

Thông thường, ta viết

$$x^{k+1} := x^k + p^k,$$

trong đó véc tơ p^k là nghiệm của hệ phương trình

$$[\nabla^2 f(x^k)].p = -\nabla f(x^k) \qquad (6.8)$$

và việc giải hệ phương trình tuyến tính (6.8) là đơn giản hơn việc tính ma trận nghịch đảo của ma trận Hesse. Hệ phương trình (6.8) được gọi *hệ phương trình Newton* và véc tơ

$$p^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}.\nabla f(x^k)$$

được gọi là *hướng Newton của hàm f tại x^k*.

Mệnh đề 6.6. *Nếu ma trận Hesse $\nabla^2 f(x^k)$ xác định dương thì hướng Newton p^k của hàm f tại x^k cũng là hướng giảm của hàm f tại x^k.*

Chứng minh. Thật vậy, vì $\nabla^2 f(x^k)$ xác định dương nên ma trận $[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$ cũng xác định dương và

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x^k), p^k\rangle &= \left[\nabla f(x^k)\right]^T.p^k \\ &= -[\nabla f(x^k)]^T[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k) \quad < 0.\end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 6.1, p^k là một hướng giảm của hàm f tại x^k. □

Nội dung Mệnh đề 6.6 cho ta biết lý do của giả thiết $\nabla^2 f(x)$ xác định dương với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$ của bài toán (P^{krb}) đang xét. Trong thuật toán Newton thuần túy giải bài toán này, tại mỗi bước lặp k, điểm x^{k+1} được xác định theo công thức

$$x^{k+1} := x^k + p^k,$$

trong đó p^k là hướng Newton của hàm f tại x^k. Như vậy, độ dài bước $t_k = 1$ tại mọi bước lặp k.

Thuật toán 6.3 (*Thuật toán Newton thuần túy giải bài toán* (P^{krb}))

Bước khởi đầu. Xuất phát từ một điểm tùy ý $x^0 \in \mathbb{R}^n$ đủ gần điểm dừng x^* và $\nabla f(x^0) \neq 0$; Chọn trước số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Đặt $k := 0$;

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

(k_1) Tính hướng Newton p^k của hàm f tại x^k bằng việc giải hệ phương trình tuyến tính

$$[\nabla^2 f(x^k)].p^k = -\nabla f(x^k).$$

(k_2) Xác định $x^{k+1} := x^k + p^k$ và $\nabla f(x^{k+1})$

(k_3) **If** $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy điểm dừng $x^* \approx x^{k+1}$*)
Else $k := k + 1$ và quay lại Bước lặp k.

Chú ý 6.4. Điểm xuất phát x^0 trong Thuật toán 6.3 phải đảm bảo "**đủ gần**" điểm dừng x^* của hàm f (xem Ví dụ 6.8).

Định lý 6.7. (Định lý hội tụ) *Giả sử:*

i) Hàm f khả vi hai lần trên $\mathbb{R}^n$;

ii) Hàm $\nabla^2 f(x)$ là liên tục và Lipschitz trong lân cận của điểm dừng x^* của hàm f, tức tồn tại lân cận $B(x^*, \varepsilon)$ và số $L > 0$ sao cho

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \le L\|x - y\| \;\; \forall\, x, y \in B(x^*, \varepsilon);$$

iii) Ma trận $\nabla^2 f(x)$ xác định dương tại mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó, nếu xuất phát từ một điểm đủ gần x^* thì dãy $\{x^k\}$ sinh ra bởi Thuật toán Newton thuần túy hội tụ tới x^* theo tốc độ cấp hai.

Chứng minh. Xem [35], trang 38 - 39. □

Ví dụ 6.9. Sử dụng thuật toán Newton thuần túy giải bài toán

$$\min\{f(x) = x^4 - 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

với điểm xuất phát $x^0 = 4$. Tính 3 điểm tiếp theo x^1, x^2 và x^3. Chứng minh rằng, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán này sẽ hội tụ đến nghiệm cực tiểu của bài toán đang xét.

Giải. Dễ thấy bài toán có nghiệm cực tiểu duy nhất là $x^* = 0$. Ta có $f'(x) = 4x^3$ và $f''(x) = 12x^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Do đó, hướng Newton p^k của hàm f tại một điểm x^k cũng là hướng giảm của hàm f tại x^k và

$$p^k = -\frac{f'(x^k)}{f''(x^k)} = -\frac{1}{3}x^k.$$

Giả sử biết x^k, theo thuật toán Newton thuần túy, điểm tiếp theo x^{k+1} được xác định bởi

$$x^{k+1} := x^k + p^k = x^k - \frac{1}{3}x^k = \frac{2}{3}x^k.$$

Xuất phát từ $x^0 = 4$, ta có

$$x^1 = \frac{2}{3}x^0 = \frac{8}{3}; \;\; x^2 = \frac{2}{3}x^1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x^0 = \frac{16}{9}; \;\; x^3 = \frac{2}{3}x^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 x^0 = \frac{32}{27}.$$

Do đó

$$x^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k x^0 = 4\left(\frac{2}{3}\right)^k \;\; \Rightarrow \;\; \{x^k\} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 = x^*.$$

- **Các ưu, nhược điểm của Thuật toán Newton thuần túy**

◇ **Ưu điểm**:

i) Nếu hàm mục tiêu f là hàm toàn phương

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c,$$

trong đó A là ma trận cấp $n \times n$, đối xứng, xác định dương, không suy biến, thì Thuật toán 6.3 cho ta ngay một nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán (P^{krb}) chỉ sau một vòng lặp, không phụ thuộc và điểm xuất phát ban đầu. Thật vậy, trong trường hợp này ta có $\nabla^2 f(x) = A$. Theo Nhận xét 6.1, điểm cực tiểu toàn cục x^* của f trên $\mathbb{R}^n$ là nghiệm của hệ phương trình $Ax = b$. Do đó $x^* = A^{-1}b$. Bây giờ, xuất phát từ một điểm bất kỳ x^0, theo Thuật toán 6.3 ta đến được $x^1 = x^0 - A^{-1}(Ax^0 - b) = A^{-1}b = x^*$;

ii) Nếu xuất phát từ một điểm x^0 đủ gần điểm dừng và ma trận $\nabla^2 f(x^k)$ không suy biến tại mọi bước lặp k thì thuật toán hội tụ rất nhanh (hội tụ cấp hai).

◇ **Nhược điểm**:

i) Tại điểm x^k, nếu ma trận $\nabla^2 f(x^k)$ suy biến thì điểm lặp tiếp theo không xác định được;

ii) Tại điểm x^k, nếu ma trận $\nabla^2 f(x^k)$ không suy biến nhưng $\nabla^2 f(x^k)$ không xác định dương thì hướng Newton p^k tương ứng không phải hướng giảm của hàm f tại x^k. Thuật toán có thể hội tụ đến điểm dừng $x^* \in \mathbb{R}^n$ nhưng đó không phải là điểm cực tiểu địa phương;

iii) Tính toán và lưu trữ các ma trận cấp $n \times n$ rất tốn kém khi n lớn.

c. Phương pháp Newton với bước điều chỉnh hay phương pháp Newton suy rộng

Trong thuật toán Newton thuần túy (Thuật toán 6.3), việc phải đảm bảo yêu cầu xuất phát từ một điểm x^0 đủ gần điểm dừng x^* gây khó khăn cho việc thực hiện thuật toán. Khắc phục hạn chế này, phương pháp Newton suy rộng cho phép xuất phát từ một điểm tùy ý $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Tại mỗi Bước lặp k, điểm x^{k+1} được xác định bởi

$$x^{k+1} := x^k + t_k d^k,$$

trong đó d^k vẫn là hướng Newton của hàm f tại x^k, tức $d^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k)$ và độ dài bước t_k được tính theo thủ tục quay lui.

Thuật toán 6.4 (*Phương pháp Newton với bước điều chỉnh hay phương pháp Newton suy rộng*)

Bước khởi đầu. Xuất phát từ một điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ có $\nabla f(x^0) \neq 0$; Chọn trước số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Đặt $k := 0$;

Bước lặp k $(k = 0, 1, 2 \cdots)$

(k_1) Tính hướng Newton d^k bằng việc giải hệ phương trình tuyến tính

$$[\nabla^2 f(x^k)]d^k = -\nabla f(x^k).$$

(k_2) Tính $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$ theo thủ tục quay lui; Tính $\nabla f(x^{k+1})$.

(k_3) **If** $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy* $x^* \approx x^{k+1}$)
Else gán $k := k + 1$ và quay về Bước lặp k.

Định lý 6.8. (Định lý hội tụ) *Giả sử hàm $f(x)$ khả vi hai lần trên $\mathbb{R}^n$ và f là hàm lồi mạnh với hệ số lồi mạnh $m > 0$ trên tập mức dưới*

$$L\Big(f(x^0), f\Big) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le f(x^0)\},$$

tức là với mọi $x, y \in L\Big(f(x^0), f\Big)$, $\lambda \in (0, 1)$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{1}{2} m\lambda(1-\lambda)\|y - x\|^2,$$

trong đó x^0 là điểm xuất phát của dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán Newton suy rộng (Thuật toán 6.4). Gọi x^* là điểm cực tiểu duy nhất của f và giả sử rằng $\nabla^2 f(x)$ liên tục Lipschitz trên $L\Big(f(x^0), f\Big)$ với hằng số Lipschitz $L > 0$. Khi đó:

i) Tồn tại k sao cho với mọi $\ell \ge k$ ta có

$$\|\nabla f(x^\ell)\| < \eta_1 \quad \text{với} \quad \eta_1 \le \frac{m^2}{L};$$

ii) Dãy $\{f(x^\ell)\}$ hội tụ đến $f(x^*)$ với tốc độ bậc hai.

Chứng minh. Xem [35], trang 42-43. □

d. Phương pháp tựa Newton (Quasi Newton Methods)

Xét bài toán (P^{krb}) với giả thiết hàm mục tiêu f khả vi hai lần trên $\mathbb{R}^n$. Theo phương pháp Newton, ở mỗi bước lặp k, ta cần tính hướng Newton

$$p^k = -[\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k).$$

Đây là công việc khó khăn vì ta phải tính ma trận nghịch đảo $[\nabla^2 f(x)]^{-1}$. Hơn nữa, nếu ma trận $\nabla^2 f(x^k)$ không suy biến nhưng không xác định dương thì hướng Newton d^k tương ứng không phải hướng giảm của hàm f tại x^k. Vì vậy phương pháp Newton ít được sử dụng trong thực tế khi $n > 1$ mặc dù phương pháp này có tốc độ hội tụ bậc hai.

Chiến lược của phương pháp tựa Newton là thay vì hướng Newton p^k tại mỗi bước lặp, ta tính hướng

$$d^k = -H_k \nabla f(x^k),$$

trong đó H_k là ma trận không suy biến, đối xứng, xác định dương. Ma trận H_{k+1} sẽ được tính truy hồi theo H_k, $\nabla f(x^k)$ và $\nabla f(x^{k+1})$ (xem công thức (6.9) dưới đây). Ma trận H_{k+1} cũng là ma trận đối xứng, xác định dương (xem [26], trang 47). Tuy phương pháp tựa Newton có tốc độ hội tụ không còn là bậc hai nữa và phải thực hiện nhiều bước lặp hơn phương pháp Newton nhưng tính toán tại mỗi bước lặp đơn giản hơn. Thuật toán 6.5 mang tên Davidon-Fletcher-Powell[8] trình bày sau đây là một thuật toán tiêu biểu cho phương pháp này, có tốc độ hội tụ trên tuyến tính.

Thuật toán 6.5 (Thuật toán D.F.P.)

Bước khởi đầu.

- Xuất phát tùy ý từ một điểm $x^1 \in \mathbb{R}^n$ có $\nabla f(x^1) \neq 0$.
- Chọn tùy ý ma trận đối xứng xác định dương H_1 (Thường chọn H_1 là ma trận đơn vị I).
- Đặt $k := 1$.

Bước lặp k ($k = 1, 2, \ldots$)

(k_1) Đặt $d^k := -H_k \nabla f(x^k)$;

(k_2) Tính $t_k := \text{argmin}\{\varphi(t) = f(x^k + td^k),\ t \geq 0\}$.

(k_3) Tính $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$; $\quad v^k := x^{k+1} - x^k$ và $\nabla f(x^{k+1})$.

(k_4) **If** $\|\nabla f(x^{k+1})\| \approx 0$ **Then** Dừng thuật toán $\quad$ (*lấy* $x^* \approx x^{k+1}$)
Else Chuyển bước (k_5);

(k_5) Tính $u^k := \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$ và

$$H_{k+1} := H_k + \frac{v^k (v^k)^T}{\langle u^k, v^k \rangle} - \frac{(H_k u^k)(H_k u^k)^T}{\langle u^k, H_k u^k \rangle}; \tag{6.9}$$

(k_6) Đặt $k := k + 1$ và quay về Bước lặp k.

---

[8] Thuật toán này do Davidon đề xuất đầu tiên vào năm 1959, sau đó được Fletcher và Powell phát triển (1963).

Nhắc lại rằng, $v^k \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ cột. Do đó $v^k(v^k)^T$ là ma trận cấp $n \times n$. Cụ thể

$$\begin{pmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ \vdots \\ v_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^k & v_2^k & \cdots & v_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^k v_1^k & v_1^k v_2^k & \cdots & v_1^k v_n^k \\ v_2^k v_1^k & v_2^k v_2^k & \cdots & v_2^k v_n^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n^k v_1^k & v_n^k v_2^k & \cdots & v_n^k v_n^k \end{pmatrix}.$$

Tương tự, $(H_k u^k)(H_k u^k)^T$ là ma trận cấp $n \times n$.

Ví dụ 6.10. Giải lại bài toán đã xét ở Ví dụ 6.6, $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$, trong đó $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ và

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\nabla f(x) = Ax - b$ và kết quả giải bài toán này theo Thuật toán 6.5 như sau.

Bước lặp $k = 1$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d^1 = -H_1 \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t_1 = 0.096774$$

$$x^2 = x^1 + t_1 d^1 = \begin{pmatrix} -0.096774 \\ -0.096774 \\ -0.096774 \end{pmatrix}$$

$$v^1 = x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} -0.096774 \\ -0.096774 \\ -0.096774 \end{pmatrix} \quad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.903226 \\ 0.516129 \\ -1.419355 \end{pmatrix}$$

$$u^1 = \nabla f(x^2) - \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -0.096774 \\ -0.483871 \\ -2.419355 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1.030722 & 0.024578 & -0.006144 \\ 0.024578 & 0.993856 & -0.159754 \\ -0.006144 & -0.159754 & 0.072197 \end{pmatrix}$$

Bước lặp $k = 2$

$$d^2 = -H_2 \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -0.952381 \\ -0.761905 \\ 0.190476 \end{pmatrix}$$

$$t_2 = 0.323077 \qquad x^3 = x^2 + t_2 d^2 = \begin{pmatrix} -0.040467 \\ -0.342928 \\ -0.035236 \end{pmatrix}$$

$$v^2 = x^3 - x^2 = \begin{pmatrix} -0.307692 \\ -0.246154 \\ 0.061538 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} 0.595533 \\ -0.714640 \\ 0.119107 \end{pmatrix} \quad u^2 = \nabla f(x^3) - \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -0.307692 \\ -1.230769 \\ 1.538462 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1.131584 & -0.071580 & 0.009053 \\ -0.040811 & 0.209795 & -0.000326 \\ 0.193668 & 0.153520 & 0.001549 \end{pmatrix}$$

Bước lặp $k = 3$

$$d^3 = -H_3 \nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} -0.726129 \\ 0.174271 \\ -0.005809 \end{pmatrix}$$

$$t_3 = 0.820149 \qquad x^4 = x^3 + t_3 d^3 = \begin{pmatrix} -1.000000 \\ -0.200000 \\ -0.040000 \end{pmatrix}$$

Vì $\nabla f(x^4) = (0,\ 0,\ 0)^T$ nên dừng thuật toán. Ta nhận được nghiệm

$$x^* = (-1\ ,\ -0.2,\ -0.04)^T$$

đúng như mong muốn (xem Ví dụ 6.6).

6.1.5 Cực tiểu hàm một biến

Trong nhiều bước tính toán của bài toán quy hoạch nhiều biến, ta thường phải tìm cực tiểu của hàm theo một hướng nào đó, tức tìm cực tiểu hàm số một biến. Mục này trình bày hai phương pháp đơn giản để giải bài toán

$$\min\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \qquad (P^{1b})$$

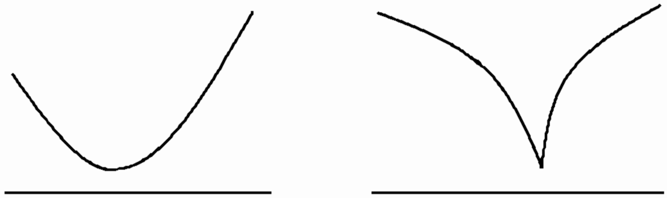
trong đó $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm đơn mốt (unimodal function) và giả sử bài toán (P^{1b}) có nghiệm cực tiểu $x^* \in (a, b)$.

Định nghĩa. Ta nói một hàm số thực f xác định trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là hàm *đơn mốt* nếu:

i) Hàm f đạt cực tiểu tại $x^* \in (a, b)$

ii) Trong khoảng (a, b), hàm $f(x)$ hội tụ giảm dần đến $f(x^*)$ khi x hội tụ đơn điệu đến x^*.

Dễ thấy hàm lồi là hàm đơn mốt. Nhưng hàm đơn mốt có thể không phải hàm lồi, không phải hàm lõm. Xem minh họa ở Hình 6.6.



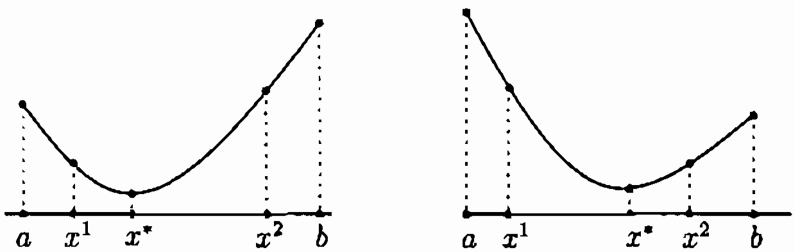
Hình 6.6. *Một số dáng điệu của đồ thị hàm đơn mốt*

Một tính chất quan trọng của hàm đơn mốt trên đoạn $[a, b]$ là: *Giả sử nghiệm cực tiểu x^* thuộc khoảng (a, b) và $a < x^1 < x^2 < b$. Khi đó:*

i) Nếu $f(x^1) < f(x^2)$ thì $x^* \in [a, x^2]$;

ii) Nếu $f(x^1) > f(x^2)$ thì $x^* \in [x^1, b]$.

Xem minh họa ở Hình 6.7.



Hình 6.7

Một khoảng chứa nghiệm cực tiểu x^* được gọi là *khoảng bất định* (uncertainty). Ký hiệu giá trị tối ưu của bài toán cần giải là f_*. Ta có $f_* = f(x^*)$. Hai phương pháp trình bày sau đây cũng như hầu hết các phương pháp khác để tìm cực tiểu của hàm một biến có tính chất của hàm đơn mốt đều dựa trên ý tưởng thu hẹp dần miền chứa nghiệm.

a. Phương pháp chia đôi

Thuật toán 6.6 (*Thuật toán chia đôi*)

Bước khởi đầu. Lấy $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ; Đặt $a^1 := a$; $b^1 := b$; $k := 1$;

Bước lặp k $(k = 1, 2, \cdots)$

(k_1) Đặt

$$c := \frac{a^k + b^k}{2}; \;\; x^k := c - \frac{\varepsilon}{2}; \;\; y^k := c + \frac{\varepsilon}{2};$$

(*có* $a^k < x^k < y^k < b^k$)

(k_2) Tính $z_1 = f(x^k)$; $\quad z_2 = f(y^k)$;

(k_3) **If** $z_1 \le z_2$ **Then** Chuyển (k_4) **Else** Chuyển (k_5);

(k_4) (*Có* $x^* \in [a^k, y^k]$)

If $y^k - a^k \le \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy* $x^* := x^k$ *và* $f_* := z_1$)
Else Đặt $a^{k+1} := a^k$; $b^{k+1} := y^k$; $k := k + 1$; Chuyển về Bước lặp k;

(k_5) (*Có* $x^* \in [x^k, b^k]$)

If $b^k - x^k \le \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy* $x^* := y^k$ *và* $f_* := z_2$)
Else Đặt $a^{k+1} := x^k$; $b^{k+1} := b^k$; $k := k + 1$; Chuyển về Bước lặp k;

Nhận xét: Sau mỗi bước lặp, khoảng chứa nghiệm giảm xấp xỉ một nửa so với bước trước nó.

b. Phương pháp lát cắt vàng

Phương pháp này sử dụng tính chất của dãy số Fibonacci $\{F_n\}$. Nhắc lại, dãy $\{F_n\}$ là dãy số: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ⋯, tức là:

$F_1 = F_2 = 1$;

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ với $n = 3, 4, \cdots$

(Mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ ba, bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó)

Dãy số Fibonacci [9] $\{F_n\}$ có tính chất đặc biệt đáng chú ý là: *tỷ số giữa hai số kế tiếp nhau của dãy số này tiến tới tỷ số vàng*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

---

[9] Leonardo FIBONACCI (1180-1250): Nhà toán học người Italy. Tên thật của ông là Leonardo De Pisa, có nghĩa là Leonard ở thành Pise. Fibonacci là người có công trong việc truyền bá những tính ưu việt của toán học A rập vào châu Âu thời Phục hưng. Dãy số mang tên ông được ông đưa ra năm 1202, bắt nguồn từ bài toán "thỏ đẻ" như sau: Xuất phát từ một cặp thỏ. Hỏi sau một số tháng ta có bao nhiêu cặp thỏ biết rằng mỗi cặp thỏ, mỗi tháng đẻ ra một cặp và cặp mới này sau 2 tháng lại bắt đầu đẻ.

Thuật toán lát cắt vàng giải bài toán (P^{1b}) được mô tả như sau:

Thuật toán 6.7 (*Thuật toán lát cắt vàng*)

Bước khởi đầu. Lấy $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ; Đặt $a^1 := a$; $b^1 := b$; $k := 1$ và

$$\alpha := \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

Bước lặp k $(k = 1, 2, \cdots)$

(k_1) Chia $[a^k, b^k]$ bởi các điểm chia x^k, y^k, trong đó

$$x^k := a^k + (1-\alpha)(b^k - a^k);$$
$$y^k := a^k + \alpha(b^k - a^k).$$

(k_2) Tính $z_1 := f(x^k)$; $z_2 := f(y^k)$;

(k_3) **If** $z_1 \leq z_2$ **Then** Chuyển Bước k_4 **Else** Chuyển Bước k_5;

(k_4) (*Có* $x^* \in [a^k, y^k]$)

If $y^k - a^k \leq \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy* $x^* := x^k$ *và* $f_* := z_1$)

Else Đặt $a^{k+1} := a^k$; $b^{k+1} := y^k$; $k := k+1$; Chuyển về Bước lặp k;

(k_5) (*Có* $x^* \in [x^k, b^k]$)

If $b^k - x^k \leq \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy* $x^* := y^k$ *và* $f_* := z_2$)

Else Đặt $a^{k+1} := x^k$; $b^{k+1} := b^k$; $k := k+1$; Chuyển về Bước lặp k;

Nhận xét 6.4. i) Trong cả hai trường hợp, ta đều có

$$b^{k+1} - a^{k+1} = \alpha(b^k - a^k);$$

ii) Một trong hai điểm chia ở bước sau trùng với điểm chia ở bước trước. Do đó thuật toán này cho phép giảm số phép tính.

Ví dụ 6.11. Tìm $\min\{f(x) = x^2 + 2x + 2 \mid x \in [-5, 3]\}$ với $\varepsilon = 0.001$.

Kết quả giải bài toán này theo Thuật toán 6.7 với $\varepsilon = 0.001$ được trình bày ở Bảng 6.1. Thuật toán dừng ở Bước lặp 19 và ta lấy nghiệm tối ưu $x^* = 1.000163$ và giá trị tối ưu $f_* = 1.000000027$.

Bảng 6.1

Bước k	a^k	b^k	x^k	y^k
1	-5.00000	3.00000	-1.944272	-0.055728
2	-5.00000	-0.055728	-3.111456	-1.944272
3	-3.111456	-0.055728	-1.944272	-1.222912
4	-1.944272	0.055728	-1.222912	-0.777088
5	-1.944272	-0.777088	-1.498447	-1.222912
6	-1.498447	-0.777088	-1.222912	-1.052622
7	-1.222912	-0.777088	-1.052622	-0.947377
8	-1.222912	-0.947377	-1.117667	-1.052622
9	-1.117667	-0.947377	-1.052622	-1.012422
10	-1.052622	-0.947377	-1.012422	-0.987577
11	-1.052622	-0.987577	-1.027777	-1.012422
12	-1.027777	-0.987577	-1.012422	-1.002932
13	-1.012422	-0.987577	-1.002932	-0.997067
14	-1.012422	-0.997067	-1.006557	-1.002932
15	-1.006557	-0.997067	-1.002932	-1.000692
16	-1.002932	-0.997067	-1.000692	-0.999308
17	-1.002932	-0.999308	-1.001548	-1.000692
18	-1.001548	-0.999308	-1.000692	-1.000163
19	-1.000692	-0.999308	-1.000163	-0.999836

6.1.6 Phương pháp tìm kiếm trực tiếp

Mục này dành để trình bày hai thuật toán giải bài toán (P^{krb})

$$\min\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in \mathbb{R}^n,$$

theo phương pháp tìm kiếm trực tiếp là: Thuật toán của Hooke và Jeeves[10] và Thuật toán tìm kiếm theo đơn hình[11] (Sequential simplex search algorithm)

Các thuật toán này được sử dụng để giải bài toán (P^{krb}) khi hàm mục tiêu $f(x)$ không khả vi hoặc có khả vi nhưng việc lấy các đạo hàm riêng là khó khăn do $f(x)$ cấu trúc phức tạp hoặc khi có ít thông tin về $f(x)$.

[10] Thuật toán này do Hooke và Jeeves đề xuất năm 1961.

[11] Năm 1962, thuật toán này được đưa ra bởi Spendly, Hext và Himsworth và được Nelder và Mead cải tiến vào năm 1965.

a. Thuật toán của Hooke và Jeeves

Thuật toán 6.8 (*Thuật toán giảm theo tọa độ*)

Bước 0. Xuất phát từ một điểm tùy ý $x^1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Chọn các véc tơ

$$v^i = (0, \cdots, 0, \underbrace{\delta}_{i}, 0, \cdots, 0)^T, \quad i = 1, \cdots, n,$$

trong đó $\delta > 0$ là số cho trước. Chọn trước số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ.

Bước 1. Đặt $x^{1_0} = x^1$. Trong 3 điểm x^{1_0} và $x^{1_0} \pm v^1$, chọn một điểm mà tại đó giá trị hàm mục tiêu bé nhất, ký hiệu điểm đó là x^{1_1}. Để đơn giản ta viết: Tìm

$x^{1_1} = \text{argmin}\{f(x^{1_0}), f(x^{1_0} + v^1), f(x^{1_0} - v^1)\}$ *(theo tọa độ thứ nhất)*;

$x^{1_2} = \text{argmin}\{f(x^{1_1}), f(x^{1_1} + v^2), f(x^{1_1} - v^2)\}$ *(theo tọa độ thứ hai)*;

$$\vdots$$

$x^{1_n} = \text{argmin}\{f(x^{1_{n-1}}), f(x^{1_{n-1}} + v^n), f(x^{1_{n-1}} - v^n)\}$ *(theo tọa độ thứ n)*;

Gán $y^1 := x^{1_n}$;

Bước 2. **If** $x^1 = y^1$ **Then** Chuyển Bước 3 **Else** Chuyển Bước 4;

Bước 3. **If** $\delta \le \varepsilon$ **Then** Dừng thủ tục (*lấy* $x^* \approx x^1$)

Else Đặt $v^i = \frac{v^i}{2}$, $i = 1, \cdots, n$ và quay lại Bước 1;

Bước 4. Đặt $x^2 = x^1 + 2(y^1 - x^1)$; $\quad x^1 := x^2$ và quay lại Bước 1.

Ví dụ 6.12. Xét bài toán

$$\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 \mid x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Bài toán này có $n = 2$. Xuất phát từ $x^1 = (1.0\ ,\ 1.0)^T$. Lấy $\delta = 0.5$, ta có

$$v^1 = (0.5\ ,\ 0)^T, \quad v^2 = (0\ ,\ 0.5)^T$$

Chọn $\varepsilon = 0.5$. Quá trình tính toán giải theo Thuật toán 6.8 như sau:

Bước 1. (lần thứ nhất) Gán $x^{1_0} = x^1 = (1.0\ ,\ 1.0)^T$; Tính trực tiếp ta có:

$$f(x^{1_0}) = f(1.0\ ,\ 1.0) = 2.0;$$
$$f(x^{1_0} + v^1) = f(1.5\ ,\ 1.0) = 3.25;$$
$$f(x^{1_0} - v^1) = f(0.5\ ,\ 1.0) = 1.25.$$

Do đó $\min\{f(x^{1_0}, \ f(x^{1_0} + v^1), \ f(x^{1_0} - v^1)\} = f(x^{1_0} - v^1) = 1.25$. Suy ra $x^{1_1} = (0.5\ ,\ 1)^T$.

◇ Lặp lại với x^{1_1},

$$f(x^{1_1}) = f(0.5\ ,\ 1.0) = 1.25;$$
$$f(x^{1_1} + v^2) = f(0.5\ ,\ 1.5) = 2.5;$$
$$f(x^{1_1} - v^2) = f(0.5\ ,\ 0.5) = 0.5.$$

Do đó $\min\{f(x^{1_1},\ f(x^{1_1} + v^2),\ f(x^{1_1} - v^2)\} = f(x^{1_1} - v^2) = 0.5$. Suy ra $x^{1_2} = (0.5\ ,\ 0.5)^T$.

Đặt $y^1 := x^{1_2} = (0.5\ ,\ 0.5)^T$. Vì $y^1 \neq x^1$ nên đặt

$$x^2 = x^1 + 2(y^1 - x^1) = (0\ ,\ 0)^T; \qquad x^1 := x^2.$$

Quay lại Bước 1.

Bước 1 (lần thứ hai)

Gán $x^{1_0} = x^1 = (0\ ,\ 0)^T$; Ta có

$$\min\{f(x^{1_0},\ f(x^{1_0} + v^1),\ f(x^{1_0} - v^1)\} = f(x^{1_0}) = 0.0$$

và

$$x^{1_1} = x^{1_0} = (0.0\ ,\ 0.0)^T.$$

Tiếp tục

$$\min\{f(x^{1_1},\ f(x^{1_1} + v^2),\ f(x^{1_1} - v^2)\} = f(x^{1_1}) = 0.0$$

và

$$x^{1_2} = x^{1_1} = (0.0\ ,\ 0.0)^T.$$

Gán $y^1 := x^{1_2}$. Vì $y^1 = x^1$ và $\delta = \varepsilon$ nên dừng thuật toán và coi $x^1 = (0, 0)^T$ là nghiệm cực tiểu địa phương.

Dễ thấy rằng, trong ví dụ đơn giản này, điểm $(0\ ,\ 0)^T$ chính là cực tiểu toàn cục của hàm lồi $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

b. Thuật toán tìm kiếm theo đơn hình

Thuật toán 6.9

Bước 1.

◇ Tạo một đơn hình có $(n+1)$ đỉnh $x^1, \cdots, x^{n+1} \in \mathbb{R}^n$.

◇ Tính $f(x^i)$, $i = 1, \cdots, n+1$.

Bước 2. Tính

$f^{max} := f(x^{i_M}) = \max\{f(x^i) \mid i = 1, \cdots, n+1\}$, $i_M \in \{1, \cdots, n+1\}$.

$f^{min} := f(x^{i_m}) = \min\{f(x^i) \mid i = 1, \cdots, n+1\}$, $i_m \in \{1, \cdots, n+1\}$.

Đặt $x^{max} := x^{i_M}$; $\qquad x^{min} = x^{i_m}$.

Bước 3. (Tiêu chuẩn tối ưu)

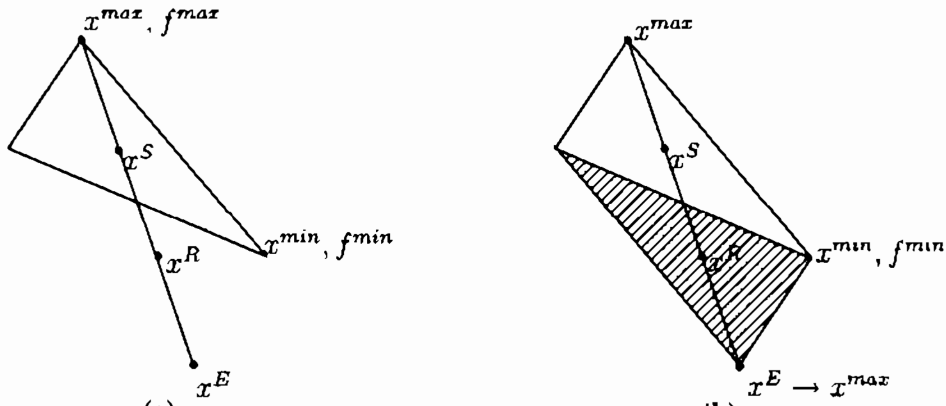
If $|f^{max} - f^{min}| \leq \varepsilon$ **Then** STOP

(x^{min} là nghiệm tối ưu địa phương và f^{min} là giá trị tối ưu tương ứng)

Else Chuyển Bước 4.

Bước 4. (Tính điểm trọng tâm)

$$x^S = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|f(x^i)|}{\sum_{i=1}^{n+1} |f(x^i)|} x^i \ \ \text{(tổ hợp lồi của } x^i,\ i = 1, \cdots, n+1).$$



Hình 6.8

Bước 5. Chiếu đối xứng x^{max} qua x^S được

$$x^R = x^{max} + 2(x^S - x^{max}) \ \ (\text{tức } \ x^S = \frac{1}{2}x^{max} + \frac{1}{2}x^R);$$

Đặt $f^R := f(x^R)$.

Bước 6. **If** $f^R \leq f^{min}$ **Then** Chuyển Bước 7 **Else** Chuyển Bước 8.

Bước 7. Chiếu đối xứng x^S qua x^R được

$$x^E = x^S + 2(x^R - x^S); \qquad \text{(Xem Hình 6.8(a))}$$

Đặt $f^E := f(x^E)$.

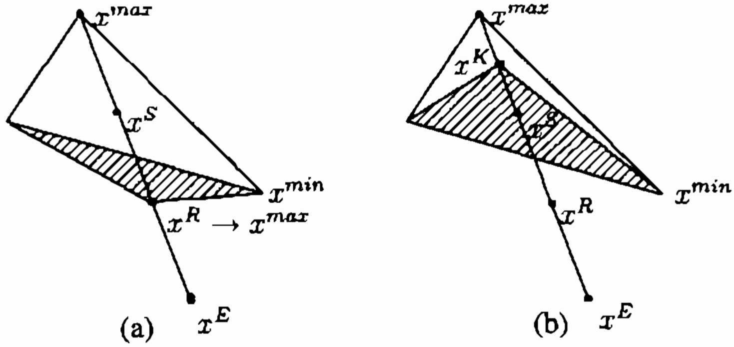
If $f^E < f^{min}$ **Then** Đặt $x^{i_M} := x^E$ (tức thay $x^{max} := x^E$),
được đơn hình mới (Hình 6.8(b)) và Quay về Bước 2

Else Đặt $x^{i_M} := x^R$ (tức thay $x^{max} := x^R$),
được đơn hình mới (Hình 6.9(a)) và Quay về Bước 2.

Bước 8. (Đã có $f^R > f^{min}$)

If $f^R < f^{max}$ **Then** Đặt $x^{i_M} := x^R$ (tức thay $x^{max} := x^R$),
được đơn hình mới và Quay về Bước 2

Else Chuyển Bước 9.



Hình 6.9

Bước 9. (Đã có $f^R \geq f^{max}$) Tính

$$x^K := \frac{1}{2}x^{max} + \frac{1}{2}x^S, \ \text{ và } \ f^K := f(x^K)$$

If $f^K < f^{max}$ **Then** Đặt $x^{i_M} := x^K$ (tức thay $x^{max} := x^K$),
được đơn hình mới (Hình 6.9(b)) và Quay về Bước 2

Else Thu hẹp đơn hình theo công thức

$$x^i := \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}x^{min}, \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n+1\} \setminus \{i_m\}.$$

Quay lại Bước 2.

Nhận xét 6.5. Trong thực hành tính theo Thuật toán 6.8 (t.ư., Thuật toán 6.9), ta chọn điểm xuất phát x^0 ngẫu nhiên (t.ư., chọn đơn hình xuất phát có $n+1$ đỉnh ngẫu nhiên). Với các dữ liệu đầu vào khác nhau, có thể dẫn đến các nghiệm tối ưu địa phương khác nhau. Cuối cùng, ta chọn nghiệm tốt nhất có thể.

6.2 Bài toán quy hoạch phi tuyến có ràng buộc

Bài toán quy hoạch phi tuyến có ràng buộc tổng quát được phát biểu như sau

$$\min\{f(x) \mid x \in X\}, \qquad (P^{rb})$$

trong đó $X \subset \mathbb{R}^n$ và hàm số f xác định trên X.

6.2.1 Điều kiện tối ưu

Trước hết, ta làm quen với khái niệm nón tiếp xúc.

a. Nón tiếp xúc (Tangent cone)

Định nghĩa. Cho dãy $\{x^q\} \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ đến $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Ta nói dãy $\{x^q\}$ *hội tụ đến* x^0 *theo hướng* $v \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\{x^q\} \xrightarrow{v} x^0$, nếu tồn tại dãy số dương $\{t_q\}$, $\lim_{q\to\infty} t_q = 0$ sao cho

$$x^q = x^0 + t_q v + o(t_q).$$

Nói cách khác, $\{x^q\} \xrightarrow{v} x^0$ nếu tồn tại dãy số dương $\{t_q\}$, $\lim_{q\to\infty} t_q = 0$ sao cho

$$\lim_{q\to\infty} \frac{x^q - x^0}{t_q} = v.$$

Nhận xét 6.6. i) Nếu $\{x^q\} \xrightarrow{v} x^0$ thì $\{x^q\} \xrightarrow{\lambda v} x^0$ với mọi $\lambda > 0$ (Bài tập);

ii) Không phải mọi dãy hội tụ đều hội tụ theo hướng nhưng với mỗi dãy hội tụ luôn có một dãy con hội tụ theo một hướng nào đó;

iii) Hiển nhiên là $x^0 \xrightarrow{0} x^0$.

Định nghĩa. Cho $X \subset \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các hướng $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho có một dãy $\{x^q\} \subset X$ hội tụ đến x^0 theo hướng v tạo thành một nón (Bài tập). Ta gọi đó là *nón tiếp xúc* với X tại $x^0 \in X$, kí hiệu là $T(X, x^0)$, cụ thể

$$T(X, x^0) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{x^q\} \subset X \text{ sao cho } \{x^q\} \xrightarrow{v} x^0\}.$$

Nhận xét 6.7. i) Nếu $x^0 \in \text{int}X$ thì $T(X, x^0) = \mathbb{R}^n$;

ii) Nếu $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đóng thì $T(X, x^0) = \text{cone}\{(x - x^0) \mid x \in X\}$.

Bổ đề 6.1. *Giả sử $\{x^q\}$ là một dãy thuộc $X \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ đến $x^0 \in X$ theo hướng v và f là hàm khả vi liên tục cấp một trên X. Khi đó*

$$\langle \nabla f(x^0), v\rangle = \lim_{t_q \to 0^+} \frac{f(x^q) - f(x^0)}{t_q}.$$

Chứng minh. Giả sử $\{x^q\} \xrightarrow{v} x^0$. Theo định nghĩa, tồn tại dãy số dương $\{t_q\}$, $\lim_{q\to\infty} t_q = 0$, sao cho

$$\lim_{q\to\infty} \frac{x^q - x^0}{t_q} = v.$$

Khai triển Taylor của hàm f tại x^0 (với q đủ lớn) là

$$f(x^q) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), x^q - x^0\rangle + o(\|x^q - x^0\|).$$

Suy ra

$$\frac{f(x^q) - f(x^0)}{t_q} = \frac{\langle \nabla f(x^0), x^q - x^0\rangle}{t_q} + \frac{o(\|x^q - x^0\|)}{t_q}.$$

Do đó, khi $t_q \to 0^+$ ta có

$$\langle \nabla f(x^0), v\rangle = \lim_q \frac{f(x^q) - f(x^0)}{t_q}$$

vì

$$\lim_{t_q \to 0^+} \frac{o(\|x^q - x^0\|)}{t_q} = \lim_{t_q \to 0} \frac{o(\|x^q - x^0\|)}{\|x^q - x^0\|} \cdot \frac{\|x^q - x^0\|}{t_q} = 0.$$

□

b. Điều kiện tối ưu

Định lý 6.9. *i) Giả sử f khả vi trên một tập mở chứa X. Nếu $x^* \in X$ là nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P^{rb}) thì*

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in T(X, x^*); \tag{6.10}$$

ii) Ngược lại, nếu $x^* \in X$ thỏa mãn điều kiện

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle > 0 \quad \forall v \in T(X, x^*), \tag{6.11}$$

thì x^* là một nghiệm tối ưu địa phương chặt của bài toán (P^{rb}).

Chứng minh. i) Xét bất kỳ $v \in T(X, x^*)$. Theo định nghĩa, tồn tại dãy $\{x^q\} \subset X$ và $\{x^q\} \xrightarrow{v} x^*$. Theo Bổ đề 6.1, ta có

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle = \lim_{t_q \to 0+} \frac{f(x^q) - f(x^*)}{t_q}.$$

Vì x^* là nghiệm cực tiểu địa phương nên $f(x^q) - f(x^*) \geq 0$ với q đủ lớn. Do đó $\langle \nabla f(x^*), v\rangle \geq 0$.

ii) Giả thiết phản chứng rằng x^* không phải nghiệm cực tiểu địa phương chặt của bài toán (P^{rb}). Khi đó, tồn tại một dãy $\{x^q\} \subset X$, $x^q \neq x^*$ và $\{x^q\} \to x^*$ sao cho $f(x^q) \leq f(x^*)$. Trích một dãy con (nếu cần), ta có thể giả sử rằng dãy $\{x^q\}$ hội tụ đến x^* theo một hướng $v \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, $v \in T(X, x^*)$. Theo Bổ đề 6.1, ta có

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle = \lim_{t_q \to 0+} \frac{f(x^q) - f(x^*)}{t_q} \leq 0,$$

trái giả thiết (6.11). Vậy x^* là nghiệm cực tiểu địa phương chặt của bài toán (P^{rb}). □

Một điểm $x^* \in X$ thỏa mãn

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in T(X, x^*)$$

được gọi là một *điểm dừng* hay *điểm tới hạn* của hàm f trên X. Chú ý rằng điều kiện (6.10) chỉ là điều kiện cần nhưng không đủ.

Ví dụ 6.13. Xét bài toán $\min\{f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.

Tập chấp nhận được của bài toán là hình tròn đóng $\bar{B}(0,1)$ có tâm 0 và bán kính 1. Ta có $\nabla f(x) = (2x_1,\ -2x_2)^T$ và $\nabla f(x^0) = 0$ với $x^0 = (0,\ 0)^T$. Vì $x^0 \in \text{int}\bar{B}(0,1)$ nên $T(\bar{B}(0,1), x^0) = \mathbb{R}^2$ và

$$\langle \nabla f(x^0), v\rangle = 0, \quad v \in T\Big(\bar{B}(0,1), x^0\Big).$$

Tuy nhiên $x^0 = (0,\ 0)^T$ không phải nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán đang xét vì $f(0, \pm\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0$ với mọi ε.

Hệ quả 6.2. *Giả sử $x^* \in \text{int}X$ và x^* là điểm cực tiểu địa phương của bài toán (P^{rb}). Khi đó $\nabla f(x^*) = 0$.*

Chứng minh. Do $x^* \in \text{int}X$ nên $T(X, x^*) = \mathbb{R}^n$. Vì x^* là điểm cực tiểu địa phương nên theo Định lý 6.9,

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \ge 0 \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Suy ra $\nabla f(x^*) = 0$. □

Định lý 6.10. *Cho f là hàm lồi khả vi trên một tập mở chứa tập lồi $X \subset \mathbb{R}^n$. Điều kiện cần và đủ để $x^* \in X$ là điểm cực tiểu toàn cục của bài toán quy hoạch lồi $\min\{f(x) \mid x \in X\}$ là*

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \ge 0 \ \ \forall v \in T(X, x^*). \tag{6.10'}$$

Chứng minh. Biểu thức $(6.10)'$ chính là biểu thức (6.10). Do đã có Định lý 6.9, ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ, tức nếu $x^* \in X$ thỏa mãn $(6.10)'$ thì nó là điểm cực tiểu của hàm f trên X. Giả sử phản chứng rằng $x^* \in X$ thỏa mãn $(6.10)'$ nhưng nó không phải là điểm cực tiểu của hàm f trên X, tức tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho $f(\bar{x}) < f(x^*)$. Đặt $v = \bar{x} - x^*$. Vì X là tập lồi nên $x^* + tv \in X$ với mọi $0 \le t \le 1$ và $v \in T(X, x^*)$. Theo Hệ quả 1.4,

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \le f(x^* + v) - f(x^*) = f(\bar{x}) - f(x^*) < 0,$$

mâu thuẫn với $(6.10)'$. Điều đó chứng tỏ x^* là nghiệm cực tiểu của f trên X. □

Ví dụ 6.14. Xét bài toán $\min\{f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.

Tập chấp nhận được của bài toán là hình tròn đóng $\bar{B}(0,1)$. Ta có $\nabla f(x) = (2x_1,\ 2x_2)^T$ và $\nabla f(x^0) = 0$ với $x^0 = (0,\ 0)^T$. Dễ thấy ma trận Hesse $\nabla^2 f(x)$ là xác định dương nên hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm lồi chặt (Định lý 1.11(i)). Tương tự Ví dụ 6.12, nón tiếp xúc với $\bar{B}(0,1)$ tại x^0 là $T(\bar{B}(0,1), x^0) = \mathbb{R}^2$ và

$$\langle \nabla f(x^0), v\rangle = 0, \quad v \in T\Big(\bar{B}(0,1), x^0\Big).$$

Theo Định lý 6.10, $x^0 = (0,\ 0)^T$ là nghiệm cực tiểu của bài toán đang xét. Hơn nữa, do hàm mục tiêu là lồi chặt nên x^0 là nghiệm cực tiểu duy nhất (Mệnh đề 2.1(ii)).

Hệ quả 6.3. *Cho f là hàm lồi khả vi trên một tập mở chứa tập lồi $X \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $x^* \in X$ là điểm cực tiểu toàn cục của bài toán quy hoạch lồi* $\min\{f(x) \mid x \in X\}$ *khi và chỉ khi*

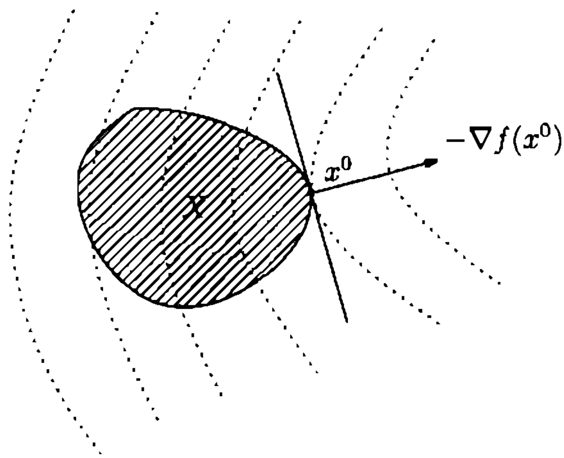
$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in X. \tag{6.12}$$

Chứng minh. Suy trực tiếp từ Định lý 6.10 và Nhận xét 6.7(ii). □

Ý nghĩa hình học. Theo Hệ quả 6.3, bài toán quy hoạch lồi

$$\min\{f(x) \mid x \in X\}$$

nhận điểm $x^* \in X$ (có $\nabla f(x^*) \neq 0$) là nghiệm cực tiểu toàn cục khi và chỉ khi véc tơ $-\nabla f(x^*)$ xác định một siêu phẳng tựa của tập lồi chấp nhận được X tại x^* (xem minh họa ở Hình 6.10).



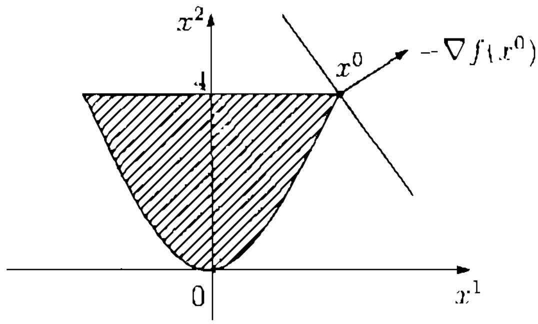
Hình 6.10. $x^* \in X$ *là nghiệm cực tiểu của quy hoạch lồi* $\min\{f(x) \mid x \in X\}$.

Ví dụ 6.15. Xét bài toán $\min\{f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \mid x_2 \geq x_1^2, \ \ x_2 \leq 4\}$. Điểm $x^0 = (2, \ 4)^T$ có phải nghiệm cực tiểu của bài toán này không? Vì sao?

Giải. Dễ thấy $f(x)$ là hàm lồi và

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 4) \\ 2(x_2 - 6) \end{pmatrix} \ \ \Rightarrow \ \ \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Tập chấp nhận được X của bài toán này là tập lồi (phần gạch chéo) và véc tơ $-\nabla f(x^0)$ được minh họa ở Hình 6.11. Ta thấy $-\nabla f(x^0)$ xác định một siêu phẳng tựa với X tại x^0. Do đó x^0 là nghiệm cực tiểu của bài toán đang xét.



Hình 6.11

c. Định lý Karush-Kuhn-Tucker

Xét bài toán quy hoạch phi tuyến

$$\min\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in X, \qquad (P_1^{rb})$$

trong đó $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập nghiệm của hệ

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0, & i = 1, \cdots, m, \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \cdots, k, \end{cases}$$

với f, g_i, $i = 1, \cdots, m$ và h_j, $j = 1, \cdots, k$ là các hàm số khả vi bất kỳ xác định trên $\mathbb{R}^n$, có thể không lồi. Như thường lệ, mỗi hệ thức $g_{i_0}(x) \leq 0$, $i_0 \in \{1, \cdots, m\}$ hoặc $h_{j_0}(x) = 0$, $j_0 \in \{1, \cdots, k\}$, được gọi là một *ràng buộc*.

Nhận xét 6.8. i) Nếu $g_i(x)$, $i = 1, \cdots, m$ là các hàm lồi và $h_j(x)$, $j = 1, \cdots, k$ là các hàm afin thì X là tập lồi, đóng. Nếu thêm điều kiện f là hàm lồi thì bài toán (P_1^{rb}) là một quy hoạch lồi;

ii) Do mọi hàm afin đều là hàm lồi nên quy hoạch tuyến tính là một trường hợp riêng của quy hoạch lồi.

Cho $x^0 \in X$ là một nghiệm chấp nhận được của bài toán (P_1^{rb}). Đặt

$$I(x^0) := \{i \in \{1, \cdots, m\} \mid g_i(x^0) = 0\}$$

là *tập các chỉ số của các ràng buộc* $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, \cdots, m$, *thỏa mãn chặt tại* x^0.

Ký hiệu $S(x^0)$ là tập hợp các véc tơ v thỏa mãn hệ tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \langle \nabla h_j(x^0), v \rangle = 0, & j = 1, \cdots, k \\ \langle \nabla g_i(x^0), v \rangle \leq 0, & i \in I(x^0). \end{cases}$$

Bổ đề 6.2. *Với mọi $x^0 \in X$ ta có $T(X, x^0) \subseteq S(x^0)$.*

Chứng minh. Cho $v \in T(X, x^0)$. Theo định nghĩa, tồn tại dãy $\{x^q\} \subset X$, tồn tại dãy số dương $\{t_q\}$, $\lim_{q\to\infty} t_q = 0$ sao cho

$$\lim_{q\to\infty} \frac{x^q - x^0}{t_q} = v.$$

Vì $x^0 \in X$ và $x^q \in X$ nên $h_j(x^0) = h_j(x^q) = 0$ với mọi $j = 1, \cdots, k$ và $g_i(x^q) \le 0$ với mọi $i = 1, \cdots, m$. Với mỗi $i \in I(x^0)$ ta có $g_i(x^0) = 0$. Theo Bổ đề 6.1, ta có

$$\langle \nabla h_j(x^0), v\rangle = \lim_{t_q\to 0+} \frac{h_j(x^q) - h_j(x^0)}{t_q} = 0, \quad \forall j = 1, \cdots, k;$$

$$\langle \nabla g_i(x^0), v\rangle = \lim_{t_q\to 0+} \frac{g_i(x^q) - g_i(x^0)}{t_q} \le 0, \quad \forall i \in I(x^0).$$

Do đó $v \in S(x^0)$, hay $T(X, x^0) \subseteq S(x^0)$. □

Định nghĩa. Ta nói *điều kiện chính quy* (regular condition) được thỏa mãn tại x^0 nếu

$$T(X, x^0) = S(x^0)$$

Định lý 6.11. ([26] - trang 23) *Điều kiện chính quy được thỏa mãn tại x^0 nếu có một trong các điều kiện sau:*

i) *Các hàm h_j, $j = 1, \cdots, k$ và g_i, $i = 1, \cdots, m$ đều là các hàm afin;*

ii) *Các hàm h_j, $j = 1, \cdots, k$ là afin; các hàm g_i, $i = 1, \cdots, m$ là lồi và điều kiện Slater*[12] *sau đây thỏa mãn*

$$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; g_i(\bar{x}) < 0, \; i = 1, \cdots, m \text{ và } h_j(\bar{x}) = 0, \; j = 1, \cdots, k.$$

iii) *Các véc tơ $\nabla g_i(x^0)$, $i \in I(x^0)$ và $\nabla h_j(x^0)$, $j = 1, \cdots, k$ là độc lập tuyến tính.*

Điều kiện thứ nhất hoặc thứ hai của Định lý 6.11 đảm bảo điều kiện chính quy được thỏa mãn tại mọi điểm chấp nhận được của bài toán đang xét mà không cần chỉ rõ điểm x^0 nào, còn điều kiện thứ ba đòi hỏi phải biết điểm x^0.

Định lý 6.12. (Định lý Karush-Kuhn-Tucker[13]) *Cho các hàm f, g_i, $i = 1, \cdots, m$ và h_j, $j = 1, \cdots, k$ là các hàm khả vi liên tục trên một tập mở chứa X. Giả sử x^**

---

[12] Điều kiện này được M. Slater đưa ra năm 1950.

[13] Định lý này được Karush đưa ra đầu tiên vào năm 1939 nhưng thiếu điều kiện không âm của các số thực $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$. Sau đó được Kuhn và Tucker hoàn thiện năm 1951.

là điểm cực tiểu địa phương của bài toán (P_1^{rb}) *và điều kiện chính quy được thỏa mãn tại* x^*. *Khi đó điều kiện KKT (điều kiện (6.13)-(6.15)) sau đúng:*

i) $g_i(x^*) \le 0,\ i = 1,\cdots,m$ *và* $h_j(x^*) = 0,\ j = 1,\cdots,k;$ (6.13)

ii) *Tồn tại các số* $\lambda_i \ge 0,\ i = 1,\cdots,m$ *và các số* $\mu_j,\ j = 1,\cdots,k$ *sao cho*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0 \ \text{và} \tag{6.14}$$

iii) $\lambda_i g_i(x^*) = 0,\ \forall i = 1,\cdots,m.$ *(Điều kiện bù)* (6.15)

Chứng minh. Giả sử x^* là điểm cực tiểu địa phương của bài toán (P_1^{rb}) và điều kiện chính quy thỏa mãn tại x^*. Do x^* phải là nghiệm chấp nhận được của bài toán nên nó phải thỏa mãn (6.13). Theo Định lý 6.9(i), ta có

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \ge 0 \quad \forall v \in T(X, x^*).$$

Do $T(X,x^*) \subset S(x^*)$ (Bổ đề 6.2) nên mọi véc tơ $v \in T(X,x^*)$ đều thỏa mãn

$$\begin{cases} \langle \nabla h_j(x^*), v\rangle = 0, & j = 1,\cdots,k \\ \langle \nabla g_i(x^*), v\rangle \le 0, & i \in I(x^*). \end{cases}$$

Đặt A là ma trận cấp $(2k + |I(x^*)|) \times n$ với các hàng là $\nabla h_j(x^*)$, $j = 1,\cdots,k$; $-\nabla h_j(x^*)$, $j = 1,\cdots,k$ và $-\nabla g_i(x^*)$, $i \in I(x^*)$, trong đó $|I(x^*)|$ là ký hiệu số phần tử của tập $I(x^*)$. Vì điều kiện chính quy thỏa mãn tại x^* nên $T(X,x^*) = S(x^*)$ và ta có thể viết

$$T(X,x^*) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av \ge 0\}.$$

Theo Bổ đề Farkas ta có

$$\langle \nabla f(x^*), v\rangle \ge 0, \quad \forall v \in T(X,x^*)$$

khi và chỉ khi tồn tại các số không âm $\alpha_j \ge 0$, $\beta_j \ge 0$, $j = 1,\cdots,k$, $\lambda_i \ge 0$, $i \in I(x^*)$, sao cho

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j - \beta_j)\nabla h_j(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*)$$

Đặt $\lambda_i = 0, \forall i \notin I(x^*)$ và $-\mu_j = \alpha_j - \beta_j, \forall j = 1,\cdots,k$ ta được biểu thức (6.14) và (6.15). □

Chú ý 6.5. i) Điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn điều kiện KKT được gọi là một *điểm KKT* của bài toán (P_1^{rb}) tương ứng;

ii) Nếu x^* là một nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P_1^{rb}) và tại đó thỏa mãn điều kiện chính quy thì x^* là điểm KKT, nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ví dụ 6.16. Xét bài toán

$$\min\ -(x_1^2+x_2^2) \quad \text{v.đ.k.}\quad x_1 \le 1.$$

Bài toán này có $m=1$, $k=0$ và hàm mục tiêu $f(x)=-(x_1^2+x_2^2)$ là hàm lõm chặt. Vì $g_1=x_1-1$ là hàm afin nên điều kiện chính quy thỏa mãn tại mọi điểm chấp nhận được của bài toán. Ta có

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}-2x_1\\-2x_2\end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Điều kiện KKT tương ứng của bài toán này là

$$\begin{cases} g_1(x)=x_1-1\le 0\\ \nabla f(x)+\lambda_1\nabla g_1(x)=0\\ \lambda_1 g_1(x)=0\\ \lambda_1\ge 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-1 & \le 0\\ -2x_1+\lambda_1 & =0\\ -2x_2 & =0\\ \lambda_1(x_1-1) & =0\\ \lambda_1 & \ge 0.\end{cases}$$

Giải hệ này ta nhận được hai điểm KKT là điểm $x^1=(0,0)^T$ ứng với $\lambda_1=0$ và điểm $x^2=(1,0)^T$ ứng với $\lambda_1=2$. Dễ thấy $x^1=(0,0)^T$ là nghiệm cực đại toàn cục của bài toán đang xét còn điểm $x^2=(1,0)^T$ không phải nghiệm cực tiểu địa phương cũng không phải nghiệm cực đại địa phương.

- **Định lý Karush- Kuhn-Tucker cho quy hoạch lồi**

Xét bài toán quy hoạch lồi

$$\min\ f(x) \quad \text{v.đ.k.}\quad x\in X, \qquad (P_1^{conv})$$

trong đó

$$X=\{x \mid g_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m\},$$

và f và g_i, $i=1,2,\cdots,m$, là các hàm lồi, khả vi liên tục trên một tập mở chứa X. Trong bài toán quy hoạch lồi, nếu xuất hiện ràng buộc $h_j(x)=0$ thì $h_j(x)$ phải là hàm afin. Hơn nữa, vì

$$h_j(x)=0 \quad \text{tương đương với} \quad h_j(x)\le 0,\ -h_j(x)\le 0,$$

nên ta chỉ cần xét ràng buộc dạng bất đẳng thức.

Định lý 6.13. (Định lý Karush- Kuhn-Tucker cho quy hoạch lồi) *Giả sử các hàm f, g_i, $i=1,\cdots,m$ là các hàm lồi khả vi trên một tập mở chứa X và điều kiện Slater được thỏa mãn. Khi đó $x^*\in\mathbb{R}^n$ là nghiệm cực tiểu của bài toán (P_1^{conv}) khi và chỉ khi x^* thỏa mãn điều kiện KKT (điều kiện (6.16)-(6.18)) sau:*

i) $g_i(x^*) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m;$ (6.16)

ii) *Tồn tại các số* $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, m$ *sao cho*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \ \text{và} \tag{6.17}$$

iii) $\lambda_i g_i(x^*) = 0,\ \forall i = 1, \cdots, m.$ (6.18)

Chứng minh. Do đã có Định lý 6.12 nên ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ, tức nếu x^* thỏa mãn (6.16) – (6.18) thì x^* là nghiệm cực tiểu của bài toán (P_1^{conv}). Thật vậy, vì f và g_i, $i = 1, \cdots, m$, là các hàm lồi nên $f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$, với $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, m$, cũng là hàm lồi (Mệnh đề 1.12). Từ (6.16) suy ra $x^* \in X$. Lấy bất kỳ $x \in X$. Theo Hệ quả 1.4, ta có

$$(x-x^*)^T \underbrace{\left[\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*)\right]}_{=0 \text{ do } (6.17)} \leq \Big[f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)}_{\leq 0 \text{ do } x \in X}\Big] - \Big[f(x^*) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*)}_{=0 \text{ do } (6.18)}\Big].$$

Do đó

$$f(x^*) \leq f(x),$$

chứng tỏ x^* là nghiệm cực tiểu của bài toán (P_1^{conv}). ☐

Chú ý 6.6. Theo Định lý 6.13, việc giải bài toán quy hoạch lồi (P_1^{conv}) tương đương với việc tìm nghiệm của hệ KKT (6.16)-(6.18) tương ứng.

Ví dụ 6.17. Xét bài toán quy hoạch lồi toàn phương

$$\min \ f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$$

$$\text{với điều kiện } \ Ax \leq b,$$

trong đó Q là ma trận cấp $n \times n$ đối xứng và nửa xác định dương, A là ma trận cấp $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$.

Theo Định lý 6.13, thay vì giải bài toán này, ta có thể giải hệ KTT tương ứng với nó là

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ Qx + c + A^T\lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda^T(Ax - b) = 0. \end{cases}$$

Chú ý 6.7. Điều kiện chính quy trong Định lý 6.12 và Định lý 6.13 **không bỏ qua được**. Nếu x^* là nghiệm cực tiểu địa phương nhưng không thỏa mãn điều kiện chính quy thì điều kiện KKT chưa chắc đã được thỏa mãn tại x^*.

Ví dụ 6.18. Xét bài toán[14]

$$\min\ x_1 \quad \text{v.đ.k.} \quad x_1^3 - x_2^2 = 0.$$

Ta có hàm mục tiêu $f(x) = x_1,\ m = 0,\ k = 1$ và $h_1(x) = x_1^3 - x_2^2 = 0$. Vì mọi nghiệm chấp nhận được $(x_1,\ x_2)^T$ của bài toán này phải thỏa mãn $x_1^3 = x_2^2$ nên $x_1 \geq 0$. Do đó $x^0 = (0,\ 0)^T$ là nghiệm cực tiểu. Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \nabla h_1(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \nabla h_1(x^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nếu x^0 thỏa mãn điều kiện KKT thì phải tồn tại số $\mu_1 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\nabla f(x^0) + \mu_1 \nabla h_1(x^0) = 0 \ \text{ tức } \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $x^0 = (0,\ 0)^T$ không là điểm KKT. Lý do là véc tơ $\nabla h_1(x^0) = (0,\ 0)^T$ không độc lập tuyến tính, tức điều kiện chính quy bị vi phạm tại $x^0 = (0, 0)^T$.

6.2.2 Phương pháp nhân tử Lagrange

Hàm số

$$\mathbb{L}(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_k) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x),$$

với các số thực $\lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_m \geq 0, \mu_1, \cdots, \mu_k$, được gọi là *hàm Lagrange*[15] tương ứng với bài toán quy hoạch phi tuyến

$$\min\ \ f(x) \ \text{ v.đ.k. } \ x \in X, \tag{P_1^{rb}}$$

trong đó $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m,\ \ h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, k\}$. Các số không âm $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ và các số $\mu_1, \cdots, \mu_k$ được gọi là *các nhân tử Lagrange*.

Ký hiệu $\nabla_x \mathbb{L}$ là gradient của hàm $\mathbb{L}$ theo x. Khi đó, Định lý 6.12 được phát biểu lại theo ngôn ngữ hàm Lagrange như sau

---

[14] theo [34], trang 34.

[15] Joseph Louis LAGRANGE (1736 - 1813): Nhà toán học người Italy gốc Pháp. Ông là người sáng lập ra Viện Hàn lâm Turin ở Italy. Sau đó, ông được vua Phổ Friedrich II với đến làm việc tại Berlin với lời mời khiêm tốn:"Nhà toán học lớn nhất châu Âu cần sống bên cạnh ông vua lớn nhất". Năm 1788, ông đã xây dựng phương pháp này để giải bài toán tối ưu với các ràng buộc đều là đẳng thức.

Định lý 6.14. *Cho các hàm f, g_i, $i = 1, \cdots, m$ và h_j, $j = 1, \cdots, k$ là các hàm khả vi liên tục trên $\mathbb{R}^n$. Giả sử điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P_1^{rb}) và tại đó điều kiện chính quy được thỏa mãn. Khi đó điều kiện KKT sau là đúng*

i) $g_i(x^*) \leq 0, \ i = 1, \cdots, m$ *và* $h_j(x^*) = 0, \ j = 1, \cdots, k;$

ii) *Tồn tại các số thực* $\lambda_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, m$ *và* $\mu_j, \ j = 1, \cdots, k$ *sao cho*

$$\nabla_x \mathbb{L}(x^*, \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_k) = 0 \ \text{và}$$

iii) $\lambda_i g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \cdots, m.$

Chú ý 6.8. i) Dễ thấy

$$\nabla_x \mathbb{L}(x^*, \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_k) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla h_j(x^*);$$

ii) Giả sử f, g_i, $i = 1, \cdots, m$ và h_j, $j = 1, \cdots, k$ là các hàm khả vi liên tục cấp hai trong lân cận của điểm x^* và x^* là một điểm KKT của bài toán (P_1^{rb}). Khi đó, với $d \in \mathbb{R}^n$ có $\|d\|$ đủ nhỏ, khai triển Taylor của hàm Lagrange tại x^* là

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(x^* + d, \lambda, \mu) &= \mathbb{L}(x^*, \lambda, \mu) + d^T \nabla_x \mathbb{L}(x^*, \lambda, \mu) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \mathbb{L}(\xi, \lambda, \mu) d \\ &= \mathbb{L}(x^*, \lambda, \mu) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \mathbb{L}(\xi, \lambda, \mu) d, \end{aligned}$$

trong đó ξ nằm giữa x^* và $x^* + d$, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)^T$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k)^T$. Như đã biết, nếu ma trận $\nabla^2 \mathbb{L}(x^*, \lambda, \mu)$ nửa xác định dương thì $\nabla^2 \mathbb{L}(\xi, \lambda, \mu)$ cũng nửa xác định dương và x^* là một nghiệm cực tiểu địa phương chặt của (P_1^{rb}).

Sau đây là phát biểu lại của Định lý 6.13 cho quy hoạch lồi

$$\min \{f(x) \mid g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \cdots, m\}. \qquad (P_1^{conv})$$

Định lý 6.15. *Giả sử các hàm f, g_i, $i = 1, \cdots, m$ là các hàm lồi khả vi trên một tập mở chứa X và điều kiện Slater được thỏa mãn. Khi đó $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cực tiểu của bài toán (P_1^{conv}) khi và chỉ khi x^* thỏa mãn điều kiện KKT sau:*

i) $g_i(x^*) \leq 0, \ i = 1, \cdots, m;$

ii) *Tồn tại các số thực* $\lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_m \geq 0$ *sao cho*

$$\nabla_x \mathbb{L}(x^*, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = 0 \ \text{và}$$

iii) $\lambda_i g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \cdots, m.$

Trong trường hợp điều kiện chính quy thỏa mãn, theo Định lý 6.14, thuật toán sau cho phép xác định được các điểm KKT của bài toán (P_1^{rb}).

Thuật toán 6.10

Bước 1. Lập hàm Lagrange

$$\mathbb{L}(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_k) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x).$$

Bước 2. Giải hệ KTT sau

$$\begin{cases} \nabla_x \mathbb{L}(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_k) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_m \geq 0 \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \ i = 1, \cdots, m \\ g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \cdots, m \\ h_j(x) = 0, \ j = 1, \cdots, k. \end{cases} \tag{6.19}$$

Mỗi một nghiệm $\bar{x}$ của hệ này tương ứng với một bộ tham số $\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_m, \ \bar{\mu}_1, \cdots, \bar{\mu}_k$ là một điểm KKT của bài toán đang xét.

Chú ý 6.9. i) Nếu bài toán (P_1^{rb}) chỉ có các ràng buộc đẳng thức, tức $m = 0$, thì hệ (6.19) trở thành hệ $n + k$ ẩn, $n + k$ phương trình sau

$$\begin{cases} \nabla_x \mathbb{L}(x, \mu_1, \cdots, \mu_k) = \nabla f(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla h_j(x) = 0 \\ h_1(x) = 0, \cdots, h_k(x) = 0. \end{cases} \tag{6.20}$$

Trong trường hợp này bài toán (P_1^{rb}) thường được gọi là *bài toán trơn với ràng buộc đẳng thức*;

ii) Nếu $k = 0$, tức bài toán chỉ có các ràng buộc bất đẳng thức, thì hệ (6.19) trở thành

$$\begin{cases} \nabla_x \mathbb{L}(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \quad \forall\, i = 1, \cdots, m \\ \lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_m \geq 0 \\ g_1(x) \leq 0, \cdots, g_m(x) \leq 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

Thêm vào đó, nếu các hàm $f, g_i, i = 1, \cdots, m$ là lồi thì bài toán (P_1^{rb}) trở thành bài toán quy hoạch lồi (P_1^{conv}). Khi đó người ta thường gọi bài toán này là *bài toán lồi* *với ràng buộc bất đẳng thức.* Trong trường hợp này, mỗi nghiệm x^* của hệ (6.21) tương ứng với một bộ $\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*$ là một nghiệm cực tiểu của bài toán (Định lý 6.15);

iii) Nếu bài toán (P_1^{rb}) chỉ có một ràng buộc $m = 1$ (hoặc $k = 1$) thì điều kiện chính quy thỏa mãn với mọi x mà tại đó $\nabla g_1(x) \neq 0$ (hoặc $\nabla h_1(x) \neq 0$).

Ví dụ 6.19. Xét bài toán

$$\min\{f(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\}.$$

Tập chấp nhận được của bài toán này là một mặt cầu trong $\mathbb{R}^3$ nên nó là tập compac. Hàm mục tiêu là hàm liên tục. Do đó, theo Định lý Weierstrass (Hệ quả 2.1), bài toán này có nghiệm. Ta có $n = 3$, $m = 0$, $k = 1$, $h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 = 0$,

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \nabla h_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \neq 0 \ \ \forall x \neq 0.$$

Vì vậy điều kiện chính quy được thỏa mãn tại mọi điểm chấp nhận được của bài toán. Quá trình tính toán giải bài toán này theo Thuật toán 6.10 như sau:

- Lập hàm Lagrange

$$\mathbb{L}(x, \mu_1) = f(x) + \mu_1 h_1(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4).$$

- Giải hệ phương trình $n + k = 4$ ẩn, 4 phương trình

$$\begin{cases} \nabla_x \mathbb{L}(x, \mu_1) = 0 \\ h_1(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{L}'_{x_1} = 3x_1^2 + 2\mu_1 x_1 = 0 \\ \mathbb{L}'_{x_2} = 3x_2^2 + 2\mu_1 x_2 = 0 \\ \mathbb{L}'_{x_3} = 3x_3^2 + 2\mu_1 x_3 = 0 \\ \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x_1 + 2\mu_1)x_1 = 0 \\ (3x_2 + 2\mu_1)x_2 = 0 \\ (3x_3 + 2\mu_1)x_3 = 0 \\ \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp có thể xảy ra:

1. Nghiệm $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ có một tọa độ khác 0, hai tọa độ bằng 0. Chẳng hạn,

$$x_1 \neq 0, \ x_2 = x_3 = 0 \implies x^1 = \pm 2 \quad \text{tương ứng với } \mu_1 = \mp 3.$$

Như vậy, trong trường hợp này ta có các điểm KKT sau

$$(\pm 2, 0, 0)^T, \quad (0, \pm 2, 0)^T, \quad \text{và} \quad (0, 0, \pm 2)^T.$$

2. Nghiệm $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ có hai tọa độ khác 0, một tọa độ bằng 0. Chẳng hạn, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 = 0$. Từ hai phương trình đầu suy ra $x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}\mu_1$. Kết hợp

điều này với phương trình cuối, ta có $x_1 = x_2 = \pm\sqrt{2}$ tương ứng với $\mu_1 = \mp\frac{3}{\sqrt{2}}$. Vậy, trong trường hợp này, ta có các điểm KKT sau

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^T,\ (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})^T,\ (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})^T,$$
$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T,\ (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})^T,\ (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})^T.$$

3. Nghiệm $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ có cả ba tọa độ khác 0. Từ ba phương trình đầu suy ra $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{2}{3}\mu_1$. Kết hợp điều này với phương trình cuối, ta được

$$x_1 = x_2 = x_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Trường hợp này có hai điểm KKT là

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^T,\quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^T$$

tương ứng với $\mu_1 = \mp\sqrt{3}$.

Vì tập chấp nhận được của bài toán đang xét là tập compac nên hàm mục tiêu f phải đạt giá trị cực tiểu và giá trị cực đại tại các điểm nào đó thuộc tập các điểm KKT vừa tính được ở trên. Tính toán trực tiếp và so sánh giá trị của hàm f tại các điểm này ta có giá trị cực tiểu của f là -8 tương ứng với ba nghiệm cực tiểu của bài toán là

$$(-2, 0, 0)^T,\ (0, -2, 0)^T,\ (0, 0, -2)^T.$$

Ví dụ 6.20. Xét bài toán tối ưu có ràng buộc

$$\min\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in D,$$

trong đó

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

và hàm mục tiêu lồi chặt $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3(x_1 + x_2 - 2)$ (như hàm mục tiêu trong Ví dụ 6.3).

Bài toán này có $n = 2,\ m = 1,\ k = 0$, $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$. Dễ thấy $f(x)$ và $g_1(x)$ đều là hàm lồi và điều kiện Slater được thỏa mãn, tức tồn tại $\bar{x} \in D$ có $g_1(\bar{x}) < 0$. Do đó, điều kiện chính qui được thỏa mãn tại mọi điểm chấp nhận được của bài toán. Bài toán này là một bài toán quy hoạch lồi. Theo Mệnh đề 2.1, nó có duy nhất nghiệm.

- Hàm Lagrange tương ứng với bài toán này là

$$\mathbb{L}(x, \lambda_1) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

- Giải hệ

$$\begin{cases} \nabla_x \mathbb{L}(x,\lambda_1) = 0 \\ \lambda_1 g_1(x) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ g_1(x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{L}'_{x_1} = 2x_1 + x_2 + 3 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ \mathbb{L}'_{x_2} = x_1 + 2x_2 + 3 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+\lambda_1)x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 + 2(1+\lambda_1)x_2 = -3 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu tiên của hệ này suy ra $x_1 = x_2$.

Nếu $\lambda_1 = 0$ thì ta có $x_1 = x_2 = -1$. Vì điểm $(-1,\ -1)^T$ không phải là điểm chấp nhận được của bài toán đang xét nên kết luận rằng $\lambda_1 \neq 0$.

Do $\lambda_1 \neq 0$ nên từ phương trình thứ ba của hệ này ta có $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Kết hợp với sự kiện $x_1 = x_2$ suy ra $x_1 = x_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

◇ Nếu $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $\lambda_1 < 0$. Điều kiện $\lambda_1 \geq 0$ không được thỏa mãn nên loại trường hợp này.

◇ Nếu $x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $\lambda_1 > 0$. Vậy $x^* = (-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})^T$ là điểm KKT của bài toán này. Vì đây là bài toán quy hoạch lồi nên x^* cũng là nghiệm cực tiểu toàn cục (Định lý 6.15).

Nhận xét 6.9. Qua Ví dụ 6.3 và 6.21 ta thấy rằng với cùng hàm mục tiêu $f(x)$ nhưng nghiệm cực tiểu của bài toán tối ưu không ràng buộc và bài toán tối ưu có ràng buộc khác nhau.

Ví dụ 6.21. Xét bài toán

$$\min\ f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in D,$$

trong đó $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1 \leq 3\}$.

Đây là bài toán quy hoạch lồi với hàm mục tiêu lồi chặt nên nó có một nghiệm cực tiểu (cũng là điểm KKT) duy nhất. Trong bài toán này, $n = 2$, $m = 3$, $g_1(x) = -x_1 + x_2 - 1 \leq 0$; $g_2(x) = -x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$; $g_3(x) = x_1 - 3 \leq 0$.

- Lập hàm Lagrange

$$\mathbb{L}(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\lambda_1(-x_1+x_2-1)+\lambda_2(-x_1-2x_2+2)+\lambda_3(x_1-3).$$

- Hệ KKT tương ứng với bài toán này là

$$\begin{cases}\nabla_x\mathbb{L}(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=0\\ \lambda_i g_i(x)=0, \quad i=1,2,3\\ \lambda_1\ge 0,\ \ \lambda_2\ge 0,\ \ \lambda_3\ge 0\\ g_i(x)\le 0, \quad i=1,2,3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbb{L}'_{x_1}=x_1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \mathbb{L}'_{x_2}=x_2+\lambda_1-2\lambda_2=0\\ \lambda_1(-x_1+x_2-1)=0\\ \lambda_2(-x_1-2x_2+2)=0\\ \lambda_3(x_1-3)=0\\ \lambda_1\ge 0,\quad \lambda_2\ge 0,\quad \lambda_3\ge 0\\ -x_1+x_2-1\le 0\\ -x_1-2x_2+2\le 0\\ x_1-3\le 0.\end{cases} \qquad (6.22)$$

Ta xét các trường hợp có thể xảy ra

1. Nếu $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ thì từ hai phương trình đầu ta có $x_1=x_2=0$. Khi đó, phương trình thứ tám bị vi phạm $\Rightarrow$ Loại trường hợp này.

2. Có $\lambda_1\ne 0$, $\lambda_2=\lambda_3=0$. Khi đó, hệ (6.22) trở thành

$$\begin{cases}x_1-\lambda_1=0\\ x_2+\lambda_1=0\\ -x_1+x_2-1=0\\ \lambda_1>0\\ -x_1+x_2-1\le 0\\ -x_1-2x_2+2\le 0\\ x_1-3\le 0.\end{cases}$$

Suy ra $x_2=-x_1=\lambda_1$, cụ thể $x_2=0.5$, $x_1=-0.5$ và $\lambda_1=-0.5<0$. Do đó loại trường hợp này.

3. Có $\lambda_1=0$, $\lambda_2\ne 0$, $\lambda_3=0$. Khi đó, hệ (6.22) trở thành

$$\begin{cases}x_1-\lambda_2=0\\ x_2-2\lambda_2=0\\ -x_1-2x_2+2=0\\ \lambda_2>0\\ -x_1+x_2-1\le 0\\ -x_1-2x_2+2\le 0\\ x_1-3\le 0.\end{cases}$$

Dễ thấy, $x_2 = 2x_1$ và $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $\lambda_2 = \frac{2}{5} > 0$. Các bất phương trình và phương trình của hệ (6.22) đều thỏa mãn với $x = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})^T$. Ta nhận được điểm KKT $x^* = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})^T$. Vậy, x^* cũng là nghiệm cực tiểu duy nhất của bài toán.

6.2.3 Phương pháp tuyến tính hóa giải quy hoạch lồi

Xét bài toán quy hoạch lồi

$$\min\ f(x)\ \text{ v.đ.k. }\ x \in X, \qquad (P_1^{conv})$$

trong đó $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, m\}$ là tập lồi compac và f, g_i, $i = 1, \cdots, m$ là các hàm lồi khả vi trên $\mathbb{R}^n$.

Bằng việc thêm biến mới t và ràng buộc $t \geq f(x)$, có thể chứng minh rằng (Bài tập) bài toán (P_1^{conv}) tương đương với bài toán sau

$$\begin{aligned} &\min\ t \\ \text{v.đ.k. } & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \cdots, m \\ & g_{m+1}(x) \leq 0, \end{aligned}$$

trong đó $g_{m+1}(x) = f(x) - t$. Vì vậy, ta chỉ cần xét bài toán có dạng

$$\min\ \langle c, x\rangle\ \text{ v.đ.k. }\ x \in X, \qquad (P_2^{conv})$$

trong đó $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m\}$ là tập lồi compac, g_i, $i = 1, \cdots, m$, là các hàm lồi khả vi trên $\mathbb{R}^n$ và $c \in \mathbb{R}^n$.

Ý tưởng của phương pháp xấp xỉ tuyến tính là đưa việc giải bài toán quy hoạch lồi (P_2^{conv}) về việc giải một dãy các bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min\{\langle c, x\rangle \mid x \in X_k\},$$

với X_k, $k = 1, 2, 3, \cdots$, là các đa diện lồi thỏa mãn

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X,$$

mà dãy nghiệm tối ưu $\{x^k\}$ tương ứng của chúng hội tụ đến nghiệm của bài toán này.

Sau đây là thuật toán xấp xỉ tuyến tính giải bài toán (P_2^{conv}) do Keylley đề xuất năm 1960:

Thuật toán 6.11

Bước chuẩn bị Xây dựng đa diện ban đầu X_1 sao cho $X_1 \supseteq X$. (*Cách xây dựng X_1 sẽ được trình bày ngay sau khi mô tả thuật toán*) Đặt $k := 1$.

Bước lặp k, $(k = 1, 2 \cdots)$

(k_1) Giải quy hoạch tuyến tính $\min\{\langle c, x\rangle | x \in X_k\}$ được nghiệm tối ưu x^k.

(k_2) **If** $g_i(x^k) \leq 0 \;\; \forall\, i = 1, \cdots, m$ **Then** Dừng thuật toán

(*lấy* x^k *là nghiệm tối ưu của* (P_2^{conv}))

Else ($\exists j \in \{1, \cdots, m\}$: $g_j(x^k) > 0$) Chuyển Bước k_3;

(k_3) Xác định $g_{i_k}(x^k) = \max\{g_i(x^k) \mid 1 \leq i \leq m\}$ và đặt

$$X_{k+1} := X_k \cap \{x \mid \langle \nabla g_{i_k}(x^k), x - x^k\rangle + g_{i_k}(x^k) \leq 0\}.$$

Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước lặp k.

Lưu ý rằng, tại Bước (k_3) của thuật toán trên:

i) Ta luôn có $\nabla g_{i_k}(x^k) \neq 0$ vì nếu ngược lại thì do g_{i_k} là hàm lồi nên theo Hệ quả 1.4 ta có

$$g_{i_k}(x) \geq g_{i_k}(x^k) + \langle \nabla g_{i_k}(x^k), x - x^k\rangle > 0 \quad \forall x$$

và điều này có nghĩa là tập chấp nhận được X của bài toán đang xét bằng rỗng;

ii) Siêu phẳng

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_{i_k}(x^k), x - x^k\rangle + g_{i_k}(x^k) = 0\}$$

để xây dựng đa diện X_{k+1} được gọi là *siêu phẳng cắt*. Đây chính là siêu phẳng tách tập lồi đóng X và điểm $x^k \notin X$.

Sau đây ta sẽ trình bày **cách xây dựng đa diện lồi xuất phát** $X_1 \supset X$.

Cho trước điểm $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Vì mỗi hàm g_i, $i \in \{1, \cdots, m\}$, là hàm lồi khả vi nên ta có (Hệ quả 1.4)

$$\langle \nabla g_i(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leq g_i(x) - g_i(\bar{x}) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Đặt

$$h_i(x) = \langle \nabla g_i(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle + g_i(\bar{x}).$$

Rõ ràng, với mỗi $i \in \{1, \cdots, m\}$ ta có $h_i(x)$ là hàm afin thỏa mãn

$$h_i(x) \leq g_i(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$h_i(\bar{x}) = g_i(\bar{x}).$$

Đặt $\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \leq 0, \; i = 1, \cdots, m\}$. Dễ thấy $\bar{X}$ là tập lồi đa diện và $X \subset \bar{X}$ (Bài tập).

Về nguyên tắc, ta có thể lấy p $(p \geq 1)$ điểm $\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^p \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_{ij}(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, p\},$$

là một đa diện lồi chứa X, trong đó

$$h_{ij}(x) = \langle \nabla g_i(\bar{x}^j), x - \bar{x}^j \rangle + g_i(\bar{x}^j).$$

Ví dụ 6.22. Xét bài toán

$$\min\ x_1 \ \text{ v.đ.k. } \ x \in D,$$

trong đó $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 4;\ \ x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$.

Bài toán có $n = 2$, $m = 2$,

$$g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0,$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

- *Bước chuẩn bị (Xây dựng đa diện xuất phát D_1)*: Chọn ba điểm

$$\bar{x}^1 = (0,\ 1)^T, \quad \bar{x}^2 = (0,\ -1)^T \ \text{ và } \ \bar{x}^3 = (2,\ 0)^T.$$

◇ Với $\bar{x}^1 = (0,\ 1)^T$:

$$\nabla g_1(\bar{x}^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \ g_1(\bar{x}^1) = -2; \ g_2(\bar{x}^1) = -3.$$

$$\begin{aligned} h_{11}(x) &= \langle \nabla g_1(\bar{x}^1), x - \bar{x}^1 \rangle + g_1(\bar{x}^1) = -2x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0; \\ h_{21}(x) &= \langle \nabla g_2(\bar{x}^1), x - \bar{x}^1 \rangle + g_2(\bar{x}^1) = \qquad\quad 2x_2 - 5 \leq 0. \end{aligned}$$

◇ Với $\bar{x}^2 = (0,\ -1)^T$:

$$\nabla g_1(\bar{x}^2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \ g_1(\bar{x}^2) = -2; \ g_2(\bar{x}^2) = -3.$$

$$\begin{aligned} h_{12}(x) &= \langle \nabla g_1(\bar{x}^2), x - \bar{x}^2 \rangle + g_1(\bar{x}^2) = -2x_1 - 2x_2 - 4 \leq 0; \\ h_{22}(x) &= \langle \nabla g_2(\bar{x}^2), x - \bar{x}^2 \rangle + g_2(\bar{x}^2) = \qquad\ -2x_2 - 5 \leq 0. \end{aligned}$$

◇ Với $\bar{x}^3 = (2,\ 0)^T$:

$$\nabla g_1(\bar{x}^3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}^3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \ g_1(\bar{x}^3) = -3; \ g_2(\bar{x}^3) = 0.$$

$$h_{13}(x) = \langle \nabla g_1(\bar{x}^3), x - \bar{x}^3 \rangle + g_1(\bar{x}^3) = 2x_1 - 7 \leq 0;$$
$$h_{23}(x) = \langle \nabla g_2(\bar{x}^3), x - \bar{x}^3 \rangle + g_2(\bar{x}^3) = 4x_1 - 8 \leq 0.$$

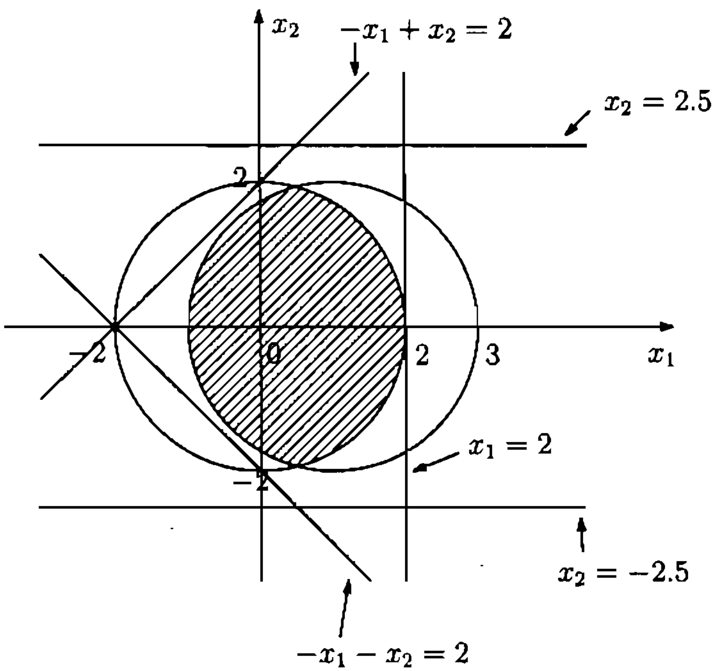
Ta được tập đa diện $D_1 \supset D$ xác định bởi

$$D_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h_{ij}(x) \leq 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3\}.$$

Dễ thấy ràng buộc $h_{22} = 4x_1 - 8 \leq 0$ là thừa. Vì vậy ta có

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 \leq 2;\ \ x_2 \leq 2.5;\ \ -x_1 - x_2 \leq 2;\ \ x_2 \geq -2.5;\ \ x_1 \leq 2\}$$

(xem Minh họa ở Hình 6.12). Đặt $k := 1$ và sang Bước lặp $k = 1$;



Hình 6.12

- *Bước lặp 1.*

Bước 1_1. Giải quy hoạch tuyến tính $\min\{f(x) = x_1 \mid x \in D_1\}$ được nghiệm tối ưu là $x^1 = (-2,\ 0)^T$.

Bước 1_2. Vì $g_1(x^1) = 5 > 0$ nên chuyển Bước 1_3;

Bước 1_3. Ta có $g_1(x^1) = 5 > g_2(x^1) = 0$ nên chọn $i_1 = 1$ và đặt

$$\begin{aligned} D_2 &:= D_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \nabla g_1(x^1), x - x^1 \rangle + g_1(x^1) \leq 0\} \\ &= D_1 \cap \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq -\frac{7}{6}\right\}. \end{aligned}$$

Đặt $k := k + 1 = 2$ và chuyển sang Bước lặp $k = 2$;

- *Bước lặp 2.*

Bước 2_1. Giải quy hoạch tuyến tính $\min\{f(x) = x_1 \mid x \in D_2\}$ được tập nghiệm tối ưu là đoạn $\left[(-\frac{7}{6}, \frac{5}{6})^T, (-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6})^T\right]$. Ta lấy một nghiệm tối ưu đại diện là $x^2 = (-\frac{7}{6}, 0)^T$.

Bước 2_2. Vì $g_1(x^2) = \frac{25}{36} > 0$ nên chuyển Bước 2_3;

Bước 2_3. Vì $g_1(x^2) = \frac{25}{36} > g_2(x^2) = -\frac{95}{36}$ nên chọn $i_2 = 1$ và đặt

$$\begin{aligned} D_3 &:= D_2 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \nabla g_1(x^2), x - x^2 \rangle + g_1(x^2) \leq 0\} \\ &= D_2 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq -\frac{157}{156}\}. \end{aligned}$$

Đặt $k := k + 1 = 3$ và chuyển sang Bước lặp $k = 3$.

- *Bước lặp 3.*

Bước 3_1. Giải quy hoạch tuyến tính $\min\{f(x) = x_1 \mid x \in D_3\}$ và lấy một nghiệm tối ưu đại diện là $x^3 = (-\frac{157}{156}, 0)^T$.

Bước 3_2. Vì $g_1(x^3) \approx 0.025682 > 0$ nên chuyển Bước 2_3;

Bước 3_3. Vì $g_1(x^3) \approx 0.025682 > g_2(x^3) \approx -2.98714$ nên chọn $i_3 = 1$ và đặt

$$\begin{aligned} D_4 &:= D_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \nabla g_1(x^3), x - x^3 \rangle + g_1(x^3) \leq 0\} \\ &= D_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq -0.9978886\}. \end{aligned}$$

Đặt $k := k + 1 = 4$ và chuyển sang Bước lặp $k = 4$.

- *Bước lặp 4.*

Bước 4_1. Giải quy hoạch tuyến tính $\min\{f(x) = x_1 \mid x \in D_3\}$ và lấy một nghiệm tối ưu đại diện là $x^4 = (-0.9978886, 0)^T$.

Bước 4_2. Vì $g_1(x^4) \approx 0.008441142 \approx 0$ và $g_2(x^4) \approx -3.0042183 < 0$ nên Dừng thuật toán và lấy nghiệm xấp xỉ là $x^* = (-0.9978886, 0)^T$.

Bằng biểu diễn hình học, dễ thấy rằng nghiệm tối ưu của bài toán này là $(-1, 0)^T$.

Định lý 6.16. (Định lý hội tụ) ([26], trang 53) *Giả sử rằng $g_1, \cdots, g_m$ là các hàm lồi khả vi và tập chấp nhận được X của bài toán (P_2^{conv}) là tập compac. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh ra bởi Thuật toán 6.11 có một dãy con hội tụ đến nghiệm cực tiểu của bài toán.*

6.2.4 Phương pháp hướng có thể giải bài toán cực tiểu hàm trơn với ràng buộc tuyến tính

Xét bài toán

$$\min\ f(x) \text{ v.đ.k. } x \in X, \qquad (P_2^{rb})$$

trong đó f là hàm khả vi trên $\mathbb{R}^n$ và $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện khác rỗng xác định bởi

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ Ex = e\},$$

với A là ma trận cấp $m \times n$ với các hàng $a^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \cdots, m$, E là ma trận cấp $k \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ và $e \in \mathbb{R}^k$.

Ý tưởng của *phương pháp hướng có thể* (Method of feasible direction) do Zoutendijk đề xuất năm 1960 để giải bài toán (P_2^{rb}) là: Xuất phát từ một điểm chấp nhận được bất kỳ $x^0 \in X$, ta xây dựng một dãy điểm $x^1, x^2, x^3, \cdots$ sao cho:

$$x^{k+1} := x^k + t_k d^k \in X \ \text{ với } \ t_k > 0, \qquad f(x^{k+1}) < f(x^k) \qquad (6.23)$$

và dãy $\{x^k\}$ hội tụ đến x^* là một điểm KKT của bài toán đang xét. Véc tơ d^k thỏa mãn (6.23) là một hướng giảm chấp nhận được của bài toán (P_2^{rb}) và t_k là độ dài bước. Do tập chấp nhận được là tập lồi đa diện nên nếu hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm lồi thì điểm x^* này cũng chính là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán đang xét (Mệnh đề 2.1).

a. Cơ sở lý thuyết

Định nghĩa. Cho điểm $x^0 \in X$. Véc tơ $d \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một *hướng có thể* (hay *hướng chấp nhận được*) (feasible direction) của tập X tại x^0 nếu tồn tại một số $t_* > 0$ sao cho

$$x^0 + td \in X \ \text{ với mọi } \ t \text{ thỏa mãn } 0 < t \leq t_*,$$

nghĩa là khi di chuyển từ điểm x^0 theo hướng d một đoạn đủ nhỏ ta sẽ không đi vượt ra ngoài miền chấp nhận được X. Ký hiệu $F(X, x^0)$ là tập các hướng chấp nhận được của tập X tại x^0.

Nhận xét 6.10. i) Bao đóng của tập các hướng chấp nhận được của X tại $x^0 \in X$ bằng nón tiếp xúc với tập X tại x^0, tức

$$\text{cl}F(X, x^0) = T(X, x^0);$$

ii) Nếu X là tập lồi thì $x - x^0$ là hướng chấp nhận được của tập X tại $x^0 \in X$ với mọi $x \in X$ (Bài tập).

Định nghĩa. Véc tơ $d \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *hướng dùng được* (usable feasible direction) hoặc *hướng giảm chấp nhận được* (improving feasible direction) của bài toán (P_2^{rb}) tại x^0 nếu nó vừa là hướng giảm của hàm f tại x^0, vừa là hướng chấp nhận được của tập X tại x^0, tức tồn tại một số $t_* > 0$ sao cho

$$x^0 + td \in X \text{ và } f(x^0 + td) < f(x^0) \text{ với mọi } t \text{ thỏa mãn } 0 \le t \le t_*.$$

Cho điểm chấp nhận được x^k. Ký hiệu

$$I(x^k) := \left\{ i \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; \langle a^i, x^k \rangle = b_i \right\}.$$

Mệnh đề sau đây chỉ ra điều kiện cần và đủ để một véc tơ $d \in \mathbb{R}^n$ là hướng chấp nhận được của tập X.

Mệnh đề 6.7. *Cho điểm $x^k \in X$. Khi đó vec tơ d là hướng chấp nhận được của X tại x^k khi và chỉ khi $\langle a^i, d \rangle \le 0$ với mọi $i \in I(x^k)$ và $Ed = 0$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử $d \in \mathbb{R}^n$ là hướng chấp nhận được của X tại x^k. Theo định nghĩa, tồn tại số thực $t_* > 0$ sao cho với mọi $t \in (0, t_*]$ ta có $x^k + td \in X$, tức

$$\langle a^i, x^k + td \rangle = \langle a^i, x^k \rangle + t\langle a^i, d \rangle \le b_i, \ \forall\, i = 1, \cdots, m, \tag{6.24}$$

và

$$E(x^k + td) = \underbrace{Ex^k}_{=e} + tEd = e. \tag{6.25}$$

Từ (6.24) suy ra $\langle a^i, d \rangle \le 0$ với mọi $i \in I(x^k)$ vì $\langle a^i, x^k \rangle = b_i$ với mọi $i \in I(x^k) \subset \{1, \cdots, m\}$ và $t > 0$. Còn biểu thức $Ed = 0$ dễ dàng nhận được từ (6.25).

($\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử $\langle a^i, d \rangle \le 0$ với mọi $i \in I(x^k)$ và $Ed = 0$. Khi đó ta có

$$E(x^k + td) = Ex^k + tEd = e \quad \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa,

- Với mỗi $i \in I(x^k)$ ta có

$$\langle a^i, x^k + td \rangle = \langle a^i, x^k \rangle + t\langle a^i, d \rangle \le \langle a^i, x^k \rangle = b_i, \ \forall\, t > 0.$$

- Với mỗi $i \notin I(x^k)$ ta có $\langle a^i, x^k \rangle < b_i$ và

$$\langle a^i, x^k + td \rangle = \langle a^i, x^k \rangle + t\langle a^i, d \rangle < b_i + t\langle a^i, d \rangle.$$

Do đó, nếu $\langle a^i, d \rangle \le 0$ thì $\langle a^i, x^k + td \rangle < b_i$ với mọi $t > 0$. Còn nếu $\langle a^i, d \rangle > 0$ thì

$$\langle a^i, x^k + td \rangle < b_i \ \text{ với mọi } \ t \le \frac{b_i - \langle a^i, x^k \rangle}{\langle a^i, d \rangle}.$$

Bây giờ, đặt

$$t_* = \min\left\{\frac{b_i - \langle a^i, x^k\rangle}{\langle a^i, d\rangle} \;\Big|\; i \notin I(x^k) \text{ và } \langle a^i, d\rangle > 0\right\}.$$

Ta có $x^k + td \in X$ với mọi $t \in (0, t_*]$, chứng tỏ d là hướng chấp nhận được của X tại x^k. □

Nhận xét 6.11. Cho điểm chấp nhận được $x^k \in X$ và véc tơ $d^k \in R^n$. Kí hiệu

$$I^* = \left\{i \in \{1, \cdots, m\} \setminus I(x^k) \;\Big|\; \langle a^i, d^k\rangle > 0\right\}.$$

Khi đó $x^k + td^k \in X$ với mọi $t \in (0, t_*]$, trong đó

$$t_* = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{b_i - \langle a^i, x^k\rangle}{\langle a^i, d\rangle} \;\Big|\; i \in I^d\right\}, & \text{nếu } I^* \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{nếu } I^* = \emptyset. \end{cases} \tag{6.26}$$

Mệnh đề 6.8. *Nếu véc tơ $d \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn*

$$\langle a^i, d\rangle \leq 0, \;\; \forall \; i \in I(x^k); \quad Ed = 0$$

và

$$\langle \nabla f(x^k), d\rangle < 0$$

thì d là hướng giảm chấp nhận được của bài toán (P_2^{rb}).

Chứng minh. Suy trực tiếp từ Mệnh đề 6.1 và Mệnh đề 6.7. □

Mệnh đề 6.9. *Điểm x^k là điểm KKT của bài toán (P_2^{rb}) khi và chỉ khi bài toán quy hoạch tuyến tính sau có giá trị tối ưu bằng* 0

$$\begin{aligned} \min \;\; & \langle \nabla f(x^k), d\rangle, \\ \text{v.đ.k.} \;\; & \langle a^i, d\rangle \leq 0, \;\; \forall i \in I(x^k) \\ & Ed = 0, \\ & -1 \leq d_i \leq 1, \;\; \forall i = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Chứng minh. Xem [1], trang 411-412. □

b. Thuật toán 6.12 (*Giải bài toán* (P_2^{rb}))

Bước khởi đầu. Xác định một đỉnh $x^0 \in X$ (có thể dùng pha I của thuật toán đơn hình). Đặt $k = 0$.

Bước lặp k, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

(k_1) Giải quy hoạch tuyến tính (6.27) được nghiệm tối ưu d^k.
If $\langle \nabla f(x^k), d^k \rangle = 0$ **Then** Dừng thuật toán (*x^k là điểm KKT*)
Else Chuyển Bước (k_2) ;

(k_2) Tính t_* theo công thức (6.26);

(k_3) Xác định $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$, trong đó t_k là nghiệm của bài toán cực tiểu hàm một biến

$$\min \left\{ f(x^k + td^k) \mid t \in [0, t_*] \right\};$$

(k_4) Đặt $k := k + 1$ và quay về Bước lặp k.

Chú ý 6.10. Như đã thấy, Thuật toán 6.12 giải bài toán (P_2^{rb}) rất đơn giản, nhưng rất tiếc, nói chung, tính hội tụ của thuật toán không được đảm bảo. Năm 1967, Topkis và Veinott đã cải tiến nó và nhận được thuật toán hội tụ giải bài toán này (xem [1], trang 423-432). Mục tiếp theo đây sẽ trình bày một thuật toán hội tụ thường được sử dụng để giải bài toán (P_2^{rb}) trong trường hợp hàm mục tiêu f là hàm lồi.

6.2.5 Phương pháp Frank-Wolfe giải bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc tuyến tính

Xét quy hoạch lồi

$$\min\ f(x) \ \text{ v.đ.k. } \ x \in X, \qquad (P_3^{conv})$$

trong đó f là hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$ và $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện xác định bởi

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\},$$

với A là ma trận cấp $m \times n$ và véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$.

Mục này trình bày thuật toán Frank và Wolfe đề xuất năm 1956 để giải bài toán (P_3^{conv}) với giả thiết hàm tuyến tính $\langle \nabla f(\hat{x}), x \rangle$ bị chặn dưới trên X với mỗi $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Hiển nhiên rằng nếu X là đa diện thì giả thiết này luôn được thỏa mãn.

Cho điểm chấp nhận được $x^k \in X$. Vì X là đa diện lồi nên $x - x^k$ là hướng chấp nhận được của X tại x^k với mọi $x \in X$ (Nhận xét 6.10 (ii)). Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min\{\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle \mid x \in X\}.$$

Giả sử $u^k \in X$ là nghiệm tối ưu của bài toán này. Khi đó:

◇ Nếu giá trị tối ưu $\langle \nabla f(x^k), u^k - x^k \rangle \ge 0$ thì $\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle \ge 0$ với mọi $x \in X$. Theo Hệ quả 6.3, $x^{opt} = x^k$ là nghiệm cực tiểu của bài toán đang xét.

◇ Ngược lại, nếu giá trị tối ưu $\langle \nabla f(x^k), u^k - x^k \rangle < 0$ thì $u^k - x^k$ là một hướng giảm chấp nhận được của bài toán (P_3^{conv}) (Mệnh đề 6.2).

Sau đây là thuật toán Frank-Wolfe giải bài toán quy hoạch lồi (P_3^{conv})

Thuật toán 6.13. (*Thuật toán Frank-Wolfe*)

Bước khởi đầu. Tìm một điểm bất kỳ $x^0 \in X$. Đặt $k := 0$;

Bước lặp k, $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

(k_1) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min \left\langle \nabla f(x^k), x - x^k \right\rangle \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in X$$

được phương án tối ưu $u^k \in X$;

(k_2) (*kiểm tra điều kiện tối ưu*)

If $\left\langle \nabla f(x^k), u^k - x^k \right\rangle \geq 0$ **Then** Dừng thuật toán (*lấy* $x^{opt} := x^k$)

Else Đặt $d^k := u^k - x^k$ và chuyển Bước (k_3);

(k_3) Xác định điểm $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$, trong đó

$$t_k = \text{argmin}\left\{ \varphi(t) = f(x^k + td^k) \mid t \in [0, 1] \right\}.$$

(k_4) **If** $\nabla f(x^{k+1}) \approx 0$ **Then** Dừng thuật toán $(x^{opt} := x^{k+1})$

Else Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước lặp k.

Định lý 6.17. *Giả sử f là hàm lồi chặt trên $\mathbb{R}^n$ và $X \subset \mathbb{R}^n$ là đa diện khác rỗng. Khi đó, xuất phát từ một điểm bất kỳ $x^0 \in X$, dãy $\{x^k\}$ sinh ra bởi Thuật toán Frank-Wolfe có tính chất: Dãy $\{f(x^k)\}$ là dãy số giảm, hội tụ đến giá trị tối ưu f_{opt} của bài toán (P_3^{conv}) và*

$$0 \leq f(x^k) - f_{opt} \leq \langle \nabla f(x^k), x^k - u^k \rangle \quad \forall k.$$

Chứng minh. Xem [31] (trang 116-117) hoặc [36] (trang 356-358) . □

Ví dụ 6.23. Xét lại bài toán đã xét ở Ví dụ 6.21,

$$\min \ f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in D,$$

trong đó $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1 \leq 3\}$.

Ta có

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ và } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ là hàm lồi chặt.}$$

Xuất phát từ $x^0 = (0,\ 1)^T$ với $\nabla f(x^0) = (0,\ 1)^T$. Đặt $k = 0$.

Bước lặp $k = 0$.

0.1. Giải bài toán $\min \left\{ \langle \nabla f(x^0), x\rangle = x_2 \mid x \in D \right\}$ được phương án cực biên tối ưu là $u^0 = (3,\ -\frac{1}{2})^T$.

0.2. Vì

$$\langle \nabla f(x^0), u^0 - x^0 \rangle = (\nabla f(x^0))^T (u^0 - x^0) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} < 0$$

nên x^0 chưa phải nghiệm tối ưu.

0.3. Đặt $d^0 := u^0 - x^0 = (3,\ -\frac{3}{2})^T$. Ta có d^0 là hướng giảm chấp nhận được của bài toán đang xét tại x^0.

0.4. Tìm điểm chấp nhận được x^1: Ta có

$$x^0 + td^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 1 - \dfrac{3}{2}t \end{pmatrix};$$

Xét hàm lồi một biến

$$\varphi(t) := f(x^0 + td^0) = f\Big(3t,\ 1 - \frac{3}{2}t\Big) = \frac{1}{2}\Big(3t\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{3}{2}t\Big)^2 \quad \text{với } 0 \le t \le 1.$$

Ta có

$$\varphi'(t) = \frac{45}{4}t - \frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$\varphi'(t) = 0 \iff t = \frac{2}{15}.$$

Vậy

$$t_0 = \frac{2}{15} \text{ và } x^1 = x^0 + t_0 d^0 = \Big(\frac{2}{5}\ ,\ \frac{4}{5}\Big)^T.$$

Vì $\nabla f(x^1) = \left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)^T \neq (0,\ 0)^T$ nên đặt $k := k + 1 = 1$ và chuyển Bước lặp $k = 1$

Bước lặp $k = 1$.

1.1. Giải

$$\min\left\{ \langle \nabla f(x^1), x\rangle = \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 \;\Big|\; x \in D\right\}.$$

Bài toán này có hai phương án cực biên tối ưu là $(0\ ,\ 1)^T$ và $(3\ ,\ -\frac{1}{2})^T$. Giả sử ta chọn $u^1 = (0\ ,\ 1)^T$.

1.2. Khi đó

$$\left\langle \nabla f(x^1), u^1 - x^1 \right\rangle = \left(\nabla f(x^1)\right)^T (u^1 - x^1) = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5}\end{pmatrix} = 0.$$

Vậy $x^{opt} = x^1 = (\frac{2}{5}\ ,\ \frac{4}{5})^T$.

(Nếu trong Bước 1.1 ta chọn $u^1 = (3\ ,\ -\frac{1}{2})^T$ thì

$$\left\langle \nabla f(x^1), u^1 - x^1 \right\rangle = \left(\nabla f(x^1)\right)^T (u^1 - x^1) = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ -\frac{13}{10}\end{pmatrix} = 0.$$

Do đó ta cũng kết luận được nghiệm tối ưu $x^{opt} = x^1 = (\frac{2}{5}\ ,\ \frac{4}{5})^T$.

6.2.6 Phương pháp hàm phạt

Xét bài toán

$$\min\{f(x) \mid x \in D\}, \qquad (P_3^{rb})$$

trong đó D là tập compac xác định bởi

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, \cdots, m\},$$

f và $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, là các hàm khả vi liên tục.

Ý tưởng cơ bản của phương pháp hàm phạt là thay vì giải bài toán tối ưu có ràng buộc (P_3^{rb}) ta giải một dãy bài toán tối ưu không ràng buộc với hàm mục tiêu phụ thuộc tham số α

$$\min\ f(x) + \alpha p(x) \ \text{ v.đ.k. } \ x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $p(x)$ là *hàm phạt*, sao cho dãy nghiệm tương ứng của các bài toán không ràng buộc này hội tụ đến nghiệm tối ưu của bài toán (P_3^{rb}).

Mục này trình bày hai cách tiếp cận của phương pháp hàm phạt: Phương pháp hàm phạt điểm ngoài (Exterior penalty function method) và Phương pháp hàm phạt điểm trong (Interior penalty function method).

a. Phương pháp hàm phạt điểm ngoài

Trong phương pháp này, hàm phạt $p(x)$ được định nghĩa bởi

$$p(x) = \sum_{i=1}^{m} \Phi(g_i(x)),$$

trong đó Φ là hàm một biến liên tục và thỏa mãn

$$\Phi(y) = 0 \text{ nếu } y \le 0 \;\text{ và }\; \Phi(y) > 0 \text{ nếu } y > 0.$$

Thông thường, hàm $p(x)$ có dạng

$$p(x) := \sum_{i=1}^{m} \max\Big\{0,\ g_i(x)\Big\} \quad \text{hoặc} \quad p(x) := \sum_{i=1}^{m} \Big[\max\{0,\ g_i(x)\}\Big]^2.$$

Hàm mục tiêu của dãy bài toán tối ưu không ràng buộc tương ứng với bài toán (P_3^{rb}) là

$$\varphi(x, \alpha) = f(x) + \alpha_k p(x),$$

trong đó dãy tham số $\{\alpha_k\}$ là dãy số dương, đơn điệu tăng đến ∞.

Đại lượng $\alpha_k p(x)$ là *lượng phạt*. Dễ thấy rằng khi x là phương án chấp nhận được của bài toán (P_3^{rb}) thì nó không bị phạt (lượng phạt bằng 0), nhưng khi x không phải là phương án chấp nhận được thì nó phải chịu một lượng là $\alpha_k p(x)$.

Ví dụ 6.24. Xét bài toán $\min\{x \mid -x + 5 \le 0\}$.

Bài toán này có $f(x) = x$, $m = 1$ và $g_1(x) = -x + 5 \le 0$. Đặt

$$p(x) = \Big[\max\{0,\ g_1(x)\}\Big]^2.$$

Khi đó

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \ge 5 \\ (-x+5)^2 & \text{nếu } x < 5. \end{cases}$$

Thuật toán 6.14

Bước chuẩn bị. Cho số $\varepsilon > 0$ đủ bé (để kiểm tra điều kiện dừng của thuật toán). Chọn một điểm $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Chọn một tham số phạt $\alpha_1 > 0$ và một số $\mu > 1$. Đặt $k = 1$;

Bước lặp k, $(k = 1, 2, \cdots)$

Bước k_1. Xuất phát từ x^k, giải bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min\ \varphi(x, \alpha_k) \ \text{ v.đ.k } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Gọi nghiệm của bài toán này là x^{k+1}.

Bước k_2. **If** $\alpha_k p(x^{k+1}) < \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán

(lấy x^{k+1} là nghiệm tối ưu của bài toán (P_3^{rb}))

Else Chuyển Bước k_3;

Bước k_3. Đặt tham số phạt mới $\alpha_{k+1} := \mu\alpha_k$. Đặt $k := k + 1$ và chuyển về Bước lặp k.

Định lý 6.18. *Thuật toán 6.14 có các tính chất sau:*

i) $\varphi(x, \alpha) \geq f(x)$ với mọi $\alpha > 0$;

ii) Dãy $\{\varphi(x^k, \alpha_k)\}$ là đơn điệu tăng;

iii) $\{\varphi(x^k, \alpha_k)\}$ hội tụ đến giá trị tối ưu của bài toán (P_3^{rb}) khi $\{\alpha_k\} \to \infty$.

Chứng minh. Xem [26], trang 59. □

b. Phương pháp hàm phạt điểm trong

Phương pháp này được sử dụng khi biết trước một điểm trong x^1 của tập chấp nhận được, tức $g_i(x^1) < 0$ với mọi $i = 1, \cdots, m$. Hàm phạt $p(x)$ phải thỏa mãn tính chất:

i) không âm và liên tục trên tập $\text{int}D = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) < 0, \quad i = 1, \cdots, m\}$;

ii) $p(x) \to +\infty$ khi $g_i(x) \to 0^-$.

Vì vậy, người ta còn gọi hàm phạt $p(x)$ này là *hàm chắn* (barrier function). Hai hàm chắn điển hình thường được sử dụng là

$$p(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln[-g_i(x)]$$

và

$$p(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}.$$

Phương pháp hàm phạt điểm trong xuất phát từ một điểm trong x^1 của tập chấp nhận được D, giải một dãy các bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min\ \psi(x, \alpha_k) = f(x) + \alpha_k p(x) \quad \text{v.đ.k.}\ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $\{\alpha_k\}$ là dãy tham số dương, giảm đơn điệu về 0.

Thuật toán 6.15

Bước chuẩn bị. Cho số $\varepsilon > 0$ đủ bé (để kiểm tra điều kiện dừng của thuật toán). Xác định một điểm $x^1 \in D$ thỏa mãn $g_i(x^1) < 0$, $i = 1, \cdots, m$. Chọn một tham số phạt $\alpha_1 > 0$ và một số $\mu \in (0, 1)$. Đặt $k = 1$;

Bước lặp k, $(k = 1, 2, \cdots)$
Bước k_1. Xuất phát từ x^k, giải bài toán tối ưu không ràng buộc

$$\min\ \psi(x, \alpha_k) \ \text{ v.đ.k. } \ x \in \mathbb{R}^n$$

nhận được nghiệm x^{k+1};

Bước k_2. **If** $\alpha_k p(x^{k+1}) < \varepsilon$ **Then** Dừng thuật toán
(*lấy* x^{k+1} *là nghiệm tối ưu của bài toán* (P_3^{rb}))
Else Chuyển Bước k_3;

Bước k_3. Đặt tham số phạt mới $\alpha_{k+1} := \mu\alpha_k$. Đặt $k := k + 1$. Chuyển về Bước lặp k.

Định lý 6.19. *Thuật toán 6.15 có các tính chất sau:*
i) $\psi(x, \alpha) \geq f(x)$ *với mọi* $\alpha > 0$;
ii) $g_i(x^k) < 0, \ \ i = 1, \cdots, m$;
iii) $\{\psi(x^k, \alpha_k)\}$ *hội tụ đến giá trị tối ưu của bài toán* (P_3^{rb}) *khi* $\{\alpha_k\} \to 0$.

Chứng minh. Xem [26], trang 57 - 58. □

Ví dụ 6.25. Xét bài toán

$$\begin{aligned} \min\ \ & f(x) = x_1 - 2x_2 \\ \text{v.đ.k. } & g_1(x) = -1 - x_1 + x_2^2 \leq 0 \\ & g_2(x) = -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Ta chọn hàm chắn có dạng

$$p(x) = -\ln[-g_1(x)] + \ln[-g_2(x)] = -\ln(1 + x_1 - x_2^2) - \ln(x_2).$$

Khi đó, hàm mục tiêu của các bài toán không ràng buộc tương ứng là

$$\psi(x, \alpha) = x_1 - 2x_2 - \alpha\ln(1 + x_1 - x_2^2) - \alpha\ln(x_2),$$

trong đó α là tham số chắn, dương và giảm đơn điệu về 0.

Với mỗi tham số α cụ thể, bài toán không ràng buộc

$$\min\{\psi(x, \alpha) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

có hàm mục tiêu $\psi(x, \alpha)$ là hàm lồi chặt theo biến x nên, theo Mệnh đề 2.1 và Định lý 6.2, nó có nghiệm cực tiểu duy nhất cũng chính là điểm dừng. Ta có

$$\begin{aligned} \psi'_{x_1}(x, \alpha) &= 1 - \frac{\alpha}{1 + x_1 - x_2^2}, \\ \psi'_{x_2}(x, \alpha) &= -2 + \frac{2\alpha x_2}{1 + x_1 - x_2^2} - \frac{\alpha}{x_2}. \end{aligned}$$

Các điểm $x = (x_1, x_2)^T$ thuộc phần trong của tập chấp nhận được có

$$1 + x_1 - x_2^2 > 0 \quad \text{và} \quad x_2 > 0.$$

Giải hệ phương trình

$$\nabla_x \psi(x, \alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{1 + x_1 - x_2^2} = 0 \\ -2 + \dfrac{2\alpha x_2}{1 + x_1 - x_2^2} - \dfrac{\alpha}{x_2} = 0 \end{cases}$$

ta nhận được điểm dừng $x^*(\alpha) = \Big(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha)\Big)^T$ với

$$x_1^*(\alpha) = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha} + 3\alpha - 1}{2}, \qquad x_2^*(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{1 + 2\alpha}}{2}.$$

Vì tham số $\alpha > 0$ và giảm dần về 0 nên

$$\lim_{\alpha \to 0^+} x_1^*(\alpha) = \frac{\sqrt{1 + 2(0)} + 3(0) - 1}{2} = 0,$$
$$\lim_{\alpha \to 0^+} x_2^*(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{1 + 2(0)}}{2} = 1.$$

Ta có điểm $(0, 1)^T$ thuộc tập chấp nhận được và là nghiệm tối ưu của bài toán cần giải.

Bảng 6.2 trình bày giá trị của $x_1^*(\alpha)$ và $x_2^*(\alpha)$ với các tham số $\alpha_1 = 10$, $\mu = 10^{-1}$

$$\alpha_{k+1} = \mu \alpha_k, \quad k = 1, 2, \cdots, 6.$$

Rõ ràng $\left\{ x^*(\alpha_k) = \Big(x_1^*(\alpha_k)\ ,\ x_1^*(\alpha_k)\Big)^T \right\}$ hội tụ đến nghiệm tối ưu của bài toán đang xét.

Bảng 6.2

k	α_k	$x_1^*(\alpha_k)$	$x_2^*(\alpha_k)$
1	10^0	1.8660254	1.3660254
2	10^{-1}	0.1977226	1.0477226
3	10^{-2}	0.0199752	1.0049752
4	10^{-3}	0.0019998	1.0004998
5	10^{-4}	0.0002000	1.0000500
6	10^{-5}	0.0000200	1.0000050
7	10^{-6}	0.0000020	1.0000005

Bài tập Chương 6

1. Xét bài toán

$$\min\ f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$$
$$\text{v.đ.k.}\quad x_2 \geq x_1^2$$
$$x_2 \leq 4.$$

Viết điều kiện cần của nghiệm tối ưu và kiểm tra xem nó có thỏa mãn tại điểm $x^0 = (2,4)^T$. Điểm x^0 có phải nghiệm tối ưu của bài toán này không? Vì sao?

2. Cho điểm $x^0 = (2,1)^T \in \mathbb{R}^2$, véc tơ $d = (3,-1)^T$ và hàm số

$$f(x) = x_2 e^{-(x_1+x_2)}.$$

i) Vẽ tập các điểm $\{x = x^0 + td \mid t \geq 0\}$;

ii) Véc tơ d có phải là hướng giảm của hàm f tại x^0 không? Vì sao?

3. Cho hàm toàn phương $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$, với A là ma trận cấp $n \times n$, đối xứng, xác định dương, véc tơ $b \in \mathbb{R}^n$ và số thực $c \in \mathbb{R}$. Nói rằng việc giải bài toán $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ được đưa về việc tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$Ax + b = 0$$

có đúng không? Vì sao? Cho ví dụ cụ thể.

4. Cho hàm toàn phương $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, với A là ma trận cấp $n \times n$, đối xứng, véc tơ $b \in \mathbb{R}^n$.

i) Viết điều kiện cần bậc một và bậc hai của nghiệm tối ưu địa phương. Với điều kiện gì thì hàm $f(x)$ có một điểm dừng?

ii) Khi nào thì hàm $f(x)$ có cực tiểu địa phương?

iii) Với điều kiện nào thì hàm $f(x)$ có một điểm dừng nhưng đó không phải cực tiểu địa phương, cũng không phải cực đại địa phương?

5. Cho hàm số $f(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2$, trong đó α là một số thực.

i) Xác định điểm dừng của $f(x)$ với mỗi giá trị của α?

ii) Xác định điểm cực đại địa phương và cực tiểu địa phương tương ứng với một giá trị cụ thể nào đó của α. Hàm $f(x)$ đó có điểm cực đại toàn cục hoặc cực tiểu toàn cục không? Vì sao?

6. Xét hàm số $f(x,y) = e^{3y} - 3xe^y + x^3$. Chứng minh rằng điểm $(1,0)^T$ là điểm tối ưu địa phương của hàm f nhưng không phải điểm tối ưu toàn cục.

7. Giải $\min\{f(x),\ x \in \mathbb{R}^n\}$ với

   i) $f(x) = 15 - 12x - 25x^2 + 2x^3$ (tức $n = 1$);

   ii) $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 15x - 3$ (tức $n = 1$);

   iii) $f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29$;

   iv) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$.

8. Cho hàm số $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{x_1+x_2}$.

   Điểm $x = (0,0)^T$ có phải điểm cực tiểu địa phương của hàm f không? Nếu không, tìm một hướng d sao cho hàm f giảm theo d?

9. Cho $f(x)$ là hàm lồi khả vi, xác định trên tập lồi đa diện $X \subset \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng $x^* \in X$ là nghiệm cực tiểu của bài toán $\min\{f(x), x \in X\}$ khi và chỉ khi

$$0 = \min_{x \in X} \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle.$$

   Kết luận này có ý nghĩa gì?

10. Nêu định nghĩa hướng giảm của hàm f tại x^*, điều kiện đủ để nhận biết hướng giảm.

11. Trình bày phương pháp hướng giảm nhanh nhất.

   i) Xét bài toán

$$\min\{f(u) = u_1^2 + 2u_2^2 : u \in \mathbb{R}^2\}.$$

   Lấy $u^0 = (2,1)^T$. Tính ba điểm tiếp theo u^1, u^2, u^3 theo phương pháp hướng giảm nhanh nhất. Chứng minh rằng dãy $\{u^k\}$ sinh ra bởi thuật toán hướng giảm nhanh nhất với thủ tục tìm chính xác theo tia có

$$u^k = \left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad f(u^{k+1}) = \frac{f(u^k)}{9}.$$

   ii) Xét bài toán

$$\min\{f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 3x_1 \mid x \in \mathbb{R}^2\}.$$

   Lấy $x^0 = (2,2)^T$. Tính ba điểm tiếp theo x^1, x^2, x^3 theo phương pháp giảm nhanh nhất.

   iii) Cho

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

   với

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Xuất phát từ $x^0 = (0,\ 0,\ 0)^T$, áp dụng Thuật toán 6.1, trình bày 3 bước lặp giải bài toán $\min\{f(x)|x \in \mathbb{R}^3\}$ với $\gamma = 1,\ 10,\ 100,\ 1000$.

12. Nêu định nghĩa hướng chấp nhận được tại $x^* \in D \subset \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu D là tập lồi thì $x - x^*$ là hướng chấp nhận được tại x^* với mọi $x \in D$.

13. Phát biểu điều kiện cần của điểm cực tiểu địa phương của bài toán

$$\min\{f(x), x \in \mathbb{R}^n\}$$

và bài toán

$$\min\{f(x)\ x \in D \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Khi f là hàm lồi và D là tập lồi thì có kết luận gì. Lấy ví dụ để cùng hàm mục tiêu f nhưng hai bài toán này có nghiệm tối ưu khác nhau.

14. Hàm một biến $f(x) = -\ln(x)$ có phải hàm lồi không? Hãy giải thích bằng ít nhất 2 cách.

15. Xét bài toán $\min\{f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \mid Ax \leq b\}$, trong đó Q là ma trận đối xứng xác định dương, không suy biến cấp $(n \times n)$, ma trận A cấp $(m \times n)$, véc tơ $c, x \in \mathbb{R}^n$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Viết điều kiện Kuhn-Tucker cho bài toán này.

16. Sử dụng Định lý Karush-Kuhn-Tucker tìm nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán của các bài toán sau. Giải thích chi tiết từng điều kiện áp dụng và cách lấy nghiệm.

    i) $\min\{f(x) = x_1 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$

    ii) $\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0\}$.

17. Trình bày phương pháp nhân tử Langrange giải bài toán trơn với ràng buộc đẳng thức. Giải các bài toán

    i) $\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 \mid x_1 + x_2 = 10\}$.

    ii) $\min\{f(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 2\}$.

    iii) $\min\{f(x) = 3x_1 + 4x_2 \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1,\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$.

18. Trình bày thuật toán Frank-Wolfe. Xét bài toán $\min\{f(u) = \frac{1}{2}u_1^2 + u_2^2 + u_1 \mid u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_1 + u_2 \geq 10\}$. Cho $u^0 = (1, 1)^T$. Xây dựng một vài phần tử của dãy lặp $\{u^k\}$ theo thuật toán Frank-Wolfe.

19. Hãy lập chương trình thể hiện thuật toán tìm kiếm theo đơn hình (Thuật toán 6.9) và giải các bài tập sau để đánh giá hiệu quả của thuật toán.

    i) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3.8)^2 + (x_2 - 1.8)^2 \longrightarrow \min$

    ii) $f(x) = \sum_{j=1}^n j(x_j - 10)^2 \longrightarrow \min$ với $n = 10, 20, 30$.

    iii) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 4x_1 + 3 \longrightarrow \min$

20. Xét bài toán

$$\min\{\, x_1 \mid -(x_1-2)^2 - 4(x_2-2)^2 + 4 \le 0\}.$$

Điểm $x^0 = (4,2)^T$ có phải là điểm KKT không? Điểm x^0 có phải nghiệm tối ưu địa phương của bài toán đang xét không? Giải thích?

21. Chứng minh rằng điểm $x^0 = (2,4,0)^T$ là nghiệm tối ưu địa phương của bài toán

$$\min\{f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 \mid x_1 \ge 2,\ x_2 \ge 4,\ x_3 \ge 0\}.$$

Điểm x^0 có phải là nghiệm tối ưu toàn cục không? Vì sao?

Tài liệu tham khảo

1. M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* , John Wiley & Sons. Inc., Singapore, 1993.
2. D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, second edition, 1997.
3. S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
4. C.R. Carr and C.W. Howe, *Quantitative Decision Procedures in Management and Economics*, New York: McGraw-Hill, 1964.
5. R. J. Dakin, "A Tree Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems", *The Computer Journal*, Vol. 8, pp. 250-255, 1965.
6. G. B. Dantzig, *Application of the Simplex Method to Transportation Problem*, chap. 23 in Koopmans [23].
7. G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, and S. M. Johnson, "Solution of a Large-Scale Travelling-Salesman Problem", *Operations Research*, Vol. 2, No. 4, 1954.
8. S. I. Gass, *Linear Programming*, McGraw-Hill Book Company, 1994.
9. R. E. Gommory, "Essentials of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 64, 1958.
10. Kellerer Hans, U.Pferschy and D. Pisinger, *Knapsack Problems*, Springer Verlag, 2005.
11. F. L. Hitchcock, *Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*, Journal of Mathematical Physics, Vol. 20, 1941.
12. A. Hoffman, "Cycling in the simplex algorithm", *National Bureau of Standards Report*, Washington, DC, 1953.
13. R. Horst, P. M. Pardalos and N. V. Thoai, *Introduction to Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

14. L. V. Kantorovich, "Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production" *(in Russian), Publication House of the Leningrad State University, Leningrad (now St. Peterburg) (1939); translated in Management Science*, 6, pp. 366-422,1960.

15. N. Karmarkar, "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica* 4 , pp. 373-395, 1984.

16. V. G. Karmanov, *Mathematical Programming*, (in Russian), Moscow Scientific Publication House, Moscow, 1975.

17. L. G., Khachiyan, "A Polynomial Algorithm in Linear Programming" (in Russian), *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 224, pp. 1093-1096, 1979; translated in *Soviet Mathematics Doklady*, Vol. 20, pp. 191-194, 1979.

18. Phan Quốc Khánh, *Vận trù học*, Nhà xuất bản Giáo dục, Tp. Hồ Chí Minh, 2002.

19. Phan Quốc Khánh và Trần Huệ Nương, *Quy hoạch tuyến tính - Giáo trình hoàn chỉnh: Lí thuyết cơ bản, Phương pháp đơn hình, Bài toán mạng, Thuật toán điểm trong*, Nhà xuất bản Giáo dục, Tp. Hồ Chí Minh, 2002.

20. V. Klee and G.J. Minty, "How good is the Simplex Algorithm?", *in Inequalities,III, O. Shisha (editor), Academic Press, New York,* pp. 159-175, 1972.

21. Peter J. Koleser, "A Branch and Bound Algorithm for the Knapsack Problem", Management Science, Vol. 13, No. 9, Series A, Sciences (May, 1967), pp. 723-735, 1967.

22. T. C. Koopmans, *Optimum Unitization of the Transportation System*, Econometrica, Vol. 17, supplement, 1949.

23. T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monogragh 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

24. A. H. Land and A. G. Doig, "An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems", *Econometrica*, Vol. 14, No. 1, 1967.

25. J. D. C. Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney and C. Karel: "An Algorithm for the Travelling Salesman Problem", *Operations Research*, Vol. 11, No. 6, 1963.

26. Dinh The Luc, *Introduction to Nonlinear Optimization*, Cinvestar IPN, Mexico D.F., 1989.

27. Đinh Thế Lục, Phạm Huy Điển và Tạ Duy Phượng, *Giải tích các hàm nhiều biến*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

28. Olvi L. Mangasarian. *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.

29. K.T. Marshall and J. W. Suurballe, "A note on cycling in the simplex method", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 16, No.1, 1969.

30. Silvano Martello and Paolo Toth, *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*, John Wiley & Sons, 1990.

31. Lê Dũng Mưu, *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

32. S. G. Nash and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Programming*, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1996

33. Nguyễn Đức Nghĩa, *Tối ưu hóa - Quy hoạch tuyến tính và rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1999.

34. Hoàng Xuân Phú, *Lý thuyết các bài toán cực trị*, Giáo trình cao học, Viện Toán học, Hà Nội 1997.

35. Jean-Jacques Strodiot, *Numerical Methods in Optimization*, Department of Mathematics, University of Namur, Belgium, 2003.

36. Bùi Thế Tâm và Trần Vũ Thiệu, *Các phương pháp tối ưu hóa*, Nhà xuất bản Giao thông vận tải, Hà Nội, 1998.

37. Đặng Văn Thoan, *Các phương pháp Toán kinh tế*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.

38. Trần Vũ Thiệu, "Un exemple de cyclage dans l'algorithme du simplexe", Tập san Toán lý, Vol. 3, No. 4, trang 56-58, 1964.

39. Trần Vũ Thiệu, *Giáo trình Tối ưu Tuyến Tính*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.

40. Trần Túc, *Quy hoạch tuyến tính*, Đại học Kinh tế Quốc dân, Bộ môn Toán cơ bản, Hà Nội, 2004.

41. Hoàng Tụy, *Lý thuyết Quy hoạch*, Nhà xuất bản Khoa học, Hà Nội, 1968.

42. Hoang Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

43. Hoàng Tụy, *Lý thuyết tối ưu*, Bài giảng lớp cao học, Viện Toán học, Hà Nội, 2003.

Chỉ số

Ô

P

Q

R

Giáo trình

Các Phương pháp Tối ưu
Lý thuyết và Thuật toán

Tác giả:

Nguyễn Thị Bạch Kim

Khoa Toán Tin ứng dụng, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Nhà xuất bản Bách Khoa - Hà Nội

Số 1, Đại Cồ Việt, Hà Nội, Việt Nam

Điện thoại: 4.8684569; 4.2410605; 04.2410608

Fax: 04.8684570

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: Lê Công Hòa

Tổng biên tập: Tống Đình Quỳ

Biên tập viên: Tạ Anh Sơn

Phạm Hoàng Quyên

Trình bày bìa: Nguyễn Minh Thi

Chế bản: Tạ Anh Sơn

In 800 cuốn khổ 16 cm x 24 cm tại Xưởng in Tạp Chí Tin Học và Đời Sống.

Giấy xác nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 285-2008/CXB/08-57/BKHN, cấp ngày 4/4/2008.

In xong và nộp lưu chiểu 15 tháng 5 năm 2008.

Giá: 52.000đ