

# Уравнение Линдблада для двухуровневой системы, взаимодействующей с термостатом

Pan Vyacheslav Igorevich

26 сентября 2024 г.

## Аннотация

Уравнение Шредингера (5), широко применяемое для нахождения волновой функции, имеет ограниченное применение, так как, описывая изменение системы только под действием потенциальных сил, позволяет определить только чистые состояния<sup>1</sup> и не способно описать диссипацию<sup>2</sup> квантовой системы.

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle \quad (1)$$

В то же время матрица плотности может задавать как чистые, так и смешанные состояния. Уравнение Линдблада (5), рассматриваемое в данной работе, является уравнением матрицы плотности, описывающим ее эволюцию.

$$\partial_t\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}] + \sum_i\gamma_i(L_i\hat{\rho}L_i^\dagger - \frac{1}{2}[L_i^\dagger L_i,\hat{\rho}]) \quad (2)$$

## 1 Введение

Введем некоторые постулаты квантовой механики для чистых состояний.

*Постулат 1. С любой закрытой квантовой системой связано конечномерное или бесконечномерное Гильбертово пространство<sup>3</sup>  $\mathcal{H}$  над полем комплексных чисел, которому принадлежит вектор состояний  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .*

Состояния системы, описываемые векторами состояний называют чистыми. Зная вектор состояния системы, мы владеем наибольшей возможной информацией о ней. Вектор состояния  $\Psi$  в нотации Дирака можно записать как

$$\Psi = \sum_i a_i |\psi_i\rangle \quad (3)$$

где  $\psi_i$  — возможное состояние системы,  $a_i$  — амплитуда вероятности нахождения системы в состоянии с индексом  $i$ . Так как суммарная вероятность всех состояний должна равняться единице,

$$\sum_i a_i^2 = 1 \quad (4)$$

В случае, если мы не владеем полным представлением о состоянии системы, мы говорим, что она находится в смешанном состоянии. Как было сказано выше, для описания смешанных систем используется оператор  $\rho$ , принадлежащий Гильбертову пространству, называемый матрицей плотности (или оператором плотности) и задается как

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (5)$$

где  $p_i$  является вероятностью нахождения состояния  $\psi_i$ , а  $|\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  — соответствующий оператор проекции. След матрицы плотности равен 1 по условию нормировки ( $\text{Tr}[\rho]=1$ ), а сама матрица должна быть положительна, по определению вероятности ( $p_i > 0$ ).

---

<sup>1</sup> Полностью известное квантовое состояние.

<sup>2</sup> Необратимая потеря энергии.

<sup>3</sup> Линейное пространство, в котором норма порождается скалярным произведением.

В силу утверждения (4) случае если  $Tr[\rho^2] = Tr[\rho] = 1$  мы считаем состояние чистым. В случае  $tr[\rho^2] < 1$  состояние смешанное. Матрица плотности представляет собой квадратную матрицу размерности  $N \times N$ , где  $N$  — количество базисных векторов соответствующего Гильбертова пространства.

*Постулат 2. Пусть до измерения система находилась в чистом состоянии  $\psi$ . В результате измерения микросистема переходит в одно из состояний различных макроприборов. Согласно постулату 1, каждому такому состоянию соответствует вектор  $|\varphi_i\rangle$ . Тогда вектор состояний  $|\psi\rangle$  можно записать как линейную суперпозицию по набору состояний  $|\varphi_i\rangle$ :*

$$|\psi\rangle = c_i \sum_i |\varphi_i\rangle \quad (6)$$

где  $c_i$  - набор комплексных чисел, которые определяются с помощью скалярного произведения

$$c_i = \langle \varphi_i | \psi \rangle \quad (7)$$

*Постулат 3. Эволюция чистых состояний закрытой квантовой системы описывается уравнением Шредингера.*

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -i\hbar \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (8)$$

Если нам известно, что в точке  $t = 0$  система находится в состоянии  $|\psi(0)\rangle$ , то переходя в систему единиц измерения, в которой  $\hbar = 1$ , формальное решение уравнения Шредингера можно представить в виде:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle \quad (9)$$

*Постулат 4. Пространство состояний составной системы, состоящей из  $N$  числа подсистем, является тензорным произведением всех ее компонентов  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ . Если подсистема принадлежащая Гильбертову пространству приготовлена в состоянии  $|\psi_i\rangle$ , то ее пространство состояний будет иметь вид  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$ . В случае составной системы ее конечное смешанное состояние будет иметь вид  $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_N$ . Взаимозависимые состояния зовутся запутанными.*

Пусть существует система  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ . Для описания состояния подсистемы  $\alpha$  необходимо определить матрицу плотности соответствующую этой подсистеме  $\rho_\alpha$ . Для этого запишем матрицу плотности системы

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} |\alpha_i\rangle \langle \alpha_j| \otimes |\beta_k\rangle \langle \beta_l| \quad (10)$$

Заметим, что если взять след матрицы по базису  $\beta$ , то, воспользовавшись свойством следа, получим

$$Tr_\beta[\rho] = Tr_\beta \left[ \sum_{i,j,k,l} |\alpha_i\rangle \langle \alpha_j| \otimes |\beta_k\rangle \langle \beta_l| \right] = \sum_{i,j} |\alpha_i\rangle \langle \alpha_j| Tr \left[ \sum_{k,l} |\beta_k\rangle \langle \beta_l| \right] \equiv \rho_\alpha, \quad (11)$$

$Tr_\beta[\rho]$  принято называть частичным следом по базису  $\beta$ , а  $\rho_\alpha$  — редуцированной матрицей плотности.

## 2 Описание эволюции двухуровневой системы во времени

Пусть  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  являются собственными состояниями Гамильтониана  $\hat{H}$ . Тогда эволюция изолированной системы состоящей из одного кубита будет описываться

$$\hat{H} = E_0 |0\rangle \langle 0| + E_1 |1\rangle \langle 1| \quad (12)$$

Если кубит в момент времени  $t = 0$  находился в состоянии  $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ , состояние в произвольный момент времени  $t$  будет соответствовать уравнению  $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |1\rangle = e^{-iE_1 t} |1\rangle$ . Эволюцию системы в таком случае можно описать добавлением фазы к состоянию получая

$$\hat{H} = E |1\rangle \langle 1|, \quad (13)$$

Где,  $E \equiv E_1$

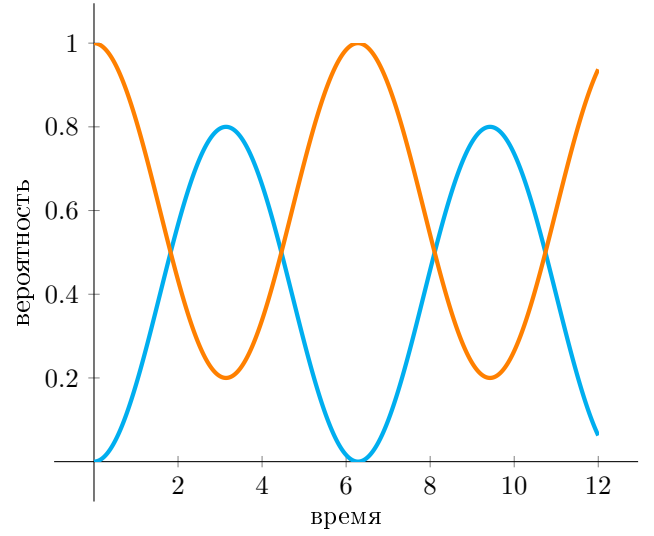


Рис. 1: Распределение вероятности между двумя кубитами