

# ТЕОРИЯ ГРУПП И СИММЕТРИЙ

**А.П. ИСАЕВ**

*Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова,  
ОИЯИ, Дубна  
Физический факультет, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва*

**В.А. РУБАКОВ**

*ИЯИ РАН, Москва  
Физический факультет, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва*

## Аннотация

*Дан вводный курс теории симметрий и теории групп. Обсуждается как алгебраическая теория групп, так и теория представлений групп и алгебр Ли. Подробно рассматриваются представления линейных групп, а также представления группы Пуанкаре.*

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Конечные и матричные группы. Группы и преобразования.</b>	<b>10</b>
2.1	Группы: основные понятия и определения.	10
2.1.1	Определение группы и подгруппы. Примеры.	10
2.1.2	Инвариантные подгруппы, смежные классы, фактор-группа.	18
2.1.3	Прямое произведение групп, классы сопряженных элементов, центр.	21
2.2	Матричные группы. Линейные, унитарные, ортогональные и симплектические группы.	24
2.2.1	Векторные пространства и алгебры.	24
2.2.2	Матрицы. Детерминант и пфаффиан.	26
2.2.3	Матричные группы и группы линейных преобразований $GL$ и $SL$ .	29
2.2.4	Матричные группы, связанные с билинейными и эрмитовыми формами.	31
2.2.5	Матричные группы $O$ , $Sp$ и $U$ типов.	35
2.3	Отображения. Группы и преобразования. Конформная группа.	39
2.3.1	Понятие отображения.	40
2.3.2	Гомоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма.	41
2.3.3	Точные последовательности.	43
2.3.4	Группы преобразований. Линейные неоднородные группы.	46
2.3.5	Полупрямое произведение групп.	49
2.3.6	Конформные группы $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ .	51
<b>3</b>	<b>Группы и алгебры Ли.</b>	<b>55</b>
3.1	Многообразия. Группы Ли.	55
3.1.1	Гладкие многообразия.	55
3.1.2	Многообразия групп Ли. Примеры.	61
3.1.3	Многообразия конформных групп $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ .	67
3.1.4	Компактные группы Ли.	70
3.1.5	Касательные пространства к гладким многообразиям.	73
3.1.6	Мера Хаара.	78
3.2	Алгебры Ли.	84
3.2.1	Касательные пространства к многообразиям матричных групп Ли.	84
3.2.2	Матричные алгебры Ли.	85
3.2.3	Примеры матричных алгебр Ли.	87
3.2.4	Касательные пространства к многообразиям матричных групп Ли (продолжение).	94
3.2.5	Общее определение алгебр Ли.	95
3.2.6	Структурные соотношения. Простые и полупростые алгебры Ли. Прямая сумма алгебр Ли.	100
3.2.7	Овеществления и вещественные формы комплексных алгебр Ли.	103

3.2.8	Метрика Киллинга для алгебры Ли. Критерий полупростоты. . .	108
3.2.9	Примеры структурных соотношений для некоторых алгебр Ли. .	111
3.2.10	Вещественные формы алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$ , $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$ . . .	120
3.2.11	Алгебра Ли конформной группы $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ . . . . .	121
3.2.12	Изоморфизмы и автоморфизмы алгебр Ли: примеры. . . . .	126
3.2.13	Локально изоморфные группы Ли. Универсальные накрывающие. .	133
<b>4</b>	<b>Представления групп и алгебр Ли. . . . .</b>	<b>138</b>
4.1	Линейные (матричные) представления групп. . . . .	138
4.1.1	Определение представления группы. Примеры. . . . .	138
4.1.2	Регулярные, точные и неточные представления. . . . .	141
4.1.3	Эквивалентные представления. . . . .	143
4.1.4	Характер представления. . . . .	144
4.2	Представления алгебр Ли. . . . .	145
4.2.1	Определение представления алгебры Ли. . . . .	145
4.2.2	Примеры представлений алгебр Ли. . . . .	147
4.3	Прямое произведение и прямая сумма представлений. . . . .	149
4.3.1	Прямое (тензорное) произведение представлений. Тензоры. . .	149
4.3.2	Прямая сумма представлений. . . . .	153
4.4	Приводимые и неприводимые представления. . . . .	154
4.4.1	Определение приводимых и неприводимых представлений. . .	154
4.4.2	Лемма Шура. . . . .	159
4.5	Некоторые свойства представлений конечных групп и компактных групп Ли. . . . .	164
4.6	Элементы теории характеров конечных групп и компактных групп Ли. .	166
4.6.1	Неприводимые представления и характеры групп $C_3$ и $S_3$ . . . .	166
4.6.2	Свойства характеров конечных групп и компактных групп Ли. .	170
4.6.3	Неприводимые представления и характеры группы $SO(2) = U(1)$ . .	178
4.7	Обертывающая алгебра. Операторы Казимира . . . . .	179
4.7.1	Определение обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ для алгебры Ли $\mathcal{A}$ . .	179
4.7.2	Представления обертывающей алгебры. Операторы Казимира. .	181
4.7.3	Ко-умножение для обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . . . . .	190
<b>5</b>	<b>Компактные алгебры Ли. . . . .</b>	<b>199</b>
5.1	Определение и основные свойства компактных алгебр Ли. . . . .	199
5.2	Структура компактных алгебр Ли. . . . .	203
5.3	Связь компактных алгебр Ли и компактных групп Ли. . . . .	206
5.4	Подалгебра Картана. Ранг алгебры Ли. Базис Картана–Вейля. . . .	208
5.4.1	Регулярные элементы. Подалгебра Картана и ранг алгебры Ли. .	208
5.4.2	Базис Картана–Вейля. . . . .	210
5.5	Заключительные замечания. . . . .	215
<b>6</b>	<b>Однородные пространства. Геометрия на однородных пространствах. .</b>	<b>216</b>
6.1	Однородные пространства. . . . .	216
6.2	Примеры однородных пространств. . . . .	219

6.3	Модели неевклидовой геометрии Лобачевского. . . . .	227
6.4	Метрика и оператор Лапласа на однородных пространствах. . . . .	233
6.4.1	Элементы дифференциальной геометрии на гладких многообразиях. . . . .	234
6.4.2	Действие группы $G$ на факторпространство $G/H$ . Индуцированные представления. . . . .	240
6.4.3	Инвариантная метрика на однородных пространствах. . . . .	242
6.4.4	Регулярные представления и инвариантные векторные поля на группах Ли. . . . .	251
6.4.5	Операторы Лапласа на группах Ли и однородных пространствах. . . . .	253
6.4.6	Сферические функции на однородных пространствах. . . . .	259
<b>7</b>	<b>Конечномерные представления <math>SU(2)</math> и <math>SL(2, \mathbb{C})</math> и их алгебр Ли. . . . .</b>	<b>262</b>
7.1	Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$ со старшим весом. . . . .	262
7.2	Дифференциальная реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и представления со старшим весом. . . . .	269
7.2.1	Реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ с помощью дифференциальных операторов. . . . .	269
7.2.2	Построение представлений со старшим весом для дифференциальных реализаций $sl(2, \mathbb{C})$ . . . . .	272
7.3	Обозначения Дирака. . . . .	275
7.3.1	Бра и кет вектора. Координатное и импульсное представление. . . . .	275
7.3.2	Голоморфное и антиголоморфное представление. $VRJ$ . . . . .	280
7.4	Конечномерные представления групп $SL(2, \mathbb{C})$ и $SU(2)$ . . . . .	285
7.4.1	Параметризации группы $SU(2)$ . . . . .	285
7.4.2	Конечномерные представления групп $SL(2, \mathbb{C})$ , $SU(2)$ и $SO(3)$ . Функции Вигнера. . . . .	287
7.4.3	Сферические функции на $S^2 = SU(2)/U(1)$ . Операторы Лапласа на $SU(2) = S^3$ и $SU(2)/U(1) = S^2$ . . . . .	293
7.5	Прямое произведение конечномерных представлений группы $SU(2)$ и его разложение в прямую сумму неприводимых представлений. Коэффициенты Клебша - Гордана. . . . .	300
7.5.1	Разложение Клебша-Гордана. . . . .	300
7.5.2	Выделение неприводимых представлений со старшим весом в прямом произведении представлений. . . . .	303
7.5.3	Спиновая цепочка Гейзенберга . . . . .	310
7.5.4	Метод вычисления коэффициентов Клебша-Гордана. . . . .	313
7.6	Тензорные операторы и $3n-j$ символы. . . . .	322
7.6.1	Тензорные операторы и теорема Вигнера-Эккарта. . . . .	322
7.6.2	Коэффициенты Рака и $3n-j$ символы. . . . .	324
7.6.3	$6-j$ символы и ассоциативность произведения представлений. . . . .	329
7.6.4	Вычисление $6-j$ символов. Метод Швингера. . . . .	336

<b>8</b>	<b>Конечномерные представления <math>SU(N)</math> и <math>SL(N)</math> и их алгебр Ли.</b>	<b>346</b>
8.1	Группа перестановок (симметрическая группа) $S_n$ .	346
8.2	Прямое произведение определяющих представлений $SL(N)$ .	353
8.3	Идемпотенты. Разложения Пирса для ассоциативных алгебр.	357
8.4	Представления симметрической группы $S_r$ . Симметризаторы Юнга.	365
8.5	Представления симметрической группы $S_r$ . Подход Окунькова-Вершика.	378
8.5.1	Элементы Юциса-Мерфи и сплетающие операторы в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ .	378
8.5.2	Идемпотенты и спектр операторов Юциса-Мерфи.	382
8.5.3	Граф Юнга и явное построение идемпотентов $e_\alpha$ .	389
8.6	Дуальность Шура-Вейля. Формула Вейля для размерностей неприводимых представлений $SL(N)$ .	394
8.7	Конечномерные неприводимые представления $SU(N)$ . Примеры.	399
<b>9</b>	<b>Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления.</b>	<b>403</b>
9.1	Пространство Минковского $\mathcal{M}$ . Группы Лоренца и Пуанкаре. Бусты. Алгебра Ли для группы Пуанкаре.	403
9.2	Группа $SL(2, \mathbb{C})$ и группа Лоренца $O(1, 3)$ . Спинорные представления группы Лоренца.	408
9.2.1	Группа $SL(2, \mathbb{C})$ и группа Лоренца.	408
9.2.2	Спиноры.	409
9.2.3	Матрицы Дирака. Дираковские биспиноры. Майорановские и вейлевские спиноры.	414
9.2.4	Твисторы.	416
9.3	$D$ -мерная алгебра Клиффорда $Cl_D$ и ее представления. Группы $Spin(D)$ . Алгебра Клиффорда $Cl_{(D-1,1)}$ и ее представления. Группы $Spin(D-1, 1)$ .	418
9.4	Уравнение Дирака и многомерные спиноры. Зарядово-сопряженные, вейлевские и майорановские спиноры в многомерии. Ковариантность уравнения Дирака.	425
9.5	Вектор Паули-Любанского и операторы Казимира группы Пуанкаре. Представления группы Пуанкаре. Малая группа Вигнера. Индуцированные представления. Массивные и безмассовые представления группы Пуанкаре.	433
<b>10</b>	<b>Приложение 1. Решения некоторых задач.</b>	<b>445</b>
10.1	Задача 7. Разложение в произведение циклов любой перестановки из $S_n$ .	445
10.2	Задача 43. Изоморфизм $Sp'(p, q) = Sp(p, q)$ .	445
10.3	Задача 56. Многообразие группы $O(p, q)$ .	446
10.4	Задача 65. Тождество Кэмпбелла-Хаусдорфа.	447
10.5	Задача 105. Изоморфизмы 1.) $so(1, 3) = sl(2, \mathbb{C})$ , 2.) $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$ и 3.) $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$ .	449
10.6	Задача 106. Изоморфизм $so(5) = usp(4)$ .	452
10.7	Задача 107. Изоморфизмы $so(4, 1) = sp(1, 1)$ и $so(3, 2) = sp(4, \mathbb{R})$ .	453
10.8	Задача 108. Изоморфизмы 1.) $so(6, \mathbb{C}) = sl(4, \mathbb{C})$ , 2.) $so(6) = su(4)$ , 3.) $so(3, 3) = sl(4, \mathbb{R})$ , 4.) $so(4, 2) = su(2, 2)$ и 5.) $so(1, 5) = sl(2, \mathbb{H})$ .	454

10.9	Задача 145. Оператор Казимира $C_2$ для присоединенного представления $su(N)$ . . . . .	458
10.10	Задача 153. Найти матрицу $\mathbf{r} = \mathbf{g}^{ab} T_a \otimes T_b$ для алгебры Ли $sl(n, \mathbb{C})$ . . . . .	458
10.11	Задачи 165, 167. $SO(3)/SO(2) = S^2$ . . . . .	459
10.12	Задача 181. Получить метрику Фубини-Штуди для $\mathbb{CP}^n$ . . . . .	460
10.13	Задача 216. Доказать формулу (7.4.34) для элементов $\mathcal{D}_{mm'}^{(j)}$ . . . . .	462
10.14	Задача 219. Найти функции $\phi', \theta', \psi'$ в уравнении (7.4.55). . . . .	463

## План курса Теория групп (6-7 семестры)

1. Группы (определения и примеры). Понятие симметрии. Определение группы, подгруппы, смежные классы, фактор-пространство, инвариантные подгруппы, фактор-группа, центр, прямое произведение групп, и т.д.

2. Матричные группы ( $GL(n)$ ,  $SL(n)$ ,  $U(n,m)$ ,  $SU(n,m)$ ,  $O(n,m)$ ,  $SO(n,m)$ ,  $Sp(2n)$ ,  $Usp(2n)$ , и т.д.). Отображения групп (гомоморфизм, изоморфизм, ядро и образ гомоморфизма, точные последовательности).

3. Многообразия. Группы Ли (ГЛ) и алгебры Ли (АЛ) (общая теория и примеры). АЛ матричных групп. Комплексные и вещественные АЛ. Вещественные формы ГЛ. Компактные ГЛ и АЛ. Простые и полупростые АЛ. Универсальные накрывающие ГЛ. Суммирование и интегрирование на группах. Метрика на ГЛ, мера Хаара.

4. Линейные (матричные) представления групп и АЛ. Примеры представлений, присоединенные представления АЛ и ГЛ. Прямое произведение и прямая сумма представлений. Эквивалентные представления. Приводимые и неприводимые представления. Характер представления. Леммы Шура. Элементы теории характеров.

5. Обертывающие АЛ и операторы Казимира. Конечномерные неприводимые представления АЛ  $sl(2)$   $su(2)$  и ГЛ  $SU(2)$  (представления со старшим весом). Ряд Клебша-Гордана.

6. Группа перестановок (симметрическая группа)  $S_n$ . Определяющее (фундаментальное) и тензорные представления  $SU(n)$ . Дуальность Шура - Вейля. Диаграммы Юнга.

7. Однородные и симметрические пространства. Расслоенные пространства. Связности на расслоениях. Примеры: сферы, грассманианы, расслоения Хопфа, ...

8. Гомотопические группы. Элементы гомотопической топологии.

9. Пространство Минковского  $M$ . Группы Лоренца и Пуанкаре. Бусты. Алгебра Ли для группы Пуанкаре. Группа  $SL(2, \mathbb{C})$  и группа Лоренца. Спинорные представления группы Лоренца. Матрицы Дирака. Дираковские биспиноры. Майорановские и вейлевские спиноры.

10.  $D$ -мерная алгебра Клиффорда  $Cl(D,0)$  и ее представления. Группы  $Spin(D)$ . Алгебра Клиффорда  $Cl(1,D-1)$  и ее представления. Группы  $Spin(1,D-1)$ . Уравнение Дирака и многомерные спиноры. Зарядово-сопряженные, вейлевские и майорановские спиноры в многомерии.

11. Индуцированные представления. Вектор Паули-Любанского и операторы Казимира группы Пуанкаре. Малая группа Вигнера. Унитарные представления группы Пуанкаре. Массивные и безмассовые представления группы Пуанкаре.

12. Базис Картана-Вейля в АЛ. Разложение Картана элементов ГЛ. Корневые системы, диаграммы Дынкина. Классификация полупростых алгебр и групп Ли.

## Основная литература

М.Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, издательство: Едиториал УРСС, 2002.

Л.С.Понтрягин, *Непрерывные группы*. Москва, издательство: Наука (1973).

В.А.Рубаков, *Классические калибровочные поля*. Москва, издательство: Едиториал УРСС (1999).

Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко, *Современная геометрия*. Москва, издательство: Наука, (1979).

П.И.Голод, А.У.Климук, *Математические основы теории симметрии*, издательство: Регулярная и хаотическая динамика, (2001).



# 1 Введение

Слово симметрия происходит от греческого слова "*συμμετρία*" – совместно измеренное или соразмерное. Можно рассматривать "симметрии как гармонии пропорций" [1] и обсуждать геометрические понятия симметрии в различных формах, таких как зеркальная симметрия, переносная симметрия, симметрия орнаментов и кристаллов и т.д. Под операциями симметрии мы понимаем преобразования, при которых объект или совокупность объектов сохраняет свои свойства (форму, и т.д.). На множестве всех симметричных операций, т.е. всех преобразований инвариантности данных объектов, можно ввести естественную операцию композиции (умножения), когда двум последовательным операциям симметрии сопоставляется новая операция симметрии из этого же множества. Таким образом мы приходим к определению совокупности (группы) преобразований симметрий, на котором определена операция умножения. Теперь можно сформулировать абстрактное математическое определение группы, которое мы даем в самом начале следующего раздела.

Основоположителем теории групп считается Эварист Галуа (1811 - 1832, убит на дуэли в возрасте 21 года). Занимаясь проблемой разрешимости алгебраических уравнений, он ввел понятия поля, группы и др. и создал то, что сейчас называется "теорией Галуа". Группу в этом случае образуют  $n!$  перестановок  $n$  корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$  заданного алгебраического уравнения  $n$ -ой степени

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0. \quad (1.1) \quad \text{algor}$$

Очевидно, что эти перестановки не меняют уравнение (1.1) и таким образом образуют группу симметрий этого уравнения.

Некоторые разделы книги построены так, что в начале рассматриваются частные примеры объектов и понятий, используемых в теории групп и симметрий, и только после этого делается переход к формальному математическому определению этих объектов и понятий. Такая последовательность изложения – совет Феликса Клейна из его "Лекций о развитии математики в XIX столетии" [2].

В данной книге мы старались доказать, или по крайней мере пояснить, все сделанные утверждения. Следует однако отметить, что уровень строгости некоторых доказательств не рассчитан на математически ориентированного читателя.

В основу книги положены лекции, которые читались на кафедрах теоретической и ядерной физики Международного университета г. Дубна в 2006 – 2011 годах, а также на физическом факультете МГУ в 2008-2011 годах. Мы благодарны А.А.Владимирову, Д.Кирпичникову, О.В.Огиевскому, А.О.Сутулину, В.О.Тарасову, С.В. Троицкому и Н.А.Тюрину за многочисленные полезные обсуждения материала, изложенного в этой книге.

## 2 Конечные и матричные группы. Группы и преобразования.

В первых разделах этой главы будут введены основные понятия теории групп, которые используются как в теории дискретных групп, так и в теории непрерывных групп, таких как группы Ли.

### 2.1 Группы: основные понятия и определения.

#### 2.1.1 Определение группы и подгруппы. Примеры.

**Определение 2.1.1** Конечное или бесконечное множество  $G$  называют группой, если в  $G$  определена операция умножения, которая сопоставляет каждой паре элементов  $g_1$  и  $g_2$  из  $G$  элемент  $g_3 \in G$  (мы будем писать  $g_1 \cdot g_2 = g_3$ ) и удовлетворяет свойствам:

а) ассоциативность умножения: для любых трех элементов  $g_1, g_2, g_3$  из  $G$  выполняется соотношение:  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ ;

б) существование единичного элемента  $e \in G$ , такого, что для всех  $g \in G$  справедливо  $g \cdot e = g = e \cdot g$ ;

в) существование обратного элемента, т.е. для каждого элемента  $g \in G$  существует  $g^{-1} \in G$  такой, что  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

**Определение 2.1.2** Число элементов в группе  $G$  называется порядком группы и обозначается  $\text{ord}(G)$ . Если порядок группы конечен, то группа называется конечной. Конечные группы, а также группы, множество элементов которых бесконечно, но счетно, называются дискретными.

**Определение 2.1.3** Если все элементы группы  $G$  коммутируют друг с другом, т.е.  $\forall g_1, g_2 \in G$  справедливо  $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ , то такая группа называется абелевой.

#### Примеры групп:

1.) Множество вещественных чисел, из которого удален нуль,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , образует группу по отношению к обычному умножению чисел. Число 1 выступает в роли единицы группы, а обратный элемент к  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  – это число  $1/x$ .

• **Задача 1.** Почему из  $\mathbb{R}$  удалено число 0?

2.) Множество комплексных чисел  $z$ , по модулю равных единице,  $|z| = 1$ , образует группу, которая обозначается  $U(1)$ . Умножение в  $U(1)$  – это умножение комплексных чисел (для всех  $z_1, z_2 \in U(1)$  мы имеем  $|z_1| = |z_2| = 1$ , откуда следует, что  $|z_1 z_2| = 1$ , и умножение двух элементов из  $U(1)$  дает снова элемент из  $U(1)$ ). Единица в  $U(1)$  – это число  $z = 1$ , а обратный элемент к  $z \in U(1)$  – это  $z^{-1}$  ( $z^{-1} \in U(1)$ , поскольку  $|z^{-1}| = 1$  при  $|z| = 1$ ).

3.) Группа  $\mathbf{Z}$  целых чисел  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ . В качестве операции умножения в множестве  $\mathbf{Z}$  выбирают сложение чисел и для группы используют обозначение  $(\mathbf{Z}, +)$ . Аналогично определяется группа  $(\mathbb{R}, +)$  вещественных чисел.

- **Задача 2.** Какое число в группах  $(\mathbb{Z}, +)$  и  $(\mathbb{R}, +)$  играет роль единичного элемента?

4.) Множество целых чисел по модулю целого числа  $n$  (т.е. любые два целых числа  $k$  и  $k+n$  отождествлены; для таких чисел используется обозначение  $k \bmod(n)$ ) образует циклическую группу  $\mathbb{Z}_n$  относительно сложения чисел по модулю  $n$ ,

$$k \bmod(n) + m \bmod(n) = (k + m) \bmod(n) .$$

Порядок группы  $\mathbb{Z}_n$ , очевидно, равен  $n$ .

5.) Циклическая группа  $C_n$  преобразований симметрии правильного  $n$ -угольника, состоящая из вращений  $n$ -угольника вокруг центра  $O$  описанной окружности на углы, кратные  $2\pi/n$  (см. Рис. 1).

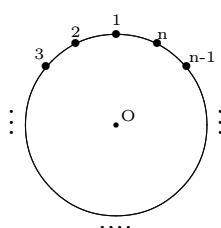


Рис. 1: Вершины правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность.

На рисунке 1 вершины правильного  $n$ -угольника пронумерованы числами  $\{1, 2, \dots, n\}$ , а все повороты на углы, кратные  $2\pi/n$  (элементы группы  $C_n$ ), соответствуют циклическим перестановкам вершин, или, что то же самое, циклическим перестановкам  $n$  чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$ . С точки зрения перестановок вершин поворот  $g_k \in C_n$  на угол  $2\pi k/n$  против часовой стрелки

$$\{ 1 \rightarrow k + 1, 2 \rightarrow k + 2, \dots, n - 1 \rightarrow k - 1, n \rightarrow k \} , \quad (2.1.1) \quad \text{sk1}$$

тождественен повороту  $g_{k+n}$  на угол  $2\pi(k + n)/n$ . Порядок группы  $C_n$  равен  $n$ , а умножение в группе  $C_n$  определяется как последовательное применение поворотов, и мы имеем

$$g_k \cdot g_m = g_{k+m} . \quad (2.1.2) \quad \text{gkgm}$$

Единичный элемент – это  $g_0$ , а обратный элемент к  $g_k$  равен  $g_{-k}$ . Заметим, что повороту на угол  $2\pi k/n$  в комплексной плоскости можно сопоставить комплексное число  $z_k = e^{i2\pi k/n}$ , равное одному из корней  $n$ -ой степени из единицы. Таким образом, группу  $C_n$  можно представить как множество всех комплексных чисел  $z = z_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ) таких, что  $z^n = 1$ . В этом представлении умножение элементов  $g_k \leftrightarrow z_k$  определяется как произведение комплексных чисел:  $z_k \cdot z_m = z_{k+m}$ .

**Определение 2.1.4** Взаимнооднозначное соответствие  $\rho: G \rightarrow G'$  между всеми элементами двух групп  $G$  и  $G'$ , которое согласовано с умножением в этих группах, т.е.

$$\rho(g_1) \cdot \rho(g_2) = \rho(g_1 \cdot g_2) , \quad \forall g_1, g_2 \in G ,$$

называется изоморфизмом. В этом случае мы говорим, что группы  $G$  и  $G'$  изоморфны друг другу и отождествляем их:  $G = G'$ .

Например, два числа  $\{+1, -1\}$  образуют циклическую группу  $C_2$ , которая изоморфна группе  $\mathbf{Z}_2$ , т.е.  $C_2 = \mathbf{Z}_2$ .

- **Задача 3.** Показать, что если  $\rho : G \rightarrow G'$  – изоморфизм, то  $\rho(e) = e'$ , где  $e$  и  $e'$  – единицы в  $G$  и  $G'$ .
- **Задача 4.** Показать, что  $\mathbf{Z}_n = C_n$ , т.е. имеется взаимнооднозначное соответствие между элементами группы  $\mathbf{Z}_n$  и элементами группы  $C_n$  (например, в представлении  $g_k \leftrightarrow z_k$ ), причем умножение в обеих группах сохраняет это соответствие.

6.) Группа диэдра<sup>1</sup>  $D_n$  – группа всех симметрий правильного  $n$  угольника (рис.1), включающая в себя не только все повороты из группы  $C_n$ , но и все зеркальные отражения правильного  $n$ -угольника (обозначим этот  $n$ -угольник символом  $\star_n$ ) относительно осей симметрии, которые проходят через точку  $O$  и какую-либо из его вершин. Для описания группы  $D_n$  расширим группу  $C_n$  еще одним преобразованием (элементом  $r$ ), которое переводит многоугольник  $\star_n$  на рис. 1 сам в себя. В качестве такого преобразования  $r$  выберем зеркальное отражение относительно вертикальной оси  $(1, O)$ , проходящей через точки 1 и  $O$  на рис 1. При этом вершина 1 остается на месте  $1 \rightarrow 1$ , а остальные вершины переходят друг в друга по правилу  $2 \leftrightarrow n$ ,  $3 \leftrightarrow n - 1$  и так далее

$$\{ 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow n, 3 \rightarrow n - 1, \dots, n - 1 \rightarrow 3, n \rightarrow 2 \} . \quad (2.1.3) \quad \text{sk2}$$

Таким образом, новое преобразование симметрии  $r$ , так же как и все повороты из  $C_n$ , соответствует некоторой специальной перестановке  $n$  вершин (чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$ ). Повторное зеркальное отражение относительно  $(1, O)$  возвращает вершины  $\star_n$  на свои места, т.е. мы имеем:

$$r^2 = e . \quad (2.1.4) \quad \text{umnD3}$$

Примем соглашение, при котором умножение преобразований  $g_m \cdot r$  соответствует последовательному применению операций сначала отражения  $r$ , а затем поворота  $g_m$  ("слово"  $g_m \cdot r$  читается справа налево), т.е. мы имеем следующее действие на многоугольник  $\star_n$  слева<sup>2</sup>:  $(g_m \cdot r) \star_n = g_m(r \star_n)$ .

- **Задача 5.** Вывести тождество

$$g_m \cdot r = r \cdot g_{-m} , \quad (2.1.5) \quad \text{ghg}$$

*и доказать, что зеркальное отражение  $r_k$  многоугольника  $\star_n$  относительно оси  $(k, O)$ , проходящей через центр  $O$  и некоторую вершину  $k$  многоугольника, может быть представлено как композиция отражения относительно оси  $(1, O)$  и соответствующих поворотов:*

$$r_k = g_{k-1} \cdot r \cdot g_{1-k} , \quad (2.1.6) \quad \text{r-k}$$

<sup>1</sup>Слово диэдр в переводе в греческого языка означает двухгранник.

<sup>2</sup>Другое прочтение слова  $g_m \cdot r$  слева направо, соответствует действию преобразований на многоугольник  $\star_n$  справа:  $\star_n \cdot (g_m \cdot r)$ , при этом сначала применяется поворот  $g_m$ , а за тем отражение  $r$ . Такой способ действия для последовательности преобразований рассматривается аналогично и принципиально не отличается от принятого.

т.е. сначала вершина  $k$  с помощью поворота  $g_{1-k}$  совмещается с вершиной 1, затем делается отражение относительно вертикальной оси, после чего вершина  $k$  возвращается на место.

Пользуясь соотношениями (2.1.5) и (2.1.6), все элементы<sup>3</sup> группы диэдра  $D_n$  можно привести к виду

$$\{g_k, r \cdot g_k\} \quad (k = 0, \dots, n-1), \quad (2.1.7) \quad \text{elD}$$

и порядок группы  $D_n$  равен  $2n$ . Для вращений  $g_m \in D_n$  мы имеем тождество  $g_m = g_1^m$ . Тогда, согласно (2.1.7), любой элемент группы  $D_n$  представляется в виде  $r^k g_1^m$  ( $k = 0, 1; m = 0, 1, \dots, n-1$ ), и в этом смысле группа  $D_n$  порождается только двумя элементами  $(g_1, r)$ , которые называются *образующими* группы  $D_n$  и удовлетворяют соотношениям (2.1.4), (2.1.5) и  $g_1^n = e$ . Такое описание конечной группы в терминах ее образующих называется *презентацией* и для  $D_n$  ( $a = g_1, b = r$ ) презентация записывается в виде

$$D_n : \langle a, b \mid a \cdot b = b \cdot a^{-1}, \quad b^2 = e, \quad a^n = e \rangle. \quad (2.1.8) \quad \text{prz}$$

В силу соотношений (2.1.5) группа  $D_n$  – неабелева.

- **Задача 6.** Выписать все элементы и найти порядок дициклической группы  $Q_{2n}$ , заданной с помощью презентации

$$Q_{2n} : \langle a, b \mid a \cdot b = b \cdot a^{-1}, \quad b^2 = a^n, \quad a^{2n} = e \rangle.$$

**7.)** Группа всех перестановок  $n$  объектов, или симметрическая группа,  $S_n$  (смотри также Раздел 8.1). Группу  $S_n$  можно представить как множество взаимнооднозначных отображений набора целых чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$  в себя следующего вида

$$A : \{1 \rightarrow a_1, 2 \rightarrow a_2, 3 \rightarrow a_3, \dots, (n-1) \rightarrow a_{n-1}, n \rightarrow a_n\}, \quad (2.1.9) \quad \text{perA}$$

где  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  некоторое новое размещение чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Порядок группы  $S_n$  равен  $n!$ .

Перестановки (2.1.9) удобно записать следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \quad (2.1.10) \quad \text{perA5}$$

Удобство такой записи заключается в том, что можно как угодно переставлять столбцы в (2.1.10) и при этом перестановка  $A$  не меняется. Умножение  $A \cdot B$  двух перестановок  $A$  и  $B$  – их последовательное применение, или, что тоже самое, последовательное применение отображений, сначала  $B$  и потом  $A$ :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} =$$

<sup>3</sup>Для правильных многоугольников с четным числом вершин имеются дополнительные оси симметрии, проходящие через середины противоположных сторон. Можно показать, что преобразования отражений относительно этих дополнительных осей симметрии также сводятся к преобразованиям типа  $r \cdot g_k$ .

$$= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{b_1} & a_{b_2} & \dots & a_{b_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{b_1} & a_{b_2} & \dots & a_{b_n} \end{pmatrix}. \quad (2.1.11) \text{ perAB}$$

Единица – тождественная перестановка  $\{1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, \dots, n \rightarrow n\}$ , а обратная перестановка к (2.1.9) очевидно имеет вид

$$A^{-1}: \{a_1 \rightarrow 1, a_2 \rightarrow 2, a_3 \rightarrow 3, \dots, a_n \rightarrow n\}, \quad (2.1.12) \text{ perAm}$$

или

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (2.1.13) \text{ perAm1}$$

Перестановка  $(i, j)$ , при которой только два числа  $i$  и  $j$  из  $\{1, 2, \dots, n\}$  переставляются, а остальные не меняют своих мест, называется транспозицией. Очевидно, что любую перестановку можно осуществить с помощью последовательного применения нескольких транспозиций, т.е. транспозиции являются образующими группы  $S_n$ .

**Определение 2.1.5** Перестановки, состоящие из четного (нечетного) числа транспозиций, называются четными (нечетными).

Наконец перестановки, имеющие вид  $(k \leq n)$

$$\{a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, a_3 \rightarrow a_4, \dots, a_{k-1} \rightarrow a_k, a_k \rightarrow a_1\},$$

где оставшиеся  $(n - k)$  объектов свои места не меняют, называются циклами длины  $k$  и обозначаются:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k & a_{k+1} & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 & a_{k+1} & \dots & a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot (a_{k+1}) \cdot \dots \cdot (a_n),$$

(циклы, состоящие из одного элемента, мы будем опускать для упрощения записи). Напомним, что столбцы в перестановке (2.1.10) можно переставлять как угодно, поэтому циклически переставляемым элементам позволительно находиться на произвольных местах верхней строки, например, циклом является перестановка вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_3 & a_4 & a_2 & a_1 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = (a_1, a_3, a_2, a_4),$$

(циклически переставляются первый, третий, второй и четвертый элементы, а остальные остаются на своих местах). Транспозиция  $(i, j)$  – это цикл длины 2. Циклы, состоящие из разных символов, не влияют друг на друга и, соответственно, коммутируют друг с другом, например:  $(1, 3, 4) \cdot (2, 6, 7, 5) = (2, 6, 7, 5) \cdot (1, 3, 4) \in S_7$ .

- **Задача 7.<sup>★4</sup>** Показать, что любую перестановку из  $S_n$  можно разложить в произведение циклов, состоящих из разных символов. Разложить в такое произведение циклов перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 10 & 5 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in S_{10}. \quad (2.1.14) \text{ Scycl2}$$

<sup>4</sup>Решения задач, помеченных звездочкой, приведены в конце книги.

8.) Группа  $SO(2)$  (S и O – начальные буквы в словах: Special Orthogonal) собственных вращений (без отражений) в пространстве  $\mathbb{R}^2$  – группа симметрий окружности  $S^1$  в  $\mathbb{R}^2$ . Умножение вращений – их последовательное применение. Группу  $SO(2)$  можно рассматривать как континуальный предел циклических групп,  $SO(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ , и представить ее элементы  $g_\phi \in SO(2)$  (вращения на углы  $\phi$  против часовой стрелки) в виде матриц

$$O_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad O_\phi \cdot O_\psi = O_{\phi+\psi}, \quad (2.1.15) \quad \text{o2}$$

которые ортогональны,  $O_\phi O_\phi^T = I_2$  (здесь  $T$  обозначает транспонирование матрицы, а  $I_2$  – единичная  $(2 \times 2)$  матрица) и удовлетворяют специальному условию  $\det(O_\phi) = 1$ .

- **Задача 8.** Установить изоморфизм между группами  $SO(2)$  и  $U(1)$ . Указание: записать преобразование в  $\mathbb{C}$ :  $w \rightarrow w' = z \cdot w$ ,  $\forall z \in U(1)$ , в виде линейного преобразования в  $\mathbb{R}^2$ , положив  $z = e^{i\phi}$  и  $w = x + iy$ .

9.) Группа  $O(2)$  вращений и отражений в пространстве  $\mathbb{R}^2$  (O – начальная буква в слове: Orthogonal) – группа симметрии окружности в  $\mathbb{R}^2$ , включающая как вращения, так и отражения относительно осей симметрии, проходящих через центр окружности. Группу  $O(2)$  можно рассматривать как континуальный предел диэдральных групп,  $O(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ . Элементы  $O(2)$ , которые соответствуют поворотам на угол  $\phi$ , представляются в виде матриц (2.1.15), а все элементы, включающие отражения, можно представить в виде композиции  $R \cdot O_\phi$ , где матрица  $R$  реализует отражение относительно вертикальной оси симметрии окружности

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \cdot O_\phi = O_{-\phi} \cdot R. \quad (2.1.16) \quad \text{rrr}$$

Элемент  $R \in O(2)$  осуществляет то же преобразование симметрии в  $\mathbb{R}^2$ , что и элемент  $r \in D_n$ . Все элементы  $O \in O(2)$  удовлетворяют условию ортогональности  $OO^T = I_2$ , однако  $\det(R \cdot O_\phi) = -1$ .

10.) Общая линейная группа  $GL(n, \mathbb{C})$  (G и L – начальные буквы в словах: General Linear) – множество всех невырожденных  $n \times n$  матриц  $M = ||M_{ij}||$  ( $\det(M) \neq 0$ ) с комплексными элементами,  $M_{ij} \in \mathbb{C}$ . В качестве группового умножения в  $GL(n, \mathbb{C})$  выбирается умножение матриц.

- **Задача 9.** Доказать ассоциативность умножения в группе  $GL(n, \mathbb{C})$  (одно из свойств в определении 2.1.1). Зачем требуется невырожденность матриц  $M \in GL(n, \mathbb{C})$ ? Описать группу  $GL(1, \mathbb{C})$ .

Аналогично определяется группа  $GL(n, \mathbb{R})$  как множество всех невырожденных  $n \times n$  вещественных матриц  $||M_{ij}||$  ( $\det(M) \neq 0$ ) с вещественными элементами  $M_{ij} \in \mathbb{R}$  и матричным умножением в качестве групповой операции.

11.) Группа  $O(n, \mathbb{R})$  вращений и отражений в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^n$  (в дальнейшем для краткости мы будем использовать для группы  $O(n, \mathbb{R})$  обозначение  $O(n)$ ) –

группа симметрии  $(n - 1)$ - мерной сферы  $S^{n-1}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Сферу  $S^{n-1}$  радиуса  $\rho$  можно задать как множество точек  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  с координатами  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \equiv \sum_{i=1}^n x_i x_i = \rho^2. \quad (2.1.17) \quad \text{sfn}$$

В дальнейшем знак суммы в подобных формулах будет опускаться, а по повторяющимся индексам всегда (если специально не будет оговорено обратное) будет подразумеваться суммирование. Рассмотрим линейное преобразование

$$x_i \rightarrow x'_i = O_{ij} x_j, \quad \forall \vec{x} \in S^{n-1}, \quad (2.1.18) \quad \text{sfn2}$$

такое, что  $x'_i x'_i = \rho^2$ , т.е. преобразование, переводящее точки сферы (2.1.17) в точки  $\vec{x}'$  этой же сферы. Матрица  $O$  для данного преобразования, в силу условия  $x_j x_j = x'_j x'_j$ , должна удовлетворять соотношению ортогональности

$$O^T \cdot O = I_n, \quad (2.1.19) \quad \text{ort}$$

где  $I_n$  – единичная  $n \times n$  матрица. Таким образом, преобразование (2.1.18) с ортогональной матрицей  $O$  можно рассматривать как симметрию сферы  $S^{n-1}$ , а группу  $O(n)$  всех таких симметрий можно представить как множество всех  $n \times n$  ортогональных матриц с групповой операцией в виде матричного умножения. Все аксиомы группы для множества  $O(n)$  выполнены. Действительно,  $\forall O_1, O_2 \in O(n)$  имеем

$$(O_1 \cdot O_2)^T \cdot O_1 \cdot O_2 = O_2^T \cdot (O_1^T \cdot O_1) \cdot O_2 = I_n,$$

$I_n \in O(n)$  – единичный элемент и, если  $O \in O(n)$ , то  $(O^{-1})^T \cdot O^{-1} = I_n$ , т.е.  $O^{-1} \in O(n)$ . Из условия (2.1.19) следует, что  $\det(O) = \pm 1$ , т.е. группа  $O(n)$  состоит из двух подмножеств  $O_+(n)$  и  $O_-(n)$  ортогональных матриц  $O$ , удовлетворяющих условиям  $\det(O) = +1$  и  $\det(O) = -1$ , соответственно.

**12.)** Группа  $SO(n)$ . Подмножество  $O(n)_+$  ортогональных матриц с  $\det(O) = +1$ , которое обозначается как  $SO(n)$ , образует группу (с матричным умножением в качестве групповой операции), т.к.  $\forall O, O' \in SO(n)$  имеем  $\det(O \cdot O') = +1$ ,  $\det(O^{-1}) = +1$  и следовательно  $(O \cdot O')$  и  $O^{-1}$  принадлежат  $SO(n)$ . Группа  $SO(n)$  интерпретируется как группа собственных (без отражений) вращений в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

- **Задача 10.** Доказать, что подмножество  $O_-(n) \subset O(n)$  ортогональных  $n \times n$  матриц  $O$  с условием  $\det(O) = -1$  группу не образует. Доказать, что любой элемент  $O' \in O_-(n)$  записывается в виде  $O' = R \cdot O$ , где  $O \in SO(n)$ , а  $R$  – любой фиксированный элемент из множества  $O_-(n)$  (например,  $R = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ ).

Группы  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}_n = C_n$ ,  $U(1) = SO(2)$  и  $GL(1, \mathbb{C})$  абелевы. Группа диэдра  $D_n$  ( $n > 2$ ), дициклическая группа  $Q_{2n}$  ( $n > 1$ ), группа  $S_n$  ( $n > 2$ ) всех перестановок  $n$  элементов, группа  $O(n)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), группа  $SO(n)$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) и группы  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) неабелевы.



Всю информацию о группах конечного порядка удобно суммировать в виде таблицы умножения или таблицы Кэли (предложена в 1854 г. английским математиком Артуром Кэли (1821 - 1895)). Например, для группы  $D_5$  эта таблица имеет вид

	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$r$	$rg_1$	$rg_2$	$rg_3$	$rg_4$
$e$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$r$	$rg_1$	$rg_2$	$rg_3$	$rg_4$
$g_1$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$e$	$rg_4$	$r$	$rg_1$	$rg_2$	$rg_3$
$g_2$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$e$	$g_1$	$rg_3$	$rg_4$	$r$	$rg_1$	$rg_2$
$g_3$	$g_3$	$g_4$	$e$	$g_1$	$g_2$	$rg_2$	$rg_3$	$rg_4$	$r$	$rg_1$
$g_4$	$g_4$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$rg_1$	$rg_2$	$rg_3$	$rg_4$	$r$
$r$	$r$	$rg_1$	$rg_2$	$rg_3$	$rg_4$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$
$rg_1$	$rg_1$	$rg_2$	$rg_3$	$rg_4$	$r$	$g_4$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$rg_2$	$rg_2$	$rg_3$	$rg_4$	$r$	$rg_1$	$g_3$	$g_4$	$e$	$g_1$	$g_2$
$rg_3$	$rg_3$	$rg_4$	$r$	$rg_1$	$rg_2$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$e$	$g_1$
$rg_4$	$rg_4$	$r$	$rg_1$	$rg_2$	$rg_3$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$e$

Путем сравнения таблиц Кэли для двух конечных групп можно установить изоморфизм этих групп.

• **Задача 11.** Установить изоморфизм  $D_3 = S_3$ .

Из таблицы Кэли видно, что пять элементов  $\{e, g_1, g_2, g_3, g_4\}$  образуют в группе  $D_5$  подмножество  $C_5$ , которое само наделено структурой группы. Действительно, согласно таблице Кэли произведение любых двух элементов из подмножества  $C_5$  есть снова элемент из  $C_5$ , а также выполняются все другие свойства группы. Очевидно, что то же самое имеет место и для подмножества  $C_n$  в группе  $D_n$  для любого  $n \geq 2$ . Напомним, что преобразования из групп  $C_n$  и  $D_n$  сводятся к специальным перестановкам  $n$  вершин  $\{1, 2, \dots, n\}$ , т.е. образуют подмножества в общей группе  $S_n$  всех возможных перестановок  $n$  элементов  $\{1, 2, \dots, n\}$ , причем эти подмножества замкнуты относительно операции умножения, заданной в  $S_n$ . Таким образом, мы приходим к важному понятию подгруппы — “группы в группе”.

**Определение 2.1.6** Подмножество  $H$  элементов группы  $G$  называют подгруппой, если  $H$  является группой относительно введенной в  $G$  операции умножения, т.е. единичный элемент  $e \in H$ , и для всех элементов  $h_1, h_2, h$  из  $H$  мы имеем  $h_1 \cdot h_2 \in H$  и  $h^{-1} \in H$ .

**Примеры подгрупп:**

- 1.) В любой группе  $G$  имеются две тривиальные подгруппы — это сама группа  $G$  и подгруппа, состоящая из одного единичного элемента  $e$ .
- 2.) Циклическая группа  $C_n = \mathbf{Z}_n$  — абелева подгруппа в диэдральной группе  $D_n$ .
- 3.) Группы  $C_n$  и  $D_n$  — подгруппы в группе  $S_n$ .
- 4.) Группа  $C_n = \mathbf{Z}_n$  — подгруппа в группе  $U(1) = SO(2)$ .
- 5.) Группы  $D_n$  и  $SO(2)$  — подгруппы в группе  $O(2)$ .
- 6.) Группа  $SO(n)$  — подгруппа в группе  $O(n)$ .
- 7.) Группа  $O(n)$  — подгруппа в группе  $GL(n, \mathbb{R})$ .

8.) Группа  $GL(n, \mathbb{R})$  – подгруппа в группе  $GL(n, \mathbb{C})$ .

9.) Группа  $O(k)$  – подгруппа в группе  $O(n)$  ( $n > k$ ). Подгруппу  $O(k)$  можно вложить в группу  $O(n)$  ( $n > k$ ) разными способами. Например, можно представить подгруппу  $O(k)$  как подмножество в  $O(n)$ , образованное блочно-диагональными матрицами  $O_g$  вида

$$O_g = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & g & & 0 & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & I_{n-k} & & \end{array} \right), \quad g \in O(k). \quad (2.1.20) \quad \text{okon}$$

### 2.1.2 Инвариантные подгруппы, смежные классы, фактор-группа.

**Определение 2.1.7** Пусть  $H$  – подгруппа в группе  $G$ . Если для любого элемента  $g \in G$  и любого элемента  $h \in H$  справедливо свойство  $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$  (это свойство записывают в виде  $gHg^{-1} \subset H$ ), то  $H$  называется инвариантной подгруппой, или нормальным делителем в  $G$ .

**Пример.** Подгруппа  $C_n$  в группе  $D_n$  является инвариантной:  $\forall h \in C_n$  и  $\forall g \in D_n$  мы имеем

$$g \cdot h \cdot g^{-1} = h' \in C_n. \quad (2.1.21) \quad \text{invC}$$

Действительно, этот факт очевиден для  $g \in C_n \subset D_n$ . Если же  $g \in D_n$  включает в себя отражение  $g = r \cdot g_k$ , то  $g^{-1} = g_{-k} \cdot r$  и, пользуясь тождествами (2.1.4) и (2.1.5), мы получаем

$$g \cdot g_m \cdot g^{-1} = r \cdot g_k \cdot g_m \cdot g_{-k} \cdot r = r \cdot g_m \cdot r = g_{n-m} \in C_n.$$

- **Задача 12.** Доказать, что группа  $SO(n)$  является инвариантной подгруппой в  $O(n)$ .

Инвариантные подгруппы были введены Э. Галуа. Замечательное наблюдение Э. Галуа заключается в том, что группу можно “делить” на ее инвариантную подгруппу (нормальный делитель) и результат “деления” будет снова группой. Для описания такого деления необходимо ввести понятие смежного класса.

**Определение 2.1.8** Левым смежным классом элемента  $g \in G$  по подгруппе  $H \subset G$  называется множество всех элементов вида  $g \cdot h$ , где  $h$  пробегает все элементы из  $H$ , то есть левый смежный класс – это подмножество элементов  $gH = \{g \cdot h | h \in H\}$  в  $G$ . Аналогично, подмножество  $Hg = \{h \cdot g | h \in H\}$  называется правым смежным классом элемента  $g \in G$  по подгруппе  $H$ .

ISA ред.  
правка

Множества левых и правых смежных классов (фактор-множества или фактор-пространства) группы  $G$  по подгруппе  $H$  обозначаются  $G/H$  и  $H \backslash G$ , соответственно.

**Пример.** Рассмотрим смежные классы группы  $D_n$  по подгруппе  $C_n$ . Если в качестве элемента  $g \in D_n$  мы возьмем элемент из подгруппы  $C_n$ , то его левый смежный класс

$gC_n$  совпадает с множеством  $eC_n = C_n$ . Если в качестве элемента  $g$  мы возьмем элемент  $r \cdot g_m$ , содержащий отражение, то левый смежный класс этого элемента по подгруппе  $C_n$  совпадает с множеством  $r \cdot C_n$ . Из (2.1.7) следует, что эти два класса  $eC_n$  и  $rC_n$  не пересекаются и исчерпывают всю группу  $D_n$ . Аналогично, пользуясь формулой (2.1.5), легко получить, что  $D_n$  расщепляется на два непересекающихся правых смежных класса  $C_n e$  и  $C_n r$ , причем  $C_n e = eC_n = C_n$  и, согласно (2.1.5),  $C_n r = rC_n$ , т.е. левый и правый смежные классы элемента  $r \in D_n$  по инвариантной подгруппе  $C_n$  совпадают.

- **Задача 13.** Описать смежные классы группы  $O(n)$  по подгруппе  $SO(n)$ .

**Утверждение 2.1.1** *Левые (правые) смежные классы группы  $G$  по подгруппе  $H$  либо совпадают, либо не пересекаются. Левый и правый смежные классы одного и того же элемента  $g \in G$  по инвариантной подгруппе  $H$  совпадают.*

**Доказательство.** Пусть пересечение двух левых смежных классов  $g_1H$  и  $g_2H$  нетривиально, т.е. существует элемент  $g \in G$  такой, что  $g \in g_1H$  и  $g \in g_2H$ . Это означает, что существуют элементы  $h_1, h_2 \in H$  такие, что  $g_1 \cdot h_1 = g = g_2 \cdot h_2$ . Отсюда вытекает, что  $g_1 = g_2 \cdot h_2 \cdot h_1^{-1} = g_2 \cdot h'$ , где  $h' \in H$ , т.е.  $g_1 \in g_2H$ ,  $g_2 \in g_1H$ , и следовательно смежные классы  $g_1H$  и  $g_2H$  совпадают. Для правых смежных классов это утверждение доказывается аналогично.

Пусть подгруппа  $H$  инвариантна. Тогда, согласно определению инвариантной подгруппы,  $\forall g \in G$  мы имеем  $gHg^{-1} \subset H$  и  $g^{-1}Hg \subset H$ . Умножая эти соотношения на  $g$  соответственно справа и слева, мы получаем  $gH \subset Hg$  и  $Hg \subset gH$ , т.е.  $gH = Hg$ . Таким образом, левый и правый смежные классы фиксированного элемента  $g \in G$  по инвариантной подгруппе  $H$  совпадают. ■

Пусть  $H$  – подгруппа в группе  $G$ . Поскольку всякий элемент  $g \in G$  принадлежит какому-то смежному классу, а именно, своему смежному классу  $gH$  (или  $Hg$ ), то вся группа  $G$  есть объединение непересекающихся левых (правых) смежных классов по подгруппе  $H \subset G$ .

**Определение 2.1.9** *Количество разных смежных классов в группе  $G$  по подгруппе  $H$  называется индексом подгруппы  $H$  в  $G$  и обозначается  $\text{ind}_G(H)$ .*

- **Задача 14. (Теорема Лагранжа).** Доказать, что порядок (число элементов) и индекс подгруппы  $H$  в конечной группе  $G$  являются делителями порядка группы  $G$ :

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot \text{ind}_G(H) .$$

Рассмотрим множество  $G/H$  смежных классов группы  $G$  по инвариантной подгруппе  $H$  и определим произведение двух смежных классов  $\tilde{g}_1 \equiv g_1H$  и  $\tilde{g}_2 \equiv g_2H$  элементов  $g_1$  и  $g_2$  группы  $G$  как подмножество в  $G$ :

$$\{f_1 \cdot f_2 | f_1 \in \tilde{g}_1, f_2 \in \tilde{g}_2\} . \quad (2.1.22) \quad \text{fprod5}$$

В результате такого произведения мы получаем множество элементов, которое снова образует смежный класс  $\widetilde{g_1 \cdot g_2}$ , так как в силу определения инвариантной подгруппы  $H$  мы имеем

$$(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_1 (H g_2) H = g_1 (g_2 H) H = (g_1 \cdot g_2) H. \quad (2.1.23) \quad \text{fprod}$$

Таким образом, на множестве смежных классов  $G/H$ , где  $H$  — инвариантная подгруппа в  $G$ , можно задать групповое произведение. Ассоциативность произведения (2.1.23) очевидно следует из ассоциативности группового умножения в  $G$ . Роль единицы играет смежный класс  $eH$ , совпадающий с подгруппой  $H$ , а обратный к  $gH$  смежный класс — это  $g^{-1}H$ . Итак, мы доказали:

**Утверждение 2.1.2** *Смежные классы группы  $G$  по инвариантной подгруппе  $H$  образуют группу  $G/H$ , которая называется факторгруппой.*

**Пример.** Как мы выяснили, группа  $D_n$  распадается на два смежных класса  $\tilde{e} = e \cdot C_n$  и  $\tilde{r} = r \cdot C_n$  по инвариантной подгруппе  $C_n$ . Таблица Кэли для элементов  $\tilde{e}, \tilde{r} \in D_n/C_n$  совпадает с таблицей Кэли для группы  $C_2$ :

$$\tilde{e} \cdot \tilde{e} = \tilde{e}, \quad \tilde{e} \cdot \tilde{r} = \tilde{r} \cdot \tilde{e} = \tilde{r}, \quad \tilde{r} \cdot \tilde{r} = \tilde{e},$$

Следовательно,  $D_n/C_n = C_2$ .

• **Задача 15.** Какой группе изоморфна факторгруппа  $O(n)/SO(n)$ ?

**Замечание 1.** Множество правых смежных классов группы  $G$  по инвариантной подгруппе  $H$  также образует группу. Из Утверждения 2.1.1 следует, что группа  $H \backslash G$  изоморфна группе  $G/H$ .

**Замечание 2.** Отметим, что для не инвариантных подгрупп  $H$  произведение смежных классов, определенное в (2.1.22), может давать подмножество в  $G$ , которое уже не будет смежным классом, поэтому в этом случае умножение в фактор-множестве  $G/H$  ввести, вообще говоря, нельзя.

**Определение 2.1.10** *Конечная группа  $G$  называется простой, если она не имеет нетривиальных инвариантных подгрупп. Конечная группа  $G$  называется полу-простой, если она не имеет нетривиальных абелевых инвариантных подгрупп.*

Заметим, что понятие простых групп обобщает понятие простых чисел (простые группы делятся только на тривиальные нормальные делители).

**Примеры.**

1. Группа  $C_p = \mathbf{Z}_p$  проста, если  $p$  — простое число. Действительно, ее порядок равен  $\text{ord}(C_p) = p$ , и из теоремы Лагранжа следует, что в  $C_p$  вообще нет нетривиальных подгрупп.
2. Группа  $D_n$  не проста ( $D_n$  имеет инвариантную подгруппу  $C_n$ ) и не полупроста (инвариантная подгруппа  $C_n$  — абелева).
3. Если группы  $G_1$  и  $G_2$  просты и неабелевы, то группа  $G_1 \times G_2$  полупроста.

**Замечание 3.** Для некоторых бесконечных групп определение простоты отличается от определения, данного в 2.1.10. Например, группа  $SO(2n)$  считается простой, хотя она имеет нетривиальную инвариантную подгруппу, совпадающую с ее центром  $\{I_{2n}, -I_{2n}\}$ . Мы дадим соответствующее определение простоты для определенного класса бесконечных групп в разделе 3.2.6.

**Замечание 4.** Пусть  $G$  – конечная группа и  $a \in G$ . Рассмотрим бесконечную последовательность элементов  $a^k, k = 1, 2, 3, \dots$ . Среди этих элементов наверняка имеются совпадающие, иначе группа  $G$  имела бы бесконечный порядок. Отсюда следует, что для любого элемента  $a \in G$  существует некоторое минимальное положительное целое число  $n$  такое, что  $a^n = e$  и множество элементов  $\{e, a^k\} (k = 1, 2, \dots, n-1)$  образует подгруппу  $C_n = \mathbf{Z}_n$  в  $G$ . Таким образом, с каждым элементом  $a \in G$  связана некоторая циклическая подгруппа в  $G$ , порядок которой определяется делителями порядка группы  $G$ . Последнее утверждение позволяет заниматься классификацией конечных групп, имеющих фиксированный порядок.

- *Задача 16. Доказать, что конечная группа  $G$ , имеющая порядок  $p$ , где  $p$  – простое число, единственна и  $G = \mathbf{Z}_p = C_p$ .*
- *Задача 17. Доказать, что если порядок группы  $G$  равен  $2n$ , а  $H$  – подгруппа в  $G$  порядка  $n$ , то  $H$  – инвариантная подгруппа в  $G$ .*
- *Задача 18. Найти факторгруппу аддитивной группы целых чисел, кратных 3, по подгруппе чисел, кратных 15.*

### 2.1.3 Прямое произведение групп, классы сопряженных элементов, центр.

По двум группам  $G_1$  и  $G_2$  можно построить новую группу  $G_1 \times G_2$ , которая называется прямым произведением групп  $G_1$  и  $G_2$ . Прямое произведение групп играет важную роль в теории, т.к. оно позволяет конструировать новые группы и наоборот, сводить изучение более сложных групп к изучению более простых.

**Определение 2.1.11** Пусть  $G_1$  и  $G_2$  – две группы. Множество всех пар  $(g_1, g_2)$ , где  $g_1 \in G_1$  и  $g_2 \in G_2$ , с покомпонентной операцией умножения

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2), \quad (2.1.24) \quad \text{mapdr}$$

образует группу  $G_1 \times G_2$ , называемую прямым произведением групп  $G_1$  и  $G_2$ . Единицей в этой группе служит элемент  $(e_1, e_2)$ , где  $e_1$  и  $e_2$  – единицы в группах  $G_1$  и  $G_2$ , а обратный элемент к  $(g_1, g_2)$  есть  $(g_1^{-1}, g_2^{-1})$ .

Очевидно, что группа  $G_1 \times G_2$  изоморфна группе  $G_2 \times G_1$ . В группе  $G_1 \times G_2$  имеются две подгруппы, изоморфные  $G_1$  и  $G_2$ , с элементами  $\{(g_1, e_2) \mid g_1 \in G_1\}$  и  $\{(e_1, g_2) \mid g_2 \in G_2\}$ , соответственно.

- *Задача 19. Доказать, что  $G_1$  и  $G_2$  – инвариантные подгруппы в  $G_1 \times G_2$  и установить изоморфизм  $(G_1 \times G_2)/G_1 = G_2$  (аналогично,  $(G_1 \times G_2)/G_2 = G_1$ ).*

Отметим, что обычная связь между “делением” и “умножением” для групп отсутствует. А именно, если  $H$  – инвариантная подгруппа в  $G$ , то  $G/H$  – это тоже группа, но, вообще говоря,  $G \neq H \times (G/H)$ .

- **Задача 20.** Пользуясь презентацией (2.1.8), установить изоморфизмы  $D_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  и  $D_6 = \mathbb{Z}_2 \times D_3$ . Установить изоморфизм  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}_{pq}$ , где  $p$  и  $q$  – взаимно простые числа ( $p \neq q$ ). Проверить отсутствие изоморфизма между группами  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  и  $\mathbb{Z}_8$  (т.е.  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \neq \mathbb{Z}_8$ ). Доказать, что  $\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$ , однако  $\mathbb{Z}_4 \neq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Обсудим еще одно важное понятие из теории групп.

**Определение 2.1.12** Два элемента  $g_1$  и  $g_2$  из группы  $G$  называются сопряженными, если существует  $g \in G$  такой, что  $g_1 = g \cdot g_2 \cdot g^{-1}$ . Подмножество элементов  $\tilde{g}_0 = \{g \cdot g_0 \cdot g^{-1} | g \in G\}$ , где  $g_0$  – фиксированный элемент группы  $G$ , называется классом сопряженности (или классом сопряженных элементов) элемента  $g_0$  в группе  $G$ .

Заметим, что элемент  $g \in G$  сопряжен сам себе. Если  $g_1 \in G$  сопряжен  $g_2 \in G$ , то  $g_2 \in G$  сопряжен  $g_1 \in G$ , а если  $g_2$  в свою очередь сопряжен  $g_3 \in G$ , то очевидно, что  $g_1$  будет сопряжен  $g_3$ . Тем самым на множестве элементов группы  $G$  задано отношение эквивалентности (элементы  $g_1$  и  $g_2$  – эквивалентны, если они сопряжены) и классы сопряженных элементов – это классы эквивалентных элементов.

Группа  $G$  расслаивается на классы сопряженных элементов, т.к. эти классы или совпадают, или не пересекаются. Это следует из следующего рассуждения. Пусть два класса сопряженности  $\tilde{g}_0$  и  $\tilde{g}_1$  имеют нетривиальное пересечение, т.е. имеется элемент  $g \in G$ , который сопряжен всем элементам из  $\tilde{g}_0$  и всем элементам из  $\tilde{g}_1$ . Тогда, согласно отношению эквивалентности, все элементы  $\tilde{g}_0$  сопряжены всем элементам из  $\tilde{g}_1$  и, следовательно, эти классы совпадают.

**Примеры.**

1. Единица  $e$  группы  $G$  образует класс сопряженных элементов, состоящий из одного элемента.
2. Группа  $C_n$  расслаивается на  $n$  классов сопряженности  $\{e\}, \{g_1\}, \{g_2\}, \dots, \{g_{n-1}\}$ , каждый из которых состоит из одного элемента. Действительно, группа  $C_n$  – абелева и  $\forall g \in C_n$  мы имеем  $g \cdot g_n \cdot g^{-1} = g_n$ . Такое расслоение группы на классы сопряженности, каждый из которых состоит из одного элемента, справедливо для всех абелевых групп.
3. Группа  $D_{2n+1}$  расслаивается на  $n+2$  класса сопряженности  $\{e\}, \{g_k, g_{-k}\} (k = 1, \dots, n), \{r, r \cdot g_1, \dots, r \cdot g_n\}$ . То, что все несобственные элементы  $D_{2n+1}$  попадают в один класс сопряженности, следует из соотношения  $r \cdot g_k \cdot (r \cdot g_m) \cdot g_{-k} \cdot r = r \cdot g_{2k-m}$  и нечетности порядка группы  $(2n+1)$ .
4. Группа  $D_{2n}$  расслаивается на  $n+3$  класса сопряженности  $\{e\}, \{g_n\}, \{g_k, g_{-k}\} (k = 1, \dots, n-1), \{r \cdot g_{2k}\}, \{r \cdot g_{2k+1}\}$ .

- **Задача 21.** Описать классы сопряженных элементов группы  $O(2)$ .

5. Любой элемент  $A$  группы перестановок  $S_n$  представим в виде произведения  $m$  циклов, состоящих из разных символов (смотри Задачу 7):

$$A = \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_{\lambda_1})}_{\lambda_1} \underbrace{(a_{\lambda_1+1}, a_{\lambda_1+2}, \dots, a_{\lambda_1+\lambda_2})}_{\lambda_2} \cdots \underbrace{(a_{\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1}+1}, \dots, a_{\lambda_1+\dots+\lambda_m})}_{\lambda_m}, \quad (2.1.25) \quad \text{Асус}$$

где  $\lambda_i$  — длина  $i$ -ого цикла, и все элементы, фигурирующие в правой части, различны:  $a_\alpha \neq a_\beta$  при  $\alpha \neq \beta$ . Очевидно, что  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = n$  и, так как все циклы коммутируют друг с другом, мы можем считать, что  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ . Каждая неубывающая последовательность целых положительных чисел  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \equiv \Lambda$ , сумма которых равна  $n$ , называется разбиением числа  $n$  и обозначается  $\Lambda \vdash n$ . Таким образом, каждой перестановке из  $S_n$ , согласно ее разложению в произведение циклов, соответствует некоторое разбиение  $\Lambda \vdash n$ .

**Утверждение 2.1.3** *Две перестановки, соответствующие одному и тому же разбиению  $\Lambda \vdash n$ , сопряжены друг другу. Каждому классу сопряженных элементов в группе  $S_n$  соответствует одно и только одно разбиение  $\Lambda \vdash n$ .*

BSF

**Доказательство.** Пусть перестановка  $B \in S_n$  имеет разложение в произведение того же числа циклов и с теми же длинами  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , что и перестановка  $A \in S_n$  в (2.1.25):

$$B = \underbrace{(b_1, b_2, \dots, b_{\lambda_1})}_{\lambda_1} \underbrace{(b_{\lambda_1+1}, b_{\lambda_1+2}, \dots, b_{\lambda_1+\lambda_2})}_{\lambda_2} \cdots \underbrace{(b_{\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1}+1}, \dots, b_{\lambda_1+\dots+\lambda_m})}_{\lambda_m}, \quad (2.1.26) \quad \text{Всус}$$

то есть две перестановки  $A$  и  $B$  соответствуют одному и тому же разбиению  $\Lambda \vdash n$ . Докажем, что такие перестановки  $A$  и  $B$  содержатся в одном и том же классе сопряженных элементов в  $S_n$ . Действительно, перестановка (2.1.25) переводится в перестановку (2.1.26) с помощью преобразования сопряжения  $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$ , где перестановка  $T \in S_n$  имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{\lambda_1} & a_{\lambda_1+1} & \dots & a_{\lambda_1+\lambda_2} & \dots & a_{\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1}+1} & \dots & a_{\lambda_1+\dots+\lambda_m} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{\lambda_1} & b_{\lambda_1+1} & \dots & b_{\lambda_1+\lambda_2} & \dots & b_{\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1}+1} & \dots & b_{\lambda_1+\dots+\lambda_m} \end{pmatrix}. \quad (2.1.27) \quad \text{Тсус}$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что

$$T \cdot A \cdot T^{-1} = T \underbrace{(a_1, \dots, a_{\lambda_1})}_{\lambda_1} T^{-1} \cdot T \underbrace{(a_{\lambda_1+1}, \dots, a_{\lambda_1+\lambda_2})}_{\lambda_2} T^{-1} \cdots,$$

поэтому достаточно проверить равенство  $T(a_k, \dots, a_{k+\lambda_i})T^{-1} = (b_k, \dots, b_{k+\lambda_i})$  только для одного из циклов. Это легко сделать, если воспользоваться правилом (2.1.11) произведения элементов в  $S_n$ . С другой стороны, пусть  $T$  — произвольная перестановка (2.1.27), тогда преобразование сопряжения  $A \rightarrow T \cdot A \cdot T^{-1} = B$  переводит перестановку  $A$ , соответствующую разбиению  $\Lambda \vdash n$ , в перестановку  $B$  (2.1.26), имеющую то же самое разбиение в произведение циклов. Таким образом, имеется взаимнооднозначное соответствие между классами сопряженных элементов в группе  $S_n$  и элементами множества всех разбиений числа  $n$ . ■

ESF

- **Задача 22.** Перечислить все классы сопряженных элементов в группах  $S_3$  и  $S_4$  и найти число элементов в этих классах.

**Определение 2.1.13** Элемент  $g_0$  из группы  $G$  называется самосопряженным (или центральным), если  $g \cdot g_0 \cdot g^{-1} = g_0, \forall g \in G$ . Подмножество  $Z$  всех самосопряженных элементов группы  $G$  называется центром группы  $G$ .

Другими словами, центр  $Z$  группы  $G$  образован теми элементами из  $G$ , которые коммутируют со всеми элементами из  $G$ :

$$g \cdot g_0 = g_0 \cdot g, \quad \forall g_0 \in Z \subset G, \quad \forall g \in G.$$

- **Задача 23.** Доказать, что центр  $Z$  в группе  $G$  образует абелеву инвариантную подгруппу в  $G$ .

**Примеры.**

1. Центр абелевой группы совпадает с самой группой.
2. Центр группы  $D_{2n}$  состоит из двух элементов  $\{e, g_n\}$ .
3. Центр группы  $O(n)$ ,  $n > 2$  образован двумя элементами  $\{I_n, -I_n\}$ .
4. Центр группы  $SO(2n)$ ,  $n > 1$ , также образован двумя элементами  $\{I_{2n}, -I_{2n}\}$ , а центр  $SO(2n+1)$  тривиален, то есть состоит из одного единичного элемента  $I_{2n+1}$ .

## 2.2 Матричные группы. Линейные, унитарные, ортогональные и симплектические группы.

### 2.2.1 Векторные пространства и алгебры.

В дальнейшем  $\mathbb{K}$  будет обозначать поле комплексных чисел или поле вещественных чисел.

**Определение 2.2.1** Векторным (линейным) пространством  $\mathcal{V}(\mathbb{K})$  над числовым полем  $\mathbb{K}$  называется множество объектов (векторов)  $\vec{x}, \vec{y}, \dots$ , которые можно умножать на числа  $\alpha, \beta, \dots \in \mathbb{K}$  и складывать друг с другом, и при этом результат будет снова объектом из  $\mathcal{V}(\mathbb{K})$ :

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \vec{z} \in \mathcal{V}(\mathbb{K}). \quad (2.2.1) \quad \text{vect11}$$

Кроме того  $(\mathcal{V}(\mathbb{K}), +)$  – абелева группа с единичным элементом  $\vec{0} \in \mathcal{V}(\mathbb{K})$ :

$$\vec{0} = \alpha \vec{x}|_{\alpha=0}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{V}(\mathbb{K}),$$

который называется нулевым вектором. Требуется также выполнение свойств

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}, \quad \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, \quad (\alpha\beta)\vec{y} = \alpha(\beta\vec{y}).$$

$\mathcal{V}(\mathbb{R})$  называется вещественным, а  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$  – комплексным векторным пространством.



**Определение 2.2.2** Векторное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  называется  $n$ -мерным векторным пространством над полем  $\mathbb{K}$ , если в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  существуют  $n$  линейно независимых векторов  $\vec{e}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) таких, что  $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  имеет место разложение

$$\vec{x} = \vec{e}_k x_k . \quad (2.2.2) \quad \text{Te5}$$

Числа  $x_k \in \mathbb{K}$  называются координатами (или компонентами) вектора  $\vec{x}$  в базисе  $\{\vec{e}_k\}$ .

Любое комплексное  $n$ -мерное векторное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  можно рассматривать как  $2n$ -мерное вещественное векторное пространство  $\mathcal{V}_{2n}(\mathbb{R})$ , так как любой вектор  $\vec{z} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  можно представить в виде

$$\vec{z} = \vec{e}_k z_k = \vec{e}_k x_k + i \vec{e}_k y_k \quad (z_k = x_k + i y_k \in \mathbb{C}, \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}), \quad (2.2.3) \quad \text{Te5c}$$

и рассматривать  $2n$  векторов  $\{e_k, i e_k\}$  в качестве базиса в  $\mathcal{V}_{2n}(\mathbb{R})$ . Полученное таким образом вещественное пространство  $\mathcal{V}_{2n}(\mathbb{R})$  будем называть овеществлением комплексного пространства  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ .

С другой стороны, любое  $n$ -мерное вещественное векторное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$  можно превратить в  $n$ -мерное комплексное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , состоящее из векторов  $\vec{z} = \vec{e}_k z_k$ , где  $\{\vec{e}_k\}$  – базис в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$ , а координаты  $z_k \in \mathbb{C}$  – комплексные числа. В этом случае  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  называется комплексификацией  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$ . Наоборот, если имеется вещественное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$ , чья комплексификация совпадает с  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , то пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$  называется вещественной формой пространства  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ . У одного и того же пространства  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  может быть несколько вещественных форм.

В комплексном векторном пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  определяется операция комплексного сопряжения векторов. Вектор  $(\vec{z})^*$  называется комплексно-сопряженным к вектору  $\vec{z} = \vec{e}_k z_k$ , если он имеет вид  $(\vec{z})^* = \vec{e}_k z_k^*$ , то есть его координаты получаются из координат вектора  $\vec{z}$  с помощью комплексного сопряжения.

**Определение 2.2.3** Алгеброй  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{K}$  называется линейное (векторное) пространство  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{K}$ , в котором, кроме сложения векторов из  $\mathcal{A}$  и умножения их на числа из  $\mathbb{K}$ , определена операция умножения векторов, т.е. операция, которая любым двум векторам  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{A}$  сопоставляет третий вектор  $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathcal{A}$ , причем эта операция удовлетворяет аксиомам дистрибутивности

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b} + \beta \vec{c}) &= \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \beta(\vec{a} \cdot \vec{c}), \quad (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{c}), \\ \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{A}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned} \quad (2.2.4) \quad \text{distr}$$

Если для умножения выполняется еще и аксиома ассоциативности:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

то алгебра  $\mathcal{A}$  называется ассоциативной. Если  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , то алгебра называется вещественной, или комплексной. Алгебра  $\mathcal{A}$  называется  $n$ -мерной, если ее векторное пространство  $n$ -мерно.

### 2.2.2 Матрицы. Детерминант и пфаффиан.

Пусть  $A = \|A_{ij}\|$  – комплексная  $n \times n$  матрица, т.е.  $A_{ij} \in \mathbb{C}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ . Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} A^T &= \|A_{ij}^T\|, \quad A_{ij}^T = A_{ji}, \\ A^* &= \|A_{ij}^*\|, \\ A^\dagger &= (A^T)^* = \|A_{ij}^\dagger\|, \quad A_{ij}^\dagger = A_{ji}^*, \\ I_n &= \|\delta_{ij}\|, \end{aligned}$$

где  $A^T$ ,  $A^*$ ,  $A^\dagger$  и  $I_n$  – транспонированная, комплексно-сопряженная, эрмитово-сопряженная и единичная  $n \times n$  матрицы, соответственно. Матрица  $A$  называется симметричной, если  $A^T = A$ , кососимметричной (антисимметричной), если  $A^T = -A$ , эрмитовой, если  $A^\dagger = A$ , и антиэрмитовой, если  $A^\dagger = -A$ . На множестве  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  матриц ( $n \times n$ ) заданы стандартные операции сложения и умножения матриц, а также операция умножения матрицы на число:

$$\begin{aligned} A + B &= \|A_{ij} + B_{ij}\|, \quad A \cdot B = \|A_{ik} B_{kj}\|, \quad \alpha A = \|\alpha A_{ik}\|, \\ \forall A, B &\in \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{2.2.5} \quad \text{opM}$$

- **Задача 24.** Доказать, что множество матриц  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  образует  $n^2$ -мерную комплексную ассоциативную алгебру относительно операций (2.2.5).

Аналогичным образом определяется вещественная алгебра  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  вещественных матриц  $n \times n$ .

Важными характеристиками матрицы  $A$  являются ее след  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$  и детерминант

$$\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1 1} A_{i_2 2} \dots A_{i_n n}, \tag{2.2.6} \quad \text{determ}$$

где  $\{\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}\}$  – набор  $n^n$  компонент антисимметричного тензора ( $\varepsilon$ -тензора)  $n$ -ого ранга<sup>5</sup>. Компоненты  $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$  однозначно определяются двумя условиями

$$\begin{aligned} 1. \quad & \varepsilon_{12 \dots n} = 1, \\ 2. \quad & \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_m \dots i_n} = -\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k \dots i_n}, \end{aligned} \tag{2.2.7} \quad \text{defeps}$$

где в правой и левой части соотношения **2.** компоненты  $\varepsilon$ -тензора отличаются только перестановкой двух индексов  $i_k$  и  $i_m$ . Из определения (2.2.7) сразу следует равенство

---

<sup>5</sup>Объект с компонентами  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$  является тензором в том смысле, что он не меняется при ортогональных преобразованиях:  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} O_{i_1 j_1} \dots O_{i_n j_n} = \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}$ , где как всегда подразумевается суммирование по повторяющимся индексам  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , и  $O$  – любая вещественная ортогональная матрица,  $O^T \cdot O = I_n$ , см. (2.1.19). Для нас тензорный характер объекта  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$  в данном контексте несущественен.

нулю всех компонент  $\varepsilon$ -тензора, у которых хотя бы 2 индекса совпадают и, если все индексы различны, то имеет место равенство

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^{P(\sigma)} \varepsilon_{12 \dots n} = (-1)^{P(\sigma)}, \quad (2.2.8) \quad \text{eeee}$$

где  $P(\sigma)$  — четность перестановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}, \quad (2.2.9) \quad \text{sigma}$$

то есть  $P(\sigma) = 0$ , если перестановка  $\sigma$  четная, и  $P(\sigma) = 1$ , если перестановка  $\sigma$  нечетная.

Матрица  $A^{-1} = \|A_{ij}^{-1}\|$  называется обратной к  $A$ , если  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ . Матрица  $A$  называется вырожденной, если для нее не существует обратной матрицы  $A^{-1}$ . В противном случае матрица  $A$  называется невырожденной.

- **Задача 25.** Пользуясь определениями (2.2.6), (2.2.7) и (2.2.8), доказать равенства

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_n j_n} = \det(A) \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}, \quad (2.2.10) \quad \text{determ1}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} &= n! , \quad \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} = (n-1)! \delta_{i_k}, \\ \varepsilon_{i_1 i_2 j_3 \dots j_n} \cdot \varepsilon_{k_1 k_2 j_3 \dots j_n} &= (n-2)! (\delta_{i_1 k_1} \delta_{i_2 k_2} - \delta_{i_1 k_2} \delta_{i_2 k_1}), \end{aligned} \quad (2.2.11) \quad \text{pasve}$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_r j_{r+1} \dots j_n} \cdot \varepsilon_{k_1 \dots k_r j_{r+1} \dots j_n} = (n-r)! \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 k_1} & \delta_{i_1 k_2} & \dots & \delta_{i_1 k_r} \\ \delta_{i_2 k_1} & \delta_{i_2 k_2} & \dots & \delta_{i_2 k_r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{i_r k_1} & \delta_{i_r k_2} & \dots & \delta_{i_r k_r} \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_n j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}. \quad (2.2.12) \quad \text{determ2}$$

- **Задача 26.** Пусть  $A$  и  $B$  — матрицы  $n \times n$ . Доказать тождества

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B), \quad \det(A) = \det(A^T), \quad (2.2.13) \quad \text{detAB}$$

$$(A^{-1})_{ji} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\det(A)} \varepsilon_{i i_2 \dots i_n} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_n j_n} \varepsilon_{j j_2 \dots j_n}. \quad (2.2.14) \quad \text{detam}$$

(обратите внимание на порядок индексов в левой и правой частях).

VRJ

Указание: для доказательства (2.2.13) воспользоваться равенствами (2.2.10), (2.2.12), а для доказательства (2.2.14) воспользоваться еще и (2.2.11).

Из формулы (2.2.14), которая определяет элементы обратной матрицы  $A^{-1}$ , следует, что матрица  $A$  — невырождена, тогда и только тогда, когда  $\det(A) \neq 0$ .

- **Задача 27.** Пусть  $A$  и  $B$  — матрицы  $n \times n$ ,  $\epsilon$  — малый параметр. Показать, что

$$\det(A + \epsilon B) = \det(A) \cdot [1 + \epsilon \text{Tr}(A^{-1} B) + O(\epsilon^2)], \quad (2.2.15)$$

и проверить равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(e^{tA}) = \text{Tr}(A) \cdot \det(e^{tA}) \Leftrightarrow \det(e^{tA}) = e^{t \text{Tr}(A)}. \quad (2.2.16) \quad \text{expsp2}$$

- **Задача 28.** Пусть  $g = ||g_{ij}||$  — матрица  $n \times n$ . Пользуясь формулами (2.2.12) и (2.2.14), доказать тождество

$$\frac{\partial \det(g)}{\partial g_{ij}} = \det(g) \cdot (g^{-1})_{ji} . \quad (2.2.17)$$

(обратите внимание на порядок индексов в правой части).

VRJ

Пусть  $A = ||A_{ik}||$  — матрица  $n \times n$ , а  $B = ||B_{ab}||$  — матрица  $m \times m$ . Прямым произведением  $(A \otimes B)$  матриц  $A$  и  $B$  называется композитная матрица  $n \cdot m \times n \cdot m$  с элементами

$$(A \otimes B)_{ia, kb} = A_{ik} B_{ab} . \quad (2.2.18) \quad \text{prpr1}$$

У матрицы  $(A \otimes B)$  матричные индексы становятся двойными:  $ia$  и  $kb$ , и ее можно представить в виде блочной  $(n \times n)$  матрицы

$$(A \otimes B) = \begin{pmatrix} A_{11}||B_{ab}|| & A_{12}||B_{ab}|| & \dots & A_{1n}||B_{ab}|| \\ A_{21}||B_{ab}|| & A_{22}||B_{ab}|| & \dots & A_{2n}||B_{ab}|| \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1}||B_{ab}|| & A_{n2}||B_{ab}|| & \dots & A_{nn}||B_{ab}|| \end{pmatrix} , \quad (2.2.19) \quad \text{prpr2}$$

где каждый блок имеет размер  $m \times m$ .

- **Задача 29.** Пусть  $A$  и  $C$  — матрицы  $n \times n$ , а  $B$  и  $D$  — матрицы  $m \times m$ . Пользуясь представлением (2.2.19) получить правило произведения двух матриц  $(A \otimes B)$  и  $(C \otimes D)$ :

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C \otimes B \cdot D) . \quad (2.2.20) \quad \text{prvect6}$$

Для четномерной  $(2n \times 2n)$  кососимметричной матрицы  $B = -B^T$  кроме детер-

**VRJ** до  
конца раз-  
дела

минанта и следа можно определить еще одну важную характеристику:

$$\text{Pf}(B) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i_1, \dots, i_{2n}} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 \dots i_{2n-1} i_{2n}} B_{i_1 i_2} B_{i_3 i_4} \dots B_{i_{2n-1} i_{2n}} , \quad (2.2.21) \quad \text{pfaf}$$

которая называется пфаффианом. Так как матрица  $B$  кососимметрична, пфаффиан (2.2.21) обладает очевидным свойством

$$\text{Pf}(B^T) = (-1)^n \text{Pf}(B) . \quad (2.2.22) \quad \text{pfaf71}$$

**Утверждение 2.2.1** Пусть  $A$  — произвольная матрица  $(2n \times 2n)$  и  $B$  — кососимметричная невырожденная матрица  $(2n \times 2n)$ , тогда для матриц  $A$  и  $B$  выполня-

ISA

ются тождества:

$$\det(A) \cdot \text{Pf}(B) = \text{Pf}(A \cdot B \cdot A^T) , \quad (2.2.23) \quad \text{pfaf77}$$

$$\det(B) = [\text{Pf}(B)]^2 . \quad (2.2.24) \quad \text{pfaf55}$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулами (2.2.10) и (2.2.21), в результате получаем тождество (2.2.23):

$$\begin{aligned} \det(A) \cdot \text{Pf}(B) &= \frac{1}{2^n n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} (A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_{2n} j_{2n}}) B_{j_1 j_2} B_{j_3 j_4} \dots B_{j_{2n-1} j_{2n}} = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} (A_{i_1 j_1} B_{j_1 j_2} A_{i_2 j_2}) \dots (A_{i_{2n-1} j_{2n-1}} B_{j_{2n-1} j_{2n}} A_{i_{2n} j_{2n}}) = \text{Pf}(A \cdot B \cdot A^T) . \end{aligned} \quad (2.2.25) \quad \text{pfaf8p}$$

Перейдем теперь к доказательству тождества (2.2.24). Прежде всего отметим, что любая четномерная кососимметричная невырожденная матрица  $B$  представима в виде

$$B = Q \cdot J \cdot Q^T , \quad (2.2.26) \quad \text{marazm}$$

где  $Q$  — некоторая  $(2n \times 2n)$  матрица, а  $J$  — стандартная кососимметричная блочная матрица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.2.27) \quad \text{pfaf54}$$

Здесь  $0$  обозначает нулевую  $(n \times n)$  матрицу. Из представления (2.2.26) следует, что

$$\det(B) = \det^2(Q) \det(J) , \quad (2.2.28) \quad \text{pfaf51}$$

а с учетом (2.2.23) мы получаем

$$\text{Pf}(B) = \text{Pf}(Q \cdot J \cdot Q^T) = \det(Q) \text{Pf}(J) . \quad (2.2.29) \quad \text{pfaf52}$$

Записав элементы матрицы (2.2.27) в виде  $J_{ij} = \sum_{p=1}^n (\delta_{p,i} \delta_{n+p,j} - \delta_{n+p,i} \delta_{p,j})$  и подставив их в определения (2.2.10), (2.2.21), легко посчитать:

$$\det(J) = 1 , \quad \text{Pf}(J) = (-1)^{n(n-1)/2} .$$

Тогда равенства (2.2.28) и (2.2.29) вместе дают (2.2.24). ■

**Следствие.** Учитывая свойство (2.2.22), перепишем равенство (2.2.23) для невырожденной кососимметричной матрицы  $B$  следующим образом:

$$\det(B) \cdot \text{Pf}(B^{-1}) = (-1)^n \text{Pf}(B) . \quad (2.2.30) \quad \text{pfaf53}$$

Из сравнения этого равенства с (2.2.24) вытекает тождество

$$\text{Pf}(B^{-1}) = (-1)^n [\text{Pf}(B)]^{-1} .$$

### 2.2.3 Матричные группы и группы линейных преобразований $GL$ и $SL$ .

Пусть  $T$  — линейный оператор, действующий в линейном пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Это означает, что  $T$  переводит каждый вектор  $\vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  в некоторый вектор  $T \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  и при этом мы имеем  $T(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha(T \cdot \vec{x}) + \beta(T \cdot \vec{y})$ , где  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Линейные операторы  $T$  будем также называть линейными преобразованиями пространства  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{L}$  линейных операторов  $T$ , действующих в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . На множестве  $\mathcal{L}$  можно определить сложение операторов и умножение их на числа  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  согласно правилу

$$(\alpha T_1 + \beta T_2) \cdot \vec{x} = \alpha(T_1 \cdot \vec{x}) + \beta(T_2 \cdot \vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K}), \quad (2.2.31) \quad \text{Te1a1}$$

то есть множество  $\mathcal{L}$  обладает структурой векторного пространства. Кроме того, на множестве  $\mathcal{L}$  можно определить произведение двух операторов  $T_1$  и  $T_2$  как оператор  $(T_1 \cdot T_2)$ , возникающий в результате их последовательного действия:

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot \vec{x} = T_1 \cdot (T_2 \cdot \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K}). \quad (2.2.32) \quad \text{Te1}$$

- **Задача 30.** Показать, что множество всех линейных операторов  $\mathcal{L}$ , действующих в линейном пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , с операциями (2.2.31) и (2.2.32) образует алгебру.

**Определение 2.2.4** Множество  $\mathcal{L}$  линейных операторов, действующих в линейном пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , снабженное операциями (2.2.31) и (2.2.32), называется алгеброй линейных операторов в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ .

Зафиксируем базис  $\{\vec{e}_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Оператор  $T$  переводит  $\vec{e}_i$  в некоторый вектор из  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , который можно снова разложить по базису  $\vec{e}_i$

$$T \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_k T_{ki}, \quad T_{ki} \in \mathbb{K}. \quad (2.2.33) \quad \text{Te2}$$

Порядок расстановки индексов  $i, k$  у коэффициентов  $T_{ki}$  в (2.2.33) выбран так, чтобы из определения (2.2.32) для произведения  $(T_1 \cdot T_2)$  операторов  $T_1$  и  $T_2$  следовало стандартное правило произведения для матриц их коэффициентов

$$(T_1 \cdot T_2)_{ki} = (T_1)_{kj}(T_2)_{ji}. \quad (2.2.34) \quad \text{Te3}$$

Действительно, мы имеем равенства

$$\begin{aligned} (T_1 \cdot T_2) \cdot \vec{e}_i &= \vec{e}_k (T_1 \cdot T_2)_{ki}, \\ (T_1 \cdot T_2) \cdot \vec{e}_i &= T_1 \cdot (T_2 \cdot \vec{e}_i) = T_1 \cdot \vec{e}_j (T_2)_{ji} = \vec{e}_k (T_1)_{kj} (T_2)_{ji}, \end{aligned} \quad (2.2.35) \quad \text{Te4}$$

и из сравнения правых частей этих равенств следует (2.2.34).

Любой вектор  $\vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  можно разложить по базису  $\{\vec{e}_i\}$  в виде (2.2.2). Для преобразованного вектора  $\vec{x}' = T \cdot \vec{x}$  мы имеем

$$\vec{x}' = T \cdot \vec{x} = (T \cdot \vec{e}_k) x_k = \vec{e}_i T_{ik} x_k, \quad (2.2.36) \quad \text{Te6b}$$

и его компоненты равны

$$x'_i = (T \cdot \vec{x})_i = T_{ik} x_k. \quad (2.2.37) \quad \text{Te6}$$

Таким образом, для фиксированного базиса в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , каждому линейному оператору  $T$  в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  ставится в соответствие  $n \times n$  матрица  $\|T_{ij}\|$ . И наоборот, любая  $n \times n$  матрица  $T = \|T_{ij}\|$  определяет согласно (2.2.33) и (2.2.37) линейный оператор в  $n$ -мерном векторном пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ .

- **Задача 31.** Доказать, что при линейном преобразовании базиса в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$

$$\vec{e}_i' = \vec{e}_j S_{ji}, \quad (2.2.38) \quad \text{Теба}$$

где  $S_{ji} \in \mathbb{K}$  и  $\det(\|S_{ji}\|) \neq 0$ , матрица линейного оператора  $T$  в новом базисе  $\{\vec{e}_i'\}$  будет иметь вид

$$T_{ik}' = (S^{-1})_{im} T_{mj} S_{jk}. \quad (2.2.39) \quad \text{Теба}$$

Почему матрица  $\|S_{ij}\|$  преобразования (2.2.38) должна быть невырожденной?

**Определение 2.2.5** Линейный оператор  $T \in \mathcal{L}$  называется невырожденным, если из  $T \cdot \vec{x} = 0$  следует, что  $\vec{x} = 0$ .

- **Задача 32.** Доказать, что  $T$  — невырожденный оператор, если и только если он обратим. Показать, что в любом базисе матрица  $\|T_{ij}\|$  невырожденного оператора  $T$  невырождена, т.е.  $\det(\|T_{ij}\|) \neq 0$ , и наоборот.

ISA

Рассмотрим подмножество  $G_{\mathcal{L}}$  в  $\mathcal{L}$ , состоящее из всех невырожденных линейных операторов, которые действуют в векторном пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Очевидно, что  $G_{\mathcal{L}}$  образует группу относительно умножения, введенного в (2.2.32). Группа  $G_{\mathcal{L}}$  может рассматриваться как группа "симметрий" пространства  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , так как элементы этой группы переводят пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  в пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Соответствие (2.2.33) линейных операторов и матриц устанавливает изоморфизм группы  $G_{\mathcal{L}}$  и группы  $GL(n, \mathbb{K})$  всех невырожденных  $(n \times n)$  матриц с элементами из  $\mathbb{K}$ . Поэтому в дальнейшем эти группы будут отождествляться. Группы  $GL(n, \mathbb{C})$  и  $GL(n, \mathbb{R})$  уже рассматривались в разделе 2.1.1 в качестве примеров.

В группе  $GL(n, \mathbb{K})$  можно выделить подгруппу  $SL(n, \mathbb{K})$  специальных линейных операторов, то есть таких операторов  $T$ , которым соответствуют матрицы  $\|T_{ij}\|$ , удовлетворяющие условию  $\det(T) = 1$ . Заметим, что это условие не зависит от выбора базиса в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  в силу соотношений (2.2.39).

**Определение 2.2.6** Группа с невырожденными матрицами в качестве элементов и матричным умножением в качестве группового умножения называется матричной группой.

Группы линейных операторов  $SL(n, \mathbb{K})$  и  $GL(n, \mathbb{K})$ , группы  $O(n)$  и  $SO(n)$ , рассмотренные в разделе 2.1 — примеры матричных групп.

## 2.2.4 Матричные группы, связанные с билинейными и эрмитовыми формами.

Итак, матричная группа — это всегда подгруппа одной из групп  $GL(n, \mathbb{C})$  или  $GL(n, \mathbb{R})$ . Для описания важных матричных групп необходимо снабдить векторное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  дополнительными структурами, инвариантность которых относительно

преобразований (2.2.33) и (2.2.36) будет выделять эти подгруппы. Например, выделение подгруппы  $SL(n, \mathbb{C})$  из  $GL(n, \mathbb{C})$  связано с требованием инвариантности специальной структуры, заданной на  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , которая называется внешним произведением  $n$  векторов  $\vec{x}_i \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Явное определение внешнего произведения  $n$  векторов — следующее:

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n \equiv \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} (\vec{x}_1)_{i_1} (\vec{x}_2)_{i_2} \dots (\vec{x}_n)_{i_n}, \quad (2.2.40) \quad \text{wedge}$$

где  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$  — компоненты полностью антисимметричного  $\varepsilon$ -тензора (2.2.7), (2.2.8),  $(\vec{x}_i)_j$  —  $j$ -я компонента вектора  $\vec{x}_i$ .

- **Задача 33.** Доказать, что условие инвариантности внешнего произведения (2.2.40) относительно действия (2.2.36) линейного оператора  $T$

$$(T \cdot \vec{x}_1) \wedge (T \cdot \vec{x}_2) \wedge \dots \wedge (T \cdot \vec{x}_n) = \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \wedge \dots \wedge \vec{x}_n, \quad \forall \vec{x}_i \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C}),$$

эквивалентно равенству  $\det(\|T_{ij}\|) = 1$ , где  $\|T_{ij}\|$  — матрица оператора  $T$ .

Для вещественного случая внешнее произведение (2.2.40) с точностью до знака равно объему  $n$ -мерного параллелепипеда, построенного по  $n$  векторам  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ . Поэтому группа  $SL(n, \mathbb{R})$  — это группа, которая сохраняет объемы всех таких  $n$ -мерных параллелепипедов в  $\mathbb{R}^n$ .

Для выделения других подгрупп из группы  $GL(n, \mathbb{C})$  рассмотрим дополнительные структуры на  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , которые называются билинейными и эрмитовыми формами.

**Определение 2.2.7** Функция  $f(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{C}$ , где  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , называется билинейной формой на пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , если

$$f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{z}, \vec{y}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{z}, \vec{y}), \quad f(\vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{x}, \vec{z}),$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Билинейная форма  $f(\vec{x}, \vec{y})$  невырождена, если из условия  $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ ,  $\forall \vec{y} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , следует  $\vec{x} = 0$ , а из условия  $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ ,  $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , следует  $\vec{y} = 0$ .

Пусть  $\{\vec{e}_i\}$  — базис в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ . Тогда, пользуясь разложением (2.2.2), мы получаем

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_i \mathbf{G}_{ij} y_j, \quad \mathbf{G}_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j). \quad (2.2.41) \quad \text{Te7a}$$

- **Задача 34.** Доказать, что форма  $f(\vec{x}, \vec{y})$  невырождена, если невырождена матрица  $\mathbf{G}$ , и наоборот.

Билинейные формы  $f_S$  и  $f_A$  называются симметричными и антисимметричными (или кососимметричными), соответственно, если

$$f_S(\vec{x}, \vec{y}) = f_S(\vec{y}, \vec{x}), \quad f_A(\vec{x}, \vec{y}) = -f_A(\vec{y}, \vec{x}). \quad (2.2.42) \quad \text{sas}$$

Множество билинейных форм образует векторное пространство. Любую билинейную форму  $f(\vec{x}, \vec{y})$  можно представить в виде суммы симметричной  $f_S$  и антисимметричной  $f_A$  билинейных форм

$$f_S(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x})], \quad f_A(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{y}, \vec{x})].$$



Для этих форм, пользуясь разложением (2.2.2), мы получаем

$$f_S(\vec{x}, \vec{y}) = x_i \mathbf{g}_{ij} y_j, \quad f_A(\vec{x}, \vec{y}) = x_i \mathbf{c}_{ij} y_j, \quad (2.2.43) \quad \text{Te7b}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T), \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{G}^T), \\ \mathbf{g}_{ij} &= f_S(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \mathbf{g}_{ji}, \quad \mathbf{c}_{ij} = f_A(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -\mathbf{c}_{ji}. \end{aligned} \quad (2.2.44) \quad \text{Te7c}$$

Требование невырожденности форм  $f_S(\vec{x}, \vec{y})$  и  $f_A(\vec{y}, \vec{x})$  эквивалентно невырожденности матриц  $\|\mathbf{g}_{ij}\|$  и  $\|\mathbf{c}_{ij}\|$ , откуда, в частности, следует, что форма  $f_A(\vec{y}, \vec{x})$  может быть невырожденной только в четно-мерных пространствах.

- **Задача 35.** Доказать, что нечетно-мерная кососимметричная матрица  $\|\mathbf{c}_{ij}\|$  всегда вырождена.

Симметричную билинейную форму в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  иногда называют *скалярным произведением* в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , а невырожденную антисимметричную билинейную форму в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  — *симплектической формой* в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ .

ISA  
но-  
вая фраза

Рассмотрим линейный оператор  $T$  в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , действие которого на произвольный вектор  $\vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  дается формулой (2.2.36). Условие инвариантности билинейной формы  $f(\vec{x}, \vec{y})$  относительно действия оператора  $T$  записывается в виде

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(T \cdot \vec{x}, T \cdot \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C}), \quad (2.2.45) \quad \text{Te8}$$

и сводится к инвариантности базисных билинейных форм  $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = f(T \cdot \vec{e}_i, T \cdot \vec{e}_j)$ , что согласно (2.2.33) эквивалентно соотношениям

$$\mathbf{G}_{ij} = T_{ki} \mathbf{G}_{km} T_{mj} \Rightarrow \mathbf{G} = T^T \cdot \mathbf{G} \cdot T. \quad (2.2.46) \quad \text{Te7}$$

**Утверждение 2.2.2** Множество  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$  невырожденных комплексных  $(n \times n)$  матриц  $\|T_{ij}\|$ , удовлетворяющих соотношению (2.2.46) с некоторой ненулевой матрицей  $\|\mathbf{G}_{ij}\|$ , образует подгруппу в матричной группе  $GL(n, \mathbb{C})$ .

**Доказательство.** Пусть невырожденные матрицы  $T_1, T_2$  принадлежат  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ , т.е. удовлетворяют (2.2.46). Тогда невырожденная матрица  $(T_1 \cdot T_2)$  также принадлежит  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ :

$$(T_1 \cdot T_2)^T \cdot \mathbf{G} \cdot (T_1 \cdot T_2) = T_2^T \cdot (T_1^T \cdot \mathbf{G} \cdot T_1) \cdot T_2 = T_2^T \cdot \mathbf{G} \cdot T_2 = \mathbf{G}.$$

Единичная матрица  $I_n$  очевидно содержится в  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ . Наконец, если  $T \in \mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ , то, умножая (2.2.46) слева на  $(T^T)^{-1}$  и справа на  $T^{-1}$ , мы получаем  $(T^{-1})^T \cdot \mathbf{G} \cdot T^{-1} = \mathbf{G}$ , т.е.  $T^{-1}$  также содержится в  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ . ■

Заметим, что условие (2.2.46) можно переписать как систему двух соотношений

$$(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) = T^T \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \cdot T, \quad (\mathbf{G} - \mathbf{G}^T) = T^T \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{G}^T) \cdot T, \quad (2.2.47) \quad \text{Te77}$$

и если  $\mathbf{G}$  не обладает специальными свойствами симметрии, то множество матриц  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$  (2.2.46) есть пересечение двух множеств  $\mathcal{O}_{\mathbf{g}}$  и  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ , где  $\mathbf{g}$  — симметричная, а  $\mathbf{c}$  — кососимметричная матрицы, определяющие, согласно (2.2.44), симметричную и антисимметричную части билинейной формы  $f$ . Из общего Утверждения 2.2.2 следует,

что множества  $\mathcal{O}_{\mathbf{g}}$  и  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  также образуют группы, а их пересечение  $\mathcal{O}_{\mathbf{g}} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{c}}$  дает, вообще говоря, весьма специальную матричную подгруппу  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$  в  $\mathcal{O}_{\mathbf{g}}$  и в  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ . В дальнейшем мы в основном будем обсуждать примеры более общих групп  $\mathcal{O}_{\mathbf{g}}$  и  $\mathcal{O}_{\mathbf{c}}$ , которые связаны с инвариантностью симметричной  $f_S$  или антисимметричной  $f_A$  билинейных форм.

Отметим, что в случае симметричных билинейных форм инвариантность (2.2.45) для произвольных  $\vec{x}, \vec{y}$  эквивалентна условию  $f_S(\vec{x}, \vec{x}) = f_S(T \cdot \vec{x}, T \cdot \vec{x})$ ,  $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ . Это следует из очевидного соотношения

$$2 f_S(\vec{x}, \vec{y}) = f_S(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) - f_S(\vec{x}, \vec{x}) - f_S(\vec{y}, \vec{y}). \quad (2.2.48) \quad \text{mapa11b}$$

Изложенная выше конструкция прямо переносится на вещественный случай, когда в качестве векторного пространства фигурирует  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$ , матрица  $\|\mathbf{G}_{ij}\|$  вещественна, а группа  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$  состоит из вещественных матриц,  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}} \subset GL(n, \mathbb{R})$ . Утверждение 2.2.2 справедливо и в этом случае.

В комплексных векторных пространствах  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  можно определить дополнительную структуру  $f_H(\vec{x}, \vec{y})$ , которая называется эрмитовой формой. Инвариантность эрмитовых форм также приводит к возникновению содержательных примеров матричных групп.

**ISA**  
Переписал  
фразу

**Определение 2.2.8** Функция  $f_H(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{C}$ , где  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , называется эрмитовой формой на пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , если эта функция линейна по второму аргументу:

$$f_H(\vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha f_H(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f_H(\vec{x}, \vec{z}), \quad (2.2.49) \quad \text{hers1}$$

и удовлетворяет свойству эрмитовости (ср. с (2.2.42))

$$f_H(\vec{x}, \vec{y}) = f_H^*(\vec{y}, \vec{x}). \quad (2.2.50) \quad \text{hers}$$

Из свойств (2.2.49) и (2.2.50) следует антилинейность (сопряженная линейность)  $f_H$  по первому аргументу:

$$f_H(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{z}) = \alpha^* f_H(\vec{x}, \vec{z}) + \beta^* f_H(\vec{y}, \vec{z}). \quad (2.2.51) \quad \text{hers2}$$

Матрица  $\|\mathbf{H}_{ij}\|$  базисных эрмитовых форм  $\mathbf{H}_{ij} = f_H(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$  в силу соотношения (2.2.50) удовлетворяет условию эрмитовости  $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$ . С помощью матрицы  $\|\mathbf{H}_{ij}\|$  эрмитова форма представляется в виде  $f_H(\vec{x}, \vec{y}) = x_i^* \mathbf{H}_{ij} y_j$ . Инвариантность эрмитовой формы  $f_H(\vec{x}, \vec{y})$  относительно действия оператора  $T$

$$f_H(\vec{x}, \vec{y}) = f_H(T \cdot \vec{x}, T \cdot \vec{y}) \quad \Leftrightarrow \quad f_H(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = f_H(T \cdot \vec{e}_i, T \cdot \vec{e}_j),$$

сводится согласно (2.2.33) к обобщенному соотношению унитарности для матриц  $\|T_{ij}\|$ :

$$\mathbf{H}_{ij} = T_{ki}^* \mathbf{H}_{km} T_{mj} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = T^\dagger \cdot \mathbf{H} \cdot T, \quad (2.2.52) \quad \text{Te7u}$$

(при  $\mathbf{H} = I_n$  мы имеем стандартное условие унитарности  $I_n = T^\dagger \cdot T$ ).

**Утверждение 2.2.3** Множество  $U_{\mathbf{H}}$  невырожденных комплексных  $(n \times n)$  матриц  $\|T_{ij}\|$ , удовлетворяющих соотношению (2.2.52), где  $\|\mathbf{H}_{ij}\|$  – некоторая эрмитова матрица, образует подгруппу в матричной группе  $GL(n, \mathbb{C})$ .

**Доказательство.** Аналогично доказательству Утверждения 2.2.2. ■

### 2.2.5 Матричные группы $O$ , $Sp$ и $U$ типов.

Используя инвариантность симметричных и антисимметричных билинейных форм, а также эрмитовых форм, в дополнение к сериям групп  $GL(n, \mathbb{C})$  и  $SL(n, \mathbb{C})$ , мы приходим к определению серий классических групп, которые называются ортогональными ( $O$ ), симплектическими ( $Sp$ ) и унитарными ( $U$ ), соответственно.

ISA ред.  
правка

#### А. Группы комплексных ортогональных матриц $O(n, \mathbb{C})$ и $SO(n, \mathbb{C})$ .

Множество комплексных матриц  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ , удовлетворяющих (2.2.46), где  $\mathbf{G} = I_n$ , т.е. множество ортогональных матриц

$$O^T \cdot O = I_n, \quad (2.2.53) \quad \text{Te7o}$$

образует ортогональную группу  $O(n, \mathbb{C})$ . Подмножество ортогональных матриц, удовлетворяющих (2.2.53), и таких, что  $\det(O) = +1$ , образует группу специальных ортогональных матриц  $SO(n, \mathbb{C})$ , которая является подгруппой в  $O(n, \mathbb{C})$ .

- **Задача 36.** Доказать, что все группы комплексных матриц  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$ , удовлетворяющих (2.2.46), где  $\mathbf{G}$  – невырожденная симметричная  $(n \times n)$  матрица, изоморфны группе  $O(n, \mathbb{C})$ . Указание: воспользоваться тем, что с помощью комплексного преобразования (2.2.38) базис в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  всегда приводится к ортонормированному виду относительно скалярного произведения (2.2.41) (невырожденная  $n \times n$  симметричная матрица  $\|\mathbf{G}_{ij}\|$  всегда приводится к виду  $\|\mathbf{G}_{ij}\| = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ ).

В качестве примера, иллюстрирующего утверждение Задачи 36, рассмотрим группу  $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}$  комплексных  $(n \times n)$  матриц, удовлетворяющих (2.2.46), где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \equiv I_{p,q}, \quad n = p + q. \quad (2.2.54) \quad \text{HJ}$$

То есть, рассмотрим множество  $\mathcal{O}_{I_{p,q}}$  комплексных матриц  $\tilde{O}$  таких, что

$$\tilde{O}^T \cdot I_{p,q} \cdot \tilde{O} = I_{p,q}. \quad (2.2.55) \quad \text{Te7co}$$

Комплексная группа  $\mathcal{O}_{I_{p,q}}$  изоморфна группе  $O(n, \mathbb{C})$  и этот изоморфизм устанавливается соотношениями

$$O = S_{p,q} \cdot \tilde{O} \cdot S_{p,q}^{-1}, \quad S_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & i I_q \end{pmatrix}, \quad (2.2.56) \quad \text{GJ}$$

где  $\tilde{O} \in \mathcal{O}_{I_{p,q}}$  и  $O \in O(n, \mathbb{C})$ .

#### В. Группы комплексных симплектических матриц $Sp(2r, \mathbb{C})$ .

Пусть  $J$  – специальная невырожденная кососимметричная  $(2r \times 2r)$  матрица, которую удобно представить в виде блочной  $(2 \times 2)$  матрицы

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.57) \quad \text{Te9}$$

Здесь  $0$  обозначает нулевую  $(r \times r)$  матрицу. Множество  $\mathcal{O}_J$  комплексных  $(2r \times 2r)$  матриц  $T$ , удовлетворяющих условию (2.2.46) с  $\mathbf{G} = J$ :

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.58) \quad \text{Te7sp}$$

образует симплектическую группу  $Sp(2r, \mathbb{C})$ .

- **Задача 37.** Доказать, что все группы  $\mathcal{O}_c$  комплексных матриц, удовлетворяющих (2.2.46), где  $\mathbf{G} = c$  – любая невырожденная кососимметричная  $(2r \times 2r)$  матрица, изоморфны группе  $Sp(2r, \mathbb{C})$ . Указание: воспользоваться тем, что любая кососимметричная четномерная  $2r \times 2r$  невырожденная матрица  $\|c_{ij}\|$  записывается в виде  $c = Q \cdot J \cdot Q^T$  (смотри (2.2.26)), где  $J$  задана в (2.2.57), а матрица  $Q$  невырождена.
- **Задача 38.** Установить изоморфизм групп  $Sp(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})$ .
- **Задача 39.** Доказать, что любая симплектическая матрица  $T$ , удовлетворяющая соотношению (2.2.58), имеет единичный детерминант  $\det(T) = 1$ . Указание: вычислить пфаффиан от обеих частей (2.2.58) и воспользоваться тождеством (2.2.23).

### С. Группы комплексных псевдо-унитарных матриц $U(p, q)$ и $SU(p, q)$ .

Множество  $U_{\mathbf{H}}$  комплексных  $(n \times n)$  матриц  $U$ , удовлетворяющих (2.2.52), где в качестве  $\mathbf{H}$  выбрана матрица  $I_{p,q}$  (2.2.54):

$$U^\dagger \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad (2.2.59) \quad \text{Te7uu}$$

образует псевдо-унитарную группу  $U(p, q)$ . Матрицы  $U$ , подчиняющиеся условию (2.2.59), называются псевдо-унитарными. Подмножество псевдо-унитарных матриц  $U$  таких, что  $\det(U) = 1$ , образует в  $U(p, q)$  подгруппу специальных псевдо-унитарных матриц, которая обозначается  $SU(p, q)$ . Группы  $SU(p, n-p)$ , как и группа  $SL(n, \mathbb{R})$ , являются подгруппами в  $SL(n, \mathbb{C})$ .

- **Задача 40.** Доказать, что любая группа комплексных матриц  $U_{\mathbf{H}}$ , удовлетворяющих (2.2.52), где  $\mathbf{H}$  – некоторая невырожденная эрмитова  $(n \times n)$  матрица, изоморфна одной из групп  $U(p, n-p)$ . Указание: воспользоваться тем, что невырожденная  $n \times n$  эрмитова матрица  $\|H_{ij}\|$  с помощью унитарного преобразования всегда приводится к диагональной матрице с вещественными диагональными элементами.

Отметим, что любую комплексную матрицу  $U \in U(p, q)$  можно представить в виде  $U = (X + iY)$ , где  $X$  и  $Y$  – две вещественные матрицы, которые в силу условий (2.2.59) должны удовлетворять соотношениям

$$X^T I_{p,q} X + Y^T I_{p,q} Y = I_{p,q}, \quad X^T I_{p,q} Y - Y^T I_{p,q} X = 0.$$

Эти соотношения можно записать в виде одного условия

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \quad (2.2.60) \quad \text{Te10}$$

на вещественные  $(2p + 2q) \times (2p + 2q)$  матрицы.

**Д. Унитарные группы  $U(n)$  и  $SU(n)$ .**

В частном случае, когда  $p = n, q = 0$  (или  $p = 0, q = n$ ), из группы  $U(p, q)$  мы получаем группу  $U(n) = U(n, 0) = U(0, n)$  унитарных матриц  $U$ :

$$U^\dagger \cdot U = I_n .$$

При дополнительном условии  $\det(U) = 1$  из группы  $U(n)$  выделяется подгруппа  $SU(n) = SU(n, 0) = SU(0, n)$  специальных унитарных матриц.

**Е. Проективные псевдо-унитарные  $PSU(p, q)$  и проективные линейные  $PSL(n, \mathbb{K})$  группы.**

В группе  $SU(p, q)$ , где  $p + q = n$ , имеется конечная инвариантная подгруппа матриц

$$U_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) I_n \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) . \quad (2.2.61) \quad \text{psu}$$

Действительно, матрицы  $U_k$  удовлетворяют (2.2.59) и  $\det(U_k) = 1$ , то есть  $U_k \in SU(p, q)$ . Эта подгруппа изоморфна  $\mathbf{Z}_n$  и образует центр в  $SU(p, q)$ . Фактор-группа  $SU(p, q)/\mathbf{Z}_n$  называется проективной псевдо-унитарной группой и обозначается  $PSU(p, q)$ .

- **Задача 41.** В группе  $U(p, q)$  ( $p + q = n$ ) имеется инвариантная подгруппа матриц, имеющих вид  $U = \exp(i\phi) I_n$ , где  $\phi \in \mathbb{R}$ . Эта подгруппа изоморфна  $U(1)$ . Доказать, что

$$U(p, q)/U(1) = SU(p, q)/\mathbf{Z}_n = PSU(p, q) .$$

Группа  $\mathbf{Z}_n$  матриц (2.2.61) образует центр также и в специальной линейной группе  $SL(n, \mathbb{C})$ , которая включает в себя  $SU(p, q)$  как подгруппу. Фактор группа  $SL(n, \mathbb{C})/\mathbf{Z}_n$  называется проективной комплексной линейной группой и обозначается  $PSL(n, \mathbb{C})$ . У вещественных четномерных групп  $SL(2n, \mathbb{R})$  также имеется нетривиальный центр  $\mathbf{Z}_2 = \{I_{2n}, -I_{2n}\}$ , а соответствующие фактор-группы  $SL(2n, \mathbb{R})/\mathbf{Z}_2$  называются проективными вещественными линейными группами и обозначаются  $PSL(2n, \mathbb{R})$ .

**Ф. Вещественные  $Sp(2r, \mathbb{R})$  и унитарные  $USp(2r)(= Sp(r))$  симплектические группы. Группы  $Sp(p, q)$ .**

В группе  $Sp(2r, \mathbb{C})$  комплексных симплектических  $2r \times 2r$  матриц (см. пункт В.) имеется несколько важных подгрупп. Первая подгруппа  $Sp(2r, \mathbb{R})$  – это множество вещественных  $2r \times 2r$  матриц  $T$ , удовлетворяющих условию (2.2.58). Вторая подгруппа  $USp(2r)$  – это множество комплексных  $2r \times 2r$  матриц  $T$ , удовлетворяющих как условию симплектичности (2.2.58), так и условию унитарности  $T^\dagger \cdot T = I_n$ , поэтому  $USp(2r) = Sp(2r, \mathbb{C}) \cap U(2r)$ .

В  $Sp(2r, \mathbb{C})$  имеется также еще целая серия подгрупп, которые обозначаются  $Sp(p, q)$  (здесь  $p + q = r$ ). Эти группы определяются как множества комплексных  $2r \times 2r$  матриц  $T$ , удовлетворяющих одновременно условию симплектичности (2.2.58) и условию псевдо-унитарности

$$T^\dagger \cdot \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}, \quad (2.2.62) \quad \text{su-pq}$$

где матрица  $I_{p,q}$  определена в (2.2.54). Соотношение (2.2.58) выделяет группу  $Sp(2r, \mathbb{C})$ , а (2.2.62) – группу  $U(2p, 2q)$ , поэтому  $Sp(p, q) = Sp(2r, \mathbb{C}) \cap U(2p, 2q)$ . Очевидно, что  $Sp(r, 0) = Sp(0, r) = USp(2r)$ , поэтому группа  $USp(2r)$  унитарных симплектических  $2r \times 2r$  матриц иногда обозначается просто как  $Sp(r)$ .

- **Задача 42.** Установить изоморфизм  $USp(2) = SU(2)$ .

Определим группу  $Sp'(p, q)$ , где  $p + q = r$ , как множество комплексных  $2r \times 2r$  матриц  $T$ , удовлетворяющих одновременно условию псевдо-унитарности (2.2.62) и нестандартному условию симплектичности (ср. с (2.2.58))

$$T^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.63) \quad \text{sp-pq}$$

- **Задача 43.** \*<sup>6</sup> Установить изоморфизм  $Sp'(p, q) = Sp(p, q)$ .

**Г. Группы вещественных псевдо-ортогональных матриц  $O(p, q)$ ,  $SO(p, q)$  и  $PSO(p, q)$ .**

Множество вещественных  $(n \times n)$  матриц  $O \in \mathcal{O}_G$ , удовлетворяющих (2.2.46), где  $G = I_{p,q}$  (2.2.54) и  $n = p + q$ , т.е. множество матриц, подчиняющихся условиям

$$O^T \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \cdot O = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad (2.2.64) \quad \text{Te7po}$$

образует псевдо-ортогональную группу  $O(p, q)$ . Подмножество псевдо-ортогональных матриц (2.2.64) таких, что  $\det(O) = 1$  образует подгруппу  $SO(p, q) \subset O(p, q)$  специальных псевдо-ортогональных матриц.

- **Задача 44.** Доказать, что группа вещественных матриц  $\mathcal{O}_G$ , удовлетворяющих (2.2.46), где  $G = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  и  $\epsilon_i > 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ),  $\epsilon_j < 0$  ( $j = p + 1, \dots, n$ ), изоморфна группе  $O(p, n - p)$ . Указание: рассмотреть преобразование подобия  $O \rightarrow D \cdot O \cdot D^{-1}$  для матриц  $O \in \mathcal{O}_G$  с диагональными вещественными матрицами  $D$ .
- **Задача 45.** Доказать, что любая группа вещественных матриц  $\mathcal{O}_G$ , удовлетворяющих (2.2.46), где  $G$  – некоторая невырожденная вещественная симметричная  $(n \times n)$  матрица, изоморфна одной из групп  $O(p, n - p)$ . Указание: воспользоваться тем, что с помощью ортогонального преобразования невырожденная вещественная симметричная  $n \times n$  матрица  $\|G_{ij}\|$  всегда приводится к диагональному виду.

<sup>6</sup>Решения задач, которые помечены звездочкой, даны в конце книги, см. Приложение 1.

Вещественные группы  $O(p, n-p)$  являются подгруппами в  $O(n, \mathbb{C})$ . Точнее, согласно изоморфизму  $O(n, \mathbb{C}) = \mathcal{O}_{I_{p, n-p}}$  (2.2.56), в группе  $O(n, \mathbb{C})$  содержится подгруппа, изоморфная  $O(p, n-p)$ . Соответственно группы  $SO(p, n-p)$  можно рассматривать как подгруппы в  $SO(n, \mathbb{C})$ .

Отметим также, что группы  $U(p, q)$  псевдоунитарных матриц (2.2.59) всегда вкладываются как подгруппы в группу псевдоортогональных матриц  $O(2p, 2q)$ . Вложение, в соответствии с (2.2.60), задается соотношениями:

$$U = (X + iY) \in U(p, q) \Rightarrow \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \in O(2p, 2q). \quad (2.2.65) \quad \text{TeU0}$$

При этом надо учесть, что множество всех вещественных матриц  $O$ , удовлетворяющих соотношениям

$$O^T \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} O = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}, \quad (2.2.66) \quad \text{Te10a}$$

образует группу, изоморфную группе  $O(2p, 2q)$ .

- **Задача 46.** Установить изоморфизм группы  $O(2p, 2q)$  и группы вещественных матриц  $O$ , удовлетворяющих условию псевдо-ортогональности (2.2.66). Указание: смотри результат Задачи 43.

В группе  $SO(p, q)$ , где  $p + q$  – четное число, имеется центр  $\mathbf{Z}_2 = \{I_{p+q}, -I_{p+q}\}$ . Поэтому мы можем определить фактор-группу  $SO(p, q)/\mathbf{Z}_2 = PSO(p, q)$ , которая называется проективной псевдоортогональной группой.

#### Н. Группы $O(n)$ и $SO(n)$ вещественных ортогональных матриц.

В частном случае, когда  $p = n$ ,  $q = 0$  или  $p = 0$ ,  $q = n$ , из псевдо-ортогональной группы  $O(p, q)$  получается уже известная нам группа  $O(n) = O(n, 0) = O(0, n)$  ортогональных вещественных матриц  $O = ||O_{ij}||$ , т.е. таких матриц, что

$$O^T \cdot O = I_n, \quad O_{ij} \in \mathbb{R}.$$

При наложении дополнительного условия  $\det(O) = +1$  из группы  $O(n)$  выделяется вещественная подгруппа  $SO(n) = SO(n, 0) \subset O(n)$  специальных ортогональных матриц. Отметим, что с помощью формулы (2.2.60), где  $q = 0$ , унитарную группу  $U(p)$  всегда можно вложить в ортогональную группу  $O(2p)$ .

#### И. Группы Лоренца и анти-де Ситтера.

В случае, когда  $p = 1$ ,  $q = n - 1$  (или  $p = n - 1$ ,  $q = 1$ ), группа  $O(1, n - 1)$  называется группой Лоренца  $n$ -мерного пространства, а группа  $SO(1, n - 1)$  – собственной группой Лоренца  $n$ -мерного пространства. Важным частным случаем является группа Лоренца четырехмерного пространства  $O(1, 3)$ . Группа  $O(2, n - 2)$  называется группой анти-де Ситтера  $n$ -мерного пространства, а группа  $SO(2, n - 2)$  – собственной группой анти-де Ситтера  $n$ -мерного пространства.

## 2.3 Отображения. Группы и преобразования. Конформная группа.

### 2.3.1 Понятие отображения

Преобразования из групп  $C_n$  и  $D_n$ , примеры которых рассмотрены в пунктах 5-7 раздела 2.1.1, а также перестановки  $n$  чисел  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , представляющие собой элементы из группы перестановок  $S_n$ , можно рассматривать как различные взаимнооднозначные отображения (2.1.9) из множества  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  в то же самое множество. Эти примеры показывают, что понятие группы тесно связано с понятием отображения, или точнее с понятием множества отображений.

Понятие отображения является центральным для многих разделов математики. Математическое понятие отображения (mapping) возникло путем абстрагирования понятия карты или плана (map) города, местности и т.д. В математике под отображением понимают установление соответствия между элементами исходного множества  $X$  и элементами некоторого другого множества  $Y$  (образа). Важное требование для отображения - это невозможность ставить в соответствие одному элементу исходного множества  $X$  два и более различных элементов из  $Y$  (см. рис.2 А.). Действительно, одному объекту на местности не могут соответствовать две разные точки на карте. В то же время различным элементам исходного множества  $X$  может соответствовать единственный элемент образа (см. рис.2 В.).



Рис. 2: Соответствие между элементами множеств  $X$  и  $Y$ .

Вернемся к рассмотрению отображения (2.1.9), где в качестве элементов образа  $Y$  возьмем  $n$  различных абстрактных символов  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = Y$ . Каждому элементу из исходного множества  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  сопоставляется единственный элемент из образа  $Y$  и наоборот. Такое отображение называется взаимнооднозначным (или биекцией). Очевидно, что взаимнооднозначное отображение обратимо (достаточно поменять все стрелки в (2.1.9) на обратные).

Рассмотрим теперь другое отображение  $f: X \rightarrow Y$ , заданное следующим образом

$$f: \quad \{1 \rightarrow a_1, 2 \rightarrow a_1, 3 \rightarrow a_3, 4 \rightarrow a_4, \dots, n \rightarrow a_n\}. \quad (2.3.1) \quad \text{ine}$$

Данное отображение не является взаимнооднозначным. Все множество  $X$  отображается в  $Y$  лишь на подмножество  $\{a_1, a_3, a_4, \dots, a_n\} \subset Y$ , то есть образом  $f$  является подмножество в  $Y$ , причем двум разным элементам  $\{1, 2\}$  из  $X$  соответствует единственный элемент  $a_1 \in Y$  (см. рис.2 В.). Данное отображение необратимо, т.е. для  $f$  невозможно определить обратное отображение, так как поворот всех стрелок в



(2.3.1) приводит к необходимости отобразить один элемент из  $Y$  в два различных элемента из  $X$ , что запрещено, (см. рис.2 А.).

В дальнейшем мы будем различать отображение "на" множество  $Y$ , когда в качестве образа выступает все множество  $Y$ , и отображение "в" множество  $Y$ , когда в качестве образа выступает некоторое подмножество в  $Y$  (это подмножество может совпадать с  $Y$ ). Взаимно-однозначное отображение  $X$  на некоторое подмножество  $Y'$  в  $Y$  называется инъекцией из  $X$  в  $Y$ .

Другой пример отображения дается таблицей умножения (таблицей Кэли) группы  $D_5$  (см. раздел 2.1.1). При этом отображении, обозначим его  $m$ , паре элементов из  $D_5$  сопоставляется результат их умножения, т.е. единственный элемент из  $D_5$ , приведенный в таблице. Таким образом, умножение  $m$  представляется как отображение:  $D_5 \times D_5 \xrightarrow{m} D_5$ , где в качестве множеств  $X$  и  $Y$  мы имеем  $D_5 \times D_5$  и  $D_5$ , соответственно. Этот пример иллюстрирует то, как можно абстрактно определить умножение элементов в любом множестве  $G$ , а именно, умножение в  $G$  задается как отображение  $m: G \times G \rightarrow G$  (т.е. двум элементам из  $G$  сопоставляется элемент из  $G$ ).

Множество  $X$  называется областью определения или прообразом отображения  $X \rightarrow Y$ , а множество тех элементов из  $Y$ , на которые отображаются элементы из  $X$ , называется областью значений или образом отображения  $X \rightarrow Y$ .

### 2.3.2 Гомоморфизм. Ядро и образ гомоморфизма.

Отметим еще один, важный для нас тип отображений. Вспомним, что каждому линейному оператору  $T$ , действующему в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , мы сопоставляли матрицу  $\|T_{ij}\|$  (2.2.33), причем двум операторам  $T_1$  и  $T_2$  сопоставлялись матрицы  $\|(T_1)_{ij}\|$  и  $\|(T_2)_{ij}\|$  так, что произведению операторов  $(T_1 \cdot T_2)$  сопоставлялось произведение их матриц (2.2.34). Тем самым было определено отображение  $\rho$  из группы линейных невырожденных операторов, действующих в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , в группу матриц  $GL(n, \mathbb{C})$ , и для этого отображения выполнялось важное свойство  $\rho(T_1 \cdot T_2) = \rho(T_1) \cdot \rho(T_2)$ .

**Определение 2.3.1** Отображение  $\rho$  группы  $G$  в другую группу  $G'$  называют гомоморфизмом, если оно согласовано с групповой операцией, т.е.

$$\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2), \quad (2.3.2) \quad \text{dhom}$$

для всех  $g_1, g_2 \in G$ . В соответствии с Определением 2.1.4 гомоморфное отображение  $\rho$  называется изоморфизмом, если оно является взаимнооднозначным отображением из  $G$  на всю группу  $G'$ . Изоморфизм группы  $G$  на себя называется автоморфизмом. Отображение  $\rho$  называется мономорфизмом, если  $\rho$  — инъективный гомоморфизм в  $G'$ , и  $\rho$  взаимно однозначно отображает  $G$  на некоторое подмножество в  $G'$ . Наконец, гомоморфизм  $\rho$  группы  $G$  на всю группу  $G'$  называется эпиморфизмом.

Отметим, что при гомоморфизме  $\rho: G \rightarrow G'$  справедливо равенство

$$\rho(e) = e', \quad (2.3.3) \quad \text{vr-add1}$$

где  $e$  и  $e'$  — единицы в  $G$  и  $G'$ . Это равенство возникает, если соотношение  $\rho(e) \cdot \rho(e) = \rho(e)$ , вытекающее из (2.3.2), умножить на  $[\rho(e)]^{-1}$ .

ISA ред.  
правкаISA ред.  
правка

**Примеры.**

1. Примером автоморфизма  $\rho: D_n \rightarrow D_n$  может служить отображение элементов  $a \in D_n$ , осуществляемое с помощью преобразования:  $a \rightarrow \rho(a) = r a r$ . Действительно,  $\rho$  — гомоморфизм

$$\rho(a) \cdot \rho(b) = r \cdot a \cdot r^2 \cdot b \cdot r = r \cdot a \cdot b \cdot r = \rho(a \cdot b) \quad \forall a, b \in D_n,$$

и согласно (2.1.2), (2.1.4) и (2.1.5) он обратим и является изоморфизмом

$$g_k \rightarrow \rho(g_k) = g_{-k}, \quad r \rightarrow \rho(r) = r.$$

2. Примером тривиального гомоморфизма служит отображение  $G \rightarrow e'$  всех элементов группы  $G$  в единичный элемент  $e'$  некоторой другой группы  $G'$ .

Пусть отображение  $\rho: G \rightarrow G'$  — гомоморфизм из группы  $G$  в группу  $G'$ . Подмножество  $\text{Ker}(\rho)$  элементов из  $G$ , отображающихся с помощью  $\rho$  в единичный элемент  $e' \in G'$ , называется ядром гомоморфизма  $\rho$ . Подмножество элементов  $\text{Im}(\rho) \subset G'$ , на которое отображается группа  $G$  при отображении  $\rho$ , называется образом гомоморфизма  $\rho$ .

**Утверждение 2.3.1** 1.) Образ  $\text{Im}(\rho)$  гомоморфизма  $\rho: G \rightarrow G'$  образует подгруппу в  $G'$ . 2.) Ядро  $\text{Ker}(\rho)$  гомоморфизма  $\rho: G \rightarrow G'$  есть инвариантная подгруппа в  $G$ .

**Доказательство.**

1.) Пусть  $g'_1, g'_2 \in \text{Im}(\rho) \subset G'$ , тогда  $\exists g_1, g_2 \in G$  такие, что  $\rho(g_1) = g'_1$  и  $\rho(g_2) = g'_2$ . Отсюда следует, что

$$g'_1 \cdot g'_2 = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2) = \rho(g_1 \cdot g_2),$$

т.е.  $g'_1 \cdot g'_2 \in \text{Im}(\rho)$ . В силу (2.3.3)  $e' \in \text{Im}(\rho)$ . Наконец, положим в (2.3.2)  $g_2 = g_1^{-1}$ , тогда (2.3.2) дает  $\rho(e) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_1^{-1})$  и, поскольку  $\rho(e) = e'$ , мы получаем

$$\rho(g_1^{-1}) = (\rho(g_1))^{-1} = (g'_1)^{-1},$$

т.е.  $(g'_1)^{-1} \in \text{Im}(\rho)$ , если  $g'_1 \in \text{Im}(\rho)$ .

2.) Пусть  $k_1, k_2 \in \text{Ker}(\rho)$  и  $e'$  — единичный элемент в  $G'$ . Из условий  $\rho(k_1) = e'$  и  $\rho(k_2) = e'$  следует  $\rho(k_1 \cdot k_2) = \rho(k_1) \cdot \rho(k_2) = e'$  и поэтому  $k_1 \cdot k_2 \in \text{Ker}(\rho)$ . Кроме того, в силу (2.3.3)  $e \in \text{Ker}(\rho)$ , и если  $k \in \text{Ker}(\rho)$ , то  $k^{-1} \in \text{Ker}(\rho)$ . Последнее справедливо, так как  $\forall k \in \text{Ker}(\rho)$  выполнено

$$e' = \rho(e) = \rho(k \cdot k^{-1}) = \rho(k) \cdot \rho(k^{-1}) = \rho(k^{-1}).$$

Таким образом,  $\text{Ker}(\rho)$  — подгруппа в  $G$ . Подгруппа  $\text{Ker}(\rho)$  — инвариантна, т.к.  $\forall g \in G$  мы имеем

$$\rho(g \cdot \text{Ker}(\rho) \cdot g^{-1}) = \rho(g) \cdot e' \cdot \rho(g^{-1}) = \rho(g \cdot g^{-1}) = \rho(e) = e',$$

следовательно,  $g \cdot \text{Ker}(\rho) \cdot g^{-1} \subset \text{Ker}(\rho)$ . ■

Критерий взаимной однозначности гомоморфизма из группы  $G$  в группу  $G'$  дается следующим утверждением.

**Утверждение 2.3.2** Если ядро  $\text{Ker}(\rho)$  гомоморфизма  $\rho : G \rightarrow G'$  тривиально, то  $\rho$  – мономорфизм в  $G'$ , т.е. группа  $G$  изоморфна  $\text{Im}(\rho) \subset G'$ .

**Доказательство.** Докажем это утверждение от противного. Пусть ядро гомоморфизма  $\rho$  тривиально, т.е. состоит только из одного элемента  $e$ :  $\rho(e) = e'$  и  $\forall g \neq e$  мы имеем  $\rho(g) \neq e'$ , и пусть  $\rho$  – не мономорфизм, т.е.  $\exists g_1, g_2$  такие, что  $g_1 \neq g_2$  и  $\rho(g_1) = \rho(g_2)$ . Из последнего соотношения следует, что  $\rho(g_1 \cdot g_2^{-1}) = e'$ , т.е. элемент  $g_1 \cdot g_2^{-1} \in \text{Ker}(\rho)$ , а из первого мы имеем  $g_1 \cdot g_2^{-1} \neq e$ , что противоречит нашему первоначальному утверждению о тривиальности ядра  $\text{Ker}(\rho)$ . ■

Следующая Теорема демонстрирует важность группы перестановок  $S_n$  при изучении свойств конечных групп.

**Теорема 2.3.3 (Кэли)** Любая конечная группа  $G$  порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок  $S_n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  – элементы группы  $G$ . Для любого элемента  $g_i \in G$  определим множество элементов  $\{g_i \cdot g_1, g_i \cdot g_2, \dots, g_i \cdot g_n\}$ , которое совпадает с множеством  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , но записано в другом порядке. Действительно, из  $g_k \neq g_m$  следует, что  $g_i \cdot g_k \neq g_i \cdot g_m$ , т.е. все  $n$  элементов  $\{g_i \cdot g_1, g_i \cdot g_2, \dots, g_i \cdot g_n\}$  разные и, следовательно, перечисляют изначальный набор  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Таким образом, каждому элементу  $g_i$  сопоставляется перестановка

$$p(g_i) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_n \\ g_i \cdot g_1 & g_i \cdot g_2 & g_i \cdot g_3 & \dots & g_i \cdot g_n \end{pmatrix} \quad (2.3.4) \quad \text{pgi}$$

$n$  элементов группы  $G$ . Тем самым определено отображение  $p: g_i \rightarrow p(g_i)$  из  $G$  в группу  $S_n$ , которое является гомоморфизмом. Действительно,

$$\begin{aligned} p(g_i) \cdot p(g_k) &= \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_n \\ g_i \cdot g_1 & g_i \cdot g_2 & g_i \cdot g_3 & \dots & g_i \cdot g_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_n \\ g_k \cdot g_1 & g_k \cdot g_2 & g_k \cdot g_3 & \dots & g_k \cdot g_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} g_k \cdot g_1 & g_k \cdot g_2 & \dots & g_k \cdot g_n \\ g_i \cdot g_k \cdot g_1 & g_i \cdot g_k \cdot g_2 & \dots & g_i \cdot g_k \cdot g_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_k \cdot g_1 & g_k \cdot g_2 & \dots & g_k \cdot g_n \end{pmatrix} = p_{g_i g_k}. \end{aligned}$$

Образ гомоморфизма  $p$  (множество перестановок  $p(g_i)$ ) образует подгруппу в  $S_n$ . Эта подгруппа изоморфна  $G$ , т.к. тождественная перестановка  $p(e)$  является образом всего лишь одного единичного элемента  $e \in G$  и ядро отображения  $p$  тривиально. Согласно Утверждению 2.3.2 это означает, что отображение  $p$  – мономорфизм. ■

### 2.3.3 Точные последовательности.

Можно установить важную связь между инвариантными подгруппами некоторого набора групп и гомоморфизмами между этими группами.

Рассмотрим последовательность групп и гомоморфизмов

$$G_0 \xrightarrow{\rho_0} G_1 \xrightarrow{\rho_1} G_2 \xrightarrow{\rho_2} \dots \quad (2.3.5) \quad \text{exse}$$

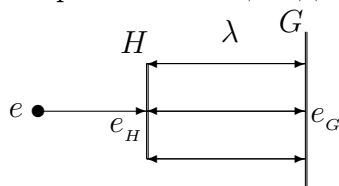
Образы гомоморфизмов  $\rho_i$  будем также обозначать  $\rho_i(G_i)$ , т.е.  $\rho_i(G_i) = Im(\rho_i)$ . Последовательность (2.3.5) называется точной, если образ  $\rho_{i-1}(G_{i-1}) \subset G_i$  совпадает с ядром  $\rho_i$ :  $\rho_{i-1}(G_{i-1}) = Ker(\rho_i)$ . Другими словами  $\rho_i(\rho_{i-1}(G_{i-1})) = e$ , причем  $\rho_i(g) \neq e$ , если  $g \notin \rho_{i-1}(G_{i-1})$ .

### Примеры.

1.) Если последовательность

$$e \longrightarrow H \xrightarrow{\lambda} G$$

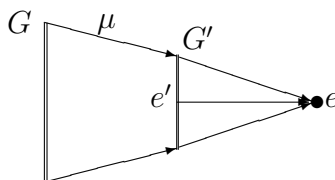
точна, то  $\lambda$  – мономорфизм (см. Определение 2.3.1) из  $H$  в  $G$  и  $H$  изоморфна своему образу  $\lambda(H) \subset G$ . Это следует из того, что ядро  $Ker(\lambda)$  тривиально, т.к. образом  $e$  в  $H$  может быть только один элемент, который совпадает с единицей в  $H$ . Проиллюстрируем этот факт с помощью диаграммы



2.) Аналогично, если последовательность

$$G \xrightarrow{\mu} G' \longrightarrow e$$

точна, то образом гомоморфизма  $\mu$  оказывается вся группа  $G'$ , так как вся группа  $G'$  принадлежит ядру второго гомоморфизма  $G' \rightarrow e$ :



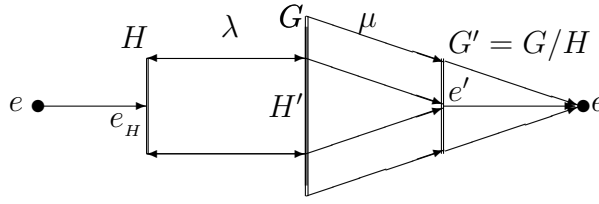
то есть гомоморфизм  $\mu$  является эпиморфизмом (см. Определение 2.3.1). С учетом примера 1.) мы заключаем, что если последовательность  $(e \rightarrow G \xrightarrow{\mu} G' \rightarrow e)$  точна, то  $\mu$  – изоморфизм, то есть одновременно является мономорфизмом и эпиморфизмом.

Из этих двух примеров также вытекает следующий факт.

**Утверждение 2.3.4** Пусть последовательность

$$e \longrightarrow H \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} G' \longrightarrow e \quad (2.3.6) \quad \text{exsec}$$

точна. Обозначим  $\lambda(H)$  как  $H'$ . Тогда  $H = H'$  – инвариантная подгруппа в  $G$  и фактор-группа  $G/H$  изоморфна группе  $G'$ . Это утверждение иллюстрируется следующей диаграммой:



**Доказательство.** Поскольку последовательность (2.3.6) точна, группа  $H$  изоморфна  $H'$  (см. Пример 1. выше), и группа  $H = H'$  должна быть ядром отображения  $\mu$ . Согласно Утверждению 2.3.1, ядро  $H' = H$  образует инвариантную подгруппу в  $G$ . В силу того, что  $\mu(H') = e'$ , где  $e'$  – единичный элемент в  $G'$ , каждый смежный класс  $gH' \subset G$ ,  $g \in G$ , отображается в единственный элемент  $\mu(g) \in G'$ :

$$\mu(gH') = \mu(g) \cdot \mu(H') = \mu(g) ,$$

а образы любых двух разных смежных классов  $gH'$  и  $g'H'$  (т.е. таких, что  $g^{-1}g' \notin H'$ ) не совпадают:  $\mu(g) \neq \mu(g')$ , т.к. мы имеем

$$\mu(g^{-1})\mu(g') = \mu(g^{-1}g') \neq e' .$$

Итак,  $\mu$  – взаимнооднозначное отображение из  $G/H'$  в  $G'$ . Кроме того,  $\mu$  – отображение на всю группу  $G'$  (см. Пример 2. выше) и это отображение, очевидно, сохраняет умножение в фактор-группе  $G/H'$ . Таким образом, отображение  $\mu$  устанавливает изоморфизм между множеством смежных классов  $G/H'$  (фактор-группой  $G/H'$ ) и всей группой  $G'$ :

$$G/H' = G' .$$

Вспоминая об изоморфизме  $H = H'$ , мы заключаем, что если последовательность (2.3.6) точна, то группа  $G'$  изоморфна факторгруппе  $G/H$ . ■

**Определение 2.3.2** Группа  $G$  называется расширением группы  $G'$  с помощью группы  $H$ , если эти группы образуют точную последовательность (2.3.6).

### Примеры.

**а.)** Пусть  $G' = \mathbb{C} \setminus 0$  – мультипликативная группа комплексных чисел с исключенным нулем. Рассмотрим гомоморфизм  $\mu: GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow G'$ , ставящий в соответствие матрице  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ , ее детерминант, т.е.  $\mu(A) = \det(A)$ . Поскольку единицей группы  $G'$  является число 1, ядро отображения  $\mu$  совпадает с подгруппой  $SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$ . Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$e \rightarrow SL(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\lambda} GL(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\mu} G' \rightarrow e , \quad (2.3.7) \quad \text{exseq}$$

где  $\lambda$  – вложение группы  $SL(n, \mathbb{C})$  в  $GL(n, \mathbb{C})$  как подгруппы. По построению последовательность (2.3.7) точна. Следовательно, согласно Утверждениям 2.3.1 и 2.3.4,  $SL(n, \mathbb{C})$  – инвариантная подгруппа в  $GL(n, \mathbb{C})$  и  $GL(n, \mathbb{C})/SL(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus 0$ .

**б.)** Простейший пример расширения группы  $G'$  с помощью группы  $H$  дается прямым произведением этих групп  $G = G' \times H$ . Пример **а.)** – это частный случай такого расширения. Более сложный пример расширения – полупрямое произведение групп  $G'$  и  $H$  – будет рассмотрен в разделе 2.3.5.

### 2.3.4 Группы преобразований. Линейные неоднородные группы.

Рассмотренная выше (см. Раздел 2.1.1, пункты 5-7) интерпретация преобразований симметрий из групп  $C_n$ ,  $D_n$  и  $S_n$  как взаимно-однозначных отображений (2.1.9) позволяет также ввести абстрактное определение симметрий некоторого множества  $M$ .

**Определение 2.3.3** Преобразованием симметрии (симметрией) множества  $M$  называется взаимно-однозначное и обратимое отображение  $\phi: M \rightarrow M$ . Если множество  $M$  наделено некоторыми структурами (например, структурой векторного пространства, векторного пространства со скалярным произведением, и так далее), то симметрия  $\phi$  должна сохранять эти структуры.

На множестве  $G_M$  всех симметрий  $\phi: M \rightarrow M$  можно определить умножение двух симметрий  $\phi_1$  и  $\phi_2$  как отображение  $\phi_1 \cdot \phi_2$ , получающееся в результате последовательного применения отображений  $\phi_2$  и  $\phi_1$ . Множество  $G_M$  с заданной таким образом операцией умножения образует группу. Действительно, такое умножение ассоциативно, единичный элемент – это тождественное отображение  $M \rightarrow M$ , а в силу однозначности отображения  $\phi: M \rightarrow M$  обратное отображение  $\phi^{-1}$  – тоже симметрия  $M$ .

Будем говорить, что группа  $G$  действует на множестве  $M$ , если имеется отображение  $F$ , которое паре элементов  $g \in G$  и  $\xi \in M$  сопоставляет элемент  $\eta \in M$ :

$$\eta = F(g, \xi), \quad (2.3.8) \quad \text{пара1}$$

причем для единичного элемента  $e \in G$  и  $\forall g_1, g_2 \in G$  мы имеем

$$\xi = F(e, \xi), \quad F(g_1, F(g_2, \xi)) = F(g_1 \cdot g_2, \xi), \quad \forall \xi \in M. \quad (2.3.9) \quad \text{пара2}$$

Отсюда в частности следует, что  $F(g^{-1}, \eta) = F(g^{-1}, F(g, \xi)) = \xi$ , и отображение  $M \rightarrow M$  (2.3.8) обратимо для всех  $g \in G$ . Таким образом, каждому элементу  $g \in G$  ставится в соответствие отображение  $F(g, \cdot): M \rightarrow M$ , которое обратимо. Если отображения  $F(g, \cdot)$  сохраняют структуры, имеющиеся в  $M$ , то  $F(g, \cdot)$  – симметрии  $M$  и  $G$  – подгруппа в группе  $G_M$  всех симметрий  $M$ .

Пусть  $M$  – векторное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  и группа  $G$  действует на  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Действие элемента  $g \in G$  на вектор  $\vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  можно записать в виде, аналогичном (2.3.8),

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{F}(g, \vec{x}), \quad (2.3.10) \quad \text{пара3а}$$

и, выбирая некоторый базис в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , действие (2.3.10) можно переписать в виде преобразований координат

$$x_i \rightarrow x'_i = F_i(g; x_1, \dots, x_n) \equiv F_i(g, \vec{x}), \quad (2.3.11) \quad \text{пара3}$$

где  $x_i$  и  $x'_i$  – координаты векторов  $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , а  $F_i(g; x_1, \dots, x_n)$  – функции от координат вектора  $\vec{x}$  для каждого фиксированного  $g \in G$ . Свойства (2.3.9) для функций  $F_i$  (2.3.11) записываются в виде

$$F_j(e, \vec{x}) = x_j, \quad F_j(g_1, \vec{F}(g_2, \vec{x})) = F_j(g_1 \cdot g_2, \vec{x}). \quad (2.3.12) \quad \text{пара4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что  $F_i(g; x_1, \dots, x_n)$  – достаточно гладкие функции от координат  $\{x_i\}$  почти во всех точках  $\vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ .

Матричные группы  $G$ , которые рассматривались в предыдущем разделе **2.2**, дают естественные примеры групп, действующих на векторных пространствах  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Действие линейных операторов  $T \in G$  на вектор  $\vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  записывалось как (2.2.36), или как линейные однородные преобразования координат (см. (2.2.37)):

$$x_i \rightarrow x'_i = F_i(T, \vec{x}) = T_{ik} x_k. \quad (2.3.13) \quad \text{параб6}$$

Для этих преобразований свойства (2.3.12) очевидно выполняются, что следует из (2.2.34).

Рассмотрим примеры других групп, которые действуют на векторных пространствах  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , но их действие отличается от линейных однородных преобразований (2.3.13).

Пусть  $G$  – группа линейных операторов  $T$ , действующих на  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  согласно (2.2.36). Рассмотрим линейные неоднородные преобразования вида

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{F}(g, \vec{x}) \equiv T \cdot \vec{x} + \vec{a}, \quad (2.3.14) \quad \text{параб7}$$

где  $\vec{x}, \vec{x}', \vec{a} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ ,  $T$  – линейный оператор из  $G$ , а символом  $g$  мы обозначили пару  $(T, \vec{a})$ . Множество пар  $g = (T, \vec{a})$  (множество линейных неоднородных преобразований (2.3.14)) образует группу, которая обозначается  $IG$  (здесь  $I$  – первая буква в слове "inhomogeneous"). Умножение элементов  $g_1 = (T_1, \vec{a}_1)$  и  $g_2 = (T_2, \vec{a}_2)$  в линейной неоднородной группе  $IG$  определяется как последовательное применение соответствующих преобразований (2.3.14), и мы получаем:

$$g_1 \cdot g_2 = (T_1, \vec{a}_1) \cdot (T_2, \vec{a}_2) = (T_1 \cdot T_2, T_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_1). \quad (2.3.15) \quad \text{параб8}$$

Единичный элемент  $e \in IG$  – это пара  $(I_n, \vec{0})$ , где  $I_n$  и  $\vec{0}$  – соответственно, единичный оператор и нулевой вектор в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , а обратный элемент к  $g = (T, \vec{a}) \in IG$  имеет вид  $g^{-1} = (T^{-1}, -T^{-1} \cdot \vec{a})$ . Умножение (2.3.15) согласовано с соотношениями (2.3.12) для вектор-функции  $\vec{F}$  (2.3.14).

В некотором выбранном базисе в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  преобразования (2.3.14) переписываются в координатной форме

$$x_i \rightarrow x'_i = F_i(g, \vec{x}) \equiv T_{ik} x_k + a_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3.16) \quad \text{параб5}$$

где  $a_i, x_i, x'_i$  – координаты векторов  $\vec{a}, \vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , а  $||T_{ik}||$  – матрица линейного оператора  $T \in G$ . Теперь умножение (2.3.15) можно записать в матричном виде, если представить элементы  $g = (T, \vec{a}) \in IG$  как  $(n+1) \times (n+1)$  матрицы  $\rho(g)$ :

$$g \rightarrow \rho(g) = \left( \begin{array}{ccc|c} T_{11} & \dots & T_{1n} & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} & a_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (2.3.17) \quad \text{параб9}$$

и тем самым задать отображение  $\rho$  из группы  $IG$  в множество  $(n+1) \times (n+1)$  матриц. Тогда умножение (2.3.15) записывается как матричное соотношение

$$\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2), \quad (2.3.18) \quad \text{параб10}$$

которое показывает, что отображение  $\rho$  – гомоморфизм.

Отметим, что в группе  $IG$ , состоящей из преобразований (2.3.14), (2.3.16), имеются две подгруппы. Одна подгруппа соответствует выбору  $\vec{a} = 0$  и сводится к однородным преобразованиям (2.3.13) из группы  $G$ . Вторая подгруппа  $T(\mathbb{K}^n)$  соответствует выбору  $T = I_n$  и состоит из преобразований

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \vec{F}(g, \vec{x}) \equiv \vec{x} + \vec{a} \implies \\ x_i &\rightarrow x'_i = F_i(g, \vec{x}) \equiv x_i + a_i \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.3.19) \quad \text{мара5b}$$

которые сдвигают все точки пространства  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  одновременно на один и тот же вектор  $\vec{a} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Таким образом, имеется взаимнооднозначное соответствие между элементами группы  $T(\mathbb{K}^n)$  и векторами  $\vec{a} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Поэтому группу  $T(\mathbb{K}^n)$  можно отождествить с пространством  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  и, так как группа  $G$  действует на пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , то она естественным образом действует и на группе  $T(\mathbb{K}^n)$ . Общее преобразование (2.3.14) из группы  $IG$  можно рассматривать как композицию двух преобразований, одного из подгруппы  $G$  и одного из подгруппы  $T(\mathbb{K}^n)$ .

Пусть подгруппа  $G_f \subset IG_f$  – это группа преобразований (2.2.36), сохраняющих билинейную форму  $f(\vec{x}, \vec{y})$ , то есть для  $T \in G_f$  имеют место равенства (2.2.45). Тогда вообще говоря преобразования (2.3.14) из всей группы  $IG_f$ , уже не будут сохранять форму  $f(\vec{x}, \vec{y})$ , так как мы имеем

$$f(\vec{x}', \vec{y}') = f(T \cdot \vec{x} + \vec{a}, T \cdot \vec{y} + \vec{a}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(T \cdot \vec{x}, \vec{a}) + f(\vec{a}, T \cdot \vec{y}) + f(\vec{a}, \vec{a}).$$

Однако преобразования (2.3.14) будут сохранять формы типа  $f(\vec{x} - \vec{u}, \vec{y} - \vec{v})$ , определенные на четырех векторах  $x, y, u, v \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Инвариантность таких форм относительно преобразований (2.3.10) можно положить в основу альтернативного определения групп  $IG_f$ . Отметим, что если билинейная форма  $f(\vec{x}, \vec{y})$  симметрична, то для определения группы  $IG_f$  (множества преобразований (2.3.14)) достаточно потребовать сохранение ”квадрата интервала”

$$f(\vec{x}' - \vec{y}', \vec{x}' - \vec{y}') = f(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K}). \quad (2.3.20) \quad \text{мара11}$$

В этом случае инвариантность всех форм  $f(\vec{x} - \vec{u}, \vec{y} - \vec{v})$  следует из тождества (2.2.48).

**Пример.** Группа  $IO(p, q)$ , где  $p+q = n$ , определяется как множество преобразований вида (2.3.16)

$$x_k \rightarrow x'_k = O_{kj} x_j + a_k, \quad (2.3.21) \quad \text{мара12a}$$

где вещественная матрица  $||O_{ij}|| \in O(p, q)$  удовлетворяет условию (2.2.64)

$$O^T \cdot I_{p,q} \cdot O = I_{p,q}, \quad (2.3.22) \quad \text{мара12b}$$

и произведение элементов дается формулой (2.3.15). Очевидно, что преобразования из группы  $IO(p, q)$  сохраняют квадрат интервала (2.3.20), для билинейной формы

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_k (I_{p,q})_{kj} y_j = \sum_{j=1}^p x_j y_j - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j y_j, \quad p+q = n. \quad (2.3.23) \quad \text{мара12}$$



В частном случае  $p = 3, q = 0$  матрицы  $O$  – ортогональные, и сохраняется квадрат расстояния  $\sum_{j=1}^3 (x_j - y_j)^2$ . Таким образом, группа  $IO(3, 0) \equiv IO(3)$  – это группа симметрий трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , в котором нет выделенной точки начала координат.

В случае  $p = 1, q = 3$  (или  $p = 3, q = 1$ ) преобразования (2.3.21), (2.3.22) образуют группу  $IO(1, 3)$ , которая является группой симметрий четырехмерного пространства Минковского, называется группой Пуанкаре и играет важнейшую роль в специальной теории относительности и релятивистской физике.

### 2.3.5 Полупрямое произведение групп.

Итак, преобразования из группы  $IG$  построены как композиции преобразований из двух ее подгрупп –  $G$  и  $T(\mathbb{K}^n)$ , причем подгруппа  $G$  действует и на подгруппе  $T(\mathbb{K}^n)$ . Рассмотрение линейных неоднородных групп  $IG$  приводит нас к конструкции, которая называется полупрямым произведением двух групп. Данная конструкция требует наличия двух групп  $G$  и  $K$ , а также действия одной группы на другую.

Группа  $G$  действует на группе  $K$ , если для каждого  $g \in G$  определено отображение  $K \rightarrow K$ , которое переводит элемент  $\xi \in K$  в элемент  $\eta \in K$  и записывается в виде (2.3.8), или более кратко

$$\xi \rightarrow \eta = g(\xi) . \quad (2.3.24) \quad \text{пара15}$$

При этом должны выполняться свойства (2.3.9), которые в данных обозначениях имеют вид

$$\xi = e(\xi) , \quad g_1(g_2(\xi)) = (g_1 \cdot g_2)(\xi) , \quad (2.3.25) \quad \text{пара16}$$

а также свойства, которые диктуются групповой структурой  $K$

$$g(\xi \cdot \eta) = g(\xi) \cdot g(\eta) , \quad (2.3.26) \quad \text{пара17}$$

то есть при действии  $G$  на  $K$  сохраняется умножение в  $K$  (отображение (2.3.24) – гомоморфизм из  $K$  в  $K$ ).

В качестве примера группы  $K$ , на которую действует  $G$ , рассмотрим инвариантную подгруппу  $H$  в группе  $G$ , то есть  $gHg^{-1} \subset H, \forall g \in G$ . Группа  $G$  действует на свою инвариантную подгруппу  $K = H$  следующим образом

$$\xi \rightarrow \eta = g(\xi) = g \cdot \xi \cdot g^{-1} , \quad (2.3.27) \quad \text{пара30}$$

где  $g \in G$  и  $\xi, \eta \in H$ .

- **Задача 47.** Проверить свойства (2.3.25) и (2.3.26) для действия группы  $G$ , заданного в (2.3.27).

В частном случае можно взять  $H = G$ . Тогда (2.3.27) определяет действие группы  $G$  на себя:  $G \rightarrow G$ . В этом случае действие группы  $G$  (2.3.27) называется присоединенным.

Отметим, что преобразования  $G \rightarrow G$  (левое и правое умножение):

$$1.) \xi \rightarrow \eta = g(\xi) = g \cdot \xi , \quad 2.) \xi \rightarrow \eta = g(\xi) = \xi \cdot g^{-1} , \quad \forall \xi, \eta, g \in G , \quad (2.3.28) \quad \text{пара30b}$$

удовлетворяют условиям (2.3.25), но не удовлетворяют (в общем случае) условиям (2.3.26). Поэтому каждое из преобразований (2.3.28) можно рассматривать только как действие группы  $G$  на множество своих элементов, но не как действие группы  $G$  на группу  $G$ .

Пусть группа  $G$  действует на группу  $K$ . Рассмотрим множество  $G \ltimes K$  всех пар  $(g, \xi)$ , где  $g \in G$  и  $\xi \in K$ . Определим на этом множестве умножение следующим образом

$$(g_1, \xi_1) \cdot (g_2, \xi_2) = (g_1 \cdot g_2, \xi_1 \cdot g_1(\xi_2)) . \quad (2.3.29) \quad \text{map18}$$

Множество  $G \ltimes K$  относительно умножения (2.3.29) образует группу, которая называется полупрямым произведением групп  $G$  и  $K$ .

- **Задача 48.** Проверить выполнение всех аксиом группы для множества  $G \ltimes K$  с умножением (2.3.29). В частности проверить, что обратный элемент к  $(g, \xi)$  имеет вид:

$$(g, \xi)^{-1} = (g^{-1}, g^{-1}(\xi^{-1})) . \quad (2.3.30) \quad \text{map18i}$$

Очевидно, что прямое произведение  $G \times K$  (см. Определение 2.1.11) получается из  $G \ltimes K$  в случае тривиального действия  $G$  на  $K$ , когда  $g(\xi) = \xi$ ,  $\forall g \in G$  и  $\forall \xi \in K$ . В этом случае умножение (2.3.29) переходит в умножение (2.1.24). Таким образом, полупрямое произведение двух групп  $G \ltimes K$  обобщает конструкцию прямого произведения  $G \times K$ .

Так же как и в случае прямого произведения  $G \times K$ , у полупрямого произведения  $G \ltimes K$  имеются две подгруппы, изоморфные  $G$  и  $K$ . Группа, изоморфная  $G$ , образована парами  $(g, e_K)$  ( $\forall g \in G$ ), а группа, изоморфная  $K$ , образована парами  $(e_G, \xi)$  ( $\forall \xi \in K$ ), где  $e_K$  и  $e_G$  – единицы в группах  $K$  и  $G$ , соответственно. Однако, в отличие от прямого произведения групп, элементы подгрупп в  $G \ltimes K$  в общем случае не коммутируют друг с другом:

$$(g, e_K) \cdot (e_G, \xi) = (g, g(\xi)) \neq (e_G, \xi) \cdot (g, e_K) = (g, \xi) .$$

Кроме того, в прямом произведении  $G \times K$  обе подгруппы  $G$  и  $K$  инвариантны, а в полупрямом произведении  $G \ltimes K$  в общем случае инвариантной оказывается только подгруппа  $K$ . Последнее утверждение следует из равенства

$$(g, \xi) (e_G, \eta) (g^{-1}, g^{-1}(\xi^{-1})) = (e_G, \xi \cdot g(\eta) \cdot \xi^{-1}) , \quad \forall \xi, \eta \in K , \quad \forall g \in G .$$

**Замечание.** На множестве пар  $(g, \xi)$  можно задать отличное от (2.3.29) произведение

$$(g_1, \xi_1) \cdot (g_2, \xi_2) = (g_1 \cdot g_2, g_2^{-1}(\xi_1) \cdot \xi_2) , \quad (2.3.31) \quad \text{map18R}$$

которое определяет другое полупрямое произведение  $K \rtimes G$  двух групп  $G$  и  $K$ . Полупрямое произведение  $K \rtimes G$  обладает теми же свойствами, что и  $G \ltimes K$ , поэтому мы не будем его специально рассматривать.

### Примеры.

1.) Линейные неоднородные группы  $IG$ , рассмотренные в предыдущем подразделе 2.3.4, представляют собой полупрямое произведение  $G \ltimes T(\mathbb{K}^n)$  матричной группы

$G$  и группы трансляций  $T(\mathbb{K}^n)$  (обе группы действуют на  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ ). Это следует из сравнения формул (2.3.15) и (2.3.29).

**2.)** В группе диэдра  $D_n$  (см. пример **6** в подразделе **2.1.1**) имеются две подгруппы  $Z_2 = \{e, r\}$  и  $Z_n = \{g_0 = e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ . Группа  $Z_2$  действует на группе  $Z_n$  следующим образом

$$e(g_k) = g_k, \quad r(g_k) = g_{-k},$$

где  $k = 0, \dots, n-1$ . Рассмотрим группу  $Z_2 \ltimes Z_n$  как множество, состоящее из пар  $(e, g_k)$  и  $(r, g_m)$ , с операцией умножения (2.3.29). Зададим взаимно однозначное соответствие между элементами  $Z_2 \ltimes Z_n$  и  $D_n$ :

$$(e, g_k) \leftrightarrow g_k, \quad (r, g_k) \leftrightarrow g_k \cdot r.$$

Легко проверить, что это соответствие сохраняет умножение в группах  $Z_2 \ltimes Z_n$  и  $D_n$ , и следовательно устанавливает изоморфизм  $Z_2 \ltimes Z_n = D_n$ . Напомним, что  $D_n/Z_n = Z_2$ . Данный пример является частным случаем более общего утверждения, которое будет рассмотрено в следующем пункте.

**3.)** Пусть группа  $G'$  действует на группу  $K$ . Тогда из этих двух групп с помощью полупрямого произведения можно построить новую расширенную группу  $G = G' \ltimes K$ . Как мы говорили, группу  $K$  можно вложить в  $G$  с помощью отображения  $\xi \xrightarrow{\lambda} (e_G, \xi)$ , которое является мономорфизмом. С другой стороны имеется гомоморфизм  $\mu$  группы  $G$  на всю группу  $G'$ , который для  $g \in G'$  задается с помощью отображения  $(g, \xi) \xrightarrow{\mu} g$ , для всех  $\xi \in K$  (отображение  $\mu$  не взаимно однозначно), причем  $(e_{G'}, \xi) \xrightarrow{\mu} e_{G'}$ ,  $\forall \xi \in K$ , то есть подгруппа  $(e_{G'}, K) \subset G$  совпадает с  $\text{Ker}(\mu)$ . Таким образом мы имеем точную последовательность (2.3.6)

$$e \rightarrow K \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} G' \rightarrow e,$$

и согласно Определению **2.3.2** группа  $G = G' \ltimes K$  является расширением группы  $G'$  с помощью группы  $K$ . При этом из Утверждения **2.3.4** следует, что  $K$  — инвариантная подгруппа в  $G$  и  $G' = G/K$ .

### 2.3.6 Конформные группы $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ .

**Определение 2.3.4** Симметричная билинейная форма  $f(\vec{x}, \vec{y})$  на вещественном векторном пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$  называется евклидовой (или положительно определенной), если  $f(\vec{x}, \vec{x}) > 0$  для всех ненулевых векторов  $\vec{x} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R})$ . Если существуют вектора  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R})$ , для которых  $f(\vec{x}, \vec{x}) > 0$  и  $f(\vec{y}, \vec{y}) < 0$ , то форма  $f(\vec{x}, \vec{y})$  называется псевдоевклидовой. Пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$  с евклидовой (псевдоевклидовой) формой  $f(\vec{x}, \vec{y})$  называется евклидовым (псевдоевклидовым).

Рассмотрим пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$  с псевдоевклидовой формой  $f(\vec{x}, \vec{y})$  (2.3.23). В дальнейшем билинейную форму (2.3.23) будем называть скалярным произведением и использовать для нее стандартное обозначение  $(\vec{x}, \vec{y}) \equiv f(\vec{x}, \vec{y})$ . Псевдоевклидово пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{R})$  с таким скалярным произведением будем обозначать  $\mathbb{R}^{p,q}$ . В

частном случае  $q = 0$ , мы получаем из (2.3.23) положительно определенное скалярное произведение и соответствующее пространство  $\mathcal{V}_p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^p$  – евклидово.

Конформная группа  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  – это группа преобразований (2.3.11) в пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$ , которые сохраняют квадрат интервала (2.3.20) с точностью до масштабного скалярного фактора<sup>7</sup>. В формуле (2.3.11) функции  $F_i(g, \vec{x})$  от координат вектора  $\vec{x}$  считаются гладкими почти всюду, а  $g$  обозначает набор некоторых параметров (см. ниже). Иначе говоря, инвариантность (2.3.20) заменяется более слабым условием

$$(\vec{x}' - \vec{y}', \vec{x}' - \vec{y}') = \Lambda(\vec{x}, \vec{y}) (\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) , \quad (2.3.32) \quad \text{пара13}$$

где  $(\vec{x}, \vec{y})$  – скалярное произведение (2.3.23), а  $\Lambda(\vec{x}, \vec{y})$  – некоторый масштабный фактор, который не фиксирован.

Ясно, что конформная группа  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  содержит преобразования из группы  $IO(p, q)$  (2.3.21), (2.3.22), так как для этих преобразований, согласно (2.3.20), соотношения (2.3.32) выполняются при  $\Lambda(\vec{x}, \vec{y}) = 1$ . Кроме того, к классу конформных преобразований в пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  относятся масштабные линейные преобразования

$$x_i \rightarrow x'_i = F_i(\lambda, \vec{x}) = \lambda x_i , \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 , \quad (2.3.33) \quad \text{пара19}$$

для которых фактор  $\Lambda(\vec{x}, \vec{y})$  в правой части (2.3.32) равен  $\lambda^2$ . Наконец к классу конформных преобразований в  $\mathbb{R}^{p,q}$  относятся преобразования инверсии в точке  $\vec{a} \in \mathbb{R}^{p,q}$ :

$$x_i \rightarrow x'_i = F_i(\vec{a}, \vec{x}) = \frac{x_i - a_i}{(\vec{x} - \vec{a})^2} , \quad (2.3.34) \quad \text{пара20}$$

где  $(\vec{x} - \vec{a})^2 = (\vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a})$ , при этом фактор  $\Lambda(\vec{x}, \vec{y})$  в (2.3.32) равен

$$\Lambda(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{(\vec{x} - \vec{a})^2 (\vec{y} - \vec{a})^2} . \quad (2.3.35) \quad \text{пара20a}$$

Преобразование (2.3.34) отправляет точку  $\vec{x} = \vec{a}$  в бесконечную точку, а бесконечную точку переводит в начало координат<sup>8</sup>. Композиция двух преобразований инверсии (2.3.34), в точке начала координат  $\vec{a} = \vec{0}$  и в точке  $\vec{a} = \vec{b}$ , дает преобразование

$$x_i \rightarrow x'_i = F_i \left( \vec{b}, \vec{F}(\vec{0}, \vec{x}) \right) = \frac{x_i/\vec{x}^2 - b_i}{(\vec{x}/\vec{x}^2 - \vec{b})^2} = \frac{x_i - b_i \vec{x}^2}{(1 - 2(\vec{x}, \vec{b}) + \vec{b}^2 \vec{x}^2)} , \quad (2.3.36) \quad \text{пара26}$$

которое называется специальным конформным преобразованием.

Всевозможные композиции преобразований из  $IO(p, q)$  (2.3.21), (2.3.22), масштабных преобразований (2.3.33) и преобразований инверсии (2.3.34) образуют полную конформную группу  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  для  $p + q > 2$ . Обоснование этого факта (теорема Лиувилля) будет дано ниже в подразделе **3.2.11**.

<sup>7</sup>По определению конформные преобразования в евклидовых векторных пространствах – это преобразования, которые сохраняют углы между векторами.

<sup>8</sup>Строго говоря, преобразования инверсии (2.3.34) определены на пополнении пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$ , к которому добавлены все бесконечно удаленные точки, причем все эти точки отождествлены.

Важный вопрос, который часто возникает в физических задачах — это вопрос о нахождении инвариантов, которые не меняются при всех преобразованиях из конформной группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ . При наличии четырех векторов  $\vec{x}_\alpha \in \mathbb{R}^{p,q}$  ( $\alpha = 1, \dots, 4$ ) можно построить два независимых перекрестных отношения

$$\frac{x_{12} x_{34}}{x_{13} x_{24}}, \quad \frac{x_{12} x_{34}}{x_{14} x_{23}}, \quad (2.3.37) \quad \text{пара20b}$$

где  $x_{\alpha\beta} = \sqrt{(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)^2}$ , которые инвариантны относительно преобразований (2.3.21), (2.3.33), (2.3.34), а следовательно и относительно всех конформных преобразований. Инвариантность отношений (2.3.37) относительно преобразований (2.3.21), (2.3.33) очевидна. Инвариантность относительно (2.3.34) следует из явного вида фактора (2.3.35).

Случай группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  для  $p + q = 2$  особый и требует отдельного рассмотрения. В двумерном пространстве ( $\mathbb{R}^{1,1}$  или  $\mathbb{R}^2$ ) квадрат интервала всегда можно переписать в виде

$$(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) = (x_+ - y_+)(x_- - y_-), \quad (2.3.38) \quad \text{пара21}$$

где  $x_\pm = x_1 \pm x_2$  в псевдоевклидовом случае  $\mathbb{R}^{1,1}$  и  $x_\pm = x_1 \pm i x_2$  в евклидовом случае  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим преобразования координат вида

$$x_+ \rightarrow x'_+ = F_+(x_+), \quad x_- \rightarrow x'_- = F_-(x_-), \quad (2.3.39) \quad \text{пара22}$$

где  $F_\pm$  — любые мероморфные функции такие, что

$$\begin{aligned} (F_+(x_+))^* &= F_-(x_-) \quad (\text{для случая } \mathbb{R}^2), \\ (F_+(x_+))^* &= F_+(x_+), \quad (F_-(x_-))^* = F_-(x_-) \quad (\text{для случая } \mathbb{R}^{1,1}), \end{aligned} \quad (2.3.40) \quad \text{пара27}$$

то есть в последнем случае функции  $F_\pm$  — вещественные. Преобразования (2.3.39) являются конформными, так как сохраняют (2.3.38) с точностью до масштабного фактора. Действительно, для достаточно гладких (почти везде) функций  $F_\pm(x)$ , разность  $F_\pm(x) - F_\pm(y)$  всегда делится на  $(x - y)$ , поэтому имеем  $F_\pm(x) - F_\pm(y) = (x - y) \Phi_\pm(x, y)$ , где явный вид функций  $\Phi_\pm$  нам не важен. Тогда, делая замену (2.3.39) в правой части квадрата интервала (2.3.38), мы получаем

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) &= (x_+ - y_+)(x_- - y_-) \longrightarrow \\ \longrightarrow &(x_+ - y_+)(x_- - y_-) \Lambda(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) \Lambda(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.3.41) \quad \text{пара24}$$

где  $\Lambda(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi_+(x_+, y_+) \Phi_-(x_-, y_-)$ . Таким образом, преобразования (2.3.39) с мероморфными функциями  $F_\pm$  (2.3.40) действительно принадлежат конформной группе  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$  (или  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2)$ ). Так как  $F_\pm$  — произвольны (с точностью до ограничений (2.3.40)), то конформные группы в двумерных пространствах — бесконечномерны.

Отметим важный специальный подкласс конформных преобразований (2.3.39), который образует подгруппу в конформной группе двумерного пространства  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  ( $p + q = 2$ ). Преобразования из этого подкласса называются дробно-линейными и имеют вид

$$x_\pm \rightarrow x'_\pm = F(g_\pm, x_\pm) = \frac{a_\pm x_\pm + b_\pm}{c_\pm x_\pm + d_\pm}, \quad g_\pm = \begin{pmatrix} a_\pm & b_\pm \\ c_\pm & d_\pm \end{pmatrix}, \quad (2.3.42) \quad \text{пара25}$$

где  $g_{\pm}$  – вещественные матрицы в случае  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$  и  $g_+^* = g_-$  в случае  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2)$ . Отметим, что вообще говоря в последнем случае нет необходимости писать два дробно-линейных преобразования, так как одно переходит в другое с помощью комплексного сопряжения. Преобразования (2.3.42) не меняются, если элементы  $(g_{\pm})_{ij}$  одновременно растянуть  $g_{\pm} \rightarrow \mu_{\pm} g_{\pm}$  с помощью ненулевых параметров  $\mu_{\pm}$  ( $\mu_{\pm}$  – вещественны для случая  $\mathbb{R}^{1,1}$  и  $\mu_+^* = \mu_-$  – для случая  $\mathbb{R}^2$ ). Зафиксируем  $\mu_{\pm}$ , положив

$$\det(g_{\pm}) = a_{\pm} d_{\pm} - b_{\pm} c_{\pm} = 1 ,$$

при этом  $\mu_{\pm}^2 = 1$  и дискретный проивол  $g_{\pm} \rightarrow -g_{\pm}$  в (2.3.42) все же остается.

- **Задача 49.** Доказать, что в случае  $\mathbb{R}^{1,1}$  дробно-линейные преобразования (2.3.42), затрагивающие только  $x_+$  (или только  $x_-$ ), образуют группу, изоморфную  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ , а в случае  $\mathbb{R}^2$  преобразования (2.3.42) образуют группу, изоморфную  $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ . Таким образом, имеют место вложения

$$PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \subset \text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}) , \quad PSL(2, \mathbb{C}) \subset \text{Conf}(\mathbb{R}^2) .$$

**Замечание 1.** Отметим, что кроме (2.3.39) конформная группа в двумерном пространстве очевидно содержит еще преобразования

$$x_+ \rightarrow x'_+ = F_-(x_-) , \quad x_- \rightarrow x'_- = F_+(x_+) , \quad (2.3.43) \quad \text{mapa22d}$$

где  $F_{\pm}$  – любые мероморфные функции, удовлетворяющие (2.3.40). Например, преобразование инверсии (2.3.34) в двумерном пространстве записывается в виде

$$x_+ \rightarrow x'_+ = \frac{1}{x_- - a_-} , \quad x_- \rightarrow x'_- = \frac{1}{x_+ - a_+} ,$$

и очевидно принадлежит преобразованиям типа (2.3.43).

**Замечание 2.** Дробно-линейные преобразования (2.3.42) из группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2)$ , как уже отмечалось выше, записываются как одно комплексное преобразование

$$z \rightarrow w(z) = \frac{a z + b}{c z + d} , \quad (2.3.44) \quad \text{mapa25d}$$

где  $z, w \in \mathbb{C}$  и  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ . Так как матрицы  $A$  и  $-A$  обслуживают одно и то же преобразование (2.3.44), то такие преобразования задают транзитивное действие (см. (2.3.10)) группы  $PSL(2, \mathbb{C})$  на комплексной плоскости  $z$ , пополненной бесконечно удаленной точкой  $z = \infty$ . Функция  $w(z)$  – обратима и осуществляет однолистное накрытие комплексной плоскости  $z$ , при котором точка  $z = -d/c$  переходит в точку  $w = \infty$ , а  $z = \infty$  переходит в  $w = a/c$ .

**Утверждение 2.3.5** Преобразования (2.3.44) переводят окружности в плоскости  $z$  в окружности в плоскости  $w$  (включая окружности бесконечного радиуса – прямые).

**Доказательство.** Преобразование (2.3.44) для  $c = 0$  сводится к преобразованиям растяжения  $z \rightarrow a \cdot z$  и сдвига  $z \rightarrow z + b$ , которые очевидно переводят окружности в окружности. Для того, чтобы продемонстрировать это, достаточно представить окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $w$  в виде  $w + \rho e^{i\phi}$ , где  $\phi \in [0, 2\pi]$ . При  $c \neq 0$  преобразование (2.3.44), с учетом  $ad - bc = 1$ , записывается в виде

$$w(z) = \frac{1}{c} \left( a - \frac{1}{cz + d} \right),$$

то есть, представляет собой композицию преобразований сдвига, растяжения и инверсии  $z \rightarrow w = -1/z$ . Остается показать, что преобразования инверсии также переводят окружности в окружности. Произвольная окружность в плоскости  $z = x + iy$  задается уравнением

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (2.3.45) \quad \text{пара25s}$$

где  $x, y, A, B, C, D \in \mathbb{R}$  и значение  $A = 0$  соответствует прямой, то есть окружности с бесконечным радиусом. Положим  $w = u + iv$ , где  $u, v \in \mathbb{R}$ , тогда

$$z = -1/w \Rightarrow x = -\frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2},$$

и уравнение (2.3.45), определяющее окружность в плоскости  $z$ , переходит в уравнение

$$D(u^2 + v^2) - Bu + Cv + A = 0, \quad (2.3.46) \quad \text{пара25r}$$

которое определяет окружность в плоскости  $w$ . Таким образом, преобразование инверсии  $z \rightarrow w = -1/z$  действительно переводит окружности в окружности. ■

Данное Утверждение понадобится нам ниже при обсуждении неевклидовой геометрии Лобачевского в Разделе 6.3.

### 3 Группы и алгебры Ли.

Матричные группы, рассмотренные в разделе 2.2, обладают свойствами, присущими гладким пространствам (многообразиям). Непрерывные группы такого типа называются группами Ли. Свойства этих групп можно исследовать методами дифференциальной геометрии. Например, локальные свойства гладких многообразий определяются их касательными пространствами. В случае групп Ли изучение их касательных пространств приводит к формулировке одного из основных объектов теории – алгебры Ли. Данная глава как раз и посвящена изложению основных общих фактов из теории групп и алгебр Ли.

#### 3.1 Многообразия. Группы Ли.

##### 3.1.1 Гладкие многообразия.

Обсуждение групп Ли мы начнем с рассмотрения матричных групп. Пространство  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  всех комплексных  $(n \times n)$  матриц  $\|M_{ij}\|$  можно рассматривать как  $n^2$ -мерное

комплексное пространство  $\mathbb{C}^{n^2}$  с координатами  $\{M_{ij}\}$ , или как  $2n^2$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , координатами которого являются  $2n^2$  вещественных чисел  $\operatorname{Re} M_{ij}$  и  $\operatorname{Im} M_{ij}$ . Это позволяет ввести в пространстве всех комплексных  $(n \times n)$  матриц метрику

$$|M - M'| = \left( \sum_{i,j=1}^n (M_{ij} - M'_{ij})^* (M_{ij} - M'_{ij}) \right)^{1/2},$$

которая определяет расстояние между матрицами  $M$  и  $M'$ . Поэтому на множестве  $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$  естественным образом вводится понятие близости матриц: две матрицы близки, если их разность близка к нулевой матрице. Если мы имеем однопараметрическое семейство матриц  $M(\phi) = \|M_{ij}(\phi)\|$ , где  $\phi$  – действительный параметр, то можно определить дифференцирование этого семейства по  $\phi$ : элементами матрицы  $\frac{dM(\phi)}{d\phi}$  являются производные  $\frac{d}{d\phi} M_{ij}(\phi)$  матричных элементов  $M_{ij}(\phi)$ .

Гладкие семейства матриц представляют собой гладкие поверхности, вложенные в  $\mathbb{R}^{2n^2}$ . Например, гладкое семейство матриц  $M(\phi)$ , зависящее от одного действительного параметра  $\phi$ , определяет кривую в  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , а матрица  $\frac{dM(\phi)}{d\phi}|_{\phi=\phi_0}$  – задает в  $\mathbb{R}^{2n^2}$  касательный вектор к этой кривой (вектор скорости изменения матрицы  $M(\phi)$ ) в точке  $\phi = \phi_0$ .

В качестве примера однопараметрического семейства в пространстве  $\mathbb{R}^4$  вещественных  $(2 \times 2)$  матриц рассмотрим матрицы  $O_\phi$  (2.1.15), образующие группу  $SO(2)$ :

$$\begin{pmatrix} M_{11}(\phi) & M_{12}(\phi) \\ M_{21}(\phi) & M_{22}(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (3.1.1) \quad \text{mo2}$$

Данное семейство представляет собой единичную окружность (гладкую одномерную поверхность), вложенную в  $\mathbb{R}^4$ . Эта окружность лежит на плоскости  $(x, y) \subset \mathbb{R}^4$ :

$$M_{11} = M_{22} \equiv x, \quad -M_{12} = M_{21} \equiv y,$$

и задается уравнением  $x^2 + y^2 = 1$ .

Из всего вышесказанного следует, что элементы определенных матричных групп бесконечного порядка (таких, например, как группа  $SO(2)$ ) могут рассматриваться как точки, образующие в совокупности некоторое гладкое пространство.

**Определение 3.1.1** *Группа бесконечного порядка, множество элементов которой образует гладкое (дифференцируемое) многообразие, называется группой Ли.*

Это определение требует введения понятия многообразия, которое формализует понятие гладкого пространства. Строгое определение многообразия было дано в работах К.Ф. Гаусса, который занимался исследованиями в области геодезии и картографии земной поверхности. Для поверхности земного шара все способы построения карт сводятся к одной процедуре: к проекции отдельных участков выпуклой земной поверхности на плоскость. Очевидно, что целиком сферическую поверхность спроецировать на плоскость невозможно. Более того, при проекции больших участков земной поверхности неизбежно возникают искажения. Чем меньше участки земной поверхности, тем больше они похожи на плоские куски и, соответственно, меньше



искажений на плоских картах. Для того, чтобы путешествовать, пользуясь набором таких карт (этот набор называется атласом), на большие расстояния, которые не покрываются одной картой, необходимо иметь некоторое перекрытие для карт, составляющих атлас (см. Рис. 3).

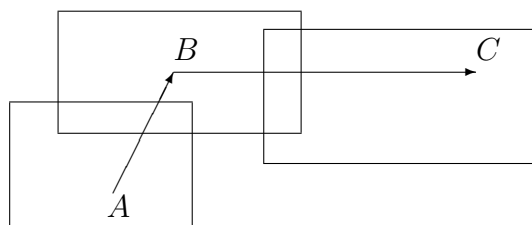


Рис. 3: Атлас, необходимый для путешествия  $A \rightarrow B \rightarrow C$ .

Такое перекрытие позволяет узнать, в каком месте мы, покидая местность, соответствующую первоначальной карте, привязываемся к следующей карте. Другими словами, перекрытия карт нам необходимы для того, чтобы иметь возможность их сшить и тем самым восстановить все нетривиальное пространство из кусков, подобных плоским. В конце концов, весь сложный объект (например, сфера) получается склейкой (сшивкой) более простых объектов (локальных карт), однозначно отображающихся на участки плоскости. Если сшивка будет достаточно гладкой, то в результате будет получаться непрерывное, гладкое пространство.

Эта идея (представление сложного пространства как склейки большого числа простых пространств, "подобных" плоским) лежит в основе изучения важнейших геометрических объектов, которые называются многообразиями.

Прежде чем дать определение многообразия напомним, что для метрических пространств  $M$ , таких как  $\mathbb{R}^m$ , подмножество  $U \subset M$  называется открытым, если вместе с каждой точкой  $X \in U$  это подмножество содержит достаточно малый открытый шар с центром в точке  $X$ . При этом открытым шаром радиуса  $r \in \mathbb{R}$  в  $M$  с центром в точке  $X \in M$  называется множество всех точек  $Y \in M$  таких, что  $\rho(X, Y) < r$ , где  $\rho(X, Y)$  – метрика в  $M$  (расстояние между точками  $X$  и  $Y$  в  $M$ ).

Теперь дадим определение гладкого многообразия.

**Определение 3.1.2** Гладким (бесконечно дифференцируемым)  $t$ -мерным вещественным многообразием называется множество точек  $M$ , снабженное структурой, называемой "атласом", т.е. множество  $M$  покрыто совокупностью своих подмножеств  $U^{(\alpha)}$ , называемых "локальными картами", так что  $M = \cup_{\alpha} U^{(\alpha)}$ . При этом:

1.) Для каждого  $\alpha$  установлено взаимнооднозначное отображение  $\phi^{(\alpha)}: U^{(\alpha)} \rightarrow V^{(\alpha)}$ , где  $V^{(\alpha)}$  – некоторая открытая область евклидова пространства  $\mathbb{R}^m$ . Это отображение определяет на множестве  $U^{(\alpha)}$  набор функций  $x_k^{(\alpha)}: U^{(\alpha)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , которые любой точке  $P \in U^{(\alpha)}$  сопоставляют набор вещественных чисел  $x_k^{(\alpha)}(P) = [\phi^{(\alpha)}(P)]_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – координат точки  $\phi^{(\alpha)}(P) \in \mathbb{R}^m$ . Эти числа называются локальными координатами точки  $P$ .

2.) Одна и та же точка  $P$  множества  $M$  может принадлежать различным локальным картам,  $P \in U^{(\alpha)} \cap U^{(\beta)}$ . На пересечении локальных карт  $U^{(\alpha)} \cap U^{(\beta)}$  имеются уже две системы локальных координат  $\{x_k^{(\alpha)}\}, \{x_k^{(\beta)}\}$ . Требуется, чтобы каждая из указанных систем локальных координат во всех таких пересечениях  $U^{(\alpha)} \cap U^{(\beta)}$  гладко выражалась одна через другую и обратно: функции

$$x_k^{(\alpha)}(x_1^{(\beta)}, \dots, x_m^{(\beta)}) = \left[ \phi^{(\alpha)} \phi^{(\beta)-1}(x_1^{(\beta)}, \dots, x_m^{(\beta)}) \right]_k \quad (3.1.2) \quad \text{vr-may11-1}$$

должны быть бесконечное число раз дифференцируемы и обратимы. В частности, функции перехода из одной координатной системы в другую должны быть невырожденными

$$\det \left( \frac{\partial x_k^{(\alpha)}}{\partial x_j^{(\beta)}} \right) \neq 0. \quad (3.1.3) \quad \text{dxab}$$

Отметим, что для гладкого многообразия  $M$  естественным образом определена близость его точек, а именно, две точки  $M$  близки, если близки координаты этих точек в некоторой локальной карте  $U^{(\alpha)}$ .

**Определение 3.1.3** *Отображение  $f: M_1 \rightarrow M_2$  одного гладкого многообразия  $M_1$  в другое  $M_2$  называется  $r$ -дифференцируемым, если в локальных координатах на  $M_1$  и  $M_2$  оно задается  $r$  раз дифференцируемыми функциями. Взаимнооднозначное непрерывное и обратимое отображение  $f: M_1 \rightarrow M_2$  называется гомеоморфизмом. Если  $f$  — гладкое взаимнооднозначное и обратимое отображение  $M_1 \rightarrow M_2$ , то  $f$  называется диффеоморфизмом. Два многообразия называются гомеоморфными, если существует гладкое<sup>9</sup> взаимнооднозначное отображение одного на другое.*

Например, эллипсоид гомеоморфен сфере, а тор и сфера не гомеоморфны (смотри Рис. 4). Пространство элементов группы  $SO(2)$  гомеоморфно гладкому пространству окружности  $S^1$ .

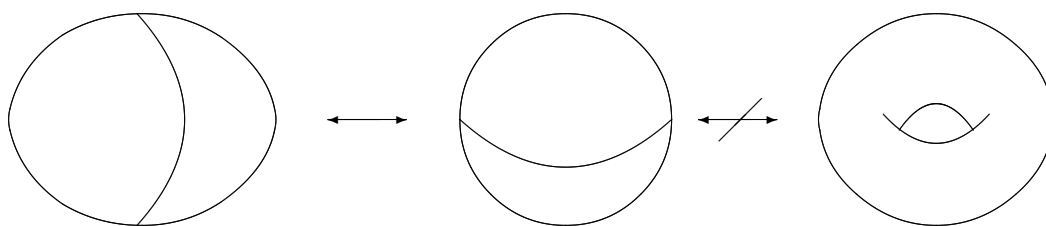


Рис. 4: Гомеоморфные и негомеоморфные поверхности.

**Определение 3.1.4** *Гладкой кривой на многообразии  $M$ , исходящей из точки  $P \in M$ , называется бесконечно дифференцируемое отображение  $f: I \rightarrow M$  отрезка  $I = [0, 1]$  вещественной оси в многообразие  $M$ , такое, что  $f(0) = P$ . Кривая  $f$  замкнута, если  $f(0) = f(1)$ .*

<sup>9</sup>В дальнейшем мы не различаем гомеоморфные и диффеоморфные многообразия.

**Определение 3.1.5** Многообразие называется связным, если любые две его точки можно соединить гладкой кривой. В противном случае говорят о несвязном многообразии.

**Определение 3.1.6** Две одномерные замкнутые кривые, лежащие в некотором многообразии  $M$ , называются гомотопными если они могут быть переведены друг в друга с помощью непрерывных преобразований<sup>10</sup> в  $M$ . Если все замкнутые кривые в  $M$  гомотопны, то такое многообразие  $M$  называется односвязным. Если в  $M$  существует  $m$  замкнутых кривых, которые негомотопны друг другу, то такое многообразие называется  $m$ -связным.

Отметим, что две гладкие замкнутые кривые в  $M$  могут быть негомотопными друг другу, но при этом они всегда гомеоморфны.

**ISA** по-  
ясняющее  
предложе-  
ние

**Определение 3.1.7** Группа Ли  $G$  называется  $m$ -связной, если ее многообразие  $m$ -связно.

### Примеры.

1. Многообразие, состоящее из двух непересекающихся открытых шаров<sup>11</sup> в  $\mathbb{R}^3$  является несвязным. Каждый из шаров представляет собой односвязное многообразие.
2. Окружность  $S^1$  бесконечно-связна, т.к. замкнутая кривая, которая  $k$  раз оборачивается вокруг окружности, не может быть непрерывно деформирована в кривую, оборачивающуюся вокруг окружности  $n \neq k$  раз. Сферы  $S^n$  ( $n > 1$ ) – односвязные многообразия.
3. Вещественное проективное пространство  $\mathbb{RP}^n$  – многообразие, которое состоит из прямых в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через точку  $O$  начала координат в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Иначе говоря,  $\mathbb{RP}^n$  представляет собой множество "векторов направлений" в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , которые характеризуются вещественными координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ , одновременно не равными нулю, с отождествлением  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Это пространство можно представить в виде сферы  $S^n$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  с центром в  $O$  и с отождествленными диаметрально противоположными точками. Если мы рассечем эту сферу гиперплоскостью  $x_1 = 0$ , то в сечении мы снова будем иметь сферу  $S^{n-1}$ . Тогда многообразие  $\mathbb{RP}^n$  можно представить как  $n$ -мерный шар (часть сферы  $S^n$  с  $x_1 \leq 0$ ), ограниченный сферой  $S^{n-1}$ , у которой отождествлены диаметрально противоположные точки. Многообразие  $\mathbb{RP}^n$  двухсвязно, так как имеется два типа неэквивалентных замкнутых кривых – обычные кривые внутри  $n$ -мерного шара (на сфере  $S^n$  с  $x_1 \leq 0$ ) и кривые, которые соединяют диаметрально противоположные точки на граничной сфере  $S^{n-1}$ .

Преобразование  $x_i \rightarrow -x_i$  в  $\mathbb{R}^{n+1}$  переводит точки сферы  $S^n$  (с центром в  $O$ ) в их диаметрально противоположные точки. Это преобразование определяет действие группы  $\mathbf{Z}_2$  на сфере  $S^n$ . Тогда очевидно, что  $S^n/\mathbf{Z}_2 = \mathbb{RP}^n$  (понятие факторпространства  $M/G$  дано ниже в Определении 6.1.2).

<sup>10</sup>То есть существует гладкое отображение  $f$  цилиндра  $I \times S^1$  в  $M$ , такое, что  $f(0, S^1)$  совпадает с первой кривой, а  $f(1, S^1)$  – со второй.

<sup>11</sup>Строго говоря, шар, включающий в себя граничную сферу, не является многообразием, а представляет собой многообразие с краем. Для нас эта тонкость будет несущественна.

В качестве многообразий (какого-либо числа измерений, скажем  $m$ ) могут выступать гладкие поверхности  $M$ , вложенные в  $n$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  большего числа измерений  $n > m$ . Такое вложение поверхности  $M$  в  $\mathbb{R}^n$  можно задать с помощью набора независимых уравнений

$$F_A(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (A = 1, 2, \dots, n - m), \quad (3.1.4) \quad \text{v1M}$$

где  $\{x_i\}$  – координаты в  $\mathbb{R}^n$ , а  $F_A$  – гладкие функции. Точка  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  лежит на поверхности  $M$ , если ее координаты удовлетворяют уравнениям (3.1.4). Сделаем бесконечно малый сдвиг  $x_i \rightarrow x'_i = x_i + \epsilon a_i$  точки  $\vec{x} \in M$  вдоль вектора  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , где  $\epsilon$  – бесконечно малый параметр. Тогда сдвинутая точка  $\vec{x}'$  будет снова принадлежать поверхности  $M$ :  $F_A(\vec{x}') = 0$ , если

$$a_k \frac{\partial}{\partial x_k} F_A(\vec{x}) = 0, \quad \forall A. \quad (3.1.5) \quad \text{kasv}$$

В этом случае  $\vec{a}$  – касательный вектор к поверхности  $M$  в точке  $\vec{x}$ . Множество всех векторов  $\vec{a}$ , удовлетворяющих (3.1.5), образует касательное векторное пространство  $T_{\vec{x}}M$  к многообразию  $M$  в точке  $\vec{x}$  (общее определение касательных пространств к многообразию  $M$  мы дадим в разделе 3.1.5). Точка  $\vec{x} \in M$  называется неособой, если все вектора  $\vec{\partial} F_A(\vec{x})$  ( $A = 1, 2, \dots, n - m$ ), которые перпендикулярны  $T_{\vec{x}}M$ , линейно независимы. В этом случае размерность касательного пространства  $T_{\vec{x}}M$  равна  $m$ . Поверхность  $M$ , заданная уравнениями (3.1.4), называется регулярной, если все ее точки – неособые. В этом случае  $M$  представляет собой  $m$ -мерное гладкое многообразие, вложенное в  $\mathbb{R}^n$ .

#### Примеры вложенных многообразий.

4. Единичная сфера  $S^{n-1}$  задается в  $\mathbb{R}^n$  одним уравнением:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0. \quad (3.1.6) \quad \text{r.2}$$

Группой инвариантности такого многообразия является группа  $O(n)$ .

5. Пространство де Ситтера  $dS^n$  задается в  $\mathbb{R}^{n,1}$  уравнением.

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - M^2 = 0, \quad (3.1.7) \quad \text{r.3}$$

где  $M$  – ненулевой вещественный параметр. Группой инвариантности такого многообразия является группа де Ситтера  $O(n, 1)$  (она же – группа Лоренца  $(n + 1)$ -мерного пространства Минковского).

6. Пространство анти де Ситтера  $AdS^n$  ( $n \geq 3$ ) задается в  $\mathbb{R}^{n+1}$  уравнением:

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 + M^2 = 0, \quad (3.1.8) \quad \text{r.4}$$

где  $M$  – ненулевой вещественный параметр. Группой инвариантности многообразия (3.1.8) является группа анти де Ситтера  $O(n - 1, 2)$ . В литературе также рассматривается другой вариант пространства с группой инвариантности  $O(n - 1, 2)$ , который задается уравнениями

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 - M^2 = 0. \quad (3.1.9) \quad \text{r.45}$$

Выбор знака у  $M^2$  в (3.1.7) и (3.1.8) будет мотивирован ниже в разделе 6.1.

7. Многомерный аналог трехмерного двуполостного гиперboloида задается уравнением (сравните с (3.1.7))

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 + M^2 = 0. \quad (3.1.10) \quad \text{r.44}$$

Это многообразие не является связным, так как две его части с  $x_n > 0$  и с  $x_n < 0$  разделены гиперплоскостью  $x_n = 0$ , не принадлежащей гиперboloиду (3.1.10).

- **Задача 50.** Показать, что все точки поверхностей (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9) и (3.1.10) – неособые.

### 3.1.2 Многообразие групп Ли. Примеры.

Итак, группа Ли — это группа, одновременно представляющая собой гладкое многообразие<sup>12</sup>.

**Определение 3.1.8** Размерностью группы Ли  $G$  будем называть размерность многообразия  $G$  и обозначать эту размерность  $\dim(G)$ .

Рассмотрим группу Ли  $G$ , имеющую размерность  $\dim(G) = n$ . По определению группа  $G$  является гладким  $n$ -мерным многообразием, поэтому в окрестности любой точки многообразия  $G$ , например, единицы  $e \in G$ , можно ввести локальные координаты, т.е. задать взаимнооднозначное отображение  $\phi$  некоторой локальной карты (окрестности)  $U \subset G$ , покрывающей точку  $e \in G$ , на область  $V$  в  $\mathbb{R}^n$ . Выберем отображение  $\phi$  так, чтобы точка  $\phi(e)$  совпадала с началом координат в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, каждому элементу  $g \in U \subset G$  ставится в соответствие  $n$  вещественных чисел  $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  – координат точки  $\phi(g) \in \mathbb{R}^n$ . Числа  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  называются координатами элемента  $g$ , который в этом случае будем обозначать  $g(\vec{x})$ . Единичный элемент  $e \in G$  имеет нулевые координаты  $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , т.е.  $g(\vec{0}) = e$ . Координаты  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  также называются параметрами группы Ли  $G$ .

Если два элемента  $g(\vec{x})$  и  $g(\vec{y})$  из окрестности  $U \subset G$  достаточно близки к единичному элементу  $e$ , то их произведение  $g(\vec{x}) \cdot g(\vec{y})$  будет снова лежать в окрестности  $U \subset G$  и согласно основному групповому свойству мы получим

$$g(\vec{x}) \cdot g(\vec{y}) = g(\vec{F}(\vec{x}, \vec{y})) = g(\vec{z}). \quad (3.1.11) \quad \text{ggg}$$

Здесь вектор-функция  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y})$  определяет произведение элементов из достаточно малой окрестности  $U \subset G$  единицы и содержит всю информацию о локальных свойствах группы Ли  $G$ . Заметим, что если  $G$  – группа Ли, то координаты

$$z^i = F^i(\vec{x}, \vec{y}) = F^i(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.1.12) \quad \text{ggz}$$

произведения  $g(\vec{x}) \cdot g(\vec{y})$ , должны быть гладкими функциями координат  $\{x^i\}$  и  $\{y^i\}$  каждого из сомножителей, так что функции  $F^i$  могут быть разложены по  $\{x^i\}$  и  $\{y^i\}$  в ряд Тейлора до любого порядка.

<sup>12</sup>Вообще говоря, можно ослабить требование гладкости и рассматривать непрерывные или  $r$  раз дифференцируемые многообразия, для которых функции перехода (3.1.2) непрерывны или дифференцируемы конечное число раз. Замечательно, что для групп это не дает ничего нового: если групповое многообразие непрерывно, то оно автоматически является гладким.

- **Задача 51.** Доказать, что соотношения (3.1.12) задают действие (2.3.10), (2.3.11) группы  $G$  на свое многообразие, то есть для функций  $F^i(\vec{x}, \vec{y})$  (3.1.12), которые определяют действие элемента  $g(\vec{x}) \in G$  на элемент  $g(\vec{y}) \in G$ , выполняются условия (2.3.12). Доказать, что это действие не есть действие группы на группу (рассмотреть вопрос о выполнении группового свойства (2.3.26)).

Далее, из соотношений  $g(\vec{x}) \cdot e = g(\vec{x})$  и  $e \cdot g(\vec{y}) = g(\vec{y})$  следуют условия для функций (3.1.12):  $F^i(\vec{x}, \vec{0}) = x^i$  и  $F^i(\vec{0}, \vec{y}) = y^i$ , из которых, в свою очередь, получается разложение

$$F^i(\vec{x}, \vec{y}) = x^i + y^i + f_{kj}^i x^k y^j + g_{kjm}^i x^k x^j y^m + h_{kjm}^i x^k y^j y^m + O_4, \quad (3.1.13) \quad \text{chi0}$$

где  $f_{kj}^i, g_{kjm}^i, h_{kjm}^i$  – некоторые константы, а  $O_4$  – обозначает члены четвертого порядка малости по переменным  $\{x^i\}$  и  $\{y^i\}$ . Формула (3.1.13) играет важную роль при описании локальных свойств многообразия группы Ли  $G$  и будет нами использоваться в дальнейшем.

**Примеры.** Рассмотрим примеры некоторых групповых многообразий.

1. Многообразие группы всех трансляций в  $\mathbb{R}^n$  совпадает с самим пространством  $\mathbb{R}^n$ .
2. Группа  $U(1)$  – это множество комплексных чисел  $z$  таких, что  $|z| = 1$ . Поэтому многообразие  $U(1)$  – это единичная окружность  $S^1$ , вложенная в комплексную плоскость. Поскольку группы  $U(1)$  и  $SO(2)$  изоморфны, то их многообразия совпадают.
3. Группа  $GL(n, \mathbb{R})$  (или  $GL(n, \mathbb{C})$ ), невырожденных  $(n \times n)$  матриц  $A = \|A_{ij}\|$  над полем вещественных  $\mathbb{R}$  (или комплексных  $\mathbb{C}$ ) чисел представляет собой  $n^2$ - мерное (или  $2n^2$ - мерное в комплексном случае) вещественное пространство с координатами  $\{A_{ij}\}$  (или  $\{Re(A_{ij}), Im(A_{ij})\}$ ), из которого исключены точки поверхности  $\det(A) = 0$ . Очевидно, что

$$\dim(GL(n, \mathbb{R})) = n^2, \quad \dim(GL(n, \mathbb{C})) = 2n^2.$$

4. Группа  $SL(n, \mathbb{R})$  (или  $SL(n, \mathbb{C})$ ) вещественных (или комплексных) матриц  $A = \|A_{ij}\|$ , задается уравнением  $\det(A) = 1$ . Это уравнение определяет  $(n^2 - 1)$ -мерное многообразие в пространстве  $\mathbb{R}^{n^2}$  в случае группы  $SL(n, \mathbb{R})$  и  $(2n^2 - 2)$ - мерное многообразие в пространстве  $\mathbb{R}^{2n^2}$  в случае группы  $SL(n, \mathbb{C})$ :

$$\dim(SL(n, \mathbb{R})) = n^2 - 1, \quad \dim(SL(n, \mathbb{C})) = 2n^2 - 2.$$

5. Пространство группы  $U(n)$  унитарных матриц  $U$  задается системой уравнений  $U \cdot U^\dagger = I$ . Матрицы  $U \cdot U^\dagger$  и  $I_n$  – эрмитовы, поэтому число независимых вещественных соотношений в этой системе равно  $2 \cdot n(n - 1)/2 + n = n^2$ . Так как многообразие группы  $U(n)$  вкладывается в пространство  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , а число соотношений, задающих это многообразие, равно  $n^2$ , то размерность  $U(n)$  дается формулой

$$\dim(U(n)) = 2n^2 - n^2 = n^2.$$

6. Пространство группы  $SU(n)$  специальных унитарных матриц  $U$  определяется уравнениями  $U \cdot U^\dagger = I$  и  $\det(U) = 1$ . Для унитарной матрицы имеем  $|\det(U)| = 1$ , то есть  $\det(U) = e^{i\phi}$ , поэтому комплексное соотношение  $\det(U) = 1$  фиксирует только

один вещественный параметр  $\phi$ . Учитывая результат предыдущего пункта, получаем, что многообразие группы  $SU(n)$  имеет размерность

$$\dim(SU(n)) = n^2 - 1 .$$

**7.** Покажем, что многообразие группы  $SU(2)$  – это трехмерная единичная сфера  $S^3$ . Группа  $SU(2)$  состоит из  $2 \times 2$  комплексных матриц  $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , удовлетворяющих соотношению  $\det(U) = 1$  и условию унитарности  $U^\dagger = U^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \delta = \alpha^* , \quad \gamma = -\beta^* .$$

Отсюда следует, что произвольный элемент  $U \in SU(2)$  можно единственным образом представить в виде

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} , \quad (3.1.14) \quad \text{msu2}$$

где числа  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  связаны соотношением  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , вытекающим из условия  $\det(U) = 1$ . Таким образом, каждый элемент  $SU(2)$  задается парой комплексных чисел

$$\alpha = x_0 + ix_3 , \quad \beta = x_2 + ix_1 \quad (x_\alpha \in \mathbb{R}) , \quad (3.1.15) \quad \text{msu2b}$$

связанных условием

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 , \quad (3.1.16) \quad \text{msu2x}$$

и следовательно имеется взаимнооднозначное соответствие между элементами  $SU(2)$  и точками трехмерной единичной сферы  $S^3$ , вложенной в пространство  $\mathbb{R}^4$ . Это многообразие – односвязно, т.к. все сферы  $S^n$  ( $n > 1$ ) односвязны. Отметим, что представление (3.1.14) ( $\alpha$  и  $\beta$  заданы в (3.1.15) и (3.1.16)) можно записать в виде

$$U = \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\sigma}_\alpha x_\alpha , \quad \sum_{\alpha=0}^3 x_\alpha x_\alpha = 1 , \quad (3.1.17) \quad \text{pauli1}$$

где  $\tilde{\sigma}_0 = I_2$  – единичная  $2 \times 2$  матрица,  $\tilde{\sigma}_\alpha = i\sigma_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), а  $\sigma_\alpha$  – это матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (3.1.18) \quad \text{pauli}$$

**8.** Группа вещественных ортогональных матриц  $O \in O(n)$  и соответствующее многообразие, вложенное в  $\mathbb{R}^{n^2}$ , задается системой уравнений

$$O \cdot O^T = I_n . \quad (3.1.19) \quad \text{son}$$

Поскольку матрицы  $O \cdot O^T$  и  $I_n$  – симметричны, то число независимых уравнений, определяющих многообразие  $O(n)$ , равно  $n(n+1)/2$ . Отсюда следует, что многообразие группы  $O(n)$  имеет размерность

$$\dim(O(n)) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 = \dim(SO(n)) .$$

Последнее равенство вытекает из того факта, что многообразие группы  $O(n)$  состоит из двух несвязанных частей одинаковой размерности, одна из которых представляет собой многообразие  $SO(n) = O_+(n)$  (множество ортогональных матриц  $O$  с условием  $\det(O) = 1$ ), а вторая часть  $O_-(n)$  (множество ортогональных матриц  $O$  с условием  $\det(O) = -1$ ) состоит из элементов смежного класса  $R \cdot SO(n)$ , где  $R$  любой фиксированный элемент из  $O_-(n)$  (см. Задачу 10.).

**9.** Многообразие группы  $SO(3)$  определяется уравнениями (3.1.19):

$$O_{ij}O_{kj} = \delta_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (3.1.20) \quad \text{so3a}$$

и  $\det(O) = +1$ . Уравнения (3.1.20) задают ортонормированную систему 3-х векторов:  $\vec{O}_i = (O_{i1}, O_{i2}, O_{i3})$ ,  $(i = 1, 2, 3)$ , а условие  $\det(O) = +1$  говорит о том, что ориентация у системы векторов  $\{\vec{O}_i\}$  такая же, как и у векторов ортонормированного базиса  $\vec{I}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ . Ортонормированную систему  $\{\vec{O}_i\}$  можно получить из системы  $\{\vec{I}_i\}$  следующим образом – совместим  $\vec{I}_1$  и  $\vec{O}_1$ , делая поворот в плоскости  $\vec{I}_1$  и  $\vec{O}_1$ . Тогда два других вектора  $\vec{O}_2$  и  $\vec{O}_3$  будут лежать в плоскости векторов  $\vec{I}_2$  и  $\vec{I}_3$  и их можно будет совместить с  $\vec{I}_2$  и  $\vec{I}_3$  некоторым поворотом вокруг оси  $\vec{O}_1$  на угол  $\psi \in [-\pi, \pi]$ . Таким образом, положение векторов  $\{\vec{O}_i\}$  определяется вектором  $\vec{O}_1$  и некоторым углом  $\psi \in [-\pi, \pi]$ , поэтому каждому элементу из  $SO(3)$  мы можем сопоставить вектор  $\psi \cdot \vec{O}_1$ , направление которого задается осью  $\vec{O}_1$ , а длина вектора равна углу поворота  $\psi$ . В такой параметризации многообразие группы  $SO(3)$  – это шар в  $\mathbb{R}^3$  с радиусом  $\pi$ , причем диаметрально противоположные точки граничной сферы этого шара должны быть отождествлены, т.к. повороты вокруг оси  $\vec{O}_1$  на углы  $\pi$  и  $-\pi$  тождественны. Такое трехмерное многообразие гомеоморфно  $\mathbb{RP}^3$  и двух-связно (см. Пример 3 в предыдущем подразделе **3.1.1**).

- **Задача 52.** Написать уравнения, определяющие многообразия симплектических групп  $Sp(2r, \mathbb{C})$ ,  $Sp(2r, \mathbb{R})$ ,  $USp(2r)$  и найти размерности этих многообразий. В частности доказать, что  $\dim(USp(2r)) = \dim(Sp(2r, \mathbb{R}))$ .

**10.** Псевдо-ортогональная группа  $O(1, 1)$  – группа Лоренца в двумерном пространстве  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Преобразования из группы  $O(1, 1)$  в двумерном пространстве  $x_i \rightarrow x'_i = O_{ij}x_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) сохраняют квадратичную форму

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2), \quad (3.1.21) \quad \text{form11}$$

и разбиваются на 4 типа преобразований, которые проще всего записать в терминах переменных  $x_+ = (x_1 + x_2)$  и  $x_- = (x_1 - x_2)$ :

$$\begin{aligned} I.) \quad x'_+ &= e^\phi x_+, \quad x'_- = e^{-\phi} x_-; & PT.) \quad x'_+ &= -e^\phi x_+, \quad x'_- = -e^{-\phi} x_-; \\ P.) \quad x'_+ &= e^\phi x_-, \quad x'_- = e^{-\phi} x_+; & T.) \quad x'_+ &= -e^\phi x_-, \quad x'_- = -e^{-\phi} x_+; \end{aligned} \quad (3.1.22) \quad \text{boost}$$

где  $x'_\pm = (x'_1 \pm x'_2)$  и  $\phi \in \mathbb{R}$ . Матрицы  $||O_{ij}||$  для этих типов преобразований имеют вид

$$I: \begin{pmatrix} \text{ch}\phi & \text{sh}\phi \\ \text{sh}\phi & \text{ch}\phi \end{pmatrix}, \quad P: \begin{pmatrix} \text{ch}\phi & -\text{sh}\phi \\ \text{sh}\phi & -\text{ch}\phi \end{pmatrix}, \quad T: \begin{pmatrix} -\text{ch}\phi & \text{sh}\phi \\ -\text{sh}\phi & \text{ch}\phi \end{pmatrix}, \quad PT: \begin{pmatrix} -\text{ch}\phi & -\text{sh}\phi \\ -\text{sh}\phi & -\text{ch}\phi \end{pmatrix}, \quad (3.1.23) \quad \text{xx11}$$



и содержат, соответственно, единичное преобразование  $I$ , пространственное отражение  $P$ , инверсию времени  $T$  и полное отражение  $PT$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(мы интерпретируем  $x_1$  как временную, а  $x_2$  как пространственную координаты). Преобразования (3.1.23) типа  $I$  называются собственными ортохронными и образуют подгруппу  $O_+^\uparrow(1, 1) \subset O(1, 1)$ . Все остальные типы (3.1.23) представляют собой правые смежные классы группы  $O(1, 1)$  по подгруппе  $O_+^\uparrow(1, 1)$ :

$$O_+^\downarrow(1, 1) \equiv O_+^\uparrow(1, 1) \cdot PT, \quad O_-^\uparrow(1, 1) \equiv O_+^\uparrow(1, 1) \cdot P, \quad O_-^\downarrow(1, 1) \equiv O_+^\uparrow(1, 1) \cdot T,$$

и, таким образом, многообразие группы  $O(1, 1)$  состоит из четырех не связанных друг с другом компонент, каждая из которых гомеоморфна многообразию группы  $O_+^\uparrow(1, 1)$ .

- **Задача 53.** Доказать, что  $O_+^\uparrow(1, 1)$  — инвариантная подгруппа в  $O(1, 1)$ . Указание: проверить, что левые и правые смежные классы в  $O(1, 1)$  по подгруппе  $O_+^\uparrow(1, 1)$  совпадают. Доказать, что  $O(1, 1)/O_+^\uparrow(1, 1) = Z_2 \times Z_2$ .

**ISA** но-  
вая задача

Объединение двух смежных классов  $O_+^\uparrow(1, 1)$  и  $O_+^\downarrow(1, 1)$  образует подгруппу собственных преобразований  $O_+(1, 1) = SO(1, 1) \subset O(1, 1)$  (для этих преобразований  $\det ||O_{ij}|| = 1$ ). Объединение двух смежных классов  $O_+^\uparrow(1, 1)$  и  $O_-^\uparrow(1, 1)$  (тип  $I$  и тип  $P$  из (3.1.23)) называется множеством ортохронных преобразований, обозначается  $O^\uparrow(1, 1)$  и тоже образует подгруппу в  $O(1, 1)$ .

- **Задача 54.** Доказать, что множество ортохронных преобразований  $O^\uparrow(1, 1)$  образует подгруппу в  $O(1, 1)$ .

Для функций  $\text{ch}\phi$ ,  $\text{sh}\phi$  мы имеем тождество  $\text{ch}^2\phi - \text{sh}^2\phi = 1$ , поэтому многообразием подгруппы  $O_+(1, 1) = SO(1, 1)$  (тип  $I$  и тип  $PT$  из (3.1.23)) является гипербола

$$x^2 - y^2 = 1, \quad (3.1.24) \quad \text{xx12}$$

на двумерной плоскости  $O_{11} = O_{22} = x$ ,  $O_{12} = O_{21} = y$ , вложенной в пространство  $\mathbb{R}^4$  всех вещественных  $2 \times 2$  матриц  $||O_{ij}||$ . Ветвь  $x \geq +1$  гиперболы (3.1.24) соответствует собственной ортохронной подгруппе  $O_+^\uparrow(1, 1)$  (тип  $I$ ), а ветвь  $x \leq -1$  — смежному классу  $O_+^\downarrow(1, 1)$  (тип  $PT$ ).

Если сделать замену координат  $x_1 = ct$ ,  $x_2 = x$ , где  $c$  — некоторая положительная константа (скорость света), и перейти от параметра  $\phi$  к параметру  $v$ :

$$\text{ch}\phi = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad \text{sh}\phi = -\frac{v}{c} (1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

то преобразования  $x'_i = O_{ij}x_j$  из  $O_+^\uparrow(1, 1)$  переписываются в виде преобразований Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.1.25) \quad \text{xx16}$$

которые называются бустами. Новый параметр  $v$  интерпретируется как скорость движения новой системы отсчета, причем видно, что параметр  $|v|$  всегда должен быть меньше скорости света  $c$ . Если  $|v| \ll c$ , то из (3.1.25) вытекают классические преобразования Галилея  $x' = x - vt$  и  $t' = t$ , которые образуют линейную неоднородную группу  $ISO(1)$  матриц вида  $\begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , которая действует в двумерном пространстве векторов  $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ .

**11.** Многообразие псевдоортогональной группы  $O(1, n-1)$  (группы Лоренца в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^{1, n-1}$ ) определяется уравнениями (2.2.64) ( $p = 1, q = n-1$ ):

$$O_{km} \eta_{ki} O_{ij} = \eta_{mj}, \quad (m, j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3.1.26) \quad \text{xx13}$$

где  $\|\eta_{ki}\| = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$ . Рассмотрим соотношение (3.1.26) для  $m = 0 = j$

$$O_{00}^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} O_{k0} O_{k0}. \quad (3.1.27) \quad \text{xx14}$$

Отсюда следует, что либо  $O_{00} \geq 1$ , либо  $O_{00} \leq -1$ . С другой стороны соотношение (3.1.26) записывается в виде  $\eta = O^T \eta O$  и, вычисляя детерминант от обеих частей, мы получаем  $\det(O) = \pm 1$ . Таким образом, мы имеем 4 возможности (4 непересекающихся подмножества)

$$\begin{array}{lll} O_{00} \geq 1, & \det(O) = 1, & O_+^\uparrow \\ O_{00} \geq 1, & \det(O) = -1, & O_-^\uparrow \\ O_{00} \leq -1, & \det(O) = -1, & O_-^\downarrow \\ O_{00} \leq -1, & \det(O) = 1, & O_+^\downarrow \end{array} \quad (3.1.28) \quad \text{clasy}$$

Подмножество  $O_+ = O_+^\uparrow \cup O_+^\downarrow$  образует подгруппу в  $O(1, n-1)$ , изоморфную  $SO(1, n-1)$ . Преобразования из множества  $O^\uparrow = O_+^\uparrow \cup O_-^\uparrow$  называются *ортохронными*.

- **Задача 55.** Доказать, что множество  $O^\uparrow$  ортохронных преобразований образует подгруппу в  $O(1, n-1)$ .

Собственные ортохронные преобразования  $O_+^\uparrow$  также образуют подгруппу в группе  $O(1, n-1)$ . Это следует из того, что множество  $O_+^\uparrow$  является пересечением двух подгрупп  $O_+$  и  $O^\uparrow$ . Подгруппа  $O_+^\uparrow$  называется *собственной ортохронной группой* Лоренца.

Важными представителями для классов (3.1.28) являются преобразования ( $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^{1, n-1}$ ):

- 1.) тождественное преобразование:  $I \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ;
- 2.) пространственное отражение:  $(P \cdot \vec{x})_i = \eta_{ij} x_j$ ;
- 3.) обращение времени:  $(T \cdot \vec{x})_i = -\eta_{ij} x_j$ ;
- 4.) полное отражение в пространстве  $\mathbb{R}^{1, n-1}$ :  $(PT \cdot \vec{x})_i = -x_i$ .

Легко понять, что  $I \in O_+^\uparrow$ ,  $P \in O_-^\uparrow$ ,  $T \in O_-^\downarrow$  и  $PT \in O_+^\downarrow$ . Полная группа  $O(1, n-1)$  состоит из четырех смежных классов:

$$O(1, n-1) = (O_+^\uparrow \cdot I) \cup (O_+^\uparrow \cdot P) \cup (O_+^\uparrow \cdot T) \cup (O_+^\uparrow \cdot PT). \quad (3.1.29) \quad 01n$$

Элементы из каждого из этих четырех классов образуют связные подмножества, то есть элементы из каждого класса могут быть переведены друг в друга непрерывными преобразованиями, а сама группа  $O(1, n-1)$  несвязна и состоит из четырех перечисленных выше компонент.

Таким образом, многообразие группы  $O(1, n-1)$  для  $n > 2$  устроено так же, как устроено многообразие простейшей из групп такого типа – группы  $O(1, 1)$ . Разумеется, все сказанное выше о структуре групп  $O(1, n-1)$  в полной мере относится к группе Лоренца  $O(1, 3)$  четырехмерного пространства-времени.

**12.** Многообразие псевдоортогональной группы  $O(p, q)$ , где  $p \geq 1$  и  $q \geq 1$ , определяется уравнениями (2.2.64). Представим  $O$  в виде блочной матрицы

$$O = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \quad (3.1.30) \quad \text{so-pq1}$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $W$  – вещественные матрицы размера  $p \times p$ ,  $p \times q$ ,  $q \times p$  и  $q \times q$ , соответственно. Тогда условия (2.2.64) дают

$$X^T \cdot X = I_p + Z^T \cdot Z, \quad W^T \cdot W = I_q + Y^T \cdot Y, \quad X^T \cdot Y = Z^T \cdot W. \quad (3.1.31) \quad \text{so-pq2}$$

Система этих уравнений может быть использована для выяснения структуры многообразия группы  $O(p, q)$ . Для группы  $O(p, q)$  можно определить аналог собственной ортохронной подгруппы  $SO^\uparrow(p, q) \subset O(p, q)$ , которая представляет собой подмножество элементов  $O \in O(p, q)$ , таких, что  $\det(O) = +1$  и  $\det(X) \geq 1$ ,  $\det(W) \geq 1$ , где матрицы  $X$  и  $W$  определены в (3.1.30) (сравните с (3.1.28)). Более того, так же, как и многообразие  $O(1, n-1)$ , многообразие группы  $O(p, q)$  состоит из четырех не связанных друг с другом компонент, причем каждая из компонент представляет собой смежный класс по подгруппе  $SO^\uparrow(p, q)$ .

- **Задача 56.** ★ Доказать, что многообразие  $O(p, q)$ , где  $p \geq 1$  и  $q \geq 1$ , является объединением четырех не связанных друг с другом многообразий, каждое из которых представляет собой смежный класс по подгруппе  $SO^\uparrow(p, q) \subset O(p, q)$ . Указание. Докажите сначала, что для матриц, удовлетворяющих соотношениям (3.1.31), справедливо  $|\det(X)| \geq 1$ ,  $|\det(W)| \geq 1$ .

### 3.1.3 Многообразие конформных групп $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ .

В этом подразделе мы рассмотрим структуру многообразий групп  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , которые были введены в подразделе 2.3.6. Напомним, что группа  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  образуется как множество любых композиций 4-х основных преобразований в пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  (см. подраздел 2.3.6):

VRN,  
до конца  
раздела  
ред. правка

1.) Преобразования сдвигов из линейной неоднородной группы  $IO(p, q)$ :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}, \quad \vec{a}, \vec{x} \in \mathbb{R}^{p,q}. \quad (3.1.32) \quad \text{mapa12f}$$

2.) Псевдоортогональные преобразования из группы  $IO(p, q)$ :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = O \cdot \vec{x}, \quad O \in O(p, q). \quad (3.1.33) \quad \text{mapa12g}$$

3.) Масштабные линейные преобразования:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \lambda \vec{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0. \quad (3.1.34) \quad \text{mapa12h}$$

4.) Преобразования инверсии в точке  $\vec{a} \in \mathbb{R}^{p,q}$ :

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{(\vec{x} - \vec{a})^2}. \quad (3.1.35) \quad \text{mapa12k}$$

Приведем здесь также для полноты картины:

5.) специальное конформное преобразование (2.3.36)

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \frac{\vec{x} - \vec{b}(\vec{x})^2}{(1 - 2(\vec{x}, \vec{b}) + (\vec{b})^2(\vec{x})^2)}, \quad (3.1.36) \quad \text{mapa12j}$$

которое является композицией двух преобразование инверсии (3.1.35), в точке начала координат  $\vec{a} = \vec{0}$  и в точке  $\vec{a} = \vec{b}$ .

Заметим, что преобразования инверсии (3.1.35), как и несобственные вращения из группы  $O(p, q)$ , содержащиеся в (3.1.33) (с детерминантом, равным  $-1$ ), в отличие от других типов конформных преобразований, никаким непрерывным изменением параметров  $a_i$  и  $O_{ij}$  не могут быть переведены в тождественное преобразование. Таким образом, применение одной инверсии (как и одного несобственного отражения из  $O(p, q)$ ) выводит нас из связной компоненты единицы группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ . С другой стороны, рассматривая композицию двух преобразований инверсии, то есть специальное конформное преобразование (3.1.36), мы видим, что это преобразование лежит в связной компоненте единицы группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , так как предел  $\vec{b} \rightarrow 0$  превращает (3.1.36) в тождественное преобразование. Поэтому применение второй инверсии возвращает нас в связную компоненту единицы. Таким образом, многообразие группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  состоит по крайней мере из четырех несвязных компонент (как у псевдоортогональных групп  $O(p+1, q+1)$ , которые разбиваются на несвязные подмножества (10.3.4)), а преобразование инверсии напоминает преобразование отражения времени  $T$  в псевдоортогональных группах, которое переводит элементы из ортохронной связной компоненты группы в неортохронную.

Эта аналогия не случайна, сейчас мы установим изоморфизм между группой конформных преобразований  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  и группой  $O(p+1, q+1)$ . Подгруппа преобразований из  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , лежащих в связной компоненте единицы, изоморфна собственной псевдо-ортогональной группе  $O_+(p+1, q+1) = SO(p+1, q+1)$  (см. также подраздел 3.2.11, где мы построим локальный изоморфизм между  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  и  $SO(p+1, q+1)$ ).

**Утверждение 3.1.1** Конформная группа  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  изоморфна группе  $O(p+1, q+1)$ .

**Доказательство.** Для доказательства изоморфизма  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q}) = O(p+1, q+1)$  рассмотрим поверхность в  $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$

$$y_0^2 - y_{n+1}^2 + y_i \eta^{ij} y_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.1.37)$$

где  $n = p + q$ ,  $y_a$  ( $a = 0, 1, \dots, n+1$ ) – координаты в  $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$ , а  $\|\eta^{ij}\| = I_{p,q}$  – метрика в подпространстве  $\mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{R}^{p+1, q+1}$ . Так как уравнение поверхности (3.1.37) можно записать в виде  $y_a (I_{p+1, q+1})_{ab} y_b = 0$ , то группа преобразований (2.3.13) в  $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$ , оставляющая поверхность (3.1.37) инвариантной, – это псевдоортогональная группа  $O(p+1, q+1)$ . Перепишем уравнение (3.1.37) следующим образом

$$y_i y^i = y_+ y_- , \quad (3.1.38) \quad \text{svkon1}$$

где мы воспользовались правилом подъема индексов:  $y^i = \eta^{ij} y_j$  и положили  $y_+ = y_{n+1} + y_0$  и  $y_- = y_{n+1} - y_0$ . Выберем некоторый вектор  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{p,q}$  с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  и положим

$$y_+ = \alpha, \quad y_- = \alpha x_i \eta^{ij} x_j = \alpha x_i x^i, \quad y_i = \alpha x_i, \quad (3.1.39) \quad \text{svkon2}$$

при этом соотношения (3.1.38) будут выполняться автоматически для всех  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^{p,q}$ . Зафиксируем теперь следующие 4 матрицы размера  $(n+2) \times (n+2)$

$$T_1 = \left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & & & & 0 \\ \vdots & & I_n & & \vdots \\ a_n & & & & 0 \\ \hline a_i a^i & 2a^1 & \dots & 2a^n & 1 \end{array} \right), \quad T_2 = \left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & O_1^1 & \dots & O_1^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & O_n^1 & \dots & O_n^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (3.1.40) \quad \text{svkon3}$$

$$T_3 = \left( \begin{array}{c|ccc|c} \lambda^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & I_n & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right), \quad T_4 = \left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2b^1 & \dots & 2b^n & b_i b^i \\ 0 & & & & b_1 \\ \vdots & & I_n & & \vdots \\ 0 & & & & b_n \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (3.1.41) \quad \text{svkon4}$$

где  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $(a_1, \dots, a_n)$  и  $(b_1, \dots, b_n)$  – два произвольных вектора в  $\mathbb{R}^{p,q}$ ,  $a^i = \eta^{ij} a_j$ ,  $b^i = \eta^{ij} b_j$  и  $\|O_i^k\| \in SO(p, q)$ . Подействуем этими матрицами на вектор  $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$  с координатами  $(y_+, y_1, \dots, y_n, y_-)$ . В результате получаем

$$T_1 \cdot \begin{pmatrix} y_+ \\ y_i \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_i + y_+ a_i \\ y_- + 2a^i y_i + (a_i a^i) y_+ \end{pmatrix}, \quad T_2 \cdot \begin{pmatrix} y_+ \\ y_i \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_+ \\ O_i^k y_k \\ y_- \end{pmatrix}, \quad (3.1.42) \quad \text{svkon5}$$

$$T_3 \cdot \begin{pmatrix} y_+ \\ y_i \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} y_+ \\ y_i \\ \lambda y_- \end{pmatrix}, \quad T_4 \cdot \begin{pmatrix} y_+ \\ y_i \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_+ + 2b^i y_i + (b_i b^i) y_- \\ y_i + b_i y_- \\ y_- \end{pmatrix}. \quad (3.1.43) \quad \text{svkon6}$$

Легко проверить, что преобразования (3.1.42), (3.1.43) сохраняют форму

$$y_i y^i - y_+ y_- = y_0^2 - y_{n+1}^2 + y_i y^i, \quad (3.1.44) \quad \text{svkon6a}$$

и всевозможные произведения матриц  $T_i$  (с различным выбором параметров) образуют группу, изоморфную  $SO(p+1, q+1)$ . Изоморфизм устанавливается соотношениями  $O_i = S^{-1} T_i S$ , где  $S$  – невырожденная  $(n+2) \times (n+2)$  матрица вида

$$S = \left( \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & I_n & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \det(S) = 2,$$

BSF

aΛ3

Проба мелкого  
судья. Мне не  
кажется, что  
это лучше.

которая переводит вектор  $(y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$  в вектор  $(y_+, y_1, \dots, y_n, y_-)$ , а матрицы  $O_i$  удовлетворяют соотношениям псевдо-ортогональности (2.2.64) и условию специальности

$$O^T I_{p+1, q+1} O = I_{p+1, q+1} \quad , \quad \det(O) = 1 \quad ,$$

и следовательно принадлежат  $SO(p+1, q+1)$ .

Пусть теперь вектор в  $\mathbb{R}^{p+1, q+1}$  с координатами  $(y_+, y_1, \dots, y_n, y_-)$  задает точку на поверхности (3.1.37), то есть  $(y_+, y_1, \dots, y_n, y_-)$  можно представить в виде (3.1.39). Тогда преобразования (3.1.42), (3.1.43) в терминах переменных  $\alpha$  и  $(x_1, \dots, x_n)$  переписываются в виде

$$T_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ x_i + a_i \end{pmatrix} \quad , \quad T_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ O_i^k x_k \end{pmatrix} \quad , \quad (3.1.45) \quad \text{svkon7}$$

$$T_3 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} \alpha \\ \lambda x_i \end{pmatrix} \quad , \quad T_4 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha (1 + 2b^i x_i + (\vec{x})^2 (\vec{b})^2) \\ \frac{x_i + b_i (\vec{x})^2}{1 + 2(\vec{x}, \vec{b}) + (\vec{x})^2 (\vec{b})^2} \end{pmatrix} \quad , \quad (3.1.46) \quad \text{svkon8}$$

где  $(\vec{x})^2 = x_i x^i$ ,  $(\vec{x}, \vec{b}) = x_i b^i$  и для векторов  $\vec{x}$  эти преобразования совпадают с преобразованиями (3.1.32) – (3.1.34) и (3.1.36) (необходимо сделать замену параметров  $b_i \rightarrow -b_i$ ). Таким образом, мы установили взаимнооднозначное соответствие подгруппы конформной группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p, q})$ , не включающей инверсию, и группы  $SO(p+1, q+1)$ .

Наконец, рассмотрим еще одно преобразование  $T_5$  вектора  $(y_+, y_1, \dots, y_n, y_-)$

$$T_5 \cdot \begin{pmatrix} y_+ \\ y_i \\ y_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_- \\ y_i \\ y_+ \end{pmatrix} \quad , \quad T_5 = \left( \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ \vdots & & I_n & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \quad , \quad (3.1.47) \quad \text{svkon9}$$

которое соответствует преобразованию отражения времени

$$y_0 \rightarrow -y_0 \quad , \quad y_i \rightarrow y_i \quad , \quad y_{n+1} \rightarrow y_{n+1} \quad ,$$

и очевидно также сохраняет форму (3.1.44), но лежит в несобственной компоненте группы  $O(p+1, q+1)$ . В случае, когда вектор  $(y_+, y_1, \dots, y_n, y_-)$  определяет точку на поверхности (3.1.38), это преобразование переписывается в виде

$$T_5 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha (\vec{x})^2 \\ x_i / (\vec{x})^2 \end{pmatrix} \quad ,$$

и есть не что иное как инверсия (3.1.35) в точке  $\vec{a} = \vec{0}$ . Все произведения преобразований  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  (с разными параметрами), образуют полную ортогональную группу  $O(p+1, q+1)$ , а построенное только что соответствие устанавливает изоморфизм между  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p, q})$  и  $O(p+1, q+1)$ .

■

ESF

### 3.1.4 Компактные группы Ли.

Напомним, что множество  $M$  называется компактным, если из любого покрытия  $M$  открытыми множествами всегда можно выделить конечное подпокрытие или, что эквивалентно, из любой последовательности точек в  $M$  можно всегда выделить сходящуюся подпоследовательность точек.

Пусть  $M$  – многообразие. Если  $M$  – метрическое пространство, то  $M$  – компактно, если оно является полным (содержит все свои предельные точки) и покрывается конечным числом открытых шаров радиуса  $\epsilon$  при сколь угодно малом, но фиксированном  $\epsilon$ . Перефразируя известное образное выражение Г. Вейля, все точки компактного многообразия  $M$  контролируются конечным числом полицейских, радиус действия которых равен  $\epsilon$ . Если многообразие  $M$  вложено в евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , то  $M$  – компактно, когда оно замкнуто<sup>13</sup> и ограничено в  $\mathbb{R}^n$ , т.е. расстояние между двумя любыми точками  $M$  конечно. Последним критерием мы и будем пользоваться в дальнейшем.

**Утверждение 3.1.2** *Сфера  $S^{n-1}$  конечного радиуса  $R$ , вложенная в  $\mathbb{R}^n$ , компактна.*

**Доказательство.** Сфера  $S^{n-1}$  радиуса  $R$ , вложенная в  $\mathbb{R}^n$  задается соотношениями

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2, \quad (3.1.48) \quad \text{sphn1}$$

где  $(x_1, \dots, x_n)$  – координаты в  $\mathbb{R}^n$ . Отсюда следует, что  $|x_i| \leq R$  и многообразие  $S^{n-1}$  – ограничено. Докажем теперь, что  $S^{n-1}$  – замкнуто, то есть любая сходящаяся последовательность точек  $\vec{x}^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$  ( $p = 1, 2, \dots$ ), лежащих на сфере  $S^{n-1}$ , сходится к точке  $\vec{x}$ , которая принадлежит сфере (3.1.48) (то есть, условия (3.1.48) сохраняются при предельном переходе – Теорема Вейерштрасса). Докажем этот факт от противного. Пусть предельная точка  $\vec{x}$  для сходящейся последовательности  $\vec{x}^{(p)} \in S^{n-1}$ , не лежит на сфере (3.1.48), то есть

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = R + \epsilon, \quad (3.1.49) \quad \text{sphn2}$$

где  $\epsilon \neq 0$ . По условию сходимости последовательности  $\vec{x}^{(p)}$  к  $\vec{x}$ , для любого сколь угодно малого  $\epsilon$  существует достаточно большой номер  $k$  такой, что для всех  $p > k$  мы имеем  $|\vec{x} - \vec{x}^{(p)}| < |\epsilon|$ . Однако это противоречит (3.1.49), так как из (3.1.49) и неравенства треугольника  $|\vec{x} - \vec{x}^{(p)}| \geq ||\vec{x}| - |\vec{x}^{(p)}||$  мы получаем

$$|\vec{x} - \vec{x}^{(p)}| \geq ||\vec{x}| - |\vec{x}^{(p)}|| = |\epsilon|.$$

Таким образом, многообразие  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , заданное в (3.1.48), не только ограничено, но и замкнуто, а следовательно – компактно. ■

Итак, все сферы  $S^n$  и гомеоморфные им многообразия – компактны. Все проективные пространства  $\mathbb{RP}^n = S^n/\mathbf{Z}_2$  также компактны. Пространства де Ситтера (3.1.7) и анти де Ситтера (3.1.8) – некомпактны, так как они неограничены.

**Гипотеза Пуанкаре.** *Всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно 3-х мерной сфере.*

Эта гипотеза была сформулирована А. Пуанкаре в 1904 году, а доказана лишь недавно (2002 год) российским математиком Г.Я. Перельманом на основе программы, предложенной американским математиком Р. Гамильтоном.

<sup>13</sup>Множество  $M$  – замкнуто, если оно является дополнением к открытому множеству и таким образом содержит все свои точки прикосновения. В рассматриваемом случае понятия замкнутости  $M$  в  $\mathbb{R}^n$  и полноты  $M$  являются эквивалентными.

**Определение 3.1.9** Группа Ли называется компактной (некомпактной) если многообразие этой группы компактно (некомпактно).

**Примеры компактных и некомпактных групп Ли.**

1.) Группы Ли  $U(1) = SO(2)$  и  $SU(2)$  – компактны, так как их многообразия  $S^1$  и  $S^3$  – компактны. Группа  $SO(3)$  – компактна, так как многообразие  $SO(3)$  – это проективное пространство  $\mathbb{RP}^3$  (пример 9 из подраздела 3.1.2).

2.) Все вещественные ортогональные группы  $O(n)$  – компактны. Многообразие группы  $O(n)$  вложено в  $n^2$ -мерное пространство  $\mathbb{R}^{n^2}$  вещественных  $n \times n$  матриц и определяется уравнениями (3.1.19):

$$O_{ij}O_{kj} = \delta_{ik}, \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (3.1.50) \quad \text{sona}$$

Положив в этих соотношениях  $k = i$ , получаем (по  $i$  суммирования нет)

$$\sum_{j=1}^n O_{ij}O_{ij} = 1. \quad (3.1.51) \quad \text{son1}$$

Таким образом, каждый элемент  $O_{ij}$  принадлежит замкнутому интервалу  $O_{ij} \in [-1, 1]$  и пространство группы  $O(n)$  ограничено. Замкнутость пространства группы  $O(n)$  следует из сохранения соотношений (3.1.50) при предельных переходах (доказательство аналогично приведенному в Утверждении 3.1.2). Таким образом, многообразие группы  $O(n)$  не только ограничено, но и замкнуто, а так как это многообразие вложено в евклидово пространство  $\mathbb{R}^{n^2}$ , то оно компактно.

**Замечание 1.** Возьмем сумму по  $i$  в соотношении (3.1.51) и получим

$$O_{ij}O_{ij} = n.$$

Таким образом, пространство группы  $O(n)$  образует компактное подмногообразие в компактном многообразии сферы  $S^{n^2-1} \subset \mathbb{R}^{n^2}$  радиуса  $\sqrt{n}$ .

3.) Все унитарные группы  $U(n)$  – компактны. Пространство группы  $U(n)$  унитарных матриц  $U$  вложено в пространство  $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$  и задается системой уравнений

$$U_{ij} \cdot U_{kj}^* = \delta_{ik}. \quad (3.1.52) \quad \text{una1}$$

Из этих уравнений получаем  $\sum_j |U_{ij}|^2 = 1$  ( $i$  фиксировано), откуда следует, что  $|U_{ij}| \leq 1$  и многообразие группы  $U(n)$  ограничено. Его замкнутость доказывается так же, как в Утверждении 3.1.2.

**Замечание 2.** В связи с примерами 2.) и 3.) отметим, что  $O(n) \subset U(n)$  и  $U(n) \subset O(2n)$ . В последнем случае вложение  $U(n)$  в  $O(2n)$  осуществляется следующим образом

$$U = (X + iY) \in U(n) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \in O(2n),$$

где  $X, Y$  – вещественные  $n \times n$  матрицы, удовлетворяющие условиям  $X^T Y = Y^T X$ ,  $X^T X + Y^T Y = I_n$  (см. (2.2.60), (2.2.65) и (2.2.66) для случая  $I_{p,q} = I_n$ ).

4.) Все унитарные симплектические группы  $USp(2r)$  – компактны. Ограниченность



многообразия группы  $USp(2r)$  следует из того, что  $USp(2r) \subset U(2r)$ , а замкнутость этого многообразия вытекает из сохранения условий унитарности и симплектичности при предельных переходах.

5.) Группы  $GL(n, \mathbb{K})$  и  $SL(n, \mathbb{K})$  ( $\mathbb{K}$  – поле комплексных или вещественных чисел) – некомпактны, так как их многообразия очевидно неограничены и незамкнуты.

6.) Группа  $O(1, 1)$  – некомпактна, так как ее многообразие состоит из четырех несвязных одномерных многообразий, два из которых образуют многообразие подгруппы  $SO(1, 1)$  – гиперболу (3.1.24), которая неограничена и незамкнута.

7.) Группы  $O(n, \mathbb{C})$ ,  $O(p, q)$ ,  $U(p, q)$ ,  $Sp(2r, \mathbb{R})$  при  $n > 1$  и  $p, q, r \neq 0$  также некомпактны. Группа  $O(p, q)$  – некомпактна, так как она содержит подгруппу  $O(1, 1)$ , многообразие которой неограничено, поэтому неограничено и многообразие  $O(p, q)$ . Группы  $O(n, \mathbb{C})$  и  $U(p, q)$  некомпактны, так как  $O(p, q) \subset U(p, q)$  и при  $p + q = n$  мы имеем  $O(p, q) \subset O(n, \mathbb{C})$ . Наконец, группа  $Sp(2r, \mathbb{R})$  – некомпактна, так как она содержит подгруппу  $Sp(2, \mathbb{R})$ , изоморфную группе  $SL(2, \mathbb{R})$ , многообразие которой неограничено.

Таким образом, среди перечисленных матричных групп компактны лишь группы  $U(n)$ ,  $O(n)$  и  $USp(2r)$  и их подгруппы  $SU(n)$  и  $SO(n)$ . Кроме этих и связанных с ними групп (таких как  $SU(N)/Z_N$ ) существует конечное число компактных групп Ли (если не брать в расчет прямые произведения типа  $SU(N) \times SO(M)$ ).

### 3.1.5 Касательные пространства к гладким многообразиям.

**Определение 3.1.10** Пусть  $M$  – гладкое многообразие. Две гладкие кривые  $f_1: I \rightarrow M$  и  $f_2: I \rightarrow M$ , исходящие из точки  $P = f_1(0) = f_2(0)$  (см. определение 3.1.4 гладкой кривой), называются эквивалентными в точке  $P$ , если  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(t) - f_2(t)}{t} = 0$  в координатах любой локальной карты. Касательным вектором  $A$  к  $M$  в точке  $P \in M$ , называется класс эквивалентности выходящих из  $P$  кривых.

Пусть  $M$  –  $n$ -мерное гладкое многообразие. Тогда в окрестности  $U \subset M$  точки  $P \in M$  можно ввести локальные координаты  $\{x^i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то есть задать взаимнооднозначное отображение  $\phi$  из  $U$  на область  $V$  в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $\phi(P)$  соответствует началу координат  $\vec{0}$  в  $\mathbb{R}^n$ . С помощью отображения  $\phi$  кривая  $f: I \rightarrow M$ , исходящая из точки  $P = f(0)$ , будет отображаться в кривую в области  $V \subset \mathbb{R}^n$

$$\vec{x}(t) = \phi(f(t)), \quad \vec{x}(0) = \vec{0}, \quad (3.1.53) \quad \text{gg3a}$$

причем координаты вектора  $\vec{x}(t)$ , задающего образ кривой  $f$  вблизи точки  $P \in U$ , можно разложить при малых  $t$

$$x^i(t) = a^i t + b^i t^2 + O(t^3), \quad (3.1.54) \quad \text{gg1a}$$

где  $a^i$  и  $b^i$  – вещественные коэффициенты. Рассмотрим теперь две кривые  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , исходящие из точки  $P = f_1(0) = f_2(0)$ , и их образы вблизи  $P$  в координатах локальной карты  $U$ :

$$x_1^i(t) = a_1^i t + b_1^i t^2 + O(t^3), \quad x_2^i(t) = a_2^i t + b_2^i t^2 + O(t^3). \quad (3.1.55) \quad \text{gg2a}$$

Согласно Определению **3.1.10** кривые  $f_1$  и  $f_2$  эквивалентны в точке  $P$ , если  $a_1^i = a_2^i$ . Таким образом, эквивалентные кривые в  $U \subset M$ , исходящие из  $P \in M$ , имеют представления в локальных координатах (3.1.54) с одними и теми же коэффициентами  $a^i \in \mathbb{R}$  (но возможно разными  $b^i$  и т.д.), а касательный вектор  $A$  к  $M$  в точке  $P$  — это класс эквивалентности кривых  $f(t)$ , исходящих из  $P$  и имеющих вблизи точки  $P$  одно и то же представление  $x^i(t) = a^i t + O(t^3)$  в координатах локальной карты  $U$ . Это означает, что касательный вектор  $A$  к  $M$  в точке  $P$  задается набором вещественных чисел  $\{a^i\}$

$$(a^1, \dots, a^n) = \left( \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right)_{t=0}, \quad (3.1.56) \quad \text{locA}$$

или вектором  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . Мы будем называть числа  $\{a^i\}$  локальными координатами касательного вектора  $A$  к  $M$  в точке  $P$ . В другой системе координат  $\{\bar{x}^i\}$  (связанной с другим отображением  $\bar{\phi}: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $\bar{U}$  может быть другой локальной картой, содержащей  $P$ ) касательный вектор  $A$  будет иметь другие локальные координаты

$$(\bar{a}^1, \dots, \bar{a}^n) = \left( \frac{d\bar{x}^1}{dt}, \dots, \frac{d\bar{x}^n}{dt} \right)_{t=0},$$

которые, однако, согласно правилу дифференцирования сложной функции, связаны с  $\{a^i\}$  (3.1.56) преобразованиями

$$\bar{a}^j = a^i \left. \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right|_{x_k=0}. \quad (3.1.57) \quad \text{gg02}$$

В силу условий (3.1.3) это преобразование  $\vec{a} \rightarrow \vec{\bar{a}}$  обратимо, поэтому если две кривые эквивалентны в точке  $P$  в одной локальной системе координат, то они будут эквивалентны и в любой другой локальной системе координат. Мы заключаем, что определение **3.1.10** касательных векторов к многообразию  $M$  в точке  $P$  не зависит от выбора локальных карт и, таким образом, самосогласовано.

С точки зрения физики кривые  $f(t)$  в  $M$  можно интерпретировать как траектории частиц, которые двигаются в  $M$ . Параметр  $t$  на кривой интерпретируется как время, а касательный вектор  $A$ , заданный в локальной системе координат в (3.1.56), можно рассматривать как вектор скорости этой частицы в точке  $P$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

**Утверждение 3.1.3** *На множестве касательных векторов к  $M$  в точке  $P$  можно ввести структуру вещественного векторного пространства.*

**Доказательство.** Рассмотрим две кривые  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  в  $U \subset M$ , исходящие из  $P$  и имеющие вблизи точки  $P$  (при малых  $t$ ) представления (3.1.55) в координатах некоторой локальной карты  $U$ . Построим новую кривую  $f(t)$ , имеющую вблизи точки  $P$  представление в локальных координатах

$$x^i(t) = (a_1^i + a_2^i)t + O(t^2). \quad (3.1.58) \quad \text{gg2b}$$

Сумма касательных векторов  $A_1$  и  $A_2$  к кривым  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  в точке  $P$  определяется как класс эквивалентных кривых  $f(t)$ , исходящих из  $P$  и имеющих в локальных

координатах при малых  $t$  представление (3.1.58). Таким образом, локальные координаты суммы двух касательных векторов  $A_1 + A_2$  равны, по определению, сумме локальных координат векторов  $A_1$  и  $A_2$ .

Умножение на вещественное число  $c$  касательного вектора  $A$  в точке  $P \in M$  к кривой  $f(t)$ , исходящей из точки  $P$  и заданной согласно (3.1.54), определяется как касательный вектор к новой кривой  $f'(t) = f(c \cdot t)$ , также исходящей из  $P$ . Кривая  $f'(t)$  вблизи точки  $P$  в координатах локальной карты  $U$  будет иметь представление

$$x^i(ct) = c a^i t + O(t^2). \quad (3.1.59) \quad \text{gg2f}$$

Поэтому если касательный вектор  $A$  к кривой  $f(t)$  в точке  $P$  имеет локальные координаты  $a^i \in \mathbb{R}$ , то касательный вектор  $c \cdot A$ , согласно его определению, будет иметь локальные координаты  $c \cdot a^i \in \mathbb{R}$ . Отметим, что нулевой касательный вектор в  $P$  соответствует "траектории" для неподвижной точки  $f(0 \cdot t) = P$ .

Итак, мы определили на множестве всех касательных векторов к многообразию  $M$  в точке  $P$  сложение касательных векторов и умножение касательного вектора на число. В силу (3.1.57) эти определения не зависят от выбора локальной карты. Пользуясь этими определениями, легко проверить для указанного множества все аксиомы векторного пространства (см. Определение 2.2.1). ■

Вещественное векторное пространство, образованное всеми касательными векторами к  $M$  в точке  $P$ , называется касательным векторным пространством к  $M$  в точке  $P$  и обозначается  $T_P(M)$ . Размерность касательного пространства  $T_P(M)$  очевидно равна размерности многообразия  $M$ .

Для нас будет исключительно важным следующий пример.

### Пример.

Рассмотрим касательное пространство к многообразию  $n$ -мерной группы Ли  $G$  в точке, соответствующей единичному элементу  $e \in G$ . Пусть  $U$  – локальная карта (окрестность) в  $G$ , содержащая точку  $e \in G$ . Рассмотрим гладкие кривые  $g(t)$  в окрестности  $U$  группы  $G$ , исходящие из единицы  $e \in U \subset G$ , то есть выберем вещественный параметр  $t$  на кривых  $g(t)$  так, чтобы  $g(0) = e$ . Определим локальные координаты на  $U$ , задав отображение  $\phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , причем потребуем чтобы  $\phi(e) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ . Отображение  $\phi$  переводит кривые  $g(t)$  в гладкие кривые (3.1.53) в области  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Локальные координаты  $\{x^i(t)\}$  точек этих кривых вблизи  $e \in G$  (при малых  $t$ ) будут, как и в общем случае, представляться в виде (3.1.54).

Две кривые  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  в окрестности  $U$  группы  $G$ , исходящие из точки  $e \in G$ , будем считать эквивалентными в этой точке, если

$$g_1(t) \cdot g_2^{-1}(t) = g(F(t)), \quad (3.1.60) \quad \text{g1g2}$$

где  $F(t) = O(t^2)$ . Это определение согласуется с определением эквивалентных кривых, которое мы дали выше в общем случае. Действительно, кривые  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  в координатах локальной карты  $U$  имеют представления (3.1.55). С учетом этих представлений и формул (3.1.11), (3.1.13), соотношение (3.1.60) означает, что для эквивалентных кривых  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  в формулах (3.1.55) мы должны, как и в общем случае, положить  $a_1^i = a_2^i$ , что и доказывает эквивалентность двух определений.

Согласно Определению **3.1.10**, класс эквивалентности кривых в  $G$  в точке  $e \in G$  называется касательным вектором к группе  $G$  в точке  $e$ .

Далее, в соответствии с общим Утверждением **3.1.3**, на множестве касательных векторов к многообразию группы  $G$  в точке  $e$  можно ввести структуру вещественного векторного пространства. В данном случае для определения суммы касательных векторов надо как и ранее рассмотреть две кривые  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  в  $U \subset G$ , исходящие из точки  $e$ , и построить новую кривую, лежащую в группе  $G$ ,

$$g(t) = g_1(t) \cdot g_2(t), \quad (3.1.61) \quad \text{g1g3}$$

касательный вектор к которой в точке  $e$  будем называть суммой касательных векторов  $A_1$  и  $A_2$  к кривым  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  в  $e$ . Эквивалентность этого определения и определения суммы касательных векторов, которое было дано в общем случае, можно продемонстрировать следующим образом. Кривой (3.1.61), согласно (3.1.11), (3.1.13) и (3.1.55), в локальных координатах соответствует кривая (3.1.58), то есть, как и в общем случае, локальные координаты суммы двух касательных векторов  $A_1 + A_2$  даются суммой локальных координат касательных векторов  $A_1$  и  $A_2$ . Наконец, умножение касательного вектора к кривой  $g(t)$  в точке  $e$ , на вещественное число  $c$  определяется как касательный вектор к новой кривой

$$g'(t) = g(c \cdot t), \quad (3.1.62) \quad \text{g1g4}$$

исходящей из точки  $e$ . При этом локальные координаты  $a^i$  касательного вектора  $A$  к кривой  $g(t)$  в точке  $e$  перейдут согласно (3.1.59) в локальные координаты  $c \cdot a^i$  касательного вектора  $c \cdot A$  к кривой  $g(c \cdot t)$  в точке  $e$ . В частном случае мы получаем, что нулевой касательный вектор к группе  $G$  в точке  $e$  соответствует "кривой"  $g(0 \cdot t) = e$ .

Так же как и в общем случае, вещественное векторное пространство, образованное всеми касательными векторами к многообразию группы Ли  $G$  в точке  $e \in G$ , будем называть касательным векторным пространством к группе  $G$  в точке  $e$  и обозначать его как  $T_e G$  или как  $\mathcal{A}(G)$  (имея ввиду, что  $T_e G$  всегда наделено дополнительной алгебраической структурой, см. ниже).

Отметим, что определения эквивалентности кривых (3.1.60), суммы касательных векторов (3.1.61) и умножения касательного вектора на число (3.1.62) в случае группы Ли не требуют явного использования локальных координат, в отличие от аналогичных определений, данных выше в случае произвольных многообразий. Кроме того, отметим еще одну особенность касательных пространств к группам Ли. Она связана с тем, что любую кривую  $g(t)$ , выходящую из  $e \in G$ , можно сместить в кривую  $g'(t)$ , выходящую из любой другой точки  $g_0 \in G$ , с помощью взаимнооднозначных преобразований

$$g(t) \rightarrow g'(t) = g_0 \cdot g(t) \quad \text{или} \quad g(t) \rightarrow g'(t) = g(t) \cdot g_0. \quad (3.1.63) \quad \text{g1g5}$$

При этом эквивалентные кривые в точке  $e$  перейдут в эквивалентные кривые в точке  $g_0$ . Поэтому имеется взаимнооднозначное соответствие между касательными векторами пространств  $T_e G$  и  $T_{g_0} G$ , которое устанавливается левыми (или правыми) сдвигами (3.1.63) на многообразии группы Ли.

**Замечание 1.** Объединение касательных пространств к гладкому многообразию  $M$  во всех его точках  $T(M) = \cup_{P \in M} T_P(M)$  имеет структуру гладкого многообразия и называется касательным расслоением многообразия  $M$ . Точнее, элементом (точкой) касательного расслоения является пара  $(P, A)$ , где  $P \in M$ ,  $A \in T_P(M)$ .

**Замечание 2.** Пусть на касательном пространстве  $T_P(M)$  к  $n$ -мерному многообразию  $M$  в точке  $P$  задана симметричная невырожденная билинейная форма (скалярное произведение):

$$f(A, B) = a^i g_{ij}(\vec{x}) b^j . \quad (3.1.64) \quad \text{gg2g}$$

Здесь  $a^i$  и  $b^j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) – локальные координаты касательных векторов  $A, B \in T_P(M)$ ,  $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$  – локальные координаты точки  $P$  в локальной карте  $U$ , а  $g_{ij}(\vec{x}) = f(A_i, A_j)$ , где  $A_i$  – базисные векторы в  $T_P(M)$  с локальными координатами  $(a_i)^j = \delta_i^j$ . Потребуем, чтобы скалярное произведение (3.1.64) не менялось при замене локальных координат, то есть  $a^i g_{ij} b^j = \bar{a}^i \bar{g}_{ij} \bar{b}^j$ . Согласно (3.1.57) это означает, что функции  $g_{ij}(x^r) := g_{ij}(\vec{x})$  при смене локальных координат  $x^r \rightarrow \bar{x}^r$  должны преобразовываться следующим образом

$$g_{ij}(x^r) \rightarrow \bar{g}_{ij}(\bar{x}^r) , \quad g_{km}(x^r) = \bar{g}_{ij}(\bar{x}^r) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} . \quad (3.1.65) \quad \text{gg2h}$$

Локальные координаты в окрестности точки  $P$  можно выбрать так, чтобы привести невырожденную матрицу  $\|g_{ij}\|$  в точке  $P$  к виду  $g_{ij} = (I_{p,q})_{ij}$ , при этом скалярное произведение (3.1.64) на  $T_P(M)$  перейдет в скалярное произведение (2.3.23).

Пусть скалярное произведение (3.1.64) задано на всех  $T_P M$  ( $\forall P \in M$ ) и при этом элементы матрицы  $g_{ij}(x^r)$  – гладкие функции от локальных координат  $x^r$  точек  $P$ , лежащих в одной и той же локальной карте. Пусть в каждой точке  $P$  матрица  $\|g_{ij}\|$  приводится заменой локальных координат к одному и тому же стандартному виду  $g_{ij} = (I_{p,q})_{ij}$  (в общем случае одновременно во всех точках  $P$  локальной карты этого сделать нельзя). Если скалярное произведение (3.1.64) обладает всеми вышеуказанными свойствами, то тогда говорят, что на многообразии  $M$  задана псевдориманова метрика  $g_{ij}$  с сигнатурой  $(p, q)$ . При  $q = 0$  скалярное произведение положительно определено, и метрика называется римановой. Понятие метрики на гладких многообразиях  $M$  будет нами использоваться ниже, например, при обсуждении конформных преобразований и конформной группы на  $M$ , а также при определении меры Хаара для многообразий групп Ли (смотри следующий раздел).

Разумеется, такое формальное определение метрики согласуется с более интуитивным представлением о том, что метрика определяет расстояние (интервал, в случае псевдоримановой метрики) между близкими точками на многообразии, см. [21]. В данной карте  $U$  близкие точки на многообразии имеют координаты  $\{x^i\}$  и  $\{x^i + dx^i\}$ , а квадрат расстояния (интервала) между ними равен

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (3.1.66) \quad \text{ds2}$$

Соотношение (3.1.65) показывает, что расстояние не зависит от выбора локальных координат.

**Замечание 3.** Пусть  $F$  – гладкое отображение гладкого  $m$ -мерного многообразия  $M$  в гладкое  $n$ -мерное многообразие  $N$ . С помощью  $F$  локальные карты  $U \subset M$  будут

отображаться в локальные карты  $\tilde{U} \subset N$ , а эквивалентные кривые в  $M$ , исходящие из точки  $P \in U$ , будут отображаться в эквивалентные кривые в  $N$ , исходящие из точки  $F(P) \in \tilde{U}$ . Поэтому гладкое отображение  $F: M \rightarrow N$  одновременно определяет и отображение  $F'_P$  касательных пространств  $T_P(M) \rightarrow T_{F(P)}(N)$ .

Опишем отображение  $F'_P$  в терминах локальных координат. Пусть  $x^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) – локальные координаты в  $U \subset M$ ,  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) – локальные координаты в  $\tilde{U} \subset N$ , тогда отображение  $F: U \rightarrow \tilde{U}$  будет задаваться с помощью гладких функций  $X^\alpha(x^1, \dots, x^m)$ . Кривая  $f(t) \subset U$ , исходящая из точки  $P$  и имеющая представление в локальных координатах (3.1.54), будет с помощью  $F$  отображаться в кривую в  $\tilde{U} \subset N$ , исходящую из  $F(P)$  и имеющую представление в локальных координатах

$$X^\alpha(x^i(t)) = X^\alpha(a^i t + b^i t^2 + O(t^2)) = X^\alpha(0) + a^i \partial_i X^\alpha(0) t + O(t^2), \quad (3.1.67) \quad \text{diff}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались разложением в ряд Тейлора. Из (3.1.67) видно, что отображение  $F'_P$  – линейно, так как переводит касательный вектор  $A \in T_P(M)$  с координатами  $\{a^i\}$  в касательный вектор  $\tilde{A} \in T_{F(P)}(N)$  с координатами  $\tilde{a}^\alpha = a^i \partial_i X^\alpha(0)$ . Кроме того  $F'_P$  зависит только от первого члена в разложении (3.1.54), то есть  $F'_P$  – линейная функция на классах эквивалентных кривых  $f: I \rightarrow M$ , исходящих из точки  $P$ . Отображение  $F'_P: T_P(M) \rightarrow T_{F(P)}(N)$  называется производной отображения  $F: M \rightarrow N$  в точке  $P$ . Отображения  $F'_P$  будут нами использоваться, когда мы будем обсуждать построение представлений алгебр Ли по представлениям соответствующих групп Ли.

### 3.1.6 Мера Хаара.

Пусть на групповом многообразии группы Ли  $G$  имеется метрика, то есть определен квадрат расстояния  $ds^2(g_1, g_2)$  между близкими элементами  $g_1$  и  $g_2$  группы  $G$ . Метрика называется правоинвариантной, если для всех  $g \in G$  и всех близких  $g_1, g_2$  из  $G$  справедливо

$$ds^2(g_1 \cdot g, g_2 \cdot g) = ds^2(g_1, g_2), \quad (3.1.68) \quad \text{invm00}$$

то есть метрика инвариантна относительно правых сдвигов  $g_i \rightarrow g_i \cdot g$ . Соответственно, метрика называется левоинвариантной, если для всех  $g \in G$  и всех близких  $g_1, g_2 \in G$  справедливо

$$ds^2(g \cdot g_1, g \cdot g_2) = ds^2(g_1, g_2).$$

Покажем, что положительно-определенная инвариантная метрика действительно существует для любой группы Ли. Рассмотрим случай правоинвариантной метрики (для левоинвариантной метрики построение аналогично). Идея состоит в том, что для правоинвариантной метрики из (3.1.68) мы получаем

$$ds^2(g_1, g_2) = ds^2(e, g_2 \cdot g_1^{-1}), \quad (3.1.69) \quad \text{invm}$$

где правая часть очевидно инвариантна относительно правых сдвигов  $g_i \rightarrow g_i \cdot g$  и является метрикой вблизи единичного элемента. Поэтому, определяя правоинвариантную метрику в окрестности единицы, ее можно однозначно и инвариантно распространить на всю группу с помощью соотношения (3.1.69).

Более подробно эта конструкция выглядит так. Пусть  $\dim(G) = n$  и в окрестности  $U_g$  точки  $g \in G$  задана система локальных координат. Пусть  $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$  – координаты элемента  $g$  и  $d\vec{x}$  – малое приращение вектора  $\vec{x}$ . Тогда  $g(\vec{x})$  и  $g(\vec{y}) = g(\vec{x} + d\vec{x})$  – два близких элемента в  $U_g$ . Квадрат расстояния между ними равен (ср. с (3.1.66))

$$ds^2(g(\vec{x}), g(\vec{y})) = ds^2(g(\vec{x}), g(\vec{x} + d\vec{x})) = a_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j. \quad (3.1.70) \quad \text{invm08}$$

Здесь  $a_{ij}(\vec{x})$  – метрический тензор, который по построению должен быть положительно определен. Правоинвариантная метрика  $a_{ij}(\vec{x})$  для произвольной группы Ли  $G$  строится следующим образом. Введем, прежде всего, произвольную положительно-определенную метрику в окрестности единицы:

$$ds^2(e, g(d\vec{t})) = a_{ij}(0) dt^i dt^j, \quad (3.1.71) \quad \text{invm07a}$$

где  $t^i$  – локальные координаты в окрестности единицы; считаем, что единице соответствует  $\vec{t} = 0$ . Отобразим взаимнооднозначным образом окрестность элемента  $g(\vec{x})$  в окрестность единицы:

$$F : g(\vec{y}) \rightarrow g(\vec{y}) \cdot g^{-1}(\vec{x}), \quad (3.1.72) \quad \text{invm07b}$$

где  $g(\vec{y}) \in U_{g(\vec{x})}$ , т.е.  $\vec{y}$  близко к  $\vec{x}$ . Такое отображение индуцирует взаимнооднозначное отображение координат

$$y^i = F^i(\vec{t}, \vec{x}), \quad (3.1.73) \quad \text{dec6-11-2}$$

где  $t^i$  – близкие к нулю координаты элемента

$$g(\vec{t}) = g(\vec{y}) \cdot g^{-1}(\vec{x}), \quad (3.1.74) \quad \text{dec6-11-1}$$

лежащего в окрестности единицы. Отметим, что если элемент  $g(\vec{t})$ , близкий к единичному, принадлежит той же координатной окрестности  $U_{g(\vec{x})}$  (как и элементы  $g(\vec{x})$  и  $g(\vec{y})$ ), то функции  $F^i(\vec{t}, \vec{x})$  совпадают с функциями (3.1.12)<sup>14</sup>. Ясно, что  $x^i = F^i(\vec{0}, \vec{x})$ , а для  $\vec{y} = \vec{x} + d\vec{x}$  мы имеем

$$dx^i = R_j^i(\vec{x}) dt^j, \quad R_j^i(\vec{x}) = \left. \frac{\partial}{\partial t^j} F^i(\vec{t}, \vec{x}) \right|_{\vec{t}=0}, \quad (3.1.75) \quad \text{invm09a}$$

где  $n \times n$  матрица  $\|R_j^i(\vec{x})\|$  обратима. Условие правоинвариантности метрики (3.1.69) и формулы (3.1.70), (3.1.71) дают

$$a_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j = a_{ij}(0) dt^i dt^j,$$

<sup>14</sup>На самом деле в локальной окрестности  $U_g$  любого элемента  $g \in G$  можно выбрать координаты так, что функции (3.1.12) и (3.1.73) будут совпадать. Действительно, все элементы из  $U_g$ , достаточно близкие к  $g$ , с помощью их умножения справа на  $g^{-1}$  можно передвинуть в окрестность  $U_e$  единичного элемента. Зададим теперь координаты  $\vec{x}$  для любого элемента  $g(\vec{x})$  из  $U_g$  так:  $g(\vec{x}) = g'(\vec{x}) \cdot g$ , где  $g'(\vec{x}) \in U_e$  и  $\vec{x}$  – система координат в  $U_e$ . После этого (3.1.74) переписывается в виде  $g(\vec{t}) = g'(\vec{y}) \cdot g'^{-1}(\vec{x})$ , где уже все три элемента принадлежат одной локальной координатной окрестности  $U_e$ .

поэтому, с учетом (3.1.75), имеем

$$a_{ij}(\vec{x}) = [R^{-1}(\vec{x})]_i^k [R^{-1}(\vec{x})]_j^l a_{kl}(0) . \quad (3.1.76) \quad \text{invm03}$$

Таким образом, матрица  $a_{ij}(0)$  метрики вблизи единицы однозначно задает матрицу  $a_{ij}(\vec{x})$  метрики вблизи любого другого элемента  $g(\vec{x}) \in G$  и, следовательно, однозначно определяет правоинвариантную метрику на всей группе Ли  $G$ .

- **Задача 57.** Доказать, что матрица левоинвариантной метрики  $\tilde{a}_{ij}(\vec{x})$  будет определяться формулой (сравните с (3.1.76))

$$\tilde{a}_{ij}(\vec{x}) = [L^{-1}(\vec{x})]_i^k [L^{-1}(\vec{x})]_j^l a_{kl}(0) , \quad (3.1.77) \quad \text{invm03L}$$

где

$$L_j^i(\vec{x}) = \left. \frac{\partial}{\partial t^j} F^i(\vec{x}, \vec{t}) \right|_{\vec{t}=\vec{0}} , \quad (3.1.78) \quad \text{invm03La}$$

а  $y^i = F^i(\vec{x}, \vec{t})$  — отображение координат, индуцируемое отображением  $g(\vec{y}) \rightarrow g^{-1}(\vec{x})g(\vec{y})$ , сравните с (3.1.72).

**Замечание 1.** Правую часть в (3.1.70) можно рассматривать как инвариантное скалярное произведение (3.1.64) в касательном пространстве  $T_{g(\vec{x})}(G)$  с метрикой  $g_{ij}(\vec{x}) = a_{ij}(\vec{x})$ .

**Замечание 2.** Метрику  $a_{ij}(\vec{x})$  не обязательно считать положительно определенной. При этом  $ds^2$  нужно рассматривать не как квадрат расстояния между близкими точками  $g_1$  и  $g_2$ , а как квадрат интервала в псевдоевклидовом пространстве. Подчеркнем, однако, что положительно определенная правоинвариантная (так же как и левоинвариантная) метрика существует для любой группы Ли, а использовать ее или нет — вопрос удобства.

Изложенная выше конструкция для правоинвариантных (и левоинвариантных) векторных полей, а также для инвариантных метрик, имеет особенно простой вид в случае матричных групп Ли  $G$ . В этом случае определено дифференцирование матриц  $g \in G$  по параметрам группы. Рассмотрим прежде всего окрестность единицы с координатами  $t^i$  и обозначим  $\left. \frac{\partial}{\partial t^i} g(\vec{t}) \right|_{\vec{t}=\vec{0}} = X_i$ . Матрицы  $X_i$  — это базисные вектора (образующие матричной алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ , смотри ниже) в касательном пространстве  $T_e(G)$  к многообразию группы  $G$  в единичном элементе. Для векторов  $X_i$  можно определить скалярное произведение (3.1.64) следующим образом:

$$a_{ij}(\vec{0}) = -\text{Tr}(X_i X_j) . \quad (3.1.79) \quad \text{invm09}$$

Это и будут метрические коэффициенты в точке группового многообразия, соответствующей единице группы. В общем случае такая метрика не является положительно определенной.

Далее, дифференцируя соотношение (3.1.74) по  $t^i$  и полагая затем  $\vec{t} = \vec{0}$ , получим, с учетом (3.1.73)

$$X_i = \left. \frac{\partial}{\partial t^i} g(\vec{y}) g^{-1}(\vec{x}) \right|_{\vec{t}=\vec{0}} = R_i^k(\vec{y}) \left. \frac{\partial g(\vec{y})}{\partial y^k} \right|_{\vec{y}=\vec{x}} g^{-1}(\vec{x}) .$$



Отсюда мы выводим соотношение

$$[R^{-1}(\vec{x})]_k^i X_i = \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^k} \cdot g(\vec{x})^{-1}, \quad (3.1.80) \quad \text{invm02}$$

которое будет использоваться в дальнейшем.

- **Задача 58.** Получить лево-инвариантный аналог соотношения (3.1.80)

$$[L^{-1}(\vec{x})]_k^i X_i = g(\vec{x})^{-1} \cdot \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^k}, \quad (3.1.81) \quad \text{invm02L}$$

где матрица  $L_k^i(\vec{x})$  определена в (3.1.78).

Соотношение (3.1.80) вместе с (3.1.76) и (3.1.79) дает

$$a_{kl}(\vec{x}) = -\text{Tr} \left( \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^k} \cdot g(\vec{x})^{-1} \cdot \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x^l} \cdot g(\vec{x})^{-1} \right) \quad (3.1.82) \quad \text{invm10}$$

или

$$ds^2 = -\text{Tr} [(dg \cdot g^{-1}) \cdot (dg \cdot g^{-1})] = \text{Tr} [dg \cdot dg^{-1}], \quad (3.1.83) \quad \text{ds2gg}$$

где  $dg$  — разность близких матриц  $g$  из группы  $G$ . Метрика (3.1.82) очевидно право- и лево-инвариантна, так как она не меняется при сдвигах  $g(\vec{x}) \rightarrow g(\vec{x}) \cdot h$  и  $g(\vec{x}) \rightarrow h \cdot g(\vec{x})$  для всех  $h \in G$ , но эта метрика не положительно определена в общем случае. Она положительно определена только для компактных групп Ли (смотри ниже раздел 5.1).

В случае комплексной матричной группы правоинвариантную метрику, по аналогии с (3.1.83), можно постулировать в виде

$$ds^2 = \text{Tr} [(dg \cdot g^{-1}) \cdot (dg \cdot g^{-1})^\dagger]. \quad (3.1.84) \quad \text{oct13c}$$

Эта метрика вещественна и положительно определена, поскольку  $\text{Tr}(A \cdot A^\dagger) = A_{ij} A_{ij}^*$ , но не является в общем случае левоинвариантной, в отличие от (3.1.83). Для случая группы  $SU(N)$  метрика (3.1.84) переписывается в виде  $ds^2 = \text{Tr} [dg \cdot dg^\dagger]$  и так как  $g^\dagger = g^{-1}$ , она совпадает с (3.1.83). Таким образом, метрика (3.1.84) для группы  $SU(N)$  положительно определена и инвариантна относительно как левых, так и правых сдвигов на группе.

- **Задача 59.** Используя представление (3.1.17), показать, что в случае группы  $SU(2)$  метрика (3.1.84) совпадает со стандартной метрикой на сфере  $S^3$ :

$$ds^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

*Указание.* Привести метрику к виду  $ds^2 = \text{Tr}[dU dU^\dagger]$  и воспользоваться параметризацией сферы  $S^3$  через сферические углы  $(\chi, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \chi, & x_1 &= \sin \chi \cos \theta, \\ x_2 &= \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, & x_3 &= \sin \chi \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.1.85) \quad \text{eqz05}$$

Используя правоинвариантную метрику на групповом многообразии, можно построить правоинвариантную меру на нем (меру Хаара). В использованных выше обозначениях элемент объема, записанный в локальных координатах, равен

$$d\mu(g) = |\det a_{ij}(\vec{x})|^{1/2} dx^1 \dots dx^n ,$$

(считаем, что размерность группы равна  $n$ ). Приведенные выше соображения (смотри (3.1.76)) показывают, что правоинвариантная мера может быть также записана в виде (с точностью до знака)

$$d\mu(g) = |\det a_{ij}(\vec{0})|^{1/2} \det^{-1}(|R_i^j(\vec{x})|) dx^1 \dots dx^n . \quad (3.1.86) \quad \text{mera01}$$

Следовательно, такая мера — единственная с точностью до численного множителя, который в наших обозначениях равен  $|\det a_{ij}(\vec{0})|^{1/2}$ . Соответственно согласно (3.1.77) левоинвариантная мера может быть записана в виде

$$d\tilde{\mu}(g) = |\det a_{ij}(\vec{0})|^{1/2} \det^{-1}(|L_i^j(\vec{x})|) dx^1 \dots dx^n . \quad (3.1.87) \quad \text{mera01L}$$

- *Задача 60. Доказать тождества:*

$$d\tilde{\mu}(g) = d\mu(g^{-1}) , \quad d\tilde{\mu}(g^{-1}) = d\mu(g) .$$

Правоинвариантность меры  $d\mu(g)$  (3.1.86) означает, что  $d\mu(g \cdot h) = d\mu(g)$  для всех  $g, h \in G$ , или

$$\int f(g \cdot h) d\mu(g) = \int f(g) d\mu(g) , \quad (3.1.88) \quad \text{mera02}$$

для любой функции  $f$  на группе, где интегрирование идет по всей группе. При выводе (3.1.88) необходимо воспользоваться тождеством

$$\int f(g) d\mu(g) = \int f(g \cdot h) d\mu(g \cdot h) , \quad (3.1.89) \quad \text{mera03}$$

которое следует из того, что  $g \cdot h$  пробегает всю группу, когда  $g$  пробегает всю группу.

То, что правоинвариантная мера единственна (с точностью до умножения на константу), можно пояснить следующим интуитивным рассуждением. Пусть вблизи единицы группы введены координаты  $(t^1, \dots, t^n)$ , тогда элемент объема, окружающего единицу, можно выбрать в виде  $c dt^1 \dots dt^n$ , где  $c$  — некоторая константа. Этот объем определяет вид меры вблизи единицы. Все элементы группы вблизи фиксированного элемента  $g$  можно перенести в окрестность единицы умножением справа на  $g^{-1}$ . При этом переносе, в случае правоинвариантной меры, объем области вблизи  $g$  не изменится и в точности совпадет с объемом области вблизи единицы, то есть величина этого объема однозначно определяется, если известна константа  $c$ . Это и означает единственность правоинвариантной меры с точностью до одной константы  $c$ .

Для матричной группы размерности  $n$ , вложенной в  $SU(N)$ , пользуясь (3.1.80) и определением детерминанта (2.2.10), правоинвариантную меру (3.1.86) можно записать (с точностью до умножения на константу) в виде

$$d\mu(g) = i^{n+[\frac{n}{2}]} \text{Tr} \left( \frac{\partial g}{\partial x^{i_1}} g^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^{i_2}} g^{-1} \dots \frac{\partial g}{\partial x^{i_n}} g^{-1} \right) \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^1 dx^2 \dots dx^n , \quad (3.1.90) \quad \text{oct13-5}$$

где  $x^i$  — локальные координаты на группе, символ  $\left[\frac{n}{2}\right]$  обозначает целую часть  $n/2$ , а числовой множитель в правой части (3.1.90) выбран согласно требованию вещественности и положительности меры. Отметим, что эта же мера является и левоинвариантной.

- *Задача 61. Показать, что мера (3.1.90) вещественна. Указание: воспользоваться соотношением  $g \cdot \frac{\partial g^\dagger}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} \cdot g^\dagger$ , которое следует из равенства  $g \cdot g^\dagger = I_N$ .*
- *Задача 62. Показать, что мера (3.1.90) не зависит от выбора локальной системы координат  $x^i$  на групповом многообразии.*
- *Задача 63. Показать, используя представление (3.1.17), что в случае группы  $SU(2)$  мера (3.1.90) совпадает со стандартной мерой на трехмерной сфере  $S^3$ .*

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний по поводу меры Хаара для компактных групп Ли. Прежде всего, объем компактной группы Ли, определяемый по мере Хаара, конечен. С этим связаны замечательные свойства компактных групп, а также компактных алгебр Ли, о которых мы будем говорить в разделе 4.6.

Далее, правоинвариантная мера на компактной группе Ли  $G$  является одновременно левоинвариантной (и наоборот). Чтобы убедиться в этом, воспользуемся тождеством, аналогичным тождеству (3.1.89),

$$\int f(g) d\mu(g) = \int f(h \cdot g) d\mu(h \cdot g), \quad (3.1.91) \quad \text{oct14-1}$$

где  $h$  — произвольный элемент группы и  $d\mu(g)$  — правоинвариантная мера. Поскольку правоинвариантная мера — единственная с точностью до численного множителя, то для левых сдвигов на группе  $G$  выполнено

$$d\mu(h \cdot g) = c(h) d\mu(g), \quad (3.1.92) \quad \text{mera04}$$

где  $c(h)$  — числовая функция на  $G$ . Выберем  $f(g) = 1$  в тождестве (3.1.91); в результате получим

$$\int d\mu(g) = \int d\mu(h \cdot g) = c(h) \int d\mu(g). \quad (3.1.93) \quad \text{mera05}$$

Так как интеграл  $\int d\mu(g)$  конечен для компактных групп, то из (3.1.93) следует, что  $c(h) = 1$ , и правоинвариантная мера  $d\mu(g)$  согласно (3.1.92) является также и левоинвариантной. В дальнейшем в случае компактных групп Ли мы будем говорить просто об инвариантной мере Хаара.

## 3.2 Алгебры Ли.

### 3.2.1 Касательные пространства к многообразиям матричных групп Ли.

С группами Ли тесно связаны алгебры Ли. Проще всего понять эту связь на примере матричных групп и алгебр Ли. Общую конструкцию алгебр Ли мы обсудим ниже в Разделе 3.2.5.

Пусть  $G$  – матричная группа Ли,  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ . Рассмотрим гладкую кривую  $g(t)$  на многообразии матричной группы  $G$ , проходящую через единицу  $I_n \in G$ . Вещественный параметр  $t$  на кривой выберем как обычно так, чтобы точка  $t = 0$  соответствовала единице,  $g(0) = I_n$ . Тогда кривая  $g(t) \in G$  вблизи  $I_n$  (когда  $t$  мало,  $t^2 \ll t$ ) имеет представление

$$g(t) = I_n + tA + O(t^2). \quad (3.2.1) \quad \text{ali1}$$

Согласно Определению 3.1.10, а также определению, данному в (3.1.60), все кривые в  $G$ , эквивалентные  $g(t)$  в точке  $I_n \in G$ , имеют в этой точке одно и то же представление (3.2.1) с одной и той же матрицей  $A$ . Таким образом, формула (3.2.1) описывает класс эквивалентных кривых в точке  $I_n \in G$ , а матрица  $A$  фиксирует этот класс эквивалентности и задает касательный вектор к многообразию матричной группы Ли  $G$  в точке  $I_n \in G$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{A}(G)$  всех касательных векторов (матриц)  $A$  к многообразию матричной группы  $G$  в точке  $I_n \in G$ .

**Утверждение 3.2.1** 1.) Множество  $\mathcal{A}(G)$  образует вещественное векторное пространство. 2.) Если  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$ , то и  $[A_1, A_2] \in \mathcal{A}(G)$ , где

$$[A_1, A_2] = A_1 \cdot A_2 - A_2 \cdot A_1 \quad (3.2.2) \quad \text{ali5}$$

– коммутатор двух матриц.

**Доказательство.** 1.) То, что множество  $\mathcal{A}(G)$  всех касательных векторов к многообразию группы Ли  $G$  в точке  $I_n$  образует вещественное векторное пространство, следует из общего Утверждения 3.1.3, а также из рассмотрения специального примера касательного пространства  $T_e(G)$ , данного в предыдущем подразделе 3.1.5. Напомним, что структура векторного пространства для  $T_e(G)$  вводится проще (см. (3.1.61), (3.1.62)), чем для касательных пространств  $T_x(M)$  в случае общих гладких многообразий  $M$  (см. доказательство Утверждения 3.1.3), так как при этом не требуется определение каких-либо локальных координат в окрестности единичного элемента  $G$ . Еще проще эта структура вводится на  $T_e(G)$ , если группа Ли  $G$  – матричная. В связи с этим нам представляется целесообразным в качестве иллюстрации привести здесь упрощенное доказательство первой части Утверждения 3.2.1 для случая матричных групп Ли.

Растянем параметр  $t \rightarrow ct$  у кривой  $g(t)$  (3.2.1), где  $c$  – действительное число. В результате возникает новая кривая  $g'(t) = g(ct)$  на многообразии группы  $G$ , которая вблизи единичного элемента имеет разложение  $g'(t) = I_n + tcA + O(t^2)$  и следовательно, если  $A \in \mathcal{A}(G)$ , то и  $cA \in \mathcal{A}(G)$ . Далее возьмем две кривые  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  в  $G$ ,

исходящие из  $I_n \in G$  и соответствующие двум касательным векторам  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$ ,

$$g_1(t) = I_n + tA_1 + t^2B_1 + O(t^3), \quad g_2(t) = I_n + tA_2 + t^2B_2 + O(t^3). \quad (3.2.3) \quad \text{ali22}$$

Тогда кривая  $g''(t) = g_1(t) \cdot g_2(t)$  лежит в  $G$  и этой кривой в точке  $I_n$  соответствует касательный вектор  $A_1 + A_2 \in \mathcal{A}(G)$ , поскольку

$$g''(t) = (I_n + tA_1 + O(t^2)) \cdot (I_n + tA_2 + O(t^2)) = I_n + t(A_1 + A_2) + O(t^2).$$

Таким образом, произведение вектора (матрицы) из  $\mathcal{A}(G)$  на вещественное число и сумма двух векторов из  $\mathcal{A}(G)$  снова дают векторы из  $\mathcal{A}(G)$ . Проверка оставшихся аксиом вещественного векторного пространства для  $\mathcal{A}(G)$  не составляет труда.

2.) Рассмотрим две неэквивалентные кривые  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  (3.2.3), проходящие через  $I_n \in G$  и соответствующие касательным векторам  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$ . Коммутант

$$g(t) = g_1(s) \cdot g_2(s) \cdot g_1^{-1}(s) \cdot g_2^{-1}(s) \in G, \quad (3.2.4) \quad \text{comnt}$$

где  $s = \text{sign}(t) \sqrt{|t|}$  и  $\text{sign}(t) = \pm 1$  – знак параметра  $t$ , определяет кривую в  $G$ , исходящую из  $I_n$ . Действительно, рассмотрим поведение кривой (3.2.4) вблизи единичного элемента (параметр  $s$  мал) с точностью до членов третьего порядка по  $s$

$$g(t) = (I_n + sA_1 + s^2B_1) \cdot (I_n + sA_2 + s^2B_2) \cdot (I_n - sA_1 - s^2\beta_1) \cdot (I_n - sA_2 - s^2\beta_2), \quad (3.2.5) \quad \text{comnt1}$$

где  $\beta_i = B_i - A_i^2$  ( $i = 1, 2$ ) (так, что матрицы  $(I_n - sA_i - s^2\beta_i)$  – обратны к матрицам  $(I_n + sA_i + s^2B_i)$  с точностью до членов порядка  $s^2 = t$  включительно). Приводя подобные члены в (3.2.5), получаем

$$g(t) = I_n + t[A_1, A_2] + O(s^3). \quad (3.2.6) \quad \text{comnt2}$$

Таким образом, если  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$ , то и  $[A_1, A_2] \in \mathcal{A}(G)$ . ■

### 3.2.2 Матричные алгебры Ли.

Итак, в касательном пространстве  $\mathcal{A}(G)$  определены не только операции над векторами, свойственные векторным пространствам, но и умножение (коммутирование)  $[A_1, A_2]$  двух векторов  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$ , не выводящее из  $\mathcal{A}(G)$ . При этом операция коммутации удовлетворяет условиям (2.2.4). Таким образом, векторное пространство  $\mathcal{A}(G)$  наделено структурой алгебры (см. Определение 2.2.3).

**Определение 3.2.1** Матричные векторные пространства  $\mathcal{A}(G)$  с дополнительной операцией умножения в виде коммутатора матриц мы будем называть матричными алгебрами Ли (общее определение алгебр Ли будет дано ниже).

Поскольку алгебра Ли  $\mathcal{A}(G)$  представляет собой касательное векторное пространство к групповому многообразию  $G$  в точке  $I_n$ , то размерность  $\mathcal{A}(G)$  совпадает с размерностью многообразия  $G$ .

Заметим, что при бесконечно малых  $t$  элемент (3.2.1) группы  $G$  можно представить в виде экспоненты  $g(t) = \exp(tA) \in G$ , где  $A$  – элемент алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ . Возьмем произведение  $N$  таких экспонент

$$\underbrace{\exp(tA) \cdots \exp(tA)}_N = \exp(NtA) . \quad (3.2.7) \quad \text{тN}$$

Пусть  $t = s/N$ , где  $s$  – фиксировано и  $N$  – большое целое положительное число. Рассмотрим предел произведения (3.2.7) при  $N \rightarrow \infty$ . В этом пределе в левой части (3.2.7) стоит произведение элементов группы  $G$ , поэтому в правой части мы также имеем элемент группы  $G$ :

$$\exp(NtA) = \exp(sA) , \quad (3.2.8) \quad \text{aga2}$$

который представляется в виде экспоненты от элемента алгебры Ли, и который, вообще говоря, не лежит в малой окрестности единичного элемента группы. Таким образом, если  $A \in \mathcal{A}(G)$ , то  $\exp(A) \in G$ . Отметим, однако, что не всякий элемент группы Ли  $G$  (даже из связной компоненты единицы  $G$ ) можно представить в виде одной экспоненты от элемента алгебры Ли (см. ниже Задачу 67), хотя он может представляться в виде произведения нескольких экспонент. BSF

Для любых двух некоммутирующих операторов  $A_1$  и  $A_2$  имеет место тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$\exp(A_1) \cdot \exp(A_2) = \exp(F(A_1, A_2)) , \quad (3.2.9) \quad \text{semb}$$

$$F(A_1, A_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_0^1 dt (1 - e^{t \operatorname{ad}(A_1)} \cdot e^{t \operatorname{ad}(A_2)})^n \cdot (A_1 + e^{t \operatorname{ad}(A_1)} \cdot A_2) , \quad (3.2.10) \quad \text{CaH}$$

где операторы  $e^{t \operatorname{ad}(A)}$  определяются следующим образом

$$e^{t \operatorname{ad}(A)} \cdot B \equiv e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} , \quad (3.2.11) \quad \text{CaH2}$$

причем последовательное действие операторов  $e^{t \operatorname{ad}(A)}$  понимается так:

$$e^{t \operatorname{ad}(A_1)} \cdot e^{t \operatorname{ad}(A_2)} \cdots e^{t \operatorname{ad}(A_r)} \cdot B = e^{tA_1} (e^{tA_2} (\cdots (e^{tA_r} \cdot B \cdot e^{-tA_r}) \cdots) e^{-tA_2}) e^{-tA_1} .$$

• **Задача 64. Доказать равенство**

$$e^{tA} \cdot B \cdot e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{[A, [A, \dots, [A, B] \dots]]}_k . \quad (3.2.12) \quad \text{CaH3}$$

Ряд для  $F(A_1, A_2)$ , приведенный в (3.2.10), необходимо рассматривать как формальный. Формула (3.2.10), вычисленная для нескольких первых членов по степеням  $A_1, A_2$ , имеет вид

$$F(A_1, A_2) = (A_1 + A_2) + \frac{1}{2} [A_1, A_2] + \frac{1}{12} [A_1 - A_2, [A_1, A_2]] + \dots , \quad (3.2.13) \quad \text{CaH1}$$

- *Задача 65. \* Доказать тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа (3.2.9), (3.2.10). Проверить формулу (3.2.13), используя равенство (3.2.10) или проверить (3.2.13) непосредственно, пользуясь разложением экспонент в (3.2.9) в ряд Тейлора.*

Если  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$ , то тождество (3.2.9) представляет собой другую форму записи соотношений (3.1.13). Так как в правой части (3.2.9) в показателе экспоненты появляются только коммутаторы (смотри (3.2.10), (3.2.11) и (3.2.12)), относительно которых алгебра Ли  $\mathcal{A}(G)$  замкнута, то произведение элементов  $\exp(A_1) \cdot \exp(A_2)$  (по крайней мере для операторов  $\exp(A_1)$  и  $\exp(A_2)$  достаточно близких к единичному) снова представляется в виде одной экспоненты  $\exp(A_3)$ , где  $A_3 = F(A_1, A_2) \in \mathcal{A}(G)$ .

Отмеченный выше факт, что не всякий элемент группы Ли  $G$  можно представить в виде экспоненты от элемента алгебры Ли, связан с тем, что формальный ряд (3.2.10) для  $F(A_1, A_2)$  не всегда сходится.

ESF

### 3.2.3 Примеры матричных алгебр Ли.

В дальнейшем мы будем обозначать алгебры Ли так же, как и соответствующие группы Ли, но при этом использовать прописные буквы. Например, алгебра Ли группы  $SU(n)$  будет обозначаться  $su(n)$ , алгебра Ли группы  $Sp(2r)$  будет обозначаться  $sp(2r)$  и т.д. Напомним, что  $\mathbb{K}$  обозначает поле комплексных или вещественных чисел.

**1.** Алгебра Ли  $so(2)$  группы  $SO(2)$ . Рассмотрим кривую  $O_\phi$  (3.1.1) около единичного элемента (для малых углов  $\phi$ )

$$O_\phi = I_2 + \phi \mathbf{i} + O(\phi^2), \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.14) \quad \text{info2a}$$

Сравнивая кривую  $g(t) = O_\phi|_{\phi=at}$  ( $t$  – мало и  $a \in \mathbb{R}$ ) с (3.2.1), мы заключаем, что алгебра Ли  $so(2)$  состоит из антисимметричных двумерных матриц  $a \mathbf{i}$ , которые образуют одномерное векторное пространство. Отметим, что любой элемент  $O_\phi$  (3.1.1) группы  $SO(2)$  можно представить в виде линейной комбинации матриц  $I_2$  и  $\mathbf{i}$

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = I_2 \cos \phi + \mathbf{i} \sin \phi. \quad (3.2.15) \quad \text{eph1}$$

- *Задача 66. Пусть  $\mathcal{V}(\mathbb{K})$  – некоторое векторное пространство и в нем действует линейный оператор  $\hat{\mathbf{i}}$  такой, что  $\hat{\mathbf{i}}^2 = -I$ , где  $I$  – единичный оператор в  $\mathcal{V}(\mathbb{K})$ . Доказать, что имеет место тождество (операторный аналог формулы Эйлера):*

$$\exp(\hat{\mathbf{i}} \phi) = I \cos \phi + \hat{\mathbf{i}} \sin \phi, \quad \phi \in \mathbb{K}. \quad (3.2.16) \quad \text{eph7}$$

Из формулы (3.2.16) следует, что любой элемент  $O_\phi \in SO(2)$ , заданный в (3.2.15), представляется в виде  $O_\phi = \exp(\mathbf{i} \phi)$ , то есть в виде экспоненты от элемента  $(\mathbf{i} \phi)$  алгебры Ли  $so(2)$ .

**2.** Алгебра Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Рассмотрим элемент  $g(t)$  в группе  $SL(2, \mathbb{C})$  вблизи единицы

$$g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + O(t^2) = \begin{pmatrix} 1 + ta_{11} & ta_{12} \\ ta_{21} & 1 + ta_{22} \end{pmatrix} + O(t^2), \quad (3.2.17) \quad \text{gs12}$$

где  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ , а параметр  $t$  - мал. Матрица  $g(t)$  должна удовлетворять условию

$$1 = \det(g(t)) = 1 + t(a_{11} + a_{22}) + O(t^2),$$

которое дает связь  $a_{11} + a_{22} = 0$ . Таким образом, касательное пространство  $sl(2, \mathbb{C})$  к группе  $SL(2, \mathbb{C})$  в точке  $I_2$  – это множество комплексных  $2 \times 2$  матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{Tr}(A) = 0. \quad (3.2.18) \quad \text{s12A}$$

Очевидно, что это множество в самом деле образует векторное пространство и операция коммутирования не выводит из этого множества.

Заметим, что если  $A \in sl(2, \mathbb{C})$ , то  $\exp(A) \in SL(2, \mathbb{C})$ , поскольку (см. (2.2.16))

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A)) = 1.$$

Однако не любая матрица из  $SL(2, \mathbb{C})$  представима в виде  $\exp(A)$ .

- **Задача 67.** Доказать, что элемент группы  $SL(2, \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} -1 & \phi \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{C}, \quad \phi \neq 0,$$

*принадлежит связной компоненте единицы  $I_2 \in SL(2, \mathbb{C})$  и не имеет представления в виде одной экспоненты  $\exp(A)$ , где  $A \in sl(2, \mathbb{C})$ , но может быть представлен в виде произведения  $\exp(A_1) \cdot \exp(A_2)$ , где*

$$A_1 = i\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1, A_2 \in sl(2, \mathbb{C}).$$

*Сходится ли ряд Кэмбелла-Хаусдорфа (3.2.10) для таких  $A_1$  и  $A_2$ ?*

**3.** Алгебры Ли  $gl(n, \mathbb{K})$  и  $sl(n, \mathbb{K})$ . Алгебра Ли  $gl(n, \mathbb{K})$  – это пространство  $M_n(\mathbb{K})$  всех  $(n \times n)$  матриц с элементами из  $\mathbb{K}$ , а алгебра Ли  $sl(n, \mathbb{K})$  это множество всех  $(n \times n)$  матриц  $A \in M_n(\mathbb{K})$  с условием  $\text{Tr}(A) = 0$ . Для вещественных размерностей этих пространств получаем

$$\begin{aligned} \dim(gl(n, \mathbb{C})) &= 2n^2, & \dim(gl(n, \mathbb{R})) &= n^2, \\ \dim(sl(n, \mathbb{C})) &= 2(n^2 - 1), & \dim(sl(n, \mathbb{R})) &= n^2 - 1, \end{aligned}$$

что, конечно, совпадает с размерностями соответствующих групп Ли, которые были вычислены в Разделе 3.1.2.

**4.** Алгебра Ли  $u(n)$  группы  $U(n)$ . Унитарные матрицы  $U \in U(n)$ , близкие к единичной,

$$U(t) = I_n + tA + O(t^2),$$



должны удовлетворять соотношениям

$$I_n = UU^\dagger = (I_n + tA + O(t^2))(I_n + tA^\dagger + O(t^2)) = I_n + t(A + A^\dagger) + O(t^2). \quad (3.2.19) \quad \text{unli1}$$

Отсюда мы имеем

$$A^\dagger = -A, \quad (3.2.20) \quad \text{unli1}$$

т.е. алгебра Ли  $u(n)$  – это множество всех антиэрмитовых матриц. Отметим, что если  $A \in u(n)$ , то  $\exp(A) \in U(n)$ , поскольку

$$\exp(A)(\exp(A))^\dagger = \exp(A)\exp(A^\dagger) = \exp(A)\exp(-A) = I_n.$$

- *Задача 68. Доказать, что множество  $u(n)$  всех антиэрмитовых  $n \times n$  матриц образует вещественное векторное пространство, и для любых двух матриц  $A, A' \in u(n)$  мы имеем  $[A, A'] \in u(n)$ , то есть на пространстве  $u(n)$  задана операция умножения векторов в виде их коммутатора. Доказать, что размерность пространства  $u(n)$  равна  $n^2$ .*

VRN

Любую комплексную матрицу  $A$  можно представить в виде  $A = X + iY$ , где  $X, Y$  – вещественные матрицы. Тогда (3.2.20) эквивалентно условиям

$$X^T = -X, \quad Y^T = Y, \quad (3.2.21) \quad \text{уху}$$

и алгебру Ли  $u(n)$  можно задать как множество пар вещественных матриц  $(X, Y)$ , удовлетворяющих (3.2.21).

- *Задача 69. Доказать, что для элементов  $u(n)$  в представлении  $(X, Y)$  алгебраическая операция коммутирования имеет вид:*

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'] - [Y, Y'], [Y, X'] + [X, Y']).$$

**5.** Алгебра Ли  $su(n)$  группы  $SU(n)$ . Матрицы  $U \in SU(n)$ , помимо условия унитарности, должны удовлетворять соотношению  $\det(U) = 1$ . Для матриц близких к единичной мы получаем

$$1 = \det(I + tA + O(t^2) \dots) = 1 + t \operatorname{Tr}(A) + O(t^2). \quad (3.2.22) \quad \text{det11}$$

Таким образом, для касательных векторов  $A$  мы имеем дополнительное условие

$$\operatorname{Tr}(A) = 0,$$

и алгебра Ли  $su(n)$  – это множество антиэрмитовых и бесследовых матриц.

- *Задача 70. Доказать, что множество  $su(n)$  всех антиэрмитовых бесследовых  $n \times n$  матриц образует вещественное векторное пространство, и на этом пространстве задана операция умножения векторов в виде коммутирования матриц. Доказать, что размерность этого векторного пространства равна  $n^2 - 1$ . Доказать, что если  $A \in su(n)$ , то  $\exp(A) \in SU(n)$ .*

VRN

**Замечание.** Любую антиэрмитову матрицу можно представить в виде произведения  $iA$  эрмитовой матрицы  $A$  на мнимую единицу. Поэтому алгебру Ли группы  $U(n)$  ( $SU(n)$ ) иногда определяют как векторное пространство эрмитовых (бесследовых) матриц  $A$  с умножением  $i[\cdot, \cdot]$ , а близкие к единице элементы группы  $U(n)$  ( $SU(n)$ ) записывают в виде

$$U(t) = I_n + iAt + O(t^2) .$$

В дальнейшем как правило мы не будем придерживаться такого соглашения.

**6.** Алгебра Ли  $so(n, \mathbb{K})$  группы  $SO(n, \mathbb{K})$  – это множество антисимметричных матриц  $A$  с элементами из  $\mathbb{K}$ . Действительно, ортогональные матрицы из  $SO(n, \mathbb{K})$ , близкие к единичной, должны удовлетворять соотношению

$$I_n = (I_n + tA + O(t^2))(I_n + tA^T + O(t^2)) = I_n + t(A + A^T) + O(t^2) .$$

откуда следует

$$A^T = -A . \quad (3.2.23) \quad \text{liso5}$$

- **Задача 71.** Доказать, что множество  $so(n, \mathbb{K})$  есть векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$  и на этом пространстве задана операция умножения векторов в виде коммутирования матриц. Доказать, что вещественные размерности пространств  $so(n, \mathbb{R})$  и  $so(n, \mathbb{C})$  равны

$$\dim(so(n, \mathbb{R})) = n(n-1)/2 , \quad \dim(so(n, \mathbb{C})) = n(n-1) .$$

Доказать, что если  $A \in so(n, \mathbb{K})$ , то  $\exp(A) \in SO(n, \mathbb{K})$ .

**7.** Алгебра Ли  $sp(2r, \mathbb{K})$  группы  $Sp(2r, \mathbb{K})$ . Для симплектических матриц (2.2.58) близких к единичной имеем

$$J = (I_{2r} + tA^T + O(t^2)) \cdot J \cdot (I_{2r} + tA + O(t^2)) = J + t(A^T \cdot J + J \cdot A) + O(t^2) , \quad (3.2.24) \quad \text{spli}$$

то есть

$$A^T \cdot J + J \cdot A = 0 , \quad (3.2.25) \quad \text{spli05}$$

где антисимметричная матрица  $J$  задана в (2.2.57). Таким образом,  $sp(2r, \mathbb{K})$  – это множество матриц, удовлетворяющих условию

$$A^T \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} A = 0 . \quad (3.2.26) \quad \text{spli1}$$

Матрицу  $A$  можно представить в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} , \quad (3.2.27) \quad \text{blA}$$

где  $X, Y, Z, W$  – матрицы  $r \times r$  с элементами из  $\mathbb{K}$ , которые в силу условия (3.2.26) удовлетворяют соотношениям

$$Y^T = Y , \quad Z^T = Z , \quad X^T = -W . \quad (3.2.28) \quad \text{blA1}$$

- *Задача 72. Доказать, что множество  $sp(2r, \mathbb{K})$  есть векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ , на котором задана операция умножения векторов в виде коммутирования матриц. Доказать, что вещественная размерность пространств  $sp(2r, \mathbb{R})$  и  $sp(2r, \mathbb{C})$  равна*

$$\dim(sp(2r, \mathbb{R})) = r(2r + 1), \quad \dim(sp(2r, \mathbb{C})) = 2r(2r + 1).$$

*Доказать, что если  $A \in sp(2r, \mathbb{K})$ , то  $\exp(A) \in Sp(2r, \mathbb{K})$ .*

**8.** Алгебра Ли  $sp(2r, \mathbb{R}) \cap so(2r, \mathbb{R})$  группы  $Sp(2r, \mathbb{R}) \cap SO(2r, \mathbb{R})$ . Группа Ли  $Sp(2r, \mathbb{R}) \cap SO(2r, \mathbb{R})$  определяется как множество вещественных  $(2r \times 2r)$  матриц  $T$ , удовлетворяющих соотношению (2.2.46) с матрицей  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} I_r & I_r \\ -I_r & I_r \end{pmatrix}$ , или как множество вещественных  $(2r \times 2r)$  матриц  $T$ , удовлетворяющих одновременно паре соотношений (2.2.47), которые в данном случае эквивалентны условию ортогональности  $T^T \cdot T = I_{2r}$  и условию симплектичности (2.2.58). Таким образом, алгебра Ли группы  $Sp(2r, \mathbb{R}) \cap SO(2r, \mathbb{R})$  — это множество вещественных матриц  $A$ , одновременно подчиняющихся условиям (3.2.23) и (3.2.26). Представим  $A$  в блочном виде (3.2.27), где  $X, Y, Z, W$  — вещественные  $(r \times r)$  матрицы. Тогда условие (3.2.23) дает

$$X^T = -X, \quad Z^T = -Y, \quad W^T = -W, \quad (3.2.29) \quad \text{b1A2}$$

что вместе с условиями (3.2.28) фиксирует матрицу  $A$  в виде

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad X^T = -X, \quad Y^T = Y. \quad (3.2.30) \quad \text{b1A3}$$

Тем самым мы установили взаимнооднозначное соответствие

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \leftrightarrow (X + iY), \quad (3.2.31) \quad \text{b1A4}$$

между элементами алгебры Ли  $sp(2r, \mathbb{R}) \cap so(2r, \mathbb{R})$  и элементами алгебры Ли  $u(r)$  (3.2.21).

- *Задача 73. Доказать, что взаимнооднозначное соответствие (3.2.31) — изоморфизм, т.е. оно сохраняет операцию умножения (коммутирования) в алгебрах Ли  $sp(2r, \mathbb{R}) \cap so(2r, \mathbb{R})$  и  $u(r)$ .*

**9.** Алгебры Ли  $sp(p, q)$ . Рассматривая элементы группы  $Sp(p, q)$  (см. (2.2.58), (2.2.62)), близкие к единичным, получаем, что алгебра Ли  $sp(p, q)$  — это множество  $2r \times 2r$  (здесь  $r = (p + q)$ ) комплексных матриц  $A$ , удовлетворяющих соотношениям

$$A^T \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} A, \quad A^\dagger \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} A, \quad (3.2.32) \quad \text{spli4}$$

где матрица  $I_{p,q}$  определена в (2.2.54). Представим  $A$  в виде блочной матрицы (3.2.27), где  $X, Y, Z, W$  — комплексные  $r \times r$  блоки. Из соотношений (3.2.32) следуют условия

$$W = -X^T, \quad Z = -I_{p,q} \cdot Y^\dagger \cdot I_{p,q}, \quad (3.2.33) \quad \text{spli5}$$

$$Y^T = Y, \quad X^\dagger = -I_{p,q} \cdot X \cdot I_{p,q}, \quad (3.2.34) \quad \text{spli6}$$

и любой элемент  $A \in sp(p, q)$  представляется в виде блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -I_{p,q} \cdot Y^\dagger \cdot I_{p,q} & -X^T \end{pmatrix}, \quad (3.2.35) \quad \text{spli7}$$

где две  $r \times r$  матрицы  $X$  и  $Y$ , удовлетворяют соотношениям обобщенной антиэрмитовости и симметричности (3.2.34). Пространства таких матриц  $X$  и  $Y$  имеют вещественные размерности  $r^2$  и  $(r+1)r$ , соответственно. Поэтому

$$\dim(sp(p, r-p)) = (r+1)r + r^2 = r(2r+1). \quad (3.2.36) \quad \text{spli8}$$

- *Задача 74. Доказать, что множество матриц  $sp(p, q)$  образует вещественное векторное пространство, на котором задана операция умножения векторов в виде коммутирования матриц. Доказать, что если  $A \in sp(p, q)$ , то  $\exp(A) \in Sp(p, q)$ .*

**10.** Алгебра Ли  $usp(2r)$  группы  $USp(2r)$ . Для унитарных симплектических  $(2r \times 2r)$  матриц, близких к единичной, кроме соотношения унитарности (3.2.19), имеем еще условие симплектичности. Поэтому алгебра Ли  $usp(2r)$  — это множество  $sp(2r, \mathbb{C}) \cap su(2r)$  всех комплексных матриц  $A$ , одновременно удовлетворяющих соотношениям (3.2.20) и (3.2.26), которые можно записать в виде (3.2.32), где вместо матрицы  $I_{p,q}$  необходимо взять единичную матрицу  $I_r$ . Таким образом,  $usp(2r) = sp(r, 0) = sp(0, r)$ . Теперь мы можем воспользоваться результатами предыдущего пункта и получить для произвольного элемента  $A \in usp(2r)$  представление в виде блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^\dagger & -X^T \end{pmatrix}, \quad (3.2.37) \quad \text{spli9}$$

где  $X$  и  $Y$  — комплексные  $r \times r$  матрицы, удовлетворяющие условиям

$$Y^T = Y, \quad X^\dagger = -X. \quad (3.2.38) \quad \text{spli9du}$$

Легко проверить, что множество матриц  $usp(2r)$  (3.2.37), (3.2.38) образует векторное пространство, замкнутое относительно операции коммутирования. Размерность этого пространства равна

$$\dim(usp(2r)) = r(2r+1), \quad (3.2.39) \quad \text{dusp}$$

что следует из (3.2.36). Отметим, что в силу изоморфизма  $usp(2r) = sp(r, 0) = sp(0, r)$ , алгебру  $usp(2r)$  часто обозначают как  $sp(r)$ .

Представим комплексные  $r \times r$  матрицы  $X$  и  $Y$  в виде  $X = X_0 + iX_3$  и  $Y = X_2 + iX_1$ , где  $X_0, X_1, X_2, X_3$  — вещественные матрицы, удовлетворяющие, согласно (3.2.38), условиям

$$X_0^T = -X_0, \quad X_k^T = X_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.2.40) \quad \text{spli9d}$$

В этом случае элементы  $A$  (3.2.37) алгебры Ли  $usp(2r)$  записываются следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} X_0 + iX_3 & X_2 + iX_1 \\ -X_2 + iX_1 & X_0 - iX_3 \end{pmatrix} = I_2 \otimes X_0 + i\sigma_k \otimes X_k, \quad (3.2.41) \quad \text{spli9g}$$

где  $\otimes$  — прямое произведение матриц, которое определялось в (2.2.19), а  $\sigma_k$  — матрицы Паули (3.1.18). При этом условия (3.2.40) эквивалентны условию антиэрмитовости  $A^\dagger = -A$  для матрицы  $A$  (3.2.41).

**11.** Псевдоортогональные алгебры Ли  $so(p, q)$ . Алгебра  $so(p, q)$  — это множество вещественных  $(p + q) \times (p + q)$  матриц  $A$ , удовлетворяющих соотношениям

$$A^T I_{p,q} = -I_{p,q} A, \quad (3.2.42) \quad \text{liso7}$$

где матрица  $I_{p,q}$  определена в (2.2.54). Представим  $A$  в виде блочной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} X_{p \times p} & Y_{p \times q} \\ Z_{q \times p} & W_{q \times q} \end{pmatrix}, \quad (3.2.43) \quad \text{liso8}$$

тогда условия (3.2.42) дают

$$Z_{q \times p} = Y_{p \times q}^T, \quad X_{p \times p}^T = -X_{p \times p}, \quad W_{q \times q}^T = -W_{q \times q}.$$

**12.** Алгебра  $so(1, d)$ . Используя результаты предыдущего пункта, получаем, что  $so(1, d)$  — множество вещественных  $(d + 1) \times (d + 1)$  матриц  $A$ , имеющих блочную структуру

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \vec{Y} \\ \vec{Y}^T & W \end{pmatrix}, \quad W^T = -W, \quad (3.2.44) \quad \text{liso9}$$

где  $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$  — произвольная вещественная  $d$ -мерная вектор-строка,  $\vec{Y}^T$  — соответствующий вектор-столбец, а  $W$  — произвольная вещественная кососимметричная матрица  $d \times d$ . Алгебра  $so(1, d)$  называется алгеброй Лоренца в  $(d + 1)$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^{1,d}$ .

**13.** Псевдоунитарная алгебра Ли  $u(p, q)$  — это множество комплексных  $(p + q) \times (p + q)$  матриц  $A$ , удовлетворяющих соотношениям

$$A^\dagger I_{p,q} = -I_{p,q} A. \quad (3.2.45) \quad \text{lisupq}$$

Эти соотношения легко получаются из формул (2.2.59), определяющих элементы  $U$  группы  $U(p, q)$ , если разложить  $U$  вблизи единичной матрицы. Псевдоунитарная специальная алгебра Ли  $su(p, q)$  — это подмножество матриц  $A \in u(p, q)$ , удовлетворяющих дополнительному условию  $\text{Tr}(A) = 0$ .

• **Задача 75.** Доказать, что  $(n = p + q)$

$$\dim(so(p, q)) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dim(u(p, q)) = n^2, \quad \dim(su(p, q)) = n^2 - 1.$$

Отметим в заключение этого подраздела, что размерности алгебр, которые предлагается найти в приведенных выше задачах, равны размерностям соответствующих групп Ли, см. в связи с этим раздел **3.1.2**. Это, разумеется, согласуется с общим результатом о том, что размерность касательного пространства к многообразию равна размерности этого многообразия.

### 3.2.4 Касательные пространства к многообразиям матричных групп Ли (продолжение).

BSF

Рассмотрим теперь касательное пространство  $\mathcal{A}(G, g_0)$  к матричной группе Ли  $G$  в точке  $g_0 \neq I_n$ , т.е. совокупность касательных векторов  $A'$  ко всем кривым  $g(t)$ , исходящим из точки  $g_0$ :

$$g(t) = g_0 + tA' + O(t^2). \quad (3.2.46) \quad \text{ali2}$$

Умножая (3.2.46) справа на  $g_0^{-1}$  и сравнивая с (3.2.1), мы устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между векторами касательных пространств  $\mathcal{A}(G)$  и  $\mathcal{A}(G, g_0)$ :

$$A = A' \cdot g_0^{-1} \quad (A \in \mathcal{A}(G), \quad A' \in \mathcal{A}(G, g_0)). \quad (3.2.47) \quad \text{agL}$$

Заметим, что если мы умножим (3.2.46) слева на  $g_0^{-1}$  и воспользуемся (3.2.1), то мы получим другое соответствие между векторами пространств  $\mathcal{A}(G, g_0)$  и  $\mathcal{A}(G)$ , так как вектору  $A' \in \mathcal{A}(G, g_0)$  будет соответствовать другой вектор  $B \in \mathcal{A}(G)$

$$B = g_0^{-1} \cdot A'. \quad (3.2.48) \quad \text{agR}$$

Сравнивая (3.2.47) и (3.2.48), нетрудно увидеть, что два вектора  $A, B \in \mathcal{A}(G)$  связаны преобразованием подобия  $A = g_0 \cdot B \cdot g_0^{-1}$ .

- **Задача 76.** Доказать, что  $\mathcal{A}(G, g_0)$  — векторное пространство и если  $A, B \in \mathcal{A}(G, g_0)$ , то  $[A, B]_{g_0} \in \mathcal{A}(G, g_0)$ , где

$$[A, B]_{g_0} = A \cdot g_0^{-1} \cdot B - B \cdot g_0^{-1} \cdot A, \quad (3.2.49) \quad \text{umn}$$

(указание: воспользоваться взаимно-однозначным соответствием (3.2.47), или (3.2.48), и правилом умножения в  $\mathcal{A}(G)$ ). Проверить, что кососимметричное умножение (3.2.49) векторов в  $\mathcal{A}(G, g_0)$  удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[A, B]_{g_0}, C]_{g_0} + (\text{цикл } A \rightarrow B \rightarrow C) = 0.$$

Формула (3.2.49) совпадает с коммутатором (3.2.2) при  $g_0 = I_n$ .

Итак, в касательных векторных пространствах  $\mathcal{A}(G, g_0)$  также определены не только обычные операции над векторами, но и умножение векторов (3.2.49), которое не выводит из  $\mathcal{A}(G, g_0)$ . Таким образом, векторные пространства  $\mathcal{A}(G, g_0)$  также наделены структурой алгебры Ли.

Рассмотрим произвольную непрерывную кривую  $g(t)$  в группе Ли  $G$ . В каждой точке  $t$  этой кривой можно определить касательный вектор  $\frac{dg(t)}{dt} \in \mathcal{A}(G, g(t))$ , который соответствует, согласно (3.2.47), (3.2.48) двум векторам  $A(t)$  и  $B(t)$  из алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ :

$$A(t) = \frac{dg(t)}{dt} \cdot g^{-1}(t), \quad B(t) = g^{-1}(t) \cdot \frac{dg(t)}{dt}. \quad (3.2.50) \quad \text{agRL}$$

Вектора  $A(t) \in \mathcal{A}(G)$  и  $B(t) \in \mathcal{A}(G)$  называются, соответственно, право- и лево-инвариантными, т.к. они инвариантны относительно правых  $g \rightarrow g \cdot h$  и левых  $g \rightarrow h \cdot g$  сдвигов на группе  $G$ . Кривая  $g(t)$  однозначно определяется своей начальной точкой

$g(t)|_{t=0} = g_0$  и совокупностью своих правых (или левых) касательных векторов  $A(t)$  (или  $B(t)$ ), соответствующих каждой точке кривой. Действительно, дифференциальные уравнения (3.2.50), с указанными начальными данными, имеют решения

$$g(t) = \overleftarrow{P} \exp \left( \int_0^t dt' A(t') \right) \cdot g_0, \quad g(t) = g_0 \cdot \overrightarrow{P} \exp \left( \int_0^t dt' B(t') \right). \quad (3.2.51) \quad \text{aga}$$

Здесь  $\overleftarrow{P} \exp$  и  $\overrightarrow{P} \exp$  – упорядоченные вдоль кривой  $g(t)$  экспоненты, удовлетворяющие для любой точки  $\bar{t} \in [0, t]$  соотношениям:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{P} \exp \left( \int_0^t dt' A(t') \right) &= \overleftarrow{P} \exp \left( \int_{\bar{t}}^t dt' A(t') \right) \overleftarrow{P} \exp \left( \int_0^{\bar{t}} dt' A(t') \right), \\ \overrightarrow{P} \exp \left( \int_0^t dt' B(t') \right) &= \overrightarrow{P} \exp \left( \int_0^{\bar{t}} dt' B(t') \right) \overrightarrow{P} \exp \left( \int_{\bar{t}}^t dt' B(t') \right). \end{aligned}$$

В частности, если  $g_0 = I_n$  и вектор  $A(t)$  не зависит от  $t$ , то есть  $A(t) = A$  для всех  $t$ , то (3.2.51) задает одно-параметрическую кривую в группе  $G$

$$g_A(t) = \exp(tA), \quad A \in \mathcal{A}(G), \quad (3.2.52) \quad \text{aga1}$$

которую мы уже рассматривали в (3.2.8), исходя из несколько других соображений. Заметим, что элементы кривой (3.2.52) удовлетворяют соотношениям

$$g_A(0) = e, \quad g_A(t) \cdot g_A(s) = g_A(t+s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (3.2.53) \quad \text{exp00}$$

и следовательно образуют абелеву (так как очевидно, что  $g_A(t) \cdot g_A(s) = g_A(s) \cdot g_A(t)$  для всех  $t$  и  $s$ ) подгруппу в матричной группе Ли  $G$ . ESF

### 3.2.5 Общее определение алгебр Ли.

В предыдущих разделах связь между группами и алгебрами Ли была рассмотрена на примере матричных групп и алгебр. Здесь мы наметим общую конструкцию и дадим формальное определение алгебр Ли.

Рассмотрим  $n$ -мерную группу Ли  $G$  и рассмотрим множество  $T_e(G)$  касательных векторов к многообразию группы Ли  $G$  в точке, соответствующей единичному элементу  $e \in G$ . Напомним, что касательным вектором к многообразию группы Ли  $G$  в точке  $e \in G$  назывался класс эквивалентных кривых  $g(t)$ , исходящих из  $e \in G$ . Как было показано в разделе 3.1.5 на множестве  $T_e(G)$  можно ввести структуру векторного пространства. Сложение и умножение на число касательных векторов из  $T_e(G)$  определялись по формулам (3.1.61) и (3.1.62), где использовались кривые на многообразии группы Ли  $G$ .

Покажем теперь, что касательное векторное пространство  $T_e(G)$  наделено структурой алгебры. Построим для этого из двух неэквивалентных кривых  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$ , проходящих через  $e \in G$  и имеющих представления (3.1.55) в координатах локальной карты, новую кривую  $g(t)$  в виде коммутанта (ср. с (3.2.4)):

$$g(t) = g_1(s) \cdot g_2(s) \cdot g_1^{-1}(s) \cdot g_2^{-1}(s), \quad (3.2.54) \quad \text{gg4}$$

где  $s = \text{sign}(t) \sqrt{|t|}$  и  $\text{sign}(t) = \pm 1$  – знак параметра  $t$ . Обозначим касательные вектора к кривым  $g_1(s)$  и  $g_2(s)$  в точке  $e \in G$  как  $A_1$  и  $A_2$ , соответственно.

**Определение 3.2.2** Касательный вектор к кривой (3.2.54) в точке  $e \in G$  называется коммутатором касательных векторов  $A_1 \in \mathcal{A}(G)$  и  $A_2 \in \mathcal{A}(G)$  и обозначается  $[A_1, A_2] \in \mathcal{A}(G)$ .

Пользуясь формулами (3.1.11) и (3.1.13), а также формулой  $g^{-1}(\vec{x}) = g(\vec{x}')$ , где

$$(\vec{x}')^i = -x^i + f_{kj}^i x^k x^j + O_3, \quad (3.2.55) \quad \text{gg5}$$

(здесь  $O_3$  – члены третьего порядка по  $x^i$ ) и делая вычисления с точностью до членов третьего порядка по переменным  $x_1^i$  и  $x_2^i$ , получаем

$$g(\vec{x}_1) \cdot g(\vec{x}_2) \cdot g^{-1}(\vec{x}_1) \cdot g^{-1}(\vec{x}_2) = g\left(\vec{F}\left(\vec{F}(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \vec{F}(\vec{x}_1', \vec{x}_2')\right)\right),$$

где

$$\begin{aligned} F^i\left(\vec{F}(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \vec{F}(\vec{x}_1', \vec{x}_2')\right) &= F^i(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + F^i(\vec{x}_1', \vec{x}_2') + f_{jk}^i F^j(\vec{x}_1, \vec{x}_2) F^k(\vec{x}_1', \vec{x}_2') + O_3 = \\ &= x_1^i + x_2^i + f_{jk}^i x_1^j x_2^k + (x_1')^i + (x_2')^i + f_{jk}^i (x_1')^j (x_2')^k + \\ &+ f_{jk}^i (x_1^j + x_2^j) ((x_1')^k + (x_2')^k) + O_3 = f_{jk}^i x_1^j x_2^k - f_{jk}^i x_2^j x_1^k + O_3. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (3.1.55) (с заменой параметра  $t \rightarrow s$ ) и делая вычисления с точностью до членов порядка  $O(s^3)$ , получаем, что вектор  $[A_1, A_2] \in \mathcal{A}(G)$ , касательный к кривой (3.2.54) в точке  $e$ , имеет локальные координаты

$$([A_1, A_2])^i = C_{jk}^i a_1^j a_2^k, \quad C_{jk}^i \equiv (f_{jk}^i - f_{kj}^i), \quad (3.2.56) \quad \text{gg6}$$

где  $a_1^j$  и  $a_2^k$  – локальные координаты векторов  $A_1$  и  $A_2$ , а константы  $C_{jk}^i = -C_{kj}^i$  называются структурными константами группы Ли  $G$ .

**Утверждение 3.2.2** Коммутатор  $[A_1, A_2] \in \mathcal{A}(G)$  двух касательных векторов  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$  удовлетворяет условию кососимметричности

$$[A_2, A_1] = -[A_1, A_2], \quad (3.2.57) \quad \text{gg8}$$

условию линейности ( $a$  и  $b$  – вещественные числа)

$$[A_1, a A_2 + b A_3] = a [A_1, A_2] + b [A_1, A_3], \quad (3.2.58) \quad \text{gg8a}$$

и тождеству Якоби

$$[[A_1, A_2] A_3] + [[A_2, A_3] A_1] + [[A_3, A_1] A_2] = 0, \quad \forall A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}(G). \quad (3.2.59) \quad \text{gg9}$$

**Доказательство.** Условия (3.2.57) и (3.2.58) следуют из представления (3.2.56) для коммутатора  $[A_1, A_2]$  в локальной системе координат.



Тождество Якоби (3.2.59) мы докажем без явного использования локальной системы координат (нам однако понадобятся условия (3.2.57) и (3.2.58)). Пусть  $g(t)$  – кривая, проходящая через точку  $e$  и  $A$  – касательный вектор к  $g(t)$  в точке  $e$ . Введем в этом случае обозначение

$$g(t) \equiv g(t; A) . \quad (3.2.60) \quad \text{gg10}$$

Сделаем в (3.2.54) масштабное преобразование  $A_2 \rightarrow c A_2$  ( $g_2(s) \rightarrow g_2(cs)$ ), положим  $cs = t$  и учтем линейность коммутатора  $[A_1, A_2]$  по второму аргументу. Тогда, пользуясь обозначением (3.2.60), соотношение (3.2.54) переписывается в виде

$$g(s; A_1) \cdot g(t; A_2) = g(st; [A_1, A_2]) \cdot g(t; A_2) \cdot g(s; A_1) , \quad (3.2.61) \quad \text{gg11}$$

где  $s$  и  $t$  – произвольные достаточно малые вещественные параметры. Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} g(s; A_1) \cdot g(s; A_2) \cdot g(s; A_3) &= g(s; A_1) \cdot g(s^2; [A_2, A_3]) \cdot g(s; A_3) \cdot g(s; A_2) = \\ &= g(s^3; [A_1, [A_2, A_3]]) \cdot g(s^2; [A_2, A_3]) \cdot g(s; A_1) \cdot g(s; A_3) \cdot g(s; A_2) = \\ &= g(s^3; [A_1, [A_2, A_3]]) \cdot g(s^2; [A_2, A_3]) \cdot g(s^2; [A_1, A_3]) \cdot g(s; A_3) \cdot g(s; A_1) \cdot g(s; A_2), \end{aligned} \quad (3.2.62) \quad \text{gg12}$$

где мы несколько раз воспользовались (3.2.61). Заметим, что здесь в правой части возникло произведение  $g(s; A_3) \cdot g(s; A_1) \cdot g(s; A_2)$ , которое совпадает с левой частью с точностью до циклической перестановки  $A_1 \rightarrow A_3, A_2 \rightarrow A_1, A_3 \rightarrow A_2$ . Мы можем снова применить к произведению  $g(s; A_3) \cdot g(s; A_1) \cdot g(s; A_2)$  соотношение (3.2.62) и при этом получить еще одну циклическую перестановку векторов  $A_1, A_2, A_3$ . Делая эту процедуру два раза, приведем соотношение (3.2.62) к виду

$$\begin{aligned} g(s; A_1) \cdot g(s; A_2) \cdot g(s; A_3) &= \\ &= \{ g(s^3; [A_1, [A_2, A_3]]) \cdot g(s^2; [A_2, A_3]) \cdot g(s^2; [A_1, A_3]) \cdot g(s^3; [A_3, [A_1, A_2]]) \cdot \\ &g(s^2; [A_1, A_2]) \cdot g(s^2; [A_3, A_2]) \cdot g(s^3; [A_2, [A_3, A_1]]) \cdot g(s^2; [A_3, A_1]) \cdot g(s^2; [A_2, A_1]) \} \cdot \\ &g(s; A_1) \cdot g(s; A_2) \cdot g(s; A_3) \end{aligned} \quad (3.2.63) \quad \text{gg13}$$

Заметим, что если делать вычисления с точностью до  $O(s^4)$ , то, учитывая (3.2.61), мы можем переставлять все факторы в правой части (3.2.63) в фигурных скобках и считать  $g(s^2; -A) = g^{-1}(s^2; A)$ . Тогда с точностью до  $O(s^4)$  соотношение (3.2.63) дает

$$e = g(s^3; [A_1, [A_2, A_3]]) \cdot g(s^3; [A_3, [A_1, A_2]]) \cdot g(s^3; [A_2, [A_3, A_1]]) , \quad (3.2.64) \quad \text{gg14}$$

откуда следует (3.2.59). ■

**Замечание 1.** Условие (3.2.57) можно также получить без использования локальных координат. Из определения сложения касательных векторов мы имеем равенство  $g^{-1}(t; A) = g(t; -A)$ , справедливое с точностью  $O(t^2)$ . Отсюда следует, что  $(-A)$  – касательный вектор в точке  $e$  к кривой  $g^{-1}(t; A)$ . Пользуясь (3.2.54), получаем

$$g^{-1}(t; [A_1, A_2]) = g(s; A_2) \cdot g(s; A_1) \cdot g^{-1}(s; A_2) \cdot g^{-1}(s; A_1) = g(t; [A_2, A_1]) . \quad (3.2.65) \quad \text{gg7}$$

Так как вектор  $-[A_1, A_2] \in \mathcal{A}(G)$  является касательным к кривой  $g^{-1}(t; [A_1, A_2])$ , то из сравнения левой и правой частей (3.2.65) вытекает (3.2.57).

**Замечание 2.** Коммутатор  $[A_1, A_2]$  двух векторов  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(G)$  снова принадлежит  $\mathcal{A}(G)$ . Кроме того из условий (3.2.57) и (3.2.58) следует, что  $[A_1, A_2]$  линеен по обоим аргументам. Поэтому коммутатор можно рассматривать как операцию умножения в векторном пространстве  $\mathcal{A}(G)$ , которое становится алгеброй.

Итак, пространство  $\mathcal{A}(G)$  не только является векторным пространством (подчеркнем его вещественность), но оно еще снабжено дополнительной операцией умножения  $[\cdot, \cdot]$ , которая удовлетворяет условию кососимметричности (3.2.57) и тождеству Якоби (3.2.59). Векторное пространство с такой операцией представляет собой алгебру, называемую алгеброй Ли. Таким образом мы приходим к следующему общему определению алгебры Ли, которое уже никак не опирается на группы Ли (при этом требование вещественности  $\mathcal{A}(G)$  может быть ослаблено).

**Определение 3.2.3** Алгебра Ли  $\mathcal{A}$  – это векторное пространство, на котором для любых двух векторов  $X, Y \in \mathcal{A}$  определена операция умножения:

$$[X, Y] \in \mathcal{A}, \quad (3.2.66) \quad \text{defLi0}$$

которая кососимметрична

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad (3.2.67) \quad \text{defLi5}$$

удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (\forall X, Y, Z \in \mathcal{A}), \quad (3.2.68) \quad \text{jacob}$$

и по отношению к этой операции для  $\mathcal{A}$  выполнены все стандартные аксиомы алгебры. Если  $\mathcal{A}$  – вещественное (или комплексное) векторное пространство, то  $\mathcal{A}$  называется вещественной (или комплексной) алгеброй Ли.

**Замечание 3.** Умножение в матричных алгебрах  $\mathcal{A}(G, g_0)$  зависит от выбора точки  $g_0$  (см. (3.2.2) и (3.2.49)). Поэтому даже в этом случае необходимо сформулировать такое определение алгебры Ли, которое будет справедливо для любого выбора касательного пространства (точки  $g_0$ ). При этом нужно указать лишь исчерпывающий набор аксиом и свойств умножения в алгебре Ли, не конкретизируя явный вид этого умножения, свойственный для матричных алгебр, что и сделано в Определении 3.2.3.

**Замечание 4.** В общем случае алгебра Ли не ассоциативна:

$$[[X, Y], Z] \neq [X, [Y, Z]].$$

Условие ассоциативности заменяется в алгебре Ли на тождество Якоби (3.2.68). Для матричных алгебр Ли, когда  $X, Y, Z$  – матрицы, а умножение  $[\cdot, \cdot]$  дается формулой (3.2.49), кососимметричность (3.2.67) и тождество Якоби (3.2.68) выполняются автоматически.

**Замечание 5.** Изложенная в начале этого раздела конструкция, ставящая в соответствие группе Ли ее алгебру Ли, приводит к вещественным алгебрам Ли. Тем не менее, некоторые такие алгебры могут быть интерпретированы как комплексные алгебры Ли. Мы поясним этот момент подробнее в подразделе 3.2.7. Изучение таких вещественных алгебр как комплексных алгебр оказывается весьма полезным и плодотворным.

**Замечание 6.** Кривая  $g(t)$  в группе Ли  $G$  называется однопараметрической подгруппой в  $G$ , если (сравните с (3.2.53))

$$g(t) \cdot g(s) = g(t + s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (3.2.69) \quad \text{exp001}$$

Из (3.2.69) очевидно следует, что  $g(0) = e$  и  $g(t)^{-1} = g(-t)$ , а кривая  $g(t)$  есть образ некоторого гомоморфизма из группы трансляций  $T(\mathbb{R})$  в  $G$ . Подгруппа  $g(t)$  – абелева, так как из соотношений (3.2.69) следует, что  $g(t) \cdot g(s) = g(s) \cdot g(t)$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ . Для каждого  $A \in \mathcal{A}(G)$  существует единственная однопараметрическая подгруппа  $g_A(t)$ , имеющая в точке  $e$  касательный вектор  $A$ . Отображение  $\exp: \mathcal{A}(G) \rightarrow G$ , задаваемое соотношениями

$$\exp(A) := g_A(t)|_{t=1}, \quad \forall A \in \mathcal{A}(G),$$

называется *экспоненциальным отображением*.

**Замечание 7.** В полной аналогии с теорией групп Ли вводятся понятия гомоморфизма, изоморфизма и автоморфизма алгебр Ли.

**Определение 3.2.4** Отображение  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  из алгебры Ли  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{K}$  в алгебру Ли  $\mathcal{A}'$  над полем  $\mathbb{K}$  будем называть *линейным гомоморфизмом*, если

$$\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha \rho(A) + \beta \rho(B), \quad \rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)], \quad (3.2.70) \quad \text{homAL}$$

где  $A, B \in \mathcal{A}$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Две алгебры Ли  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}'$  будем называть *изоморфными* (и писать  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ ), если имеется взаимнооднозначный и обратимый линейный гомоморфизм  $\rho$ , отображающий алгебру Ли  $\mathcal{A}$  на алгебру Ли  $\mathcal{A}'$ . Изоморфизм из алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в себя называется *автоморфизмом алгебры  $\mathcal{A}$* .

### Примеры.

1. Для любой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  можно построить тривиальный линейный гомоморфизм  $\rho$  такой, что  $\rho(X) = 0$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ .

2. Пусть  $A$  — фиксированный элемент матричной группы  $GL(n, \mathbb{K})$ . Рассмотрим отображение  $\rho_A$  из алгебры  $sl(n, \mathbb{K})$  в себя, заданное формулами

$$\rho_A(X) = A \cdot X \cdot A^{-1}, \quad \forall X \in sl(n, \mathbb{K}).$$

Очевидно, что это отображение взаимнооднозначно и удовлетворяет свойствам (3.2.70), поэтому  $\rho_A$  — изоморфизм из алгебры  $sl(n, \mathbb{K})$  в себя (иначе говоря,  $\rho_A$  — автоморфизм  $sl(n, \mathbb{K})$ ).

- **Задача 77.** Доказать, что отображение  $\rho_U: su(n) \rightarrow su(n)$ , заданное формулами  $\rho_U(X) = U \cdot X \cdot U^\dagger$ , где  $X$  — любой элемент  $su(n)$  и  $U \in SU(n)$ , является автоморфизмом  $su(n)$ .

Менее тривиальные примеры изоморфизмов и автоморфизмов алгебр Ли будут рассмотрены в разделе 3.2.12. Такое рассмотрение требует введения базиса в алгебрах Ли. К этому вопросу мы и переходим.

### 3.2.6 Структурные соотношения. Простые и полупростые алгебры Ли. Прямая сумма алгебр Ли.

Пусть в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  задан базис  $\{X_a\}$  ( $a, b, d \dots = 1, \dots, \dim \mathcal{A}$ ). Базисные элементы  $\{X_a\}$  называются образующими (или генераторами) алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Произведение (коммутатор) (3.2.66) двух образующих алгебры Ли  $\mathcal{A}$  есть некоторый вектор из  $\mathcal{A}$ , который можно снова разложить по базису  $\{X_a\}$ :

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^d X_d . \quad (3.2.71) \quad \text{defLi}$$

Коэффициенты  $C_{ab}^d$  называются структурными константами алгебры Ли, а соотношения (3.2.71) называются структурными (или определяющими) соотношениями для алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Структурные константы  $C_{ab}^d$  вещественны для вещественных алгебр Ли и могут быть комплексными для комплексных алгебр Ли. Очевидно, что структурные константы зависят от выбора базиса  $\{X_a\}$ . Кососимметричность (3.2.67) и тождество Якоби (3.2.68) в терминах структурных констант имеют вид

$$C_{ab}^d = -C_{ba}^d , \quad (3.2.72) \quad \text{koso}$$

$$C_{ab}^f C_{fd}^g + C_{bd}^f C_{fa}^g + C_{da}^f C_{fb}^g = 0 . \quad (3.2.73) \quad \text{jac02}$$

Обсудим некоторые важные понятия из теории алгебр Ли, пользуясь их формулировкой в терминах структурных соотношений (3.2.71).

1.) Алгебра Ли  $\mathcal{A}$  называется абелевой, если  $[X, Y] = 0$ ,  $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ , то есть

$$C_{ab}^d = 0 \quad \forall a, b, d . \quad (3.2.74) \quad \text{li01}$$

Абелева группа Ли  $G$  имеет абелеву алгебру Ли  $\mathcal{A}(G)$ . Это следует из рассмотрения коммутанта (3.2.54), (3.2.56).

2.) Подпространство  $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$  называется подалгеброй Ли в  $\mathcal{A}$ , если  $\forall X, Y \in \mathcal{H}$  мы имеем  $[X, Y] \in \mathcal{H}$ . Подалгебра  $\mathcal{H}$  определяется набором базисных образующих  $X_1, \dots, X_p$  ( $p \leq \dim \mathcal{A}$ ), если

$$C_{ab}^d = 0 \quad , \quad (a, b \leq p, \quad d > p) . \quad (3.2.75) \quad \text{li02}$$

Любая алгебра  $\mathcal{A}$  имеет две тривиальные подалгебры. А именно, подалгебру, состоящую из одного нулевого вектора, и подалгебру, совпадающую со всей алгеброй  $\mathcal{A}$ .

- **Задача 78.** Доказать, что если  $H$  – подгруппа Ли в группе Ли  $G$ , то алгебра Ли  $\mathcal{A}(H)$  есть подалгебра Ли в  $\mathcal{A}(G)$ .

**Пример 1.** Подгруппу  $SU(k)$  можно вложить в группу  $SU(n)$  ( $k < n$ ) аналогично тому, как мы вкладывали подгруппу  $O(k)$  в группу  $O(n)$  (см. (2.1.20)). В этом случае подалгеброй  $su(k)$  в  $su(n)$  является векторное пространство блочных матриц

$$u = \left( \begin{array}{c|c} w & 0_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{array} \right) , \quad (3.2.76) \quad \text{su22}$$

где  $k < n$ ,  $w \in su(k)$  и  $0_{k,n-k}$ ,  $0_{n-k,n-k}$  и  $0_{n-k,k}$  – нулевые матрицы соответствующего размера. Очевидно, что  $u^\dagger = -u$ ,  $\text{Tr}(u) = 0$ , т.е. множество матриц (3.2.76) образует

подпространство в  $su(n)$ , и это подпространство замкнуто относительно коммутирования.

**3.) Инвариантная подалгебра (идеал)  $N$**  — это подпространство  $N \subset \mathcal{A}$ , такое что  $\forall X \in \mathcal{A}$  справедливо  $[N, X] \subset N$ . Пусть элементы  $X_1, \dots, X_p$  ( $p < \dim \mathcal{A}$ ) задают базис в  $N$ . Тогда из определения инвариантной подалгебры следует, что

$$C_{ab}^d = 0, \quad (a \leq p, \quad d > p). \quad (3.2.77) \quad \text{li03}$$

- **Задача 79.** Доказать, что если  $H$  — инвариантная подгруппа Ли в группе Ли  $G$ , то алгебра Ли  $\mathcal{A}(H)$  есть инвариантная подалгебра в  $\mathcal{A}(G)$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Ли,  $N$  — ее идеал. Разобьем  $\mathcal{A}$  на непересекающиеся классы эквивалентности, считая, что элементы вида  $X \in \mathcal{A}$  и  $X + Z \in \mathcal{A}$  эквивалентны, если  $Z \in N$ . На пространстве классов эквивалентности  $\mathcal{A}/N$  (фактор-пространстве) естественным образом вводятся операции сложения и умножения на число (они распространяются на классы эквивалентности с представителей в этих классах и не зависят от выбора представителей), так что  $\mathcal{A}/N$  — векторное пространство. Более того  $\mathcal{A}/N$  — это алгебра Ли. Действительно, для определения коммутатора элементов  $R \in \mathcal{A}/N$  и  $S \in \mathcal{A}/N$  выберем в них представителей  $X \in R$  и  $Y \in S$ , и будем считать коммутатором  $[R, S] \in \mathcal{A}/N$  класс, которому принадлежит  $[X, Y]$ . Это определение не зависит от выбора представителей, поскольку для всех  $Z_1, Z_2 \in N$  справедливо

$$[X + Z_1, Y + Z_2] = [X, Y] + Z_3,$$

где  $Z_3 = [X, Z_2] + [Z_1, Y] + [Z_1, Z_2] \in N$ , и поэтому задает коммутатор в  $\mathcal{A}/N$ . Очевидно, что эта алгебраическая операция в  $\mathcal{A}/N$  обладает всеми свойствами, перечисленными в Определении 3.2.3. Алгебру Ли  $\mathcal{A}/N$  называют фактор-алгеброй алгебры  $\mathcal{A}$  по ее идеалу  $N$ . Отметим, что изложенная конструкция по-существу повторяет конструкцию фактор-группы Ли  $G/H$ , где  $G$  — группа Ли,  $H$  — ее инвариантная подгруппа.

**Пример 2.** Алгебра Ли  $u(n)$  имеет две инвариантные подалгебры:  $su(n)$  и одномерную абелеву подалгебру  $u(1)$ , состоящую из матриц  $i\alpha I_n$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Нулевая  $n \times n$  матрица принадлежит обеим подалгебрам.

**Пример 3.** Подпространство  $\mathcal{A}^{(1)} = [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$  в  $\mathcal{A}$ , состоящее из всех элементов вида  $[X, Y]$  ( $\forall X, Y \in \mathcal{A}$ ), образует инвариантную подалгебру в  $\mathcal{A}$ , так как  $[\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}] = \mathcal{A}^{(1)}$ . Затем можно определить инвариантную подалгебру  $\mathcal{A}^{(2)} = [\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(1)}]$  в  $\mathcal{A}^{(1)}$  и так далее.

**Определение 3.2.5** Алгебра Ли  $\mathcal{A}$  называется разрешимой, если для некоторого конечного  $n \geq 1$  выполняется  $\mathcal{A}^{(n)} = \emptyset$ .

**4.) Алгебра Ли проста**, если она не имеет нетривиальных инвариантных подалгебр.

**5.) Алгебра Ли полупроста**, если она не имеет нетривиальных абелевых инвариантных подалгебр.

**Замечание.** Алгебра Ли  $u(1)$  удовлетворяет всем требованиям определений 4.) и 5.). Несмотря на это, алгебру Ли  $u(1)$  не относят ни к простым, ни к полупростым алгебрам Ли.

**Пример 4.** Алгебра Ли  $u(n)$  не проста и не полупроста. Алгебры Ли  $su(n)$ ,  $sl(n, \mathbb{K})$ ,  $so(n, \mathbb{K})$  и  $sp(n, \mathbb{K})$  – просты. Доказательство простоты алгебр Ли  $su(n)$  и  $sl(n, \mathbb{K})$  мы дадим ниже в подразделе 3.2.9, где детально обсуждаются их структурные соотношения.

**Пример 5.** Разрешимая алгебра Ли  $\mathcal{A}$  (смотри определение 3.2.5) не полупроста, так как она содержит нетривиальную инвариантную абелеву подалгебру  $\mathcal{A}^{(n-1)}$ .

6.) Пусть алгебра Ли  $\mathcal{C}$  разбивается на две свои подалгебры Ли  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  так, что любой элемент  $X \in \mathcal{C}$  можно представить в виде  $X = Y + Z$ , где  $Y \in \mathcal{A}$  и  $Z \in \mathcal{B}$ , то есть  $\mathcal{C}$  как векторное пространство есть прямая сумма двух векторных пространств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , и кроме того  $[Y, Z] = 0$  для всех  $Y \in \mathcal{A}$  и всех  $Z \in \mathcal{B}$ . В этом случае алгебру Ли  $\mathcal{C}$  называют прямой суммой алгебр Ли  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и пишут  $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ .

Прямую сумму двух алгебр Ли  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  можно построить следующим образом. Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – алгебры Ли над одним и тем же полем  $\mathbb{K}$ , а  $\{X_i^{\mathcal{A}}\}$  и  $\{X_q^{\mathcal{B}}\}$  – базисы в них. Построим прямую сумму векторных пространств  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  как линейное пространство, состоящее из формальных линейных комбинаций вида

$$\sum_i a_i X_i^{\mathcal{A}} + \sum_q b_q X_q^{\mathcal{B}}, \quad (3.2.78) \quad \text{alAB}$$

где  $a_i, b_q \in \mathbb{K}$ . Операцию коммутации в этом векторном пространстве определим так:

$$[a_i X_i^{\mathcal{A}} + b_q X_q^{\mathcal{B}}, \tilde{a}_j X_j^{\mathcal{A}} + \tilde{b}_p X_p^{\mathcal{B}}] = [a_i X_i^{\mathcal{A}}, \tilde{a}_j X_j^{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}} + [b_q X_q^{\mathcal{B}}, \tilde{b}_p X_p^{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}} \quad (3.2.79) \quad \text{alAB1}$$

причем коммутаторы в правой части – это коммутаторы в алгебрах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Нетрудно проверить, что такой коммутатор удовлетворяет всем аксиомам алгебры Ли, так что построенное векторное пространство – алгебра Ли, которая и является прямой суммой  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  двух алгебр  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Ясно, что изучение прямой суммы двух алгебр Ли сводится к изучению каждой из алгебр в отдельности.

**Пример 6.** Прямая сумма двух матричных алгебр Ли  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  может быть описана явно. Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – две вещественные (или комплексные) матричные алгебры Ли размерности  $N_{\mathcal{A}}$  и  $N_{\mathcal{B}}$ ;  $\{A_1, \dots, A_{N_{\mathcal{A}}}\}$  – полный набор генераторов алгебры  $\mathcal{A}$  и  $\{B_1, \dots, B_{N_{\mathcal{B}}}\}$  – полный набор генераторов алгебры  $\mathcal{B}$ . Будем считать, что элементы алгебры  $\mathcal{A}$  – это матрицы  $n_{\mathcal{A}} \times n_{\mathcal{A}}$ , а элементы алгебры  $\mathcal{B}$  – матрицы  $n_{\mathcal{B}} \times n_{\mathcal{B}}$ . Построим набор из  $(N_{\mathcal{A}} + N_{\mathcal{B}})$  матриц  $(n_{\mathcal{A}} + n_{\mathcal{B}}) \times (n_{\mathcal{A}} + n_{\mathcal{B}})$  так, что первые  $N_{\mathcal{A}}$  матриц имеют блочный вид

$$\left( \begin{array}{c|c} A_i & 0_{n_{\mathcal{A}} \times n_{\mathcal{B}}} \\ \hline 0_{n_{\mathcal{B}} \times n_{\mathcal{A}}} & 0_{n_{\mathcal{B}} \times n_{\mathcal{B}}} \end{array} \right), \quad i = 1, \dots, N_{\mathcal{A}}, \quad (3.2.80) \quad \text{algA}$$

где  $0_{k \times \ell}$  – нулевая матрица  $k \times \ell$ . Оставшиеся  $N_{\mathcal{B}}$  матриц выберем в виде

$$\left( \begin{array}{c|c} 0_{n_{\mathcal{B}} \times n_{\mathcal{B}}} & 0_{n_{\mathcal{A}} \times n_{\mathcal{B}}} \\ \hline 0_{n_{\mathcal{B}} \times n_{\mathcal{A}}} & B_q \end{array} \right), \quad q = 1, \dots, N_{\mathcal{B}}. \quad (3.2.81) \quad \text{algB}$$

Векторное пространство, натянутое на базис, состоящий из  $(N_A + N_B)$  матриц (3.2.80) и (3.2.81), образует алгебру Ли (умножение в этой алгебре есть коммутатор  $(n_A + n_B) \times (n_A + n_B)$  матриц). Эта алгебра, как нетрудно понять, является прямой суммой  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  алгебр  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

- **Задача 80.** Пусть  $G = G_1 \times G_2$  – прямое произведение матричных групп Ли  $G_1$  и  $G_2$ . Показать, что алгебра Ли группы  $G$  изоморфна прямой сумме алгебр Ли  $\mathcal{A}(G_1)$  и  $\mathcal{A}(G_2)$ , то есть

$$\mathcal{A}(G_1 \times G_2) = \mathcal{A}(G_1) + \mathcal{A}(G_2) .$$

Алгебры  $\mathcal{A}(G_1)$  и  $\mathcal{A}(G_2)$  являются инвариантными подалгебрами Ли в алгебре  $\mathcal{A}(G_1) + \mathcal{A}(G_2)$  и если  $\mathcal{A}(G_1)$  и  $\mathcal{A}(G_2)$  – простые, то  $\mathcal{A}(G_1) + \mathcal{A}(G_2)$  – полупростая алгебра Ли.

**Определение 3.2.6** Группа Ли  $G$  называется простой (полупростой), если ее алгебра Ли проста (полупроста).

Учитывая утверждение Задачи 80, мы заключаем, что прямое произведение  $G_1 \times G_2$  двух простых групп Ли  $G_1$  и  $G_2$  дает пример полупростой группы Ли. Отметим, что группа Ли  $U(1)$  не относится к простым группам, так как, в соответствии со сказанным выше, алгебра Ли  $u(1)$  не считается простой.

**Пример 7.** Максимальное подпространство  $\mathcal{Z}$  в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  такое, что для всех  $X \in \mathcal{Z}$  справедливо  $[X, Y] = 0$ , где  $Y$  любой элемент  $\mathcal{A}$ , называется центром алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

- **Задача 81.** Доказать, что если группа Ли  $Z$  – центр в группе Ли  $G$ , то  $\mathcal{A}(Z)$  – центр в алгебре Ли  $\mathcal{A}(G)$ .

Центр  $\mathcal{Z}$  – инвариантная абелева подалгебра в  $\mathcal{A}$ . Поэтому, если в  $\mathcal{A}$  имеется нетривиальный центр, то  $\mathcal{A}$  не проста и не полупроста.

### 3.2.7 Овеществления и вещественные формы комплексных алгебр Ли.

#### 1. Овеществление комплексных алгебр Ли.

Поясним подробнее, что мы понимаем под интерпретацией вещественной алгебры Ли как комплексной, см. Замечание 5 в подразделе 3.2.5. Пусть  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  – комплексная  $n$ -мерная алгебра Ли с образующими  $(X_1, \dots, X_n)$  и определяющими соотношениями (3.2.71). С ней естественным образом ассоциируется вещественная  $2n$ -мерная алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  с образующими

$$(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n) = (X_1, \dots, X_n, iX_1, \dots, iX_n) . \quad (3.2.82) \quad yzxx$$

А именно, если  $\alpha_a$  – комплексные параметры и  $A = \alpha_a X_a$  – вектор в  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , то соответствующий вектор  $\tilde{A}$  в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  равен  $[(\operatorname{Re} \alpha_a) Y_a - (\operatorname{Im} \alpha_a) Z_a]$ . Ясно, что это соответствие взаимнооднозначно. При этом умножение на  $i$  в пространстве  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  заменяется на действие в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  линейного оператора  $J$  такого, что

$$J \cdot Y_a = Z_a , \quad J \cdot Z_a = -Y_a \quad \Rightarrow \quad J^2 = -I_{2n} . \quad (3.2.83) \quad cstr$$

Структурные соотношения в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  получаются из структурных соотношений (3.2.71) для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  и имеют вид

$$\begin{aligned} [Y_a, Y_b] &= (\operatorname{Re} C_{ab}^d) Y_d + (\operatorname{Im} C_{ab}^d) Z_d, \quad [Y_a, Z_b] = (\operatorname{Re} C_{ab}^d) Z_d - (\operatorname{Im} C_{ab}^d) Y_d, \\ [Z_a, Z_b] &= -(\operatorname{Re} C_{ab}^d) Y_d - (\operatorname{Im} C_{ab}^d) Z_d, \end{aligned} \quad (3.2.84) \quad \text{yyzz}$$

где  $C_{ab}^d$  – структурные константы в  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , а их вещественные и мнимые части  $\operatorname{Re} C_{ab}^d$  и  $\operatorname{Im} C_{ab}^d$  – структурные константы в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ . Полученную таким образом вещественную алгебру  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  мы будем называть овеществлением комплексной алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ .

Пусть теперь четномерная вещественная алгебра  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  получена овеществлением некоторой комплексной алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ . В этом случае мы будем также говорить, что вещественная алгебра  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  может быть интерпретирована как комплексная алгебра  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ . Понятно, что не всякая четномерная вещественная алгебра Ли допускает такую интерпретацию. Четномерная вещественная алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  может интерпретироваться как комплексная, если она обладает комплексной структурой, то есть в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  существует линейный оператор  $J$  (смотри (3.2.83)) такой, что

$$J^2 = -I_{2n}, \quad J \cdot [A, B] = [J \cdot A, B] \Leftrightarrow J \cdot [A, B] = [A, J \cdot B], \quad \forall A, B \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}. \quad (3.2.85) \quad \text{yyzz1}$$

- **Задача 82.** Проверить, что оператор  $J$ , заданный в (3.2.83), определяет комплексную структуру для алгебры Ли (3.2.84), то есть для  $J$  справедливы соотношения (3.2.85).

Отметим, что в алгебре  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  с комплексной структурой  $J$  можно всегда выбрать базис  $(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$  так, чтобы выполнялись соотношения (3.2.83).

- **Задача 83.** Пусть оператор  $J$  действует в вещественном  $2n$ -мерном векторном пространстве  $V_{\mathbb{R}}^{2n}$  и удовлетворяет  $J^2 = -I_{2n}$ . Построить базис  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  в  $V_{\mathbb{R}}^{2n}$ , в котором действие оператора  $J$  имеет вид  $J \cdot e_a = f_a$  и  $J \cdot f_a = -e_a$ . Указание. Выбрать любой ненулевой вектор  $e_1 \in V_{\mathbb{R}}^{2n}$  и построить по нему вектор  $f_1 = J \cdot e_1$ , при этом  $J \cdot f_1 = -e_1$ . Затем выбрать линейно независимый от  $e_1$  и  $f_1$  вектор  $e_2 \in V_{\mathbb{R}}^{2n}$  и построить по нему вектор  $f_2 = J \cdot e_2$ , и так далее.
- **Задача 84.** Проверить, что, если в алгебре  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  с комплексной структурой  $J$  базис  $(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$  выбран так, что выполняются соотношения (3.2.83), то определяющие соотношения  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  в этом базисе имеют вид (3.2.84).

Обсудим более подробно, почему наличие комплексной структуры  $J$  у вещественной алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  дает возможность интерпретировать ее как комплексную алгебру  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ . Используя оператор  $J$ , можно построить два проектора, которые действуют в комплексификации  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$  вещественной алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ :

$$P^+ = \frac{1}{2}(1 + iJ), \quad P^- = \frac{1}{2}(1 - iJ), \quad (P^\pm)^2 = P^\pm, \quad P^\mp \cdot P^\pm = 0. \quad (3.2.86) \quad \text{PpPm}$$



Проекторы  $P^\pm$  раскладывают алгебру  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$  в прямую сумму двух комплексных подалгебр  $\mathcal{A}^{(+)}$  и  $\mathcal{A}^{(-)}$ , где  $\mathcal{A}^{(\pm)} = P^\pm \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$ . Действительно, любой элемент  $A \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$  представим в виде суммы  $A = P^+ A + P^- A$  и, пользуясь (3.2.85), легко проверить, что

$$[\mathcal{A}^{(+)}, \mathcal{A}^{(+)}] \subset \mathcal{A}^{(+)} , \quad [\mathcal{A}^{(-)}, \mathcal{A}^{(-)}] \subset \mathcal{A}^{(-)} , \quad [\mathcal{A}^{(+)}, \mathcal{A}^{(-)}] = 0 .$$

Выберем в алгебре  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  базис  $(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$ , для которого выполняются соотношения (3.2.83). Тогда согласно (3.2.83) и (3.2.86) базис в комплексной алгебре  $\mathcal{A}^{(+)}$  состоит из элементов  $X_a^{(+)} = (Y_a + iZ_a)/2$ , а в алгебре  $\mathcal{A}^{(-)}$  – из элементов  $X_a^{(-)} = (Y_a - iZ_a)/2$ , где  $a = 1, \dots, n$ . Поэтому комплексные размерности алгебр  $\mathcal{A}^{(-)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)}$  совпадают и равны  $n$ . Более того, алгебры  $\mathcal{A}^{(+)}$  и  $\mathcal{A}^{(-)}$  связаны между собой антилинейным взаимнооднозначным отображением  $\rho: \mathcal{A}^{(-)} \rightarrow \mathcal{A}^{(+)}$ , таким, что

$$\rho(\alpha_a X_a^{(-)}) = \alpha_a^* X_a^{(+)} , \quad \alpha_a \in \mathbb{C} . \quad (3.2.87) \quad \text{isom}$$

При этом отображение  $\rho$  сохраняет произведение в алгебрах  $\mathcal{A}^{(-)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)}$ .

- **Задача 85.** Используя соотношения (3.2.85) и результат Задачи 84, показать, что базисные элементы  $X_a^{(+)}$  и  $X_a^{(-)}$  комплексных алгебр  $\mathcal{A}^{(-)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)}$  имеют структурные соотношения:

$$[X_a^{(-)}, X_b^{(-)}] = C_{ab}^d X_d^{(-)} , \quad [X_a^{(+)}, X_b^{(+)}] = \overline{C}_{ab}^d X_d^{(+)} , \quad (3.2.88) \quad \text{pxrx}$$

где  $C_{ab}^d = \text{Re} C_{ab}^d + i \text{Im} C_{ab}^d$  и  $\overline{C}_{ab}^d = \text{Re} C_{ab}^d - i \text{Im} C_{ab}^d$ . Показать, что отображение  $\rho$ , заданное в (3.2.87), согласовано с алгебраическими операциями (3.2.88).

Овеществление алгебры  $\mathcal{A}^{(-)}$  с базисом  $(X_1^{(-)}, \dots, X_n^{(-)}, iX_1^{(-)}, \dots, iX_n^{(-)})$  и овеществление алгебры  $\mathcal{A}^{(+)}$  с базисом  $(X_1^{(+)}, \dots, X_n^{(+)}, -iX_1^{(+)}, \dots, -iX_n^{(+)})$  совпадают и изоморфны одной и той же алгебре  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ . Таким образом, мы показали, что вещественную алгебру Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  с комплексной структурой  $J$  всегда можно интерпретировать как комплексную алгебру  $\mathcal{A}^{(-)}$  (или  $\mathcal{A}^{(+)}$ ) размерности  $n$ .

- **Задача 86.** Доказать, что  $\mathcal{A}^{(-)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)}$  – инвариантные подалгебры в  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n}$  и имеют место изоморфизмы:  $\mathcal{A}^{(-)} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n} / \mathcal{A}^{(+)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{2n} / \mathcal{A}^{(-)}$ .

В качестве простого примера рассмотрим овеществление алгебры Ли группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Любая матрица  $A \in sl(2, \mathbb{C})$  (3.2.18) имеет разложение

$$A = a_{12}e_+ + a_{21}e_- + 2a_{11}h , \quad a_{ij} \in \mathbb{C} , \quad (3.2.89) \quad \text{li5}$$

где три матрицы

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (3.2.90) \quad \text{li111}$$

образуют базис в  $sl(2, \mathbb{C})$ , комплексная размерность которой, таким образом, равна трем. Структурные соотношения для образующих  $sl(2, \mathbb{C})$  имеют вид

$$[e_+, e_-] = 2h , \quad [h, e_+] = e_+ , \quad [h, e_-] = -e_- . \quad (3.2.91) \quad \text{eph}$$

Овеществление алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ , то есть вещественная алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , согласно описанной выше процедуре, имеет размерность 6 и ее образующие можно выбрать следующим образом: первые три образующие совпадают с  $e_+$ ,  $e_-$  и  $\mathbf{h}$ , а оставшиеся три имеют вид

$$e'_+ = i e_+ , \quad e'_- = i e_- , \quad \mathbf{h}' = i \mathbf{h} . \quad (3.2.92) \quad \text{rs122}$$

Умножение в алгебре  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  определяется коммутаторами (3.2.91) и коммутаторами, которые вытекают из представления (3.2.92):

$$\begin{aligned} [e'_+, e'_-] &= -2 \mathbf{h} , \quad [\mathbf{h}', e'_\pm] = \mp e_\pm , \\ [e_+, e'_-] &= [e'_+, e_-] = 2 \mathbf{h}' , \quad [\mathbf{h}', e_\pm] = [\mathbf{h}, e'_\pm] = \pm e'_\pm , \end{aligned} \quad (3.2.93) \quad \text{defA6}$$

а комплексная структура в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  задается оператором  $J$ :

$$J \cdot e_\pm = e'_\pm , \quad J \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}' , \quad J \cdot e'_\pm = -e_\pm , \quad J \cdot \mathbf{h}' = -\mathbf{h} .$$

Алгебры  $\mathcal{A}^{(-)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)}$  выделяются из  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^6$  с помощью проекторов  $P^-$  и  $P^+$  и мы имеем

$$\begin{aligned} P^- \cdot e_\pm &= e_\pm^- , \quad P^- \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}^- , \quad P^- \cdot e'_\pm = i e_\pm^- , \quad P^- \cdot \mathbf{h}' = i \mathbf{h}^- , \\ P^+ \cdot e_\pm &= e_\pm^+ , \quad P^+ \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}^+ , \quad P^+ \cdot e'_\pm = -i e_\pm^+ , \quad P^+ \cdot \mathbf{h}' = -i \mathbf{h}^+ , \end{aligned} \quad (3.2.94) \quad \text{AmAp}$$

где мы ввели обозначения

$$e_\pm^- = \frac{1}{2}(e_\pm - i e'_\pm) , \quad \mathbf{h}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{h} - i \mathbf{h}') , \quad (3.2.95) \quad \text{AmAp1}$$

для базисных элементов в алгебре  $\mathcal{A}^{(-)}$  и

$$e_\pm^+ = \frac{1}{2}(e_\pm + i e'_\pm) , \quad \mathbf{h}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + i \mathbf{h}') . \quad (3.2.96) \quad \text{AmAp2}$$

для базисных элементов в алгебре  $\mathcal{A}^{(+)}$ . Теперь вещественная алгебра  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  интерпретируется как комплексная алгебра  $\mathcal{A}^{(-)}$  (или как  $\mathcal{A}^{(+)}$ ). Обе алгебры  $\mathcal{A}^{(-)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)}$  изоморфны  $sl(2, \mathbb{C})$ .

- **Задача 87.** Пользуясь (3.2.91) и (3.2.93), показать что образующие (3.2.95) и (3.2.96) алгебр  $\mathcal{A}^{(-)}$  и  $\mathcal{A}^{(+)}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям, идентичным соотношениям (3.2.91) для образующих  $sl(2, \mathbb{C})$ . Проверить, что образующие  $(e_\pm^-, \mathbf{h}^-)$  коммутируют с образующими  $(e_\pm^+, \mathbf{h}^+)$ .

**Замечание 1.** Подчеркнем, что описанную процедуру интерпретации  $2n$ -мерной вещественной алгебры как комплексной  $n$ -мерной алгебры не следует путать с комплексификацией  $2n$ -мерной вещественной алгебры (см. подраздел 2.2.1 по поводу комплексификации вещественных векторных пространств), в результате которой получается  $2n$ -мерная комплексная алгебра.

**Замечание 2.** Алгебра  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  – проста, как вещественная алгебра. Ее комплексификация  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^6$ , как мы показали (см. Задачу 87), разлагается в прямую сумму  $sl(2, \mathbb{C}) +$

$sl(2, \mathbb{C})$ , то есть  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^6$  – непростая алгебра Ли. Ниже в разделе **3.2.12** (см. Задачу **105**) мы покажем, что вещественная алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  изоморфна вещественной алгебре  $so(1, 3)$ .

## 2. Вещественные формы комплексных алгебр Ли.

Напомним, что понятие вещественных форм комплексных векторных пространств было введено в подразделе **2.2.1**.

Пусть в комплексной алгебре Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  можно выбрать базис так, чтобы структурные константы в определяющих соотношениях (3.2.71) были вещественны. Вещественная алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^n$  с такими же структурными константами называется вещественной формой алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ . Понятно, что комплексификация  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^n$  — это  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , поэтому данное определение эквивалентно следующему:

**Определение 3.2.7** Вещественная алгебра  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^n$  называется вещественной формой алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , если комплексификация  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^n$  совпадает с  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ .

Очевидно, что справедливо также обратное утверждение: если  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^n$  – вещественная форма алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , то структурные константы  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  с тем же базисом, что и в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^n$ , будут вещественными.

Пусть  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  – комплексная алгебра Ли, а  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  – ее овеществление. Пусть на  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  задана линейная инволютивная операция  $\sigma$  такая, что  $\sigma^2(X) = X$  и

$$\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}. \quad (3.2.97) \quad \text{li05}$$

Ясно, что соответствующая инволюция  $\sigma$  имеется и на комплексной алгебре  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , но она не обязательно линейна, она может быть антилинейной

$$\sigma(\alpha X) = \alpha^* \sigma(X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall X \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n. \quad (3.2.98) \quad \text{li05d}$$

С помощью операции  $\sigma$  любой элемент  $X \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  можно разложить в сумму

$$X = \frac{1}{2}(X + \sigma(X)) + \frac{1}{2}(X - \sigma(X)) = X^+ + X^-,$$

где в силу инволютивности и линейности  $\sigma$  мы имеем  $\sigma(X^{\pm}) = \pm X^{\pm}$ . Поэтому алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ , как векторное пространство, разлагается в сумму двух подпространств  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^-$  (соответствующих двум собственным значениям  $\pm 1$  оператора  $\sigma$ ). Для подпространств  $\mathcal{A}^+$  и  $\mathcal{A}^-$ , пользуясь соотношениями (3.2.97), можно получить следующие свойства

$$[\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^+] \subset \mathcal{A}^+, \quad [\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^-] \subset \mathcal{A}^-, \quad [\mathcal{A}^-, \mathcal{A}^-] \subset \mathcal{A}^+. \quad (3.2.99) \quad \text{li06}$$

Например, первое из этих свойств следует из цепочки равенств

$$\sigma([X^+, Y^+]) = [\sigma(X^+), \sigma(Y^+)] = +[X^+, Y^+] \Rightarrow [X^+, Y^+] \in \mathcal{A}^+.$$

Согласно (3.2.99) вещественное подпространство  $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  образует подалгебру Ли в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ . Оказывается, что все вещественные формы полупростой комплексной алгебры

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  связаны с некоторыми инволюциями  $\sigma$  в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  и получаются именно как подалгебры  $\mathcal{A}^+$  в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ .

VRN

В качестве примера снова рассмотрим комплексную алгебру  $sl(2, \mathbb{C})$ . Одной из вещественных форм алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  является алгебра Ли  $sl(2, \mathbb{R})$ , возникающая, когда в (3.2.89) координаты  $a_{ij}$  выбираются вещественными числами. Эта вещественная форма выделяется из алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  с помощью инволюции  $\sigma$ , которая является обычным комплексным сопряжением, то есть для любой комплексной матрицы  $A \in sl(2, \mathbb{C})$  мы имеем  $\sigma(A) = A^*$ . На языке вещественной алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$  линейная инволютивная операция  $\sigma$  задается преобразованием элементов базиса

$$(e_+, e_-, \mathbf{h}, e'_+, e'_-, \mathbf{h}') \xrightarrow{\sigma} (e_+, e_-, \mathbf{h}, -e'_+, -e'_-, -\mathbf{h}') .$$

В рассматриваемом случае подалгебра  $\mathcal{A}^+$  в  $sl(2, \mathbb{C})$  по определению образована всеми матрицами вида  $A + \sigma(A) = A + A^*$ , то есть всеми вещественными и бесследовыми  $2 \times 2$  матрицами, откуда и следует  $\mathcal{A}^+ = sl(2, \mathbb{R})$ .

VRN

Рассмотрим еще одну инволютивную операцию на  $sl(2, \mathbb{C})$ , которая определяется для любой матрицы  $A \in sl(2, \mathbb{C})$  как  $\sigma(A) = -A^\dagger$ . На языке вещественной алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  соответствующая линейная инволютивная операция определяется преобразованиями

$$(e_+, e_-, \mathbf{h}, e'_+, e'_-, \mathbf{h}') \xrightarrow{\sigma} (-e_-, -e_+, -\mathbf{h}, e'_-, e'_+, \mathbf{h}') .$$

- **Задача 88.** Проверить, что для любой комплексной матричной алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  всегда имеются две инволютивные операции:  $\sigma(A) = A^*$  и  $\sigma(A) = -A^\dagger$ , где  $A \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , для которых выполняются свойства (3.2.97) и (3.2.98).

В рассматриваемом случае подалгебра  $\mathcal{A}^+$  в  $sl(2, \mathbb{C})$  по определению образована всеми матрицами вида  $A + \sigma(A) = A - A^\dagger$ , то есть всеми антиэрмитовыми бесследовыми  $2 \times 2$  матрицами. Согласно примеру 5 из подраздела **3.2.3** эта подалгебра — вещественная алгебра Ли  $su(2)$ . Легко понять, что комплексификация  $su(2)$  совпадает с  $sl(2, \mathbb{C})$ . Таким образом, кроме вещественной формы  $sl(2, \mathbb{R})$ , комплексная алгебра  $sl(2, \mathbb{C})$  имеет еще одну вещественную форму —  $su(2)$ .

Другие примеры выделения вещественных форм с помощью инволюций мы рассмотрим ниже в подразделе **3.2.9**, когда будем обсуждать структурные соотношения для матричных алгебр Ли. Классификация всех вещественных форм алгебр Ли  $sl(n, \mathbb{C})$ ,  $so(n, \mathbb{C})$  и  $sp(2r, \mathbb{C})$  изложена в **3.2.10**.

### 3.2.8 Метрика Киллинга для алгебры Ли. Критерий полупростоты.

Пользуясь структурными константами  $C_{ab}^d$  (3.2.71), в векторном пространстве алгебры Ли  $\mathcal{A}$  можно определить симметричную метрику

$$\mathbf{g}_{ab} \equiv C_{ac}^d C_{bd}^c , \quad (3.2.100) \quad 1i04$$

которая называется метрикой Киллинга.

Сформулируем критерий полупростоты алгебры Ли, данный Э.Картаном.

**Утверждение 3.2.3** *Алгебра Ли полупроста, если и только если  $\det(\mathbf{g}_{ab}) \neq 0$ , то есть матрица  $\mathbf{g} = \|\mathbf{g}_{ab}\|$ , построенная из компонент метрики Киллинга, невырождена.*

Докажем достаточность критерия Картана. Будем доказывать это от противного. Пусть алгебра Ли не полупроста, то есть содержит инвариантную абелеву подалгебру, базисные генераторы которой будем нумеровать индексами  $\bar{a}, \bar{b}, \dots$ . Тогда из определения (3.2.100) следует, что  $\mathbf{g}_{\bar{a}\bar{b}} = 0$  и

$$\mathbf{g}_{\bar{a}\bar{b}} = C_{ac}^d C_{bd}^c = C_{a\bar{c}}^d C_{bd}^{\bar{c}} = C_{a\bar{c}}^{\bar{d}} C_{bd}^{\bar{c}} = 0. \quad (3.2.101) \quad \text{gsc}$$

Второе и третье равенства в (3.2.101) получаются из (3.2.77), а последнее – из (3.2.74). Таким образом, при наличии инвариантных абелевых подалгебр блоки  $\mathbf{g}_{\bar{a}\bar{b}}$ ,  $\mathbf{g}_{\bar{a}b}$  и  $\mathbf{g}_{a\bar{b}}$  в матрице  $\mathbf{g}$  метрики Киллинга равны нулю, а это значит, что  $\det(\mathbf{g}) = 0$  и достаточность критерия Картана доказана. С другой стороны, если  $\det(\mathbf{g}) = 0$ , то, как показал Картан, алгебра Ли  $\mathcal{A}$  обязательно содержит инвариантные абелевы подалгебры (это утверждение эквивалентно необходимости условия  $\det(\mathbf{g}_{ab}) \neq 0$ ). Доказательство необходимости критерия полупростоты алгебр Ли менее тривиально, чем приведенное выше доказательство достаточности. Мы наметим путь этого доказательства в Замечании 1 в конце данного раздела.

Метрика Киллинга определяет на алгебре Ли  $\mathcal{A}$  симметричное скалярное произведение

$$(A, B) = A^a \mathbf{g}_{ab} B^b, \quad A, B \in \mathcal{A}, \quad (3.2.102) \quad \text{li04h}$$

где  $A^a, B^a$  — параметры элементов  $A = A^a X_a, B = B^a X_a$  и по определению мы имеем

$$\mathbf{g}_{ab} = (X_a, X_b). \quad (3.2.103) \quad \text{gxx}$$

Скалярное произведение (3.2.102) называется формой Киллинга. Отметим, что это скалярное произведение не является, вообще говоря, положительно определенным.

- **Задача 89.** Показать, что скалярное произведение (3.2.102) не зависит от выбора базиса  $\{X_a\}$ .

Для каждого элемента  $Y \in \mathcal{A}$  согласно (3.2.66) можно определить линейный оператор  $\text{ad}(Y)$ , действующий в алгебре  $\mathcal{A}$ , следующим образом

$$\text{ad}(Y) \cdot X = [Y, X], \quad \forall X \in \mathcal{A}. \quad (3.2.104) \quad \text{liad1a}$$

Действие оператора  $\text{ad}(Y)$  в алгебре  $\mathcal{A}$  называется *присоединенным*.

**Утверждение 3.2.4** *Линейный оператор  $\text{ad}(Y)$  антисимметричен относительно скалярного произведения  $(A, B)$  (3.2.102), то есть имеет место следующее тождество*

$$([Y, A], B) + (A, [Y, B]) = 0, \quad \forall A, B, Y \in \mathcal{A}. \quad (3.2.105) \quad \text{li04q}$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $(\dim \mathcal{A} \times \dim \mathcal{A})$  матрицы  $\tilde{X}_a$  с элементами

$$(\tilde{X}_a)^d_b = C_{ab}^d, \quad (3.2.106) \quad \text{li04f}$$

где  $d$  интерпретируется как номер строки, а  $b$  – как номер столбца матрицы. Эти матрицы являются матрицами линейных операторов  $\text{ad}(X_a)$  в базисе  $\{X_b\}$ . С помощью матриц (3.2.106) метрика Киллинга (3.2.100) и тождество Якоби (3.2.73) записываются в виде

$$\text{Tr}(\tilde{X}_a \tilde{X}_b) = \mathbf{g}_{ab}, \quad (3.2.107) \quad \text{li04e}$$

$$[\tilde{X}_a, \tilde{X}_b] = C_{ab}^d \tilde{X}_d. \quad (3.2.108) \quad \text{li04g}$$

Докажем, что константы  $C_{abc} = C_{ab}^d \mathbf{g}_{dc}$  полностью антисимметричны по индексам  $a, b, c$ . Действительно, из (3.2.72) имеем  $C_{abc} = -C_{bac}$ , а антисимметрия по двум другим индексам  $C_{abc} = -C_{acb}$  следует из цепочки равенств

$$C_{abc} = C_{ab}^d \text{Tr}(\tilde{X}_d \tilde{X}_c) = \text{Tr}([\tilde{X}_a, \tilde{X}_b] \tilde{X}_c) = -\text{Tr}(\tilde{X}_b [\tilde{X}_a, \tilde{X}_c]) = -C_{acb}. \quad (3.2.109) \quad \text{li04u}$$

Разлагая в левой части (3.2.105) элементы  $Y, A, B \in \mathcal{A}$  по базису  $\{X_a\}$ , получаем

$$([Y, A], B) + (A, [Y, B]) = Y^a A^b B^p (C_{ab}^d \mathbf{g}_{dp} + C_{ap}^d \mathbf{g}_{db}) = 0,$$

где последнее равенство следует из антисимметрии (3.2.109). ■

- **Задача 90.** Пусть  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  — комплексная алгебра Ли,  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  — ее о веществлении, а  $\mathcal{A}$  — вещественная форма алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ . Пусть  $(A, B)_{\mathbb{C}}$ ,  $(A, B)_{\mathbb{R}}$  и  $(A, B)$  соответствующие этим алгебрам формы Киллинга. Доказать что форма  $(A, B)$  является сужением формы  $(A, B)_{\mathbb{C}}$ :

$$(A, B) = (A, B)_{\mathbb{C}}|_{A, B \in \mathcal{A}}.$$

Пользуясь формулами (3.2.84) доказать, что формы Киллинга  $(A, B)_{\mathbb{C}}$  и  $(\tilde{A}, \tilde{B})_{\mathbb{R}}$  связаны соотношением

$$(\tilde{A}, \tilde{B})_{\mathbb{R}} = 2 \text{Re}(A, B)_{\mathbb{C}},$$

где соответствие между элементами  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  и  $A, B \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  устанавливается заменой базиса (3.2.82).

**Замечание 1.** Пусть  $\mathbf{g} = \|\mathbf{g}_{ab}\|$  — метрика Киллинга алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Рассмотрим подпространство  $\text{Ker}(\mathbf{g})$  элементов  $B \in \mathcal{A}$  таких, что  $(X, B) = 0$  для всех  $X \in \mathcal{A}$ . Пусть метрика Киллинга вырождена, тогда подпространство  $\text{Ker}(\mathbf{g}) \subset \mathcal{A}$  нетривиально. Пусть  $B \in \text{Ker}(\mathbf{g})$  и  $B \neq 0$ . Тогда из (3.2.105) получаем

$$0 = ([Y, A], B) = -(A, [Y, B]), \quad \forall A, Y \in \mathcal{A},$$

и следовательно  $[Y, B] \in \text{Ker}(\mathbf{g})$  для всех  $Y \in \mathcal{A}$ . Отсюда следует, что  $\text{Ker}(\mathbf{g})$  — инвариантная подалгебра Ли в  $\mathcal{A}$ . Инвариантная подалгебра  $\text{Ker}(\mathbf{g})$  имеет нулевую метрику Киллинга  $\mathbf{g}_{ab} = 0$ . Можно доказать, что алгебра Ли с метрикой Киллинга

$\mathfrak{g}_{ab} = 0$  всегда разрешима, а разрешимые алгебры Ли всегда имеют нетривиальный абелев идеал (смотри Пример 5 в разделе 3.2.6). Поэтому и вся алгебра Ли  $\mathcal{A}$  (которая имеет разрешимую инвариантную подалгебру  $\text{Ker}(\mathfrak{g})$ ) также содержит нетривиальную абелеву инвариантную подалгебру и, следовательно,  $\mathcal{A}$  не полупроста. Итак, если метрика Киллинга вырождена, то алгебра Ли не полупроста (необходимость критерия Картана).

**Пример.** Примером неабелевой алгебры Ли с метрикой Киллинга, равной нулю  $\mathfrak{g}_{ab} = 0$ , может служить алгебра  $\mathcal{B}_+$  верхне-треугольных матриц  $\|a_{ij}\|$  ( $a_{ij} = 0, \forall i \geq j$ ). Метрика Киллинга для  $\mathcal{B}_+$  равна нулю, так как в  $\mathcal{B}_+$  всегда можно упорядочить базисные элементы так, чтобы  $C_{ab}^d = 0$  для всех  $d \leq b$ . Эта алгебра разрешима и абелев идеал в ней одномерен и образован матрицами, у которых отличен от нуля только один самый верхний правый элемент.

### 3.2.9 Примеры структурных соотношений для некоторых алгебр Ли.

**1.** Алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  и  $sl(2, \mathbb{R})$ . Как мы уже отмечали в разделе 3.2.7, образующими комплексной алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  и вещественной алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$  являются матрицы

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.110) \quad \text{li1}$$

которые удовлетворяют структурным соотношениям (3.2.91). Вещественная алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^6$  (изоморфная  $so(1, 3)$ , см. подраздел 3.2.12) группы  $SL(2, \mathbb{C})$  со структурными соотношениями (3.2.91) и (3.2.93) представляет собой овеществление комплексной алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ , а алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$  и  $su(2)$  — вещественные формы алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ , см. раздел 3.2.7.

**2.** Алгебра Ли  $gl(n, \mathbb{C})$  — это множество всех комплексных матриц  $n \times n$ . В качестве базиса в  $gl(n, \mathbb{C})$  можно использовать *матричные единицы*  $e_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) — матрицы, у которых все элементы равны нулю, кроме одного элемента в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце, равного единице:

$$(e_{ij})_{km} = \delta_{ik} \delta_{jm}. \quad (3.2.111) \quad \text{med1}$$

Матричные единицы удовлетворяют соотношениям  $\sum_{i=1}^n e_{ii} = I_n$  и

$$e_{ij} \cdot e_{km} = \delta_{kj} e_{im}, \quad (3.2.112) \quad \text{mmed}$$

используя которые можно получить определяющие соотношения для  $gl(n, \mathbb{C})$ :

$$[e_{ij}, e_{km}] = \delta_{jk} e_{im} - \delta_{im} e_{jk}. \quad (3.2.113) \quad \text{gln1}$$

Так же, как в предыдущем примере, мы интерпретируем  $gl(n, \mathbb{C})$  как *комплексную* алгебру Ли.

**3.** Алгебра Ли  $sl(n, \mathbb{C})$ , которую мы также интерпретируем как комплексную алгебру – это векторное подпространство в  $gl(n, \mathbb{C})$ , т.е. множество всех комплексных  $n \times n$  матриц  $A$  таких, что  $\text{Tr}(A) = 0$ . В качестве базиса в пространстве  $sl(n, \mathbb{C})$  можно выбрать матричные единицы:

$$E_{ij} = e_{ij}, \quad F_{ij} = e_{ji} \quad i < j, \quad (3.2.114) \quad \text{hefN}$$

и любые  $(n-1)$  матриц из набора  $n$  матриц вида

$$H_i = e_{ii} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{jj}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.2.115) \quad \text{hefN1}$$

которые связаны одним соотношением  $\sum_{i=1}^n H_i = 0$ . Таким образом,  $H_i$  – диагональные бесследовые матрицы, а  $E_{ij} = e_{ij}$  и  $F_{ij} = e_{ji}$  ( $i < j$ ) – матричные единицы, имеющие ненулевые элементы над и под главной диагональю, соответственно. Те же матрицы (3.2.114) и  $(n-1)$  матриц из (3.2.115) очевидно образуют базис и в вещественной алгебре Ли  $sl(n, \mathbb{R})$ , откуда становится ясным, что  $sl(n, \mathbb{R})$  – вещественная форма комплексной алгебры  $sl(n, \mathbb{C})$ . В качестве инволюции  $\sigma$  на  $sl(n, \mathbb{C})$ , которая выделяет вещественную форму  $sl(n, \mathbb{R})$  (см. пункт 2 раздела **3.2.7**), выбирается обычное комплексное сопряжение:  $\sigma(A) = A^*$ , где  $A \in sl(n, \mathbb{C})$ .

Из соотношений (3.2.113) следуют коммутационные соотношения для элементов (3.2.114), (3.2.115) алгебры Ли  $sl(n, \mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \quad [H_i, E_{kj}] = (\delta_{ik} - \delta_{ij})E_{kj}, \quad [H_i, F_{kj}] = (\delta_{ij} - \delta_{ik})F_{kj}, \\ [E_{ij}, E_{km}] &= \delta_{jk}E_{im} - \delta_{im}E_{kj}, \quad [F_{ij}, F_{km}] = \delta_{im}F_{kj} - \delta_{kj}F_{im}, \\ [E_{ij}, F_{km}] &= \delta_{jm}E_{ik} - \delta_{ik}E_{mj} \quad (j-i > m-k), \\ [E_{ij}, F_{km}] &= \delta_{jm}F_{ik} - \delta_{ik}F_{mj} \quad (j-i < m-k), \\ [E_{ij}, F_{km}] &= \delta_{jm}\delta_{ik}(H_i - H_j) \quad (j-i = m-k). \end{aligned} \quad (3.2.116) \quad \text{glNN}$$

Видно, что мы выделили базис в алгебре Ли  $sl(n, \mathbb{C})$  такой, что элементы  $H_i$  (выберем  $i = 1, \dots, n-1$ ) образуют коммутативную подалгебру, а совокупности генераторов  $\{H_i, E_{jk}\}$  и  $\{H_i, F_{jk}\}$  определяют подалгебры Ли в  $sl(n, \mathbb{C})$ . Данный базис  $\{H_i, E_{jk}, F_{jk}\}$  ( $j < k$ ) в алгебре Ли  $sl(n, \mathbb{C})$  называется базисом Картана-Вейля. Коммутативная подалгебра Ли  $\mathcal{H}$ , образованная элементами  $H_i$ , называется подалгеброй Картана. Образующие  $H_i$  подалгебры Картана называются элементами Картана, а образующие  $E_{jk}$  и  $F_{jk}$  называются положительными и отрицательными корневыми элементами, соответственно. Подалгебра Ли, образованная только элементами  $E_{jk}$  или только  $F_{jk}$ , называются положительной или отрицательной подалгеброй Бореля в алгебре  $sl(n, \mathbb{C})$ , соответственно. Базис Картана-Вейля и корневые элементы для любой полупростой алгебры Ли будут введены в разделе **5.4.2**.

**Утверждение 3.2.5** Алгебры Ли  $sl(n, \mathbb{C})$  и  $sl(n, \mathbb{R})$  – просты.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный элемент  $A \in sl(n, \mathbb{C})$

$$A = \sum_{i \neq j} a_{ij} e_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i H_i, \quad (3.2.117) \quad \text{simp1}$$



где  $a_{ij}, a_i \in \mathbb{C}$ . Пусть  $A$  принадлежит инвариантной подалгебре (идеалу)  $N \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Тогда, пользуясь (3.2.113), получаем

$$\begin{aligned} [A, H_m] &= \sum_i (a_{im} e_{im} - a_{mi} e_{mi}) = B_m \in N, \\ [B_m, H_k] &= (-a_{km} e_{km} - a_{mk} e_{mk}) = B_{m,k} \in N \quad (m \neq k), \\ [B_{m,k}, H_k - H_m] &= 2(a_{km} e_{km} - a_{mk} e_{mk}) = 2B'_{m,k} \in N, \end{aligned}$$

и, наконец,  $B'_{m,k} - B_{m,k} = 2a_{km} e_{km} \in N$ , где  $m \neq k$ . Таким образом, либо  $e_{km} \in N$ , а это значит, что  $N = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , так как из элемента  $e_{km}$ , с помощью коммутационных соотношений (3.2.116), можно породить всю алгебру  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , либо  $a_{km} = 0$ , и соответствующего слагаемого нет в линейной комбинации (3.2.117). Повторяя это рассуждение для всех  $m$  и  $k$ ,  $m \neq k$ , мы получаем, что либо  $N = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , либо элемент  $A \in N$  (3.2.117) принадлежит подалгебре Картана  $\mathcal{H}$ . Из любого ненулевого элемента  $A \in \mathcal{H}$  с помощью второго и третьего соотношений в (3.2.116), можно породить всю алгебру  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Поэтому снова, либо  $N = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , либо  $A = 0$ , а тогда  $N = \emptyset$ . Итак мы доказали, что  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  не содержит нетривиальных инвариантных подалгебр и, следовательно,  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  – проста.

Алгебра Ли  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  – проста, так как она является вещественной формой алгебры Ли  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  (если бы  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  была не проста, то при комплексификации, очевидно, возникала бы также непростая алгебра). ■

**4. Алгебра Ли  $su(2)$**  — это пространство комплексных  $2 \times 2$  матриц  $A$  таких, что  $A^\dagger = -A$  и  $\text{Tr}(A) = 0$ . Представим элемент  $A \in su(2)$  в виде  $A = -iX/2$ , где  $X^\dagger = X$  и  $\text{Tr}(X) = 0$ . Любую матрицу  $X$  такого типа можно записать как

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3, \quad (3.2.118) \quad \text{ermi}$$

где  $x_\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\sigma_\alpha$  — матрицы Паули (3.1.18). Отметим, что пользуясь явным видом (3.1.18), можно вывести следующие полезные соотношения для матриц Паули:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} I_2 + i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma. \quad (3.2.119) \quad \text{pauli2}$$

Итак, любой элемент  $A \in su(2)$  имеет разложение

$$A = x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2 + x_3 \tau_3, \quad \tau_\alpha \equiv -i\sigma_\alpha/2, \quad (3.2.120) \quad \text{lisu5}$$

где в качестве базиса в  $su(2)$  мы выбрали три антиэрмитовы матрицы  $\tau_\alpha$ , нормированные условиями  $\text{Tr}(\tau_\alpha \tau_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}/2$ . Именно потому, что базис  $\tau_\alpha$  в алгебре  $su(2)$  строится по матрицам Паули, последние играют важнейшую роль в теории спина в квантовой механике. Пользуясь тождествами (3.2.119), получаем структурные соотношения для образующих  $\tau_\alpha$ :

$$[\tau_\alpha, \tau_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma. \quad (3.2.121) \quad \text{li4}$$

Заметим, что комплексификация алгебры  $su(2)$  (когда в (3.2.120) мы выбираем  $x_\alpha \in \mathbb{C}$ ) совпадает с алгеброй Ли  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , так как в этом случае разложения (3.2.120) и (3.2.89) описывают одно и то же векторное пространство. Таким образом, как мы уже отмечали в пункте 2 раздела **3.2.7**, алгебра  $su(2)$  – вещественная

форма  $sl(2, \mathbb{C})$ , причем отличающаяся от вещественной формы  $sl(2, \mathbb{R})$ . Напомним, что в данном случае в качестве инволюции  $\sigma$ , которая выделяет подалгебру  $su(2)$  в  $sl(2, \mathbb{C})$  выбирается операция  $\sigma(A) = -A^\dagger$ .

**5. Алгебра Ли  $su(n)$  группы  $SU(n)$ .** Напомним, что  $su(n)$  — это множество антиэрмитовых бесследовых комплексных  $n \times n$  матриц  $A$ , которые можно представить как  $A = -iZ/2$ , где  $Z = ||Z_{ij}||$  — бесследовая эрмитова матрица. Очевидно, что такая матрица  $Z$  имеет вид  $Z = V + iW$ , где матрицы  $V = ||V_{ij}||$  и  $W = ||W_{ij}||$  — вещественны и удовлетворяют условиям  $V^T = V$ ,  $\text{Tr}(V) = 0$ ,  $W^T = -W$ . В компонентной записи мы имеем

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= V_{ij} + i W_{ij}, \quad V_{ij}, W_{ij} \in \mathbb{R}, \\ V_{ij} &= V_{ji}, \quad \sum_{i=1}^n V_{ii} = 0, \quad W_{ij} = -W_{ji}. \end{aligned} \quad (3.2.122) \quad \text{allin}$$

Разложим матрицу  $Z$  (3.2.122) по базисным матрицам

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \tilde{H}_i + \sum_{i < j} (X_{ij} S_{ij} + Y_{ij} S_{ji}),$$

где в качестве базисных элементов в пространстве всех бесследовых эрмитовых матриц  $n \times n$  выбираем матрицы

$$\tilde{H}_k = \left( \frac{2}{k(k+1)} \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^k e_{jj} - k e_{k+1, k+1} \right) \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad (3.2.123) \quad \text{allin5}$$

$$S_{ij} = e_{ij} + e_{ji}, \quad S_{ji} = i(e_{ji} - e_{ij}) \quad (i < j), \quad (3.2.124) \quad \text{allin55}$$

которые эрмитовы

$$\tilde{H}_k^\dagger = \tilde{H}_k, \quad S_{ij}^\dagger = S_{ij}, \quad S_{ji}^\dagger = S_{ji} \quad (i < j), \quad (3.2.125) \quad \text{allin4}$$

и обобщают матрицы Паули (3.1.18) на многомерный случай. В (3.2.123) были снова использованы *матричные единицы*  $e_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) (3.2.111), (3.2.112). Нормировка в (3.2.123) выбрана так, чтобы  $\text{Tr}(\tilde{H}_k \tilde{H}_j) = 2\delta_{kj}$ . Отметим, что выбор диагональных образующих (3.2.123) более удобен чем выбор (3.2.115) с точки зрения описания вложений  $su(n-1) \subset su(n)$  и  $sl(n-1, \mathbb{C}) \subset sl(n, \mathbb{C})$ .

Теперь любой элемент  $A = -iZ/2$  алгебры Ли  $su(n)$  можно представить в виде

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} h_i T_i + \sum_{i < j} (X_{ij} T_{ij} + Y_{ij} T_{ji}), \quad (3.2.126) \quad \text{allin2}$$

где в качестве базиса в  $su(n)$  выбраны антиэрмитовы матрицы

$$T_k = -\frac{i}{2} \tilde{H}_k \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad T_{ij} = -\frac{i}{2} S_{ij}, \quad i \neq j, \quad (3.2.127) \quad \text{allin3}$$

которые нормированы соотношениями

$$\text{Tr}(T_k T_m) = -\frac{1}{2} \delta_{mk}, \quad \text{Tr}(T_{ij} T_{km}) = -\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jm}, \quad \text{Tr}(T_k T_{ij}) = 0. \quad (3.2.128) \quad \text{trslN}$$

Если мы введем для всех образующих (3.2.127) алгебры  $su(n)$  общее обозначение

$$T_a^{(f)} = \{T_i, T_{kl}\}, \quad a = 1, \dots, n^2 - 1, \quad (3.2.129) \quad \text{genB}$$

то нормировка (3.2.128) запишется в виде

$$\text{Tr}(T_a^{(f)} \cdot T_b^{(f)}) = -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (3.2.130) \quad \text{trslN1}$$

Структурные соотношения для образующих  $T_i$  и  $T_{ij}$  алгебры Ли  $su(n)$  могут быть легко получены с помощью равенств (3.2.113). При вычислении структурных соотношений для недиагональных базисных элементов (3.2.124) полезно использовать то, что они построены из симметричных  $S_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$  и антисимметричных  $M_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$  матриц, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [M_{ij}, M_{kl}] &= \delta_{jk} M_{il} + \delta_{jl} M_{ki} + \delta_{ik} M_{lj} + \delta_{il} M_{jk}, \\ [M_{ij}, S_{kl}] &= \delta_{jk} S_{il} + \delta_{jl} S_{ki} - \delta_{ik} S_{lj} - \delta_{il} S_{jk}, \\ [S_{ij}, S_{kl}] &= \delta_{jk} M_{il} - \delta_{jl} M_{ki} - \delta_{ik} M_{lj} + \delta_{il} M_{jk}. \end{aligned} \quad (3.2.131) \quad \text{MSsu}$$

- *Задача 91. Воспользовавшись формулами (3.2.131), выписать все структурные соотношения для алгебры  $su(n)$  в базисе (3.2.127).*

Мы приведем здесь только все ненулевые коммутационные соотношения последней диагональной образующей  $T_{n-1} = -i(2n(n-1))^{-1/2}(I_n - n e_{nn})$  (они понадобятся нам в дальнейшем):

$$[T_{n-1}, T_{in}] = \left(\frac{n}{2(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}} T_{ni}, \quad [T_{n-1}, T_{ni}] = -\left(\frac{n}{2(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}} T_{in}, \quad i < n. \quad (3.2.132) \quad \text{Tnm1}$$

Вещественные числа  $X_{ij}, Y_{ij}$  ( $i < j$ ) и  $h_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) являются координатами вектора  $A \in su(n)$ , заданного в (3.2.126). Количество этих координат очевидно равно  $(n^2 - 1)$ , что соответствует размерности алгебры Ли  $su(n)$ .

Иногда удобно переписать элемент (3.2.126) алгебры Ли  $su(n)$  в другом базисе

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} h_i T_i - \frac{i}{2} \sum_{i < j} (Z_{ij} E_{ij} + Z_{ij}^* F_{ij}), \quad (3.2.133) \quad \text{allin1}$$

где  $Z_{ij}$  определены в (3.2.122), а в качестве базисных элементов выбраны матрицы (3.2.114), которые образуют базис и в  $sl(n, \mathbb{R})$ , и в  $sl(n, \mathbb{C})$ . Таким образом, две вещественные алгебры Ли  $sl(n, \mathbb{R})$  и  $su(n)$  определяют две разные вещественными формы одной и той же комплексной алгебры  $sl(n, \mathbb{C})$ . Отметим, что в качестве инволюции  $\sigma$  (см. пункт 2 раздела **3.2.7**), которая выделяет подалгебру  $su(n)$  в  $sl(n, \mathbb{C})$  выбирается операция  $\sigma(A) = -A^\dagger$ , а подалгебра  $sl(n, \mathbb{R})$  в  $sl(n, \mathbb{C})$  выделяется с помощью другой инволюции  $\sigma(A) = A^*$ .

**Утверждение 3.2.6** Алгебра Ли  $su(n)$  – проста.

**Доказательство.** Данное утверждение следует из того, что алгебра Ли  $su(n)$  – вещественная форма простой комплексной алгебры Ли  $sl(n, \mathbb{C})$  (см. доказательство Утверждения 3.2.5). ■

Рассмотрим простейший, после алгебры  $su(2)$  (которая уже была рассмотрена выше; см. (3.2.89) – (3.2.91)), пример специальной унитарной алгебры Ли  $su(3)$ . Приведем явный вид восьми матриц  $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$  и  $S_{ij}, S_{ji}$  ( $1 \leq i < j \leq 3$ ), заданных в (3.2.123), из которых строится базис (3.2.127) для алгебры Ли  $su(3)$ . Для матриц  $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$  мы имеем представления

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \lambda_3, \quad \tilde{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \equiv \lambda_8, \quad (3.2.134) \quad \text{gelm1}$$

а недиагональные образующие  $S_{ij}$  и  $S_{ji}$  ( $i < j$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} S_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \lambda_1, & S_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \lambda_4, & S_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \lambda_6, \\ S_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \lambda_2, & S_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \lambda_5, & S_{32} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \equiv \lambda_7. \end{aligned} \quad (3.2.135) \quad \text{gelm2}$$

Пользуясь этими представлениями, мы получаем коммутационные соотношения для матриц  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8)$ :

$$\begin{aligned} [\lambda_2, \lambda_4] &= i \lambda_6, \quad (\text{цикл } 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6), \quad [\lambda_1, \lambda_4] = i \lambda_7, \quad (\text{цикл } 1 \rightarrow 4 \rightarrow 7) \\ [\lambda_1, \lambda_6] &= i \lambda_5, \quad (\text{цикл } 1 \rightarrow 6 \rightarrow 5), \quad [\lambda_2, \lambda_5] = i \lambda_7, \quad (\text{цикл } 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7) \\ [\lambda_1, \lambda_2] &= 2 i \lambda_3, \quad (\text{цикл } 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3), \quad [\lambda_3, \lambda_8] = 0, \\ [\lambda_4, \lambda_5] &= 2 i \lambda_9, \quad (\text{цикл } 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9), \quad [\lambda_3, \lambda_4] = i \lambda_5, \quad [\lambda_5, \lambda_3] = i \lambda_4, \\ [\lambda_6, \lambda_7] &= 2 i \lambda_{10}, \quad (\text{цикл } 6 \rightarrow 7 \rightarrow 10), \quad [\lambda_3, \lambda_7] = i \lambda_6, \quad [\lambda_6, \lambda_3] = i \lambda_7, \end{aligned} \quad (3.2.136) \quad \text{commst}$$

где для удобства записи мы ввели дополнительные диагональные матрицы

$$\lambda_9 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_8 + \lambda_3), \quad \lambda_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3).$$

Восемь матриц  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$  называются матрицами Гелл-Манна. Их нормировка выбрана так, что  $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ . Удобно выбрать другую нормировку для образующих  $\tau_k = -i\lambda_k/2$ , которая соответствует выбору (3.2.127). Матрицы  $\tau_k$  удовлетворяют соотношениям<sup>15</sup>

$$\begin{cases} [\tau_i, \tau_j] = f_{ijk} \tau_k, \\ [\tau_i, \tau_j]_+ \equiv \tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i = -\frac{1}{3}\delta_{ij} - i d_{ijk} \tau_k, \end{cases} \quad (3.2.137) \quad \text{commgel}$$

<sup>15</sup>Операция  $[\cdot]_+$ , как и произведение матриц, выводятся из алгебры Ли, поэтому часть указанных соотношений нужно воспринимать просто как соотношения между матрицами.

откуда

$$\tau_i \tau_j = -\frac{1}{6} \delta_{ij} + \frac{1}{2} f_{ijk} \tau_k - \frac{i}{2} d_{ijk} \tau_k, \quad \text{Tr}(\tau_k \tau_m) = -\frac{1}{2} \delta_{km},$$

причем

$$\begin{aligned} f_{ijk} &= -2 \text{Tr}([\tau_i, \tau_j] \tau_k), \quad d_{ijk} = -2i \text{Tr}([\tau_i, \tau_j]_+ \tau_k) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_{\{i} \lambda_j \lambda_{k\}}), \\ -f_{ijk} + i d_{ijk} &= 4 \text{Tr}(\tau_i \tau_j \tau_k), \end{aligned} \quad (3.2.138) \quad \text{symfd}$$

где  $f_{ijk}$  — структурные константы алгебры Ли  $su(3)$ , и фигурные скобки обозначают симметризацию по индексам  $(i, j, k)$ . Константы  $f_{ijk}$  полностью антисимметричны по перестановкам индексов  $i, j, k$ , а константы  $d_{ijk}$  полностью симметричны по перестановкам индексов  $i, j, k$ , что следует из (3.2.138). Приведем явный вид ненулевых констант  $f_{ijk}$  и  $d_{ijk}$ :

$ijk$	$f_{ijk}$	$ijk$	$d_{ijk}$	$ijk$	$d_{ijk}$
123	1	118	$1/\sqrt{3}$	355	$1/2$
147	$1/2$	146	$1/2$	366	$-1/2$
156	$-1/2$	157	$1/2$	377	$-1/2$
246	$1/2$	228	$1/\sqrt{3}$	448	$-1/(2\sqrt{3})$
257	$1/2$	247	$-1/2$	558	$-1/(2\sqrt{3})$
345	$1/2$	256	$1/2$	668	$-1/(2\sqrt{3})$
367	$-1/2$	338	$1/\sqrt{3}$	778	$-1/(2\sqrt{3})$
458	$\sqrt{3}/2$	344	$1/2$	888	$-1/\sqrt{3}$
678	$\sqrt{3}/2$				

(3.2.139)    tafd

- **Задача 92.** Проверить таблицу (3.2.139). Указание: константы  $d_{ijk}$  можно найти, вычисляя произведения  $\lambda_k \lambda_m$  для  $k \leq m$ ; явные значения  $f_{ijk}$  следуют из соотношений (3.2.136).

**6. Алгебра Ли  $so(n, \mathbb{C})$**  — это векторное пространство всех кососимметричных комплексных  $n \times n$  матриц  $A$  таких, что  $A^T = -A$ . Мы снова интерпретируем  $so(n, \mathbb{C})$  как комплексную алгебру. В качестве базиса в  $so(n, \mathbb{C})$  выбираем кососимметричные матрицы

$$M_{ij} = e_{ij} - e_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (3.2.140) \quad \text{so1}$$

Используя (3.2.131), мы получаем структурные соотношения для образующих (3.2.140)

$$[M_{ij}, M_{kl}] = \delta_{jk} M_{il} + \delta_{jl} M_{ki} + \delta_{ik} M_{lj} + \delta_{il} M_{jk}. \quad (3.2.141) \quad \text{so2}$$

Вещественная форма  $so(n, \mathbb{R}) = so(n)$  алгебры Ли  $so(n, \mathbb{C})$  выделяется с помощью инволюции  $\sigma(A) = A^*$ . Поэтому в качестве образующих в  $so(n)$  можно выбрать те же матрицы (3.2.140), для которых выполняются те же структурные соотношения (3.2.141). Вложение  $so(n)$  в  $su(n)$  становится очевидным, если сравнить образующие (3.2.124) и (3.2.140).

Базис для вещественной алгебры Ли  $so(3)$  состоит из трех кососимметричных матриц

$$S_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk} = -\varepsilon_{ijk} e_{jk}, \quad (3.2.142) \quad \text{so2a}$$

для которых из (3.2.141) следуют структурные соотношения

$$[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k . \quad (3.2.143) \quad \text{so3}$$

Для наглядности приведем матрицы (3.2.142) явно

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.2.144) \quad \text{tro11}$$

Матрицы (3.2.144) генерируют повороты в  $\mathbb{R}^3$  вокруг соответствующих осей:  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  и  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ , что эквивалентно поворотам в плоскостях  $(x_2, x_3)$ ,  $(x_3, x_1)$  и  $(x_1, x_2)$ . Это следует из сравнения вида матриц  $S_1, S_2, S_3$  и генератора  $\mathbf{i}$  двумерного поворота (3.2.14).

- *Задача 93. Доказать, что повороты вокруг оси, направленной вдоль единичного вектора  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , генерируются матрицей  $(n_i S_i)$ . Пользуясь экспоненциальным отображением (3.2.8) показать, что любой элемент группы  $SO(3)$  представим в виде*

$$O(\psi, \vec{n}) = \exp(\psi (n_i S_i)) , \quad -\pi < \psi \leq \pi , \quad (3.2.145) \quad \text{ephis}$$

*то есть любой элемент  $SO(3)$  соответствует вращению в  $\mathbb{R}^3$  на угол  $\psi$  вокруг оси, направленной вдоль  $\vec{n}$  (смотри пример 9 из раздела 3.1.2). Разлагая экспоненту (3.2.145) в ряд, доказать, что*

$$\left[ \exp(\psi (\vec{n} \vec{S})) \right]_{jk} = (\delta_{jk} - n_j n_k) \cos \psi - (n_i \varepsilon_{ijk}) \sin \psi + n_j n_k .$$

**7.** Алгебра Ли  $so(p, q)$  – это векторное пространство всех вещественных  $n \times n$  (здесь  $n = (p + q)$ ) матриц  $A$ , удовлетворяющих соотношениям (3.2.42), которые можно переписать в виде

$$(\eta \cdot A)^T = -\eta \cdot A , \quad \eta \equiv I_{p,q} . \quad (3.2.146) \quad \text{liso7p}$$

Таким образом, матрица  $(\eta \cdot A)$  антисимметрична и ее можно разложить по базису (3.2.140)

$$\eta \cdot A = \omega_{ij} (e_{ij} - e_{ji}) \Rightarrow A = 2 \eta^{-1} \cdot \omega , \quad \omega = \omega_{ij} e_{ij} , \quad (3.2.147) \quad \text{sopq5}$$

где  $\omega_{ij} = -\omega_{ji} \in \mathbb{R}$ . Отсюда следует, что в качестве базиса в пространстве матриц  $A \in so(p, q)$  можно выбрать матрицы

$$L_{ij} = \eta^{-1} \cdot (e_{ij} - e_{ji}) , \quad 1 \leq i < j \leq n . \quad (3.2.148) \quad \text{so1b}$$

Заметим, что правила (3.2.112) для произведения матричных единиц обобщаются следующим образом

$$e_{ij} \cdot h \cdot e_{kl} = h_{jk} e_{il} , \quad (3.2.149) \quad \text{mmed2}$$

где  $h = ||h_{ij}||$  – произвольная  $n \times n$  матрица. Используя эти правила для образующих (3.2.148), получаем структурные соотношения для алгебры Ли  $so(p, q)$ :

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \eta_{jk} L_{il} + \eta_{jl} L_{ki} + \eta_{ik} L_{lj} + \eta_{il} L_{jk} , \quad (3.2.150) \quad \text{so2b}$$

где

$$||\eta_{ij}|| = I_{p,q} \equiv \eta, \quad (3.2.151) \quad \text{so2g}$$

и мы учли, что  $\eta^{-1} = \eta = \eta^T$ . В случае  $p = 1, q = 3$  мы имеем  $\eta = I_{1,3}$  и матрицы (3.2.148) образуют алгебру Ли  $so(1, 3)$  группы Лоренца в четырехмерном пространстве, а формулы (3.2.150) дают структурные соотношения для этой алгебры.

Действие группы  $SO(p, q)$  на пространство  $\mathbb{R}^{p,q}$  можно записать как однородные преобразования координат (2.3.13), которые в данном случае удобно представить с поднятыми и опущенными матричными индексами

$$x^i \rightarrow (x')^i = O^i_j x^j, \quad O \in SO(p, q), \quad (3.2.152) \quad \text{sopq1}$$

где суммирование идет по повторяющимся индексам, один из которых поднят, а второй опущен. Рассмотрим преобразование (3.2.152) для элемента  $O \in SO(p, q)$ , близкого к единичному,

$$x^i \rightarrow (x')^i = (\delta^i_j + A^i_j + \dots) x^j = (\delta^i_j + 2\eta^{ik} \omega_{kj} + \dots) x^j, \quad (3.2.153) \quad \text{sopq2}$$

где матрица  $A \in so(p, q)$  была определена в (3.2.147), матрица  $||\eta_{ij}||$  задана в (3.2.151),  $||\eta^{ij}||$  с поднятыми индексами обозначает матрицу, обратную к  $||\eta_{jk}||$ :  $\eta^{ij}\eta_{jk} = \delta^i_k$  (в рассматриваемом случае они совпадают), и согласно (3.2.146) матрица  $||\omega_{jk}||$  – антисимметрична. Представим преобразования (3.2.153) в виде

$$x^i \rightarrow (x')^i = (1 + \omega_{kr} \eta^{ri} \hat{L}_{ij} \eta^{jk} + \dots) x^i, \quad (3.2.154) \quad \text{sopq3}$$

где операторы  $\hat{L}_{ij}$  с учетом антисимметрии  $\omega_{jk} = -\omega_{kj}$  можно записать следующим образом

$$\hat{L}_{ij} = (\eta_{im} x^m \partial_j - \eta_{jm} x^m \partial_i) = x_i \partial_j - x_j \partial_i, \quad (3.2.155) \quad \text{sopq4}$$

В последнем соотношении мы воспользовались стандартным обозначением  $\partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial x^m}$  и соглашением о подъеме и опускании индексов:  $\eta_{im} x^m = x_i$ ,  $\eta^{im} x_m = x^i$ . Так как  $\hat{L}_{ij}$  удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (3.2.150), что и элементы  $L_{ij}$ , то имеется взаимно однозначное соответствие между операторами  $\hat{L}_{ij}$  (3.2.155) и образующими  $L_{ij}$  (3.2.148) алгебры Ли  $so(p, q)$ . Таким образом, алгебра Ли, порождаемая операторами  $\hat{L}_{ij}$ , изоморфна  $so(p, q)$ .

- **Задача 94.** Проверить явно, что операторы  $\hat{L}_{ij}$  (3.2.155) удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.2.150).

Мы воспользуемся представлением (3.2.155) для образующих алгебры Ли  $so(p, q)$  в следующем подразделе **3.2.11**.

**8.** Алгебра Ли  $sp(2r, \mathbb{K})$  – векторное пространство  $(2r \times 2r)$  матриц  $A = ||A_{ij}||$ , с элементами  $A_{ij} \in \mathbb{K}$ . Матрицы  $A$  должны удовлетворять соотношениям (3.2.25), которые можно переписать в виде

$$(J \cdot A)^T = J \cdot A, \quad (3.2.156) \quad \text{spli04}$$

где  $J$  — невырожденная антисимметричная вещественная матрица, заданная в (2.2.57). Таким образом, в качестве образующих алгебры Ли  $sp(2r, \mathbb{K})$  можно выбрать матрицы (сравните с (3.2.148))

$$M_{ij} = J^{-1} \cdot (e_{ij} + e_{ji}), \quad 1 \leq i \leq j \leq 2r. \quad (3.2.157) \quad \text{spli03}$$

Структурные соотношения для образующих (3.2.157) алгебры Ли  $sp(2r, \mathbb{K})$  легко выводятся, если воспользоваться свойством  $J^T = -J$  и соотношениями (3.2.149). В результате мы получаем (сравните с (3.2.150))

$$[M_{ij}, M_{k\ell}] = J_{jk}^{-1} M_{i\ell} + J_{jl}^{-1} M_{ki} + J_{ik}^{-1} M_{\ell j} + J_{il}^{-1} M_{jk}. \quad (3.2.158) \quad \text{spli02}$$

**9.** Вещественная алгебра Ли  $sp(p, q)$  — векторное пространство  $(2r \times 2r)$  комплексных матриц  $A$ , которые удовлетворяют условиям (3.2.32). Второе соотношение в (3.2.32) с учетом первого переписывается в виде  $A = \sigma(A)$ , где

$$\sigma(A) := (\mathbf{I} \cdot J)^{-1} \cdot A^* \cdot (\mathbf{I} \cdot J), \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.159) \quad \text{sp-pq4}$$

и  $\sigma$  задает инволютивный автоморфизм в  $sp(2r, \mathbb{C})$ , который собственно и выделяет вещественную форму  $sp(p, q)$  в алгебре Ли  $sp(2r, \mathbb{C})$ .

- **Задача 95.** Пользуясь базисом  $\{M_{kj}, i M_{kj}\}$  для овеществления  $sp(2r, \mathbb{C})$ , где  $M_{kj}$  заданы в (3.2.157), построить базис вещественной алгебры  $sp(p, q)$  и выписать структурные соотношения для  $sp(p, q)$  в этом базисе.

### 3.2.10 Вещественные формы алгебр Ли $sl(n, \mathbb{C})$ , $so(n, \mathbb{C})$ и $sp(2r, \mathbb{C})$ .

BSF

В данном разделе мы перечислим все вещественные формы комплексных алгебр Ли  $sl(n, \mathbb{C})$ ,  $sp(2r, \mathbb{C})$  и  $so(n, \mathbb{C})$ . Некоторые из этих вещественных форм уже обсуждались в предыдущих подразделах **3.2.3** и **3.2.9**.

Вещественные формы алгебры  $sl(n, \mathbb{C})$ ,  $(n > 1)$ .

1. Алгебра Ли  $sl(n, \mathbb{R})$  (см. пункт **3.** раздела **3.2.9**).
2. Алгебра Ли  $su(n)$  (см. пункт **5.** раздела **3.2.3** и пункт **5.** раздела **3.2.9**).
3. Алгебры Ли  $su(p, q)$ ,  $(p + q = n, 0 < p \leq q)$  (см. пункт **13.** раздела **3.2.3**).
4. Алгебра Ли  $su^*(2r)$  (при четном  $n = 2r$ ) — множество всех комплексных  $(n \times n)$  матриц  $A$ , которые удовлетворяют условию  $\text{Tr}(A) = 0$  и представимы в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} D & B \\ -B^* & D^* \end{pmatrix}, \quad (3.2.160) \quad \text{su}^*$$

где  $B$  и  $D$  — комплексные  $r \times r$  матрицы, причем  $\text{Tr}(D) + \text{Tr}(D^*) = 0$ . На множестве всех комплексных четномерных  $2r \times 2r$  матриц  $M$  можно определить инволютивный автоморфизм  $\sigma$  (ср. с (3.2.159)):

$$\sigma(M) = J^{-1} \cdot M^* \cdot J, \quad (3.2.161) \quad \text{aut}^*$$

где  $J$  задана в (3.2.159). Легко проверить, что вид матрицы  $A$  (3.2.160) определяется условием  $\sigma(A) = A$ .



- **Задача 96.** Проверить, что множество бесследовых матриц (3.2.160) образует матричную алгебру Ли. Доказать, что  $\dim(su^*(2r)) = (2r)^2 - 1$ .

Вещественные формы алгебры  $so(n, \mathbb{C})$ ,  $(n > 1)$ .

1. Алгебра Ли  $so(n) = so(n, \mathbb{R})$  (см. пункт 6. раздела 3.2.3 и пункт 6. раздела 3.2.9).
2. Алгебры Ли  $so(p, q)$ ,  $(p + q = n, 0 < p \leq q)$  (см. пункт 7. раздела 3.2.9).
3. Алгебра Ли  $so^*(2r)$  (при четном  $n = 2r$ ) – множество всех комплексных антисимметричных  $(n \times n)$  матриц  $A$ , которые удовлетворяют условию  $\sigma(A) = A$ , где  $\sigma$  – автоморфизм (3.2.161). Таким образом, матрицы  $A \in so^*(2r)$  представимы в блочном виде (3.2.160), где  $B$  и  $D$  – комплексные  $r \times r$  матрицы, причем  $D$  – антисимметрична:  $D^T = -D$ , а  $B$  – эрмитова:  $B^\dagger = B$ .

- **Задача 97.** Проверить, что множество матриц  $so^*(2r)$  образует матричную алгебру Ли. Доказать, что  $\dim(so^*(2r)) = r(2r - 1)$ .

Вещественные формы алгебры  $sp(2r, \mathbb{C})$ ,  $(r > 1)$ .

1. Алгебра Ли  $sp(2r, \mathbb{R})$  (см. пункт 7. раздела 3.2.3 и пункт 8. раздела 3.2.9).
2. Алгебры Ли  $sp(p, q)$ ,  $(p + q = r, 0 < p \leq q)$  (см. пункт 9. раздела 3.2.3 и пункт 9. раздела 3.2.9).
3. Алгебра Ли  $usp(2r) = sp(0, r) = sp(r)$  (см. пункт 10. раздела 3.2.3).

ESF

### 3.2.11 Алгебра Ли конформной группы $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ .

Группа  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  конформных преобразований в пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  обсуждалась в подразделе 2.3.6 и в примере 12 раздела 3.1.2. Рассмотрим инфинитезимальную (близкую к единичному элементу) форму конформных преобразований (3.1.32), (3.1.33), (3.1.34), (3.1.36) из связной компоненты единицы группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , для  $p + q > 2$ . В результате несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned}
 1.) \quad (x')^i &= x^i + a^i + \dots = (1 + a^k \partial_k + \dots) x^i, \\
 2.) \quad (x')^i &= x^i + 2\eta^{ik} \omega_{kj} x^j + \dots = (1 + 2\omega^k_j x^j \partial_k + \dots) x^i, \\
 3.) \quad (x')^i &= x^i + \lambda x^i + \dots = (1 + \lambda x^k \partial_k + \dots) x^i, \\
 5.) \quad (x')^i &= x^i + 2(\vec{x}, \vec{b}) x^i - (\vec{x})^2 b^i + \dots = \\
 &= (1 + 2(\vec{x}, \vec{b})(x^k \partial_k) - (\vec{x})^2 (b^k \partial_k) + \dots) x^i,
 \end{aligned} \tag{3.2.162} \quad \text{conf01}$$

где параметры  $a^i, \omega^i_j, \lambda, b^i$  – малы, а точками обозначены члены более высокого порядка по этим параметрам. Напомним, что 2.) – это действие (3.2.153) группы  $SO(p, q)$

на  $\mathbb{R}^{p,q}$ . Рассматривая композицию всех преобразований (3.2.162), получаем общий вид конформного преобразования, близкого к единичному,

$$(x')^i = x^i + \epsilon^i(x) + \dots = (1 + \epsilon^k(x) \partial_k + \dots) x^i, \quad (3.2.163) \quad \text{conf04}$$

где

$$\epsilon^i(x) = a^i + 2\eta^{ik} \omega_{kj} x^j + \lambda x^i + 2(\vec{x}, \vec{b}) x^i - (\vec{x})^2 b^i, \quad (3.2.164) \quad \text{conf05}$$

$$\epsilon^k(x) \partial_k = a^i P_i + \omega_{kr} \eta^{ri} \eta^{jk} L_{ij} + \lambda D + b^m K_m, \quad (3.2.165) \quad \text{conf06}$$

и в качестве базисных элементов в алгебре Ли группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  мы выбрали операторы

$$\begin{aligned} P_m &= \partial_m, \quad L_{mk} = x_m P_k - x_k P_m, \\ D &= x^m P_m, \quad K_m = 2x_m D - (x^m x_m) P_m. \end{aligned} \quad (3.2.166) \quad \text{conf02}$$

Определяющие (структурные) соотношения для этих базисных элементов имеют вид

$$\begin{aligned} [D, P_m] &= -P_m, \quad [D, K_m] = K_m, \quad [D, L_{jm}] = 0, \\ [K_j, K_m] &= 0, \quad [P_j, P_m] = 0, \quad [P_j, K_m] = 2(\eta_{jm} D + L_{mj}), \\ [P_j, L_{km}] &= \eta_{kj} P_m - \eta_{mj} P_k, \quad [K_j, L_{km}] = \eta_{kj} K_m - \eta_{mj} K_k. \end{aligned} \quad (3.2.167) \quad \text{conf03}$$

К этим соотношениям необходимо добавить коммутационные соотношения для образующих  $L_{kr}$  алгебры  $so(p, q)$ , которые приведены в (3.2.150).

- *Задача 98. Проверить, что операторы (3.2.166) удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.2.167).*

Таким образом, элементы (3.2.166) образуют замкнутую алгебру Ли. Это говорит о том, что любая композиция конформных преобразований (3.1.32), (3.1.33), (3.1.34), (3.1.36) из связной компоненты единицы группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  будет приводить к преобразованиям такого же типа.

Покажем теперь, что других конформных преобразований в  $\mathbb{R}^{p,q}$ , кроме указанных в (3.1.32), (3.1.33), (3.1.34), (3.1.36) не существует (теорема Лиувилля). Для этого вначале сформулируем понятие конформных преобразований и конформной группы на любом многообразии  $M$  с метрикой  $g_{ij}$  (в плоском пространстве  $\mathbb{R}^{p,q}$  метрика  $g_{ij}$  обозначалась как  $\eta_{ij}$ ).

Пусть на  $n$ -мерном многообразии  $M$  задана невырожденная метрика  $g_{ij}$  (см. Замечание 2 в подразделе 3.1.5). При преобразовании локальных координат

$$x^i \rightarrow \bar{x}^i = F^i(\vec{x}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2.168) \quad \text{conf1}$$

в окрестности  $U$  точки  $P \in M$  метрика  $g_{ij}$  в точке  $P$  преобразуется согласно правилам (3.1.65). Преобразования локальных координат (3.2.168) называются конформными в точке  $P$ , если метрика  $g_{ij}$  в точке  $P$  при этих преобразованиях меняется следующим образом (сравните с (2.3.32))

$$\bar{g}_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{\Lambda(\vec{x})} g_{ij}(\vec{x}). \quad (3.2.169) \quad \text{conf2}$$

Множество конформных преобразований (3.2.168), (3.2.169) образует группу  $\text{Conf}(M)$ , которая называется конформной группой многообразия  $M$  с метрикой  $g_{ij}$ . Специальный случай группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ , когда  $M$  – это псевдоевклидово пространство  $\mathbb{R}^{p,q}$  с метрикой  $g = \eta = I_{p,q}$ , разбирался ранее в подразделе **2.3.6** (см. также раздел **3.1.3**).

Рассмотрим преобразования (3.2.168), (3.2.169) близкие к тождественному

$$x^i \rightarrow \bar{x}^i = F^i(\vec{x}) = x^i + \epsilon^i(\vec{x}) + \dots = (1 + \epsilon^k(\vec{x})\partial_k + \dots) x^i, \quad (3.2.170) \quad \text{conf3}$$

$$\Lambda(\vec{x}) = 1 + \epsilon(\vec{x}) + \dots, \quad (3.2.171) \quad \text{conf3a}$$

где функции  $\epsilon^i$  и  $\epsilon$  малы, а точками обозначены члены более высокого порядка по  $\epsilon^i$  и  $\epsilon$ . Далее мы везде вместо  $\vec{x}$  будем писать  $x$ , а вместо  $\bar{x}$  писать  $\bar{x}$ . Для преобразования метрики (3.1.65) мы получаем ( $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ )

$$\begin{aligned} g_{km}(x) &= \bar{g}_{ij}(\bar{x}) \partial_k \bar{x}^i \partial_m \bar{x}^j = \\ &= (\bar{g}_{ij}(x) + \epsilon^p \partial_p \bar{g}_{ij}(x) + \dots)(\delta_k^i + \partial_k \epsilon^i(x) + \dots)(\delta_m^j + \partial_m \epsilon^j(x) + \dots) = \\ &= \bar{g}_{km}(x) + \epsilon^p(x) \partial_p \bar{g}_{km}(x) + \bar{g}_{im}(x) \partial_k \epsilon^i(x) + \bar{g}_{kj}(x) \partial_m \epsilon^j(x) + \dots = \\ &= \bar{g}_{km}(x) - 2\epsilon_p(x) \Gamma_{km}^p + \partial_k \epsilon_m(x) + \partial_m \epsilon_k(x) + \dots = \\ &= \bar{g}_{km}(x) + \nabla_k \epsilon_m(x) + \nabla_m \epsilon_k(x) + \dots, \end{aligned} \quad (3.2.172) \quad \text{conf4}$$

где мы воспользовались тем, что в членах первого порядка по  $\epsilon^i$  можно заменить  $\bar{g}_{ij} \rightarrow g_{ij}$ , положили  $\epsilon_m = g_{mp} \epsilon^p$  и ввели стандартные обозначения для связности

$$\Gamma_{km}^p(x) = \frac{1}{2} g^{ps}(x) (\partial_k g_{sm}(x) + \partial_m g_{ks}(x) - \partial_s g_{km}(x)), \quad g^{ps}(x) g_{sk}(x) = \delta_k^p,$$

и ковариантной производной  $\nabla_k \epsilon_m \equiv (\partial_k \epsilon_m - \Gamma_{km}^p \epsilon_p)$  (связности и ковариантные производные на гладких многообразиях подробно обсуждаются ниже в подразделе **6.4.1**). Сравнивая левую и правую части (3.2.172) и пользуясь (3.2.169) и (3.2.171), получаем

$$\bar{g}_{km}(x) - g_{km}(x) = -\nabla_k \epsilon_m(x) - \nabla_m \epsilon_k(x) + \dots = -\epsilon(x) g_{km}(x) + \dots,$$

или

$$\nabla_k \epsilon_m(x) + \nabla_m \epsilon_k(x) = \epsilon(x) g_{km}(x). \quad (3.2.173) \quad \text{conf5}$$

Сворачивая соотношение (3.2.173) с  $g^{km}$ , можно выразить параметр  $\epsilon$  через параметры  $\epsilon_k$

$$\epsilon(x) = \frac{2}{n} \nabla_k \epsilon^k(x).$$

С учетом этого выражения уравнение (3.2.173) переписывается в виде

$$\nabla_k \epsilon_m(x) + \nabla_m \epsilon_k(x) = \frac{2}{n} g_{km}(x) \nabla_p \epsilon^p(x). \quad (3.2.174) \quad \text{conf6}$$

Это уравнение определяет параметры  $\epsilon^i(x)$  преобразований (3.2.170), при которых последние становятся конформными. Вектор с компонентами  $\epsilon^i(x)$ , являющийся решением уравнения (3.2.174), называется конформным вектором Киллинга<sup>16</sup>.

<sup>16</sup>Вектор с компонентами  $\epsilon^i(x)$ , являющийся решением уравнения (3.2.173) с  $\epsilon(x) = 0$  в правой части, называется вектором Киллинга. Вектор Киллинга определяет диффеоморфизм (3.2.170)  $M \rightarrow M$ , при котором метрика на  $M$  не меняется, то есть выполняется (3.2.169) с  $\Lambda = 1$ . Такой диффеоморфизм называется изометрией.

Уравнение (3.2.174) можно написать для любой точки  $P \in M$ . Поэтому (3.2.174) задает поле конформных векторов Киллинга на всем многообразии  $M$ . Не каждое многообразие  $M$  допускает существование такого поля в силу глобальных ограничений на кривизну и топологию  $M$ . Далее мы рассмотрим в качестве  $M$  плоское пространство  $\mathbb{R}^{p,q}$ , где  $p + q = n$ , с псевдоевклидовой постоянной метрикой  $\|g_{ij}\| = I_{p,q}$ .

**Утверждение 3.2.7** *Общее решение уравнения (3.2.174) для случая пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$  с метрикой  $\|g_{ij}\| = \|\eta_{ij}\| = I_{p,q}$ , где  $p + q = n > 2$ , дается конформным вектором Киллинга (3.2.164), то есть все конформные преобразования в  $\mathbb{R}^{p,q}$  являются композицией преобразований (3.2.162).*

BSF

**Доказательство.** Для константной метрики  $\|g_{ij}\| = \|\eta_{ij}\| = I_{p,q}$  имеем  $\Gamma_{km}^p = 0$  и соотношения (3.2.174) переписываются в виде

$$\partial_k \epsilon_m(x) + \partial_m \epsilon_k(x) = \frac{2}{n} \eta_{km} \partial_p \epsilon^p(x). \quad (3.2.175) \quad \text{conf7}$$

Поддействуем на обе части этого соотношения сначала производной  $\partial^k = \eta^{ks} \partial_s$ , а затем на получившееся соотношение еще раз производной  $\partial^m$ . В результате получаем

$$\partial^2 \epsilon_m = \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \partial_m \partial_k \epsilon^k \Rightarrow \partial^2 \partial^m \epsilon_m = 0 \quad (n \neq 2). \quad (3.2.176) \quad \text{conf8}$$

Далее, если мы поддействуем на обе части (3.2.175) оператором  $\partial^2 = \partial^k \partial_k$ , тогда (с учетом второго соотношения из (3.2.176)) возникает уравнение

$$\partial_k \partial^2 \epsilon_m + \partial_m \partial^2 \epsilon_k = 0. \quad (3.2.177) \quad \text{conf9}$$

Подстановка первого соотношения из (3.2.176) в (3.2.177) и учет основного соотношения (3.2.175) дает

$$(n-2) \partial_k \partial_m (\partial_l \epsilon^l) = 0 \Rightarrow (n-2) \partial_k \partial_m (\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i) = 0.$$

Делая перестановки индексов  $m \leftrightarrow j$  и  $m \leftrightarrow i$  в последнем равенстве и сравнивая результаты, окончательно выводим

$$(n-2) \partial_k \partial_j \partial_i \epsilon_m = 0, \quad \forall i, j, k, m. \quad (3.2.178) \quad \text{conf10}$$

Таким образом, из (3.2.178) следует, что  $\epsilon_m(x)$  – полином по  $\{x^k\}$  не выше второй степени и для  $n > 2$  наиболее общее решение для  $\epsilon_m(x)$  можно записать в виде

$$\epsilon_m(x) = a_m + T_{mk} x^k + b_{m,pk} x^p x^k, \quad (3.2.179) \quad \text{conf11}$$

где  $a_m, T_{mk}, b_{m,pk} = b_{m,kp}$  – некоторые константы. На эти константы возникают дополнительные ограничения, если решение (3.2.179) подставить в основное уравнение (3.2.175), определяющее конформные вектора Киллинга для  $\mathbb{R}^{p,q}$ . В результате получаем, что коэффициенты  $a_m$  произвольны, а коэффициенты  $T_{mk}$  и  $b_{m,pk}$  ограничены условиями

$$\begin{aligned} T_{mk} + T_{km} &= \frac{2}{n} \eta_{km} (\eta^{ij} T_{ij}), \\ b_{m,kp} + b_{k,mp} &= \frac{2}{n} \eta_{km} (\eta^{ij} b_{i,jp}). \end{aligned} \quad (3.2.180) \quad \text{conf14}$$

Учитывая симметрию  $b_{m,pk} = b_{m,kp}$ , эти условия могут быть разрешены следующим образом

$$\begin{aligned} T_{mk} &= 2\omega_{mk} + \lambda\eta_{mk} , \\ b_{k,mp} &= b_m\eta_{kp} + b_p\eta_{km} - b_k\eta_{mp} , \end{aligned} \quad (3.2.181) \quad \text{conf15}$$

где  $\omega_{mk} = -\omega_{km}$ , коэффициент 2 введен для удобства и параметры  $\omega_{mk}$  ( $m < k$ ),  $\lambda$  и  $b_m$  – произвольны. Подставляя (3.2.181) в (3.2.179), мы получаем общее решение для конформного вектора Киллинга в виде

$$\epsilon^i(x) = x^i + (a^i + 2\eta^{im}\omega_{mk}x^k + \lambda x^i + 2(b_mx^m)x^i - b^i(x_mx^m)) , \quad (3.2.182) \quad \text{conf3b}$$

который полностью совпадает с вектором (3.2.162), полученным из преобразований группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ . Таким образом, композиция преобразований (3.2.162) – это наиболее общий вид конформных преобразований в  $\mathbb{R}^{p,q}$ , близких к единичному, и преобразования (3.1.32), (3.1.33), (3.1.34), (3.1.36) исчерпывают все возможные преобразования из  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  из связной компоненты единичного элемента. ■ ESF

Утверждение **3.2.7** эквивалентно утверждению теоремы Лиувилля, которое было сформулировано в подразделе **2.3.6**. В следующем подразделе мы покажем, что алгебру Ли конформной группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  с образующими (3.2.166) можно отождествить с алгеброй Ли  $so(p+1, q+1)$ .

Из доказательства Утверждения **3.2.7** следует, что случай  $n = 2$  – особый и общее решение уравнения (3.2.175) для двумерных пространств  $\mathbb{R}^{p,q}$ , где  $p+q = 2$ , необходимо искать другим способом. Для двумерного случая уравнения (3.2.175) на конформные вектора Киллинга записываются в виде

$$\partial_1 \epsilon_2 + \partial_2 \epsilon_1 = 0 , \quad \partial_1 \epsilon_1 = \pm \partial_2 \epsilon_2 , \quad (3.2.183) \quad \text{conf12}$$

где во втором уравнении знак ”+” соответствует случаю  $\mathbb{R}^2$ , а знак ”–” соответствует случаю  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Уравнения (3.2.183) еще более упрощаются

$$\partial^+ \epsilon_-(x) = 0 , \quad \partial^- \epsilon_+(x) = 0 , \quad (3.2.184) \quad \text{conf13}$$

если сделать замену

$$x_{\pm} = x_1 \pm x_2 = x^1 \mp x^2 , \quad \epsilon_{\pm} = \epsilon_1 \pm \epsilon_2 , \quad \text{для случая } \mathbb{R}^{1,1} ;$$

$$x_{\pm} = x_1 \pm ix_2 , \quad \epsilon_{\pm} = \epsilon_1 \pm i\epsilon_2 , \quad \text{для случая } \mathbb{R}^2 ;$$

и воспользоваться обозначением  $\partial^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x_{\pm}}$ . Уравнения (3.2.184) означают, что функция  $\epsilon_+(x)$  зависит только от  $x_+$ , а функция  $\epsilon_-(x)$  только от  $x_-$ . Данное решение уравнений (3.2.183) соответствует глобальным конформным преобразованиям

$$x_+ \rightarrow F_+(x_+) , \quad x_- \rightarrow F_-(x_-) ,$$

что полностью согласуется с двумерными конформными преобразованиями (2.3.39), полученными ранее в подразделе **2.3.6**.

**3.2.12 Изоморфизмы и автоморфизмы алгебр Ли: примеры.**

В подразделе 3.2.5 мы дали определение гомоморфизма, изоморфизма и автоморфизма алгебр Ли, см. Определение 3.2.4, а также привели простые примеры. Здесь мы более подробно рассмотрим изоморфизмы и автоморфизмы алгебр Ли и обсудим ряд менее тривиальных примеров таких отображений. Но прежде чем перейти к примерам, сделаем несколько общих утверждений и замечаний, касающихся гомоморфных и изоморфных отображений алгебр Ли.

**Определение 3.2.8** Ядром  $\text{Ker}(\rho)$  линейного гомоморфизма  $\rho$  из алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в алгебру Ли  $\mathcal{A}'$  называется векторное подпространство  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , состоящее из всех элементов  $A$  таких, что

$$\rho(X) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

Образом  $\text{Im}(\rho)$  гомоморфизма  $\rho$  называется векторное подпространство  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$ , на которое отображается вся алгебра Ли  $\mathcal{A}$ .

- **Задача 99.** Пусть  $\rho$  — линейный гомоморфизм из алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в алгебру Ли  $\mathcal{A}'$ . Доказать, что  $\text{Im}(\rho)$  — подалгебра Ли в  $\mathcal{A}'$ , а  $\text{Ker}(\rho)$  — инвариантная подалгебра Ли в  $\mathcal{A}$ . Доказать, что если  $\text{Ker}(\rho) = \emptyset$ , то отображение  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \text{Im}(\rho)$  — изоморфизм алгебр Ли.

В качестве примера рассмотрим множество  $\text{ad}(\mathcal{A})$  всех линейных операторов  $\text{ad}(Y)$ ,  $\forall Y \in \mathcal{A}$ , действующих в  $\mathcal{A}$  согласно формуле (3.2.104). Множество  $\text{ad}(\mathcal{A})$  образует алгебру Ли, так как пользуясь (3.2.104) и тождеством Якоби мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha \text{ad}(A) + \beta \text{ad}(B) &= \text{ad}(\alpha A + \beta B) \in \text{ad}(\mathcal{A}), \\ [\text{ad}(A), \text{ad}(B)] &= \text{ad}([A, B]) \in \text{ad}(\mathcal{A}), \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned} \tag{3.2.185} \quad \text{LiAd}$$

Таким образом, мы имеем линейный гомоморфизм  $\text{ad}$  из алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в алгебру Ли  $\text{ad}(\mathcal{A})$  линейных операторов, действующих в  $\mathcal{A}$ . Алгебра  $\text{ad}(\mathcal{A})$  называется присоединенной алгеброй Ли для алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

**Утверждение 3.2.8** Для полупростой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  отображение  $\text{ad}$  из алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в присоединенную алгебру Ли  $\text{ad}(\mathcal{A})$  является изоморфизмом.

**Доказательство.** Убедимся, что для полупростой алгебры  $\mathcal{A}$  соответствие  $\text{ad}: A \rightarrow \text{ad}(A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ , взаимнооднозначно; это и будет означать, что алгебры  $\text{ad}\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}$  изоморфны. Образ  $\text{ad}$  в алгебре линейных операторов присоединенного действия по определению совпадает с алгеброй  $\text{ad}\mathcal{A}$ . С другой стороны,  $\text{Ker}(\text{ad}) = 0$ , поскольку если  $\text{ad}A = 0$ , то  $A$  принадлежит центру алгебры, которого нет, так как  $\mathcal{A}$  полупроста. Вместе с результатом задачи 99 это и доказывает взаимнооднозначность  $\text{ad}$ . ■

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров изоморфизмов и автоморфизмов алгебр Ли.

1. Установим изоморфизм между алгебрами Ли  $sl(2, \mathbb{R})$  и  $su(1, 1)$ . Заменяем базис (3.2.110) в алгебре  $sl(2, \mathbb{R})$  и выберем образующие

$$e_1 = e_+ + e_- = \sigma_1, \quad e_2 = e_+ - e_- = i\sigma_2, \quad e_3 = 2h = \sigma_3.$$

Тогда структурные соотношения (3.2.91) для  $sl(2, \mathbb{R})$  запишутся в виде

$$[e_3, e_1] = 2e_2, \quad [e_2, e_3] = -2e_1, \quad [e_1, e_2] = -2e_3. \quad (3.2.186) \quad \text{eph2R}$$

Алгебра Ли  $su(1, 1)$  определяется как множество бесследовых  $2 \times 2$  комплексных матриц  $A$ , удовлетворяющих, в соответствии с (3.2.45), условию  $A^\dagger \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot A = 0$ . Для любой такой матрицы имеем представление

$$A = \begin{pmatrix} ix_2 & x_3 - ix_1 \\ x_3 + ix_1 & -ix_2 \end{pmatrix} = x_1 \tilde{e}_1 + x_2 \tilde{e}_2 + x_3 \tilde{e}_3,$$

где  $x_i \in \mathbb{R}$ , а  $\tilde{e}_i$  — базисные матрицы в  $su(1, 1)$ , которые удовлетворяют структурным соотношениям, идентичным (3.2.186). Таким образом, взаимнооднозначное соответствие  $e_i \leftrightarrow \tilde{e}_i$  устанавливает изоморфизм  $sl(2, \mathbb{R}) = su(1, 1)$ .

2. Сравнивая структурные соотношения (3.2.143) для  $so(3)$  и структурные соотношения (3.2.121) для  $su(2)$ , можно установить изоморфизм между алгебрами  $su(2)$  и  $so(3)$  задав гомоморфное и взаимно-однозначное линейное отображение  $\rho: \tau_k \leftrightarrow S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) для их образующих. Такая тождественность алгебр Ли  $su(2)$  и  $so(3)$  означает, что касательные пространства, а значит и локальные свойства многообразий групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$  совпадают. Отметим, однако, что группы  $SU(2)$  и  $SO(3)$  не могут быть изоморфными, так как многообразие группы  $SU(2)$  (сфера  $S^3$ ) односвязно, а многообразие группы  $SO(3)$  (многообразие  $\mathbb{RP}^3$ ) двухсвязно. Более подробно этот факт будет разбираться в следующем подразделе **3.2.13**.

- **Задача 100.** Установить изоморфизм между алгеброй Ли  $usp(2)$  и алгебрами Ли  $su(2) = so(3)$ . Установить изоморфизм  $sl(2, \mathbb{R}) = so(2, 1)$ .

3. Легко проверить, что отображения  $sl(2, \mathbb{C}) \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$ :

$$e_+ \rightarrow e_-, \quad e_- \rightarrow e_+, \quad h \rightarrow -h, \quad (3.2.187) \quad \text{autsl2}$$

$$e_+ \rightarrow -e_-, \quad e_- \rightarrow -e_+, \quad h \rightarrow -h, \quad (3.2.188) \quad \text{autsl22}$$

являются автоморфизмами алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  (3.2.91).

- **Задача 101.** Доказать, что любое из трех отображений:

$$(\tau_1 \rightarrow \tau_3, \quad \tau_3 \rightarrow \tau_1, \quad \tau_2 \rightarrow -\tau_2), \quad \text{цикл } (1, 2, 3), \quad (3.2.189) \quad \text{autsu2}$$

задает автоморфизм алгебры  $su(2)$  (3.2.121).

- **Задача 102.** Доказать, что алгебра Ли, заданная структурными соотношениями (3.2.150) с метрикой  $\|\eta_{ij}\| = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{p+q})$ , где  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{p+q}) = \sigma(\underbrace{+1, \dots, +1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q)$  и  $\sigma$  — любая перестановка  $(p+q)$  чисел, изоморфна алгебре  $so(p, q)$ .

4. Алгебра Ли  $so(p, q)$ , заданная структурными соотношениями (3.2.150), изоморфна алгебре Ли  $so(q, p)$ . С учетом утверждения, сформулированного в Задаче 102, этот изоморфизм устанавливается отображением  $L_{ij} \rightarrow -L_{ij}$ .

5. Алгебра Ли  $usp(2r)$ , которая была определена как векторное пространство матриц (3.2.41) с условиями (3.2.40), изоморфна алгебре Ли  $su(r, \mathbb{H})$  антиэрмитовых матриц  $r \times r$ , элементами которых являются кватернионы. Кватернионами мы будем называть  $(2 \times 2)$  матрицы  $a$  вида **BSF**

$$a = a_0 I_2 + i a_j \sigma_j \in \mathbb{H}, \quad (3.2.190) \quad \text{hqq}$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_k$  — как всегда, матрицы Паули, и мы ввели обозначение  $\mathbb{H}$  для поля кватернионов. Для эрмитово сопряженного кватерниона получаем:  $\bar{a} = a_0 I_2 - i a_j \sigma_j$ , а произведение  $\bar{a}$  и  $a$  пропорционально единице:  $\bar{a} a = (a_0^2 + a_k^2) I_2$ .

Пусть  $P$  — линейный оператор, который переставляет факторы в прямом произведении двух матриц  $C \in \text{Mat}_2$  и  $D \in \text{Mat}_r$ :  $P(D \otimes C) = C \otimes D$ . Оператор  $P$  — обратим. С помощью оператора  $P$  матрицы  $A \in usp(2r)$ , заданные в (3.2.41), переписываются как кватернионные  $r \times r$  матрицы

$$B = P(A) = X_0 \otimes I_2 + i X_k \otimes \sigma_k, \quad (3.2.191) \quad \text{spli9gg}$$

с элементами

$$B_{\alpha\beta} = (X_0)_{\alpha\beta} I_2 + (X_k)_{\alpha\beta} i \sigma_k \in \mathbb{H}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, r. \quad (3.2.192) \quad \text{quat01}$$

Определим эрмитово сопряжение для матрицы с кватернионными элементами следующим образом:  $(B^\dagger)_{\alpha\beta} = \overline{B_{\beta\alpha}}$ . Тогда соотношения (3.2.40), определяющие  $usp(2r)$ , эквивалентны условию антиэрмитовости  $B^\dagger = -B$  для кватернионных матриц (3.2.192). Отсюда, в частности, следует, что  $\text{Tr}(B) = 0$ . Таким образом, формула (3.2.191) устанавливает взаимнооднозначное и гомоморфное соответствие между элементами  $A \in usp(2r)$  и элементами  $B \in su(r, \mathbb{H})$ . Отметим, что  $su(r, \mathbb{H})$  является алгеброй Ли группы  $SU(r, \mathbb{H})$  унитарных кватернионных матриц, то есть  $r \times r$  матриц  $U$  с элементами  $U_{\alpha\beta} \in \mathbb{H}$  и условиями

$$U^\dagger \cdot U = I_r \otimes I_2. \quad (3.2.193) \quad \text{quat01a}$$

- **Задача 103.** Доказать, что группа  $SU(r, \mathbb{H})$  изоморфна группе  $USp(2r)$ . Указание: сравнить условие унитарности (3.2.193) для  $U \in U(r, \mathbb{H})$  и условия симплектичности (2.2.58) и унитарности  $T^\dagger \cdot T = I_{2r}$  для  $T \in USp(2r)$ .

**ESF**

В качестве следующего примера обсудим еще один важный с точки зрения физических приложений изоморфизм алгебр Ли.

**Утверждение 3.2.9** Алгебра Ли  $so(4)$  изоморфна прямой сумме алгебр  $su(2) + su(2)$ .



**Доказательство.** Элементы алгебры  $so(4)$  – это антисимметричные вещественные  $4 \times 4$  матрицы  $A$  с элементами  $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ . Следуя традиции, принятой в релятивистской физике, будем считать, что индексы пробегают значения  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . Каждой антисимметричной матрице  $A$  можно сопоставить дуальную ей антисимметричную матрицу  $\tilde{A}$  с элементами

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_{\lambda\rho}, \quad (3.2.194) \quad \text{sasa3}$$

где  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$  – полностью антисимметричный тензор (2.2.7), причем  $\varepsilon_{0123} = 1$ . Говорят, что антисимметричные матрицы  $A^{(+)}$  самодуальны, а  $A^{(-)}$  – антисамодуальны, если

$$\widetilde{A^{(+)}} = A^{(+)} , \quad \widetilde{A^{(-)}} = -A^{(-)} . \quad (3.2.195) \quad \text{sasa4}$$

Будем пометить самодуальные и антисамодуальные матрицы индексами  $(+)$  и  $(-)$ , как мы сделали выше. Пусть латинские индексы  $i, j, k, \dots$  пробегают три значения ( $i, j, \dots = 1, 2, 3$ ), тогда из соотношений (3.2.194), (3.2.195) следует связь между  $(ij)$ - и  $(0, k)$ - компонентами самодуальных и антисамодуальных матриц:

$$A_{ij}^{(+)} = \varepsilon_{ijk} A_{0k}^{(+)} , \quad A_{ij}^{(-)} = -\varepsilon_{ijk} A_{0k}^{(-)} , \quad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk} , \quad (3.2.196) \quad \text{sasa5}$$

то есть самодуальные и антисамодуальные матрицы имеют только по три независимые компоненты. Очевидно, что множества самодуальных и антисамодуальных матриц (3.2.195) образуют два трехмерных векторных подпространства в пространстве всех антисимметричных матриц  $4 \times 4$ .

Любую антисимметричную  $4 \times 4$  матрицу  $A$  всегда можно разложить в сумму ее самодуальной и антисамодуальной частей:

$$A = A^{(+)} + A^{(-)} , \quad (3.2.197) \quad \text{sasa0}$$

где

$$A^{(+)} = \frac{1}{2} (A + \tilde{A}) , \quad A^{(-)} = \frac{1}{2} (A - \tilde{A}) . \quad (3.2.198) \quad \text{sasa}$$

То, что матрица  $A^{(+)}$  самодуальна, а  $A^{(-)}$  – антисамодуальна, очевидно следует из равенства  $\tilde{\tilde{A}} = A$ , которое в свою очередь вытекает из формулы (2.2.11) для свертки двух  $\varepsilon$ - тензоров. Первое наблюдение состоит в том, что коммутатор самодуальных (антисамодуальных) матриц — это снова самодуальная (антисамодуальная) матрица,

$$[A^{(+)}, B^{(+)}] = C^{(+)} , \quad (3.2.199) \quad \text{sasa1a}$$

$$[A^{(-)}, B^{(-)}] = C^{(-)} , \quad (3.2.200) \quad \text{sasa1b}$$

а самодуальная и антисамодуальная матрицы коммутируют между собой

$$[A^{(+)}, B^{(-)}] = 0 . \quad (3.2.201) \quad \text{sasa2}$$

Таким образом, алгебра  $so(4)$  с помощью разложения (3.2.197) разбивается в прямую сумму двух трехмерных подалгебр (здесь мы пользуемся определением прямой суммы двух алгебр Ли, которое было дано выше, см. (3.2.78) и (3.2.79)).

- *Задача 104. Пользуясь связью (3.2.196) для компонент (анти)самодуальных матриц, доказать соотношения (3.2.199), (3.2.200), (3.2.201).*

Остается показать, что подалгебры самодуальных и антисамодуальных матриц изоморфны  $su(2)$ . Это можно сделать непосредственно, разложив матрицы  $A^{(\pm)}$  по соответствующим независимым параметрам  $A_{0k}^{(\pm)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ):

$$A^{(+)} = A_{0k}^{(+)} \eta^k, \quad A^{(-)} = -A_{0k}^{(-)} \bar{\eta}^k, \quad (3.2.202) \quad \text{sasa6}$$

где матрицы  $\eta^k$  – самодуальны, матрицы  $\bar{\eta}^k$  – антисамодуальны, а их компоненты (в физике их называют символами т’Хоффта) определяются соотношениями

$$\eta_{\mu\nu}^k = -\eta_{\nu\mu}^k, \quad \bar{\eta}_{\mu\nu}^k = -\bar{\eta}_{\nu\mu}^k, \quad \eta_{ij}^k = \bar{\eta}_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}, \quad \eta_{0j}^k = \delta_{kj}, \quad \bar{\eta}_{0j}^k = -\delta_{kj}. \quad (3.2.203) \quad \text{hooft}$$

Далее легко проверить, что структурные соотношения для образующих  $S_k = -\frac{1}{2}\eta^k$ ,  $\bar{S}_k = -\frac{1}{2}\bar{\eta}^k$ , записанных в матричном виде

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.204) \quad \text{sasa7}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{S}_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.205) \quad \text{sasa8}$$

(здесь  $\sigma_i$  – матрицы Паули (3.1.18)) в точности воспроизводят структурные соотношения (3.2.121) для алгебры  $su(2)$ :

$$[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad [\bar{S}_i, \bar{S}_j] = \varepsilon_{ijk} \bar{S}_k, \quad (3.2.206) \quad \text{sasa9}$$

и кроме того мы имеем  $[S_k, \bar{S}_j] = 0$  ( $\forall k, j$ ), что согласуется с (3.2.198). Отметим также ортонормированность образующих  $S_k, \bar{S}_j$  (и символов т’Хоффта)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S_j S_k) &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\eta^j \eta^k) = -\delta_{jk}, \quad \text{Tr}(\bar{S}_j \bar{S}_k) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\bar{\eta}^j \bar{\eta}^k) = -\delta_{jk}, \\ \text{Tr}(\bar{S}_j S_k) &= \text{Tr}(\bar{\eta}^j \eta^k) = 0, \end{aligned}$$

что позволяет обратить соотношения (3.2.202)

$$A_{0k}^{(+)} = -4 \text{Tr}(A^{(+)} \eta^k), \quad A_{0k}^{(-)} = 4 \text{Tr}(A^{(-)} \bar{\eta}^k).$$

Таким образом, изоморфизм между алгеброй матриц  $A^{(+)}$  (или  $A^{(-)}$ ) и алгеброй  $su(2)$  устанавливается с помощью взаимнооднозначного соответствия

$$A^{(+)} = -\frac{1}{2} A_k^{(+)} \eta^k \leftrightarrow A_k^{(+)} \tau_k \in su(2), \quad A^{(-)} = \frac{1}{2} A_k^{(-)} \bar{\eta}^k \leftrightarrow A_k^{(-)} \tau_k \in su(2),$$

где  $\tau_k$  – образующие алгебры Ли  $su(2)$  (см. (3.2.120)), а  $A_k^{(\pm)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – произвольные вещественные параметры.

Наконец, явное взаимнооднозначное соответствие образующих  $so(4)$  и образующих  $su(2) + su(2)$  можно получить, если переписать антисимметричные матрицы

(3.2.204), (3.2.205) в терминах матричных единиц. Это соответствие, с точностью до автоморфизма (3.2.189) алгебры Ли  $su(2)$ , принимает вид

$$S_i = -\frac{1}{2} \left( M_{0i} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk} \right), \quad \bar{S}_i = -\frac{1}{2} \left( M_{0i} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk} \right),$$

где  $M_{\mu\nu} = (e_{\mu\nu} - e_{\nu\mu})$  — образующие (3.2.140) алгебры Ли  $so(4)$ . ■

- **Задача 105.** <sup>\*17</sup> Установить изоморфизмы: 1.) алгебры Ли  $so(1, 3)$  и алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  (как шестимерной вещественной алгебры); 2.)  $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$ ; 3.)  $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$ .

Как будет показано ниже, упомянутые в этой задаче алгебры Ли имеют отношение к алгебрам Ли двумерных конформных групп  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2)$  и  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$ .

**Утверждение 3.2.10** Алгебра Ли  $\text{conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  конформной группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  с образующими (3.2.166) при  $p + q > 2$  изоморфна алгебре Ли  $so(p + 1, q + 1)$ .

**Доказательство.** Положим  $p + q = n$ . Элементы  $L_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ), приведенные в (3.2.166), образуют подалгебру  $so(p, q)$  в алгебре Ли  $\text{conf}(\mathbb{R}^{p,q})$ . Поэтому алгебру Ли  $\text{conf}(\mathbb{R}^{p,q})$  можно рассматривать как расширение алгебры  $so(p, q)$ , к базисным элементам которой добавляются дополнительные образующие

$$P_m = \partial_m, \quad D = x^m P_m, \quad K_m = 2x_m D - (x^m x_m) P_m, \quad (3.2.207) \quad \text{DK}$$

с определяющими соотношениями (3.2.167). Размерность расширенной алгебры очевидно равна

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

как и у алгебры Ли  $so(p + 1, q + 1)$ . Покажем, что эта расширенная алгебра  $so(p, q)$  с дополнительными образующими (3.2.207) изоморфна алгебре Ли  $so(p + 1, q + 1)$ .

Генераторы  $L_{ab}$  алгебры Ли  $so(p + 1, q + 1)$  запишем в виде (3.2.155)

$$L_{ab} := x_a \partial_b - x_b \partial_a = -L_{ba}, \quad a, b = 0, 1, 2, \dots, n + 1,$$

(удобно считать первый индекс нулем) и мы имеем (3.2.150)

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{bc} L_{ad} + \eta_{da} L_{bc} + \eta_{ca} L_{db} + \eta_{bd} L_{ca}, \quad (3.2.208) \quad \text{conf16}$$

где  $a, b, c, d = 0, 1, \dots, n + 1$  и диагональная метрика  $\eta_{ab}$  имеет сигнатуру  $(p + 1, q + 1)$ . Из (3.2.208), в частности, получаем

$$[L_{0j}, L_{0k}] = \eta_{00} L_{kj}, \quad [L_{0j}, L_{n+1,k}] = \eta_{jk} L_{n+1,0}, \quad [L_{n+1,j}, L_{n+1,k}] = \eta_{n+1,n+1} L_{kj},$$

где  $k, j = 1, \dots, p + q$ . Пусть

$$\eta_{00} = -\eta_{n+1,n+1}, \quad (3.2.209) \quad \text{conf17}$$

<sup>17</sup>Решения задач, которые помечены звездочкой, даны в конце книги, смотри Приложение 1.

это означает, что  $\eta_{ij}$  для  $i, j = 1, \dots, n$  имеет сигнатуру  $(p, q)$  и является метрикой пространства  $\mathbb{R}^{(p,q)}$ . Тогда для комбинаций  $L_k(\epsilon) = (L_{0k} + \epsilon L_{n+1,k})$ , полагая  $\epsilon = \pm 1$  и учитывая антисимметрию  $L_{ij} = -L_{ji}$  и (3.2.209), получаем

$$\begin{aligned} [L_j(\epsilon), L_k(\epsilon)] &= 0, \quad [L_{0,n+1}, L_k(\epsilon)] = \epsilon \eta_{n+1,n+1} L_k(\epsilon), \\ [L_j(\epsilon), L_{km}] &= \eta_{jk} L_m(\epsilon) - \eta_{jm} L_k(\epsilon), \end{aligned}$$

где  $k, j, m = 1, \dots, n$ . Выберем  $\eta_{n+1,n+1} = -1$  и сделаем отождествление

$$\begin{aligned} P_k &:= L_k(\epsilon)|_{\epsilon=+1} = L_{0k} + L_{n+1,k}, \quad K_k := L_k(\epsilon)|_{\epsilon=-1} = L_{0k} - L_{n+1,k}, \\ D &:= L_{0,n+1}, \end{aligned} \tag{3.2.210} \quad \text{conf18}$$

а операторы  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) будем считать образующими  $so(p, q)$ . Непосредственно можно проверить, что операторы (3.2.210) удовлетворяют соотношениям (3.2.167). Таким образом, формулы (3.2.210) устанавливают изоморфизм  $so(p+1, q+1) = \text{conf}(\mathbb{R}^{(p,q)})$ . ■

**Замечание.** Как было показано в разделе 2.3.6, в двумерном случае  $q+p=2$  конформные группы  $\text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1})$  и  $\text{Conf}(\mathbb{R}^2)$  бесконечномерны и поэтому их алгебры Ли очевидно не изоморфны  $so(2, 2)$  и  $so(1, 3)$ . Однако, согласно утверждению, сформулированному в Задаче 49, двумерные конформные группы содержат конечномерные подгруппы

$$SL(2, \mathbb{R})/\mathbf{Z}_2 \times SL(2, \mathbb{R})/\mathbf{Z}_2 \subset \text{Conf}(\mathbb{R}^{1,1}), \quad SL(2, \mathbb{C})/\mathbf{Z}_2 \subset \text{Conf}(\mathbb{R}^2),$$

алгебрами Ли которых являются соответственно  $sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$  и  $sl(2, \mathbb{C})$ . Последние в свою очередь изоморфны  $so(2, 2)$  и  $so(1, 3)$  (смотри Задачу 105).

- **Задача 106.** \* Установить изоморфизм между вещественными алгебрами Ли  $so(5)$  и  $usp(4)$ .
- **Задача 107.** \* Установить изоморфизмы  $so(4, 1) = sp(1, 1)$  и  $so(3, 2) = sp(4, \mathbb{R})$ .

Отметим, что из изоморфизмов, упомянутых в последних двух задачах, следует изоморфизм для соответствующих комплексных алгебр  $so(5, \mathbb{C}) = sp(4, \mathbb{C})$ .

- **Задача 108.** \* Установить изоморфизм комплексных алгебр Ли  $so(6, \mathbb{C}) = sl(4, \mathbb{C})$  и изоморфизмы соответствующих вещественных форм: 1.)  $so(6) = su(4)$ , 2.)  $so(3, 3) = sl(4, \mathbb{R})$ , 3.)  $so(2, 4) = su(2, 2)$  и 4.)  $so(5, 1) = sl(2, \mathbb{H})$ , где  $\mathbb{H}$  — поле кватернионов. Показать, что  $sl(2, \mathbb{H}) = su^*(4)$ .

Замечательно, что изоморфизм  $so(5, 1) = sl(2, \mathbb{H})$  естественно продолжает серию изоморфизмов  $so(2, 1) = sl(2, \mathbb{R})$  и  $so(3, 1) = sl(2, \mathbb{C})$ , которые уже были упомянуты в Задачах 100, 105.

- **Задача 109.** Описать вещественную форму алгебры Ли  $so(4, \mathbb{C})$ , которая изоморфна алгебре Ли  $su(1, 1) + su(2)$  (см. Задачу 105). Показать, что  $su(1, 1) + su(2) = so^*(4)$ . Описать вещественную форму алгебры Ли  $so(6, \mathbb{C})$ , которая изоморфна вещественной форме  $su(1, 3)$  алгебры  $sl(4, \mathbb{C})$  (см. Задачу 108). Показать, что  $su(1, 3) = so^*(6)$ .

В заключение этого подраздела подчеркнем, что локальные (и только локальные) свойства групп Ли удобно изучать, рассматривая соответствующие алгебры Ли. Основные понятия теории групп Ли при этом имеют аналоги в теории алгебр Ли. В то же время, с геометрической точки зрения алгебры Ли — более простые объекты, поскольку они являются векторными (линейными) пространствами.

Вообще, многообразия могут иметь одинаковые локальные свойства, но отличаться с глобальной точки зрения. Например, из одной и той же полоски бумаги можно склеить лист Мёбиуса или обычное кольцо, которые локально совпадают, но глобально представляют собой совершенно разные многообразия.



Аналогично обстоит дело и в теории групп и алгебр Ли: с одной и той же алгеброй Ли могут быть связаны разные группы Ли, многообразия которых отличаются глобальными свойствами. Один пример мы уже привели: это группы  $SU(2)$  и  $SO(3)$ , имеющие изоморфные алгебры Ли. Другие примеры даются парами групп с изоморфными алгебрами Ли, упомянутыми в Утверждении 3.2.9, а также в задачах 105, 106, 107, 108. Более подробно эта тема обсуждается в следующем подразделе.

### 3.2.13 Локально изоморфные группы Ли. Универсальные накрывающие.

В предыдущем подразделе мы показали, что разные группы Ли могут иметь тождественные (изоморфные) алгебры Ли. Такие группы Ли называются локально изоморфными. Локальный изоморфизм групп означает, что некоторые окрестности единиц этих групп изоморфны: в этих окрестностях все элементы каждой из групп представимы в "экспоненциальной форме" (3.2.60), так что совпадение алгебр Ли эквивалентно изоморфизму окрестностей.

Приведем без доказательства следующие утверждения:

(1) Для каждой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  существует единственная *односвязная* (смотри определение 3.1.7) группа Ли  $\hat{G}$ , алгебра Ли которой совпадает с  $\mathcal{A}$ . Эту группу называют универсальной накрывающей.

(2) Любая связная группа Ли  $G$ , локально изоморфная  $\hat{G}$ , гомоморфно накрывается универсальной накрывающей группой  $\hat{G}$  (то есть существует гомоморфизм  $\hat{G} \rightarrow G$ ).

(3) Универсальная накрывающая простой (полупростой) компактной группы Ли компактна. Напомним, что группа  $U(1)$  не относится ни к простым, ни к полупростым группам Ли.

Для любой  $m$ -связной группы Ли  $G$  (смотри определение 3.1.7) ее универсальная накрывающая группа  $\hat{G}$  гомоморфно отображается на  $G$  так, что  $m$  различных элементов из группы  $\hat{G}$  отображаются в один элемент из  $G$ . В этом случае говорят,

что  $\hat{G}$  покрывает  $m$  раз группу  $G$ .

В конце этого подраздела мы покажем, что если  $G$  —  $m$ -связная группа Ли, а  $\hat{G}$  — ее универсальная накрывающая, то группа  $\hat{G}$  всегда содержит инвариантную дискретную подгруппу  $Z$  порядка  $m$ , такую что факторгруппа  $\hat{G}/Z$  изоморфна  $G$ .

В качестве иллюстрации, демонстрирующей накрытие одной группы другой, рассмотрим односвязную группу  $SU(2)$  и двухсвязную группу  $SO(3)$  (смотри примеры **7** и **9** из раздела **3.1.2**). Напомним, что группы  $SU(2)$  и  $SO(3)$  локально изоморфны, так как их алгебры Ли  $su(2)$  и  $so(3)$  изоморфны (смотри пример **2** из раздела **3.2.12**).

**Утверждение 3.2.11** *Группа  $SU(2)$  дважды покрывает группу  $SO(3)$ , при этом  $SO(3) = SU(2)/Z_2$ , где  $Z_2$  — центр группы  $SU(2)$ . Соответствующий гомоморфизм  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  дается формулой*

$$O_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i U^\dagger \sigma_j U) ,$$

где  $\|O_{ij}\| \in SO(3)$ ,  $U \in SU(2)$ ,  $\sigma_i$  — матрицы Паули (3.1.18).

BSF

**Доказательство.** Построим явно гомоморфизм  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ , сопоставляющий двум элементам  $SU(2)$  один элемент из  $SO(3)$ .

Рассмотрим вещественное векторное пространство  $\mathcal{X}$  всех бесследовых эрмитовых  $(2 \times 2)$  матриц  $X$ :

$$X = X^\dagger , \quad \text{Tr}(X) = 0 . \quad (3.2.211) \quad \text{ErTr}$$

Любая матрица  $X \in \mathcal{X}$  представима в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 , \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} . \quad (3.2.212) \quad \text{ermit}$$

Матрицы  $\sigma_i$  образуют базис в трехмерном пространстве  $\mathcal{X}$ , в котором определено невырожденное скалярное произведение

$$(X, Y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(X \cdot Y) , \quad \forall X, Y \in \mathcal{X} ,$$

такое, что  $(\sigma_i, \sigma_k) = \delta_{ik}$ . Пользуясь соотношениями (3.2.212) и  $x_i = (X, \sigma_i)$ , каждому вектору  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  с вещественными координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  можно взаимно однозначно сопоставить  $2 \times 2$  матрицу  $X \in \mathcal{X}$ . Это сопоставление иногда называют отображением Паули. Заметим, что для матриц (3.2.212) имеют место тождества

$$-\det(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 , \quad (3.2.213) \quad \text{detx2}$$

$$X^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) I_2 . \quad (3.2.214) \quad \text{x2}$$

Последнее тождество на самом деле эквивалентно, с учетом равенства (3.2.213), условию  $\text{Tr}(X) = 0$ .

- *Задача 110. Доказать, что любая  $2 \times 2$  матрица  $X$  удовлетворяет характеристическому тождеству*

$$X^2 - \text{Tr}(X) X + \det(X) I_2 = 0 ,$$

*из которого при  $\text{Tr}(X) = 0$  и с учетом (3.2.213) следует (3.2.214).*

Рассмотрим линейное преобразование в пространстве  $\mathcal{X}$ :

$$X \rightarrow X' = V X U , \quad (3.2.215) \quad \text{trX}$$

осуществляемое с помощью двух невырожденных комплексных  $2 \times 2$  матриц  $V, U$ . При этом на матрицы  $U$  и  $V$  необходимо наложить дополнительные условия такие, чтобы преобразованная матрица  $X'$  в (3.2.215) снова принадлежала  $\mathcal{X}$  (для всех  $X \in \mathcal{X}$ ), то есть удовлетворяла соотношениям (3.2.211) и представлялась в виде (3.2.212). Кроме этого потребуем, чтобы преобразование (3.2.215) сохраняло квадрат и детерминант матриц:

$$(X')^2 = X^2 , \quad \det(X') = \det(X) . \quad (3.2.216) \quad \text{us12}$$

В этом случае, согласно (3.2.213) и (3.2.214), линейное преобразование  $x_i \rightarrow x'_i$  (3.2.215) будет ортогональным преобразованием в  $\mathbb{R}^3$ , иначе говоря, оно будет преобразованием из группы  $O(3)$ .

Найдем условия на матрицы  $V, U$ , необходимые для выполнения вышеуказанных требований, предъявляемых к преобразованиям (3.2.215). Из (3.2.215), пользуясь (3.2.214) и (3.2.216), мы получаем

$$\begin{aligned} V X = X' U^{-1} &\Rightarrow X' (V X) X = X' (X' U^{-1}) X \Rightarrow \\ X' V &= U^{-1} X \Rightarrow X' = U^{-1} X V^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow X U V = (U V)^{-1} X , \end{aligned} \quad (3.2.217) \quad \text{TrX1}$$

где при получении последнего равенства мы снова воспользовались (3.2.215). Из соотношений (3.2.217), с учетом произвольности бесследовой эрмитовой матрицы  $X$  (3.2.212), следуют условия на  $U$  и  $V$ :

$$U V = \pm I_2 \Rightarrow V = \pm U^{-1} , \quad (3.2.218) \quad \text{us11}$$

- *Задача 111. Получить условия (3.2.218) из равенства (3.2.217).*

Итак, условия (3.2.214) и (3.2.216) приводят к тому, что преобразование (3.2.215) зависит только от одной матрицы  $U$  и принимает две возможные формы

$$X \rightarrow X' = -U^{-1} X U , \quad (3.2.219) \quad \text{utr2}$$

$$X \rightarrow X' = U^{-1} X U . \quad (3.2.220) \quad \text{utr}$$

Далее, так как  $X'^{\dagger} = X'$ , то из (3.2.219) и (3.2.220) мы получаем  $[U U^{\dagger}, X] = 0$ , а требование, чтобы это равенство выполнялось для произвольной матрицы  $X$  вида

(3.2.212), эквивалентно условию  $UU^\dagger = \alpha I$ , где  $\alpha$  – произвольный положительный вещественный параметр. Заметим, что преобразования (3.2.219) и (3.2.220) не меняются при растяжении  $U \rightarrow \lambda U$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Это дает нам право нормировать  $U$  так, чтобы  $\det(U) = 1$  и  $UU^\dagger = I$ , то есть  $U \in SU(2)$ .

Напомним, что преобразования (3.2.219) и (3.2.220) для  $U \in SU(2)$  являются ортогональными преобразованиями вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Ортогональные преобразования вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  типа (3.2.219) включают в себя отражение  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  и поэтому определяют преобразования из связной компоненты  $O_-(3) \subset O(3)$ , включающей отражения. Далее мы ограничимся рассмотрением только случая преобразований (3.2.220), которые соответствуют собственным вращениям из  $O_+(3) = SO(3)$  и могут быть записаны в эквивалентном виде

$$X \rightarrow X' = U^\dagger X U, \quad U \in SU(2). \quad (3.2.221) \quad \text{utr1}$$

- **Задача 112.** Переписать (3.2.221) в виде преобразования  $x_i \rightarrow x'_i = O_{ij} x_j$  и получить формулу

$$O_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i U^\dagger \sigma_j U) \equiv T_{ij}(U), \quad (3.2.222) \quad \text{utr4}$$

которая выражает элементы матрицы  $\|O_{ij}\| \in SO(3)$  через элементы матрицы  $U \in SU(2)$ . Показать, что любое собственное ортогональное преобразование  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = O \cdot \vec{x}$  можно представить в виде (3.2.221).

Таким образом, формула (3.2.221) с произвольными матрицами  $U \in SU(2)$  определяет линейные преобразования трехмерного вектора  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , которые соответствуют преобразованиям из собственной ортогональной группы  $SO(3)$ . Тем самым определено соответствие между элементами групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$ , или отображение  $T$  из группы  $SU(2)$  в группу  $SO(3)$ , которое задается формулой (3.2.222). Данное отображение есть гомоморфизм группы  $SU(2)$  в группу  $SO(3)$ :

$$\sigma_k T_{kj}(U_1 \cdot U_2) x_j = (U_1 U_2)^\dagger X (U_1 U_2) = U_2^\dagger (\sigma_i T_{ij}(U_1) x_j) U_2 = \sigma_k T_{ki}(U_2) T_{ij}(U_1) x_j$$

то есть  $T_{kj}(U_1 \cdot U_2) = T_{ki}(U_2) T_{ij}(U_1)$ . Кроме того, согласно (3.2.222) два разных элемента  $\pm U \in SU(2)$  отображаются в один и тот же элемент  $O \in SO(3)$ . Таким образом, группа  $SU(2)$  дважды накрывает группу  $SO(3)$ . Так как ядро данного гомоморфизма состоит из двух элементов  $\pm I \in SU(2)$ , образующих инвариантную подгруппу  $Z_2 \subset SU(2)$ , то точное соответствие между группами  $SU(2)$  и  $SO(3)$  выражается изоморфизмом  $SU(2)/Z_2 = SO(3)$ . ■ **ESF**

- **Задача 113.** Доказать, что группа  $SL(2, \mathbb{R})$  дважды накрывает группу  $SO^\dagger(1, 2)$  и имеет место изоморфизм  $PSL(2, \mathbb{R}) \equiv SL(2, \mathbb{R})/\mathbf{Z}_2 = SO^\dagger(1, 2)$ . Указание: доказательство проводится аналогично доказательству Утверждения 3.2.11.

**Утверждение 3.2.12** Пусть  $\hat{G}$  – универсальная накрывающая группы  $G$ . Имеет место изоморфизм  $\hat{G}/Z = G$ , где  $Z$  – некоторая дискретная подгруппа центра группы  $\hat{G}$ . Если  $Z$  – группа порядка  $m$ , то группа  $G$   $m$ -связна.



**Доказательство.** Группа  $G$  и ее односвязная универсальная накрывающая группа  $\hat{G}$  локально изоморфны. Рассмотрим гомоморфизм  $\rho : \hat{G} \rightarrow G$ . Пусть  $\text{Ker}(\rho)$  — ядро этого гомоморфизма. Покажем прежде всего, что  $\text{Ker}(\rho)$  — это *дискретная* инвариантная подгруппа группы  $\hat{G}$ . Ядро гомоморфизма из одной группы в другую всегда является инвариантной подгруппой (смотри Утверждение 2.3.1) и  $\hat{e} \in \text{Ker}(\rho)$ , где  $\hat{e}$  — единица в  $\hat{G}$ . Далее, поскольку окрестности единиц в  $G$  и  $\hat{G}$  изоморфны, то в достаточно малой окрестности  $U \subset \hat{G}$  элемента  $\hat{e}$  нет других элементов из  $\text{Ker}(\rho)$ . Данный факт справедлив и для любого другого элемента  $z \in \text{Ker}(\rho)$ : если бы множество  $\text{Ker}(\rho)$  было непрерывно в окрестности элемента  $z$ , то взяв два достаточно близких элемента  $z$  и  $z'$  из  $\text{Ker}(\rho)$ , мы могли бы составить комбинацию  $z^{-1} \cdot z' \in \text{Ker}(\rho)$ , которая была бы близка к единице и попадала в  $U$ , что невозможно. Итак,  $\text{Ker}(\rho)$  — дискретная подгруппа.

Далее, пусть  $z \in \text{Ker}(\rho)$ . Тогда для всех  $\hat{g} \in \hat{G}$  выполнено  $\hat{g} \cdot z \cdot \hat{g}^{-1} \in \text{Ker}(\rho)$  (поскольку  $\text{Ker}(\rho)$  — инвариантная подгруппа в  $G$ ). Множество  $\hat{g} \cdot z \cdot \hat{g}^{-1} \subset \text{Ker}(\rho)$  с одной стороны связно в силу связности  $\hat{G}$ , а с другой стороны дискретно в силу дискретности  $\text{Ker}(\rho)$ , поэтому оно состоит из одного элемента, который очевидно равен  $\hat{e} \cdot z \cdot \hat{e}^{-1} = z$ . Таким образом, для всех  $\hat{g} \in \hat{G}$  и  $z \in \text{Ker}(\rho)$  выполнено  $\hat{g} \cdot z \cdot \hat{g}^{-1} = z$ , то есть  $Z = \text{Ker}(\rho)$  — подгруппа центра группы  $\hat{G}$ , и  $G = \hat{G}/Z$ .

Наконец, если  $Z$  — группа порядка  $m$ , то многообразие группы  $G = \hat{G}/Z$  можно рассматривать как многообразие  $\hat{G}$ , у которого имеется отождествление  $m$  разных точек, попадающих в один смежный класс по  $Z$ . У такого многообразия кроме обычной замкнутой кривой, стягиваемой в точку, имеется еще  $(m - 1)$  негомотопных замкнутых кривых, соединяющих разные отождествленные точки. Например, можно выделить одну из  $m$  отождествленных точек и соединить ее с собой (стягиваемая кривая) или с любой другой оставшейся  $(m - 1)$ -ой отождествленной с ней точкой. Это и показывает, что группа  $G = \hat{G}/Z$  является  $m$ -связной. ■

Пример обсуждавшейся сейчас ситуации дает известное нам из Утверждения 3.2.11 соотношение  $SO(3) = SU(2)/Z_2$ . Двухсвязность  $SO(3)$  следует из наличия двух негомотопных замкнутых кривых в  $SO(3)$ , которые соответствуют двум кривым в  $SU(2)$ , исходящим из некоторого элемента  $U \in SU(2)$ : одна из них заканчивается в элементе  $U$  — стягиваемая кривая в  $SO(3)$ , другая заканчивается в элементе  $(-U) \in SU(2)$  — нестягиваемая кривая в  $SO(3)$ . Другой пример дан в Задаче 113.

В качестве еще одного примера рассмотрим накрытие группы  $U(1)$ . Группа  $U(1)$  бесконечно связна. Универсальной накрывающей  $U(1)$  является группа  $\mathbb{R}$  действительных чисел по сложению. Соответственно, группа  $\underbrace{U(1) \times U(1) \times \dots \times U(1)}_k$ , представляющая собой  $k$ -мерный тор, накрывается группой трансляций в  $\mathbb{R}^k$ . В связи с этим имеет место следующее утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

- **Задача 114.** Пусть  $T(\mathbb{R}^n)$  — группа трансляций в  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что всякая дискретная подгруппа в  $T(\mathbb{R}^n)$  образована сдвигами вдоль векторов

$$\mathbf{a}_1 \cdot n_1 + \mathbf{a}_2 \cdot n_2 + \dots + \mathbf{a}_k \cdot n_k, \quad k \leq n,$$

где  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  — линейно независимые вектора, а  $n_1, \dots, n_k$  — целые числа.

Пользуясь этим фактом, покажите, что всякая абелева группа Ли размерности  $n$  — это прямое произведение

$$\underbrace{U(1) \times U(1) \times \dots \times U(1)}_k \times T(\mathbb{R}^{n-k}) \equiv [U(1)]^k \times T(\mathbb{R}^{n-k}) .$$

## 4 Представления групп и алгебр Ли.

### 4.1 Линейные (матричные) представления групп.

#### 4.1.1 Определение представления группы. Примеры.

**Определение 4.1.1** Линейным представлением (или просто – представлением)  $T$  группы  $G$  в линейном (векторном) пространстве  $\mathcal{V}$  называется гомоморфное отображение  $T: G \rightarrow \Gamma$  из группы  $G$  в группу  $\Gamma$  невырожденных линейных операторов, действующих в пространстве  $\mathcal{V}$ . Другими словами, представление  $T$  каждому элементу  $g \in G$  ставит в соответствие обратимый линейный оператор  $T(g) \in \Gamma$ , и это сопоставление согласовано с умножением в группе  $G$ :

$$T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2) , \quad \forall g_1, g_2 \in G . \quad (4.1.1) \quad \text{rep}G$$

Пространство  $\mathcal{V}$ , в котором действует группа  $\Gamma$ , называется пространством представления. Если  $\mathcal{V}$  – вещественное (комплексное) пространство, то представление  $T$  называется вещественным (комплексным).

Из (4.1.1) следует, что

$$T(e) = I , \quad T(g^{-1}) = (T(g))^{-1} , \quad \forall g \in G , \quad (4.1.2) \quad \text{rep}G1$$

где  $e$  — единица в  $G$  и  $I$  — единичный оператор из  $\Gamma$ , соответственно.

Если пространство представления –  $n$ -мерное векторное пространство  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  над полем чисел  $\mathbb{K}$ , то, в случае  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , представление  $T$  называется  $n$ -мерным вещественным, а если  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , то –  $n$ -мерным комплексным. Заметим, что, рассматривая  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$  как  $\mathcal{V}_{2n}(\mathbb{R})$ , любое  $n$ -мерное комплексное представление можно преобразовать в  $2n$ -мерное вещественное представление (обратное утверждение верно не всегда). Поскольку в пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  в некотором фиксированном базисе  $\vec{e}_i \in \mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  имеется взаимнооднозначное соответствие между линейными операторами и  $(n \times n)$  матрицами (см. (2.2.33)), то  $n$ -мерное представление  $T$  можно рассматривать как отображение в группу  $(n \times n)$  матриц с коэффициентами из  $\mathbb{K}$ . При этом каждому элементу  $g$  группы  $G$  сопоставляется матрица  $||T_{ij}(g)|| \in \Gamma$  согласно правилу

$$T(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j T_{ji}(g) . \quad (4.1.3) \quad \text{Te2w}$$

Здесь каждый из  $n^2$  коэффициентов матрицы  $||T_{ij}(g)||$  — это функция на группе  $G$ , причем из (4.1.1), (4.1.2) и (4.1.3) следуют равенства

$$T_{ik}(g_1)T_{kj}(g_2) = T_{ij}(g_1 \cdot g_2) , \quad (4.1.4) \quad \text{pred}$$

$$T_{ij}(g^{-1}) = (T(g)^{-1})_{ij}, \quad T_{ij}(e) = \delta_{ij}. \quad (4.1.5) \quad \text{pred1}$$

Таким образом,  $n$ -мерное представление  $T$  можно воспринимать как гомоморфизм  $T: G \rightarrow \Gamma$  из группы  $G$  в матричную группу  $\Gamma$ , элементами которой являются  $(n \times n)$  матрицы,  $\Gamma \subset GL(n, \mathbb{K})$ .

**Определение 4.1.2** Представление  $T: G \rightarrow \Gamma$  в линейном пространстве  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$  называется унитарным, если для всех  $g \in G$  операторы  $T(g) \in \Gamma$  унитарны по отношению к некоторой положительно определенной эрмитовой форме  $f_H$ , заданной в  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ , т.е.

$$f_H(T(g) \cdot \vec{x}, T(g) \cdot \vec{y}) = f_H(\vec{x}, \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}(\mathbb{C}). \quad (4.1.6) \quad \text{pred2}$$

Пусть  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$  —  $n$ -мерное пространство с базисом  $\vec{e}_i \in \mathcal{V}(\mathbb{C})$ , ортонормированным относительно формы  $f_H$ :  $f_H(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik}$ . Тогда формула (4.1.6) эквивалентна, в силу определения (4.1.3), условию унитарности для матриц операторов  $T(g)$ :

$$T_{mi}(g)^* T(g)_{mk} = \delta_{ik} \quad \Rightarrow \quad (T(g)^\dagger)_{im} T(g)_{mk} = \delta_{ik}.$$

Приведем важные для дальнейшего примеры представлений групп Ли  $G$ .

### 1. Тривиальное представление.

У любой группы  $G$  имеется тривиальное одномерное представление  $T$ :

$$T(g) = 1, \quad \forall g \in G. \quad (4.1.7) \quad \text{triv}$$

### 2. Определяющее представление.

Пусть  $G$  — матричная группа Ли, состоящая из  $(n \times n)$  матриц  $g = \|g_{ij}\|$ , например,  $SU(n)$  или  $SO(n)$ , и пусть  $\mathcal{V}_n$  —  $n$ -мерное векторное пространство с базисом  $\{\vec{e}_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Определяющее (фундаментальное) представление  $T$  — это отображение из  $G$  в множество линейных операторов, действующих в  $\mathcal{V}_n$ , заданное соотношениями

$$T(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j g_{ji}. \quad (4.1.8) \quad \text{fund}$$

Соответственно, определяющее (фундаментальное) представление  $T(g)$  на координаты вектора

$$\vec{\psi} = \psi_i \vec{e}_i \in \mathcal{V}_n, \quad (4.1.9) \quad \text{fund2}$$

действует следующим образом:

$$\left( T(g) \cdot \vec{\psi} \right)_i = g_{ij} \psi_j. \quad (4.1.10) \quad \text{fund1}$$

Если все матрицы группы  $G$  вещественные, то определяющее представление является вещественным. Впрочем, часто бывает полезным рассматривать комплексное представление, задаваемое формулами (4.1.8), (4.1.10); мы его тоже будем называть определяющим, делая оговорки там, где это необходимо. Если же матрицы группы  $G$  комплексные, то определяющее представление — комплексное.

### 3. Контраградиентное представление (ко-представление) $\tilde{T}$ .

Пусть  $T$  –  $n$ -мерное представление, заданное соотношениями (4.1.3). Контраградиентное к  $T$  представление  $\tilde{T}$  – это отображение из  $G$  в множество линейных операторов, действующих в  $\mathcal{V}_n$ , заданное соотношениями

$$\tilde{T}(g) \cdot \vec{e}_i = T_{ij}(g^{-1}) \vec{e}_j = (T(g)^{-1})_{ij} \vec{e}_j, \quad (4.1.11) \quad \text{cogr}$$

то есть ко-представление реализуется операторами  $\tilde{T}(g) = (T(g)^{-1})^T$ . Гомоморфность отображения  $\tilde{T}$  следует из гомоморфности  $T$ :

$$\tilde{T}(g_1) \cdot \tilde{T}(g_2) = (T(g_1)^{-1})^T \cdot (T(g_2)^{-1})^T = (T(g_1 \cdot g_2)^{-1})^T = \tilde{T}(g_1 \cdot g_2).$$

На координаты вектора (4.1.9) матрицы ко-представления действуют следующим образом

$$\left( \tilde{T}(g) \cdot \vec{\psi} \right)_i = \psi_j (T(g)^{-1})_{ji}. \quad (4.1.12) \quad \text{cogr1}$$

#### 4. Сопряженное представление $T^*$ .

Пусть  $T$  –  $m$ -мерное комплексное представление, заданное соотношениями (4.1.3). Представление  $T^*$ , сопряженное представлению  $T$ , является отображением из  $G$  в множество линейных операторов, действующих в  $\mathcal{V}_m(\mathbb{C})$ , и задается соотношениями

$$T^*(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j T_{ji}^*(g), \quad \left( T^*(g) \cdot \vec{\psi}^* \right)_i = T_{ij}^*(g) \psi_j^*, \quad (4.1.13) \quad \text{conj}$$

где  $\|T_{ij}^*(g)\|$  – матрицы, комплексно сопряженные матрицам представления  $T$ . Гомоморфность отображения  $T^*$  очевидна. Соответственно, для представления, сопряженного определяющему (см. предыдущий пример 2), мы получаем

$$T^*(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j g_{ji}^*, \quad \left( T^*(g) \cdot \vec{\psi}^* \right)_i = g_{ij}^* \psi_j^*. \quad (4.1.14) \quad \text{conj1}$$

Отметим, что для вещественного представления  $T$  эта конструкция не дает ничего нового: оно реализовано вещественными матрицами и, следовательно,  $T^* = T$ .

- **Задача 115.** Показать, что представление  $T^*$  унитарной группы  $U(n)$ , сопряженное определяющему представлению  $T$ , совпадает с контраградиентным представлением  $\tilde{T}$ .

#### 5. Присоединенное представление $\text{ad}(G)$ группы Ли $G$ .

Пусть  $G$  – матричная группа Ли, состоящая из матриц  $g = \|g_{ij}\|$ , и  $\mathcal{A}(G)$  – ее матричная алгебра Ли. Каждому элементу  $g \in G$  сопоставим линейный оператор  $\text{ad}(g)$  ( $\text{ad}$  – происходит от слова "adjoint"), действующий на вектор  $A$  (матрицу) из касательного пространства  $\mathcal{A}(G)$  следующим образом

$$\text{ad}(g) A = g \cdot A \cdot g^{-1}. \quad (4.1.15) \quad \text{adG}$$

Матрица  $g \cdot A \cdot g^{-1}$  снова принадлежит касательному пространству  $\mathcal{A}(G)$ , т.к. она соответствует касательному вектору в точке  $I_n \in G$  к кривой  $h(t) = g \cdot g(t) \cdot g^{-1}$ , построенной по кривой  $g(t)$ , имеющей разложение (3.2.1) при малых  $t$ . Таким образом,

формула (4.1.15) задает отображение  $\text{ad}$  из группы  $G$  в множество линейных операторов, действующих в алгебре Ли  $\mathcal{A}(G)$  как в векторном пространстве. Гомоморфность отображения  $\text{ad}$  проверяется следующим образом

$$\text{ad}(g_1 \cdot g_2) A = (g_1 \cdot g_2) \cdot A \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_1 \cdot (g_2 \cdot A \cdot g_2^{-1}) \cdot g_1^{-1} = \text{ad}(g_1) (\text{ad}(g_2) A) .$$

Общее определение представления  $\text{ad}$  для любой (не только матричной) группы Ли  $G$  дадим, пользуясь вместо (4.1.15) соотношением

$$g_{\text{ad}(g) A}(t) = g \cdot g_A(t) \cdot g^{-1} , \quad \forall g \in G , \quad (4.1.16) \quad \text{adGg}$$

где  $g_A(t)$  – кривая в  $G$ , исходящая из единицы вдоль касательного вектора  $A$ . То, что определенное посредством (4.1.16) отображение  $\text{ad}$  из группы  $G$  в алгебру линейных операторов, действующих в  $\mathcal{A}(G)$  – гомоморфизм, следует из тождества

$$g \cdot g_A(t) \cdot g_B(t) \cdot g^{-1} = g \cdot g_A(t) \cdot g \cdot g^{-1} \cdot g_B(t) \cdot g^{-1} .$$

**Определение 4.1.3** *Представление группы Ли  $G$ , контраградиентное к присоединенному представлению, называется ко-присоединенным представлением группы  $G$ .*

#### 4.1.2 Регулярные, точные и неточные представления.

Из Теоремы 2.3.3 (Кэли) следует, что любая конечная группа  $G$  порядка  $n$  всегда вкладывается в группу перестановок  $S_n$  и поэтому всегда имеет  $n$ -мерное вещественное представление. Конструкция этого представления следующая. Запишем  $n$  элементов группы  $G$  в виде вектора  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ . Действие слева (справа) фиксированного элемента  $g_i \in G$  на этот вектор определяет перестановки его компонент (см. (2.3.4)):

$$\begin{aligned} g_i \cdot (g_1, g_2, \dots, g_n) &= (g_i \cdot g_1, g_i \cdot g_2, \dots, g_i \cdot g_n) = (g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_n}) , \\ (g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot g_i &= (g_1 \cdot g_i, g_2 \cdot g_i, \dots, g_n \cdot g_i) = (g_{r_1}, g_{r_2}, \dots, g_{r_n}) , \end{aligned}$$

которые можно записать с помощью  $(n \times n)$ - матриц  $\|T_{jk}^{(R)}(g_i)\|$  и  $\|\tilde{T}_{jk}^{(R)}(g_i)\|$ :

$$g_i \cdot g_j = g_k T_{kj}^{(R)}(g_i) , \quad g_j \cdot g_i = \tilde{T}_{jk}^{(R)}(g_i) g_k . \quad (4.1.17) \quad \text{regu5}$$

Поскольку матрицы  $\|T_{jk}^{(R)}(g_i)\|$  и  $\|\tilde{T}_{jk}^{(R)}(g_i)\|$  задают перестановки, все элементы этих матриц равны либо 0 либо 1 и в каждой строке и каждом столбце имеется лишь по одному элементу, равному 1, а все остальные элементы равны нулю. Отметим, что если  $g_i \neq e$ , то единицы никогда не попадают на главную диагональ. Отображения  $T^{(R)}$  и  $\tilde{T}^{(R)}$  из  $G$  в  $GL(n)$  являются гомоморфизмами:

$$T_{lk}^{(R)}(g_m) T_{kj}^{(R)}(g_i) = T_{lj}^{(R)}(g_m \cdot g_i) , \quad \tilde{T}_{jk}^{(R)}(g_i) \tilde{T}_{kl}^{(R)}(g_m) = \tilde{T}_{jl}^{(R)}(g_i \cdot g_m) , \quad (4.1.18) \quad \text{homRR}$$

что следует из ассоциативности умножения в  $G$ . Например, для  $T^{(R)}$  мы имеем

$$\begin{aligned} g_m \cdot (g_i \cdot g_j) &= g_m \cdot g_k T_{kj}^{(R)}(g_i) = g_l T_{lk}^{(R)}(g_m) T_{kj}^{(R)}(g_i) , \\ (g_m \cdot g_i) \cdot g_j &= g_l T_{lj}^{(R)}(g_m \cdot g_i) , \end{aligned} \quad (4.1.19) \quad \text{regu}$$

Сравнивая правые части этих соотношений, мы получаем первое равенство в (4.1.18). Аналогично проверяется второе равенство в (4.1.18) для  $\tilde{T}^{(R)}$ . Гомоморфизмы  $T^{(R)}$  и  $\tilde{T}^{(R)}$  (4.1.17) определяют  $n$ -мерные вещественные представления группы  $G$ , где  $n$  – порядок группы. Представления  $T^{(R)}$  и  $\tilde{T}^{(R)}$  называются левым и правым регулярными представлениями группы  $G$ , соответственно.

- **Задача 116.** Доказать, что для матриц регулярных представлений  $T^{(R)}$  и  $\tilde{T}^{(R)}$  имеют место тождества

$$\left(\tilde{T}^{(R)}(g)\right)^T = \tilde{T}^{(R)}(g^{-1}), \quad \left(T^{(R)}(g)\right)^T = T^{(R)}(g^{-1}), \quad \forall g \in G.$$

*Указание.* Любая матрица  $A$ , задающая перестановку, удовлетворяет равенству  $A^T = A^{-1}$ , которое в свою очередь следует из того, что любая перестановка записывается в виде произведения транспозиций.

Приведем явный вид 3-х мерного левого регулярного представления  $T^{(R)}$  для группы  $S_3$ , которое задается соотношениями (4.1.17):

$$\begin{aligned} e \cdot (e, g_1, g_2) &= (e, g_1, g_2) = (e, g_1, g_2) T^{(R)}(e), \\ g_1 \cdot (e, g_1, g_2) &= (g_1, g_2, e) = (e, g_1, g_2) T^{(R)}(g_1), \\ g_2 \cdot (e, g_1, g_2) &= (g_2, e, g_1) = (e, g_1, g_2) T^{(R)}(g_2) \end{aligned}$$

Видно, что

$$T^{(R)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{(R)}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(R)}(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.20) \quad \text{regc3}$$

- **Задача 117.** Построить изоморфизм  $T_1: D_3 \rightarrow S_3$  и гомоморфизм  $T_2: D_4 \rightarrow S_4$ , учитывая то, что элементы групп  $D_3$  и  $D_4$  можно рассматривать как перестановки вершин треугольника и квадрата, соответственно. Построить соответствующие матричные  $3 \times 3$  и  $4 \times 4$  представления для групп  $D_3$  и  $D_4$ .
- **Задача 118.** Построить левое и правое регулярные представления для группы  $D_3 = S_3$ .

**Определение 4.1.4** Представление  $T: G \rightarrow \Gamma$  называется точным, если  $T$  – гомоморфизм из  $G$  в  $\Gamma$ , т.е.,  $T$  – изоморфизм между элементами  $G$  и элементами образа  $T(G) \subset \Gamma$  (см. Определение 2.3.1). Представление будет неточным, если более чем один элемент группы  $G$  представляется одним и тем же оператором из  $\Gamma$ .

Если  $T$  – точное представление, то ядро гомоморфизма  $T: G \rightarrow \Gamma$  тривиально. Наоборот, пусть представление  $T$  группы  $G$  неточное и пусть  $H = \text{Ker}(T)$  – ядро гомоморфизма  $T: G \rightarrow \Gamma$ . Тогда  $T$  будет точным представлением для факторгруппы  $G/H$ .

• **Задача 119.** Доказать сделанные утверждения.

В качестве примера рассмотрим гомоморфное отображение  $T$  группы  $O(n)$  в группу чисел  $\Gamma = \{1, -1\}$  ( $\Gamma$  можно воспринимать как подгруппу операторов в одномерном вещественном векторном пространстве) такое, что

$$T(g) = \det(g) , \quad \forall g \in O(n) .$$

Этот гомоморфизм  $T$  – одномерное неточное представление. Ядро  $\text{Ker}(T) = SO(n)$  нетривиально: как мы знаем  $O(n)/SO(n) = \mathbf{Z}_2$ . В то же время изоморфизм, задаваемый  $T$ ,

$$\mathbf{Z}_2 = \{I_n \cdot SO(n), R \cdot SO(n)\} \xleftarrow{T} \Gamma = \{1, -1\} ,$$

есть точное представление факторгруппы  $O(n)/SO(n) = \mathbf{Z}_2$  в группе чисел  $\Gamma = \{1, -1\}$ .

### 4.1.3 Эквивалентные представления.

Два представления  $T$  и  $\tilde{T}$  группы  $G$  в пространствах  $\mathcal{V}$  и  $\tilde{\mathcal{V}}$  называются эквивалентными, если существует обратимый оператор  $S: \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$  такой, что

$$\tilde{T}(g) = S^{-1} \cdot T(g) \cdot S , \quad \forall g \in G . \quad (4.1.21) \quad \text{podob1}$$

Тот факт, что новое отображение  $\tilde{T}$  (4.1.21) – представление (т.е. гомоморфизм), при условии, что  $T$  – гомоморфизм, следует из цепочки равенств

$$\tilde{T}(g_1) \cdot \tilde{T}(g_2) = S^{-1} T(g_1) S S^{-1} T(g_2) S = S^{-1} \cdot T(g_1) \cdot T(g_2) \cdot S = S^{-1} \cdot T(g_1 g_2) \cdot S = \tilde{T}(g_1 g_2) .$$

Пусть представления  $T$  и  $\tilde{T}$  действуют в одном и том же  $n$ -мерном векторном пространстве  $\mathcal{V} = \tilde{\mathcal{V}}$ . В некотором выбранном базисе  $\{\vec{e}_i\} \in \mathcal{V}$  соотношение (4.1.21), согласно (4.1.3), переписывается в матричном виде

$$\tilde{T}_{ij}(g) = S_{ik}^{-1} T_{km}(g) S_{mj} , \quad \forall g \in G , \quad (4.1.22) \quad \text{podob}$$

где  $(n \times n)$  матрицы  $\|T_{ij}(g)\|$  соответствуют операторам  $T(g)$  в выбранном базисе  $\{\vec{e}_i\}$ . При переходе (2.2.38) к новому базису  $\vec{e}_i' \in \mathcal{V}$  матрицы операторов  $T(g)$  будут преобразовываться согласно (2.2.39), т.е. перейдут в матрицы  $\|\tilde{T}_{ij}(g)\|$  (4.1.22). Таким образом, преобразование эквивалентности (4.1.22) можно рассматривать как запись тех же операторов  $T(g)$  в новом базисе  $\{\vec{e}_i'\}$ , а матрица  $\|S_{ij}\|$  задает переход (2.2.38) к новому базису.

**Пример.** Любой элемент  $SU(2)$  в определяющем представлении (4.1.8) имеет вид (3.1.14) (смотри пример 7 из подраздела 3.1.2). Тогда соответствующий элемент  $SU(2)$  в комплексно сопряженном представлении (4.1.13) будет даваться матрицей

$$U^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} . \quad (4.1.23) \quad \text{msu2s}$$

Теперь легко проверить явно, что любая матрица  $U$  (3.1.14) и ее комплексно сопряженная матрица  $U^*$  (4.1.23) связаны соотношениями

$$U^* = S U S^{-1}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определяющее представление группы  $SU(2)$  эквивалентно своему комплексно сопряженному представлению. Отметим, что для групп  $SU(N)$  с  $N > 2$  аналогичное утверждение несправедливо.

#### 4.1.4 Характер представления.

Для эквивалентных матричных представлений  $T$  и  $\tilde{T}$  мы имеем тождество следов

$$\mathrm{Tr}(\tilde{T}(g)) = \mathrm{Tr}(S^{-1} \cdot T(g) \cdot S) = \mathrm{Tr}(T(g)) \quad (\forall g \in G). \quad (4.1.24) \quad \text{tsp}$$

Определим функцию на группе  $G$ , зависящую от представления  $T$ ,

$$\chi_T(g) := \mathrm{Tr}(T(g)) \quad (\forall g \in G),$$

которая называется характером представления  $T$  и является важнейшей характеристикой представления. Из (4.1.24) очевидно следует, что для эквивалентных представлений  $T$  и  $\tilde{T}$  их характеры совпадают,  $\chi_{\tilde{T}} = \chi_T$ . Для широкого класса групп и их представлений справедливо и обратное утверждение: если характеры двух представлений совпадают, то эти представления эквивалентны (см. в связи с этим подраздел 4.6.2). Это значительно упрощает выяснение вопроса об эквивалентности двух представлений.

Отметим, что элементы  $g_1$  и  $g_2$  из одного и того же класса сопряженности (то есть элементы, связанные соотношением  $g_1 = g \cdot g_2 \cdot g^{-1}$ ,  $g \in G$ ) имеют одинаковое значение характера  $\chi_T(g_1) = \chi_T(g_2)$ , поэтому характер – это функция на классах сопряженности группы  $G$ . Наконец, для единичного элемента  $e \in G$  имеем  $\chi_T(e) = n$ , где  $n$  – размерность представления  $T$ .

**Пример.** Рассмотрим определяющее представление (4.1.8) группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , которое дается  $2 \times 2$  комплексными матрицами

$$||g_{ij}|| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(||g_{ij}||) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Для комплексно-сопряженного определяющего представления согласно (4.1.13) имеем

$$||g_{ij}^*|| = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{pmatrix},$$

и существуют элементы  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  такие, что их характеры для определяющего и его комплексно-сопряженного представлений не совпадают

$$\chi(g) = \alpha_{11} + \alpha_{22} \neq \alpha_{11}^* + \alpha_{22}^* = \chi^*(g).$$

Например, можно выбрать  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$  и  $\alpha_{11} = 1/\alpha_{22} = \rho e^{i\phi}$ , где  $\rho^2 \neq 1$ ,  $\phi \neq \pi n$ . Таким образом, характеры для определяющего представления  $SL(2, \mathbb{C})$  и его комплексно-сопряженного представления не совпадают и данные представления группы  $SL(2, \mathbb{C})$  не эквивалентны.



- *Задача 120. Сравнить характеры для определяющего представления  $SU(2)$  и его комплексно-сопряженного представления.*

## 4.2 Представления алгебр Ли.

### 4.2.1 Определение представления алгебры Ли.

**Определение 4.2.1** Представлением  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{K}$  в пространстве  $\mathcal{V}(\mathbf{K}')$ ,  $\mathbb{K} \subset \mathbf{K}'$ , называется гомоморфизм  $T$  из  $\mathcal{A}$  в алгебру линейных операторов, действующих в  $\mathcal{V}(\mathbf{K}')$ , согласованный с операциями в алгебре Ли  $\mathcal{A}$ , т.е.

$$T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad (4.2.1) \quad \text{repA}$$

$$T([A, B]) = [T(A), T(B)], \quad (4.2.2) \quad \text{repAG}$$

где  $A, B \in \mathcal{A}$  и  $[T(A), T(B)] \equiv T(A) \cdot T(B) - T(B) \cdot T(A)$ .

Отметим, что вещественные алгебры Ли, для которых  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , могут иметь как вещественные, так и комплексные представления (при этом  $\mathbf{K}' = \mathbb{R}$  и  $\mathbf{K}' = \mathbb{C}$ , соответственно). Представления комплексных алгебр Ли — всегда комплексные.

Пусть представление  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  действует в  $n$ -мерном векторном пространстве  $\mathcal{V}_n$  с базисом  $\{\vec{e}_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). В этом случае представление  $T$  называется  $n$ -мерным. Представление  $T$  каждому элементу  $A \in \mathcal{A}$  сопоставляет как линейный оператор  $T(A)$ , действующий в  $\mathcal{V}_n$ , так и его матрицу, которая определяется согласно правилу

$$T(A) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j T_{ji}(A). \quad (4.2.3) \quad \text{Te2wA}$$

**Определение 4.2.2** Два представления  $T$  и  $\tilde{T}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  (в пространствах  $\mathcal{V}$  и  $\tilde{\mathcal{V}}$ , соответственно) эквивалентны, если существует обратимый оператор  $S$ , действующий из  $\mathcal{V}$  в  $\tilde{\mathcal{V}}$ , такой, что

$$\tilde{T}(A) = S T(A) S^{-1}, \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (4.2.4) \quad \text{repAp}$$

Если  $T: G \rightarrow \Gamma$  — представление группы Ли  $G$  в пространстве  $\mathcal{V}$ , то с его помощью строится представление  $T'$  соответствующей алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  в пространстве  $\mathcal{V}$ . Для этого рассмотрим гладкую кривую  $g(t)$  вблизи единичного элемента  $e \in G$  с касательным вектором  $A$ . Этой кривой соответствует гладкая кривая  $T(g(t))$  в группе  $\Gamma$  (в образе отображения  $T$ ), которая при малых  $t$  имеет разложение

$$T(g(t)) = I + t T'(A) + O(t^2). \quad (4.2.5) \quad \text{repAG1}$$

Касательный вектор  $T'(A)$  к кривой  $T(g(t))$  (4.2.5) есть линейный оператор, действующий в  $\mathcal{V}$ . Для достаточно гладких отображений  $T$  он определяется только вектором  $A \in \mathcal{A}(G)$ , касательным к кривой  $g(t)$  (не зависит от выбора кривой  $g(t)$ , лишь бы она имела касательный вектор  $A$ ). Таким образом, формула (4.2.5) задает отображение  $T'$  из алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  в множество операторов, действующих в  $\mathcal{V}$ . Это отображение удовлетворяет всем свойствам (4.2.1), (4.2.2), а следовательно задает представление

алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  в пространстве  $\mathcal{V}$  и является отображением из касательного пространства  $\mathcal{A}(G)$  в касательное пространство  $A(\Gamma)$ . Таким образом, представление  $T$  группы Ли  $G$  в пространстве  $\mathcal{V}$  порождает представление алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  в том же пространстве.

- **Задача 121.** Проверить, что определенное равенством (4.2.5) отображение  $T'$  из алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  в множество операторов, действующих в  $\mathcal{V}$ , удовлетворяет свойствам (4.2.1), (4.2.2).

Согласно общему определению (смотри Замечание 3 в подразделе 3.1.5) отображение  $T'$  есть не что иное как производная отображения  $T: G \rightarrow \Gamma$  в точке  $e \in G$ . Производную  $T'_{g_0}$  отображения  $T$  можно построить в любой другой точке  $g_0 \in G$ , при этом  $T'_{g_0}$  отображает касательное пространство  $A(G, g_0)$  к многообразию  $G$  в точке  $g_0$  в соответствующее касательное пространство  $A(\Gamma, T(g_0))$  к многообразию  $\Gamma$  в точке  $T(g_0)$ .

В дальнейшем представление  $T$  группы Ли и соответствующее представление  $T'$  ее алгебры Ли мы будем обозначать одним и тем же символом  $T$ , если это не будет приводить к недоразумению.

Пусть  $T$  – унитарное представление (см. Определение 4.1.2) группы  $G$  в векторном пространстве  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ . Тогда из (4.2.5) следует, что для соответствующего представления алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  операторы  $T(A)$ , для всех  $A \in \mathcal{A}(G)$ , антиэрмитовы:

$$f_H(T(A) \cdot \vec{x}, \vec{y}) + f_H(\vec{x}, T(A) \cdot \vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}(\mathbb{C}).$$

Если группа Ли  $\hat{G}$  есть универсальная накрывающая группы Ли  $G$  (смотри раздел 3.2.13), то группы  $\hat{G}$  и  $G$  локально изоморфны, то есть имеют изоморфные (см. Определение 3.2.4) алгебры Ли  $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(\hat{G})$ . При этом группы  $\hat{G}$  и  $G$ , вообще говоря, различны, так как их многообразия отличаются своими глобальными свойствами. В качестве примера снова приведем группы  $SU(2)$  и  $SO(3)$ , первая из которых дважды накрывает вторую (смотри раздел 3.2.13), и которые имеют изоморфные алгебры Ли  $su(2) = so(3)$ . Все представления группы Ли  $G$  одновременно являются и представлениями ее универсальной накрывающей  $\hat{G}$ . Обратное не верно. Отсюда ясно, что алгебра Ли  $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(\hat{G})$ , может иметь такие представления, которые получаются с помощью (4.2.5) из представлений группы  $\hat{G}$ , но не могут быть получены таким же способом из представлений группы  $G$ .

Пусть группа  $\hat{G}$  накрывает  $m$  раз группу  $G$ . В этом случае точное неприводимое представление накрывающей группы Ли  $\hat{G}$  иногда называется  $m$ -значным представлением группы  $G$ .

**Утверждение 4.2.1** Пусть  $G$  – группа Ли,  $\mathcal{A}(G)$  – ее алгебра Ли и  $\hat{G}$  – универсальная накрывающая группы  $G$ . Тогда всякое конечномерное представление  $T$  алгебры  $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(\hat{G})$  в пространстве  $\mathcal{V}$  порождается некоторым представлением универсальной накрывающей, то есть существует такое представление  $\bar{T}(\hat{G})$  в пространстве  $\mathcal{V}$ , что  $\bar{T}(\hat{g}_A(t)) = 1 + t \cdot T(A) + O(t^2)$ , где  $\hat{g}_A(t)$  – кривая в  $\hat{G}$  с касательным вектором  $A$ .

Мы поясним справедливость этого Утверждения следующим рассуждением. Для всякого конечномерного представления  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  можно построить, пользуясь экспоненциальным отображением, соответствующую матричную группу  $G'$ . Эта матричная группа по построению будет локально изоморфна универсальной накрывающей группе  $\hat{G}$  и следовательно будет гомоморфно накрываться группой  $\hat{G}$ . Таким образом, существует гомоморфизм  $\bar{T}: \hat{G} \rightarrow G'$ , который можно рассматривать как некоторое представление группы  $\hat{G}$ . Это представление  $\bar{T}$  группы  $\hat{G}$  будет определять согласно процедуре (4.2.5) представление алгебры Ли группы  $\hat{G}$ , которое опять же по построению будет совпадать с исходным представлением  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ , что и требовалось.

### 4.2.2 Примеры представлений алгебр Ли.

Приведем важные для дальнейшего примеры представлений алгебр Ли  $\mathcal{A}$ , которые естественно связаны с примерами представлений групп Ли из Раздела 4.1.1.

#### 1. Тривиальное представление.

У любой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  имеется тривиальное одномерное представление:  $T(A) = 0$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ . Для  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$  это представление алгебры Ли, согласно (4.2.5), соответствует тривиальному представлению (4.1.7) группы Ли  $G$ .

#### 2. Определяющее (фундаментальное) представление.

Пусть  $G$  – матричная группа Ли, состоящая из матриц  $(n \times n)$  (например,  $SU(n)$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$  или  $SO(n)$ ) и  $\mathcal{A}(G)$  – соответствующая матричная алгебра Ли. Пусть  $\mathcal{V}_n$  –  $n$ -мерное векторное пространство с базисом  $\{\vec{e}_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и пусть матрица  $A = \|A_{ij}\|$  – элемент алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ . Определяющее представление  $T$  задается соотношениями

$$T(A) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j A_{ji}.$$

Это представление алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  соответствует определяющему представлению (4.1.8) группы Ли  $G$ . Если матрицы алгебры  $\mathcal{A}(G)$  вещественные, то можно рассматривать как вещественное определяющее представление, так и комплексное; если же матрицы алгебры  $\mathcal{A}(G)$  комплексные, то определяющее представление – комплексное.

#### 3. Представление $T^*$ , сопряженное представлению $T$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – вещественная алгебра Ли и  $T$  – ее  $n$ -мерное комплексное представление. Представление  $T^*$ , как отображение из  $\mathcal{A}$  в множество линейных операторов, действующих в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{C})$ , задается соотношениями

$$T^*(A) \vec{e}_i = \vec{e}_j (T_{ji}(A))^*, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

где  $\|(T_{ji}(A))^*\|$  – матрицы, комплексно сопряженные матрицам представления  $T$ . Для определяющего представления алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  матричной группы  $G$  мы получаем

$$T^*(A) \vec{e}_i = \vec{e}_j A_{ji}^*.$$

Отметим, что при попытке построения сопряженного представления  $T^*$  комплексной алгебры Ли, мы вместо условия линейности в (4.2.1) столкнулись бы со свойством антилинейности:  $T^*(\alpha A + \beta B) = \alpha^* T^*(A) + \beta^* T^*(B)$ .

#### 4. Контраградиентное представление (ко-представление) $\tilde{T}$ .

Пусть  $T$  —  $n$ -мерное представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , заданное соотношениями (4.2.3). Контраградиентное к  $T$  представление  $\tilde{T}$  сопоставляет каждому элементу  $A \in \mathcal{A}$  линейный оператор  $\tilde{T}(A)$ , действующий в  $\mathcal{V}_n$  и заданный соотношениями

$$\tilde{T}(A) \cdot \vec{e}_i = -T_{ij}(A) \vec{e}_j . \quad (4.2.6) \quad \text{cogrA}$$

Таким образом, ко-представление  $\tilde{T}$  реализуется операторами  $\tilde{T}(A) = -T(A)^T$ . Гомоморфность отображения  $\tilde{T}$  легко проверяется:

$$\begin{aligned} [\tilde{T}(A_1), \tilde{T}(A_2)] &= [T(A_1)^T, T(A_2)^T] = -([T(A_1), T(A_2)])^T = \\ &= - (T([A_1, A_2]))^T = \tilde{T}([A_1, A_2]) \quad , \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A} . \end{aligned}$$

Очевидно, что если  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ , и  $T(A)$  порождается представлением  $T(G)$  группы  $G$ , то ко-представление алгебры  $\mathcal{A}(G)$  порождается ко-представлением (4.1.11) группы  $G$ .

#### 5. Присоединенное представление $\text{ad}$ алгебры Ли $\mathcal{A}$ .

Присоединенное представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$  — это линейный гомоморфизм  $\text{ad}$  из  $\mathcal{A}$  в алгебру линейных операторов, действующих в самой алгебре Ли  $\mathcal{A}$  следующим образом (см. (3.2.104)):

$$\text{ad}(Y) \cdot X = [Y, X] , \quad \forall X, Y \in \mathcal{A} . \quad (4.2.7) \quad \text{liad1}$$

Отображение  $\text{ad}$  — гомоморфизм:

$$\text{ad}([X, Y]) = [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)] , \quad (4.2.8) \quad \text{liad2}$$

так как  $\forall Z \in \mathcal{A}$  тождество Якоби (3.2.73) дает:

$$\text{ad}([X, Y]) \cdot Z = [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)] \cdot Z .$$

- **Задача 122. Доказать тождество:**

$$\text{ad}(X) \cdot [A, B] = [\text{ad}(X) \cdot A, B] + [A, \text{ad}(X) \cdot B] , \quad \forall X, A, B \in \mathcal{A} , \quad (4.2.9) \quad \text{liad3}$$

*из которого следует, что операторы  $\text{ad}(X)$  действуют в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  как операторы дифференцирования (выполнено правило Лейбница).*

Если  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ , то присоединенное представление алгебры (4.2.7) порождается присоединенным представлением группы  $G$  (4.1.15). Действительно, в случае матричной группы  $G$ , если при малом  $t$  подставить  $g_X = I_n + tX + O(t^2)$  в (4.1.15), то мы получим

$$\text{ad}(g_X) \cdot Y = (I_n + tX + O(t^2)) Y (I_n - tX + O(t^2)) = Y + t[X, Y] + O(t^2) ,$$

что с учетом (4.2.7) дает

$$\text{ad}(g_X) \cdot Y = Y + t \text{ad}(X) \cdot Y + O(t^2) . \quad (4.2.10) \quad \text{dec11-11-3}$$

В общем случае связь между присоединенным представлением группы  $G$  и ее алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  дает формула (4.1.16), а также определение алгебр Ли, приведенное в разделе 3.2.5. Формула (4.2.10) остается справедливой, если считать  $t$  параметром вдоль кривой  $g_X(t)$ , определяющей касательный вектор  $X$ .

В алгебре Ли  $\mathcal{A}$  в выбранном базисе  $\{X_a\}$  со структурными соотношениями (3.2.71) формулы (4.2.7) определяют линейный гомоморфизм  $\text{ad}$  из  $\mathcal{A}$  в алгебру матриц размера  $(\dim \mathcal{A} \times \dim \mathcal{A})$

$$\text{ad} : X_a \rightarrow (\tilde{X}_a)_b^d = C_{ab}^d \equiv (\text{ad}(X_a))_b^d, \quad (4.2.11) \quad \text{liad}$$

где матрицы  $\tilde{X}_a$  уже вводились в (3.2.106). Условие гомоморфности (4.2.8) для отображения (4.2.11) дается формулой (3.2.108). Напомним, что пользуясь представлением (4.2.11), метрику Киллинга (3.2.100) можно записать в виде (3.2.107), то есть

$$g_{ab} = \text{Tr}(\text{ad}(X_a)\text{ad}(X_b)). \quad (4.2.12) \quad \text{li04k}$$

Наконец отметим, что для вещественных алгебр Ли присоединенное представление (4.2.11) всегда вещественное.

**Определение 4.2.3** *Представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , контраградиентное к присоединенному представлению, называется ко-присоединенным представлением алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .*

- **Задача 123.** Доказать, что присоединенное и ко-присоединенное представления простой (полупростой) алгебры Ли — эквивалентны. Указание: воспользоваться невырожденностью метрики Киллинга и антисимметричностью (3.2.109) структурных констант.

### 4.3 Прямое произведение и прямая сумма представлений.

Пусть  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  — два представления группы Ли  $G$  (или алгебры Ли  $\mathcal{A}$ ). Из этих представлений с помощью двух процедур, которые называются прямой суммой и прямым произведением представлений, можно строить новые представления группы  $G$  (или алгебры Ли  $\mathcal{A}$ ).

#### 4.3.1 Прямое (тензорное) произведение представлений. Тензоры.

Рассмотрим  $n$ -мерное и  $m$ -мерное векторные пространства  $V_n(\mathbb{K})$  и  $V_m(\mathbb{K})$  с базисами  $\{\vec{e}_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $\{\vec{e}_a\}$  ( $a = 1, \dots, m$ ) соответственно. Двум векторам  $\vec{x} = x_i \vec{e}_i \in V_n(\mathbb{K})$  и  $\vec{y} = y_a \vec{e}_a \in V_m(\mathbb{K})$  сопоставим  $(n \cdot m)$ -мерный вектор  $\vec{z}$  с координатами

$$(z_1, z_2, \dots, z_{n \cdot m}) = (x_1 y_1, \dots, x_1 y_m, x_2 y_1, \dots, x_2 y_m, \dots, x_n y_1, \dots, x_n y_m), \quad (4.3.1) \quad \text{prvect}$$

который принадлежит  $(n \cdot m)$ -мерному пространству  $\mathcal{V}_{n \cdot m}(\mathbb{K})$ . Вектор  $\vec{z} \in \mathcal{V}_{n \cdot m}(\mathbb{K})$  с координатами (4.3.1) называется прямым произведением векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  и обозначается  $(\vec{x} \otimes \vec{y})$ . Согласно (4.3.1) вектор  $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_a)$  имеет координаты

$$(z_1, z_2, \dots, z_{n \cdot m}) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(i-1)m+a-1}, 1, 0, \dots, 0),$$

ISA  
Назва-  
ние

и следовательно набор векторов  $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_a)$  образует базис в  $\mathcal{V}_{n \cdot m}(\mathbb{K})$ . Рассмотрим теперь все вектора вида

$$\vec{v} = v_{ia} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_a) \in \mathcal{V}_{n \cdot m}(\mathbb{K}), \quad v_{ia} \in \mathbb{K}. \quad (4.3.2) \quad \text{prvect1}$$

Сложение таких векторов и умножение их на число определяется стандартным образом, поэтому все вектора (4.3.2) образуют линейное пространство, которое называется прямым (тензорным) произведением пространств  $V_n(\mathbb{K})$  и  $V_m(\mathbb{K})$  и обозначается  $V_n(\mathbb{K}) \otimes V_m(\mathbb{K})$ . Множество  $V_n(\mathbb{K}) \otimes V_m(\mathbb{K})$  как векторное пространство совпадает с  $V_{n \cdot m}(\mathbb{K})$ , однако оно имеет специфические свойства, связанные с преобразованиями базиса отдельно в сомножителях  $V_n(\mathbb{K})$  и  $V_m(\mathbb{K})$ . Почеркнем еще раз, что размерность пространства  $V_n(\mathbb{K}) \otimes V_m(\mathbb{K})$  равна произведению размерностей пространств  $V_n(\mathbb{K})$  и  $V_m(\mathbb{K})$ .

ISA

**Определение 4.3.1** *Элементы тензорного произведения  $r$  векторных пространств*

$$v \in V_{n_1}(\mathbb{K}) \otimes V_{n_2}(\mathbb{K}) \otimes \cdots \otimes V_{n_r}(\mathbb{K}),$$

называются тензорами ранга  $r$ . Пусть  $\vec{e}_{i_k}^{(k)}$  ( $i_k = 1, \dots, n_k$ ) — базисные вектора в пространстве  $V_{n_k}(\mathbb{K})$ . Тогда

$$v = v_{i_1, i_2, \dots, i_r} \vec{e}_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r}^{(r)}, \quad (4.3.3) \quad \text{prvect1t}$$

и  $v_{i_1, i_2, \dots, i_r} \in \mathbb{K}$  называются коэффициентами тензора  $v$  ранга  $r$ .

С точки зрения этого определения любой вектор  $\vec{x} \in V_n(\mathbb{K})$  можно назвать тензором первого ранга, а вектор (4.3.2) является тензором второго ранга.

Пусть  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  — два представления одной и той же группы  $G$ , которые действуют в пространствах  $V_n(\mathbb{K})$  и  $V_m(\mathbb{K})$ , соответственно. Тогда в пространстве  $V_n(\mathbb{K}) \otimes V_m(\mathbb{K})$  можно определить представление  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  группы  $G$  согласно правилу

$$T^{(p)}(g) \cdot (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_b) = (T^{(1)}(g) \cdot \vec{e}_k \otimes T^{(2)}(g) \cdot \vec{e}_b) = (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_a) T_{ik}^{(1)}(g) T_{ab}^{(2)}(g), \quad (4.3.4) \quad \text{prvect2}$$

где  $\|T_{ik}^{(1)}(g)\|$  и  $\|T_{ab}^{(2)}(g)\|$  —  $(n \times n)$  и  $(m \times m)$  матрицы представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ :

$$T^{(1)}(g) \cdot \vec{e}_k = \vec{e}_i T_{ik}^{(1)}(g), \quad T^{(2)}(g) \cdot \vec{e}_b = \vec{e}_a T_{ab}^{(2)}(g), \quad (4.3.5) \quad \text{prvect4}$$

$$(T^{(1)}(g) \cdot \vec{x})_i = T_{ik}^{(1)}(g) x_k, \quad (T^{(2)}(g) \cdot \vec{y})_a = T_{ab}^{(2)}(g) y_b. \quad (4.3.6) \quad \text{prv4}$$

Соответственно, для координат вектора  $\vec{v}$  (4.3.2) мы получаем преобразования

$$\begin{aligned} (T^{(p)}(g) \cdot \vec{v})_{ia} &= (T^{(1)}(g) \otimes T^{(2)}(g))_{ia, kb} v_{kb} = \\ &= T_{ik}^{(1)}(g) T_{ab}^{(2)}(g) v_{kb} = (T^{(1)}(g) \cdot v \cdot (T^{(2)}(g))^T)_{ia}. \end{aligned} \quad (4.3.7) \quad \text{prv6}$$

Здесь композитная  $(n \cdot m \times n \cdot m)$  матрица

$$\|T_{ia, kb}^{(p)}(g)\| = \|(T^{(1)}(g) \otimes T^{(2)}(g))_{ia, kb}\| = \|T_{ik}^{(1)}(g) T_{ab}^{(2)}(g)\|, \quad (4.3.8) \quad \text{prvect5}$$

есть прямое произведение двух матриц  $\|T_{ik}^{(1)}(g)\|$  и  $\|T_{ab}^{(2)}(g)\|$  (см. (2.2.18)) и, в соответствии с расстановкой координат (4.3.1), записывается в виде блочной  $(n \times n)$  матрицы (сравните с (2.2.19))

$$T^{(p)}(g) = \begin{pmatrix} T_{11}^{(1)}(g)\|T_{ab}^{(2)}(g)\| & \dots & T_{1n}^{(1)}(g)\|T_{ab}^{(2)}(g)\| \\ T_{21}^{(1)}(g)\|T_{ab}^{(2)}(g)\| & \dots & T_{2n}^{(1)}(g)\|T_{ab}^{(2)}(g)\| \\ \vdots & \dots & \vdots \\ T_{n1}^{(1)}(g)\|T_{ab}^{(2)}(g)\| & \dots & T_{nn}^{(1)}(g)\|T_{ab}^{(2)}(g)\| \end{pmatrix}, \quad (4.3.9) \quad \text{prvect3}$$

где каждый блок имеет размер  $(m \times m)$ . Отображение  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  определяет новое представление группы  $G$ , которое называется прямым (или тензорным) произведением представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ . Свойство гомоморфизма для отображения  $T^{(p)}$  следует из гомоморфности отображений  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  и его легко проверить, пользуясь операторной формой записи

$$\begin{aligned} T^{(p)}(g_1) \cdot T^{(p)}(g_2) &= (T^{(1)}(g_1) \otimes T^{(2)}(g_1)) \cdot (T^{(1)}(g_2) \otimes T^{(2)}(g_2)) = \\ &= T^{(1)}(g_1)T^{(1)}(g_2) \otimes T^{(2)}(g_1)T^{(2)}(g_2) = T^{(1)}(g_1g_2) \otimes T^{(2)}(g_1g_2) = T^{(p)}(g_1g_2). \end{aligned}$$

Доказательство этого тождества в матричной форме проводится с использованием правила (2.2.20) для умножения матриц  $(A \otimes B)$  и  $(C \otimes D)$ . Отметим, что характер представления  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$ , согласно (4.3.9), равен произведению характеров представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ :

$$\chi_{T^{(p)}}(g) = \chi_{T^{(1)}}(g) \cdot \chi_{T^{(2)}}(g).$$

**Пример.** Рассмотрим два представления группы  $C_3 = \mathbf{Z}_3$  – одномерное представление  $T^{(1)}$ :

$$T^{(1)}(e) = 1, \quad T^{(1)}(g_1) = q, \quad T^{(1)}(g_2) = q^2, \quad q \equiv \exp(2\pi i/3), \quad (4.3.10) \quad \text{1mrep}$$

и 3-х мерное регулярное представление  $T^{(2)} = T^{(R)}$  (4.1.20). Новое представление  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(R)}$  – 3-х мерно и согласно (4.3.9) имеет вид

$$T^{(p)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{(p)}(g_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(p)}(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конструкция (4.3.4), (4.3.7) тензорного произведения двух представлений группы  $G$  очевидным образом обобщается на случай тензорного произведения любого числа представлений. Пусть  $T^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) – представления группы  $G$  в пространствах  $V_{n_\alpha}(\mathbb{K})$ . Тогда в пространстве  $V_{n_1}(\mathbb{K}) \otimes \dots \otimes V_{n_r}(\mathbb{K})$  (в пространстве тензоров ранга  $r$ , смотри Определение 4.3.1) можно задать представление  $T_r^{(p)} = T^{(1)} \otimes \dots \otimes T^{(r)}$  группы  $G$  согласно правилу

$$T_r^{(p)}(g) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) = (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) T_{j_1 i_1}^{(1)}(g) \dots T_{j_r i_r}^{(r)}(g), \quad \forall g \in G, \quad (4.3.11) \quad \text{prvect2t}$$

где  $\|T_{ik}^{(\alpha)}(g)\| = (n_\alpha \times n_\alpha)$  матрицы операторов  $T^{(\alpha)}(g)$ . Соответственно, для координат  $v_{i_1, \dots, i_r}$  тензора (4.3.3) мы получаем преобразования

$$v_{i_1, \dots, i_r} \rightarrow (T_r^{(p)}(g) \cdot v)_{i_1, \dots, i_r} = T_{i_1 j_1}^{(1)}(g) \cdots T_{i_r j_r}^{(r)}(g) v_{j_1, \dots, j_r}. \quad (4.3.12) \quad \text{prv6t}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение.

ISA

**Определение 4.3.2** Тензор  $v \in V_{n_1}(\mathbb{K}) \otimes \cdots \otimes V_{n_r}(\mathbb{K})$  называется инвариантным относительно действия группы  $G$ , если при преобразованиях (4.3.11), (4.3.12) для его координат мы имеем  $(T_r^{(p)}(g) \cdot v)_{i_1, \dots, i_r} = v_{i_1, \dots, i_r}$ .

Пусть  $G$  – группа Ли. Вблизи единичного элемента группы  $G$  для представления  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  и кривой  $g_A(t)$  с касательным вектором  $A$  мы имеем разложение (см. (4.2.5)):

$$\begin{aligned} T^{(p)}(g_A(t)) &= T^{(1)}(g_A(t)) \otimes T^{(2)}(g_A(t)) = \\ &= (I_n + t T^{(1)}(A) + O(t^2)) \otimes (I_m + t T^{(2)}(A) + O(t^2)) = \\ &= I_n \otimes I_m + t (T^{(1)}(A) \otimes I_m + I_n \otimes T^{(2)}(A)) + O(t^2), \end{aligned}$$

где  $A \in \mathcal{A}(G)$ . Поэтому для алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  тензорное произведение двух представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  определяется отображением  $T^{(p)}$  вида

$$T^{(p)}(A) = (T^{(1)}(A) \otimes I_m + I_n \otimes T^{(2)}(A)) , \quad (4.3.13) \quad \text{mrep1}$$

и действует по правилу

$$\begin{aligned} (T^{(p)}(A) \cdot \vec{v})_{ia} &= (T^{(1)}(A) \otimes I_m + I_n \otimes T^{(2)}(A))_{ia, kb} v_{kb} = \\ &= T_{ik}^{(1)}(A) v_{ka} + T_{ab}^{(2)}(A) v_{ib}. \end{aligned} \quad (4.3.14) \quad \text{mrep01}$$

Аналогично для представления  $T_r^{(p)} = T^{(1)} \otimes \cdots \otimes T^{(r)}$  элемента  $A$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  мы получаем формулу:

$$T_r^{(p)}(A) = \sum_{m=1}^r I_{(1)} \otimes \cdots \otimes I_{(m-1)} \otimes T^{(m)}(A) \otimes I_{(m+1)} \otimes \cdots \otimes I_{(r)}. \quad (4.3.15) \quad \text{mrep77b}$$

где  $I_m := T^{(m)}(I)$ .

- **Задача 124.** Написать аналог формулы (4.3.14) для случая тензора произвольного ранга  $r > 2$ .

ISA  
нец

С точки зрения квантовой механики прямое произведение  $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  двух представлений группы  $G$  описывает систему, состоящую из двух независимых подсистем (например, спинов), соответствующих представлениям  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ . Тогда формула (4.3.13) соответствует тому, что в квантовой механике называется правилом сложения спинов двух подсистем.

Определение (4.3.13) прямого произведения двух представлений без изменений распространяется на общий случай алгебр Ли  $\mathcal{A}$  безотносительно к группам Ли.



## 4.3.2 Прямая сумма представлений.

Из двух векторов  $\vec{x} = x_i \vec{e}_i \in V_n(\mathbb{K})$  и  $\vec{y} = y_a \vec{e}_a \in V_m(\mathbb{K})$  можно построить новый  $(n+m)$ -мерный вектор  $\vec{w}$  с координатами  $\{w_A\}$  ( $A = 1, \dots, n+m$ ):

$$(w_1, w_2, \dots, w_{n+m}) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (4.3.16) \quad \text{prsu2}$$

и, считая все  $\vec{e}_i$  и  $\vec{e}_a$  линейно независимыми, рассмотреть всевозможные вектора вида

$$\vec{w} = \vec{e}_i x_i + \vec{e}_a y_a, \quad \forall x_i, y_a \in \mathbb{K}. \quad (4.3.17) \quad \text{prsu}$$

Эти вектора образуют  $(n+m)$ -мерное векторное пространство, которое называется прямой суммой пространств  $V_n(\mathbb{K})$  и  $V_m(\mathbb{K})$  и обозначается  $V_n(\mathbb{K}) \oplus V_m(\mathbb{K})$ .

Пусть, как и в предыдущем пункте 4.3.1,  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  – два представления группы  $G$ , которые действуют в пространствах  $V_n(\mathbb{K})$  и  $V_m(\mathbb{K})$ . Определим линейные операторы  $T^{(s)}(g)$ , которые действуют в пространстве  $V_n(\mathbb{K}) \oplus V_m(\mathbb{K})$  на векторы  $\vec{w}$  (4.3.17) в соответствии с действием представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  (4.3.5), (4.3.6):

$$T^{(s)}(g) \cdot \vec{w} = T^{(1)}(g) \cdot \vec{x} + T^{(2)}(g) \cdot \vec{y} = \vec{e}_j T_{ji}^{(1)}(g) x_i + \vec{e}_b T_{ba}^{(2)}(g) y_a \in V_n(\mathbb{K}) \oplus V_m(\mathbb{K}). \quad (4.3.18) \quad \text{prsu1}$$

Согласно (4.3.18), координаты  $\{w_A\}$  (4.3.16) вектора  $\vec{w}$  преобразуются следующим образом

$$(T^{(s)}(g) \cdot \vec{w})_A = T_{AB}^{(s)}(g) w_B,$$

где  $(n+m) \times (n+m)$  матрица  $\|T_{AB}^{(s)}(g)\|$  линейного оператора  $T^{(s)}(g)$  имеет блочно-диагональную структуру

$$\|T_{AB}^{(s)}(g)\| = \begin{pmatrix} \|T_{ij}^{(1)}(g)\| & 0 \\ 0 & \|T_{ab}^{(2)}(g)\| \end{pmatrix}. \quad (4.3.19) \quad \text{pryam}$$

Иногда удобно и сами операторы  $T^{(s)}(g)$  представлять как блочные матрицы с операторными коэффициентами

$$T^{(s)}(g) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix}, \quad (4.3.20) \quad \text{prsu3}$$

а действие (4.3.18) записывать в виде

$$T^{(s)}(g) \cdot \vec{w} = T^{(1)}(g) \cdot \vec{x} + T^{(2)}(g) \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}.$$

Итак, каждому элементу  $g$  группы  $G$  мы сопоставили линейный оператор  $T^{(s)}(g)$  (4.3.18), т.е. определили отображение  $T^{(s)}$  из группы  $G$  в множество линейных операторов, действующих в  $(n+m)$ -мерном пространстве  $V_n(\mathbb{K}) \oplus V_m(\mathbb{K})$ . Таким образом мы строим новое  $(n+m)$ -мерное представление  $T^{(s)}$  группы  $G$ . Действительно, легко проверить, что отображение  $T^{(s)}$  – гомоморфизм:

$$T^{(s)}(g_1)T^{(s)}(g_2) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_2) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1 g_2) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_1 g_2) \end{pmatrix} = T^{(s)}(g_1 g_2) .$$

Здесь мы воспользовались блочно-диагональным представлением (4.3.20) для операторов  $T^{(s)}(g)$  и тем фактом, что  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  – представления. Оператор  $T^{(s)}(g)$  (4.3.18), (4.3.20) называется прямой суммой операторов  $T^{(1)}(g)$  и  $T^{(2)}(g)$  и обозначается  $T^{(s)}(g) = T^{(1)}(g) \oplus T^{(2)}(g)$ , а соответствующее новое представление  $T^{(s)}$  называется прямой суммой представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  и обозначается  $T^{(1)} \oplus T^{(2)}$ .

Отметим, что характер представления  $T^{(s)} = T^{(1)} \oplus T^{(2)}$  согласно формуле (4.3.19) равен сумме их характеров:

$$\chi_{T^{(s)}}(g) = \chi_{T^{(1)}}(g) + \chi_{T^{(2)}}(g) .$$

**Пример.** Снова рассмотрим два представления группы  $C_3$  – одномерное представление  $T^{(1)}$  (4.3.10) и 3-х мерное регулярное представление (4.1.20). Новое представление  $T^{(s)} = T^{(1)} \oplus T^{(R)}$  – 4-х мерно, и матрицы этого представления имеют вид

$$T^{(s)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{(s)}(g_1) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(s)}(g_2) = \begin{pmatrix} e^{\frac{4\pi i}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $G$  – группа Ли. Вблизи единичного элемента группы  $G$  для представления  $T^{(s)}$  (4.3.20) мы имеем разложение (см. (4.2.5)):

$$\begin{aligned} T^{(s)}(g_A(t)) &= \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_A(t)) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_A(t)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} T^{(1)}(A) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(A) \end{pmatrix} + O(t^2), \end{aligned} \quad (4.3.21) \quad \text{psli}$$

где  $T^{(1)}(A)$  и  $T^{(2)}(A)$  – представления алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ , которые соответствуют представлениям  $T^{(1)}(g)$  и  $T^{(2)}(g)$  группы Ли  $G$ . Из разложения (4.3.21) следует, что представление  $T^{(s)}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ , которое соответствуют прямой сумме представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  группы Ли  $G$ , определяется следующим образом:

$$T^{(s)}(A) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(A) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(A) \end{pmatrix}, \quad (4.3.22) \quad \text{psli1}$$

т.е. имеет блочно-диагональную форму. Формула (4.3.22) определяет прямую сумму представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ . Такое определение прямой суммы представлений распространяется на общие алгебры Ли безотносительно к группам Ли.

## 4.4 Приводимые и неприводимые представления.

### 4.4.1 Определение приводимых и неприводимых представлений.

Представление  $T^{(s)}$  (4.3.19) построено из представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  меньшей размерности. Поэтому изучение представления  $T^{(s)}$  сводится к изучению представлений

$T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ . Заметим, что преобразование подобия (4.1.22) с некоторой фиксированной  $(n+m) \times (n+m)$  матрицей  $S$ , примененное к матрицам  $T^{(s)}(g)$  (4.3.19) для всех  $g \in G$ , дает, как мы видели выше, эквивалентное  $(n+m)$ -мерное представление, которое, вообще говоря, уже не будет иметь блочно-диагонального вида (4.3.19). Например, перестановка (перенумеровка) строк и столбцов является преобразованием подобия, при этом блочно-диагональная структура (4.3.19) будет потеряна.

С другой стороны, для некоторого заданного матричного представления мы можем попытаться найти преобразование подобия, которое приводит матрицы данного представления для всех  $g \in G$  к блочно-диагональному виду и тем самым разбить это представление в прямую сумму двух или более представлений меньшей размерности. Конечно, такую процедуру удастся сделать не для всех представлений. Тем самым мы приходим к следующему определению.

**Определение 4.4.1** *Представление  $T$  группы  $G$ , которое преобразованием подобия (4.1.22) может быть приведено для всех  $g \in G$  к блочно диагональному виду (4.3.19), называется вполне приводимым (или разложимым). Если матричное представление  $T$  для всех элементов  $g$  группы  $G$  преобразованием подобия (4.1.22) приводится к блочному виду*

$$T(g) = \begin{pmatrix} \|t_{ij}^{(1)}(g)\| & \|x(g)_{ib}\| \\ 0 & \|t_{ab}^{(2)}(g)\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & X(g) \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix}, \quad X(g) \neq 0, \quad (4.4.1) \text{ pryam1}$$

*(т.е. только нижний левый блок равен нулю), то представление называется приводимым<sup>18</sup>. Если таких преобразований подобия не существует, то есть все матрицы представления  $T$  не приводятся одновременно ни к блочно диагональному виду, ни к виду (4.4.1), то представление  $T$  называется неприводимым.* VRN

Условие гомоморфизма  $T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2)$  для приводимого представления (4.4.1) требует выполнения тождеств

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1) & X(g_1) \\ 0 & T^{(2)}(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_2) & X(g_2) \\ 0 & T^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1)T^{(1)}(g_2) & T^{(1)}(g_1)X(g_2) + X(g_1)T^{(2)}(g_2) \\ 0 & T^{(2)}(g_1)T^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_1 \cdot g_2) & X(g_1 \cdot g_2) \\ 0 & T^{(2)}(g_1 \cdot g_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.2) \text{ t1t2}$$

Из последнего равенства следует, что отображения

$$T^{(1)} : G \rightarrow GL(n) \quad \text{и} \quad T^{(2)} : G \rightarrow GL(m),$$

гомоморфны и, следовательно, блоки  $T^{(1)}(g)$  и  $T^{(2)}(g)$  реализуют представления группы  $G$  меньшей размерности чем представление, заданное матрицами  $T(g)$ . Таким образом, даже если матричное представление  $T$  просто приводимо (не обязательно вполне приводимо), то из него все равно можно выделить представления  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$

<sup>18</sup>Очевидно, что представление будет приводимым и в случае обнуления только верхнего правого блока, т.к. такое представление эквивалентно представлению (4.4.1). Эти представления связаны специальным преобразованием подобия – перестановкой строк и столбцов.

меньшей размерности. Основная задача теории представлений заключается в том, чтобы найти все неприводимые представления, из которых все остальные представления строятся с помощью формул типа (4.3.19) и (4.4.1).

Представление (4.4.1) каждому элементу  $g \in G$  сопоставляет оператор  $T(g)$ , действующий в  $(n + m)$ -мерном пространстве  $\mathcal{V}_n \oplus \mathcal{V}_m$ , и определяет преобразования  $(n + m)$ -мерных "композиционных" векторов  $(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{x}', \vec{y}')$ , где  $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{V}_n$  и  $\vec{y}, \vec{y}' \in \mathcal{V}_m$ . Данное преобразование в терминах координат векторов  $(\vec{x}, \vec{y})$  задается матрицами (4.4.1) и записывается следующим образом

$$x'_i = T_{ij}^{(1)}(g) x_j + X_{ia}(g) y_a, \quad y'_a = T_{ab}^{(2)}(g) y_b.$$

Из вида этого преобразования, если положить равными нулю все координаты  $y_a$  ( $a = 1, \dots, m$ ), следует, что подпространство  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_n \oplus \mathcal{V}_m$  преобразуется "само через себя" при действии операторов (4.4.1). Иными словами, для всех векторов  $\vec{x}$  из подпространства  $\mathcal{V}_n$  в пространстве представления  $\mathcal{V}_n \oplus \mathcal{V}_m$  и  $\forall g \in G$  мы имеем  $T(g) \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}_n$ .

**Определение 4.4.2** Пусть  $\mathcal{V}$  — пространство представления  $T$  группы Ли  $G$ ,  $W$  — линейное подпространство в  $\mathcal{V}$ . Оно называется инвариантным подпространством, если для всех  $\vec{v} \in W$  и  $g \in G$  справедливо

$$T(g) \vec{v} \in W,$$

т.е. действие любого оператора  $T(g)$  не выводит из подпространства  $W$ .

Тривиальные инвариантные подпространства — это само  $\mathcal{V}$  и подпространство, состоящее из одного нулевого вектора.

**Определение 4.4.3** (эквивалентное данному в 4.4.1). Представление  $T$  группы  $G$  в пространстве  $\mathcal{V}$  называется неприводимым, если в  $\mathcal{V}$  не существует нетривиальных инвариантных подпространств для этого представления. Наоборот, если в  $\mathcal{V}$  существует нетривиальное инвариантное подпространство, то представление  $T$  называется приводимым.

**Определение 4.4.4** (также эквивалентное данному в 4.4.1). Представление  $T$  группы  $G$  в пространстве  $\mathcal{V}$  называется вполне приводимым (или разложимым), если в  $\mathcal{V}$  существует два инвариантных подпространства  $W_1$  и  $W_2$ , таких, что  $\mathcal{V} = W_1 \oplus W_2$ .

- **Задача 125.** Показать, что представление  $T$  группы Ли  $G$  в пространстве  $\mathcal{V}$  неприводимо тогда и только тогда, когда для любого  $\vec{v} \in \mathcal{V}$  линейная оболочка элементов вида  $T(g) \cdot \vec{v}$ , где  $g$  пробегает всю группу  $G$ , совпадает со всем  $\mathcal{V}$ . Линейная оболочка здесь — это линейное подпространство векторов вида

$$\int_g d\mu(g) a_g T(g) \cdot \vec{v},$$

где  $a_g$  — произвольные численные функции на группе (с компактным носителем), а  $\mu(g)$  — некоторая мера на группе.

Определения, данные в 4.4.1, 4.4.3, 4.4.4 для представлений групп Ли, легко переформулировать для представлений алгебр Ли.

VRN

**Определение 4.4.5** Матричное представление  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , которое с помощью преобразования подобия (4.2.4) может быть приведено для всех  $A \in \mathcal{A}$  к блочно-диагональному виду (4.3.22), называется вполне приводимым или разложимым. Если матричное представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$  преобразованием подобия (4.1.22) приводится к виду

$$T(A) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(A) & X(A) \\ 0 & T^{(2)}(A) \end{pmatrix}, \quad X(A) \neq 0 \quad (\forall A \in \mathcal{A}), \quad (4.4.3) \text{ pyam1a1}$$

(то есть, только нижний левый блок равен нулю<sup>19</sup>), то представление называется приводимым. Если таких преобразований подобия не существует, то представление называется неприводимым.

Вблизи единичного элемента для приводимого представления (4.4.1) группы  $G$  мы имеем разложение (см. (4.2.5)):

$$\begin{aligned} T(g_A(t)) &= \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_A(t)) & X(g_A(t)) \\ 0 & T^{(2)}(g_A(t)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} T^{(1)}(A) & X(A) \\ 0 & T^{(2)}(A) \end{pmatrix} + O(t^2). \end{aligned} \quad (4.4.4) \text{ psli2}$$

Напомним, что представления  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  в (4.4.1) задают отображения из группы  $G$  в матричные группы  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$ . В то же время, в правой части (4.4.4) возникают линейные гомоморфные отображения  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  из касательного пространства  $\mathcal{A}(G)$  в касательные пространства  $\mathcal{A}(\Gamma^{(1)})$ ,  $\mathcal{A}(\Gamma^{(2)})$ , имеющие смысл производных от отображений  $T^{(1)}: G \rightarrow \Gamma^{(1)}$  и  $T^{(2)}: G \rightarrow \Gamma^{(2)}$  в точке, соответствующей единице в  $G$  (см. Замечание 3 в подразделе 3.1.5). Для вполне приводимого представления группы  $G$  (которое приводится к виду (4.3.19)) в разложении (4.4.4) мы должны положить  $X(A) = 0$ .

Таким образом, стандартная процедура (4.4.4) построения представлений для алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ , исходя из представлений для группы Ли  $G$ , связывает приводимые и вполне приводимые представления групп Ли  $G$  и приводимые и вполне приводимые представления их алгебр Ли  $\mathcal{A}(G)$ .

Наконец, аналоги определений 4.4.2 – 4.4.4 формулируются для алгебр Ли следующим образом.

**Определение 4.4.6** Пусть  $\mathcal{V}$  – пространство представления  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$ ,  $W$  – линейное подпространство в  $\mathcal{V}$ . Оно называется инвариантным подпространством, если для всех  $\vec{v} \in W$  и  $A \in \mathcal{A}$  справедливо условие  $T(A)\vec{v} \in W$ . Представление  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в пространстве  $\mathcal{V}$  называется неприводимым, если в  $\mathcal{V}$  не

<sup>19</sup>Преобразованием подобия такую форму приводимого представления можно всегда перевести в форму, когда только верхний правый блок равен нулю.

существует нетривиальных инвариантных подпространств для этого представления. Представление  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в пространстве  $\mathcal{V}$  называется вполне приводимым (разложимым), если в  $\mathcal{V}$  существует два инвариантных подпространства  $W_1$  и  $W_2$ , таких, что  $\mathcal{V} = W_1 \oplus W_2$ .

В качестве иллюстрации к только что приведенному определению рассмотрим присоединенное представление  $\text{ad}$  алгебры Ли (определение дано в пункте 4 раздела 4.2.2).

**Утверждение 4.4.1** *Присоединенное представление  $\text{ad}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  неприводимо тогда и только тогда, когда алгебра Ли  $\mathcal{A}$  проста.*

**Доказательство.** Сначала докажем, что присоединенное представление простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  неприводимо. Докажем это от противного. Пусть присоединенное представление  $\text{ad}$  простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  приводимо. Согласно Определению 4.4.6 это означает, что в  $\mathcal{A}$  существует нетривиальное инвариантное подпространство  $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$  такое, что для всех  $Y \in \mathcal{V}$  и всех  $X \in \mathcal{A}$  мы имеем

$$\text{ad}(X) \cdot Y = [X, Y] \in \mathcal{V}. \quad (4.4.5) \quad \text{Ads1}$$

Отсюда следует, что  $\mathcal{V}$  – инвариантная подалгебра Ли в  $\mathcal{A}$ , что противоречит изначальному утверждению о простоте алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . С другой стороны, пусть присоединенное представление  $\mathcal{A}$  неприводимо. Это значит, что в пространстве этого представления (то есть в самой алгебре Ли  $\mathcal{A}$ ) нет инвариантных подпространств, а значит  $\mathcal{A}$  – проста. ■

Отметим, что Утверждение 4.4.1 справедливо как для вещественных, так и для комплексных алгебр Ли.

**Замечание 1.** Комплексные алгебры Ли и их вещественные формы имеют по-существу одни и те же комплексные представления. Действительно, если задано представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$  комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ , то известны операторы  $T(X_i)$ , где  $X_i$  – образующие  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ . Пусть эти образующие таковы, что структурные константы алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  вещественны. Тогда вещественная форма  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  имеет те же образующие, а операторы  $T(X_i)$  и их вещественные линейные комбинации очевидным образом задают представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$ . Наоборот, комплексное представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$  вещественной алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  определяет набор операторов  $T(X_i)$ , причем теперь  $X_i$  – образующие  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ ; комплексные линейные комбинации операторов  $T(X_i)$  задают представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$  алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  – комплексификации алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ .

**Утверждение 4.4.2** *Пусть  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  – комплексная алгебра Ли,  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  – ее вещественная форма. Представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$  неприводимо тогда и только тогда, когда соответствующее комплексное представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$  неприводимо.*

**Доказательство.** Проведем доказательство от противного. Пусть представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$  в комплексном пространстве  $\mathcal{V}$  неприводимо, а представление  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$  приводимо. В силу приводимости  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$  существует нетривиальное подпространство  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ , такое, что  $T(X_i)\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_1 \forall i$ . Тогда  $T(\sum_i a_i X_i)\mathcal{V}_1 = \sum_i a_i T(X_i)\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_1$  для всех комплексных  $a_i$ , что противоречит неприводимости  $T(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})$ . Обратное доказывается аналогично. ■

**Замечание 2.** Связь между представлениями комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  и представлениями ее о веществлении  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  не столь тривиальна, как в случае, обсуждавшемся в Замечании 1. Разумеется, каждому комплексному представлению  $T$  алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$  соответствует единственное представление  $T'$  алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$ , которое строится по правилу  $T'(X_i) = T(Y_i)$ , где  $(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$  – набор образующих в  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ , см. (3.2.82). Однако в обратную сторону единственности нет. Пусть базис в комплексной алгебре  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  выбран так, что все структурные константы  $C_{ab}^d$  – вещественны, то есть  $\text{Im} C_{ab}^d = 0$ . Тогда по представлению  $T$  алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^n$  можно построить два неэквивалентных представления алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ :

$$T_1(Y_i) = T(X_i), \quad T_1(Z_i) = iT(X_i), \quad (4.4.6) \quad \text{oct2-12-10}$$

$$T_2(Y_i) = T(X_i), \quad T_2(Z_i) = -iT(X_i). \quad (4.4.7) \quad \text{oct2-12-11}$$

- **Задача 126.** Показать, что (4.4.7) – это действительно представление алгебры  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{2n}$ , то есть что оно согласовано со структурными соотношениями (3.2.84), где  $\text{Im} C_{ab}^d = 0$ .

#### 4.4.2 Лемма Шура.

Важно иметь конструктивный критерий приводимости (или неприводимости) представлений. Такой критерий дается леммой Шура.

**Лемма Шура. 4.4.3** 1.) Оператор  $A \neq 0$ , коммутирующий со всеми элементами группы  $G$  в неприводимом комплексном представлении  $T: T(g) \cdot A = A \cdot T(g)$  ( $\forall g \in G$ ), кратен единичному оператору, то есть  $A = \lambda I$  ( $\lambda \neq 0$ ).

2.) Пусть  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  – два неэквивалентных неприводимых комплексных представления группы  $G$  в  $n$ - и  $m$ -мерных векторных пространствах  $\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m$ , и  $A$  – линейное отображение  $\mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}_n$  такое, что  $\forall g \in G$  справедливо  $T^{(1)}(g) \cdot A = A \cdot T^{(2)}(g)$  (если  $n \neq m$ , то  $A$  представляется прямоугольной  $m \times n$  матрицей), тогда  $A = 0$ .

**Доказательство.**

1.) Оператор  $A \neq 0$ , коммутирующий со всеми операторами  $T(g)$  ( $\forall g \in G$ ) неприводимого комплексного представления в векторном пространстве  $\mathcal{V}$ , является невырожденным оператором. Убедимся в этом от противного. Пусть существуют ненулевые вектора  $\vec{x} \in \mathcal{V}$  такие, что  $A\vec{x} = 0$ . Эти вектора образуют линейное подпространство  $\text{Ker}(A)$  в  $\mathcal{V}$ . Из условия  $T(g) \cdot A = A \cdot T(g)$  следует, что  $T(g) \cdot A\vec{x} = A \cdot T(g)\vec{x} = 0$ . Таким образом, если  $\vec{x} \in \text{Ker}(A)$ , то  $T(g)\vec{x} \in \text{Ker}(A)$  ( $\forall g \in G$ ), т.е.  $\text{Ker}(A)$  – инвариантное подпространство в  $\mathcal{V}$  (случай  $\text{Ker}(A) = \mathcal{V}$  исключается, так как в этом случае  $A = 0$ ). Следовательно, представление  $T$  приводимо, что противоречит условиям Леммы. Итак, мы получили, что у  $A$  нет нулевых векторов, т.е.  $A$  невырожден и  $\text{Ker}(A) = \emptyset$ .

Так как  $A$  невырожден, то существует собственное значение  $\lambda \neq 0$  оператора  $A$  с собственными векторами  $\vec{v}$ , образующими подпространство  $\text{Ker}(A - \lambda I) \subset \mathcal{V}$ . Тогда из условия  $T(g)(A - \lambda I)\vec{v} = (A - \lambda I)T(g)\vec{v} = 0$  ( $\forall g \in G$ ), следует, что либо  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  – инвариантное подпространство и следовательно представление приводимо (а это противоречит условиям Леммы), либо  $(A - \lambda I) = 0$ , что и требовалось.

2.) Пусть  $A \neq 0$ . Так же, как и в предыдущем пункте мы доказываем, что  $\text{Ker}(A)$  – инвариантное пространство в  $\mathcal{V}_m$ . Аналогично можно показать, что  $\text{Im}(A)$  образует инвариантное подпространство в  $\mathcal{V}_n$ . Действительно,  $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}_m$  и  $\forall g \in G$  мы имеем  $T^{(1)}(g)(A\vec{x}) = AT^{(2)}(g)\vec{x}$ , то есть  $T^{(1)}(g)\text{Im}(A) \subset \text{Im}(A)$ . Из неприводимости представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  (и  $A \neq 0$ ) следует, что  $\text{Ker}(A) = \emptyset$  и  $\text{Im}(A) = \mathcal{V}_n$  и, следовательно, отображение  $A : \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}_n$  – изоморфизм, т.е. представления  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  эквивалентны, а это противоречит условию Леммы. Следовательно  $A = 0$ . ■

**Следствие 1.** Из Леммы Шура следует, что если существует ненулевая матрица  $A \neq \lambda I$ , такая что  $T(g)A = AT(g)$  ( $\forall g \in G$ ), то комплексное представление  $T$  приводимо.

**Следствие 2.** Другим следствием Леммы Шура является то, что все неприводимые конечномерные комплексные представления абелевой (коммутативной) группы  $G$  одномерны. Действительно, для любого представления  $T$  такой группы и  $\forall g, h \in G$  мы имеем  $T(g)T(h) = T(h)T(g)$ . Пусть  $T$  неприводимо. При фиксированном  $h$  оператор  $T(h)$  коммутирует со всеми  $T(g)$  и в силу неприводимости  $T$  мы имеем (Лемма Шура):  $T(h) = \lambda(h)I$ , где  $\lambda(h)$  – числовая функция на  $G$ , а  $I$  – единичная матрица. Это справедливо для любого  $h$ , поэтому  $I = 1$  – единичная “матрица”  $1 \times 1$  (иначе  $T(h)$  для всех  $h$  распадалось бы в прямую сумму  $1 \times 1$  матриц  $\lambda(h)$  и представление было бы приводимым), то есть неприводимое представление  $T$  одномерно.

**Замечание 1.** Утверждения леммы Шура, как и приведенные выше их доказательства, справедливы также и для представлений алгебр Ли.

**Замечание 2.** Комплексность представлений  $T$  важна для формулировки утверждений леммы Шура. Это связано с тем, что при доказательстве этой леммы существенно используются собственные подпространства операторов  $A$  (т.е. подпространства  $\text{Ker}(A - \lambda I)$ ) и собственные значения  $\lambda$ , которые и для вещественных  $A$  могут быть комплексными.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий Замечание 2. Вещественное двумерное представление  $T$  абелевой группы  $U(1) = SO(2)$ , реализованное в виде матриц двумерных вращений  $O_\phi$  (3.2.15) в  $\mathbb{R}^2$ , оказывается неприводимым в категории вещественных представлений, хотя все эти матрицы  $O_\phi$  коммутируют с нетривиальной антисимметричной матрицей  $A = \mathbf{i}$  (3.2.14). Если же считать, что матрицы (3.2.15) представления  $T$  действуют в комплексном двумерном пространстве  $\mathbb{C}^2$ , то представление  $T$  приводимо (в полном согласии со Следствием 2): все вещественные матрицы  $O_\phi$  (3.2.15) приводятся одновременно к диагональному виду с помощью комплексного преобразования подобия (4.1.22), и в результате представление  $T$  расщепляется в прямую сумму двух одномерных неприводимых, но комплексных, представлений группы  $U(1) = SO(2)$ , которые имеют вид

$$T^{(1)}(O_\phi) = e^{i\phi}, \quad T^{(1)*}(O_\phi) = e^{-i\phi}. \quad (4.4.8) \quad 2d-o1$$

• **Задача 127.** Найти комплексную  $2 \times 2$  матрицу  $S$  такую, что

$$S^{-1} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}. \quad (4.4.9) \quad 2d-o2$$



Заметим, что любое  $n$ -мерное комплексное представление в пространстве  $\mathbb{C}^n$  всегда можно рассматривать как  $2n$ -мерное вещественное представление в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Например, одномерное комплексное представление  $T^{(1)}(O_\phi) = e^{i\phi}$  группы  $U(1) = SO(2)$  реализуется как преобразования комплексной плоскости  $z \rightarrow e^{i\phi} z$ . Положив  $z = x + iy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ , мы можем переписать эти преобразования комплексной плоскости как двумерные вещественные преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, овеществленное неприводимое комплексное представление  $T^{(1)}(O_\phi)$  в точности соответствует двумерному вещественному представлению  $T$ , реализованному матрицами  $O_\phi$  (3.2.15). Поэтому данное двумерное вещественное представление группы  $U(1) = SO(2)$  можно считать идентичным одномерному комплексному представлению  $T^{(1)}$ . Далее, любое  $n$ -мерное вещественное представление в пространстве  $\mathbb{R}^n$  всегда можно комплексифицировать, то есть рассматривать его как  $n$ -мерное комплексное представление в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . С точки зрения классификации всех неприводимых и неэквивалентных представлений некоторой группы (или алгебры Ли), более простым и удобным (например, в силу применимости Леммы Шура) представляется изучение ее комплексных представлений. Полная классификация комплексных представлений будет частично, в свете всего вышесказанного, включать в себя и классификацию вещественных представлений, которые важны с точки зрения приложений в физике.

**Следствие 3.** Пусть  $\mathcal{A}$  простая комплексная алгебра Ли, или вещественная форма простой комплексной алгебры Ли. Тогда матрица  $A$ , коммутирующая со всеми матрицами присоединенного представления  $\text{ad}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$

$$\text{ad}(Y) \cdot A = A \cdot \text{ad}(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{A}, \quad (4.4.10) \quad \text{хаах}$$

кратна единичной матрице  $A = \lambda I$ .

Для простых комплексных алгебр Ли  $\mathcal{A}$  это утверждение – прямое следствие Леммы Шура, так как, согласно Утверждению 4.4.1, комплексное представление  $\text{ad}$  для таких алгебр  $\mathcal{A}$  неприводимо. Для простых вещественных алгебр Ли  $\mathcal{A}$ , для которых присоединенное представление вещественно, утверждение, что  $A = \lambda I$ , может быть неправильным в силу Замечания 2 (смотри выше). Тем не менее это утверждение справедливо для вещественных форм простых комплексных алгебр Ли. Докажем его от противного. Пусть матрица  $A$  не кратна единичной:  $A \neq \lambda I$ , и удовлетворяет условию (4.4.10), где в качестве алгебры  $\mathcal{A}$  выбрана вещественная форма простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ . Выберем базис  $\{X_a\}$  в алгебре  $\mathcal{A}$  с определяющими соотношениями (3.2.71) и запишем равенство (4.4.10) в этом базисе

$$Y^a C_{ab}^d A_d^p = A_b^d Y^a C_{ad}^p, \quad (4.4.11) \quad \text{хаах1}$$

где  $Y^a$  – вещественные координаты произвольного элемента  $Y = Y^a X_a \in \mathcal{A}$ . Из (4.4.11) следует равенство

$$(Y^a + i \tilde{Y}^a) C_{ab}^d A_d^p = A_a^b (Y^a + i \tilde{Y}^a) C_{ap}^d, \quad \forall Y^a, \tilde{Y}^b \in \mathbb{R}, \quad (4.4.12) \quad \text{хаах2}$$

то есть все матрицы присоединенного представления комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  (которая является комплексификацией  $\mathcal{A}$ ) коммутируют с матрицей  $A \neq \lambda I$ , что противоречит простоте алгебры  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ . Следовательно, матрица  $A$ , удовлетворяющая (4.4.11), обязана быть кратной единичной и в случае вещественной формы простой комплексной алгебры Ли.

### Примеры.

**1.** Матрицы  $T(g)$  вполне приводимого представления  $T$  группы  $G$  с помощью преобразования эквивалентности (4.1.21) приводятся к виду (4.3.19). Матрицы  $T(g)$  такого вида, для всех  $g \in G$ , коммутируют с блочными матрицами

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_n & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_m \end{pmatrix}, \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

которые не пропорциональны единичной матрице  $I_{n+m}$ . Данный факт является иллюстрацией к первой части Леммы Шура.

**2.** Определяющие представления  $T$  групп  $SL(N, \mathbb{C})$  и  $SU(N)$  неприводимы. Однако тензорные произведения определяющих представлений этих групп оказываются приводимыми. Рассмотрим представление  $T \otimes T$  группы  $SU(N)$  (дальнейшие рассуждения справедливы и для группы  $SL(N, \mathbb{C})$ ), действующее в комплексном пространстве  $V_{N^2}(\mathbb{C}) = V_N(\mathbb{C}) \otimes V_N(\mathbb{C})$ . Элементы  $g \in SU(N)$  в представлении  $T \otimes T$  осуществляют в пространстве  $V_{N^2}(\mathbb{C})$  преобразование (4.3.7). Согласно Лемме Шура, если  $T \otimes T$  – приводимо, то должен существовать оператор  $P \neq \lambda I_N \otimes I_N \equiv \lambda I_{N^2}$ , который действует в пространстве  $V_{N^2}(\mathbb{C})$  и коммутирует со всеми преобразованиями (4.3.7) представления  $T \otimes T$ . Такой оператор действительно существует и равен оператору перестановки:

$$P \cdot (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2) = (\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1), \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_N(\mathbb{C}), \quad P^2 = I_{N^2}. \quad (4.4.13) \quad \text{хаах5}$$

Пусть  $\{\vec{e}_i\}$  – базис в пространстве  $V_N(\mathbb{C})$  и  $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$  – базис в  $V_{N^2}(\mathbb{C})$ . В этом базисе оператору  $P$  согласно его определению (4.4.13) соответствует матрица с компонентами  $P_{ij}^{kr} = \delta_j^k \delta_i^r$ :

$$P \cdot (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = (\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i) = (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_r) P_{ij}^{kr}. \quad (4.4.14) \quad \text{хаах3}$$

- **Задача 128.** Проверить, что оператор перестановки  $P$  (4.4.13), (4.4.14) коммутирует со всеми операторами представления  $T \otimes T$ , действие которых задано в (4.3.7).

С помощью оператора  $P$  можно построить два проектора  $P^+$  и  $P^-$ :

$$P^+ = \frac{1}{2}(I_{N^2} + P), \quad P^- = \frac{1}{2}(I_{N^2} - P), \quad (4.4.15) \quad \text{хаах37}$$

$$P^+ P^- = 0, \quad (P^\pm)^2 = P^\pm, \quad P^+ + P^- = I_{N^2}, \quad (4.4.16) \quad \text{хаах37b}$$

которые также коммутируют с действием (4.3.7) и выделяют в  $V_{N^2}(\mathbb{C})$  два инвариантных подпространства  $V_{m+}^{(+)}(\mathbb{C})$  и  $V_{m-}^{(-)}(\mathbb{C})$ . Иными словами, любой вектор  $\vec{w} \in V_{N^2}(\mathbb{C})$

разбивается в сумму  $\vec{w} = \vec{w}^{(+)} + \vec{w}^{(-)}$  симметричного  $P \cdot \vec{w}^{(+)} = \vec{w}^{(+)}$  и антисимметричного  $P \cdot \vec{w}^{(-)} = -\vec{w}^{(-)}$  векторов:

$$\vec{w}^{(+)} = P^+ \cdot \vec{w}, \quad \vec{w}^{(-)} = P^- \cdot \vec{w}, \quad (4.4.17) \quad \text{хаах7}$$

причем, так как  $P$  коммутирует с действием (4.3.7), подпространства этих векторов инвариантны относительно всех преобразований представления  $T \otimes T$ .

- **Задача 129.** Пользуясь разложением (4.3.2) и определением оператора  $P$  показать, что компоненты векторов (4.4.17) являются симметричными и антисимметричными тензорами

$$w_{ij}^{(+)} = \frac{1}{2}(w_{ij} + w_{ji}), \quad w_{ij}^{(-)} = \frac{1}{2}(w_{ij} - w_{ji}), \quad (4.4.18) \quad \text{хаах4}$$

где  $w_{ij}$  – компоненты вектора  $\vec{w} \in V_{N^2}(\mathbb{C})$ . Доказать, что размерности этих представлений равны  $m_{\pm} = \frac{N(N \pm 1)}{2}$ .

В действительности подпространства  $V_{m_{\pm}}^{(\pm)}(\mathbb{C})$  являются пространствами двух неприводимых представлений группы  $SU(N)$  (или  $SL(N, \mathbb{C})$ ), так как наряду с единичным оператором  $I_N \otimes I_N$  имеется всего лишь один нетривиальный оператор, который коммутирует с действием  $T \otimes T$  (4.3.7) группы  $SU(N)$  (или  $SL(N, \mathbb{C})$ ), а именно оператор перестановки  $P$ . Мы будем обсуждать этот факт более подробно в разделе 8.2 из Главы 8.

Итак мы показали, что тензорное произведение двух определяющих представлений  $T$  (для определяющего представления  $T$  мы будем также использовать обозначение  $[N]$  в соответствии с его размерностью) разбивается в сумму симметричного  $[\frac{N(N+1)}{2}]$  и антисимметричного  $[\frac{N(N-1)}{2}]$  неприводимых представлений:

$$[N] \otimes [N] = [\frac{N(N+1)}{2}] \oplus [\frac{N(N-1)}{2}]. \quad (4.4.19) \quad \text{хаах17}$$

Более подробно разложение прямого произведения любого числа определяющих представлений групп  $SU(N)$  и  $SL(N, \mathbb{C})$  в прямую сумму их неприводимых представлений будет обсуждаться ниже в Главе 8.

**3.** Снова рассмотрим определяющее представление  $[N]$  группы  $SU(N)$ . Представление, сопряженное к  $[N]$ , обозначим как  $[\bar{N}]$ . Элементы  $g \in SU(N)$  действуют на координаты векторов в пространствах этих представлений согласно (4.1.10) и (4.1.14). Рассмотрим прямое произведение  $[N] \otimes [\bar{N}]$  этих представлений. Вектора в  $n^2$ -мерном пространстве представления  $[N] \otimes [\bar{N}]$  оказываются тензорами второго ранга с компонентами  $w_{ij}$ , и их преобразования диктуются формулами (4.1.10) и (4.1.14):

$$w_{ij} \rightarrow w'_{ij} = g_{ik} w_{km} g_{jm}^* \Rightarrow w' = g \cdot w \cdot g^{-1}. \quad (4.4.20) \quad \text{nbn01}$$

В последнем равенстве мы воспользовались безиндексными обозначениями и учли равенство  $g^\dagger = g^{-1}$  для матриц из  $SU(N)$ . Из соотношений (4.4.20) и из разложения

$$w_{ij} = \left( w_{ij} - \frac{\text{Tr}(w)}{N} \delta_{ij} \right) + \frac{\text{Tr}(w)}{N} \delta_{ij},$$

следует, что в пространстве представления  $[N] \otimes [\bar{N}]$  имеется два инвариантных подпространства: 1.)  $(N^2 - 1)$ -мерное подпространство бесследовых матриц  $(w_{ij} - \delta_{ij} \text{Tr}(w)/N)$ , которое преобразуется (смотри (4.4.20)) по присоединенному представлению группы  $SU(N)$ , обозначим его  $[N^2 - 1]$ ; 2.) одномерное подпространство матриц  $\delta_{ij} \text{Tr}(w)$ , которое реализует тривиальное представление  $SU(N)$ , обозначим его  $[1]$ . Из Утверждения 4.4.1 следует, что представление  $[N^2 - 1]$  – неприводимо, как и представление  $[1]$ , поэтому представление  $[N] \otimes [\bar{N}]$  разлагается в прямую сумму двух неприводимых представлений

$$[N] \otimes [\bar{N}] = [N^2 - 1] \oplus [1] . \quad (4.4.21) \quad \text{nbn02}$$

## 4.5 Некоторые свойства представлений конечных групп и компактных групп Ли.

В этом и следующем разделах мы будем часто пользоваться свойством правой и левой инвариантности суммирования по конечной группе  $G$

$$\sum_{g \in G} X(g) = \sum_{g \in G} X(g h) = \sum_{g \in G} X(h' g) , \quad \forall h, h' \in G , \quad (4.5.1) \quad \text{hah6}$$

где  $X(g)$  произвольная функция на  $G$ . Так как для компактных групп Ли  $G$  имеется инвариантная мера интегрирования на  $G$  и, кроме того, объем компактной группы конечен (смотри раздел 3.1.6), то результаты этого раздела, касающиеся конечных групп, переносятся на случай компактных групп Ли. При этом суммирование по конечной группе необходимо заменить на инвариантное интегрирование по компактной группе Ли, а порядок конечной группы  $N$  заменить на объем  $V$  компактной группы Ли. **На самом деле конечные группы можно рассматривать как компактные группы Ли, имеющие нулевую размерность.** Поэтому в дальнейшем мы иногда будем пользоваться названием компактная группа в том случае, когда обсуждаемый результат справедлив как для конечных групп, так и для компактных групп Ли. При этом некоторые доказательства будут даваться только для случая конечных групп. В соответствии со сказанным выше, данные доказательства легко обобщаются на случай компактных групп Ли.

Имеет место следующий факт, касающийся представлений конечных групп и компактных групп Ли.

**Утверждение 4.5.1** *Приводимые представления компактных групп всегда вполне приводимы.*

**Доказательство.** Пусть  $G$  — конечная группа, имеющая порядок  $N$ . Рассмотрим приводимое представление группы  $G$ , в котором все матрицы представления имеют вид (4.4.1). С помощью преобразования эквивалентности (замены базиса) (4.1.22), где

$$S = \begin{pmatrix} I_n & Y \\ 0 & I_m \end{pmatrix} , \quad Y = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} X(g) T^{(2)}(g^{-1}) , \quad (4.5.2) \quad \text{hah5}$$

представление (4.4.1) приводится к блочно диагональному виду (4.3.19). Действительно, докажем, что

$$S^{-1} \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & X(g) \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g) \end{pmatrix}. \quad (4.5.3) \quad \text{dec9-11-1}$$

Для этого используем явное выражение

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -Y \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (4.5.3) сводится к соотношению

$$\begin{aligned} & T^{(1)}(g)Y - YT^{(2)}(g) + X(g) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{N} \sum_{h \in G} [T^{(1)}(g)X(h)T^{(2)}(h^{-1}) - X(h)T^{(2)}(h^{-1})T^{(2)}(g)] + X(g) = 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение действительно является тождеством, в чем можно убедиться, сделав во втором слагаемом под знаком суммы замену  $h \rightarrow gh$  и воспользовавшись формулой

$$X(g_1 \cdot g_2) = T^{(1)}(g_1) X(g_2) + X(g_1) T^{(2)}(g_2),$$

которая следует из (4.4.2). Доказательство в случае компактных групп Ли проводится абсолютно аналогично. ■

Из доказанного утверждения следует, что любое представление компактной группы вполне приводимо, то есть раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений. Некоторые примеры такого разложения были приведены в конце предыдущего раздела.

Еще одно важное утверждение состоит в следующем.

**Утверждение 4.5.2** *Любое представление  $T$  компактной группы  $G$  эквивалентно унитарному, то есть в пространстве любого представления группы  $G$  существует положительно определенное эрмитово скалярное произведение, относительно которого операторы представления унитарны.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{V}$  – пространство представления  $T$ . Пусть  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$  и  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_1 = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_1^*$  – некоторое положительно определенное и эрмитово скалярное произведение (эрмитова форма) в  $\mathcal{V}$ . Здесь положительная определенность означает, что  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_1 \geq 0$  для всех  $\vec{x} \in \mathcal{V}$ , и  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_1 = 0$  только для  $\vec{x} = 0$ . Тогда форма

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \langle T(g) \cdot \vec{x}, T(g) \cdot \vec{y} \rangle_1 \quad (4.5.4) \quad \text{fg6}$$

также положительно определена и является эрмитовым скалярным произведением в  $\mathcal{V}$ . Пользуясь инвариантностью суммирования по группе  $G$ , легко показать, что эрмитова форма (4.5.4) инвариантна относительно всех преобразований  $T(h)$  в  $\mathcal{V}$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle T(h) \cdot \vec{x}, T(h) \cdot \vec{y} \rangle, \quad \forall h \in G, \quad (4.5.5) \quad \text{dec11-11-1}$$

и, следовательно,  $T$  – унитарное представление  $G$  по отношению к скалярному произведению (4.5.4). ■

Еще раз подчеркнем, что возможность “унитаризовать” любое представление компактной группы (как, впрочем, и справедливость Утверждения 4.5.1) связана с возможностью инвариантного суммирования (интегрирования) по такой группе.

**Замечание.** Для вещественных представлений доказанное утверждение — соотношение (4.5.5) — означает, что в вещественном пространстве представления компактной группы всегда существует положительно определенное скалярное произведение, инвариантное относительно действия группы.

- **Задача 130.** Доказать Утверждение 4.5.1, исходя из Утверждения 4.5.2. Указание: воспользоваться тем, что ортогональное дополнение, относительно скалярного произведения (4.5.5), к инвариантному подпространству в пространстве  $\mathcal{V}$  также является инвариантным подпространством в  $\mathcal{V}$ .

**Утверждение 4.5.3** Пусть  $G$  — компактная группа. В случае неприводимого комплексного представления группы  $G$  скалярное произведение, в котором это представление унитарно, единственно с точностью до постоянного численного множителя.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{V}$  — пространство неприводимого комплексного представления группы  $G$  и в  $\mathcal{V}$  есть два скалярных произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,2}$ , относительно которых данное представление унитарно. Пусть  $e_a$  — базис в  $\mathcal{V}$ , ортонормированный в скалярном произведении  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ . Тогда

$$\langle e_a, e_b \rangle_2 = \eta_{ab}.$$

В силу унитарности представления в скалярном произведении  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  для любого элемента группы выполняется

$$\eta_{ab} = \langle T(g) \cdot e_a, T(g) \cdot e_b \rangle_2 = \langle T_{ca} e_c, T_{db} e_d \rangle_2 = T_{ca}^* T_{db} \eta_{cd} = (T^\dagger \cdot \eta \cdot T)_{ab},$$

где последнее выражение содержит произведение матриц. Далее, поскольку представление унитарно в скалярном произведении  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ , а базис  $e_a$  ортонормирован в этом скалярном произведении, матрица  $T_{ab}$  унитарна. Из предыдущего равенства следует тогда, что

$$T^{-1} \cdot \eta \cdot T = \eta,$$

то есть матрица  $\eta$  коммутирует со всеми матрицами неприводимого комплексного представления, и по лемме Шура она кратна единичной. Это и доказывает единственность скалярного произведения с точностью до числового множителя. ■

## 4.6 Элементы теории характеров конечных групп и компактных групп Ли.

### 4.6.1 Неприводимые представления и характеры групп $C_3$ и $S_3$ .

Все представления в этом подразделе будут рассматриваться как комплексные представления.

**1. Группа  $C_3$ .** Регулярное представление  $T^{(R)}$  задается матрицами (4.1.20). Соответствующие характеры равны

$$\chi_R(e) = 3, \quad \chi_R(g_1) = 0, \quad \chi_R(g_2) = 0. \quad (4.6.1) \quad \text{chiR}$$

Поскольку группа  $C_3$  абелева, очевидно существует матрица, не пропорциональная единичной (например, любая из матриц  $T_R(g_1)$  или  $T_R(g_2)$ , кроме, естественно,  $T_R(e)$ ), которая коммутирует со всеми матрицами регулярного представления (4.1.20). Согласно Лемме Шура, представление (4.1.20) приводимо. Действительно, заметим, что собственными векторами матриц (4.1.20) оказываются вектора

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, q, q^2), \quad \vec{v}_3 = (1, q^2, q), \quad (4.6.2) \quad \text{sobv}$$

где  $q = e^{2\pi i/3}$ . Учтем равенства  $\vec{v}_1^2 = (\vec{v}_2, \vec{v}_3) = 3$ ,  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_3) = \vec{v}_2^2 = \vec{v}_3^2 = 0$ , которые следуют из тождества  $q^2 + q + 1 = 0$ , в свою очередь вытекающего из

$$q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1) = 0.$$

Составим из векторов (4.6.2) строки и столбцы матриц  $A$  и  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & q^2 & q \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^2 & q \\ 1 & q & q^2 \end{pmatrix}. \quad (4.6.3) \quad \text{aaa}$$

Тогда  $A_{ij}T_{jk}^{(R)} = \lambda_i A_{ik}$  и матрицы (4.1.20), посредством преобразований подобия (4.1.22) с  $S = A^{-1}$  (4.6.3), приводятся к виду

$$\tilde{T}^{(R)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}^{(R)}(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}^{(R)}(g_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \quad (4.6.4) \quad \text{regc31}$$

Таким образом, регулярное представление (4.1.20) вполне приводимо, и равно прямой сумме трех одномерных неприводимых представлений:

$$T^{(R)} = I \oplus \Gamma \oplus \Gamma^*, \quad (4.6.5) \quad \text{sumpr}$$

где  $I(C_3)$  — тривиальное представление, т.е.  $I(g_k) = 1$ ;  $\Gamma(C_3)$  — точное представление

$$\Gamma(e) = 1, \quad \Gamma(g_1) = e^{2\pi i/3} = q, \quad \Gamma(g_2) = e^{4\pi i/3} = q^2 \quad (q^3 = 1), \quad (4.6.6) \quad \text{to4}$$

и  $\Gamma^*(C_3)$  — комплексно сопряженное представление:

$$\Gamma^*(e) = 1, \quad \Gamma^*(g_1) = e^{-2\pi i/3} = q^2, \quad \Gamma^*(g_2) = e^{-4\pi i/3} = q. \quad (4.6.7) \quad \text{to4z}$$

Ниже, в подразделе 4.6.2, мы покажем, что в регулярном представлении конечной группы  $G$  содержатся все неприводимые неэквивалентные представления  $G$ . Таким образом, представления  $I$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma^*$  исчерпывают все неприводимые неэквивалентные представления  $C_3$ .

Для одномерных представлений  $T$  имеем  $\chi_T(g) = T(g)$ , и таблица характеров  $\chi_T(g)$  для неприводимых представлений группы  $C_3$  строится следующим образом

—	$(e)$	$(g_1)$	$(g_2)$
$I(C_3)$	$\chi_I = 1$	$\chi_I = 1$	$\chi_I = 1$
$\Gamma(C_3)$	$\chi_\Gamma = 1$	$\chi_\Gamma = q$	$\chi_\Gamma = q^2$
$\Gamma(C_3)^*$	$\chi_{\Gamma^*} = 1$	$\chi_{\Gamma^*} = q^2$	$\chi_{\Gamma^*} = q$
$T^{(R)}(C_3)$	$\chi_R = 3$	$\chi_R = 0$	$\chi_R = 0$

Из первых трех строк этой таблицы сразу же следуют значения для характеров регулярного представления  $T^{(R)}(C_3)$  (4.6.1), которые, согласно (4.6.5), равны сумме характеров неприводимых представлений:  $\chi_R = \chi_I + \chi_\Gamma + \chi_{\Gamma^*}$  (см. четвертую строку в таблице). Заметим, что в результате прямого произведения представлений  $I(C_3)$ ,  $\Gamma(C_3)$  и  $\Gamma^*(C_3)$  мы получаем снова неприводимые одномерные представления:

$$I(C_3) \otimes \Gamma(C_3) = \Gamma(C_3), \quad I(C_3) \otimes \Gamma^*(C_3) = \Gamma^*(C_3),$$

$$\Gamma(C_3) \otimes \Gamma(C_3) = \Gamma^*(C_3), \quad \Gamma(C_3) \otimes \Gamma^*(C_3) = I(C_3), \quad \Gamma^*(C_3) \otimes \Gamma^*(C_3) = \Gamma(C_3).$$

Это в частности следует из таблицы умножения характеров:

$$\chi_\Gamma \chi_\Gamma = \chi_{\Gamma^*}, \quad \chi_\Gamma \chi_{\Gamma^*} = \chi_I, \quad \chi_{\Gamma^*} \chi_{\Gamma^*} = \chi_\Gamma.$$

Таким образом, мы получаем, что множество неприводимых неэквивалентных представлений  $\{I, \Gamma, \Gamma^*\}$  группы  $C_3$  образует абелеву группу  $C_3^*$ , изоморфную  $C_3$ , в которой в качестве умножения выступает прямое произведение представлений  $\otimes$ , тривиальное представление  $I(C_3)$  отождествляется с единичным элементом, а представления  $\Gamma(C_3)$  и  $\Gamma^*(C_3)$  – взаимно обратны по отношению к умножению  $\otimes$ . Группа  $C_3^*$  неприводимых представлений  $C_3$  называется дуальной группой к группе  $C_3$ . Для абелевых конечных групп дуальная группа всегда изоморфна исходной (замечательный результат Л.С.Понтрягина [37]). Для неабелевых групп это не так.

- **Задача 131.** Построить таблицу характеров для группы  $C_4$  и показать, что  $C_4^* = C_4$ .

## 2. Группа $S_3 = D_3$ .

Построим таблицу характеров для неабелевой группы  $D_3 = S_3$ , элементы которой обозначим  $(e, g_1, g_2, r, rg_1, rg_2)$ . Левое регулярное представление  $T^{(R)}$  определяется из соотношений

$$\begin{aligned} g_1 \cdot (e, g_1, g_2, r, rg_1, rg_2) &= (g_1, g_2, e, rg_2, r, rg_1) = (e, g_1, g_2, r, rg_1, rg_2) \cdot T^{(R)}(g_1), \\ r \cdot (e, g_1, g_2, r, rg_1, rg_2) &= (r, rg_1, rg_2, e, g_1, g_2) = (e, g_1, g_2, r, rg_1, rg_2) \cdot T^{(R)}(r), \end{aligned}$$

Соответственно, две образующие  $g_1$  и  $r$  группы  $D_3$  в регулярном представлении принимают вид (точки обозначают нули)

$$T^{(R)}(g_1) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad T^{(R)}(r) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \quad (4.6.8) \quad \text{regd3}$$



Мы видим, что матрицы этого представления построены из блоков матриц регулярного представления группы  $C_3$  (4.1.20). Зная собственные вектора (4.6.2), мы можем сразу же найти одномерные инвариантные подпространства для представления (4.6.8), которые определяются векторами  $\vec{w}_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$  (тривиальное представление  $T^{(1)}(g_k) = T^{(1)}(rg_k) = 1$ ) и  $\vec{w}_2 = (1, 1, 1, -1, -1, -1)$  (одномерное представление, различающее четные и нечетные перестановки  $T^{(2)}(g_k) = 1$ ,  $T^{(2)}(rg_k) = -1$ ). Можно выделить также два двумерных инвариантных подпространства, натянутых на вектора

$$\vec{w}_3^\pm = (1, q, q^2, \pm 1, \pm q^2, \pm q) = (\vec{v}_2, \pm \vec{v}_3), \quad \vec{w}_4^\pm = (\pm 1, \pm q^2, \pm q, 1, q, q^2) = (\pm \vec{v}_3, \vec{v}_2) \Rightarrow$$

$$\vec{w}_3^\pm T^{(R)}(g_1) = q \vec{w}_3^\pm, \quad \vec{w}_4^\pm T^{(R)}(g_1) = q^{-1} \vec{w}_4^\pm, \quad \vec{w}_3^\pm T^{(R)}(r) = \pm \vec{w}_4^\pm,$$

т.е., кроме двух одномерных представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  мы имеем два неприводимых представления  $T^{(+)}$  и  $T^{(-)}$

$$T^{(\pm)}(g_1) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad T^{(\pm)}(r) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6.9) \quad \text{regd5}$$

которые эквивалентны, так как связаны преобразованием подобия (4.1.22) с матрицей  $S = \text{diag}(1, -1)$ . Выберем теперь матрицу  $S^{-1}$  в виде:

$$S^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{q^2} & \frac{1}{-1} & \frac{1}{q^2} & \frac{1}{q} \\ \frac{1}{1} & q & q^2 & \frac{1}{1} & \frac{1}{q^2} & q \\ \frac{1}{-1} & -q^2 & -q & \frac{1}{-1} & -\frac{q^2}{q} & \frac{q^2}{q^2} \end{array} \right), \quad (4.6.10) \quad \text{regd6}$$

где в каждой строке стоят координаты векторов  $\vec{w}_1$ ,  $\vec{w}_2$ ,  $\vec{w}_3^+$ ,  $\vec{w}_4^+$ ,  $\vec{w}_3^-$ ,  $\vec{w}_4^-$ . Тогда преобразование подобия (4.1.22) с матрицей (4.6.10) для (4.6.8) дает

$$S^{-1} T^{(R)}(g_1) S = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} \frac{1}{0} & \frac{0}{1} & : & : & : & : \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & : & : & : & : \\ \hline : & : & q & q^{-1} & : & : \\ : & : & 0 & q^{-1} & : & : \\ \hline : & : & : & : & q & q^{-1} \end{array} \right), \quad S^{-1} T^{(R)}(r) S = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} \frac{1}{0} & \frac{0}{-1} & : & : & : & : \\ \frac{0}{-1} & \frac{1}{1} & : & : & : & : \\ \hline : & : & 0 & 1 & : & : \\ : & : & 1 & 0 & : & : \\ \hline : & : & : & : & 0 & -1 \\ : & : & : & : & -1 & 0 \end{array} \right). \quad (4.6.11) \quad \text{regd31}$$

Таким образом, в регулярное представление (4.6.8) входят два неэквивалентных одномерных представления  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  и два двумерных представления  $T^{(\pm)}$  (4.6.9), которые эквивалентны друг другу. Регулярное представление группы  $D_3 = S_3$  содержит все неэквивалентные неприводимые представления  $D_3 = S_3$  (смотри следующий подраздел 4.6.2). Теперь легко вычислить таблицу характеров для всех неприводимых представлений группы  $D_3 = S_3$

классы предст.	$(1, 1, 1) = e$	$(2, 1)$	$(3)$
$T^{(1)}(S_3)$	$\chi_{T^{(1)}} = 1$	$\chi_{T^{(1)}} = 1$	$\chi_{T^{(1)}} = 1$
$T^{(2)}(S_3)$	$\chi_{T^{(2)}} = 1$	$\chi_{T^{(2)}} = -1$	$\chi_{T^{(2)}} = 1$
$T^{(+)}(S_3)$	$\chi_{T^{(+)}} = 2$	$\chi_{T^{(+)}} = 0$	$\chi_{T^{(+)}} = -1$
$T^{(-)}(S_3)$	$\chi_{T^{(-)}} = 2$	$\chi_{T^{(-)}} = 0$	$\chi_{T^{(-)}} = -1$
$T^{(R)}(S_3)$	$\chi_R = 6$	$\chi_R = 0$	$\chi_R = 0$

где  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3)$  обозначают классы сопряженности в  $S_3$ . Здесь числа в скобках соответствуют длинам циклов, входящим в перестановки, то есть  $(1, 1, 1)$  – тождественная перестановка,  $(2, 1)$  – нечетные (в которые входят  $r$ ) перестановки и  $(3)$  – циклические перестановки  $g_1$  и  $g_2$  (смотри (2.1.1), (2.1.3) и пример 7 в подразделе 2.1.1):

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23), \quad g_1 = (123), \quad g_2 = (132). \quad (4.6.12) \quad \text{regd51}$$

Более подробно симметрические группы (группы перестановок)  $S_n$ , их представления и классы сопряженности будут обсуждаться ниже в Главе 8.

Отметим факт, который мы наблюдаем для группы  $D_3 = S_3$ , и который на самом деле справедлив для неприводимых представлений всех конечных групп. А именно, каждое неприводимое  $m$ -мерное представление конечной группы  $G$  входит в регулярное представление ровно  $m$  раз. Мы докажем этот факт в следующем подразделе.

#### 4.6.2 Свойства характеров конечных групп и компактных групп Ли.

Большинство результатов этого подраздела, так же как результаты раздела 4.5, справедливы как для конечных групп, так и для компактных групп Ли. Мы по-прежнему будем давать доказательства для конечных групп, а переносятся они на случай компактных групп так, как описано в начале раздела 4.5. Мы снова будем пользоваться названием компактная группа в том случае, когда обсуждаемый результат справедлив как для конечных, так и для компактных групп Ли. Если результат относится только к конечным группам, мы это будем явно указывать.

Пусть  $T^{(\nu)}: G \rightarrow GL(N_\nu, \mathbb{C})$  – все неприводимые неэквивалентные представления конечной (компактной) группы  $G$ , имеющей порядок  $N$  (объем  $V$ ), в комплексных векторных пространствах  $\mathcal{V}_\nu$  размерности  $N_\nu < \infty$  (индекс  $\nu$  перечисляет неэквивалентные неприводимые представления).

**Утверждение 4.6.1** Для конечных групп  $G$  выполняется следующее тождество

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(g^{-1}) T_{k_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(g) = \frac{1}{N_\nu} \delta^{\mu\nu} \delta_{i_\nu, m_\mu} \delta_{k_\mu, j_\nu}, \quad (4.6.13) \quad \text{hah4}$$

$$(k_\mu, m_\mu = 1, \dots, N_\mu; \quad i_\nu, j_\nu = 1, \dots, N_\nu).$$

Для компактных групп Ли тождество (4.6.13) записывается в виде

$$\frac{1}{V} \int_{g \in G} d\mu(g) T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(g^{-1}) T_{k_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(g) = \frac{1}{N_\nu} \delta^{\mu\nu} \delta_{i_\nu, m_\mu} \delta_{k_\mu, j_\nu}, \quad (4.6.14) \quad \text{hah4k}$$

$$(k_\mu, m_\mu = 1, \dots, N_\mu; \quad i_\nu, j_\nu = 1, \dots, N_\nu).$$

**Доказательство.** Рассмотрим два набора прямоугольных матриц  $A_{k_\mu, j_\nu}$  и  $B_{i_\nu, m_\mu}$  с элементами:

$$(A_{k_\mu, j_\nu})_{i_\nu, m_\mu} = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(g^{-1}) T_{k_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(g) = (B_{i_\nu, m_\mu})_{k_\mu, j_\nu}, \quad (4.6.15) \quad \text{fg3}$$

и докажем, что эти матрицы для всех  $h \in G$  удовлетворяют соотношениям

$$T^{(\nu)}(h) A_{k_\mu, j_\nu} = A_{k_\mu, j_\nu} T^{(\mu)}(h), \quad T^{(\mu)}(h) B_{i_\nu, m_\mu} = B_{i_\nu, m_\mu} T^{(\nu)}(h). \quad (4.6.16) \quad \text{hah3}$$

Действительно, пользуясь (4.5.1), для любого  $h \in G$  мы имеем

$$\begin{aligned} T_{k_\nu, i_\nu}^{(\nu)}(h) (A_{k_\mu, j_\nu})_{i_\nu, m_\mu} &= \frac{1}{N} \sum_{g \in G} T_{k_\nu, i_\nu}^{(\nu)}(h) T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(g^{-1}) T_{k_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(g) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{g \in G} T_{k_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(hg^{-1}) T_{k_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(gh^{-1}h) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{f=gh^{-1} \in G} T_{k_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(f^{-1}) T_{k_\mu, j_\mu}^{(\mu)}(f) T_{j_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(h) = (A_{k_\mu, j_\nu})_{k_\nu, j_\mu} T_{j_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(h). \end{aligned} \quad (4.6.17) \quad \text{hah1}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} T_{i_\mu, k_\mu}^{(\mu)}(h) (B_{i_\nu, m_\mu})_{k_\mu, j_\nu} &= \frac{1}{N} \sum_{g \in G} T_{i_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(hg) T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}((hg)^{-1}h) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{f=hg \in G} T_{i_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(f) T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(f^{-1}h) = (B_{i_\nu, m_\mu})_{i_\mu, k_\nu} T_{k_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(h). \end{aligned} \quad (4.6.18) \quad \text{hah2}$$

В безиндексных обозначениях формулы (4.6.17) и (4.6.18) переписываются в виде (4.6.16), то есть  $A_{k_\mu, j_\nu}$  и  $B_{i_\nu, m_\mu}$  переводят друг в друга ("сплетают") все матрицы неприводимых представлений  $T^{(\mu)}$  и  $T^{(\nu)}$ . Тогда, согласно Лемме Шура **4.4.3**, если неприводимые представления неэквивалентны, то есть  $\mu \neq \nu$ , то  $A_{k_\mu, j_\nu} = B_{i_\nu, m_\mu} = 0$ , а если эквивалентны и  $\mu = \nu$ , то матрицы  $A_{k_\mu, j_\nu}$ ,  $B_{i_\nu, m_\mu}$  пропорциональны единичным матрицам. Таким образом, мы имеем

$$(A_{k_\mu, j_\nu})_{i_\nu, m_\mu} = (B_{i_\nu, m_\mu})_{k_\mu, j_\nu} = \lambda \delta^{\mu\nu} \delta_{i_\nu, m_\mu} \delta_{k_\mu, j_\nu},$$

или

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(g^{-1}) T_{k_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(g) = \lambda \delta^{\mu\nu} \delta_{i_\nu, m_\mu} \delta_{k_\mu, j_\nu}, \quad (4.6.19) \quad \text{fg5}$$

где  $\lambda$  – константа, которую можно найти если положить  $\mu = \nu$ ,  $k_\mu = j_\nu$  и просуммировать обе части (4.6.19) по  $j_\nu$ . В результате, учитывая очевидный факт

$$T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(g^{-1}) T_{j_\nu, m_\nu}^{(\nu)}(g) = \delta_{i_\nu, m_\nu},$$

получаем  $\lambda = 1/N_\nu$ , где  $N_\nu$  – размерность представления  $T^{(\nu)}$ . ■

Используя эквивалентность любого представления унитарному, мы можем выбрать ортонормированный базис в пространстве  $\mathcal{V}_\nu$ , в котором  $T_{i_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(g^{-1}) = (T_{j_\nu, i_\nu}^{(\nu)}(g))^*$  и представить (4.6.13) в виде соотношения ортогональности

$$\frac{1}{N} \sum_{g \in G} T_{j_\nu, i_\nu}^{(\nu)*}(g) T_{k_\mu, m_\mu}^{(\mu)}(g) = \frac{1}{N_\nu} \delta^{\mu\nu} \delta_{i_\nu, m_\mu} \delta_{k_\mu, j_\nu}. \quad (4.6.20) \quad \text{fg8}$$

Введем в пространстве функций на компактной группе (в интересующем нас случае – характеров) скалярное произведение

$$\langle \chi_\nu, \chi_\mu \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_\nu^*(g) \chi_\mu(g). \quad (4.6.21) \quad \text{fg10aa}$$

Напомним, что для компактной группы Ли  $G$  эта формула имеет вид

$$\langle \chi_\nu, \chi_\mu \rangle = \frac{1}{V} \int_G d\mu(g) \chi_\nu^*(g) \chi_\mu(g) .$$

Вспоминая определение характера представления  $\chi_\nu(g) = \sum_{i=1}^{N_\nu} T_{ii}^{(\nu)}(g)$ , мы получаем из (4.6.20) соотношение ортогональности для характеров неприводимых представлений  $T_\nu$  и  $T_\mu$ :

$$\langle \chi_\nu, \chi_\mu \rangle = \delta^{\mu\nu} . \quad (4.6.22) \quad \text{fg10}$$

Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_h$  — характеры всех неэквивалентных неприводимых конечномерных представлений  $T^{(1)}, \dots, T^{(h)}$  компактной группы  $G$  ( $h$  конечно в случае конечных групп, что будет ясно из дальнейшего, и  $h$  бесконечно в случае компактных групп Ли). Согласно Утверждению 4.5.1 любое конечномерное представление  $T$  компактной группы  $G$  можно разложить в прямую сумму неприводимых,  $T = m_1 T^{(1)} \oplus \dots \oplus m_h T^{(h)}$ , где кратности  $m_i$  — целые неотрицательные числа. В этом случае характер  $\chi$  представления  $T$  равен  $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_h \chi_h$ , а из условия ортогональности (4.6.22) мы получаем

$$\langle \chi, \chi_\nu \rangle = m_\nu, \quad \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{\nu=1}^h m_\nu^2 . \quad (4.6.23) \quad \text{fg10a}$$

В случае компактных групп Ли, когда  $h = \infty$ , ряд в правой части второй формулы в (4.6.23) хорошо определен, так как представление  $T$  конечномерно и этот ряд должен обрываться.

Пусть  $G$  — конечная группа порядка  $N$  и  $T^{(R)}$  — левое регулярное представление (смотри подраздел 4.1.2) группы  $G$ :

$$g_i g_k = \sum_{m=1}^N g_m T_{mk}^{(R)}(g_i) , \quad (4.6.24) \quad \text{lrrep}$$

где  $T_{mk}^{(R)}(g_i) = \delta_{m, k_i}$  если  $g_i g_k = g_{k_i}$ . Ясно, что для характера  $\chi_R$  регулярного представления мы имеем

$$\chi_R(e) = N, \quad \chi_R(g) = 0 \quad (\forall g \neq e) , \quad (4.6.25) \quad \text{chRrep}$$

где второе соотношение выполняется, так как диагональные элементы  $T_{kk}^{(R)}(g) = 0$  для всех  $g \neq e$ . Используя этот факт и первую формулу в (4.6.23), мы можем подсчитать, сколько раз каждое неприводимое представление  $T^{(\nu)}$  конечной группы  $G$  содержится в ее регулярном представлении  $T^{(R)}$ :

$$\langle \chi_R, \chi_\nu \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \chi_R^*(g) \chi_\nu(g) = \frac{1}{N} \chi_R^*(e) \chi_\nu(e) = \frac{1}{N} N \chi_\nu(e) = N_\nu , \quad (4.6.26) \quad \text{krat}$$

то есть каждое неприводимое  $N_\nu$ -мерное представление  $T^{(\nu)}$ , входит в  $T^{(R)}$  ровно  $N_\nu$  раз (смотри обсуждение в конце Примера 2 в подразделе 4.6.1). Отсюда в частности

следует, что все неприводимые представления конечной группы  $G$  содержатся в ее регулярном представлении. Зная кратности (4.6.26), можно записать разложение  $\chi_R$  по базису характеров  $\chi_\nu$  неприводимых неэквивалентных представлений, которое в данном случае имеет вид  $\chi_R = \sum_{\nu=1}^h N_\nu \chi_\nu$ . Из этих формул следует замечательное соотношение, которое связывает между собой размерности  $N_\nu$  всех неприводимых комплексных представлений  $T^{(\nu)}$  конечной группы  $G$  и ее порядок  $N$ :

$$N = \chi_R(e) = \sum_{\nu=1}^h N_\nu \chi_\nu(e) = \sum_{\nu=1}^h N_\nu^2. \quad (4.6.27) \quad \text{fg11b}$$

Очевидное следствие этого соотношения заключается в том, что число  $h$  всех неэквивалентных неприводимых комплексных представлений конечной группы  $G$  конечно и не превосходит числа  $N = \text{ord}(G)$ . Отметим также, что тождество (4.6.27) справедливо и для всех конечномерных ( $N$ -мерных) ассоциативных алгебр.

Так как соотношение (4.6.27) выражает целое число  $N$  в виде суммы квадратов целых чисел  $N_\nu$ , то это соотношение позволяет в некоторых случаях угадывать количество и размерности всех неприводимых неэквивалентных представлений конечных групп  $G$ . Например, у абелевых групп  $G$  все неприводимые и неэквивалентные представления одномерны, поэтому согласно (4.6.27) их количество равно  $\text{ord}(G) = N$ .

- **Задача 132.** Пользуясь формулой (4.6.27), найти размерности всех неприводимых и неэквивалентных представлений группы  $S_3$  (указание: необходимо учесть, что у  $S_3$  имеется два одномерных неприводимых и неэквивалентных представления, одно из которых тривиально, а второе сопоставляет всем нечетным перестановкам  $-1$ , а всем четным  $+1$ ).

**Определение 4.6.1** Функция  $f$  на группе  $G$  называется центральной, если

$$f(h g h^{-1}) = f(g) \quad (\forall g, h \in G).$$

Иначе говоря, центральная функция на группе  $G$  – это функция на классах сопряженных элементов в  $G$ . Для центральной функции  $f$  и некоторого представления  $T$  компактной группы  $G$  рассмотрим матрицу

$$A_{mk}(f, T) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} f(g) T_{mk}(g) = \langle f^*, T_{mk} \rangle. \quad (4.6.28) \quad \text{fg11}$$

**Утверждение 4.6.2** Если представление  $T = T^{(\nu)}$  неприводимо и имеет размерность  $N_\nu$ , а также характер  $\chi_\nu$ , то матрица  $A_{mk}(f, T)$  (4.6.28) пропорциональна единичной и равна

$$A_{mk}(f, T^{(\nu)}) = \frac{1}{N_\nu} \langle f^*, \chi_\nu \rangle \delta_{mk}. \quad (4.6.29) \quad \text{fg13}$$

**Доказательство.** Делая в сумме (4.6.28) замену  $T \rightarrow T^{(\nu)}$  и преобразование  $g \rightarrow h^{-1} \cdot g \cdot h$ , легко показать, что  $T_{rm}^{(\nu)}(h^{-1}) A_{mk} T_{kj}^{(\nu)}(h) = A_{rj}$  (для всех  $h$ ) и, в соответствии с леммой Шура, мы имеем  $A_{mk} = \lambda \delta_{mk}$ . Вычисляя след от обеих частей этого равенства, мы и получаем (4.6.29). ■

В дальнейшем нам понадобится понятие групповой алгебры группы  $G$ .

**Определение 4.6.2** Групповая алгебра  $\mathbb{K}[G]$  конечной группы  $G$  над полем  $\mathbb{K}$  — это векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ , натянутое на элементы группы  $G$  как на базис. Таким образом, произвольный элемент  $\mathbb{K}[G]$  записывается в виде

$$a = \sum_{g \in G} \alpha_g g \quad (\alpha_g \in \mathbb{K}), \quad (4.6.30) \quad \text{el-ga}$$

где коэффициенты  $\alpha_g$  можно рассматривать как функции  $\alpha(g)$  на группе  $G$  со значениями в  $\mathbb{K}$ . Сумма и умножение на число  $\beta \in \mathbb{K}$  для элементов (4.6.30) определяются следующим образом

$$a + b = \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g, \quad \beta a = \sum_{g \in G} (\beta \alpha_g) g,$$

а умножение элементов (4.6.30) задается групповым умножением в  $G$

$$a \cdot b = \sum_{h \in G} \alpha_h h \cdot \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g, h \in G} (\alpha_h \beta_g) (h \cdot g) = \sum_{g \in G} \gamma_g g, \quad (4.6.31) \quad \text{el-ga2}$$

где

$$\gamma_g = \sum_{h \in G} \alpha_h \beta_{h^{-1}g}, \quad (4.6.32) \quad \text{el-ga1}$$

и при получении последнего равенства в (4.6.31) мы воспользовались инвариантностью суммирования на группе.

Мы можем переформулировать определение 4.6.2 групповой алгебры, используя координатный язык, то есть рассматривать вместо формальных векторов (4.6.30) их координатное представление в виде функций  $\alpha_g = \alpha(g)$ , заданных на группе  $G$ . Для определенности положим  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Тогда групповая алгебра  $\mathbb{C}[G]$  группы  $G$  эквивалентно определяется как алгебра комплексных функций  $\alpha_g = \alpha(g)$  на  $G$  с умножением (4.6.32). Этот объект вполне определен не только для конечных групп, но и для компактных групп Ли. При этом, по понятным причинам, необходимо потребовать, чтобы функции  $\alpha(g)$  принадлежали пространству  $L^2(G, d\mu)$  квадратично интегрируемых (с инвариантной мерой Хаара  $d\mu$ ) комплексных функций на  $G$ .

Такой трюк (рассмотрение алгебры функций на  $G$  вместо самой группы  $G$ ) можно использовать для эквивалентного определения регулярных представлений как для конечных групп (смотри формулы (4.1.17) из раздела 4.1.2), так и для компактных групп Ли. Для формулировки этого эквивалентного определения заметим прежде всего, что регулярное представление конечной группы  $G$  индуцирует представление в групповой алгебре; это представление мы тоже будем называть регулярным. А именно, запишем левое и правое действие фиксированного элемента  $g_i \in G$  на вектора (4.6.30) групповой алгебры следующим образом:

$$g_i \cdot a = \sum_{g \in G} \alpha(g_i^{-1} \cdot g) g, \quad a \cdot g_i = \sum_{g \in G} \alpha(g \cdot g_i^{-1}) g, \quad (4.6.33) \quad \text{el-ga3}$$

VRN

где мы снова воспользовались инвариантностью суммирования на группе. Сравнивая эти формулы с (4.1.17), мы видим, что

$$T_{km}^{(R)}(g_i) \alpha(g_m) = \alpha(g_i^{-1} \cdot g_k) , \quad (4.6.34) \quad \text{el-ga4}$$

$$\alpha(g_k) \tilde{T}_{kj}^{(R)}(g_i) = \alpha(g_j \cdot g_i^{-1}) .$$

Из последнего равенства и из свойства  $\tilde{T}^{(R)T}(g) = \tilde{T}^{(R)}(g^{-1})$ , верного для конечных групп (смотри Задачу 116), следует

$$\tilde{T}_{jk}^{(R)}(g_i) \alpha(g_k) = \alpha(g_j g_i) . \quad (4.6.35) \quad \text{el-ga7}$$

Соотношения (4.6.34), (4.6.35) и определяют действие левого и правого регулярных представлений на групповой алгебре конечной группы, которое реализовано линейными операторами на пространстве функций<sup>20</sup> на группе  $G$  и осуществляется левыми и правыми сдвигами на группе  $G$ .

Теперь аналоги формул (4.6.34), (4.6.35) можно положить в основу определения левого и правого регулярного представления для компактных групп Ли  $G$ . Введем линейные операторы  $T^{(R)}(h)$  и  $\tilde{T}^{(R)}(h)$ , действующие в пространстве функций  $L^2(G, d\mu)$  и порождаемые, соответственно, левым и правым сдвигом в  $G$ :

$$[T^{(R)}(h)\alpha](g) = \alpha(h^{-1} \cdot g) , \quad (4.6.36) \quad \text{el-ga5e1}$$

$$[\tilde{T}^{(R)}(h)\alpha](g) = \alpha(g \cdot h) . \quad (4.6.37) \quad \text{el-ga5}$$

Отображения  $T^{(R)}$  и  $\tilde{T}^{(R)}$  из  $G$  в множество линейных операторов, действующих в пространстве функций на  $G$ , и будут левым и правым регулярными представлениями группы  $G$ . Эти представления бесконечномерны, так как пространство  $L^2(G, d\mu)$  бесконечномерно.

- *Задача 133. Доказать, что отображения  $T^{(R)}$  и  $\tilde{T}^{(R)}$ , заданные формулами (4.6.36) и (4.6.37), являются гомоморфизмами из  $G$  в группу линейных операторов, действующих в  $L^2(G, d\mu)$ .*
- *Задача 134. Доказать, что регулярные представления  $T^{(R)}$  и  $\tilde{T}^{(R)}$  компактной группы  $G$  унитарны относительно скалярного произведения в  $L^2(G, d\mu)$ :*

$$(\alpha, \beta) = \int_G d\mu(g) \alpha^*(g) \beta(g) .$$

Рассмотрим пространство  $H$  всех центральных функций на  $G$ , см. Определение 4.6.1. Очевидно, характеры  $\{\chi_1, \dots, \chi_h\}$  неприводимых представлений принадлежат этому пространству.

VRN

<sup>20</sup>Для группы  $G$  конечного порядка  $N$  пространство комплексных функций на  $G$  – это  $N$ -мерное комплексное векторное пространство.

**Утверждение 4.6.3** *Характеры  $\{\chi_1, \dots, \chi_h\}$  образуют ортонормированный базис в пространстве  $H$ .*

**Доказательство.**<sup>21</sup> В соответствии с (4.6.22) функции  $\{\chi_1, \dots, \chi_h\}$  образуют ортонормированную систему в  $H$ . Нам требуется доказать, что эта система полна, т.е. любой элемент  $f \in H$ , ортогональный любому характеру  $\chi_\nu$ , должен равняться нулю. Рассмотрим для такого элемента  $f$  матрицу  $A_{mk}(f^*, T)$  (4.6.28). Она равна нулю для любого неприводимого представления  $T$  в силу равенства нулю правой части (4.6.29), так как  $f$  ортогонален характеру  $\chi_T$ . Поскольку любое представление (в том числе и регулярное) конечной группы может быть разложено в прямую сумму неприводимых, мы заключаем что  $A_{mk}(f^*, T^{(R)}) = 0$  и для регулярного представления (4.6.24). В свою очередь это означает, что для всех  $g_k \in G$  справедливо

$$\frac{1}{N} \left( \sum_{g \in G} f^*(g) g \right) \cdot g_k = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{g \in G} f^*(g) T_{mk}^{(R)}(g) g_m = \sum_{m=1}^N A_{mk}(f^*, T^{(R)}) g_m = 0. \quad (4.6.38) \text{ gralg}$$

Отсюда следует, что элемент  $\sum_{g \in G} f^*(g) g$  групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$  равен нулю и, так как элементы  $g \in G$  образуют базис в  $\mathbb{C}[G]$ , то  $f^*(g) = 0$ , или  $f(g) = 0$  для всех  $g \in G$ . ■

Итак, любая центральная функция  $f \in H$  может быть разложена в сумму по характерам неприводимых и неэквивалентных представлений

$$f(g) = \sum_{\nu=1}^h c_\nu \chi_\nu(g). \quad (4.6.39) \text{ fchi}$$

Напомним, что элементы  $g$  и  $g'$  из группы  $G$  называются сопряженными, если существует элемент  $h \in G$  такой, что  $g' = hgh^{-1}$ . Все элементы группы  $G$  разбиваются на классы  $C_1, \dots, C_k$  сопряженных элементов.

**Утверждение 4.6.4** *Число  $k$  всех классов сопряженности группы  $G$  равно числу  $h$  неэквивалентных неприводимых представлений группы  $G$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную центральную функцию  $f \in H$ . Она постоянна на каждом классе  $C_m$ :  $f(C_m) = \lambda_m$ . Таким образом, любая центральная функция  $f$  определяется  $k$  константами  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Это означает, что размерность пространства  $H$  равна  $k$ . С другой стороны, согласно Утверждению 4.6.3, размерность  $H$  равна числу независимых характеров  $\chi_1, \dots, \chi_h$ , а это число совпадает с числом неэквивалентных неприводимых представлений группы  $G$ . Это доказывает равенство  $k = h$ . ■

- **Задача 135.** Порядок подгруппы четных перестановок  $A_4 \subset S_4$  равен 12. Пользуясь тем, что число классов сопряженности в  $A_4$  равно 4 (докажите это, разлагая четные перестановки в произведение циклов; смотри Утверждение 2.1.3) и формулой (4.6.27), найти размерности всех неприводимых неэквивалентных представлений группы  $A_4$ .

<sup>21</sup>Мы даем доказательство этого утверждения для случая конечных групп. С учетом определений групповой алгебры и регулярного представления для компактных групп, приведенных выше, это доказательство может быть распространено и на случай компактных групп.



Пусть  $f_{g'}$  - функция, равная 1 на классе сопряженности  $C_{g'}$  элемента  $g' \in G$  и равная 0 на других классах сопряженности. Очевидно, что  $f_{g'}$  - центральная функция, которая может быть разложена в сумму по характерам  $f_{g'} = \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \chi_{\nu}$ , где

$$\lambda_{\nu} = \langle \chi_{\nu}, f_{g'} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in C_{g'}} \chi_{\nu}^*(g) f_{g'}(g) = \frac{c(g')}{N} \chi_{\nu}^*(g'),$$

и  $c(g') = \dim(C_{g'})$ . Таким образом, для любого  $g \in G$  мы получаем

$$f_{g'}(g) = \sum_{\nu=1}^h \lambda_{\nu} \chi_{\nu}(g) = \frac{c(g')}{N} \sum_{\nu=1}^h \chi_{\nu}^*(g') \chi_{\nu}(g) = \begin{cases} 1 & \text{если } g \in C_{g'}, \\ 0 & \text{если } g \notin C_{g'}. \end{cases} \quad (4.6.40) \quad \text{fg14}$$

Последнее равенство – это другой тип условия ортогональности для характеров  $\chi_{\nu}(g)$  (ср. с (4.6.22)).

- **Задача 136.** Построить все неприводимые неэквивалентные представления группы  $C_n = \mathbf{Z}_n$ . Найти аналоги формул (4.6.21) и (4.6.40) для характеров этих представлений и описать пространство центральных функций на группе  $C_n = \mathbf{Z}_n$ .

**Замечание 1.** Утверждение 4.6.4 и формула (4.6.40) верны для конечных групп. Компактная группа Ли имеет бесконечно много неприводимых представлений, поэтому Утверждение 4.6.4 для компактных групп Ли бессодержательно (кроме почти очевидного следствия, что в группе Ли имеется бесконечно много классов сопряженности).

**Замечание 2.** Левое и правое регулярные представления (4.6.36) и (4.6.37) компактной группы Ли  $G$  — приводимы и унитарны (см. Задачу 134). Разложение этих представлений в прямую сумму неприводимых и неэквивалентных представлений группы  $G$  можно получить, используя следующую теорему Ф.Петера и Г.Вейля.

**Теорема 4.6.5** Пусть  $\{T^{(\nu)}\}$  — система всех конечномерных неэквивалентных и неприводимых представлений компактной группы Ли  $G$  (индекс  $\nu$  — нумерует представления). Тогда любая непрерывная функция  $f \in L^2(G, d\mu)$  на группе  $G$  может быть разложена в ряд по матричным элементам  $T_{jk}^{(\nu)}$  всех представлений  $\{T^{(\nu)}\}$ :

$$f(g) = \sum_{\nu, j, k} C_{\nu}^{jk} T_{jk}^{(\nu)}(g). \quad (4.6.41) \quad \text{fg15}$$

Данное утверждение означает, что матричные элементы  $T_{jk}^{(\nu)}$  образуют полную систему функций в пространстве  $L^2(G, d\mu)$ . Мы не будем приводить здесь доказательство теоремы Петера–Вейля полностью. Идея доказательства основывается на использовании обобщения соотношения (4.6.20) на случай компактных групп Ли:

$$\frac{1}{V} \int d\mu(g) T_{j\nu, i\nu}^{(\nu)*}(g) T_{k\mu, m\mu}^{(\mu)}(g) = \frac{1}{N_{\nu}} \delta^{\mu\nu} \delta_{i\nu, m\mu} \delta_{k\mu, j\nu}. \quad (4.6.42) \quad \text{fg16}$$

Если функция  $f$  разлагается в ряд (4.6.41), то эта функция определяется однозначно, так как коэффициенты  $C_\nu^{jk}$  находятся с помощью формулы (4.6.42). Поэтому остается доказать, что функций  $f$ , ортогональных к (4.6.41), не существует. Другими словами, если выполняются условия  $\int d\mu(g) f^*(g) T_{jk}^{(\nu)}(g) = 0$  для всех  $\nu, j, k$ , то  $f(g) = 0$ . Последний факт следует из того, что любое представление компактной группы  $G$ , в том числе и регулярное, разлагается в прямую сумму представлений  $T^{(\nu)}$  (сравните с аналогичным рассуждением в доказательстве Утверждения 4.6.3).

### 4.6.3 Неприводимые представления и характеры группы $SO(2) = U(1)$ .

В качестве применения теории характеров рассмотрим пример компактной группы  $SO(2) = U(1)$ .

Согласно (4.4.9) двумерное представление  $O_\phi$  (2.1.15), (3.2.15) группы  $SO(2)$  есть прямая сумма  $T^{(1)}(O_\phi) \oplus T^{(1)*}(O_\phi)$  двух одномерных комплексных представлений  $T^{(1)}(O_\phi) = e^{i\phi}$  и  $T^{(1)*}(O_\phi) = e^{-i\phi}$  (см. (4.4.8)). Заметим, что отображение  $T^{(1)}$  устанавливает взаимнооднозначное соответствие групп:  $SO(2) \leftrightarrow U(1)$ .

Так как компактная группа  $SO(2)$  имеет бесконечный порядок и абелева, то ее регулярное представление бесконечномерно и распадается на бесконечное число одномерных неэквивалентных неприводимых представлений  $T^{(n)}$ , которые нумеруются целыми числами  $n$ :

$$T^{(n)}(g_\phi) = e^{in\phi}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}. \quad (4.6.43) \quad \text{irrepo2}$$

Очевидно, что характеры представлений (4.6.43) равны  $\chi_n(\phi) = e^{in\phi}$ . Согласно теории характеров (см. предыдущий подраздел 4.6.2) функции  $\chi_n(\phi) = e^{in\phi}$  образуют полную систему функций в пространстве всех центральных функций на группе  $SO(2)$ . Все функции на группе  $SO(2)$  периодичны:  $f(\phi) := f(O_\phi) = f(\phi + 2\pi)$ , а в силу абелевости  $SO(2)$  все такие функции центральны. Таким образом, любая периодическая функция  $f(\phi)$  разлагается в ряд по характерам (см. (4.6.39))

$$f(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi}, \quad (4.6.44) \quad \text{irrepo3}$$

который есть не что иное, как ряд Фурье. В частности формула (4.6.44) показывает, что представления (4.6.43) исчерпывают все неприводимые и неэквивалентные комплексные представления группы  $SO(2) = U(1)$ . Условие ортонормируемости (известное из теории рядов Фурье)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\phi} (e^{in\phi})^* d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-in\phi} d\phi = \delta_{mn}$$

— это не что иное, как условие ортогональности (4.6.22) для характеров неприводимых представлений. При этом интеграл по  $\phi$  определяет инвариантное интегрирование на группе  $SO(2)$  с инвариантной мерой  $d\phi$ , а  $2\pi$  — объем группы  $SO(2)$ . Мера  $d\phi$  инвариантна, так как она не изменяется при замене координат  $\phi \rightarrow \phi - \theta$  (группа  $SO(2)$  действует на периодические функции сдвигами  $T(O_\theta) \cdot f(\phi) = f(\phi - \theta)$ ).

В заключение отметим, что, так как неприводимые представления (4.6.43) одномерны, разложение (4.6.44) любой периодической функции (функции на группе  $SO(2)$ ) можно рассматривать и как пример применения теоремы Петера–Вейля 4.6.5.

## 4.7 Обертывающая алгебра. Операторы Казимира

### 4.7.1 Определение обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ для алгебры Ли $\mathcal{A}$ .

Если  $T$  — представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , то естественно рассмотреть операторы

$$T_a \equiv T(X_a) ,$$

где  $X_a$  — образующие (генераторы) алгебры  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющие структурным соотношениям (3.2.71). В физической литературе операторы  $T_a$  называют генераторами в представлении  $T$ . Поскольку любой элемент алгебры  $\mathcal{A}$  представляет собой линейную комбинацию ее образующих  $X_a$ , любой оператор  $T(A)$  — это линейная комбинация операторов  $T_a$ . Независимо от того, какое именно представление рассматривается, операторы  $T_a$  удовлетворяют одинаковым по форме соотношениям коммутации

$$[T_a, T_b] = C_{ab}^c T_c , \quad (4.7.1) \quad \text{dec13-11-*}$$

где  $C_{ab}^c$  — структурные константы алгебры  $\mathcal{A}$ . В отличие от элементов самой алгебры  $\mathcal{A}$ , операторы  $T(A)$  можно перемножать (напомним, что произведение операторов понимается как последовательное действие), при этом важными объектами в теории представлений алгебр Ли являются полиномы, построенные из операторов  $T_a$ . В самой алгебре Ли таких полиномов нет. Таким образом, представление  $T$  сопоставляет алгебре Ли  $\mathcal{A}$  некоторую ассоциативную алгебру операторов  $\mathcal{U}_T(\mathcal{A})$ , состоящую из всевозможных произведений операторов  $T_a$  и их линейных комбинаций. Все алгебры  $\mathcal{U}_T(\mathcal{A})$  для разных представлений  $T$  имеют то общее свойство, что они являются представлениями одной и той же универсальной ассоциативной алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , которая строится по алгебре Ли  $\mathcal{A}$  однозначно. Конструкцию этой универсальной алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  мы и будем обсуждать в этом разделе.

Построим из алгебры Ли  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{K}$  новую бесконечномерную ассоциативную алгебру  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  над полем  $\mathbb{K}$ , имеющую в качестве базисных элементов упорядоченные комбинации

$$X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdot X_{a_3} \cdots X_{a_k} , \quad (a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k) , \quad (4.7.2) \quad \text{unob3}$$

(ограничение  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$  здесь существенно!), построенные из образующих  $X_a$  алгебры  $\mathcal{A}$  и имеющие произвольную длину  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Элемент нулевой длины обозначим как  $I$ . Любой элемент алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  получается как линейная комбинация (с коэффициентами из  $\mathbb{K}$ ) базисных элементов

$$\{I, X_a, X_a \cdot X_b, X_a \cdot X_b \cdot X_c, \dots\} , \quad (a \leq b \leq c \leq \dots) . \quad (4.7.3) \quad \text{unob}$$

Умножение в алгебре  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  определяется следующим образом:

$$I \cdot (X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_k}) = (X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_k}) \cdot I = X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_k} , \quad (4.7.4) \quad \text{unob5}$$

$$(X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_k}) \cdot (X_{b_1} \cdot X_{b_2} \cdots X_{b_r}) = X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_k} \cdot X_{b_1} \cdot X_{b_2} \cdots X_{b_r} . \quad (4.7.5) \quad \text{unob2}$$

Это умножение очевидно ассоциативно. Для того, чтобы получившийся в правой части (4.7.5) элемент снова принадлежал  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , его надо привести к упорядоченному виду (4.7.2). Для этого будем считать, что в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  выполняются следующие соотношения

$$[X_a, X_b] \equiv X_a \cdot X_b - X_b \cdot X_a = C_{ab}^c X_c , \quad (4.7.6) \quad \text{unob1}$$

где  $C_{ab}^c$  — структурные константы алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . С помощью соотношений (4.7.6) образующие, стоящие рядом в правой части (4.7.5), можно менять местами, в результате чего выражение в правой части (4.7.5) можно представить в виде линейной комбинации базисных элементов (4.7.3). Эта процедура и лежит в основе определения бесконечномерной ассоциативной алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , получаемой из алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Подчеркнем, что умножение в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  не имеет прямой связи с умножением (коммутатором) в исходной алгебре  $\mathcal{A}$ . Тот факт, что алгебра  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  имеет отношение к алгебре Ли  $\mathcal{A}$ , целиком обусловлен соотношениями (4.7.6).

**Определение 4.7.1** *Бесконечномерная ассоциативная алгебра  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  с базисом (4.7.3), умножением (4.7.4), (4.7.5) и дополнительными структурными соотношениями (4.7.6) называется обертывающей алгеброй алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .*

Итак, под обертывающей алгеброй  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  мы понимаем линейное пространство всех линейных комбинаций мономов (4.7.3), причем линейные комбинации, которые сводятся друг к другу коммутацией элементов алгебры (4.7.6), отождествляются. Например, для  $A, B, C, D \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$  имеем

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = A \cdot C \cdot B \cdot D + A \cdot [B, C] \cdot D = A \cdot C \cdot B \cdot D + A \cdot D \cdot [B, C] + A \cdot [[B, C], D] , \quad (4.7.7) \quad \text{dec13-11-10}$$

и т.д. В таком линейном пространстве определена операция умножения (4.7.5), а именно, умножение мономов — это приписывание одного к другому,

$$(A \cdot B \cdot C) \cdot (D \cdot E) = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E , \quad (4.7.8) \quad \text{dec13-11-11}$$

а умножение их линейных комбинаций производится путем раскрытия скобок,

$$\begin{aligned} & (\alpha A \cdot B + \beta C \cdot D) \cdot (\gamma E \cdot F + \delta G) = \\ & = \alpha \gamma A \cdot B \cdot E \cdot F + \alpha \delta A \cdot B \cdot G + \beta \gamma C \cdot D \cdot E \cdot F + \beta \delta C \cdot D \cdot G , \end{aligned} \quad (4.7.9) \quad \text{dec13-11-12}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ . Операция умножения согласована с коммутацией в алгебре:

$$A \cdot B - B \cdot A = [A, B] ,$$

при этом слева — произведения в обертывающей алгебре, справа — выражение, которое определяется коммутатором (4.7.6) в исходной алгебре Ли. Этими свойствами обертывающая алгебра определяется полностью.

Полезно от введения обертывающей алгебры состоит в следующем. Рассмотрим представление  $T$  алгебры  $\mathcal{A}$  и всевозможные полиномы от генераторов  $T_a$ . Как мы уже говорили, такие полиномы образуют некоторую ассоциативную алгебру  $\mathcal{U}_T(\mathcal{A})$ .

При этом не зависящие от конкретного выбора представления  $T$  свойства этой алгебры совпадают со свойствами алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Иначе говоря, каждое представление  $T$  алгебры  $\mathcal{A}$  определяет гомоморфное отображение из  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  в  $\mathcal{U}_T(\mathcal{A})$ , и исследование алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  позволяет выделить наиболее общие характеристики представлений алгебры  $\mathcal{A}$ , смотри в связи с этим раздел 4.7.2.

Здесь нужно сделать замечание. Элементы типа  $A \cdot B$  обертывающей алгебры следует воспринимать формально, считая, что про элементы исходной алгебры Ли известно ничего, кроме коммутационных соотношений, даже если эта алгебра описана явно. Например, для матриц Паули (3.1.18), которые образуют базис в алгебре Ли  $su(2)$  (смотри раздел 3.2.9), справедливо соотношение  $\sigma_{\{i\sigma_j\}} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_k\sigma_k$  (фигурные скобки обозначают симметризацию по индексам), однако это соотношение *нельзя* считать справедливым в обертывающей алгебре  $\mathcal{U}(su(2))$ , так как оно не выполняется в других представлениях  $su(2)$ . Тем более нельзя пользоваться соотношениями  $\sigma_{\{i\sigma_j\}} = \delta_{ij}$ , которые не выполняются даже для тривиального представления  $su(2)$ .

#### 4.7.2 Представления обертывающей алгебры. Операторы Казимира.

Поскольку алгебра Ли  $\mathcal{A}$  гомоморфно отображена (вложена) в свою обертывающую алгебру  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  как подалгебра линейных комбинаций мономов первого порядка, каждому представлению  $T$  обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  соответствует представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . С другой стороны, каждому представлению  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  можно сопоставить представление алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , то есть гомоморфное отображение  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{U}_T(\mathcal{A})$ , которое задается на базисных элементах (4.7.3) алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  формулами

$$T(X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_r}) = T(X_{a_1}) \cdot T(X_{a_2}) \cdots T(X_{a_r}) = T_{a_1} \cdot T_{a_2} \cdots T_{a_r}. \quad (4.7.10) \quad \text{mrep5}$$

Это действительно представление алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , так как операторы  $T_a \equiv T(X_a)$  удовлетворяют соотношениям (4.7.6), если в них заменить  $X_a \rightarrow T_a$ , а алгебра операторов  $\mathcal{U}_T(\mathcal{A})$  в пространстве представления алгебры Ли  $\mathcal{A}$  обладает свойствами (4.7.7), (4.7.8), (4.7.9) (с заменой  $A$  на  $T(A)$ ,  $B$  на  $T(B)$  и так далее).

Пусть  $C$  — элемент обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , который коммутирует с образующими  $X_a$  алгебры  $\mathcal{A}$ , а значит и со всей алгеброй  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Иначе говоря, элемент  $C$  принадлежит центру  $\mathcal{Z}$  обертывающей алгебры. Тогда  $[T(C), T(A)] = 0$  для всех  $A \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$  и всех представлений  $T$  алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Если  $T$  — комплексное и неприводимое представление, то, по лемме Шура, оператор  $T(C)$  кратен единичному оператору

$$T(C) = \lambda \cdot I, \quad (4.7.11) \quad \text{oct161}$$

где собственные значения  $\lambda$  зависят от оператора  $C$  и являются важной характеристикой представления  $T$ .

**Определение 4.7.2** Образующие центра  $\mathcal{Z}$  обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  называются операторами Казимира алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

Напомним, что набор образующих некоторой алгебры  $\mathcal{Z}$  — это минимальный набор элементов в  $\mathcal{Z}$ , из которых все остальные получаются алгебраическими операциями

умножения, сложения и умножения на число. Таким образом, операторы Казимира составляют минимальный набор *независимых* элементов, которые коммутируют со всеми элементами  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Можно доказать, что для простой алгебры Ли *количество операторов Казимира равно рангу этой алгебры*, смотри ниже Утверждение 4.7.5 ISA (определение ранга алгебры Ли дано в разделе 5.4). С этим утверждением тесно связано утверждение о том, что собственные значения  $\lambda$  (4.7.11) операторов Казимира полностью и однозначно характеризуют неприводимые комплексные конечномерные представления простой алгебры Ли. Поэтому исследование спектра операторов Казимира имеет важное значение в теории представлений алгебр Ли. Далее в этом разделе мы будем рассматривать для определенности (если специально не оговорено другое) только простые алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Многие утверждения этого раздела непосредственно переносятся на случай полупростых алгебр Ли.

Простейшим примером оператора  $C$  алгебры  $\mathcal{A}$  служит квадратичный оператор Казимира

$$C_2 = g^{ab} X_a X_b, \quad (4.7.12) \quad \text{kaz-c2}$$

где  $g^{ab}$  – элементы матрицы, обратной к матрице метрики Киллинга (3.2.100), вычисленной в базисе  $X_a$ .

- *Задача 137. Показать, используя антисимметрию величин  $C_{abc} = g_{cd} C_{ab}^d$  по всем индексам, что  $C_2 = g^{ab} X_a X_b$  коммутирует со всеми операторами  $A$  простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .*
- *Задача 138. Показать, что оператор (4.7.12) не зависит от выбора базиса в  $\mathcal{A}$  (в частности не зависит от нормировки образующих  $X_a$ ).*
- *Задача 139. Доказать, что операторов Казимира первого порядка (то есть линейных по  $X_a$ ) нет для простых алгебр Ли.*

Для алгебры Ли  $su(2)$  эта конструкция хорошо известна из квантовой механики: оператор  $2C_2$  – это оператор квадрата вектора спина,

$$2C_2 = -\tau_\alpha \tau_\alpha =: J^2, \quad (4.7.13) \quad \text{kaz-00}$$

где  $\tau_\alpha$  – базисные элементы алгебры  $su(2)$ , удовлетворяющие (см. (3.2.121))

$$[\tau_\alpha, \tau_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma. \quad (4.7.14) \quad \text{li4ka}$$

Эрмитовы генераторы  $i\tau_\alpha$  интерпретируются как компоненты оператора вектора спина. Нам уже известны три представления алгебры  $su(2)$ : тривиальное одномерное представление  $T_0$  такое, что  $T_0(\tau_\alpha) = 0$ ; определяющее двумерное представление (3.2.120), реализованное матрицами Паули:

$$T_{1/2}(\tau_\alpha) = -i\sigma_\alpha/2; \quad (4.7.15) \quad \text{rs12}$$

и трехмерное присоединенное (4.2.11) представление  $T_1$ , которое согласно (4.7.14) имеет вид<sup>22</sup>

$$[T_1(\tau_\alpha)]_{\beta\gamma} = \text{ad}(\tau_\alpha)_{\beta\gamma} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}. \quad (4.7.16) \quad \text{rs13}$$

<sup>22</sup>Можно также воспользоваться изоморфизмом  $su(2) = so(3)$  и формулой (3.2.142).

- **Задача 140.** Пользуясь (4.7.16), вычислить обратную матрицу метрики Киллинга  $g^{\alpha\beta}$  для  $su(2)$  в базисе  $\tau_\alpha$  и доказать, что (4.7.13) согласовано с (4.7.12).

Соотношение (4.7.11) означает, что квадрат вектора спина  $J^2$  (4.7.13) одинаков для всех векторов (состояний) пространства неприводимого представления  $su(2)$  и равен некоторому фиксированному значению  $\lambda$ . Удобно представить это значение в виде  $\lambda = j(j+1)$ , где число  $j$  называется спином. Конечномерное и неприводимое представление алгебры  $su(2)$  однозначно характеризуется целым или полуцелым неотрицательным спином  $j$  (смотри раздел 7.1).

- **Задача 141.** Проверить, что для определяющего (4.7.15) и присоединенного (4.7.16) представлений справедливо  $T_{1/2}(J^2) = \frac{3}{4} I_2$  и  $T_1(J^2) = 2 I_3$ , то есть  $j = \frac{1}{2}$  и  $j = 1$ , соответственно.

Вернемся к общему случаю и обсудим, каким образом можно построить все операторы Казимира произвольной простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Заметим прежде всего, что при построении операторов Казимира удобно пользоваться отличным от (4.7.3) базисом в обертывающей алгебре  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , а именно, искать операторы Казимира в виде линейных комбинаций симметричных однородных полиномов  $X_{\{a_1} X_{a_2} \dots X_{a_k\}}$ , где фигурные скобки обозначают симметризацию по всем индексам:

$$X_{\{a_1} X_{a_2} \dots X_{a_k\}} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} X_{a_{\sigma(1)}} \cdot X_{a_{\sigma(2)}} \cdots X_{a_{\sigma(k)}}. \quad (4.7.17) \quad \text{symX}$$

Здесь сумма идет по всем перестановкам  $\sigma \in S_k$ , а индексы  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  в (4.7.17) всегда можно упорядочить так, чтобы  $(a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k)$ . BSF

Симметричный полином нулевого порядка — это элемент  $I$ . Утверждение о том, что симметричные полиномы (4.7.17) для  $k \geq 0$  образуют базис в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , нетрудно доказать индукцией по  $k$ . Действительно, при  $k = 1$  элементы (4.7.17) — это набор линейно независимых исходных генераторов  $X_a$ , которые образуют базис в пространстве полиномов первого порядка в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Далее, пусть  $k > 1$  и пусть любой полином в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  порядка  $(k-1)$  симметризуется, то есть представляется в виде линейной комбинации симметричных полиномов (4.7.17), имеющих порядок  $m \leq k-1$ . Рассмотрим любой моном  $X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_k}$  порядка  $k$ . Его можно симметризовать с помощью многократного применения соотношения (4.7.6), при этом моном  $X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_k}$  заменяется на симметричный полином (4.7.17) с добавлением линейной комбинации мономов порядка  $(k-1)$  и ниже, которые возникают за счет применения операции коммутирования (4.7.17) и симметризуются по предположению индукции. Поэтому любой однородный полином порядка  $k$  сводится к линейной комбинации симметричных полиномов (4.7.17) порядка  $k$  и ниже. С другой стороны, симметричные полиномы  $X_{\{a_1} X_{a_2} \dots X_{a_k\}}$  с различными упорядоченными наборами индексов  $(a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k)$  линейно независимы и не сводятся коммутацией к полиномам только низшего порядка, а потому все полиномы (4.7.17) любого порядка  $k = 0, 1, \dots$  с упорядоченными индексами  $(a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k)$  образуют базис во всей алгебре  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , что и требовалось. ESF

При коммутации симметричного полинома  $X_{\{a_1} X_{a_2} \dots X_{a_k\}}$  с генераторами  $X_b$  возникает линейная комбинация симметричных полиномов, причем максимальная степень симметричных полиномов в этой линейной комбинации снова равна  $k$ . Поэтому можно предположить, что операторы Казимира представляются в виде однородных линейных комбинаций симметричных полиномов  $X_{\{a_1} X_{a_2} \dots X_{a_k\}}$ , которые имеют фиксированный порядок  $k$  (обоснование этого предположения изложено ниже в разделе 4.7.3). Например, кубичный оператор Казимира имеет вид

$$C_3 = d^{abc} X_a \cdot X_b \cdot X_c \quad (4.7.18) \quad \text{dec14-11-1}$$

с полностью симметричными числовыми коэффициентами  $d^{abc}$ . Выясним, каким требованиям должны удовлетворять коэффициенты  $d^{abc}$ . Будем считать, что алгебра Ли  $\mathcal{A}$  соответствует группе Ли  $G$ , то есть  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$  (хотя, как будет показано ниже в разделе 4.7.3, это условие необязательно). В разделе 4.1.1 (пункт 5.) мы определили присоединенное представление  $\text{ad}$  группы  $G$ , которое действует в пространстве  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$  следующим образом

$$\text{ad}(g) \cdot X_a = X_b (\text{ad } g)_a^b, \quad (4.7.19) \quad \text{kaz-ad1}$$

где  $g \in G$  и  $(\text{ad } g)_a^b$  — матрица оператора присоединенного представления группы, записанная в базисе  $X_a \in \mathcal{A}$ . Это представление очевидным образом с помощью соотношений

$$\text{ad}(g) \cdot (X_{a_1} \dots X_{a_k}) = (X_{b_1} \dots X_{b_k}) (\text{ad } g)_{a_1}^{b_1} \dots (\text{ad } g)_{a_k}^{b_k}, \quad (4.7.20) \quad \text{kaz-ad3}$$

распространяется на представление  $\text{ad}$  группы  $G$ , которое действует во всей обертывающей алгебре  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Тогда условие

$$[C, A] = 0, \quad A \in \mathcal{A}(G),$$

можно записать в эквивалентном виде

$$\text{ad}(g) \cdot C = C, \quad (4.7.21) \quad \text{kaz-ad2}$$

где  $g = e^{tA}$  и  $t$  малый параметр. Отметим, что определение (4.7.19) и условие (4.7.21) для матричных групп Ли записываются в более явном виде

$$g \cdot X_a \cdot g^{-1} = X_b (\text{ad } g)_a^b, \quad g \cdot C \cdot g^{-1} = C.$$

Согласно (4.7.20) присоединенное действие группы  $G$  на кубичный оператор Казимира имеет вид

$$\text{ad}(g) \cdot C_3 = (\text{ad } g)_a^d (\text{ad } g)_b^e (\text{ad } g)_c^f d^{abc} X_d X_e X_f,$$

так что требование инвариантности  $C_3$  сводится (напомним, что симметризованные произведения  $X_{\{d} X_e X_{f\}}$  являются базисными элементами в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ ) к требованию

$$(\text{ad } g)_a^d (\text{ad } g)_b^e (\text{ad } g)_c^f d^{abc} = d^{def}. \quad (4.7.22) \quad \text{oct17-10-1}$$



Симметричный тензор  $d^{abc}$  можно воспринимать как элемент из пространства тензорного произведения трех ко-присоединенных<sup>23</sup> представлений, тогда условие (4.7.22) означает, что этот тензор инвариантен относительно ко-присоединенного действия группы  $G$ . Построить такой тензор можно с использованием какого-либо точного неприводимого представления  $T$  простой алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  и метрики Киллинга  $g^{ad}$ :

$$d^{abc} = g^{ad} g^{be} g^{cf} \operatorname{Tr} (T_d T_e T_f) . \quad (4.7.23) \quad \text{dec14-11-2}$$

Операторы Казимира более высоких порядков (если таковые существуют) строятся аналогично и содержатся в наборе инвариантных элементов:

$$C_k = d^{a_1 \dots a_k} X_{a_1} \dots X_{a_k} , \quad (4.7.24) \quad \text{kaz-05}$$

где  $d^{a_1 \dots a_k}$  — симметричные тензоры ранга  $k$ , а инвариантность  $C_k$  эквивалентна инвариантности тензора  $d^{a_1 \dots a_k}$  относительно ко-присоединенного действия группы  $G$ :

$$(\operatorname{ad} g)_{a_1}^{b_1} (\operatorname{ad} g)_{a_2}^{b_2} \dots (\operatorname{ad} g)_{a_k}^{b_k} d^{a_1 a_2 \dots a_k} = d^{b_1 b_2 \dots b_k} , \quad \forall g \in G , \quad (4.7.25) \quad \text{kaz-05g}$$

что обобщает условия (4.7.22). Отметим, что если бы в формуле (4.7.24) тензор  $d^{a_1 \dots a_k}$  не был симметричным, то требование  $Ad$ -инвариантности (4.7.25) этого тензора являлось бы только достаточным условием инвариантности элемента  $C_k$ .

- **Задача 142.** Пусть элемент  $g \in G$  в (4.7.25) близок к единичному, то есть  $g = e^{tA}$ , где  $t$  — мало и  $A \in \mathcal{A}(G)$ . Показать, что в этом случае соотношение (4.7.25) дает условие инвариантности тензора  $d^{a_1 a_2 \dots a_k}$  относительно ко-присоединенного действия алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ :

$$(\operatorname{ad} A)_{a_1}^{b_1} d^{a_1 b_2 \dots b_k} + (\operatorname{ad} A)_{a_2}^{b_2} d^{a_1 a_2 b_3 \dots b_k} + \dots + (\operatorname{ad} A)_{a_k}^{b_k} d^{b_1 \dots b_{k-1} a_k} = 0 . \quad (4.7.26) \quad \text{kaz-05h}$$

Доказать прямым вычислением эквивалентность условий  $[A, C_k] = 0$  и (4.7.26).

Симметричный  $Ad$ -инвариантный тензор  $d^{a_1 \dots a_k}$  в формуле (4.7.24) можно брать в виде (сравните с (4.7.23)):

$$d^{a_1 \dots a_k} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_k b_k} \operatorname{Tr} (T_{b_1} \dots T_{b_k}) , \quad T_a = T(X_a) , \quad (4.7.27) \quad \text{kaz-05d}$$

где  $T$  — точное представление простой алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ . В качестве такого представления  $T$  обычно используют присоединенное представление  $T = \operatorname{ad}$ , вернее его матричную реализацию в терминах структурных констант в выбранном базисе  $X_a$ . В этом случае операторы  $C_k$  записаны так, что они не зависят от выбора базиса  $X_a$  и, в частности, от нормировки образующих  $X_a$ . В случае матричной алгебры  $\mathcal{A}(G)$  в качестве  $T$  иногда берут определяющее представление  $\mathcal{A}(G)$ . При этом при вычислении собственных значений элемента  $C_k$  необходимо следить за нормировкой образующих  $T_a$  или соответственно подбирать нормировку метрики  $g^{ab}$ .

<sup>23</sup>Напомним, что для простых и полупростых групп и алгебр Ли присоединенное и ко-присоединенное представления эквивалентны, смотри Задачу 123.

ISA  
предло-  
жение,  
формула и  
далее

ISA  
ное утвер-  
ждение

ISA  
ный абзац

- **Задача 143.** Показать, используя только свойства алгебры Ли  $\mathcal{A}$  (не вводя в рассмотрение ее группу Ли) и формулу (4.7.26), что полином (4.7.18) с константами (4.7.23) является оператором Казимира.

В алгебре  $su(2)$  существует всего один оператор Казимира — квадратичный. Это следует из того, что в случае  $su(2)$  все  $Ad$ -инвариантные симметричные тензоры  $d^{a_1 \dots a_k}$  нечетного ранга  $k$  равны нулю, а для четного ранга  $k$  выражаются через  $g^{ab}$ . Для алгебры Ли  $su(3)$  используемое в физике определение инвариантного симметричного тензора третьего ранга имеет вид (смотри (3.2.138)):

$$d_{ijk} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_i \lambda_j \lambda_k), \quad (4.7.28) \quad \text{oct176}$$

где  $\lambda_i$  — матрицы Гелл-Манна (3.2.134), (3.2.135), которые с точностью до умножения на мнимую единицу являются образующими в определяющем представлении. Значения компонент  $d_{ijk}$  для  $su(3)$  даны в (3.2.139). Так как в алгебре  $su(3)$  существует только один кубичный оператор Казимира (всего, в соответствии с рангом  $su(3)$ , операторов Казимира два — квадратичный и кубичный), мы получаем, что для любого представления  $T$  этой алгебры:

$$\text{Tr}(T_i T_j T_k) = c_3 \cdot d_{ijk}, \quad (4.7.29) \quad \text{oct175}$$

где численный параметр  $c_3$  зависит от представления и является характеристикой этого представления.

Вернемся к обсуждению квадратичного оператора Казимира  $C_2$  простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

**Утверждение 4.7.1** Для простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , как и для всех ее вещественных форм, существует всего один (с точностью до умножения на число) квадратичный оператор Казимира  $C_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $C'_2 = d^{ab} X_a X_b$  — любой квадратичный оператор Казимира алгебры  $\mathcal{A}$ . Тогда  $d^{ab}$  — инвариантный тензор, удовлетворяющий для всех  $A \in \mathcal{A}$  условию (4.7.26) при  $k = 2$ :

$$\text{ad}(A)_c^a d^{cb} = -d^{ac} \text{ad}(A)_c^b \quad \Rightarrow \quad \text{ad}(A) \cdot d = -d \cdot \text{ad}(A)^T. \quad (4.7.30) \quad \text{kaz-05j}$$

Для обратной матрицы метрики Киллинга  $g^{-1} = \|g^{ab}\|$ , которая входит в определение квадратичного оператора Казимира (4.7.12), мы также имеем

$$\text{ad}(A) \cdot g^{-1} = -g^{-1} \cdot \text{ad}(A)^T \quad \Rightarrow \quad g \cdot \text{ad}(A) = -\text{ad}(A)^T \cdot g. \quad (4.7.31) \quad \text{kaz-05k}$$

Умножим обе части соотношения (4.7.30) справа на матрицу  $g$  и воспользуемся второй формулой из (4.7.31). В результате мы получаем

$$\text{ad}(A) \cdot (d \cdot g) = (d \cdot g) \cdot \text{ad}(A), \quad (4.7.32) \quad \text{kaz-05m}$$

то есть матрица  $d \cdot g = \|d^{ac} g_{cb}\|$  коммутирует со всеми матрицами  $\|\text{ad}(A)_b^a\|$  присоединенного представления алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Представление  $\text{ad}$  простой комплексной

алгебры Ли  $\mathcal{A}$  комплексно и неприводимо (смотри Утверждение 4.4.1), поэтому согласно первой части Леммы Шура 4.4.3 мы можем утверждать, что произведение  $d \cdot g$  пропорционально единичной матрице:  $d \cdot g = \lambda I$ , или  $d^{ab} = \lambda g^{ad}$ , что и доказывает единственность (с точностью до умножения на число  $\lambda$ ) квадратичного оператора Казимира (4.7.12) для комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

Присоединенное представление  $\text{ad}$  всех вещественных форм простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  также неприводимо (Утверждение 4.4.1), более того, оно неприводимо и в классе комплексных представлений (иначе  $\mathcal{A}$  была бы не простой; смотри Следствие 3 Леммы Шура 4.4.3). Поэтому для вещественных форм алгебры  $\mathcal{A}$  мы также имеем  $d \cdot g = \lambda I$ , откуда следует единственность (с точностью до умножения на число) оператора  $C_2$  не только для простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , но и для всех ее вещественных форм. ■

**Следствие.** Для простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  и всех ее вещественных форм существует единственный (с точностью до умножения на число) инвариантный, то есть удовлетворяющий условию (4.7.30), тензор второго ранга  $d^{ab}$ , равный обратной матрице Киллинга  $g^{ab}$ . Соответственно, существует единственный (с точностью до умножения на число) инвариантный тензор  $(d^{-1})_{ab}$ , равный метрике Киллинга  $g_{ab}$  алгебры  $\mathcal{A}$ .

Запишем для  $C_2$  формулу (4.7.11) в виде

$$g^{ab} T_a T_b = C_2^T I_{(T)} , \quad (4.7.33) \quad \text{kaz-17}$$

где  $T$  – неприводимое комплексное представление простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$ ,  $I_{(T)}$  – единичная матрица в представлении  $T$  и  $C_2^T$  – значение оператора  $C_2$ , которое характеризует представление  $T$ . Найдем значения  $C_2^T$  квадратичных операторов Казимира для определяющего и присоединенного представлений алгебры  $\mathcal{A} = su(N)$ . В случае определяющего представления вычисления проведем в принятой в физике нормировке (3.2.130) для антиэрмитовых образующих  $T_a^{(f)}$  базиса  $su(N)$ . В этом базисе метрика Киллинга равна  $g_{ab} = -N\delta_{ab}$  и с учетом перехода к эрмитовым генераторам  $T_a^{(f)} \rightarrow iT_a^{(f)}$  мы имеем

$$g_{ab} = N\delta_{ab} , \quad g^{ab} = \frac{1}{N}\delta^{ab} .$$

- **Задача 144.** Доказать, что для алгебры  $su(N)$  в базисе (3.2.127) с нормировкой (3.2.130) метрика Киллинга равна  $g_{ab} = -N\delta_{ab}$ . Указание: вычислить коэффициент  $\lambda$  в формуле  $g_{ab} = C_{ap}^d C_{bd}^p = \lambda \delta_{ab}$ , для чего положить  $b = a$  и выбрать индекс  $a$  так, чтобы он соответствовал диагональной образующей  $T_{N-1}$ ; далее воспользоваться формулами (3.2.132) для вычисления констант  $C_{ap}^d$ .

Тогда согласно (4.7.33) для любого представления  $T$  алгебры  $su(N)$  значение  $C_2^T$  оператора  $C_2$  определяется формулой

$$\frac{1}{N} T_a \cdot T_a = C_2^T I_{(T)} \quad (4.7.34) \quad \text{kaz-15}$$

(подразумевается суммирование по  $a$ ). Для определяющего (фундаментального) представления, обозначаемого  $[N]$ , запишем:

$$\frac{1}{N} T_a^{(f)} \cdot T_a^{(f)} = C_2^{fund} \cdot I_N .$$

где образующие  $T_a^{(f)}$  заданы в (3.2.129). Отсюда, так как размерность  $[N]$  равна  $N$ , имеем  $\text{Tr}(T_a^{(f)} \cdot T_a^{(f)}) = C_2^{fund} N^2$ , а из (3.2.130) получаем  $\text{Tr}(T_a^{(f)} \cdot T_a^{(f)}) = (N^2 - 1)/2$ . Следовательно,

$$C_2^{fund} = \frac{N^2 - 1}{2N^2} . \quad (4.7.35) \quad \text{kaz-13}$$

Отметим, что при  $N = 2$  эта формула дает значение  $2C_2^{fund} = 3/4$  в полном согласии с результатом Задачи 141. Это же значение (4.7.35) принимает квадратичный оператор Казимира в сопряженном к определяющему (антифундаментальном) представлении  $[\bar{N}]$ .

Значение квадратичного оператора Казимира  $C_2$  в присоединенном представлении можно вычислить для любой простой алгебры Ли. Для этого запишем формулу (4.7.33) в виде

$$g^{ab} \text{ad}(X_a) \cdot \text{ad}(X_b) = C_2^{ad} I_{(ad)} , \quad (4.7.36) \quad \text{kaz-17ad}$$

и возьмем след от обеих ее частей. В результате, пользуясь определением метрики Киллинга (4.2.12), получаем для всех простых алгебр Ли

$$C_2^{ad} = 1 . \quad (4.7.37) \quad \text{kaz-12}$$

В частности этот результат справедлив и для алгебры  $su(N)$ , и согласуется со значением  $T_1(J^2)$  для  $su(2)$ , которое приведено в Задаче 141.

- *Задача 145. Вывести значение (4.7.37) квадратичного оператора Казимира  $C_2$  в присоединенном представлении  $su(N)$ , воспользовавшись результатом (4.4.21) о том, что тензорное произведение определяющего  $[N]$  и антифундаментального  $[\bar{N}]$  представлений раскладывается в прямую сумму (комплексифицированного) присоединенного  $[N^2 - 1]$  и синглетного  $[1]$  представлений.*

Напомним, что согласно Утверждению 4.7.1 для простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  (или ее вещественной формы) имеется всего один, с точностью до нормировки, квадратичный оператор Казимира. Следуя изложенной выше процедуре, можно получить, что для любого неприводимого представления  $T$  алгебры  $\mathcal{A}$  (или ее вещественной формы) справедливо

$$\text{Tr}(T_a T_b) = g_{ab} \cdot \frac{C_2^T \cdot \dim T}{\dim(\mathcal{A})} , \quad (4.7.38) \quad \text{kaz-10}$$

где  $\dim T$  — размерность представления  $T$ . Действительно, пусть в дополнение к равенству (4.7.33) мы имеем (инвариантная метрика единственна с точностью до множителя)

$$\text{Tr}(T_a T_b) = c_2 \cdot g_{ab} , \quad (4.7.39) \quad \text{kaz-11}$$

где константа  $c_2$  пока не определена. Сворачивая обе части соотношения (4.7.39) с  $g^{ab}$  и используя (4.7.33), получаем

$$C_2^T \cdot \dim T = c_2 \cdot \dim(\mathcal{A}) ,$$

так что

$$c_2 = \frac{C_2^T \cdot \dim T}{\dim(\mathcal{A})} , \quad (4.7.40) \quad \text{kaz-14}$$

откуда и следует (4.7.38). В частности соотношение (4.7.38) для  $su(N)$  записывается в виде

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab} \cdot N \frac{C_2^T \cdot \dim T}{N^2 - 1} ,$$

что согласуется с (4.7.35) для эрмитовых образующих в определяющем представлении с учетом нормировки

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} . \quad (4.7.41) \quad \text{normT}$$

VRJ

- **Задача 146.** Пользуясь структурными соотношениями (3.2.150) и (3.2.158) выписать структурные константы  $C_{ij,kl}^{pq}$  для алгебр Ли  $so(p, q)$  и  $sp(2r, \mathbb{K})$  и вычислить метрику Киллинга для этих алгебр. Найти квадратичные операторы Казимира для  $so(p, q)$  и  $sp(2r, \mathbb{K})$ . Найти их значения для определяющих представлений  $so(p, q)$  и  $sp(2r, \mathbb{K})$ .
- **Задача 147.** Пользуясь структурными соотношениями (3.2.150) и (3.2.158) доказать, что элементы

$$C_k = \eta_{b_k a_1} L_{a_1 b_1} \eta_{b_1 a_2} L_{a_2 b_2} \eta_{b_2 a_3} \cdots \eta_{b_{k-1} a_k} L_{a_k b_k} ,$$

$$C'_k = J_{b_k a_1} M_{a_1 b_1} J_{b_1 a_2} M_{a_2 b_2} J_{b_2 a_3} \cdots J_{b_{k-1} a_k} M_{a_k b_k} ,$$

являются центральными для алгебр  $\mathcal{U}(so(p, q))$  и  $\mathcal{U}(sp(2r, \mathbb{K}))$ , соответственно. Показать, что любая перестановка  $\sigma$  образующих  $L_{a_p b_p}$  в  $C_k$  и  $M_{a_p b_p}$  в  $C'_k$  оставляет преобразованные элементы  $\sigma \cdot C_k$  и  $\sigma \cdot C'_k$  центральными (указание: продемонстрировать инвариантность  $\sigma \cdot C_k$  и  $\sigma \cdot C'_k$  относительно присоединенного действия групп  $SO(p, q)$  и  $Sp(2r, \mathbb{K})$ ). Убедиться в том, что элементы  $\sigma \cdot C_k$  (и  $\sigma \cdot C'_k$ ) с нечетными  $k$  должны выражаться через  $\sigma \cdot C_r$  (и  $\sigma \cdot C'_r$ ) с четными  $r < k$  (указание: воспользоваться симметричностью  $M_{ab}$  и  $\eta_{ab}$ , антисимметричностью  $L_{ab}$  и  $J_{ab}$  и тождеством  $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$ ).

ISA  
но-  
вая задача

Отметим, что в физической литературе квадратичным коэффициентом Казимира (иногда — квадратичным оператором Казимира или просто “квадратичным казимиром”) нередко называют именно величину  $c_2$ , возникшую в соотношении (4.7.39) и связанную посредством (4.7.40) со значением оператора Казимира  $C_2^T$ . Величина  $c_2$ , так же как и  $C_2^T$ , не зависит от выбора базиса в алгебре Ли, но, конечно, зависит от представления. Например, для алгебры Ли  $su(N)$  мы имеем  $c_2^{fund} = 1/(2N)$ ,  $c_2^{ad} = 1$ . Аналогично, кубичным коэффициентом Казимира называют число  $c_3$ , фигурирующее в (4.7.29).

- **Задача 148.** Вычислить сумму значений  $c_2$  для симметричного  $[N(N+1)/2]$  и антисимметричного  $[N(N-1)/2]$  представлений  $su(N)$ , которые возникают в разложении (4.4.19) тензорного произведения двух определяющих представлений  $[N]$ .
- **Задача 149.** Найти кубический коэффициент Казимира  $c_3$  и значение  $C_3^T$  кубического оператора Казимира в нормировке (4.7.28) для фундаментального, антифундаментального и присоединенного представлений группы  $SU(3)$ .

Квадратичные операторы Казимира  $g^{ab} T_a T_b$  для алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в представлениях  $T$ , в которых генераторы  $T_a$  реализуются как дифференциальные операторы, называются операторами Лапласа алгебры  $\mathcal{A}$ . Такие дифференциальные операторы мы будем обсуждать более подробно в Главе 6.

### 4.7.3 Ко-умножение для обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ .

Как мы отмечали в подразделе 4.3.1, определение (4.3.13) прямого произведения двух представлений очевидным образом распространяется на общий случай алгебр Ли  $\mathcal{A}$  безотносительно к группам Ли. Более того, определение (4.3.13) можно распространить и на случай обертывающих алгебр  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Ниже мы обсудим возможность такого обобщения более подробно.

Отметим, что не для всякой алгебры возможно определение процедуры тензорного (прямого) произведения ее представлений. Алгебры, для которых такая процедура возможна, обладают специальной операцией, называемой *коумножением*. В данном разделе мы покажем, что обертывающая алгебра любой алгебры Ли обладает такой операцией и именно поэтому для таких алгебр процедура прямого произведения представлений всегда возможна.

В начале раздела 4.7.1 мы отметили, что с каждым представлением  $T$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$  можно связать ассоциативную алгебру  $\mathcal{U}_T(\mathcal{A})$ . Из определения (4.3.13) прямого произведения  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  двух представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  следует, что соответствующая ассоциативная алгебра  $\mathcal{U}_{T^{(1)} \otimes T^{(2)}}(\mathcal{A})$  гомоморфно отображается в прямое произведение двух ассоциативных алгебр  $\mathcal{U}_{T^{(1)}}(\mathcal{A})$  и  $\mathcal{U}_{T^{(2)}}(\mathcal{A})$ :

$$\tilde{\Delta} : \mathcal{U}_{T^{(1)} \otimes T^{(2)}}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{U}_{T^{(1)}}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{U}_{T^{(2)}}(\mathcal{A}) . \quad (4.7.42) \quad \text{dt1t2}$$

Отображение  $\tilde{\Delta}$  задает правило, согласно которому определяется действие любого элемента  $X \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$  (в представлении  $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$ ) на прямое произведение двух векторов из пространств представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ . Так как отображение  $\tilde{\Delta}$ , определяемое по формуле (4.3.13), работает для любых представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  и обе алгебры  $\mathcal{U}_{T^{(1)}}(\mathcal{A})$  и  $\mathcal{U}_{T^{(2)}}(\mathcal{A})$  являются представлениями одной и той же обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , то имеется универсальный аналог (4.7.42), который можно записать в виде

$$\Delta : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}) , \quad (4.7.43) \quad \text{mrep3}$$

(для прямого произведения элементов алгебр мы будем использовать символ  $\hat{\otimes}$ , чтобы отличать его от прямого произведения линейных операторов или матриц; при переходе к представлениям это различие пропадает). Иначе говоря, в обертывающей

BSF

ISA  
новый абзац

VRJ

алгебре  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  над полем  $\mathbb{K}$  наряду с умножением (4.7.5) можно ввести согласованное с этим умножением гомоморфное отображение (4.7.43) такое, что

$$\begin{aligned}\Delta(A \cdot B) &= \Delta(A) \Delta(B), \\ \Delta(\alpha A + \beta B) &= \alpha \Delta(A) + \beta \Delta(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{U}(\mathcal{A}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.\end{aligned}\tag{4.7.44} \quad \text{mrep2d}$$

Отображение  $\Delta$  каждому элементу из  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  ставит в соответствие некоторый элемент прямого произведения обертывающих алгебр  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Напомним, что алгебра  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$  как векторное пространство совпадает с прямым произведением двух векторных пространств  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  и образована всеми линейными комбинациями вида  $\alpha^{AB}(Y_A \hat{\otimes} Y_B)$  со стандартным правилом умножения

$$(\alpha^{AB} Y_A \hat{\otimes} Y_B) \cdot (\beta^{CD} Y_C \hat{\otimes} Y_D) = \alpha^{AB} \beta^{CD} (Y_A \cdot Y_C \hat{\otimes} Y_B \cdot Y_D),$$

где  $\alpha^{AB}, \beta^{CD} \in \mathbb{K}$  и  $Y_A$  – базисные мономы (4.7.3) в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Для обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  отображение  $\Delta$  (4.7.43) однозначно фиксируется, если его задать для единичного элемента  $I$  и для образующих алгебры Ли  $X_a \in \mathcal{A}$ :

$$\Delta(I) = I \hat{\otimes} I, \quad \Delta(X_a) = X_a \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_a.\tag{4.7.45} \quad \text{mrep2}$$

Действительно, исходя из определения 4.7.1 алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , можно сделать вывод о том, что отображение  $\Delta$  любого элемента из  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  строится на основе формул (4.7.44) и (4.7.45). Например,

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha X_a \cdot X_b + \beta I) &= \alpha \Delta(X_a) \cdot \Delta(X_b) + \beta \Delta(I) = \\ &= \alpha (X_a \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_a) \cdot (X_b \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_b) + \beta I \hat{\otimes} I = \\ &= \alpha (X_a \cdot X_b \hat{\otimes} I + X_b \hat{\otimes} X_a + X_a \hat{\otimes} X_b + I \hat{\otimes} X_a \cdot X_b) + \beta I \hat{\otimes} I.\end{aligned}$$

Вид второго отображения из (4.7.45) очевидным образом извлекается из формулы (4.3.13), которая определяет прямое произведение двух представлений. Для проверки гомоморфности отображения  $\Delta$ , заданного формулами (4.7.45), достаточно убедиться в том, что это отображение сохраняет коммутационные соотношения (4.7.6):

$$\begin{aligned}[\Delta(X_a), \Delta(X_b)] &= [(X_a \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_a), (X_b \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_b)] = \\ &= [X_a, X_b] \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} [X_a, X_b] = C_{ab}^d \Delta(X_d) = \Delta([X_a, X_b]).\end{aligned}$$

**Утверждение 4.7.2** Гомоморфное отображение  $\Delta$  (4.7.43), заданное уравнениями (4.7.44) и (4.7.45), обладает свойством

$$(\Delta \hat{\otimes} 1)\Delta(X) = (1 \hat{\otimes} \Delta)\Delta(X), \quad \forall X \in \mathcal{U}(\mathcal{A}),\tag{4.7.46} \quad \text{comultas}$$

где отображения  $(\Delta \hat{\otimes} 1)\Delta$  и  $(1 \hat{\otimes} \Delta)\Delta$  – гомоморфизмы из  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  в  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$ .

Здесь  $\Delta \hat{\otimes} 1$  – это отображение из  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$  в  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$ , которое на базисный элемент  $Y_A \hat{\otimes} Y_C$  действует так: первый фактор отображается в  $\Delta(Y_A)$ , а второй остается без изменения:

$$(\Delta \hat{\otimes} 1)(Y_A \hat{\otimes} Y_C) = \Delta(Y_A) \hat{\otimes} Y_C.$$

VRJ до  
док-ва

Для элемента  $\Delta(X)$ , разложенного по базису  $Y_A \hat{\otimes} Y_C$ ,

$$\Delta(X) = \alpha_X^{AC} Y_A \hat{\otimes} Y_C, \quad (4.7.47) \quad \text{DeX}$$

где  $\alpha_X^{AC} \in \mathbb{K}$ , имеем поэтому

$$(\Delta \hat{\otimes} 1)\Delta(X) = \alpha_X^{AC} \Delta(Y_A) \hat{\otimes} Y_C.$$

Соответствующим образом понимается и действие  $(1 \otimes \Delta)$  в правой части (4.7.46).

Для **доказательства** свойства (4.7.46) опять же нет необходимости проверять его для всех  $Y_A \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ , достаточно проверить его для образующих  $X_a$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes 1)\Delta(X_a) &= (\Delta \otimes 1)(X_a \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_a) = (X_a \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_a) \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} I \hat{\otimes} X_a = \\ &= X_a \hat{\otimes} I \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} (X_a \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_a) = (1 \hat{\otimes} \Delta)\Delta(X). \end{aligned}$$

Проверку того, что отображение  $(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \hat{\otimes} \Delta)\Delta$  — гомоморфизм из  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  в  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$ , мы оставляем проделать читателю в качестве самостоятельного упражнения. ■

**Определение 4.7.3** *Отображение  $\Delta$  (4.7.43), удовлетворяющее (4.7.44) – (4.7.46), называется ко-умножением в алгебре  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Свойство (4.7.46) называется ко-ассоциативностью ко-умножения  $\Delta$ .*

Ко-умножение удобно использовать, например, в том случае, когда необходимо записать действие элемента  $X \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$  в тензорном произведении нескольких представлений. В качестве примера рассмотрим тензорное произведение двух представлений (4.3.13) и запишем в этом представлении любой элемент  $X \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Сначала к элементу  $X$  необходимо применить ко-умножение  $\Delta$ , которое переводит  $X$  в элемент  $\Delta(X)$  алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$ , то есть "расщепляет" элемент  $X$  на два фактора. При этом, так как  $\Delta$  — гомоморфизм, гарантируется сохранение алгебраических свойств  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . После этого к элементу  $\Delta(X)$  (4.7.47) применяется отображение  $(T^{(1)} \otimes T^{(2)})$ :

$$(T^{(1)} \otimes T^{(2)}) \Delta(X) = \alpha_X^{AC} T^{(1)}(Y_A) \otimes T^{(2)}(Y_C), \quad (4.7.48) \quad \text{TDeX}$$

то есть элементы  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , стоящие в первом и втором факторах  $\Delta(X)$ , берутся в представлениях  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ , соответственно. Это и есть искомая запись элемента  $X$  в представлении  $(T^{(1)} \otimes T^{(2)})$ . С другой стороны, можно рассмотреть представление  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  (4.3.13) алгебры Ли  $\mathcal{A}$  и распространить его на обертывающую алгебру  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , используя формулу (4.7.10). Согласованность двух изложенных только что конструкций требует, чтобы они приводили к одному и тому же результату. Такое свойство действительно имеет место. Утверждение об эквивалентности двух подходов можно записать в виде тождества для базисных мономов (4.7.2):

$$T^{(p)}(X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_r}) = (T^{(1)} \otimes T^{(2)}) \Delta(X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_r}), \quad (4.7.49) \quad \text{mrep6}$$

которое для  $r = 1$  дает:

$$\begin{aligned} T^{(p)}(X_a) &= (T^{(1)} \otimes T^{(2)})\Delta(X_a) = (T^{(1)} \otimes T^{(2)})(X_a \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_a) = \\ &= T^{(1)}(X_a) \otimes I_{T^{(2)}} + I_{T^{(1)}} \otimes T^{(2)}(X_a), \end{aligned} \quad (4.7.50) \quad \text{mrep6a}$$



что совпадает с (4.3.13). Соотношение (4.7.49) для всех  $r$  становится очевидным, если его переписать в виде

$$T^{(p)}(X_{a_1}) \cdot T^{(p)}(X_{a_2}) \cdots T^{(p)}(X_{a_r}) = \\ (T^{(1)} \otimes T^{(2)}) \Delta(X_{a_1}) \cdot (T^{(1)} \otimes T^{(2)}) \Delta(X_{a_2}) \cdots (T^{(1)} \otimes T^{(2)}) \Delta(X_{a_r}),$$

где мы воспользовались тем, что отображения  $T^{(p)}, T^{(1)}, T^{(2)}$  и  $\Delta$  — гомоморфизмы. VRJ

Если мы будем рассматривать тензорное произведение трех (или более) представлений  $T_k^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)} \otimes \cdots T^{(k)}$ , то для записи в этом представлении элемента  $X = X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdots X_{a_r} \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$  необходимо последовательно "расщепить" его с помощью ко-умножения  $\Delta$  на  $k$  факторов (гомоморфно отобразить  $X$  в элемент из  $\mathcal{U}(\mathcal{A})^{\hat{\otimes} k}$ ). При этом в силу условия ко-ассоциативности (4.7.46) неважно, какой из факторов на каждом шаге "расщеплять" с помощью  $\Delta$ . В результате формула (4.7.49) обобщается следующим образом:

$$T_k^{(p)} = (T^{(1)} \otimes T^{(2)} \otimes \cdots T^{(k)}) \Delta^{k-1}, \quad (4.7.51) \quad \text{VRJ, ф-ла mrep7}$$

где

$$\Delta^{k-1}(X) = (\Delta \hat{\otimes} \underbrace{1 \hat{\otimes} \cdots 1}_{k-2}) \cdots (\Delta \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} 1) (\Delta \hat{\otimes} 1) \Delta(X). \quad (4.7.52) \quad \text{mrep7a}$$

В частности для базисного монома мы получаем (сравните с (4.3.15)):

VRJ

$$T_k^{(p)}(X_a) = \sum_{m=1}^k (I_{(1)} \otimes \cdots I_{(m-1)} \otimes T^{(m)}(X_a) \otimes I_{(m+1)} \otimes \cdots I_{(k)}) , \quad I_m := T^{(m)}(I). \quad (4.7.53) \quad \text{mrep7b}$$

Ко-умножение  $\Delta$  (4.7.43) в определенном смысле можно рассматривать как отображение, обратное к отображению умножения  $m: \mathcal{U}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{A})$  (тому самому, что ставит в соответствие двум элементам  $X, X' \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$  их произведение  $X \cdot X'$ ); стрелка в  $m$  по сравнению с (4.7.43) повернута в обратную сторону. При этом отображения  $m$  и  $\Delta$  согласованы между собой (смотри, например, первое соотношение в (4.7.44)).

Отметим, что в общем случае любых ассоциативных алгебр  $\mathcal{U}$  тензорное произведение представлений может быть корректно определено только для алгебр  $\mathcal{U}$  с ко-умножением. Если ассоциативная алгебра  $\mathcal{U}$  не обладает ко-умножением, то формальное построение ее новых представлений как тензорных произведений других представлений  $\mathcal{U}$ , вообще говоря, невозможно. Алгебры, обладающие как умножением, так и ко-умножением, называются биалгебрами. Выше, в данном разделе, мы показали, что обертывающая  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  любой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  всегда является биалгеброй с ко-умножением, которое определяется формулами (4.7.44) и (4.7.45).

В качестве примера применения ко-умножения получим альтернативным образом конструкцию (4.7.24), (4.7.27) операторов Казимира простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  (при этом не обязательно считать, что  $\mathcal{A}$  связана с какой-либо группой Ли  $G$ ). Рассмотрим оператор

$$\hat{C} = g^{ab} X_a \hat{\otimes} X_b \in \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A} \subset \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}), \quad (4.7.54) \quad \text{kaz-01}$$

который называется расщепленным (или поляризованным) оператором Казимира алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

**Утверждение 4.7.3** Оператор  $\hat{C}$  удовлетворяет условию (которое называется *Ad-инвариантностью*):

$$[\Delta(A), \hat{C}] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (4.7.55) \quad \text{kaz-02}$$

где  $\Delta$  – ко-умножение (4.7.45), а также подчиняется уравнению

$$[\hat{C}_{13}, \hat{C}_{23}] = \frac{1}{2} [\hat{C}_{12}, \hat{C}_{13} - \hat{C}_{23}], \quad (4.7.56) \quad \text{kaz-01yb}$$

где использованы обозначения

$$\hat{C}_{12} = g^{ab} X_a \hat{\otimes} X_b \hat{\otimes} I, \quad \hat{C}_{13} = g^{ab} X_a \hat{\otimes} I \hat{\otimes} X_b, \quad \hat{C}_{23} = g^{ab} I \hat{\otimes} X_a \hat{\otimes} X_b. \quad (4.7.57) \quad \text{kaz-01ya}$$

Здесь  $I$  – единичный элемент в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ , так что  $\hat{C}_{ij} \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$ . VRJ

**Доказательство.** Для доказательства справедливости условия (4.7.55) достаточно его проверить для любой образующей  $A = X_r$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} [\Delta(X_r), \hat{C}] &= [X_r \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_r, \hat{C}] = \\ &= g^{ab} (C_{ra}^k X_k \hat{\otimes} X_b + C_{rb}^k X_a \hat{\otimes} X_k) = g^{ab} g^{kp} (C_{rap} + C_{rpa}) X_k \hat{\otimes} X_b = 0, \end{aligned} \quad (4.7.58) \quad \text{kaz-03}$$

где мы воспользовались антисимметричностью (3.2.109) структурных констант. Для вывода уравнения (4.7.56) докажем сначала соотношение

$$[\hat{C}_{12} + \hat{C}_{13}, \hat{C}_{23}] = 0. \quad (4.7.59) \quad \text{kaz-01yc}$$

Пользуясь определениями (4.7.57), левую часть (4.7.59) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} [g^{pr} X_p \hat{\otimes} (X_r \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} X_r), I \hat{\otimes} \hat{C}] &= [g^{pr} X_p \hat{\otimes} \Delta(X_r), I \hat{\otimes} \hat{C}] = \\ &= g^{pr} X_p \hat{\otimes} [\Delta(X_r), \hat{C}] = 0, \end{aligned}$$

где при получении последнего равенства мы учли условие (4.7.55). Заметим, что номера 1, 2, 3 в левых частях формул (4.7.57) указывают на те факторы в произведении  $\mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$ , в которых оператор  $\hat{C}$  представлен нетривиально. Переставляя номера этих факторов и учитывая симметрию  $\hat{C}_{ij} = \hat{C}_{ji}$ , соотношение (4.7.59) можно переписать следующим эквивалентным образом

$$[\hat{C}_{12}, \hat{C}_{13} + \hat{C}_{23}] = 0. \quad (4.7.60) \quad \text{kaz-01yd}$$

Теперь, комбинируя (4.7.59) и (4.7.60), нетрудно получить (4.7.56). ■

Очевидно, что произведение любых двух Ad-инвариантных элементов снова будет Ad-инвариантным элементом. Отсюда следует Ad-инвариантность любой степени расщепленного оператора Казимира  $\hat{C}$ :

$$[\Delta(A), \hat{C}^k] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (4.7.61) \quad \text{kaz-04}$$

где

$$\hat{C}^k = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_k b_k} X_{a_1} \dots X_{a_k} \hat{\otimes} X_{b_1} \dots X_{b_k} \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A}). \quad (4.7.62) \quad \text{kaz-d3}$$

**Утверждение 4.7.4** Пусть элемент  $\hat{C}' \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \hat{\otimes} \mathcal{U}(\mathcal{A})$  удовлетворяет условию Ad-инвариантности

$$[\Delta(A), \hat{C}'] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (4.7.63) \quad \text{kaz-d2}$$

и пусть  $T$  – любое представление алгебры  $\mathcal{A}$  и соответственно  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Запишем  $\hat{C}'$  в общем виде

$$\hat{C}' = Y_B \hat{\otimes} Y^B = Y_B \hat{\otimes} D^{BC} Y_C, \quad (4.7.64) \quad \text{kaz-gen}$$

где  $D^{BC} \in \mathbb{K}$  и  $Y_B$  – базисные элементы в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Тогда элемент

$$C = Y_B D^{BA} \text{Tr}(T(Y_A)) \in \mathcal{U}(\mathcal{A}), \quad (4.7.65) \quad \text{kaz-d2z}$$

принадлежит центру алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ .

**Доказательство.** Для любого элемента  $A \in \mathcal{A}$  мы имеем  $\Delta(A) = A \hat{\otimes} I + I \hat{\otimes} A$ , поэтому условие Ad-инвариантности (4.7.63) для оператора  $\hat{C}'$  переписывается следующим образом

$$[A, Y_B] \hat{\otimes} Y^B = -Y_B \hat{\otimes} [A, Y^B]. \quad (4.7.66) \quad \text{kaz-06}$$

Поддействуем отображением  $T$  (представлением алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ ) на вторые факторы в обеих частях этого равенства

$$[A, Y_B] \hat{\otimes} T(Y^B) = -Y_B \hat{\otimes} [T(A), T(Y^B)], \quad (4.7.67) \quad \text{kaz-01ys}$$

и вычислим след от этих вторых факторов, учитывая  $\text{Tr}[T(A), T(Y^B)] = 0$ . В результате мы получаем тождество  $[A, Y_B D^{BA} \text{Tr}(T(Y_A))] = 0$  для всех  $A \in \mathcal{A}$  и следовательно элемент  $C = Y_B D^{BA} \text{Tr}(T(Y_A))$  принадлежит центру алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ . ■

- **Задача 150.** Доказать, что не только (4.7.62), но и все элементы вида

$$\hat{C}^{(\sigma, k)} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_k b_k} X_{a_1} \dots X_{a_k} \hat{\otimes} X_{b_{\sigma(1)}} \dots X_{b_{\sigma(k)}}, \quad (4.7.68) \quad \text{kaz-d1}$$

где  $\sigma$  – произвольная перестановка из  $S_k$ , также являются Ad-инвариантными. Указание: проделать вычисления, аналогичные (4.7.58).

Пусть  $T$  – точное представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Так как  $\mathcal{A}$  – проста, то в качестве  $T$  можно, например, взять присоединенное представление. Выберем в качестве Ad-инвариантного элемента  $\hat{C}'$  элемент (4.7.62), тогда, пользуясь Утверждением 4.7.4, мы получаем центральные элементы

$$\tilde{C}_k = X_{a_1} \dots X_{a_k} g^{a_1 \dots a_k}, \quad (4.7.69) \quad \text{kaz-07}$$

где

$$g^{a_1 \dots a_k} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_k b_k} \text{Tr}(T_{b_1} \dots T_{b_k}), \quad T_b \equiv T(X_b). \quad (4.7.70) \quad \text{adinv}$$

Центральные элементы (4.7.69) отличаются от операторов  $C_k$ , которые были построены в (4.7.24), (4.7.27), тем, что в определении  $\tilde{C}_k$  не проведена полная симметризация по индексам в коэффициентах  $g^{a_1 \dots a_k}$ . Тензор  $g^{a_1 \dots a_k}$  обладает только циклической симметрией по перестановкам индексов  $(a_1, \dots, a_k)$ , которая связана с циклическим

свойством  $\text{Tr}$ , но не обладает полной симметрией, присущей тензору  $d^{a_1 \dots a_k}$  (4.7.27). Однако, выбирая в качестве  $\text{Ad}$ -инвариантного элемента  $\tilde{C}'$  элемент (4.7.68) и пользуясь Утверждением 4.7.4, мы получаем, что все элементы

$$\tilde{C}_{k,\sigma} = g^{a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(k)}} X_{a_1} \cdot X_{a_2} \dots X_{a_k}, \quad (4.7.71) \quad \text{kaz-d7}$$

где  $\sigma$  — произвольная перестановка из  $S_k$ , также являются центральными. Очевидно, что элементы  $C_k$ , заданные в (4.7.24), (4.7.27), выражаются в виде линейной комбинации элементов  $\tilde{C}_{k,\sigma}$ . И наоборот, элементы  $\tilde{C}_{k,\sigma}$  из (4.7.71) выражаются в виде линейной комбинации элементов  $C_k$  (с произвольными  $\text{Ad}$ -инвариантными и симметричными тензорами  $d^{a_1 \dots a_k}$ ). Это следует из того, что любой полином (4.7.71) можно разложить по базису симметричных полиномов (4.7.17). Таким образом, набор независимых элементов  $C_k$  (4.7.24) содержит в себе полный набор образующих центра  $\mathcal{Z}$  алгебры  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ .

ISA ред.  
правка

Естественный вопрос, который здесь возникает: можно ли любой  $\text{Ad}$ -инвариантный симметричный тензор  $d^{a_1 \dots a_k}$  выразить в виде симметризованных комбинаций тензоров  $g^{a_1 \dots a_m}$  и их произведений (например так, как это сделано в (4.7.27))? Положительный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

**Утверждение 4.7.5** *Для простой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  ранга  $r^{24}$  существует  $r$  элементов, построенных из инвариантов (4.7.27), которые образуют базис образующих в  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}(\mathcal{A})$ .*

Доказательство этого утверждения (смотри, например, [35], [36]) выходит за рамки нашей книги. Отметим, что обобщение Утверждения 4.7.5 на случай полупростых алгебр Ли — очевидно.

Мы поясним Утверждение 4.7.5 на примере матричных простых алгебр Ли  $\mathcal{A}(G)$ . Согласно рассмотрению, проведенному в предыдущем разделе 4.7.2, любой центральный элемент строится как полиномиальная функция от инвариантов  $P(X_a) = d^{a_1 \dots a_k} X_{a_1} \dots X_{a_k}$ , где  $d^{a_1 \dots a_k}$  — некоторые симметричные  $\text{Ad}$ -инвариантные тензоры. Поэтому задача перечисления образующих центра  $\mathcal{Z}$  сводится к классификации всех инвариантных и симметричных тензоров  $d^{a_1 \dots a_k}$ . Все такие тензора можно перечислить, если перечислить все независимые инвариантные симметрические полиномы  $P(u_a) = d^{a_1 \dots a_k} u_{a_1} \dots u_{a_k}$ , где параметры  $u_a$  преобразуются по присоединенному представлению группы  $G$ . В свою очередь полиномы  $P(u_a)$  удобно рассматривать как скалярные функции  $P(u)$  от матриц  $u = u_a g^{ab} X_b \in \mathcal{A}(G)$ , причем функции  $P(u)$  по определению должны быть инвариантны относительно присоединенного действия:  $u \rightarrow g \cdot u \cdot g^{-1}$ ,  $\forall g \in G$ . Известно, что с помощью присоединенного действия любой элемент  $u \in \mathcal{A}(G)$  приводится к виду

$$u = \sum_{k=1}^r v_k H_k, \quad (4.7.72) \quad \text{kaz-ad7}$$

где  $H_k$  — диагональные образующие  $\mathcal{A}(G)$  (образующие подалгебры Картана, число которых равно рангу  $\mathcal{A}(G)$ , см. раздел 5.4). Причем имеются преобразования  $u \rightarrow g \cdot u \cdot g^{-1}$ , которые не меняют диагональный вид (4.7.72), но переставляют параметры  $v_k$  (преобразования из группы Вейля). Таким образом, функция  $P(u)$  переписывается как симметрический полином по переменным  $\{v_1, \dots, v_r\}$ . Хорошо известно, что алгебра симметрических полиномов от  $r$  переменных  $\{v_1, \dots, v_r\}$  имеет в качестве образующих  $r$  функций, которые называются степенными суммами

$$P_\alpha(v_1, \dots, v_r) = \sum_{k=1}^r v_k^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, r.$$

<sup>24</sup>Определение ранга простой алгебры Ли дано в разделе 5.4.

Каждой степенной сумме  $P_\alpha(v_1, \dots, v_r)$  соответствует свой инвариантный полином  $P'_\alpha(u_a)$  (вообще говоря уже не однородный), которому в свою очередь соответствует свой инвариантный элемент  $P'_\alpha(X_a) \in \mathcal{Z}$ . Эти инвариантные элементы по построению генерируют весь центр  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}(\mathcal{A})$ . Таким образом, число независимых генераторов центра  $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}(\mathcal{A})$  равно рангу  $r$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Далее очевидно, что переменные  $v_k$  связаны с собственными значениями матрицы  $u$ , а симметрические функции от собственных значений матрицы  $u$ , как хорошо известно, выражаются через функции  $\text{Tr}(u^k)$ , которые соответствуют инвариантным элементам (4.7.24), (4.7.27). Поэтому любая образующая центра  $\mathcal{Z}$  в  $\mathcal{U}(\mathcal{A})$  может быть построена из центральных элементов  $C_k$ , представленных в (4.7.24), (4.7.27).

Пусть  $T$  — точное  $n$ -мерное представление алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Для матричных алгебр  $\mathcal{A}$  в качестве  $T$  можно выбрать определяющее представление. Центральные элементы  $\tilde{C}_k$  (4.7.69) в этом случае удобно записать в виде

$$\tilde{C}_k = \text{Tr}(L^k), \quad (4.7.73) \quad \text{kaz-d5}$$

где  $L = g^{ab} T_a \otimes X_b$  — матрица  $(n \times n)$  с некоммутативными элементами  $L_j^i = (T_a)_j^i g^{ab} X_b$  (здесь  $i, j = 1, \dots, n$ ), которые принадлежат алгебре  $\mathcal{A}$ . Матрица  $L$  не зависит от выбора базиса в  $\mathcal{A}$ , несет в себе полную информацию об алгебре Ли  $\mathcal{A}$  и получается из расщепленного оператора Казимира (4.7.54), если в нем второй (или первый) фактор взят в представлении  $T$ . Структурные соотношения (4.7.6) для образующих  $X_a$  в терминах матриц  $L$  записываются следующим образом

$$[L_1, L_2] = \frac{1}{2} [\mathbf{r}, L_1 - L_2], \quad (4.7.74) \quad \text{kaz-d6}$$

где

$$L_1 = g^{ab} T_a \otimes I_n \otimes X_b, \quad L_2 = g^{ab} I_n \otimes T_a \otimes X_b, \quad \mathbf{r} = g^{ab} T_a \otimes T_b \otimes I. \quad (4.7.75) \quad \text{kaz-d6d}$$

- **Задача 151.** Показать, что при условии  $[T_a, T_b] = C_{ab}^d T_d$  из (4.7.74) следуют структурные соотношения (4.7.6) для образующих  $X_a$ .

Операторы (4.7.75) — это соответственно элементы  $\hat{C}_{13}$ ,  $\hat{C}_{23}$  и  $\hat{C}_{12}$  (4.7.57), у которых первые два фактора взяты в представлении  $T$ . Поэтому уравнение (4.7.74) можно получить из уравнения (4.7.56), в котором во всех слагаемых надо взять первые два фактора в представлении  $T$ . Следует отметить, что правую часть (4.7.74) можно записать многими эквивалентными способами, если воспользоваться тождеством

$$[\mathbf{r}, L_1 + L_2] = 0, \quad (4.7.76) \quad \text{kaz-d9}$$

которое следует из уравнения (4.7.60), в котором снова первые два фактора во всех слагаемых необходимо "посадить" в представление  $T$ .

- **Задача 152.** Набор матричных единиц  $e_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) образует базис в алгебре Ли  $gl(n, \mathbb{C})$ . Доказать тождество

$$\sum_{i,j=1}^n e_{ij} \otimes e_{ji} = P, \quad (4.7.77) \quad \text{kaz-d8ee}$$

где  $P$  — оператор перестановки (4.4.14).

- **Задача 153.**  $\star$  Доказать, что матрица  $\mathbf{r} = g^{ab} T_a \otimes T_b$  для алгебры Ли  $sl(n, \mathbb{C})$  (и всех ее вещественных форм, например, для  $su(n)$ ) имеет вид

$$\mathbf{r} = c_2 \left( P - \frac{1}{n} I_n \otimes I_n \right) \Leftrightarrow \mathbf{r}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = c_2 \left( \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} - \frac{1}{n} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \right), \quad (4.7.78) \quad \text{kaz-d8}$$

где  $(I_n \otimes I_n)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}$  — единичная матрица,  $(P)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}$  — матрица перестановки (4.4.14), а коэффициент  $c_2$  определен в (4.7.39) и (4.7.40).

- **Задача 154.** Доказать, что матрица  $\mathbf{r} = g^{ab} T_a \otimes T_b$  для алгебр Ли  $so(n, \mathbb{C})$  и  $sp(2r, \mathbb{C})$  ( $2r = n$ ) и всех вещественных форм этих алгебр имеет вид

$$\mathbf{r} = \alpha I_n \otimes I_n + \beta P + \gamma K,$$

где  $(K)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \mathbf{c}^{i_1 i_2} \mathbf{c}_{j_1 j_2}$  и матрица  $\|\mathbf{c}_{jk}\|$  — это симметричная метрика  $\eta$  (3.2.146) для  $so(n, \mathbb{C})$  и антисимметричная метрика  $J$  (2.2.57) для  $sp(2r, \mathbb{C})$ ;  $\|\mathbf{c}^{mj}\|$  — обратная матрица к  $\|\mathbf{c}_{jk}\|$ . Вычислить константы  $\alpha, \beta, \gamma$ , выразив их через коэффициент  $c_2$  (4.7.39).

- **Задача 155.** Пользуясь формулой (4.7.78), доказать, что соотношения (4.7.74) и (4.7.76) для  $sl(n, \mathbb{C})$  можно переписать в виде одного соотношения

$$R_{12}(u-v) L_1(u) L_2(v) = L_2(v) L_1(u) R_{12}(u-v), \quad (4.7.79) \quad \text{kaz-d10}$$

где  $u, v$  — произвольные параметры (которые называются спектральными параметрами) и

$$R_{12}(u) := R(u) \otimes I, \quad R(u) := u I_n \otimes I_n + c_2 P,$$

$$L_1(u) = u I_n \otimes I_n \otimes I + L_1, \quad L_2(u) = u I_n \otimes I_n \otimes I + L_2,$$

(операторы  $L_1$  и  $L_2$  определены в (4.7.75)).

- **Задача 156.** Показать, что соотношение (4.7.79) переписывается в эквивалентной компонентной форме следующим образом

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(u-v) L_{k_1}^{j_1}(u) L_{k_2}^{j_2}(v) = L_{j_2}^{i_2}(v) L_{j_1}^{i_1}(u) R_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(u-v), \quad (4.7.80) \quad \text{kaz-d10b}$$

где  $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(u) = u \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} + c_2 \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}$ ,  $L_{j_1}^{i_1}(u) = u \delta_{j_1}^{i_1} + L_{j_1}^{i_1}$  и  $i_r, j_r, k_r = 1, \dots, n$ .

Матрица  $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(u)$ , которая приведена в задаче 156, называется  $R$ -матрицей Янга. Если в соотношения (4.7.80) с  $R$ -матрицей Янга подставить ряд

$$L_j^i(u) = \delta_j^i + \frac{1}{u} (M_1)_j^i + \frac{1}{u^2} (M_2)_j^i + \frac{1}{u^3} (M_3)_j^i + \dots,$$

то из (4.7.80) возникает зацепляющаяся цепочка квадратичных коммутационных соотношений на операторы  $\{(M_k)_j^i\}$ , определяющая бесконечно-мерную алгебру  $Y(gl(n))$ . Эта алгебра, с образующими  $\{(M_k)_j^i\}$ , называется янгианом  $gl(n)$ -типа. Отметим, что операторы  $(M_1)_j^i$  коммутируют так же как и образующие  $L_j^i$  алгебры Ли  $gl(n)$ . Подробное обсуждение свойств алгебры  $Y(gl(n))$  выходит за рамки нашей книги.

- **Задача 157.** Доказать, что  $R$ -матрица Янга  $\hat{R}(u) \equiv P \cdot R(u) = uP + c_2 I_n \otimes I_n$  удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера

$$\hat{R}_{12}(u) \hat{R}_{23}(u+v) \hat{R}_{12}(v) = \hat{R}_{23}(v) \hat{R}_{12}(u+v) \hat{R}_{23}(u), \quad (4.7.81) \quad \text{kaz-d11}$$

где  $\hat{R}_{12}(v) := (\hat{R}(v) \otimes I_n)$  и  $\hat{R}_{23}(u) := (I_n \otimes \hat{R}(u))$ .

Соотношения (4.7.79), (4.7.80) и (4.7.81) лежат в основе построения и исследования многих нетривиальных квантовых интегрируемых систем.

ESF

## 5 Компактные алгебры Ли.

### 5.1 Определение и основные свойства компактных алгебр Ли.

Мы временно прервем рассмотрение представлений групп и алгебр Ли и обсудим важный класс алгебр Ли – компактные алгебры Ли. С точки зрения последовательности изложения более естественно было бы поместить материал о компактных алгебрах Ли в конец раздела **3.2** "Алгебры Ли". Однако ряд важных фактов, касающихся компактных алгебр Ли, невозможно изложить, не пользуясь понятиями теории представлений. Поэтому данный раздел идет после обсуждения этих понятий.

Компактные группы Ли (см. Определение **3.1.9**) были рассмотрены в подразделе **3.1.4**. Компактные алгебры Ли определяются как алгебры Ли, соответствующие компактным группам Ли. Напомним, что алгебра Ли, построенная как касательное пространство к многообразию группы Ли, всегда вещественна, поэтому, согласно данному определению, понятие компактности можно ввести только для вещественных алгебр Ли.

В дальнейшем мы будем пользоваться еще одним определением компактных алгебр Ли, которое не опирается непосредственно на их определение через компактные группы Ли.

**Определение 5.1.1** Алгебра Ли  $\mathcal{A}$  называется компактной, если она вещественна и в ней существует положительно определенное и невырожденное скалярное произведение, инвариантное относительно присоединенного действия в  $\mathcal{A}$  (присоединенное действие в  $\mathcal{A}$  задается формулами (3.2.104)).

Развернутая форма данного только что определения состоит в том, что вещественная алгебра Ли  $\mathcal{A}$  компактна, если в ней имеется билинейная форма  $(A, B)$  такая, что для всех  $A \in \mathcal{A}$  справедливо

$$(A, A) \geq 0, \quad (5.1.1) \quad \text{li04qr}$$

причем равенство здесь имеет место только для нулевого элемента  $A = 0$ . При этом для любых трех элементов  $A, X, Y \in \mathcal{A}$  должно выполняться тождество (сравните с (3.2.105))

$$([A, X], Y) + (X, [A, Y]) = 0, \quad (5.1.2) \quad \text{li04qq}$$

которое переписывается следующим образом

$$(\operatorname{ad}(A) \cdot X, Y) + (X, \operatorname{ad}(A) \cdot Y) = 0, \quad (5.1.3) \quad \text{li04qs}$$

где использованы обозначения для присоединенного представления (4.2.7) алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Соотношения (5.1.2), (5.1.3) и означают инвариантность скалярного произведения относительно присоединенного действия в алгебре Ли  $\mathcal{A}$ .

- **Задача 158.** Сравните соотношения (5.1.2), (5.1.3), записав их в произвольном базисе  $\{X_a\}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , с условиями инвариантности (4.7.30) тензора  $d^{ab}$  относительно ко-присоединенного действия в алгебре Ли  $\mathcal{A}$ .

Пусть  $G$  — компактная группа Ли, и  $\mathcal{A}(G)$  — ее вещественная алгебра Ли. Поскольку  $\mathcal{A}(G)$  — пространство присоединенного представления компактной группы  $G$ , в нем, как и в пространстве любого представления компактной группы, всегда существует положительно определенное скалярное произведение, инвариантное относительно действия  $G$  (см. Замечание к Утверждению 4.5.2 в разделе 4.5). Для данного скалярного произведения мы имеем

$$(\operatorname{ad}(g_A(t)) \cdot X, \operatorname{ad}(g_A(t)) \cdot Y) = (X, Y), \quad (5.1.4) \quad \text{adXY}$$

где  $g_A(t)$  — кривая в группе с касательным вектором  $A \in \mathcal{A}(G)$  в единичном элементе. Присоединенное представление алгебры Ли и присоединенное представление ее группы Ли связаны между собой соотношениями (4.2.10), то есть при малых  $t$  справедливо

$$\operatorname{ad}(g_A(t)) \cdot X = X + t \cdot \operatorname{ad}(A) \cdot X + O(t^2), \quad \operatorname{ad}(g_A(t)) \cdot Y = Y + t \cdot \operatorname{ad}(A) \cdot Y + O(t^2). \quad (5.1.5) \quad \text{adXY01}$$

Подстановка (5.1.5) в (5.1.4) при малых  $t$  дает (5.1.3), поэтому свойство (5.1.3) действительно выполняется для алгебр Ли компактных групп. Итак, алгебры Ли компактных групп Ли — компактны в смысле определения 5.1.1. Замечательно, что верно и обратное утверждение: для компактной, в смысле определения 5.1.1, алгебры Ли всегда существует соответствующая ей компактная группа Ли. Последнее утверждение мы докажем в разделе 5.3. Общий вывод состоит в том, что *определение 5.1.1 эквивалентно определению компактных алгебр Ли как алгебр, соответствующих компактным группам Ли*.

Наличие в вещественной алгебре Ли положительно определенного скалярного произведения, инвариантного относительно присоединенного действия соответствующей группы, исключительно важно для теорий калибровочных полей, поэтому именно компактные группы и алгебры Ли используются при построении таких теорий.

Поскольку компактную алгебру Ли всегда можно считать алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли, результаты раздела 4.5 имеют свои очевидные аналоги в теории представлений компактных алгебр Ли (в Разделе 5.3 мы покажем, что всякое представление компактной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  является представлением некоторой компактной группы Ли  $G$ , такой, что  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ ).

**Утверждение 5.1.1** *Приводимое представление компактной алгебры Ли всегда вполне приводимо.*



**Утверждение 5.1.2** Любое представление компактной алгебры Ли эквивалентно антиэрмитовому.

Первое из этих утверждений означает, что любое конечномерное представление компактной алгебры Ли раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений. Второе – что в пространстве  $\mathcal{V}$  представления  $T$  алгебры  $\mathcal{A}$  всегда можно выбрать положительно определенную эрмитову форму так, что

$$\langle T(A) \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\langle \vec{x}, T(A) \cdot \vec{y} \rangle ,$$

для всех  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$  и  $A \in \mathcal{A}$ . Мы прокомментируем эти утверждения в разделе 5.3.

### Примеры.

1.) В каждой вещественной полупростой алгебре Ли  $\mathcal{A}$  имеется инвариантное и невырожденное (согласно критерию Картана) скалярное произведение (3.2.102), которое связано с метрикой Киллинга  $g_{ab}$  (3.2.100), и которое, учитывая (4.2.12), можно записать в виде<sup>25</sup>

$$(X, Y) = -\text{Tr}(\text{ad}(X) \cdot \text{ad}(Y)) , \quad \forall X, Y \in \mathcal{A} . \quad (5.1.6) \quad \text{comp06}$$

Таким образом, если невырожденная метрика Киллинга, а следовательно и невырожденное скалярное произведение (5.1.6), положительно определены, то соответствующая вещественная полупростая алгебра Ли компактна. С другой стороны, утверждение о том, что всякая компактная алгебра Ли имеет положительно определенное невырожденное скалярное произведение (5.1.6), построенное по метрике Киллинга, вообще говоря не верно. Например, компактная абелева группа Ли, состоящая из произведений  $U(1)$ -факторов:  $U(1) \times U(1) \times \cdots U(1)$ , имеет по определению компактную алгебру Ли, однако ее метрика Киллинга равна нулю и соответствующее скалярное произведение вырождено.

2.) Для матричных вещественных алгебр Ли  $\mathcal{A}$  инвариантное скалярное произведение – это след:

$$(A, B) \equiv -2 \text{Tr}(A \cdot B) , \quad \forall A, B \in \mathcal{A} , \quad (5.1.7) \quad \text{skpr}$$

что согласуется с определением метрики (3.1.79) для матричной группы Ли в единичном элементе. Знак минус выбран здесь для положительной определенности скалярного произведения (смотри ниже), а коэффициент 2 – для дальнейшего удобства. Условие инвариантности (5.1.3) для скалярного произведения (5.1.7) выполняется, что следует из возможности циклической перестановки матриц под знаком следа:

$$([Y, A], B) = -2\text{Tr}((Y \cdot A - A \cdot Y) \cdot B) = 2\text{Tr}(A \cdot (Y \cdot B - B \cdot Y)) = -(A, [Y, B]) .$$

Нетривиальная часть определения 5.1.1 для матричных алгебр Ли  $\mathcal{A}$  – это свойство (5.1.1) положительной определенности для скалярного произведения (5.1.7) в случае компактных, и только компактных  $\mathcal{A}$ .

- **Задача 159.** Показать, что  $(A, A) = -2\text{Tr}(A^2)$  положителен для всех ненулевых элементов  $A$  из алгебр  $so(n, \mathbb{R})$ ,  $su(n)$  и  $usp(2k)$ . Показать, что скалярное произведение  $(A, A)$  бывает как положительным, так и отрицательным для элементов  $A$  алгебр  $sl(2, \mathbb{R})$  и  $sl(2, \mathbb{C})$  (последняя рассматривается как шестимерная вещественная алгебра).

<sup>25</sup>Для дальнейшего нам удобно изменить знак по сравнению с (3.2.102).

В компактной матричной алгебре Ли  $\mathcal{A}$  можно выбрать базисные элементы  $\{X_a\}$  так, чтобы они образовывали ортонормированный базис. Обычно выбирают нормировку образующих следующим образом (сравните с (3.2.130))

$$\text{Tr}(X_a \cdot X_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}, \quad (5.1.8) \quad \text{li04qf}$$

что соответствует формуле

$$(X_a, X_b) = \delta_{ab}, \quad (5.1.9) \quad \text{li04ff}$$

для скалярного произведения. Такой ортонормированный выбор базиса можно сделать для любой (не обязательно матричной) компактной алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

- **Задача 160.** Доказать, пользуясь (5.1.2), что в базисе (5.1.9) структурные константы

$$C_{ab}^d = C_{ab}^p(X_p, X_d) \equiv C_{abd},$$

компактной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  антисимметричны по всем трем индексам. Указание: смотри (3.2.109).

Таким образом, для компактной алгебры Ли всегда существует базис, в котором ее структурные константы полностью антисимметричны. С другой стороны, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 5.1.3** Если структурные константы вещественной полупростой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  могут быть выбраны антисимметричными по всем трем индексам, то скалярное произведение (5.1.6) для такой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  положительно определено и  $\mathcal{A}$  – компактна.

**Доказательство.** Действительно, если с помощью замены базиса в  $\mathcal{A}$  структурные константы могут быть сделаны антисимметричными по всем трем индексам, то есть  $C_{ab}^d = -C_{ad}^b$  (антисимметрия  $C_{ab}^d = -C_{ba}^d$  заложена в определении структурных констант), то матрицы операторов присоединенного представления  $\text{ad}(A)$  ( $\forall A = A^a X_a \in \mathcal{A}$ ) будут также антисимметричны (см. (3.2.106))

$$\text{ad}(A)_b^d = A^a C_{ab}^d = -A^a C_{ad}^b = -\text{ad}(A)_d^b, \quad (5.1.10) \quad \text{comp05}$$

и тогда невырожденное (так как  $\mathcal{A}$  – полупроста) и инвариантное скалярное произведение (5.1.6), определяемое по форме Киллинга (3.2.102), будет положительно определенным:

$$(A, A) = -\text{Tr}(\text{ad}(A) \cdot \text{ad}(A)) = -\text{ad}(A)_b^d \text{ad}(A)_d^b = \text{ad}(A)_b^d \text{ad}(A)_b^d > 0, \quad \forall A \neq 0. \quad (5.1.11) \quad \text{comp04}$$

Согласно определению 5.1.1, наличие такого скалярного произведения означает компактность алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . ■

## 5.2 Структура компактных алгебр Ли.

Структура компактных алгебр Ли дается следующим важным утверждением.

**Утверждение 5.2.1** *Всякая компактная алгебра Ли  $\mathcal{A}$  представима единственным образом в виде прямой суммы некоторого количества абелевых подалгебр  $u(1)$  и простых компактных подалгебр Ли  $\mathcal{A}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )*

$$\mathcal{A} = u(1) + \dots + u(1) + \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_n . \quad (5.2.1) \quad \text{decomp}$$

**Доказательство.** Убедимся прежде всего в том, что всякая абелева инвариантная подалгебра (абелев идеал)  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  в компактной алгебре Ли  $\mathcal{A}$  коммутирует со всей алгеброй, т.е.  $\mathcal{I}$  содержится в центре  $\mathcal{Z}$  алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Пусть  $X, Y \in \mathcal{I}$  и  $A \in \mathcal{A}$ . Тогда  $[X, Y] = 0$  и из (5.1.2) следует, что

$$([X, A], Y) = 0 . \quad (5.2.2) \quad \text{comp00}$$

Элемент  $[X, A]$  принадлежит  $\mathcal{I}$ , поскольку  $X \in \mathcal{I}$  и  $\mathcal{I}$  – идеал. Выберем  $Y = [X, A]$ , тогда согласно (5.2.2) мы имеем  $(Y, Y) = 0$ . Так как для компактной алгебры Ли скалярное произведение невырождено, то  $Y = [X, A] = 0$ ,  $\forall X \in \mathcal{I}$ , и следовательно  $\mathcal{I} \subset \mathcal{Z}$ , что и требовалось. Из данного утверждения следует, что центр  $\mathcal{Z}$  в  $\mathcal{A}$  – это максимальный абелев идеал в  $\mathcal{A}$ .

Далее, алгебра  $\mathcal{A}$  раскладывается в прямую сумму

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} + \mathcal{Z}^\perp , \quad (5.2.3) \quad \text{comp01}$$

где  $\mathcal{Z}^\perp$  – ортогональное дополнение в  $\mathcal{A}$  к центру  $\mathcal{Z}$ . Векторное пространство  $\mathcal{Z}^\perp$  образует подалгебру Ли в  $\mathcal{A}$ , так как, если  $A_1, A_2 \in \mathcal{Z}^\perp$  и  $Z \in \mathcal{Z}$ , то из (5.1.2) следует

$$([A_1, A_2], Z) = -(A_2, [A_1, Z]) = 0 \Rightarrow [A_1, A_2] \in \mathcal{Z}^\perp .$$

Алгебра  $\mathcal{Z}^\perp$  по построению не содержит абелевых идеалов (иначе  $\mathcal{Z}$  можно было бы дополнить), поэтому она полупроста или проста.

Итак, любая компактная алгебра Ли  $\mathcal{A}$  раскладывается в сумму (5.2.3) своего максимального абелева идеала  $\mathcal{Z}$  и полупростой (или простой) подалгебры Ли  $\mathcal{Z}^\perp$ . Обе подалгебры  $\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{Z}^\perp$  очевидно компактны.

Полупростую алгебру Ли  $\mathcal{Z}^\perp$  можно в свою очередь разложить в прямую сумму простых алгебр Ли. Действительно, пусть  $\bar{\mathcal{A}}$  – идеал (инвариантная подалгебра) в  $\mathcal{Z}^\perp$ . Тогда ее ортогональное дополнение  $\bar{\mathcal{A}}^\perp$  в  $\mathcal{Z}^\perp$  также является идеалом в  $\mathcal{Z}^\perp$ , так как если  $A \in \mathcal{Z}^\perp$ ,  $X \in \bar{\mathcal{A}}$  и  $Y \in \bar{\mathcal{A}}^\perp$ , то из (5.1.2) следует, что

$$(X, [A, Y]) = -([A, X], Y) = 0 \Rightarrow [A, Y] \in \bar{\mathcal{A}}^\perp .$$

Инвариантные подалгебры  $\bar{\mathcal{A}}$  и  $\bar{\mathcal{A}}^\perp$  коммутируют друг с другом, так как из  $[\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}}^\perp] \subset \bar{\mathcal{A}}^\perp$  и  $[\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}}^\perp] \subset \bar{\mathcal{A}}$  следует, что  $[\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}}^\perp] = 0$ . Таким образом, мы получаем разложение

$$\mathcal{Z}^\perp = \bar{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{A}}^\perp ,$$

где  $\bar{\mathcal{A}}$  и  $\bar{\mathcal{A}}^\perp$  – полупростые подалгебры в  $\mathcal{Z}^\perp$ . Это разложение можно продолжить до тех пор пока  $\mathcal{Z}^\perp$  не разложится в прямую сумму простых подалгебр  $\bar{\mathcal{A}}_i$ .

Единственность разложения

$$\mathcal{Z}^\perp = \sum_i \bar{\mathcal{A}}_i \quad (5.2.4) \quad \text{dec11-11-5}$$

вытекает из следующего рассуждения. Пусть имеется другое разложение

$$\mathcal{Z}^\perp = \sum_\alpha \hat{\mathcal{A}}_\alpha$$

на прямую сумму простых подалгебр. Подпространство  $\bar{\mathcal{A}}_i \cap \hat{\mathcal{A}}_\alpha$  является подалгеброй в  $\mathcal{Z}^\perp$  и, более того, идеалом в  $\mathcal{Z}^\perp$  (поскольку если  $A \in \bar{\mathcal{A}}_i$  и  $A \in \hat{\mathcal{A}}_\alpha$ , то для всех  $B \in \mathcal{Z}^\perp$  выполнено  $[A, B] \in \bar{\mathcal{A}}_i$  и  $[A, B] \in \hat{\mathcal{A}}_\alpha$ ). Следовательно,  $\bar{\mathcal{A}}_i \cap \hat{\mathcal{A}}_\alpha$  — идеал в  $\bar{\mathcal{A}}_i$ , и в силу простоты  $\bar{\mathcal{A}}_i$  либо  $\bar{\mathcal{A}}_i \cap \hat{\mathcal{A}}_\alpha = \bar{\mathcal{A}}_i$  и  $\hat{\mathcal{A}}_\alpha = \bar{\mathcal{A}}_i$ , либо  $\bar{\mathcal{A}}_i \cap \hat{\mathcal{A}}_\alpha = \emptyset$ . Это и доказывает единственность разложения (5.2.4).

Наконец всякая абелева компактная подалгебра  $\mathcal{Z}$  представляет собой прямую сумму некоторого количества подалгебр  $u(1)$  (число слагаемых равно размерности алгебры  $\mathcal{Z}$ ). Таким образом, окончательно из (5.2.3) следует разложение (5.2.1). ■

**Замечание 1.** Утверждение 5.2.1 обобщается следующим образом. Всякая комплексная алгебра Ли  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ , имеющая в качестве одной из вещественных форм компактную алгебру Ли  $\mathcal{A}$  (5.2.1), представима единственным образом в виде прямой суммы максимального абелева идеала  $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$  и полупростой комплексной подалгебры Ли  $\mathcal{Z}^\perp(\mathbb{C})$ , которая является комплексификацией полупростой компактной алгебры Ли  $\mathcal{Z}^\perp$  (комплексная алгебра Ли  $\mathcal{Z}^\perp(\mathbb{C})$  полупроста, так как она наследует невырожденную метрику Киллинга своей полупростой вещественной формы  $\mathcal{Z}^\perp$ ).

В свою очередь комплексная полупростая алгебра Ли  $\mathcal{Z}^\perp(\mathbb{C})$  представляется в виде суммы своих комплексных подалгебр Ли  $\mathcal{A}_i(\mathbb{C})$ , которые являются комплексификацией простых компактных алгебр Ли  $\mathcal{A}_i$ . Последнее утверждение связано с тем, что в  $\mathcal{Z}^\perp(\mathbb{C})$  имеется инвариантная (в комплексном смысле), невырожденная и положительно определенная эрмитова форма, которая наследуется из невырожденного и положительно определенного скалярного произведения в  $\mathcal{Z}^\perp$ .

**Замечание 2.** Алгебра Ли  $\mathcal{A}$  называется редуктивной, если ее присоединенное представление вполне приводимо (разложимо). Это значит, что пространство присоединенного представления, а именно сама алгебра  $\mathcal{A}$ , разлагается как векторное пространство в прямую сумму инвариантных подпространств  $\mathcal{X}_i$

$$\mathcal{A} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \dots, \quad (5.2.5) \quad \text{decomp1}$$

и каждое  $\mathcal{X}_i$  представляет собой пространство неприводимого представления  $\mathcal{A}$ . Инвариантность подпространств  $\mathcal{X}_i$  относительно присоединенного действия  $\mathcal{A}$  означает, что  $[\mathcal{A}, \mathcal{X}_i] \subset \mathcal{X}_i$ , что дает, в частности,  $[\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_i] \subset \mathcal{X}_i$ . Таким образом, все подпространства  $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{A}$  оказываются подалгебрами Ли в  $\mathcal{A}$ . С другой стороны из инвариантности двух разных подпространств  $\mathcal{X}_j$  и  $\mathcal{X}_k$  следует, что  $[\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_j] \subset \mathcal{X}_j$  и  $[\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_k] \subset \mathcal{X}_k$ , поэтому  $[\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_k] = 0$  и разложение (5.2.5) представляет собой разложение редуктивной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  в прямую сумму своих подалгебр Ли  $\mathcal{X}_i$ . Одномерные подалгебры  $\mathcal{X}_i$  в разложении (5.2.5) очевидно образуют центр  $\mathcal{Z}$  в  $\mathcal{A}$ , а все остальные подалгебры (обозначим их как  $\mathcal{A}_i$ ) в (5.2.5) — просты, иначе они не были бы пространствами неприводимых подпредставлений в присоединенном представлении  $\mathcal{A}$ . Таким образом, разложение (5.2.5) принимает вид

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots \quad (5.2.6) \quad \text{decomp2}$$

где центр  $\mathcal{Z}$  — прямая сумма одномерных абелевых подалгебр в  $\mathcal{A}$ , а  $\sum_i \mathcal{A}_i$  — прямая сумма простых подалгебр в  $\mathcal{A}$ . Сравнивая это разложение с разложением (5.2.1) для компактных алгебр Ли, мы заключаем, что компактные алгебры Ли образуют важный подкласс редуктивных алгебр Ли.

BSF

ESF

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, заметим, что простая вещественная алгебра Ли  $\mathcal{A}$  может иметь в качестве своей комплексификации  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  не простую комплексную алгебру Ли. В качестве примера приведем простую вещественную алгебру Ли  $so(1, 3)$  (изоморфную простой алгебре  $sl(2, \mathbb{C})$ ), комплексификация которой  $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$  не проста. Однако, если комплексная алгебра Ли проста, то все ее вещественные формы с необходимостью являются простыми алгебрами Ли.

**Утверждение 5.2.2** *Для каждой вещественной формы  $\mathcal{A}$  простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  существует всего одно (с точностью до умножения на число) инвариантное скалярное произведение, которое совпадает со скалярным произведением (5.1.6), определяемым по форме Киллинга (3.2.102) алгебры  $\mathcal{A}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A}$  — вещественная форма простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  и пусть  $(X, Y)$  — любое инвариантное скалярное произведение в  $\mathcal{A}$ . Условие инвариантности (5.1.3) для всех таких скалярных произведений переписывается в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(A)_b^a (X_a, X_d) &= -(X_b, X_c) \operatorname{ad}(A)_d^c \Rightarrow \\ \operatorname{ad}(A)^T \cdot \eta &= -\eta \cdot \operatorname{ad}(A), \end{aligned} \quad (5.2.7) \quad \text{comp07}$$

где  $\{X_a\}$  — базис в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  и  $\eta = \|(X_a, X_d)\|$ . Поэтому матрица  $\eta$  удовлетворяет тому же условию инвариантности (4.7.31), что и метрика Киллинга  $\mathbf{g} = \|\mathbf{g}_{ab}\|$ . В этом случае, согласно Следствию к Утверждению 4.7.1 (здесь важно то, что комплексификация алгебры  $\mathcal{A}$  — простая алгебра), матрица  $\eta$  пропорциональна  $\|\mathbf{g}_{ab}\|$  и следовательно инвариантное скалярное произведение (5.1.6) для каждой вещественной формы простой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  единственно с точностью до умножения на число. ■

Если компактная алгебра Ли полупроста, то весь набор инвариантных скалярных произведений (метрик) описывается следующим образом. Пусть, например,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$$

где  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  — простые алгебры Ли. Любой элемент  $X \in \mathcal{A}$  имеет вид

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2, \\ X_1 &\in \mathcal{A}_1, \quad X_2 \in \mathcal{A}_2. \end{aligned} \quad (5.2.8) \quad \text{comp02}$$

Пусть  $(, )_1$  — инвариантное скалярное произведение в  $\mathcal{A}_1$  и  $(, )_2$  — инвариантное скалярное произведение в  $\mathcal{A}_2$ . Тогда наиболее общее инвариантное скалярное произведение в  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$(X, Y) = \alpha_1 (X_1, Y_1)_1 + \alpha_2 (X_2, Y_2)_2, \quad (5.2.9) \quad \text{comp03}$$

где для элементов  $X, Y \in \mathcal{A}$  использовано разложение (5.2.8), а  $\alpha_1, \alpha_2$  — произвольные положительные числа. Иными словами, квадратичные инварианты (относительно присоединенного действия) в  $\mathcal{A}$  разлагаются в линейные комбинации квадратичных инвариантов в каждой из простых подалгебр  $\mathcal{A}_i$ .

### 5.3 Связь компактных алгебр Ли и компактных групп Ли.

В этом разделе мы окончательно установим связь компактных алгебр Ли с компактными группами Ли. Перед этим необходимо ввести вспомогательную конструкцию.

Рассмотрим множество  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$  линейных операторов  $X$ , действующих в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  и обладающих свойством

$$X \cdot ([A, B]) = [X \cdot A, B] + [A, X \cdot B], \quad \forall A, B \in \mathcal{A}. \quad (5.3.1) \quad \text{oct14a}$$

Такие операторы  $X$  называются дифференцированиями алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , так как соотношение (5.3.1) выглядит как правило Лейбница для дифференцирования произведения  $[A, B]$  в алгебре Ли  $\mathcal{A}$ .

- **Задача 161.** Доказать, что множество  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$  дифференцирований  $X$  образует алгебру Ли.

Из сравнения (4.2.9) и (5.3.1) следует, что операторы  $\text{ad}(Y)$ , где  $Y \in \mathcal{A}$ , являются дифференцированиями алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Напомним (смотри (3.2.185)), что множество операторов  $\text{ad}(Y)$ , где  $Y$  пробегает все элементы алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , образует присоединенную алгебру Ли  $\text{ad}(\mathcal{A})$ .

**Утверждение 5.3.1** Для всякой компактной полупростой алгебры Ли  $\mathcal{A}$  алгебра Ли дифференцирований  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$  изоморфна присоединенной алгебре Ли  $\text{ad}(\mathcal{A})$ .

**Доказательство.** Очевидно, что присоединенная алгебра  $\text{ad}(\mathcal{A})$  вложена в  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ . Определим в  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$  квадратичную форму

$$(X_1, X_2) = -\text{Tr}(X_1 X_2), \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{X}(\mathcal{A}). \quad (5.3.2) \quad \text{xxchi}$$

Эта форма симметрична, но, вообще говоря, может быть вырожденной и не положительно определенной. Однако ее ограничение на подалгебру  $\text{ad}(\mathcal{A})$  совпадает с невырожденной и положительно определенной формой Киллинга компактной полупростой алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , поэтому алгебра  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$  как линейное пространство раскладывается в прямую сумму

$$\mathcal{X}(\mathcal{A}) = \text{ad}(\mathcal{A}) + \mathcal{X}^\perp,$$

где  $\mathcal{X}^\perp$  — ортогональное дополнение к  $\text{ad}(\mathcal{A})$  в  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ , построенное по форме (5.3.2). Действительно, каждый элемент  $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{A})$  можно представить в виде

$$Y = (Y, e_i) e_i + Y^\perp, \quad Y^\perp \equiv Y - (Y, e_i) e_i,$$

где  $e_i$  — ортонормированный базис в  $\text{ad}(\mathcal{A})$ . Так как

$$(Y^\perp, e_j) = (Y - (Y, e_i) e_i, e_j) = 0,$$

для всех  $j$ , то  $Y^\perp \in \mathcal{X}^\perp$ . Далее, если  $X \in \mathcal{X}^\perp$ , то для произвольного  $A \in \mathcal{A}$  элемент  $[X, \text{ad}A]$  также принадлежит  $\mathcal{X}^\perp$ , поскольку для всех  $A, B \in \mathcal{A}$  мы имеем

$$\text{Tr}([X, \text{ad}A] \cdot \text{ad}B) = \text{Tr}(X \cdot [\text{ad}A, \text{ad}B]) = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $[\text{ad}(A), \text{ad}(B)] \in \text{ad}(\mathcal{A})$ . С другой стороны,

$$[X, \text{ad}A] = \text{ad}(X \cdot A) .$$

Это следует из цепочки равенств

$$(X \text{ad}A - (\text{ad}A)X)B = X([A, B]) - [A, XB] = [XA, B] + [A, XB] - [A, XB] = [XA, B] .$$

Следовательно, оператор  $Z = \text{ad}(X \cdot A)$  принадлежит как  $\mathcal{X}^\perp$ , так и  $\text{ad}(\mathcal{A})$ , поэтому норма  $(Z, Z)$  (понимаемая в смысле формы Киллинга в  $\text{ad}(\mathcal{A})$ ) равна нулю, значит, равен нулю и  $Z = \text{ad}(X \cdot A)$ , то есть  $(X \cdot A) \in \text{Ker}(\text{ad})$ . Поскольку согласно Утверждению 3.2.8 соответствие  $A \rightarrow \text{ad}(A)$  для всех элементов  $A$  из  $\mathcal{A}$  – взаимнооднозначно ( $\text{Ker}(\text{ad})$  тривиален и состоит из одного нулевого элемента), то равен нулю и элемент  $(X \cdot A)$ , а поскольку это верно для всех  $A$ , то равен нулю и оператор  $X$ . Ортогональное дополнение к  $\text{ad}(\mathcal{A})$  отсутствует, алгебра  $\mathcal{X}(\mathcal{A})$  совпадает с  $\text{ad}(\mathcal{A})$ , и любой оператор, обладающий свойством (5.3.1), совпадает с одним и только одним оператором из алгебры  $\text{ad}(\mathcal{A})$ . ■

Теперь сформулируем и докажем основное утверждение этого раздела.

**Утверждение 5.3.2** *Для всякой компактной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  существует компактная группа Ли  $G$ , алгебра Ли которой совпадает с  $\mathcal{A}$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим разложение (5.2.3). Центр  $\mathcal{Z}$  очевидно является алгеброй Ли произведения компактных групп  $U(1)$ , поэтому осталось рассмотреть полупростую алгебру Ли  $\mathcal{A}^\perp$ . Если найдется компактная группа  $\tilde{G}$ , которая имеет своей алгеброй  $\mathcal{A}(\tilde{G}) = \mathcal{A}^\perp$ , то алгебра Ли компактной группы  $G = U(1) \otimes \cdots \otimes U(1) \otimes \tilde{G}$  совпадает с алгеброй  $\mathcal{A}$  и тем самым утверждение будет доказано.

Эта задача о нахождении компактной группы Ли  $\tilde{G}$  решается следующим образом. Рассмотрим все линейные операторы  $\hat{g}$ , которые действуют в  $\mathcal{A}^\perp$  и обладают свойствами

$$(\hat{g} \cdot A, \hat{g} \cdot B) = (A, B) , \tag{5.3.3} \text{ oct14-10-8}$$

$$[\hat{g} \cdot A, \hat{g} \cdot B] = \hat{g} \cdot [A, B] , \quad \forall A, B \in \mathcal{A}^\perp , \tag{5.3.4} \text{ oct14-10-7}$$

где  $(\ , \ )$  – положительно определенное, невырожденное, инвариантное скалярное произведение в  $\mathcal{A}^\perp$ . Множество операторов  $\hat{g}$  образует группу Ли  $\tilde{G}$  (умножение в ней – это, как обычно, последовательное действие операторов). В силу (5.3.3) группа  $\tilde{G}$  является подгруппой в  $O(n)$ , где  $n$  – размерность алгебры  $\mathcal{A}^\perp$ , поэтому  $\tilde{G}$  – компактна. Далее, из (5.3.4) следует, что элементы  $X$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(\tilde{G})$  группы  $\tilde{G}$  (тоже операторы, действующие в  $\mathcal{A}^\perp$ ) удовлетворяют (5.3.1). Согласно Утверждению 5.3.1 любой такой оператор  $X$  представим в виде  $X = \text{ad}(C)$ , где  $C \in \mathcal{A}^\perp$ , поэтому алгебра Ли  $\mathcal{A}(\tilde{G})$  вкладывается в  $\mathcal{A}^\perp$ , то есть  $\mathcal{A}(\tilde{G}) \subset \text{ad}(\mathcal{A}^\perp)$ . Наоборот, всякому элементу  $C \in \mathcal{A}^\perp$  можно поставить в соответствие оператор  $\exp(t \cdot \text{ad}(C))$  по крайней мере при малых  $t$  (в некотором выбранном базисе в  $\mathcal{A}^\perp$  оператору  $\text{ad}(C)$  сопоставляется матрица, тогда  $\exp(t \cdot \text{ad}(C))$  можно воспринимать просто как экспоненту от матрицы). Оператор  $\exp(t \cdot \text{ad}(C))$  обладает свойствами (5.3.3), (5.3.4), поэтому  $\text{ad}(C) \in \mathcal{A}(\tilde{G})$ , то есть  $\text{ad}(\mathcal{A}^\perp) \subset \mathcal{A}(\tilde{G})$  и следовательно  $\text{ad}(\mathcal{A}^\perp) = \mathcal{A}(\tilde{G})$ . Как мы уже отмечали

(см. Утверждение 3.2.8), полупростая алгебра Ли  $\mathcal{A}^\perp$  и ее присоединенная алгебра  $\text{ad}(\mathcal{A}^\perp)$  изоморфны, и мы получаем, что алгебра Ли  $\mathcal{A}(\tilde{G})$  построенной компактной группы  $\tilde{G}$  (5.3.3), (5.3.4) изоморфна  $\mathcal{A}^\perp$ , иначе говоря, группа  $\tilde{G}$  есть искомая компактная группа  $\tilde{G}$ . ■

Пусть  $\mathcal{A}$  — компактная алгебра Ли. Она разложима в прямую сумму (5.2.1). Поэтому в качестве компактной группы Ли, алгеброй которой является  $\mathcal{A}$ , можно выбрать

$$G = U(1) \times \dots \times U(1) \times G_1 \times \dots \times G_n ,$$

где  $G_i$  — компактные простые группы Ли. Более того, группы  $G_i$  можно считать односвязными, т.е. универсальными накрывающими (см. утверждение (3) в начале раздела 3.2.13). Мы уже знаем, что любое представление алгебры  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(G_i)$  порождается представлением универсальной накрывающей  $G_i$ , см. Утверждение 4.2.1. Отсюда и из утверждений раздела 4.5 следуют Утверждения 5.1.1, 5.1.2, если учесть, что при малых  $t$  справедливо  $T(g_A(t)) = 1 + t \cdot T(A) + O(t^2)$ .

**Замечание.** Пусть группа Ли  $G$  некомпактна и пусть  $T$  — точное унитарное представление  $G$  в векторном пространстве  $\mathcal{V}$ . Унитарность  $T$  означает, что в  $\mathcal{V}$  существует положительно определенная эрмитова форма, которая инвариантна относительно действия всех операторов  $T(g)$  представления  $T$ :

$$(T(g) \cdot A, T(g) \cdot B) = (A, B) , \quad \forall A, B \in \mathcal{V} , \quad \forall g \in G .$$

Если точное унитарное представление  $T$  группы  $G$  конечномерно<sup>26</sup>, то рассуждения в духе тех, которые использовались при доказательстве Утверждения 5.3.2 привели бы нас к заключению о том, что группа  $G$  должна быть изоморфна компактной группе, что противоречит изначальному предположению о некомпактности  $G$ . Поэтому точные унитарные представления некомпактных групп могут быть только бесконечномерными.

## 5.4 Подалгебра Картана. Ранг алгебры Ли. Базис Картана–Вейля.

В этом разделе мы продолжим изучение структуры компактных алгебр Ли. Согласно Утверждению 5.2.1 любая компактная алгебра Ли есть прямая сумма некоторого количества абелевых подалгебр  $u(1)$  и простых компактных алгебр Ли. Дальнейшее изучение компактных алгебр Ли связано с более детальным исследованием структуры простых компактных алгебр Ли и их классификацией.

### 5.4.1 Регулярные элементы. Подалгебра Картана и ранг алгебры Ли.

Пусть  $\mathcal{A}$  — полупростая компактная алгебра Ли. Выберем элемент  $A \in \mathcal{A}$  и рассмотрим соответствующий оператор  $\text{ad}(A)$  из присоединенного представления алгебры, который, напомним, действует в  $\mathcal{A}$  следующим образом:  $\text{ad}(A)(X) = [A, X] \quad \forall X \in \mathcal{A}$ .

<sup>26</sup>То есть,  $T$  отображает  $G$  в матричную группу, которая является подгруппой в компактной группе  $U(N)$ , где  $N$  равно размерности  $T$  и следовательно конечно.



Оператор  $\text{ad}(A)$  имеет нулевое собственное значение, например, при  $X = A$ , которое в общем случае может быть вырожденным. Для фиксированного  $A \in \mathcal{A}$  множество  $\mathcal{A}_A$  элементов  $X \in \mathcal{A}$  таких, что  $[A, X] = 0$ , образует подалгебру Ли в  $\mathcal{A}$ .

• **Задача 162.** Доказать, что  $\mathcal{A}_A$  действительно образует подалгебру Ли в  $\mathcal{A}$ .

Размерность подалгебры  $\mathcal{A}_A$ , или другими словами кратность  $r_A$  нулевого собственного значения оператора  $\text{ad}(A)$ , зависит от выбора элемента  $A \in \mathcal{A}$ . Минимальное значение этой кратности, то есть такое  $r = r_A$ , что  $r \leq r_B$ ,  $\forall B \in \mathcal{A}$ , называется рангом алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , а соответствующие элементы  $A \in \mathcal{A}$ , называются регулярными элементами алгебры Ли  $\mathcal{A}$ . Если  $A$  — регулярный элемент в  $\mathcal{A}$ , то подалгебра Ли  $\mathcal{A}_A$  в  $\mathcal{A}$  называется регулярной подалгеброй. Оказывается, что все регулярные подалгебры  $\mathcal{A}_A$  для разных регулярных элементов  $A$  изоморфны и переводятся друг в друга с помощью внутренних автоморфизмов в  $\mathcal{A}$ . Имеет место следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства (см. §62 в [37]).

**Утверждение 5.4.1** Пусть  $\mathcal{A}$  — полупростая компактная алгебра Ли (или ее комплексификация), тогда регулярная подалгебра в  $\mathcal{A}$  коммутативна.

**Определение 5.4.1** Коммутативная регулярная подалгебра  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{A}$  называется подалгеброй Картана.

В соответствии со сказанным выше, размерность  $\mathcal{H}$  равна рангу алгебры  $\mathcal{A}$ .

**Пример.** Рассмотрим простую алгебру Ли  $sl(n, \mathbb{C})$  (комплексификация компактной алгебры  $su(n)$ ) и выберем два ее элемента: любую бесследовую  $n \times n$  матрицу  $X = x_{kj} e_{kj} \in sl(n, \mathbb{C})$  и фиксированную матрицу  $B = e_{11} - e_{22} \in sl(n, \mathbb{C})$ , где  $e_{kj}$  — матричные единицы. Условие  $[B, X] = 0$  дает, что все коэффициенты  $x_{kj}$  произвольны, за исключением

$$x_{1k} = x_{k1} = 0 \quad \forall k \neq 1, \quad x_{2k} = x_{k2} = 0 \quad \forall k \neq 2.$$

Размерность (кратность  $r_B$ ) алгебры  $sl(n, \mathbb{C})_B$  равна числу незафиксированных элементов  $x_{jk}$ , то есть мы имеем  $r_B = (n-2)^2 + 1$ . Эта размерность минимальна для  $n = 2, 3$  и неминимальна для всех  $n > 3$ .

• **Задача 163.** Убедиться в том, что подалгебры  $sl(2, \mathbb{C})_B$  и  $sl(3, \mathbb{C})_B$ , где  $B = e_{11} - e_{22}$ , коммутативны.

Чтобы проверить неминимальность  $r_B = (n-2)^2 + 1$  в случае  $n > 3$ , зафиксируем элемент  $A = \sum_{k=1}^n a_k e_{kk}$ , где  $a_k \neq 0$ ,  $\sum_{k=1}^n a_k = 0$  и  $a_k \neq a_j$  для всех  $k \neq j$ . Тогда  $[A, X] = 0$  дает условие  $(a_k - a_j)x_{kj} = 0$  (суммирования по  $k$  и  $j$  нет), откуда следует, что  $x_{kj} = 0$  для всех  $k \neq j$ , а  $x_{kk}$  — произвольны с точностью до условия  $\sum_k x_{kk} = 0$ . Таким образом, размерность (кратность  $r_A$ ) алгебры  $sl(n, \mathbb{C})_A$  равна  $r_A = (n-1)$  и мы имеем  $r_B > r_A$  для  $n > 3$ . Можно показать, что кратность  $r_A = (n-1)$  минимальна и следовательно равна рангу алгебры  $sl(n, \mathbb{C})$ , а соответствующая регулярная подалгебра (подалгебра Картана)  $\mathcal{H} = sl(n, \mathbb{C})_A$  коммутативна и образована всеми бесследовыми диагональными матрицами. То же можно сказать и про подалгебру Картана алгебры  $su(n)$ , только элементы диагональных матриц в этом случае вещественны.

### 5.4.2 Базис Картана–Вейля.

Прежде всего мы приведем отличное от 5.4.1, но эквивалентное ему, определение подалгебры Картана, которое будет использоваться ниже.

**Определение 5.4.2.** Пусть  $\mathcal{A}$  – полупростая алгебра Ли. Выделим в  $\mathcal{A}$  подалгебру  $\mathcal{H}$  с образующими  $\{H_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) такую, что

1.  $[H_i, H_j] = 0$  ( $\forall i, j$ ) и  $\mathcal{H}$  – максимальная коммутативная подалгебра в  $\mathcal{A}$ ;
2. матрицы операторов  $\text{ad}(H_i)$  одновременно диагонализуются для всех  $i$  путем соответствующего выбора базиса в  $\mathcal{A}$ .

Такая максимальная коммутативная подалгебра  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{A}$  называется подалгеброй Картана, а размерность подалгебры Картана  $\dim(\mathcal{H}) = r$  называется рангом алгебры Ли  $\mathcal{A}$ .

Подчеркнем, что в случае компактных алгебр Ли  $\mathcal{A}$  пункт 2. в Определении 5.4.2 излишен, так как он является следствием пункта 1. и Утверждения 5.1.1.

Далее в этом разделе мы ограничимся рассмотрением полупростых компактных алгебр Ли  $\mathcal{A}$ , для которых скалярное произведение

$$(X, Y) = -\text{Tr}(\text{ad}(X) \cdot \text{ad}(Y)) , \quad X, Y \in \mathcal{A} ,$$

связанное с метрикой Киллинга, инвариантно и положительно определено. Компактная алгебра  $\mathcal{A}$  – вещественна, поэтому структурные константы в любом базисе для  $\mathcal{A}$  будут вещественными числами. Выберем базис в  $\mathcal{A}$  так, чтобы все базисные элементы алгебры Ли  $\mathcal{A}$  можно было разбить на две группы

$$\{H_i\} \quad (i = 1, \dots, r) , \quad \{T_a\} \quad (a = 1, \dots, \dim(\mathcal{A}) - r) ,$$

где  $\{H_i\}$  – образующие подалгебры Картана  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{A}$ , а элементы  $T_a$  образуют ортогональное дополнение  $\mathcal{H}^\perp$  к  $\mathcal{H}$ :

$$(H_i, T_a) = -\text{Tr}(\text{ad}(H_i) \cdot \text{ad}(T_a)) = 0 . \tag{5.4.1} \quad \text{ht}$$

Так как

$$(H_i, [H_j, T_a]) = -([H_j, H_i], T_a) = 0 ,$$

то для всех  $H_j$  и  $T_a$  мы получаем  $[H_j, T_a] \in \mathcal{H}^\perp$  и, следовательно,

$$[H_j, T_a] = h_{j,ab} T_b . \tag{5.4.2} \quad \text{li3c}$$

Очевидно, что вещественные матрицы  $h_j = ||h_{j,ab}||$  реализуют  $(\dim(\mathcal{A}) - r)$  – мерное матричное представление подалгебры Картана  $\mathcal{H}$ , и мы имеем

$$[h_i, h_j] = 0 \quad (\forall i, j) . \tag{5.4.3} \quad \text{hh0}$$

Из условия (5.4.1), следует, что метрика Киллинга имеет блочно диагональный вид с двумя блоками, один из которых составлен из элементов

$$g_{ij} = (H_i, H_j) , \tag{5.4.4} \quad \text{mH}$$

а второй из

$$X_{ab} = (T_a, T_b) = -\text{Tr}(\text{ad}(T_a) \cdot \text{ad}(T_b)) . \quad (5.4.5) \quad \text{mX}$$

Так как метрика Киллинга невырождена для полупростой алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , то симметричные матрицы  $\|g_{ij}\|$  и  $X = \|X_{ab}\|$  также невырождены. Кроме того мы имеем

$$h_{j,ac} X_{cb} = ([H_j, T_a], T_b) = -(T_a, [H_j, T_b]) = -h_{j,bc} X_{ca} ,$$

поэтому матрицы  $\|h_{j,ab}\|$  ( $j = 1, \dots, r$ ) антисимметричны с точностью до преобразования эквивалентности

$$(h_j \cdot X)^T = -h_j \cdot X \quad \Rightarrow \quad h_j^T = -X^{-1} \cdot h_j \cdot X . \quad (5.4.6) \quad \text{li3aa}$$

Положим  $n = (\dim(\mathcal{A}) - r)$ . Для любой  $n \times n$  диагонализуемой матрицы  $h$  со свойствами симметрии (5.4.6):

$$h^T = -X^{-1} \cdot h \cdot X , \quad (5.4.7) \quad \text{li3aaa}$$

определим собственные значения  $\alpha$  и собственные вектора  $v$  следующим образом

$$v_b h_{ba} = \alpha v_a \quad \Leftrightarrow \quad v \cdot h = \alpha v . \quad (5.4.8) \quad \text{li4r}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 5.4.2.** Если  $\alpha$  – собственное значение диагонализуемой матрицы  $h$ , обладающей свойством (5.4.7), то  $(-\alpha)$  также является ее собственным значением. Если данная матрица  $h$  вещественна, то все ее собственные значения  $\alpha$  – VRN  
чисто мнимые числа.

**Доказательство.** Для матрицы  $h$  имеется характеристическое тождество

$$\prod_{\mu} (h - \alpha_{\mu} \mathbf{1}) = 0 , \quad (5.4.9) \quad \text{charh}$$

где  $\mathbf{1}$  – единичная  $n \times n$  матрица, и произведение берется по всем собственным значениям  $\alpha_{\mu}$  матрицы  $h$ . Для диагонализуемой матрицы  $h$  равенство (5.4.9) доказывается следующим образом. Пусть  $\mathcal{V}$  –  $n$ -мерное комплексное векторное пространство, в котором действует матрица  $h$ . Оператор  $\prod_{\mu} (h - \alpha_{\mu} \mathbf{1})$  в левой части (5.4.9) равен нулю при действии на все собственные вектора матрицы  $h$ , которые образуют базис (так как  $h$  — диагонализуема) в пространстве  $\mathcal{V}$ . Поэтому оператор  $\prod_{\mu} (h - \alpha_{\mu} \mathbf{1})$  равен нулю, так как он равен нулю при его действии на любой вектор из  $\mathcal{V}$ . Наоборот, если оператор  $\prod_{\mu} (h - \alpha_{\mu} \mathbf{1})$  равен нулю для диагонализуемой матрицы  $h$  и некоторого набора чисел  $\{\alpha_{\mu}\}$ , то  $\{\alpha_{\mu}\}$  — это набор всех собственных значений матрицы  $h$ .

- **Задача 164.** Доказать последнее утверждение.

Применим транспонирование к обеим частям тождества (5.4.9). Тогда согласно (5.4.7) мы получаем

$$\prod_{\mu} (h^T - \alpha_{\mu} \mathbf{1}) = -X^{-1} \cdot \prod_{\mu} (h + \alpha_{\mu} \mathbf{1}) \cdot X = 0 \quad \Rightarrow \quad \prod_{\mu} (h + \alpha_{\mu} \mathbf{1}) = 0 ,$$

откуда следует, что если  $\{\alpha_\mu\}$  — набор всех собственных значений матрицы  $h$ , то  $\{-\alpha_\mu\}$  — это тот же набор. Это и доказывает первое сделанное утверждение.

Введем в пространстве  $\mathcal{V}$  скалярное произведение

$$(v, u) = v_a X_{ab} u_b, \quad v, u \in \mathcal{V}, \quad (5.4.10) \quad \text{sk-root}$$

которое положительно определено, так как положительно определена метрика Киллинга, построенная из блоков (5.4.4) и (5.4.5). Для матрицы  $h$  и скалярного произведения (5.4.10) в силу равенства (5.4.7) выполняется тождество

$$(v \cdot h, u) = -(v, h^T \cdot u). \quad (5.4.11) \quad \text{sk-root1}$$

Пусть  $v$  — собственный вектор матрицы  $h$  с собственным значением  $\alpha$ , то есть выполняется (5.4.8). Тогда, пользуясь тем, что  $h$  и  $X$  — вещественные матрицы и  $X^T = X$ , мы выводим соотношения VRN

$$\begin{aligned} (v \cdot h, v^*) &= \alpha (v, v^*), \\ (v \cdot h, v^*)^* &= \alpha^* (v, v^*)^* = \alpha^* (v^*, v), \\ (v \cdot h, v^*)^* &= (v^* \cdot h, v) = -(v^*, h^T \cdot v) = -\alpha (v^*, v). \end{aligned}$$

В последней строчке использовано равенство (5.4.11), и из нее, с учетом второй строчки, мы получаем, что  $\alpha^* = -\alpha$ . ■

Матрицы  $h_k$ , заданные в (5.4.2), коммутируют друг с другом, см. (5.4.3), поэтому эти матрицы диагонализуются одновременно для всех  $k$ : VRN

$$v_b^{(\alpha)} h_{k,ba} = i \alpha_k v_a^{(\alpha)} \Leftrightarrow v^{(\alpha)} h_k = i \alpha_k v^{(\alpha)}. \quad (5.4.12) \quad \text{li4p}$$

Здесь  $v^{(\alpha)}$  — собственные вектора (вообще говоря комплексные), а  $(i \alpha_j)$  — собственные значения вещественных матриц  $\|h_{j,ab}\|$ . Согласно Утверждению 5.4.2 мы имеем  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ . Таким образом, каждый собственный вектор  $v^{(\alpha)}$  характеризуется  $r$  собственными числами  $(i \alpha_1, \dots, i \alpha_r)$  и поэтому каждый  $v^{(\alpha)}$  ассоциирован со специальным вектором  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  в некотором  $r$ -мерном вещественном векторном пространстве. Отметим также, что матрицы  $h_j$  не могут иметь собственные вектора  $v^{(\alpha)}$  с  $\alpha = (0, \dots, 0)$ , иначе подалгебру  $\mathcal{H}$  можно было бы дополнить.

Собственные вектора  $v^{(\alpha)}$  матриц  $h_j$  можно нормировать так, чтобы они образовали ортонормированную систему относительно скалярного произведения (5.4.10):

$$(v^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) = \delta_{\alpha+\beta,0}, \quad \delta_{\alpha+\beta,0} := \prod_j \delta_{\alpha_j+\beta_j,0}. \quad (5.4.13) \quad \text{sk-root2}$$

Действительно, ортогональность следует из равенств

$$i \alpha_j (v^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) = (v^{(\alpha)} h_j, v^{(\beta)}) = -(v^{(\alpha)}, h_j^T v^{(\beta)}) = -i \beta_j (v^{(\alpha)}, v^{(\beta)}),$$

поэтому  $(v^{(\alpha)}, v^{(\beta)}) = 0$ , если  $\alpha_j \neq -\beta_j$  хотя бы для одного  $j = 1, \dots, r$ . Далее, выбирая нормировку комплексных векторов  $v^{(\alpha)}$ , можно всегда добиться выполнения (5.4.13).

Пользуясь собственными векторами  $v^{(\alpha)}$ , которые образуют полную ортонормированную систему в  $\mathcal{V}$ , мы можем сделать удобную для нас замену базиса  $\{T_a\}$  в пространстве  $\mathcal{H}^\perp$ . Для этого свернем обе части (5.4.2) с собственными векторами  $v_a^{(\alpha)}$  и получим

$$[H_j, E_\alpha] = i \alpha_j E_\alpha, \quad E_\alpha \equiv \sum_a v_a^{(\alpha)} T_a. \quad (5.4.14) \quad \text{li5p}$$

Таким образом, вместо базисных элементов  $T_a \in \mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{A}$  мы вводим новые базисные элементы  $E_\alpha \in \mathcal{H}^\perp$ , которые характеризуются  $r$ -мерными вещественными векторами  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ .

**Определение 5.4.3.** Вектора  $r$ -мерного вещественного векторного пространства  $\mathcal{V}_r$  с координатами  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ , которые были введены в (5.4.12) и (5.4.14), называются корневыми векторами (или корнями) алгебры Ли  $\mathcal{A}$ , а пространство  $\mathcal{V}_r$  называется корневым векторным пространством.

В соответствии с (5.4.14), корнями также иногда называют корневые базисные образующие  $E_\alpha$ .

Здесь следует отметить, что, так как собственные вектора  $v^{(\alpha)}$  могут быть комплексными, элементы  $E_\alpha$ , строго говоря, являются базисными элементами не в вещественной алгебре Ли  $\mathcal{A}$ , а в ее комплексификации  $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ . Однако заметим, что любой элемент вещественной компактной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  можно записать в виде линейной комбинации образующих  $\{H_i\}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) подалгебры Картана с вещественными коэффициентами и корневых образующих  $\{E_\alpha\}$  (где  $\alpha \in \mathcal{V}_r$  — все корневые вектора) с комплексными коэффициентами. При этом комплексные коэффициенты указанной линейной комбинации должны быть такими, чтобы при ее переразложении по исходным базисным элементам  $\{H_i, T_a\}$  получалась линейная комбинация  $\{H_i, T_a\}$  с вещественными коэффициентами. Поэтому и в дальнейшем новый базис  $\{H_i, E_\alpha\}$  мы будем ассоциировать не только с комплексной алгеброй  $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ , но и с ее компактной вещественной формой  $\mathcal{A}$ . VRN

**Определение 5.4.4.** Базис алгебры Ли  $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ , образованный элементами  $\{H_k, E_\alpha\}$ , где  $k = 1, \dots, r$  и  $\alpha$  — все корневые вектора в  $\mathcal{V}_r$ , называется базисом Картана–Вейля.

Заметим, что в присоединенном представлении мы имеем

$$[\text{ad}H_k, \text{ad}E_\alpha \cdot \text{ad}E_\beta] = i(\alpha + \beta)_k \text{ad}E_\alpha \cdot \text{ad}E_\beta.$$

Вычисляя след от этого равенства, мы получаем

$$\text{Tr}(\text{ad}E_\alpha \cdot \text{ad}E_\beta) = 0,$$

для всех корневых векторов  $\alpha, \beta \in \mathcal{V}_r$  таких, что  $\alpha + \beta \neq 0$  (в смысле суммы векторов  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  и  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ ). Соответственно, из невырожденности метрики Киллинга следует, что  $\text{Tr}(\text{ad}E_\alpha \cdot \text{ad}E_{-\alpha}) \neq 0 \forall \alpha$ . Выбирая специальным образом нормировку образующих  $E_\alpha$  (что эквивалентно нормировке (5.4.13) для векторов  $v^{(\alpha)}$ ), можно добиться того, чтобы метрика Киллинга имела вид

$$\begin{aligned} -\text{Tr}(\text{ad}(H_k) \cdot \text{ad}(H_j)) &= g_{kj}, \quad \text{Tr}(\text{ad}(H_k) \cdot \text{ad}(E_\alpha)) = 0, \\ -\text{Tr}(\text{ad}(E_\alpha) \cdot \text{ad}(E_\beta)) &= \delta_{\alpha, -\beta}. \end{aligned} \quad (5.4.15) \quad \text{metrK}$$

Далее, из тождеств Якоби мы получаем

$$[H_k, [E_\alpha, E_\beta]] = i(\alpha + \beta)_k [E_\alpha, E_\beta]. \quad (5.4.16) \quad \text{li06p}$$

Тогда, если  $(\alpha + \beta)$  — корень, то

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{(\alpha, \beta)} E_{\alpha+\beta}, \quad (5.4.17) \quad \text{li6}$$

где  $N_{(\alpha, \beta)}$  — некоторые ненулевые константы. Если  $(\alpha + \beta)$  не корень и  $\alpha + \beta \neq 0$ , то  $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ . Если же  $\alpha + \beta = 0$ , то из (5.4.16) мы имеем

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = x^j H_j, \quad (5.4.18) \quad \text{li7}$$

где  $x^i$  — некоторые константы. Вычислим эти константы для базиса Картана–Вейля, имеющего нормировку (5.4.15):

$$\begin{aligned} x^j g_{jk} &= -\text{Tr}(\text{ad}(H_k) \cdot [\text{ad}(E_\alpha), \text{ad}(E_{-\alpha})]) = -\text{Tr}([\text{ad}(H_k), \text{ad}(E_\alpha)] \cdot \text{ad}(E_{-\alpha})) = \\ &= -i \alpha_k \text{Tr}(\text{ad}(E_\alpha) \cdot \text{ad}(E_{-\alpha})) = i \alpha_k, \end{aligned}$$

то есть  $x^j = i g^{jk} \alpha_k \equiv i \alpha^j$ , где  $g^{jk}$  — элементы матрицы, обратной к  $\|g_{jk}\|$ . Отметим, что элементы матрицы  $\|g_{jk}\|$  выражаются через корни следующим образом

$$g_{kj} = -\text{Tr}(\text{ad}(H_k) \cdot \text{ad}(H_j)) = -\sum_{\alpha} C_{k\alpha}^{\alpha} C_{j\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \alpha_k \alpha_j, \quad (5.4.19) \quad \text{li7a}$$

где структурные константы  $C_{j\alpha}^{\alpha}$  определяются из (5.4.14), а сумма берется по всем корням  $\alpha$ . Отметим, что из представления (5.4.19) сразу же следует положительная определенность метрики  $g_{kj}$ . Действительно, из (5.4.19) для любого вещественного вектора  $y \in \mathcal{V}_r$  следует неравенство  $y^k g_{kj} y^j = \sum_{\alpha} (y \alpha)^2 \geq 0$ , которое означает, что вещественное корневое пространство  $\mathcal{V}_r$  имеет евклидову метрику. Таким образом, в случае компактных полупростых алгебр Ли корневое пространство  $\mathcal{V}_r$  всегда вещественно и евклидово.

Итак, определяющие соотношения (3.2.71) для алгебр Ли  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}_\mathbb{C}$  в базисе Картана–Вейля  $\{H_k, E_\alpha\}$  переписываются в виде

$$\begin{aligned} [H_i, H_k] &= 0, \quad [H_k, E_\alpha] = i \alpha_k E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{(\alpha, \beta)} E_{\alpha+\beta}, \quad \text{если } (\alpha + \beta) \text{ — корень,} \\ [E_\alpha, E_\beta] &= 0, \quad \text{если } (\alpha + \beta) \text{ — не корень и } \alpha + \beta \neq 0, \end{aligned} \quad (5.4.20) \quad \text{defCB}$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = i \alpha^k H_k. \quad (5.4.21) \quad \text{defCB1}$$

**Замечание.** Иногда для алгебры  $\mathcal{A}$  удобно вместо образующих  $H_k$  и  $T_a$  выбирать образующие  $\tilde{H}_k = i H_k$  и  $\tilde{T}_a = i T_a$  и считать, что коэффициенты в алгебре — чисто мнимые числа (см. Замечание в Примере 5 из раздела 3.2.3). Тогда в (5.4.2) структурные константы  $h_{j,ab}$  домножаются на  $i$  и тоже становятся чисто мнимыми:

$$h_{j,ab}^* = -h_{j,ab}, \quad (5.4.22) \quad \text{li3b}$$

а положительно определенная метрика (5.4.4) и (5.4.5) задается формулами

$$g_{kj} = +Tr(ad(\tilde{H}_k) \cdot ad(\tilde{H}_j)) , \quad X_{ab} = +Tr(ad(\tilde{T}_a) \cdot ad(\tilde{T}_b)) .$$

В этом случае образующие  $\tilde{H}_j$  и  $\tilde{T}_a$  допускают представление в виде эрмитовых операторов  $\tilde{H}_j^\dagger = \tilde{H}_j$  и  $\tilde{T}_a^\dagger = \tilde{T}_a$ . Матрицы  $h_j$  со свойствами (5.4.6) и (5.4.22) согласно Утверждению 5.4.2 имеют только вещественные собственные значения  $\alpha^* = \alpha$  и это согласуется с тем, что  $h_j$  реализуют представления элементов  $\tilde{H}_j$ . Тогда из  $v \cdot h_j = \alpha_j v$  и (5.4.22) следует равенство  $v^* \cdot h_j = -\alpha_j v^*$ , то есть  $v^{(-\alpha)} = v^{(\alpha)*}$  и в результате для образующих Картана-Вейля мы имеем соотношения

$$\tilde{E}_\alpha^\dagger = \tilde{E}_{-\alpha} , \quad \tilde{H}_j^\dagger = \tilde{H}_j , \quad (5.4.23) \quad \text{li3au}$$

которые оказываются полезными при изучении свойств базиса Картана-Вейля.

**Пример.** В качестве примера базиса Картана-Вейля рассмотрим структурные соотношения (3.2.116) для алгебры Ли  $sl(N, \mathbb{C})$ , которая является комплексификацией компактной алгебры Ли  $su(N)$ . Сравнивая соотношения (3.2.116) и соотношения (5.4.20), можно заключить, что элементы  $H_j \in sl(N, \mathbb{C})$  образуют подалгебру Картана в  $sl(N, \mathbb{C})$ , а элементы  $E_{ij}$  и  $F_{ij}$  соответствуют корневым образующим  $E_\alpha$  и  $E_{-\alpha}$ .

## 5.5 Заключительные замечания.

В заключение этой главы мы сформулируем без доказательства важное утверждение, которое позволяет сводить изучение структуры комплексных полупростых алгебр Ли к изучению соответствующих компактных полупростых алгебр Ли.

**Утверждение 5.5.1** *Всякая комплексная полупростая алгебра Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  имеет компактную вещественную форму  $\mathcal{A}$ , причем единственную. Под единственностью здесь понимается то, что любые две компактные вещественные формы в  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  всегда изоморфны и переводятся друг в друга с помощью некоторого внутреннего автоморфизма в  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ .*

Как мы обсудили в разделе 5.4.2, для компактной вещественной алгебры  $\mathcal{A}$  (точнее для ее комплексификации) всегда можно построить базис Картана-Вейля. Поэтому согласно Утверждению 5.5.1 базис Картана-Вейля может быть построен и для любой полупростой комплексной алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  (в качестве такового может использоваться базис Картана-Вейля, построенный для ее компактной вещественной формы). Пользуясь Утверждением 5.5.1, можно также переформулировать вторую часть Замечания 1 из раздела 5.2 как более сильное утверждение о том, что любая комплексная полупростая алгебра Ли разлагается в прямую сумму своих инвариантных простых подалгебр Ли. Кроме того, учитывая Утверждение 5.5.1, можно обобщить Утверждение 5.3.1 следующим образом: любое дифференцирование полупростой комплексной алгебры Ли является внутренним.

Приведем еще один полезный с точки зрения физических приложений факт, который заключается в том, что *компактная вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  всегда оказывается максимальной компактной подалгеброй в  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ .*

Мы закончим обсуждение компактных алгебр Ли кратким описанием следующего важного результата. Существует полная классификация простых компактных конечномерных алгебр Ли. А именно, имеются четыре бесконечные серии таких алгебр – унитарные алгебры  $su(r+1)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), ортогональные алгебры  $so(2r+1)$  ( $r = 2, 3, \dots$ ), симплектические алгебры  $usp(2r)$  ( $r = 3, 4, \dots$ ) и ортогональные алгебры  $so(2r)$  ( $r = 4, 5, \dots$ ). Здесь число  $r$  совпадает с рангом соответствующей простой алгебры Ли, и в представленном списке мы учли так называемые ”случайные” изоморфизмы:  $so(3) = usp(2) = su(2)$ ,  $usp(4) = so(5)$ ,  $so(4) = su(2) + su(2)$  и  $so(6) = su(4)$ , о которых шла речь в разделе **3.2.12**. Кроме этих четырех серий имеется еще пять исключительных алгебр Ли, которые соответствуют исключительным группам  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  (индексы 2, 4, 6, 7, 8 – ранги соответствующих алгебр Ли). Исключительные алгебры Ли довольно сложно определить как матричные алгебры Ли над полем вещественных или комплексных чисел. Общепринятый способ описания таких алгебр Ли основан на использовании корневых систем и базиса Картана-Вейля.

## 6 Однородные пространства. Геометрия на однородных пространствах.

### 6.1 Однородные пространства.

В разделе **2.3.4** мы определили действие (2.3.8), (2.3.9) группы  $G$  на множестве (пространстве)  $M$ .

**Определение 6.1.1** Действие группы  $G$  на множестве  $M$  называется транзитивным, если для любых двух элементов  $\xi, \eta \in M$  всегда существует  $g \in G$  такой, что  $F(g, \xi) = \eta$ . Множество  $M$  называется однородным пространством по отношению к группе  $G$  (или более кратко – однородным пространством группы  $G$ ), если  $G$  транзитивно действует в  $M$ .

Группа  $GL(n, \mathbb{K})$  транзитивно действует на пространстве векторов  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , из которого удален нулевой вектор. Группы  $SO(n)$  и  $O(n)$  транзитивно действуют на сферах  $S^{n-1}$  с ненулевым радиусом.

Пусть группа  $G$  действует в пространстве  $M$  не транзитивно, то есть существуют элементы  $\xi, \eta \in M$  такие, что  $\eta \neq F(g, \xi)$  для всех  $g \in G$ . Будем говорить, что элемент  $\xi' \in M$  эквивалентен  $\xi \in M$ , если  $\xi' = F(g, \xi)$  для некоторого  $g \in G$ , причем если  $\xi$  эквивалентен  $\xi'$ , а  $\xi'$  эквивалентен  $\xi''$ , то, согласно второму соотношению из (2.3.9), элемент  $\xi$  эквивалентен  $\xi''$ . Легко понять, что классы эквивалентных элементов в  $M$  (смежные классы) либо не пересекаются, либо совпадают. Каждый смежный класс по определению представляет собой однородное подпространство в  $M$  по отношению к группе  $G$  и иногда называется орбитой группы  $G$  в  $M$ .

Группа  $GL(n, \mathbb{K})$  действует не транзитивно на всем пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ , она разбивает  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  на две орбиты: одна орбита это  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K}) \setminus \vec{0}$ , а вторая орбита состоит из одного нулевого вектора  $\vec{0}$ . Группы  $SO(n)$  и  $O(n)$  действуют на  $\mathbb{R}^n$  не транзитивно, они



расслаивают  $\mathbb{R}^n$  на орбиты, каждая из которых представляет собой  $(n - 1)$ -мерную сферу некоторого радиуса  $r \geq 0$ .

**Определение 6.1.2** Пусть группа  $G$  действует в пространстве  $M$ . Множество смежных классов в  $M$  по отношению к действию группы  $G$  (множество орбит группы  $G$  в  $M$ ) будем называть фактор-пространством  $M/G$ .

### Примеры.

1.) Рассмотрим в качестве множества  $M$  саму группу  $G$ . Очевидно, что группа  $G$  действует сама на себя левыми и правыми сдвигами (2.3.28) транзитивно. Поэтому множество  $G$  – однородное пространство группы  $G$ , которое называется главным.

2.) Пусть  $H$  – подгруппа в группе  $G$ . Определим, по аналогии с (2.3.28), левое и правое действие  $H$  на множестве  $G$  с помощью левого и правого умножения

$$g_1 \rightarrow g_2 = F(h, g_1) = h \cdot g_1, \quad g_1 \rightarrow g_2 = \tilde{F}(h, g_1) = g_1 \cdot h^{-1}, \\ \forall g_1, g_2 \in G, \quad \forall h \in H.$$

По отношению к этим действиям множество  $G$  разбивается соответственно на правые или левые смежные классы (смотри Определение 2.1.8 и Утверждение 2.1.1). Каждый из смежных классов представляет собой подпространство в  $G$ , которое по построению является однородным пространством группы  $H$ . Множество всех левых смежных классов образует фактор-пространство  $G/H$ , а множество всех правых смежных классов образует фактор-пространство  $H \backslash G$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только случай фактор-пространств  $G/H$  (случай фактор-пространств  $H \backslash G$  рассматривается аналогично).

3.) Группа  $G$  транзитивно действует слева на свое фактор-пространство  $G/H$ . Действительно, любой левый смежный класс  $g_1 H$  переводится с помощью умножения слева на элемент  $g_2 \cdot g_1^{-1} \in G$  в любой другой левый смежный класс  $g_2 H$ . Поэтому любое фактор-пространство  $G/H$  представляет собой однородное пространство группы  $G$ . Ниже мы покажем, что справедливо и обратное утверждение, то есть всякое однородное пространство группы  $G$  может быть представлено как фактор-пространство  $G/H$ .

- **Задача 165.\*** Выберем в группе  $SO(3)$  подгруппу, изоморфную  $SO(2)$ , как группу матриц вида

$$O_g = \left( \begin{array}{cc|c} g & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad g \in SO(2). \quad (6.1.1) \quad \text{so22}$$

Показать, что имеется взаимнооднозначное соответствие между точками фактор-пространства  $SO(3)$  по этой подгруппе и точками двумерной сферы:

$$SO(3)/SO(2) = S^2.$$

Вернемся снова к рассмотрению группы  $G$ , которая действует на пространстве  $M$ . Стационарная подгруппа  $H_a \subset G$  элемента  $a \in M$  (или подгруппа стабильности элемента  $a$ ) состоит из всех элементов  $h \in G$ , оставляющих  $a$  на месте:

$$F(h, a) = a.$$

То, что множество таких элементов  $h$  — подгруппа, проверяется с помощью (2.3.9); например, если  $h_1, h_2 \in H_a$ , то

$$F(h_1 \cdot h_2, a) = F(h_1, F(h_2, a)) = F(h_1, a) = a,$$

т. е.  $h_1 \cdot h_2 \in H_a$ .

• **Задача 166.** Проверить остальные аксиомы группы для множества  $H_a$ .

**Утверждение 6.1.1** Пусть  $M$  — однородное пространство группы  $G$ . Стационарные подгруппы  $H_a \subset G$  всех точек  $a \in M$  изоморфны.

**Доказательство.** Пусть  $H_a$  и  $H_b$  — соответственно стационарные подгруппы точек  $a$  и  $b$  пространства  $M$ . Возьмем  $g \in G$  такой, что  $b = F(g, a)$ . Рассмотрим элемент

$$h' = g \cdot h \cdot g^{-1}, \quad (6.1.2) \quad 3.11b^*$$

где  $h$  — любой элемент из  $H_a$ . Проверим сначала, что  $h' \in H_b$ , т. е.  $F(h', b) = b$ , если  $h \in H_a$ . Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} F(h', b) &= F(g \cdot h \cdot g^{-1}, F(g, a)) = F(g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot g, a) = \\ &= F(g \cdot h, a) = F(g, F(h, a)) = F(g, a) = b. \end{aligned}$$

Итак, (6.1.2) задает отображение из  $H_a$  в  $H_b$ . Это отображение взаимнооднозначно, так как оно обратимо:  $h = g^{-1} \cdot h' \cdot g$ . Наконец, отображение (6.1.2) — гомоморфизм (согласуется с групповыми операциями в  $H_a$  и  $H_b$ ). Например, если  $h_1, h_2 \in H_a$ , то

$$g \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot g^{-1} = g \cdot h_1 \cdot g^{-1} \cdot g \cdot h_2 \cdot g^{-1} = h'_1 \cdot h'_2,$$

где  $h'_1, h'_2 \in H_b$ . Следовательно отображение (6.1.2) — изоморфизм  $H_a = H_b$ . ■

• **Задача 167.\*** Зададим действие группы  $SO(3)$  на двумерной сфере  $S^2$  следующим образом. Пусть  $O$  — матрица из  $SO(3)$ ,  $\vec{a}$  — (единичный) вектор на сфере  $S^2$  с компонентами  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Определим  $F(O, \vec{a})$  как вектор  $\vec{b}$  с компонентами  $b_i = O_{ij}a_j$ . Показать, что такое действие элемента  $O \in SO(3)$  переводит сферу в сферу. Показать, что  $SO(3)$  действует транзитивно на  $S^2$ , а стационарная подгруппа любой точки сферы  $S^2$  изоморфна  $SO(2)$ .

**Утверждение 6.1.2** Пусть группа  $G$  транзитивно действует в пространстве  $M$ , то есть  $M$  — однородное пространство группы  $G$ . Тогда имеется взаимнооднозначное соответствие

$$M = G/H, \quad (6.1.3) \quad 3.11g^{**}$$

где  $H \subset G$  — стационарная подгруппа любой точки пространства  $M$ .

**Доказательство.** Пусть  $a$  — некоторая фиксированная точка в  $M$ , и  $H$  — ее стационарная подгруппа. Группа  $G$  действует транзитивно в  $M$ , поэтому для любой точки  $b \in M$  существует элемент  $g_b \in G$  такой, что

$$b = F(g_b, a) . \quad (6.1.4) \quad 3.11g^*$$

Соотношение (6.1.4) при фиксированном  $a$  задает отображение из  $G$  в  $M$ . Легко понять, что (6.1.4) отображает в точку  $b$  не один элемент  $g_b \in G$ , а все элементы  $g = g_b \cdot h$ , где  $h \in H$ , то есть весь смежный класс  $g_b H \in G/H$ , так как мы имеем

$$F(g, a) = F(g_b \cdot h, a) = F(g_b, F(h, a)) = b .$$

Таким образом, соотношение (6.1.4) определяет отображение из  $G/H$  в  $M$ . Проверим, что это отображение взаимнооднозначно, то есть двум разным точкам  $g_1 H$  и  $g_2 H$  из  $G/H$  не может соответствовать одна и та же точка  $b$  из  $M$ . Докажем это от противного. Пусть  $F(g_1, a) = b = F(g_2, a)$ , тогда мы имеем

$$a = F(g_1^{-1}, b) = F(g_1^{-1}, F(g_2, a)) = F(g_1^{-1} \cdot g_2, a) ,$$

то есть  $g_1^{-1} \cdot g_2 \in H$  или  $g_2 \in g_1 H$  и смежные классы  $g_1 H$  и  $g_2 H$  совпадают, что противоречит нашему изначальному предположению  $g_1 H \neq g_2 H$ . ■

**Следствие.** Действие  $G$  на  $M$  называется свободным, если стационарная группа  $H \subset G$  любой точки  $M$  состоит только из единичного элемента группы  $G$ :  $H = \{e\}$ . Если  $G$  действует на  $M$  свободно и транзитивно, то  $M = G$ , а если свободно и нетранзитивно, то  $M$  расслаивается на орбиты, каждая из которых совпадает с  $G$ .

- **Задача 168.** Пусть  $G$  — группа Ли,  $H$  — ее подгруппа Ли, а  $M = G/H$  — соответствующее однородное пространство. Доказать, что

$$\dim(M) = \dim(G) - \dim(H) .$$

## 6.2 Примеры однородных пространств.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие соответствие (6.1.3), сформулированное в Утверждении 6.1.2.

1.) Группа вещественных чисел по отношению к сложению (группа трансляций в  $\mathbb{R}$ ) действует транзитивно на  $S^1$ :

$$\exp(i2\pi\phi) \rightarrow \exp(i2\pi(\phi + x)) ,$$

где  $x \in \mathbb{R}$ , а  $\phi \in [0, 2\pi)$  — параметр на  $S^1$ . Стационарная подгруппа любой точки на  $S^1$  образована целыми числами  $x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , поэтому согласно Утверждению 6.1.2 мы имеем  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Очевидное обобщение этого примера — следующее. Группа трансляций в  $\mathbb{R}^n$  транзитивно действует на  $n$ -мерном торе  $T_n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$ :

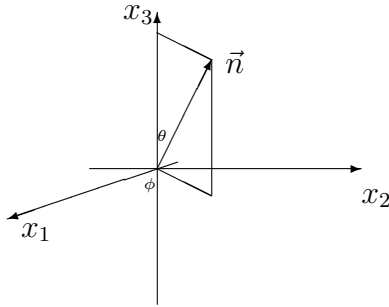
$$(e^{i2\pi\phi_1}, \dots, e^{i2\pi\phi_n}) \rightarrow (e^{i2\pi(\phi_1+x_1)}, \dots, e^{i2\pi(\phi_n+x_n)}) ,$$

где  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , а  $\phi_i$  – параметры на  $T_n$ . Стационарная подгруппа любой точки на  $T_n$  изоморфна  $\mathbf{Z}^n$ , поэтому  $T_n = \mathbb{R}^n / \mathbf{Z}^n$ .

2.) Еще раз обсудим соответствие  $SO(3)/SO(2) = S^2$ . Любой точке единичной сферы  $S^2$  сопоставляется единичный вектор

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta), \quad (6.2.1) \quad \text{tro33}$$

где  $\phi \in [0, 2\pi)$  и  $\theta \in [0, \pi]$  – сферические углы. Единичный вектор  $\vec{n}$  (6.2.1) получается из вектора  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  с помощью двух двумерных поворотов – поворота вокруг оси  $x_2$  на угол  $\theta$  (здесь поворот против часовой стрелки в плоскости  $(x_1, x_3)$ ) осуществляется от оси  $x_3$  к оси  $x_1$ ) и поворота вокруг оси  $x_3$  на угол  $\phi$  в плоскости  $(x_1, x_2)$ , смотри рисунок:



Матрицы соответствующих поворотов имеют вид (сравните с (2.1.15))

$$T_2(\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \in SO(3), \quad T_3(\phi) = \begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3), \quad (6.2.2) \quad \text{t123a}$$

где мы использовали краткие обозначения  $c_\theta := \cos \theta$  и  $s_\theta := \sin \theta$ . В результате получаем

$$T_3(\phi) \cdot T_2(\theta) = \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta & c_\phi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}, \quad (6.2.3) \quad \text{t123b}$$

и

$$T_3(\theta) \cdot T_2(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\phi s_\theta \\ s_\phi s_\theta \\ c_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \quad (6.2.4) \quad \text{t123e}$$

Соотношение (6.2.4) демонстрирует транзитивность действия  $SO(3)$  на  $S^2$ , а именно, фиксированная точка  $\vec{e}_3 \in S^2$  с помощью действий (6.2.4) переводится в любые две точки  $\vec{n}, \vec{n}' \in S^2$ , поэтому всегда существует элемент  $SO(3)$ , который переводит  $\vec{n}$  в  $\vec{n}'$ . Стационарная подгруппа  $H_{\vec{e}_3}$  точки  $\vec{e}_3 \in S^2$  образована матрицами  $T_3(\psi)$  поворотов вокруг оси  $\vec{e}_3$  (в плоскости  $(x_1, x_2)$ ), где  $\psi \in [-\pi, \pi)$ , и следовательно  $H_{\vec{e}_3} = SO(2)$ . Поэтому, согласно Утверждению 6.1.2, имеем  $SO(3)/SO(2) = S^2$ .

Матрица (6.2.3) однозначно связана с фиксированной точкой  $\vec{n} \in S^2$  и нумерует смежные классы в  $SO(3)/SO(2)$ ; она имеет тот же вид, что и матрица (10.11.86) из решения задач 165, 167. Так как смежные классы из  $SO(3)/SO(2)$  покрывают всю группу  $SO(3)$ , то мы приходим к заключению, что любой элемент  $O \in SO(3)$  представим в виде (параметризация Эйлера)

$$O = T_3(\phi) \cdot T_2(\theta) \cdot T_3(\psi) = \begin{pmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi, & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi, & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi, & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi, & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi, & s_\theta s_\psi, & c_\theta \end{pmatrix}, \quad (6.2.5) \quad \text{euler3}$$

где переменные  $(\phi, \theta, \psi)$  называются углами Эйлера. Углы Эйлера выражаются через элементы матрицы  $O \in SO(3)$  следующим образом

$$\cos \theta = O_{33}, \quad \cos \phi = \frac{O_{13}}{\sqrt{1 - O_{33}^2}}, \quad \cos \psi = \frac{O_{31}}{\sqrt{1 - O_{33}^2}},$$

где мы учли, что  $\sin \theta \geq 0$  при  $\theta \in [0, \pi]$ . В случае  $O_{33} = 1$  (это соответствует выбору  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ ) нарушается однозначность параметризации (6.2.5) для  $O \in SO(3)$ . Например, множество точек прямой  $\theta = 0, \phi + \psi = c$  в пространстве параметров  $(\phi, \theta, \psi)$  соответствует согласно (6.2.5) одному элементу  $O = T_3(c) \in SO(3)$ .

**Замечание.** Параметризация (6.2.5) определяется выбором  $\vec{e}_3$  в качестве вектора, который фиксирует стационарную подгруппу  $H_{\vec{e}_3}$ , образованную элементами  $T_3(\psi)$ , а также параметризацией пространства  $SO(3)/SO(2)$ , то есть представлением через сферические углы любой точки  $\vec{n} \in S^2$  (6.2.1). Иная параметризация получится, например, если записать произвольный вектор  $\vec{n} \in S^2$  (6.2.1) в виде  $(s_\phi s_\theta, -c_\phi s_\theta, c_\theta)$ , а подгруппу стабильности снова выбрать как  $H_{\vec{e}_3}$ . Тогда представление для элементов  $SO(3)$  запишется в виде

$$O = T_3(\phi) \cdot T_1(\theta) \cdot T_3(\psi). \quad (6.2.6) \quad \text{euler4}$$

Другие параметризации Эйлера группы  $SO(3)$ , отличные от (6.2.5) и (6.2.6), можно получать заменами базиса в  $\mathbb{R}^3$ . Все разновидности таких параметризаций эквивалентны, а выбор  $H_{\vec{e}_3}$  в качестве стационарной подгруппы в  $SO(3)$ , как мы увидим ниже, удобен с технической точки зрения.

**3.)** Сфера  $S^{n-1}$  задается в  $\mathbb{R}^n$  с помощью соотношений (3.1.6). Преобразования (2.3.13), где  $||T_{ij}|| \in SO(n)$ , определяют действие группы  $SO(n)$  на  $S^{n-1}$ . Это действие транзитивно, так как фиксированная точка  $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$  переводится в любую другую точку (единичный вектор)  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$  преобразованием (2.3.13) с ортогональной матрицей  $T$ , у которой  $T_{kn} = x_k$ , то есть последний столбец дается координатами вектора  $\vec{x} \in S^{n-1}$ . Таким образом, сфера  $S^{n-1}$  – однородное пространство группы  $SO(n)$ . Стационарная подгруппа любой точки  $S^{n-1}$  изоморфна  $SO(n-1) \subset SO(n)$ .

- **Задача 169.** Доказать, что элементы  $SO(n)$ , которые стабилизируют точку  $\vec{e}_n \in S^{n-1}$  имеют вид

$$\left( \begin{array}{c|c} \Omega & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right), \quad \Omega \in SO(n-1), \quad (6.2.7) \quad \text{dsit00}$$

то есть образуют подгруппу  $SO(n-1) \subset SO(n)$ .

Поэтому, согласно Утверждению 6.1.2, мы имеем

$$SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}. \quad (6.2.8) \quad \text{dsit000}$$

- **Задача 170.** Показать, что  $O(n)/O(n-1) = S^{n-1}$ .

BSF

ESF

4.) Псевдоортогональная группа  $SO(p, q)$ , где  $p + q = n$  и  $p \geq 1, q \geq 1$ , действует на  $(n - 1)$ -мерных поверхностях  $S_{p,q}^\pm$ , вложенных в  $\mathbb{R}^{p,q}$ ,

$$\begin{aligned} S_{p,q}^+ : \quad & y_k \eta_{kj} y_j = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2 = +1, \\ S_{p,q}^- : \quad & x_k \eta_{kj} x_j = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 = -1, \end{aligned} \quad (6.2.9) \quad \text{dsit01}$$

где  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$  – координаты в  $\mathbb{R}^{p,q}$ , а диагональная метрика  $\eta = I_{p,q}$  определена в (2.2.54). Отметим, что  $S_{p,q}^+ = S_{q,p}^-$ . Условие псевдоортогональности (2.2.64) для матриц  $O \in SO(p, q)$  записывается в виде

$$O_{ki} \eta_{kj} O_{jm} = \eta_{im}, \quad (6.2.10) \quad \text{dsit02}$$

и в частности мы имеем  $O_{k1} \eta_{kj} O_{j1} = 1$  и  $O_{kn} \eta_{kj} O_{jn} = -1$ . Поэтому вектор-столбец  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0) \in S_{p,q}^+$  переводится матрицей  $O \in SO(p, q)$ , у которой первый столбец равен  $O_{k1} = y_k$ , в произвольную точку  $(y_1, \dots, y_n) \in S_{p,q}^+$ , а вектор-столбец  $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1) \in S_{p,q}^-$  переводится матрицей  $O \in SO(p, q)$ , у которой последний столбец равен  $O_{kn} = x_k$ , в произвольную точку  $(x_1, \dots, x_n) \in S_{p,q}^-$ . Отсюда следует транзитивность действия  $SO(p, q)$  на  $S_{p,q}^\pm$ . Подгруппа стабильности  $H_{\vec{e}_1} \subset SO(p, q)$  состоит из матриц

$$\left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad \Omega \in SO(p-1, q),$$

а подгруппа стабильности  $H_{\vec{e}_n} \subset SO(p, q)$  состоит из матриц

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \Omega & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \Omega \in SO(p, q-1),$$

то есть

$$H_{\vec{e}_1} = SO(p-1, q), \quad H_{\vec{e}_n} = SO(p, q-1). \quad (6.2.11) \quad \text{dsit05}$$

Учитывая (6.2.11), а также то, что  $\vec{e}_1 \in S_{p,q}^+$  и  $\vec{e}_n \in S_{p,q}^-$ , и пользуясь Утверждением 6.1.2, мы имеем

$$SO(p, q)/SO(p-1, q) = S_{p,q}^+, \quad SO(p, q)/SO(p, q-1) = S_{p,q}^-, \quad (6.2.12) \quad \text{dsit03}$$

что согласуется с  $S_{p,q}^+ = S_{q,p}^-$ . В частности, вспоминая определения пространств де Ситтера и анти де Ситтера (3.1.7), (3.1.8) и сравнивая их с поверхностями (6.2.9), мы получаем

$$\begin{aligned} SO(n-1, 2)/SO(n-1, 1) &= S_{n-1,2}^- = AdS^n, \\ SO(n, 1)/SO(n-1, 1) &= S_{n,1}^+ = dS^n, \\ SO(n-1, 2)/SO(n-2, 2) &= S_{n-1,2}^+, \\ SO(n, 1)/SO(n) &= S_{n,1}^-. \end{aligned} \quad (6.2.13) \quad \text{dsit07}$$

Отметим, что стационарная подгруппа у пространств  $AdS^n$  и  $dS^n$  одинакова и совпадает с  $SO(n-1, 1)$  — группой Лоренца  $n$ -мерного пространства. Этот факт говорит

о том, что локально пространства  $AdS^n$  и  $dS^n$  устроены как  $n$ -мерные пространства Минковского  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ , то есть сигнатура метрики у этих пространств равна  $(n-1, 1)$ . Это мотивирует выбор знака у  $M^2$  в определениях (3.1.7) и (3.1.8).

Отметим, что пространство  $S_{n,1}^- = SO(n, 1)/SO(n)$  (которое является  $(n-1)$ -мерным аналогом двуполостного гиперboloида) локально устроено как  $n$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ . Это пространство несвязно, так как у группы  $SO(n, 1)$  имеются две несвязные друг с другом компоненты  $SO^\uparrow(n, 1)$  и  $SO^\downarrow(n, 1)$ , соответствующие двум разным полостям  $(n-1)$ -мерного двуполостного гиперboloида. Пространство  $S_{n-1,2}^+$  задается уравнением (3.1.9) и локально устроено как  $\mathbb{R}^{n-2,2}$ .

**5.)** Нечетномерную сферу  $S^{2n-1}$  можно задать в комплексном пространстве  $\mathbb{C}^n$  с помощью уравнений

$$z_1^* z_1 + \dots + z_n^* z_n = 1, \quad (6.2.14) \quad \text{dsit04}$$

где  $z_i$  – координаты в  $\mathbb{C}^n$ . Группа  $U(n)$  (как впрочем и  $SU(n)$ ) транзитивно действует на сфере  $S^{2n-1}$  (6.2.14) с помощью преобразований  $z_k \rightarrow z'_k = U_{km} z_m$ , где  $U = ||U_{km}|| \in U(n)$  (или  $U \in SU(n)$ ). Стационарная подгруппа точки  $(z_1, \dots, z_n) = (0, \dots, 0, 1) \in S^{2n-1}$  изоморфна  $U(n-1)$  (соответственно  $SU(n-1)$ ), где вложение  $U(n-1)$  в  $U(n)$  (или  $SU(n-1)$  в  $SU(n)$ ) осуществляется аналогично вложению (6.2.7) группы  $SO(n-1)$  в  $SO(n)$ . Поэтому, согласно Утверждению **6.1.2**, мы получаем

$$U(n)/U(n-1) = SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1}. \quad (6.2.15) \quad \text{dsit08}$$

В частности для  $n = 2$  мы имеем  $U(2)/U(1) = SU(2) = S^3$ , если вложение  $U(1)$  в  $U(2)$  осуществляется по правилу<sup>27</sup>, аналогичному (6.2.7).

**6.)** Вещественное проективное пространство  $\mathbb{RP}^n$  – это множество всех прямых в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через начало координат (смотри пример **3** в разделе **3.1.1**). С каждой такой прямой можно связать единичный направляющий вектор  $\vec{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  причем двум векторам  $\pm \vec{n}$  соответствует одна и та же прямая (точка в  $\mathbb{RP}^n$ ). Поэтому, как мы уже отмечали в разделе **3.1.1**, пространство  $\mathbb{RP}^n$  – это сфера  $S^n$  с отождествленными диаметрально противоположными точками. Отсюда следует, что на множестве  $\mathbb{RP}^n$  (как и на сфере  $S^n$ ) транзитивно действует та же группа  $O(n+1)$ . Стационарная подгруппа в  $O(n+1)$ , которая не меняет направляющий вектор  $(0, \dots, 0, 1)$  или переводит его в эквивалентный  $(0, \dots, 0, -1)$ , состоит из матриц

$$\left( \begin{array}{c|c} \Omega & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & \pm 1 \end{array} \right), \quad \Omega \in O(n), \quad \pm 1 \in \mathbf{Z}_2 = O(1).$$

Поэтому согласно Утверждению **6.1.2** мы получаем

$$\mathbb{RP}^n = O(n+1)/(O(n) \times O(1)).$$

<sup>27</sup>Способ вложения здесь оказывается важным, так как при другом вложении  $U(1)$  в  $U(2)$ , а именно,

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \in U(1) \subset U(2), \quad \alpha \in [-\pi, \pi),$$

выполняется другое соотношение  $U(2)/U(1) = SU(2)/Z_2$ .

- **Задача 171.** Доказать, что  $U(1)/\mathbf{Z}_n = U(1)$  для  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В частности получить, что  $\mathbb{RP}^1 = S^1$ .

7.) Пример, рассмотренный в пункте 6.), обобщается следующим образом. Рассмотрим пространство  $G_{n,k}$  всех  $k$ -мерных гиперплоскостей  $\mathcal{V}_k$  в  $\mathbb{R}^n$  ( $n > k$ ), проходящих через начало координат в  $\mathbb{R}^n$ . Каждую гиперплоскость  $\mathcal{V}_k \subset \mathbb{R}^n$  можно задать как векторное пространство, натянутое на  $k$  взаимно ортогональных единичных векторов  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Иначе говоря, каждой системе  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ , состоящей из  $k$  ортогональных друг другу и единичных векторов в  $\mathbb{R}^n$ , соответствует некоторая точка в  $G_{n,k}$ . Группа  $O(n)$  действует на  $G_{n,k}$  с помощью преобразований

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k) \rightarrow (\vec{x}_1', \dots, \vec{x}_k') = (O \cdot \vec{x}_1, \dots, O \cdot \vec{x}_k), \quad \forall O \in O(n). \quad (6.2.16) \quad \text{dsit06}$$

Действие (6.2.16) транзитивно, так как любая точка  $\mathcal{V}_k \in G_{n,k}$ , соответствующая системе  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ , может быть получена преобразованием

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k) = (O \cdot \vec{e}_1, \dots, O \cdot \vec{e}_k),$$

фиксированной точки  $\mathcal{E}_k \in G_{n,k}$ , соответствующей системе  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ . Здесь  $\vec{e}_m = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, 1, 0, \dots, 0)$  — базисные вектора в  $\mathbb{R}^n$ , а матрица  $\|O_{ij}\| \in O(n)$  такова, что  $O_{im} = (\vec{x}_m)_i$ , то есть первые ее  $k$  столбцов даются координатами векторов  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ . Матрицы из  $O(n)$ , оставляющие точку  $\mathcal{E}_k \in G_{n,k}$  стабильной при преобразованиях (6.2.16), имеют вид

$$\left( \begin{array}{c|c} \Omega_1 & 0_{k,n-k} \\ \hline 0_{n-k,k} & \Omega_2 \end{array} \right), \quad \Omega_1 \in O(k), \quad \Omega_2 \in O(n-k),$$

где  $0_{k,m}$  — матрицы  $k \times m$ , состоящие из нулей. Поэтому стационарная подгруппа точки  $\mathcal{E}_k \in G_{n,k}$  изоморфна  $O(k) \times O(n-k)$  и согласно Утверждению 6.1.2 мы получаем

$$G_{n,k} = O(n)/(O(k) \times O(n-k)).$$

Пространство  $G_{n,k}$  называется многообразием Грассмана (или грассманианом). Очевидно, что  $G_{n,k} = G_{n,n-k}$  и  $G_{n+1,1} = \mathbb{RP}^n$ .

- **Задача 172.** Вычислить размерность многообразия Грассмана  $G_{n,k}$ .

8.) Комплексное проективное пространство  $\mathbb{CP}^n$  задается как множество ненулевых комплексных векторов  $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , в котором произведено отождествление  $\vec{z} \sim \lambda \vec{z}$ , для всех комплексных  $\lambda \neq 0$ . Иначе говоря,  $\mathbb{CP}^n$  — это множество одномерных комплексных "прямых" в  $\mathbb{C}^{n+1}$ , проходящих через начало координат. Будем считать, что вектора  $\vec{z}$  нормированы соотношениями  $z_i^* z_i = 1$ , при этом вектора  $\vec{z}$  и  $e^{i\phi} \vec{z}$  соответствуют одной и той же точке  $\mathbb{CP}^n$ . На пространстве таких векторов

BSF

ESF



транзитивно действует группа  $U(n+1)$ . Выберем точку  $\mathbb{CP}^n$ , которая характеризуется вектором  $\vec{z} = (0, \dots, 0, 1)$ . Стационарная подгруппа этой точки образована матрицами вида

$$\left( \begin{array}{c|c} U & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & e^{i\phi} \end{array} \right), \quad U \in U(n), \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Поэтому согласно Утверждению **6.1.2** мы получаем

$$\mathbb{CP}^n = U(n+1)/(U(n) \times U(1)).$$

Пользуясь (6.2.15), это соотношение можно переписать в виде

$$\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/U(1),$$

и в частном случае  $n = 1$  мы имеем знаменитое расслоение Хопфа:

$$S^2 = S^3/S^1 = SU(2)/U(1). \quad (6.2.17) \quad \text{hopf}$$

**9.)** Можно обобщить вещественное многообразие Грассмана  $G_{n,k}$  из Примера **7.)** и **BSF** определить комплексное многообразие Грассмана  $G_{n,k}^{\mathbb{C}}$  как множество комплексных  $k$ -мерных гиперплоскостей в  $\mathbb{C}^n$ , проходящих через начало координат. В результате, так же как и в Примере **8.)**, мы определяем  $G_{n,k}^{\mathbb{C}}$  как однородное пространство

$$G_{n,k}^{\mathbb{C}} = G_{n,n-k}^{\mathbb{C}} = U(n)/(U(k) \times U(n-k)).$$

В некоторых физических задачах возникают также однородные пространства симплектических групп

$$\mathbb{HP}^{n-1} = USp(2n)/(USp(2n-2) \times USp(2)), \quad G_{n,k}^{\mathbb{H}} = USp(2n)/(USp(2n-2k) \times USp(2k)),$$

которые называются, соответственно,  $\mathbb{HP}^{n-1}$  — кватернионным проективным пространством и  $G_{n,k}^{\mathbb{H}}$  — кватернионным грассмановым пространством. Поле кватернионов определялось в примере **5. Раздела 3.2.12** (см. также Задачу 108).

**10.)** Рассмотрим пространство  $\mathbb{CP}^{2n+1}$ , которое согласно примеру **8.)** задается как множество векторов  $\vec{z} = (z_1, \dots, z_{2n+2}) \in \mathbb{C}^{2n+2}$  с отождествлением  $\vec{z} \sim \lambda \vec{z}$ , для всех  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ , или как множество векторов  $\vec{z} \in \mathbb{C}^{2n+2}$ , задающих сферу  $S^{4n+3}$ :  $z_k^* z_k = 1$ , с отождествлением  $\vec{z} \sim e^{i\phi} \vec{z}$  ( $\forall \phi \in \mathbb{R}$ ). Заметим, что пару комплексных чисел  $z_1 = x_1 + i y_1$  и  $z_2 = x_2 + i y_2$  всегда можно реализовать как кватернион (3.2.190):

$$q(z_1, z_2) = (x_1 + i \sigma_1 y_1) + (x_2 + i \sigma_1 y_2) i \sigma_3 = x_1 + i \sigma_1 y_1 + i \sigma_2 y_2 + i \sigma_3 x_2, \quad (6.2.18) \quad \text{quat02}$$

а умножение чисел  $z_1$  и  $z_2$  на одно и то же комплексное число  $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$  можно записать как умножение кватерниона (6.2.18) слева на специальный кватернион  $\Lambda = (\lambda_1 + i \sigma_1 \lambda_2)$ :

$$q(\lambda z_1, \lambda z_2) = \Lambda \cdot q(z_1, z_2). \quad (6.2.19) \quad \text{quat03}$$

Пользуясь формулами (6.2.18) и (6.2.19), пространство  $\mathbb{CP}^{2n+1}$  можно представить как множество кватернионных векторов

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1},$$

с отождествлением  $\vec{q} \sim \Lambda \cdot \vec{q}$ , для всех  $\Lambda = (\lambda_1 + i\sigma_1\lambda_2) \neq 0$ , или как множество векторов  $\vec{q} \in \mathbb{H}^{n+1}$ , задающих сферу  $S^{4n+3}$ :

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \bar{q}_\alpha q_\alpha = 1, \quad (6.2.20) \quad \text{quat04}$$

с отождествлением

$$\vec{q} \sim \Lambda \cdot \vec{q}, \quad \bar{\Lambda} \cdot \Lambda = I_2. \quad (6.2.21) \quad \text{quat05}$$

Отвлечемся пока от пространства  $\mathbb{CP}^{2n+1}$  и рассмотрим сферу  $S^{4n+3}$ , заданную соотношениями (6.2.20). На ней транзитивно действует группа  $SU(n+1, \mathbb{H})$  кватернионных матриц  $U$ , удовлетворяющих условию унитарности (3.2.193) (см. пример 5. в Разделе 3.2.12). Действие группы  $SU(n+1, \mathbb{H})$  на  $S^{4n+3}$  (6.2.20) задается стандартным образом:  $q_\alpha \rightarrow U_{\alpha\beta} q_\beta$ . Выберем точку на  $S^{4n+3}$ , которая соответствует кватернионному вектору  $\vec{q} = (0, \dots, 0, I_2)$ . Стационарная подгруппа в  $SU(n+1, \mathbb{H})$  для этой точки образована кватернионными матрицами

$$\left( \begin{array}{c|c} U & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & I_2 \end{array} \right), \quad U \in SU(n, \mathbb{H}),$$

образующими подгруппу  $SU(n, \mathbb{H}) \subset SU(n+1, \mathbb{H})$ . Поэтому согласно Утверждению 6.1.2 мы получаем

$$S^{4n+3} = SU(n+1, \mathbb{H})/SU(n, \mathbb{H}) = USp(2n+2)/USp(2n),$$

где в последнем равенстве мы воспользовались изоморфизмом  $SU(n, \mathbb{H}) = USp(2n)$ , который был сформулирован в Задаче 103.

Вернемся к пространству  $\mathbb{CP}^{2n+1}$ . Так как  $SU(n+1, \mathbb{H})$  транзитивно действует на  $S^{4n+3}$ , то группа  $SU(n+1, \mathbb{H})$  транзитивно действует и на  $\mathbb{CP}^{2n+1}$ , что следует из определения  $\mathbb{CP}^{2n+1}$  как множества точек на  $S^{4n+3}$  (6.2.20) с отождествлением (6.2.21). Выберем точку на  $\mathbb{CP}^{2n+1}$ , заданную вектором  $\vec{q}_0 = (0, \dots, 0, \Lambda)$ , где произвольный кватернион вида  $\Lambda = (\lambda_1 + i\sigma_1\lambda_2)$  должен удовлетворять соотношению

$$\bar{\Lambda} \cdot \Lambda = I_2 \Rightarrow \lambda_1 = \cos \phi, \quad \lambda_2 = \sin \phi. \quad (6.2.22) \quad \text{quat06}$$

Множество таких  $\Lambda \in \mathbb{H}$  образует группу  $U(1)$ . Стационарная подгруппа в  $SU(n+1, \mathbb{H})$  для точки  $\vec{q}_0 \in \mathbb{CP}^{2n+1}$  образована кватернионными матрицами

$$\left( \begin{array}{c|c} U & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \dots 0 & \Lambda' \end{array} \right), \quad U \in SU(n, \mathbb{H}), \quad \Lambda' = (\lambda'_1 + i\sigma_1\lambda'_2) \in U(1).$$

Эти матрицы задают подгруппу  $SU(n, \mathbb{H}) \times U(1) \subset SU(n+1, \mathbb{H})$ . Поэтому согласно Утверждению 6.1.2 мы получаем

$$\mathbb{CP}^{2n+1} = SU(n+1, \mathbb{H}) / (SU(n, \mathbb{H}) \times U(1)) = USp(2n+2) / (USp(2n) \times U(1)) .$$

ESF

11.) Пусть  $G$  — группа Ли. Рассмотрим группу  $G \times G$  и обозначим первую и вторую группу в этом произведении как  $G_L$  и  $G_R$ , чтобы различать их. Элементами группы  $G_L \times G_R$  являются пары  $(g_L, g_R)$ , где  $g_L \in G_L$  и  $g_R \in G_R$ . В группе  $G_L \times G_R$  имеется подгруппа  $G_V$ , образованная элементами  $(g, g)$ ,  $\forall g \in G$ , которая называется диагональной подгруппой. Группа  $G_V$  очевидно изоморфна  $G$ . По определению, фактор-пространство  $(G_L \times G_R)/G_V$  состоит из смежных классов по соотношению эквивалентности

$$(g_L, g_R) \sim (g_L \cdot g, g_R \cdot g) .$$

В каждом смежном классе существует единственный элемент вида  $(h, e)$ , где  $h = g_L g_R^{-1} \in G$  и  $e$  — единичный элемент в  $G$ . Поэтому

$$(G_L \times G_R)/G_V = G . \quad (6.2.23) \quad \text{gg-gV}$$

Левое действие группы  $G_L \times G_R$  на фактор-пространстве  $(G_L \times G_R)/G_V$  определяется соотношениями

$$(g_L, g_R) \cdot (h, e) = (g_L \cdot h, g_R) \sim (g_L \cdot h \cdot g_R^{-1}, e) ,$$

из которых следует, что группа  $G_L \times G_R$  действует на фактор-пространстве (6.2.23) следующим образом:

$$h \rightarrow g_L \cdot h \cdot g_R^{-1} .$$

Отметим, что особенно интересен для физики случай  $G = SU(n)$ , когда фактор-пространство (6.2.23) имеет вид  $[SU(n)_L \times SU(n)_R]/SU(n)_V = SU(n)$ . Этот пример важен тем, что глобальная группа симметрии  $SU(n)_L \times SU(n)_R$  имеется в квантовой хромодинамике с  $n$  ароматами безмассовых кварков (киральные предел), и эта симметрия спонтанно нарушается до диагональной симметрии  $SU(n)_V$ .

### 6.3 Модели неевклидовой геометрии Лобачевского.

BSF

Напомним свойства прямых в евклидовой геометрии на плоскости.

- Через любые две несовпадающие точки можно провести единственную прямую.
- Две несовпадающие прямые или пересекаются в единственной точке, или являются параллельными.

VRJ

Кроме этого, для прямых на плоскости выполняется пятый постулат Евклида, который в современной трактовке формулируется следующим образом:

- через точку, не лежащую на прямой  $\Lambda$ , проходит не более одной прямой, не пересекающей  $\Lambda$ .

Неевклидова геометрия Лобачевского основана на отрицании пятого постулата при сохранении первых двух свойств, перечисленных выше. В данном разделе мы построим, пользуясь методами теории однородных пространств, явные модели геометрии Лобачевского.

Рассмотрим дробно-линейное преобразование (2.3.44) в комплексной плоскости:

$$z \rightarrow w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (6.3.1) \quad \text{pu-02}$$

с вещественной матрицей  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ , то есть  $ad - bc = 1$ . Матрицы  $\pm A$  определяют одно и то же преобразование (6.3.1), поэтому (6.3.1) задает действие группы

$$SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I_2\} = PSL(2, \mathbb{R}),$$

на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Группа  $PSL(2, \mathbb{R})$  действует на  $\mathbb{C}$  не транзитивно. Действительно, преобразования (6.3.1) расслаивают  $\mathbb{C}$  на три орбиты, а именно, переводят действительную ось, а также верхнюю и нижнюю полуплоскости  $\mathbb{C}$  в себя. Это с очевидностью следует из равенства

$$w - w^* = \frac{z - z^*}{|cz + d|^2}. \quad (6.3.2) \quad \text{pu-01}$$

Рассмотрим одну из орбит — верхнюю полуплоскость  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ , на которой группа  $PSL(2, \mathbb{R})$  действует транзитивно. Найдём стационарную подгруппу  $H$  одной из точек  $\mathcal{P}$ , например, точки  $i \in \mathcal{P}$ . Из (6.3.1) получаем  $i = (ai + b)/(ci + d)$  откуда следует, что

$$a = d, \quad b = -c, \quad a^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = d = \cos \phi, \quad b = -c = \sin \phi.$$

Таким образом, каждый элемент  $h$  стационарной подгруппы  $H$  имеет вид

$$h = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (6.3.3) \quad \text{pu-01a}$$

и следовательно  $H = SO(2)$ . В результате, согласно Утверждению **6.1.2**, мы получаем, что верхнюю полуплоскость  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  можно взаимнооднозначно и гладко отобразить на однородное пространство

$$PSL(2, \mathbb{R})/SO(2) = SO^\uparrow(1, 2)/SO(2) \leftrightarrow \mathcal{P}, \quad (6.3.4) \quad \text{pu-03}$$

где мы учли изоморфизм  $PSL(2, \mathbb{R}) = SO^\uparrow(1, 2)$ , смотри Задачу 113.

**Замечание 1.** Любая компактная двумерная риманова поверхность (кроме сферы) диффеоморфна  $\mathcal{P}/\Gamma$ , где  $\Gamma$  — дискретная группа движений в  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ , то есть  $\Gamma$  — дискретная подгруппа в группе  $PSL(2, \mathbb{R})$  дробно-линейных преобразований (6.3.1).

Пользуясь тем, что  $PSL(2, \mathbb{R})$  нелинейно и транзитивно действует на верхней полуплоскости  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ , на ней можно построить модель неевклидовой

геометрии Лобачевского, которая называется моделью Пуанкаре. Для этого будем считать прямыми ( $\Lambda$ -прямыми) в  $\mathcal{P}$  дуги полуокружностей, у которых (см. рис. 5) центр, точка  $A$ , лежит на вещественной оси. К прямым в  $\mathcal{P}$  мы также будем относить дуги с бесконечным радиусом, то есть вертикальные прямые, перпендикулярные вещественной оси.

Две разные  $\Lambda$ -прямые не могут пересекаться в двух разных точках  $z_1$  и  $z_2$ , что с очевидностью следует из рис. 5. Кроме того ясно, что всегда существуют две разные пересекающиеся в одной точке  $\Lambda$ -прямые, которые не пересекают третью  $\Lambda$ -прямую (на самом деле в ситуации общего положения таких прямых бесконечное число). Таким образом в построенной модели нарушается пятый постулат Евклида и следовательно данная геометрия является примером неевклидовой геометрии Лобачевского.

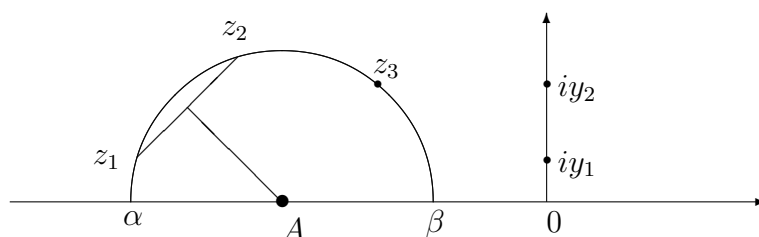


Рис. 5:  $\Lambda$ -прямые в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Для введения метрики на пространстве  $\mathcal{P}$  с заданными прямыми ( $\Lambda$ -прямыми) прежде всего заметим, что дробно-линейные преобразования (6.3.1) переводят  $\Lambda$ -прямые в  $\Lambda$ -прямые. Действительно, согласно Утверждению 2.3.5 дробно-линейные преобразования переводят окружности в окружности, а кроме того, они переводят точки действительной оси в точки действительной оси, откуда и следует сделанное утверждение. Далее, для четырех точек  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathcal{P}$  можно определить так называемое двойное отношение

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} : \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}, \quad (6.3.5) \quad \text{pu-04}$$

которое инвариантно относительно любых дробно-линейных преобразований (2.3.44).

- **Задача 173.** Доказать, что двойное отношение (6.3.5) инвариантно относительно любых дробно-линейных преобразований (2.3.44).

Пусть теперь имеются две точки  $z_1, z_2 \in \mathcal{P}$ . Через них проходит единственная  $\Lambda$ -прямая. Определим инвариантную функцию

$$\rho(z_1, z_2) = \ln(z_1, z_2, \alpha, \beta), \quad (6.3.6) \quad \text{pu-05}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — концевые точки  $\Lambda$ -прямой, проходящей через  $z_1$  и  $z_2$  (см. рис. 5). Для трех точек  $z_1, z_2$  и  $z_3$ , лежащих на одной  $\Lambda$ -прямой, как это изображено на рис. 5, можно проверить, что

$$(z_1, z_2, \alpha, \beta)(z_2, z_3, \alpha, \beta) = (z_1, z_3, \alpha, \beta) \Rightarrow \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) = \rho(z_1, z_3).$$

Кроме того, как мы увидим ниже,  $(z_1, z_2, \alpha, \beta) > 1$ , поэтому  $\rho(z_1, z_2) > 0$  и мы можем рассматривать инвариант  $\rho(z_1, z_2)$  как расстояние между двумя точками  $z_1$  и  $z_2$  в рассматриваемой модели неевклидовой геометрии на  $\mathcal{P}$ .

С помощью дробно-линейного преобразования (6.3.1) любая  $\Lambda$ -прямая может быть отображена на мнимую ось, при этом ее точки  $\alpha, z_1, z_2, \beta$  соответственно отображаются в точки  $0, iy_1, iy_2, \infty$  на мнимой оси (см. рис. 5) и мы имеем  $y_2 > y_1 > 0$ . Из инвариантности двойного отношения следует, что

$$(z_1, z_2, \alpha, \beta) = (iy_1, iy_2, 0, \infty) = \frac{y_2}{y_1} = \frac{|y_1 + y_2| + |y_1 - y_2|}{|y_1 + y_2| - |y_1 - y_2|}, \quad (6.3.7) \quad \text{pu-06}$$

где при получении последнего равенства мы воспользовались тем, что  $y_2 > y_1 > 0$ . Из (6.3.7) сразу же следует, что  $(z_1, z_2, \alpha, \beta) > 1$ . Заметим, что  $\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2^*|} = (z_1, z_1^*, z_2^*, z_2)^{1/2}$  — инвариант относительно преобразований (6.3.1) и следовательно имеет место равенство

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2^*|} = \frac{|y_1 - y_2|}{|y_1 + y_2|}.$$

Поэтому соотношение (6.3.7) переписывается в удобном виде

$$(z_1, z_2, \alpha, \beta) = \frac{1 + \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2^*|}}{1 - \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_2^*|}}. \quad (6.3.8) \quad \text{pu-07}$$

Подставляя (6.3.8) в (6.3.6), в пределе  $z_1 \rightarrow z_2$  мы получаем метрику Пуанкаре на  $\mathcal{P}$ :

$$\rho(z_1, z_2) \rightarrow ds = \frac{|dz|}{y} \Rightarrow ds^2 = \frac{dz dz^*}{y^2}, \quad (6.3.9) \quad \text{pu-08}$$

где  $dz = z_2 - z_1$  и  $y = \text{Im}(z_1) \sim \text{Im}(z_2)$ . Полуплоскость  $\mathcal{P}$ , снабженная метрикой (6.3.9) и расстояниями (6.3.6) между точками, называется *моделью Пуанкаре* геометрии Лобачевского.

- **Задача 174.** Показать, что преобразования (6.3.1) являются изометрией в модели Пуанкаре, то есть не меняют метрику (6.3.9):

$$\frac{dz dz^*}{(\text{Im } z)^2} = \frac{dw dw^*}{(\text{Im } w)^2}. \quad (6.3.10) \quad \text{dsit36}$$

Напомним, что согласно (6.3.4) и (6.2.13) пространство  $\mathcal{P}$  диффеоморфно одной из полостей двуполостного гиперboloида  $S_{2,1}^- = S_{1,2}^+$ , который можно задать как поверхность (6.2.9) в  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Далее в этом разделе мы покажем, что метрика Пуанкаре (6.3.9) может быть получена из метрики для пространства  $S_{2,1}^- = S_{1,2}^+$  с помощью взаимнооднозначного соответствия (6.3.4). Мы сделаем это в два шага. Сначала мы построим взаимнооднозначное отображение из  $S_{2,1}^-$  на единичный круг  $\mathcal{B}$ :  $|z| < 1$  в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и тем самым определим в  $\mathcal{B}$  неевклидову метрику. А затем воспользуемся хорошо известным дробно-линейным отображением единичного круга  $\mathcal{B}$  на верхнюю полуплоскость  $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ .

Пространства  $S_{p,q}^{\pm}$  представляются в виде поверхностей (6.2.9) в  $\mathbb{R}^{p,q}$ , а их метрики получаются из псевдоевклидовой метрики плоского пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$

$$ds^2 = dx_k \eta^{kj} dx_j = \sum_{j=1}^p (dx_j)^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} (dx_j)^2 . \quad (6.3.11) \quad \text{dsit51}$$

Так как  $S_{q,p}^+ = S_{p,q}^-$ , то достаточно рассмотреть одну из поверхностей (6.2.9), скажем  $S_{p,q}^-$ , которую мы запишем в виде

$$x_a \eta^{ab} x_b - x_0^2 = -1 , \quad a, b = 1, \dots, p+q-1 , \quad (6.3.12) \quad \text{dsit50}$$

где  $||\eta^{ab}|| = I_{p,q-1}$ . Для параметризации этой поверхности выберем стереографические координаты  $k_a$  ( $a = 1, \dots, p+q-1$ ), которые связаны с координатами  $\mathbb{R}^{p,q}$  соотношениями

$$x_a = \frac{2 k_a}{1 - \vec{k}^2} , \quad x_0 = \frac{1 + \vec{k}^2}{1 - \vec{k}^2} , \quad (6.3.13) \quad \text{dsit49}$$

где  $\vec{k}^2 := k_a \eta^{ab} k_b = k_a k^a$ . Легко проверить, что переменные (6.3.13) удовлетворяют (6.3.12). Формулы (6.3.13) задают проекцию поверхности (6.3.12), которая вложена в  $\mathbb{R}^{p,q}$ , на гиперплоскость  $\mathbb{R}^{p-1,q}$ , которая определяется соотношением  $x_0 = 0$  (см. рис. 6). Стереографическая проекция (6.3.13) произведена из "южного полюса", так как при  $k_a = 0$  ( $\vec{k}^2 = 0$ ) мы имеем  $x_0 = 1$  и  $x_a = 0$ , а при  $\vec{k}^2 \rightarrow \infty$  имеем  $x_0 = -1$  и  $x_a = 0$ .

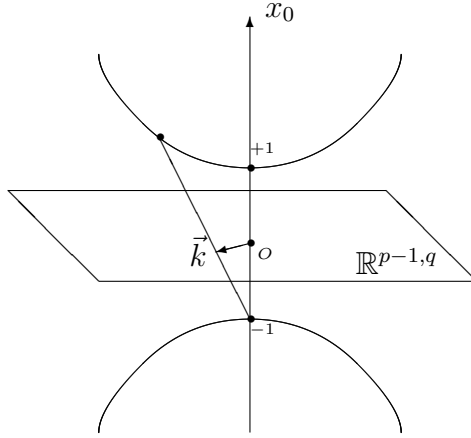


Рис. 6: Стереографическая проекция из "южного полюса".

Для дифференциалов координат (6.3.13) получаем

$$dx_0 = 4 \frac{k^a dk_a}{(1 - \vec{k}^2)^2} , \quad dx_a = \frac{2 dk_a}{1 - \vec{k}^2} + k_a dx_0 .$$

Подставляя их в (6.3.11) мы выводим выражение для метрики пространства  $S_{p,q}^+$ , записанное в стереографических координатах

$$ds^2 = dx_a \eta^{ab} dx_b - dx_0^2 = 4 \frac{dk^a dk_a}{(1 - \vec{k}^2)^2} . \quad (6.3.14) \quad \text{dsit52}$$

Отметим, что метрика в правой части (6.3.14) имеет конформный вид. В частности для пространств анти де Ситтера  $AdS^n = S_{n-1,2}^-$  и де Ситтера  $dS^n = S_{1,n}^-$  (6.2.13) метрическая матрица  $||\eta^{ab}||$  в правой части (6.3.14) должна быть выбрана в виде  $\eta = I_{n-1,1}$  и  $\eta = I_{1,n-1}$ , соответственно. Это указывает на то, что пространства  $AdS^n$  и  $dS^n$  локально устроены как  $n$ -мерные пространства Минковского (см. обсуждение после формул (6.2.13)). Если в формуле (6.3.14) выбрать  $\eta^{ab} = \text{diag}(-1, -1)$ , что согласно (6.3.12) соответствует сфере  $S^2$ , то для метрики (6.3.14) в этом случае мы получаем выражение

$$ds^2 = -4 \frac{dz dz^*}{(1 + z z^*)^2}, \quad (6.3.15) \quad \text{dsit5s2}$$

где  $z = k_1 + ik_2$ .

- **Задача 175.** Доказать, что метрика (6.3.11) для поверхности (6.3.12) в координатах  $x_a$  ( $a = 1, \dots, p + q - 1$ ) записывается в виде aΛ2

$$ds^2 = dx_a \left( \eta^{ab} - \frac{x^a x^b}{x_0^2} \right) dx_b, \quad (6.3.16) \quad \text{dsit50x}$$

где  $x_0^2 = 1 + x_a x^a$  и  $x^a = \eta^{ab} x_b$ .

Вернемся теперь к тому, как модель Пуанкаре  $\mathcal{P}$  геометрии Лобачевского, которую мы построили в начале этого раздела, связана (в согласии с взаимнооднозначным соответствием (6.3.4)) с геометрией на верхней полости гиперboloида  $S_{2,1}^- = S_{1,2}^+$ :

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad x_0 \geq 1. \quad (6.3.17) \quad \text{dsit48}$$

В случае пространства  $S_{2,1}^-$  мы имеем  $||\eta^{ab}|| = \text{diag}(1, 1)$  и согласно (6.3.13) верхняя полость гиперboloида (6.3.17)  $x_0 \geq 1$  отображается в круг  $\mathcal{B}$ :  $\vec{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 < 1$ , а метрика (6.3.14) записывается в виде

$$ds^2 = 4 \frac{dk_1^2 + dk_2^2}{(1 - \vec{k}^2)^2} = 4 \frac{dz dz^*}{(1 - z z^*)^2}, \quad (6.3.18) \quad \text{dsit53}$$

где мы сделали замену переменных  $z = k_1 + ik_2$ . Дробно-линейные преобразования

$$z \rightarrow w = \frac{az + b}{b^* z + a^*}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (6.3.19) \quad \text{dsit55}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \in SU(1, 1), \quad a a^* - b b^* = 1,$$

задают транзитивное действие группы  $PSU(1, 1) = SU(1, 1)/\{I_2, -I_2\}$  в единичном круге  $\mathcal{B}$ :  $|z| < 1$  ( $\pm U$  обслуживают одно и тоже преобразование (6.3.19)).

- **Задача 176.** Проверить, что преобразования (6.3.19) являются изометрией в  $\mathcal{B}$ , то есть не меняют метрику (6.3.18):

$$\frac{dz dz^*}{(1 - z z^*)^2} = \frac{dw dw^*}{(1 - w w^*)^2}. \quad (6.3.20) \quad \text{dsit56}$$



Стационарная подгруппа  $H \subset PSU(1, 1)$  точки  $z = 0$  согласно (6.3.19) определяется условиями  $b = 0$ ,  $a^*a = 1$  и следовательно  $H = U(1)$ . Таким образом, мы имеем взаимно-однозначное соответствие пространств

$$PSU(1, 1)/U(1) = \mathcal{B},$$

которое индуцирует неевклидову метрику (6.3.18) на  $\mathcal{B}$ . Пространство  $\mathcal{B}$  с метрикой (6.3.18) называется *конформной моделью* неевклидовой геометрии Лобачевского.

Для того чтобы сделать второй шаг в намеченной выше программе и получить модель Пуанкаре из конформной модели, то есть получить метрику (6.3.9) для верхней полуплоскости  $\mathcal{P}$  (6.3.4) из метрики (6.3.18) для  $\mathcal{B}$ , необходимо воспользоваться отображением единичного круга  $\mathcal{B}$  на  $\mathcal{P}$ . Известно, что все дробно-линейные диффеоморфизмы верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на единичный круг  $|w| < 1$  задаются отображением

$$w = e^{i\phi} \frac{z - a}{z - a^*}, \quad \forall a \in \mathcal{P}, \quad (6.3.21) \quad \text{dsit57}$$

которое переводит точку  $z = a \in \mathcal{P}$  в центр  $w = 0$  круга  $|w| < 1$ , а вещественную ось  $\text{Im } z = 0$  в окружность  $|w| = 1$ . В нашем случае, в силу выбора точки стабильности (см. вывод равенства (6.3.3)), мы полагаем  $a = i$ ,

$$w = e^{i\phi} \frac{z - i}{z + i}.$$

Подставляя это выражение в правую часть (6.3.20), получаем метрику для верхней полуплоскости (полуплоскости Пуанкаре)

$$ds^2 = 4 \frac{dz dz^*}{(\text{Im } z)^2} = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

где  $z = x + iy$  и  $y > 0$ , которая с точностью до множителя совпадает с (6.3.9).

**Замечание 2.** В конформной модели  $\mathcal{B}$  геометрии Лобачевского в качестве прямых выступают образы  $\Lambda$ -прямых при отображении (6.3.21) из  $\mathcal{P}$  в  $\mathcal{B}$ . Так как дробно-линейное преобразование (6.3.21) переводит окружности в окружности (Утверждение 2.3.5) и сохраняет углы ((6.3.21) — конформное преобразование), то прямыми в конформной модели  $\mathcal{B}$  оказываются дуги окружностей, концы которых опираются на граничную окружность  $|z| = 1$  под прямым углом.

ESF

## 6.4 Метрика и оператор Лапласа на однородных пространствах.

В этом разделе мы изложим достаточно общий метод получения инвариантных метрик на однородных пространствах  $G/H$ , основанный на локальных свойствах группы Ли  $G$  и ее подгруппы Ли  $H$ . Пользуясь этими метриками, мы построим инвариантные операторы Лапласа на пространствах  $G/H$  и покажем их связь с квадратичными операторами Казимира алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ . Но прежде чем перейти к этой теме, нам будет необходимо определить некоторые понятия, возникающие в дифференциальной геометрии гладких многообразий.

### 6.4.1 Элементы дифференциальной геометрии на гладких многообразиях.

Пусть  $M$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие. В каждой точке  $x \in M$  зададим репер в касательном пространстве  $T_x(M)$  к  $M$ , состоящий из векторов  $\vec{e}_a(x)$  ( $a = 1, \dots, n$ ), которые образуют базис в  $T_x(M)$ . Любой вектор  $\vec{v}(x) \in T_x(M)$  можно разложить по базисным векторам

$$\vec{v}(x) = v^a(x) \vec{e}_a(x) . \quad (6.4.1) \quad \text{difg0}$$

Пусть  $U_x \subset M$  — локальная координатная окрестность точки  $x$  и  $x^\mu = (x^1, \dots, x^n)$  — координаты точки  $x$ . Обозначим компоненты базисных векторов  $\vec{e}_a(x)$  в заданной координатной системе как  $e_a^\mu(x)$ , где  $\mu$  — индекс, нумерующий компоненты. Тогда согласно (6.4.1) компоненты векторов  $\vec{v}(x) \in T_x(M)$  в координатном базисе записываются в виде

$$v^\mu(x) = v^a(x) e_a^\mu(x) . \quad (6.4.2) \quad \text{difg0a}$$

Будем считать, что при переходе из точки  $x$  к близким точкам  $x + dx$ , компоненты  $e_a^\mu(x)$  и  $v^\mu(x)$  как функции координат меняются достаточно гладко. В этом случае говорят, что на  $U_x \subset M$  заданы векторные поля  $\vec{e}_a(x)$ <sup>28</sup> и  $\vec{v}(x)$ .

Выбор другой системы координат  $x^\mu \rightarrow (x')^\mu = f^\mu(\vec{x})$  в окрестности  $U_x \subset M$  приводит к преобразованию компонент векторов  $\vec{e}_a(x)$  и  $\vec{v}(x)$  согласно правилу (3.1.57):

$$e_a^\mu(x) \rightarrow (e')_a^\mu(x') = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu} e_a^\nu(x) . \quad (6.4.3) \quad \text{difg01}$$

$$v^\mu(x) \rightarrow (v')^\mu(x') = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu(x) , \quad (6.4.4) \quad \text{difg01a}$$

(сравните преобразование  $dx^\mu \rightarrow d(x')^\mu = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$  и формулу (6.4.4)). В касательном пространстве  $T_x(M)$  всегда можно сделать замену базиса  $\vec{e}_a(x)$  с помощью линейного локального преобразования

$$e_a^\mu(x) \rightarrow \tilde{e}_a^\mu(x) = \Lambda_a^b(x) e_b^\mu(x) , \quad (6.4.5) \quad \text{difg02}$$

$$v^a(x) \rightarrow \tilde{v}^a(x) = (\Lambda^{-1})^a_b(x) v^b(x) , \quad (6.4.6) \quad \text{difg02a}$$

где матрицы  $||\Lambda_a^b(x)||$  в общем случае зависят от точки  $x$  и принадлежат группе  $GL(n, \mathbb{R})$ . Будем считать, что во всех касательных пространствах  $T_x(M)$  имеется скалярное произведение, инвариантное относительно замены координат  $x^\mu \rightarrow (x')^\mu$  (см. (3.1.64), (3.1.65)), и базисный репер  $\vec{e}_a(x) \in T_x(M)$  выбран так, чтобы выполнялось соотношение

$$(\vec{e}_a(x), \vec{e}_b(x)) = \eta_{ab} , \quad (6.4.7) \quad \text{difg03}$$

где  $\eta_{ab}$  не зависят от  $x$ . В этом случае скалярное произведение любых двух векторов  $\vec{v}, \vec{u} \in T_x(M)$  запишется в виде

$$(\vec{v}, \vec{u}) = (v^a \vec{e}_a(x), u^b \vec{e}_b(x)) = v^a(x) \eta_{ab} u^b(x) . \quad (6.4.8) \quad \text{difg03a}$$

<sup>28</sup>В случае  $n = 4$  совокупность компонент  $e_a^\mu(x)$  векторных полей  $\vec{e}_a(x)$  называется тетрадой.

Постоянный тензор  $\eta_{ab}$  может рассматриваться как "плоская" метрика, одинаковая во всех касательных пространствах, а (6.4.7) интерпретируется как условие ортонормированности репера  $\vec{e}_a(x) \in T_x(M)$  в каждой точке  $x$ . Несмотря на фиксацию  $\vec{e}_a(x)$  с помощью соотношений (6.4.7), произвол (6.4.5) в выборе базисных векторов частично все же остается. А именно, матрицы  $\|\Lambda_a^b(x)\|$  в (6.4.5) должны теперь удовлетворять условию

$$\eta_{ab} = \Lambda_a^c(x) \eta_{cd} \Lambda_b^d(x) . \quad (6.4.9) \quad \text{difg03b}$$

Постоянная метрика  $\eta = \|\eta_{ab}\|$  всегда может быть приведена к стандартному виду  $\eta = I_{p,q}$  (2.2.54), поэтому условие (6.4.9) выделяет псевдо-ортогональную калибровочную подгруппу  $O(p, q)$  в локальной группе  $GL(n, \mathbb{R})$ . Эта подгруппа — калибровочная (локальная) в том смысле, что матрицы  $\|\Lambda_a^b\|$  зависят от точки  $x$ .

Матрица "плоской" метрики  $\|\eta_{ab}\|$  и обратная к ней матрица  $\|\eta^{ab}\|$  позволяют поднимать и опускать индексы  $a, b, \dots$ , нумерующие базисные вектора в касательных пространствах  $T_x(M)$  и компоненты векторов  $\vec{v}$ :

$$v^a(x) = \eta^{ab} v_b(x) , \quad v_a(x) = \eta_{ab} v^b(x) .$$

Пользуясь матрицей  $\|\eta^{ab}\|$ , из компонент репера  $e_a^\mu(x)$  строится тензор

$$e_a^\mu(x) \eta^{ab} e_b^\nu(x) = g^{\mu\nu}(x) . \quad (6.4.10) \quad \text{difg04}$$

Теперь с помощью матрицы  $\|g^{\mu\nu}\|$ , построенной из компонент тензора (6.4.10), и обратной к ней матрицы  $\|g_{\mu\nu}\|$  можно поднимать и опускать индексы у компонент  $v^\mu(x)$  векторов  $\vec{v} \in T_x(M)$ :

$$v^\mu(x) = g^{\mu\nu}(x) v_\nu(x) , \quad v_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x) v^\nu(x) .$$

Наряду с репером  $e_a^\mu(x)$  можно ввести дуальный репер

$$e_\mu^a(x) = \eta^{ab} e_b^\nu(x) g_{\mu\nu} , \quad (6.4.11) \quad \text{difg08b}$$

который задает обратную к  $\|e_a^\mu(x)\|$  матрицу и в соответствии с (6.4.3) и (6.4.5) преобразуется по правилам

$$e_\mu^a(x) \rightarrow (e')_\mu^a(x') = (\partial'_\mu x^\nu) e_\nu^a(x) , \quad (6.4.12) \quad \text{difg08}$$

$$e_\mu^a(x) \rightarrow \tilde{e}_\mu^a(x) = (\Lambda^{-1})^a_b(x) e_\mu^b(x) , \quad (6.4.13) \quad \text{difg08d}$$

где

$$\partial'_\mu x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial (x')^\mu} .$$

Наконец с помощью  $e_a^\mu(x)$  и  $e_\mu^a(x)$  можно заменять индексы типа  $\mu, \nu, \dots$  на индексы  $a, b, \dots$  и наоборот, как это сделано, например, в (6.4.2). Обратная к (6.4.2) замена имеет вид

$$v^a(x) = v^\mu(x) e_\mu^a(x) . \quad (6.4.14) \quad \text{difg08a}$$

Отметим, что согласно (6.4.3) компоненты  $g_{\mu\nu}$  при замене координат преобразуются как компоненты метрического тензора (см. (3.1.65)). Более того, скалярное произведение (6.4.8) с помощью (6.4.11) переписывается в виде (сравните с (3.1.64))

$$(\vec{v}, \vec{u}) = v^a(x) \eta_{ab} u^b(x) = v^a(x) e_a^\mu(x) g_{\mu\nu}(x) e_b^\nu(x) u^b(x) = v^\mu(x) g_{\mu\nu}(x) v^\nu(x) ,$$

поэтому обратная матрица к матрице (6.4.10), которая равна

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) \eta_{ab} e_\nu^b(x) , \quad (6.4.15) \quad \text{difg09a}$$

действительно является метрикой в окрестности  $U_x \subset M$  в заданной системе координат. Подчеркнем, что метрика (6.4.15) инвариантна относительно локальных (калибровочных) преобразований репера (6.4.13).

Для определения ковариантной производной векторного поля  $\vec{v}(x)$  в любой точке многообразия  $M$  необходимо ввести на  $M$  дополнительную структуру, которая называется связностью. В локальной системе координат ковариантная производная  $D_\mu$  записывается следующим образом

$$D_\nu v^\mu(x) = \partial_\nu v^\mu(x) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) v^\lambda(x) , \quad (6.4.16) \quad \text{difg09}$$

где  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x)$  — коэффициенты связности в точке  $x \in M$ , и мы использовали обозначение  $\partial_\nu = \partial/\partial x^\nu$ . Потребуем, чтобы действие ковариантной производной удовлетворяло правилу Лейбница

$$D_\nu (v^\mu(x) \cdot u^\lambda(x)) = (D_\nu v^\mu(x)) \cdot u^\lambda(x) + v^\mu(x) \cdot (D_\nu u^\lambda(x)) ,$$

что, вместе с (6.4.16), позволяет определить действие  $D_\nu$  на тензорное поле любого ранга, например,  $D_\nu a^{\mu\lambda} = \partial_\nu a^{\mu\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu a^{\rho\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda a^{\mu\rho}$ . Ковариантность оператора  $D_\nu$  (6.4.16) означает, что при замене координат  $x^\mu \rightarrow (x')^\mu$  компоненты  $D_\nu v^\mu(x)$  преобразуются однородно:

$$D_\nu v^\mu(x) \rightarrow \partial'_\nu x^\lambda \partial_\rho (x')^\mu D_\lambda v^\rho(x) . \quad (6.4.17) \quad \text{difg10}$$

С учетом (6.4.4) это дает преобразование коэффициентов связности

$$(\Gamma')_{\nu\gamma}^\mu = \partial'_\nu x^\lambda \partial'_\gamma x^\rho \Gamma_{\lambda\rho}^\xi \partial_\xi (x')^\mu - \partial'_\nu x^\lambda \partial'_\gamma x^\rho \partial_\lambda \partial_\rho (x')^\mu . \quad (6.4.18) \quad \text{difg10b}$$

Разложим связность  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  на симметричную и антисимметричную части:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) = \Gamma_{(\nu\lambda)}^\mu(x) + \Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu(x) , \quad (6.4.19) \quad \text{difg10a}$$

где

$$\Gamma_{(\nu\lambda)}^\mu = \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) , \quad \Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu = \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}^\mu - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) .$$

Симметричная часть связности  $\Gamma_{(\nu\lambda)}^\mu$  называется символами Кристоффеля. Заметим, что последнее слагаемое в правой части (6.4.18) симметрично при замене  $\nu \leftrightarrow \gamma$ . Поэтому антисимметричная часть  $\Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu$  преобразуется однородно как тензор, а неоднородно преобразуются только символы Кристоффеля  $\Gamma_{(\nu\lambda)}^\mu$ .

- *Задача 177. Получить из определения (6.4.16) формулу*

$$D_\nu v_\mu(x) = \partial_\nu v_\mu(x) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(x) v_\lambda(x) . \quad (6.4.20) \quad \text{difg11}$$

*Указание: воспользоваться тождеством  $D_\nu(v_\mu u^\mu) = \partial_\nu(v_\mu u^\mu)$ , и правилом Лейбница для производных  $\partial_\nu$  и  $D_\nu$ .*

Аналогично, определим ковариантную производную  $D_\nu$  для компонент  $v^a(x)$  в виде

$$D_\nu v^a(x) = \partial_\nu v^a(x) + \omega_{\nu b}^a(x) v^b(x) , \quad (6.4.21) \quad \text{difg12}$$

где связность  $\omega_\nu(x) = ||\omega_{\nu b}^a(x)||$  играет роль калибровочного поля для локальной (калибровочной) группы  $O(p, q)$ . Действительно, условие ковариантности при калибровочных преобразованиях (6.4.6) для производной (6.4.21) записывается в виде  $D_\nu v^a \rightarrow (\Lambda^{-1})_b^a D_\nu v^b$  откуда, с учетом (6.4.6), получаем закон преобразования для  $\omega_\mu(x)$

$$\tilde{\omega}_\mu = \Lambda^{-1} \omega_\mu \Lambda + \Lambda^{-1} \partial_\mu \Lambda , \quad (6.4.22) \quad \text{difg13}$$

который характерен для преобразований калибровочных полей. Отметим, что связность  $\omega_\mu$  принимает значения в алгебре Ли  $so(p, q)$ . Калибровочное поле  $\omega_\mu(x)$  для локальной группы  $O(p, q)$  называется спиновой связностью.

Компоненты репера  $e_\mu^a(x)$  преобразуются как произведение компонент  $v^a$  и  $v_\mu$ . В соответствии с этим и из (6.4.20) и (6.4.21) следует, что ковариантная производная  $D_\mu$  от  $e_\nu^a(x)$  записывается в виде

$$D_\mu e_\nu^a(x) = \partial_\mu e_\nu^a(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b . \quad (6.4.23) \quad \text{difg05}$$

С помощью ковариантной производной (6.4.23) можно определить антисимметричный тензор

$$T_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}(D_\mu e_\nu^a(x) - D_\nu e_\mu^a(x)) + \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda e_\lambda^a , \quad (6.4.24) \quad \text{difg05b}$$

который называется кручением. Подставляя в правую часть (6.4.24) выражения для ковариантной производной (6.4.23), получаем

$$T_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}(\partial_\mu e_\nu^a(x) - \partial_\nu e_\mu^a(x) + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b - \omega_{\nu b}^a e_\mu^b) , \quad (6.4.25) \quad \text{difg05a}$$

то есть кручение зависит от спиновой связности и не зависит от  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ .

Антисимметричные тензоры удобно записывать в виде дифференциальных форм. Например, с помощью записи через дифференциальные формы соотношение (6.4.25) можно представить в компактном виде

$$de^a = T^a - \omega_b^a \wedge e^b , \quad (6.4.26) \quad \text{difg15}$$

где использованы обозначения

$$e^a = e_\nu^a dx^\nu , \quad de^a = \partial_\mu e_\nu^a dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad T^a = T_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad \omega_b^a = \omega_{\mu b}^a dx^\mu ,$$

и  $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$  играет роль базиса в пространстве антисимметричных тензоров. Соотношение (6.4.26) называется первым структурным уравнением Картана.

Рассмотрим теперь специальные метрические многообразия, для которых потребуем выполнения согласованности двух определений (6.4.16) и (6.4.21) ковариантных производных, соответствующих обычной и спинной связности. Это условие согласования имеет вид

$$D_\mu v^a = e_\nu^a(x) D_\mu v^\nu(x) .$$

В этом случае с учетом правила Лейбница и (6.4.14) получается, что ковариантная производная от компонент репера равняется нулю

$$D_\mu e_\nu^a(x) = \partial_\mu e_\nu^a(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b = 0 , \quad (6.4.27) \quad \text{difg14}$$

и из формулы (6.4.10) следует, что  $D_\mu g_{\nu\lambda} = 0$ . Связность, удовлетворяющая этому соотношению, называется метрической. Далее потребуем, чтобы кручение (6.4.24) также равнялось нулю:  $T_{\mu\nu}^a = 0$ , что с учетом (6.4.27) дает  $\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda = 0$ . В этом случае связность симметрична  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda$ . Симметричная связность при условии  $T_{\mu\nu}^a = 0$  и  $D_\mu g_{\nu\lambda} = 0$  называется связностью Леви-Чивита, а метрические многообразия со связностью Леви-Чивита называются римановыми пространствами. Для связности Леви-Чивита соотношение (6.4.27) позволяет выразить символы Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  через компоненты спинной связности

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda (\partial_\mu e_\nu^a(x) + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b) , \quad (6.4.28) \quad \text{difg18}$$

а спинную связность записать через компоненты репера  $e_\nu^a(x)$ . Для того, чтобы продемонстрировать последнее утверждение, перепишем сначала условие (6.4.27) в виде

$$\omega_{\mu,\lambda\nu} - \omega_{\nu,\lambda\mu} = g_{\lambda\rho} (e_a^\rho \partial_\nu e_\mu^a - e_a^\rho \partial_\mu e_\nu^a) . \quad (6.4.29) \quad \text{difg16}$$

Спинная связность  $\omega_{\mu,\lambda\nu} = \omega_{\mu\nu}^\rho g_{\rho\lambda}$  антисимметрична при перестановке индексов  $\lambda \leftrightarrow \nu$ . Это следует из того, что матрицы  $\omega_\mu = \|\omega_{\mu b}^a\|$  принадлежат алгебре Ли  $so(p, q)$ , то есть удовлетворяют равенствам (3.2.146). Пользуясь этой симметрией и делая перестановки  $\lambda \leftrightarrow \nu$  и  $\lambda \leftrightarrow \mu$  в (6.4.29), мы получаем

$$\begin{aligned} 2\omega_{\nu,\mu\lambda} &= (\omega_{\mu,\lambda\nu} - \omega_{\nu,\lambda\mu}) + (\omega_{\mu,\nu\lambda} - \omega_{\lambda,\nu\mu}) - (\omega_{\lambda,\mu\nu} - \omega_{\nu,\mu\lambda}) = \\ &= g_{\lambda\rho} (e_a^\rho \partial_\nu e_\mu^a - e_a^\rho \partial_\mu e_\nu^a) + g_{\nu\rho} (e_a^\rho \partial_\lambda e_\mu^a - e_a^\rho \partial_\mu e_\lambda^a) - g_{\mu\rho} (e_a^\rho \partial_\nu e_\lambda^a - e_a^\rho \partial_\lambda e_\nu^a) = \\ &= e_{a\lambda} \partial_\nu e_\mu^a - e_{a\mu} \partial_\nu e_\lambda^a + \partial_\lambda g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda} , \end{aligned} \quad (6.4.30) \quad \text{difg17}$$

или

$$\omega_{\nu b}^a = \frac{1}{2} e_\mu^a e_b^\lambda (\mathcal{C}_{\lambda\nu}^\mu + \mathcal{C}_{\nu\lambda}^\mu - \mathcal{C}_{\lambda\nu}^\mu) , \quad (6.4.31) \quad 233^*$$

где

$$\mathcal{C}_{\mu\nu\lambda} = g_{\mu\rho} (e_a^\rho \partial_\nu e_\lambda^a - e_a^\rho \partial_\lambda e_\nu^a) .$$

- **Задача 178.** Показать, что согласно уравнениям (6.4.28) и (6.4.30) символы Кристоффеля для связности Леви-Чивита выражаются через метрический тензор:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) . \quad (6.4.32) \quad \text{difg17b}$$

Пользуясь спиновой связностью (калибровочным полем)  $\omega_\mu(x) = \|\omega_\mu^a(x)\|$  можно построить ковариантный относительно калибровочных преобразований (6.4.5) и (6.4.22) тензор напряженности калибровочного поля

$$R_{\mu\nu}{}^a{}_b = \partial_\mu \omega_{\nu b}^a - \partial_\nu \omega_{\mu b}^a + \omega_{\mu d}^a \omega_{\nu b}^d - \omega_{\nu d}^a \omega_{\mu b}^d = [D_\mu, D_\nu]^a{}_b, \quad (6.4.33) \quad \text{difg19}$$

где мы воспользовались обозначением  $D_{\mu b}^a = \delta_b^a \partial_\mu + \omega_{\mu b}^a$  для оператора ковариантной производной (6.4.21). Оператор  $D_{\mu b}^a$  при преобразованиях (6.4.22) преобразуется ковариантно,  $D_\mu \rightarrow \Lambda^{-1} D_\mu \Lambda$ , откуда сразу же следует ковариантный закон преобразования для тензора напряженности (6.4.33):

$$R_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{R}_{\mu\nu} = \Lambda^{-1} R_{\mu\nu} \Lambda. \quad (6.4.34) \quad \text{difg20}$$

Связность Леви-Чивита выражается через спиновую связность и наоборот с помощью соотношений (6.4.28). Поэтому в геометрии без кручения мы можем выразить тензор  $R_{\mu\nu}{}^a{}_b$  через символы Кристоффеля. Для этого заметим, что соотношение (6.4.28) формально совпадает с калибровочным преобразованием (6.4.22) для спиновой связности,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda(x) \omega_{\mu b}^a e_\nu^b + e_a^\lambda(x) \partial_\mu e_\nu^a(x), \quad (6.4.35) \quad \text{difg21}$$

если в качестве элементов матрицы  $\Lambda$  калибровочного преобразования выбрать компоненты репера:  $\Lambda_\nu^a(x) = e_\nu^a(x)$ . Поэтому, пользуясь формулами (6.4.33) и (6.4.34), мы сразу получаем

$$R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho = e_a^\lambda(x) R_{\mu\nu}{}^a{}_b e_\rho^b(x), \quad (6.4.36) \quad \text{difg22}$$

где  $R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho$  — компоненты тензора кривизны Римана

$$R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\xi}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\xi - \Gamma_{\nu\xi}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\xi. \quad (6.4.37) \quad \text{difg23}$$

В общем случае, когда кручение отлично от нуля, кривизна многообразия  $M$  может быть также определена как напряженность калибровочного поля  $\omega_\mu(x)$  и выражена через спиновую связность с помощью соотношения (6.4.33). Это соотношение в терминах дифференциальных форм переписывается в виде второго структурного уравнения Картана

$$d\omega_b^a + \omega_d^a \wedge \omega_b^d = \frac{1}{2} R_b^a, \quad (6.4.38) \quad \text{difg24}$$

где  $R_b^a = R_{\mu\nu}{}^a{}_b dx^\mu \wedge dx^\nu$ . Вместе с первым структурным уравнением (6.4.26), второе структурное уравнение (6.4.37) устанавливает связь репера  $e_a^\mu(x)$  и спиновой связности  $\omega_{\mu b}^a$  с тензорами кручения  $T_{\mu\nu}^a$  и кривизны  $R_{\mu\nu}{}^a{}_b$ . BSF

**Замечание.** Спиновая связность  $\omega_\mu(x)$  на многообразии  $M$  принимает значения в алгебре Ли  $so(p, q)$  и является в общем случае  $SO(p, q)$  калибровочным полем. С помощью связности  $\omega_\mu(x)$  можно параллельно перенести касательный вектор  $\vec{v}(x)$  вдоль любой кривой  $C_{yx} \subset M$ , начинающейся в точке  $x$  и заканчивающейся в точке  $y \in M$ . Такой перенос осуществляется с помощью матрицы

$$U(C_{yx}) = P \exp \left( \int_{C_{yx}} \omega_\mu(z) dz^\mu \right), \quad (6.4.39) \quad \text{difg25}$$

которая представляет собой упорядоченную вдоль кривой  $C_{yx}$  экспоненту (аналогичная экспонента использовалась в (3.2.51)). Таким образом, для перенесенного в точку  $y \in M$  касательного вектора  $\vec{v}'(y)$  мы получаем координаты  $(v')^a(y) = U(C_{yx})^a_b v^b(x)$ . При параллельном переносе вдоль замкнутого стягиваемого контура  $C_{xx}$  вектор  $\vec{v}(x)$  будет претерпевать некоторое вращение в  $T_x(M)$  и переходить в новый касательный вектор  $\vec{v}'(x) \in T_x(M)$ . Так как  $\omega_\mu(z)dz^\mu \in so(p, q)$ , то  $U(C_{xx}) \in SO(p, q)$ . Если  $U_1$  и  $U_2$  — две псевдоортогональные матрицы типа (6.4.39), соответствующие двум замкнутым контурам  $C_{xx}^1$  и  $C_{xx}^2$ , то их произведение  $U_1 \cdot U_2$  будет снова матрицей типа (6.4.39) и будет соответствовать замкнутому контуру  $C_{xx}^1 \cdot C_{xx}^2$ , который получается при последовательном обходе сначала по  $C_{xx}^2$ , а потом по  $C_{xx}^1$ . Таким образом, множество псевдоортогональных матриц  $U(C_{xx})$  для всевозможных замкнутых стягиваемых кривых  $C_{xx}$  образует группу (в общем случае подгруппу в  $SO(p, q)$ ), которая называется группой голономии многообразия  $M$ .

- **Задача 179.** Доказать, что группа голономии связного многообразия  $M$  не зависит от выбора точки  $x \in M$  начала и конца замкнутых стягиваемых контуров в  $M$ .

ESF

#### 6.4.2 Действие группы $G$ на факторпространство $G/H$ . Индуцированные представления.

Пусть  $G$  — вещественная группа Ли и  $H$  — ее подгруппа Ли. Напомним, что группу  $G$  можно разбить на левые смежные классы по подгруппе  $H$ ; множество смежных классов — это факторпространство  $G/H$ . В каждом смежном классе можно выбрать по одному представителю  $k \in G$ ; разным элементам  $k$  соответствуют разные элементы из  $G/H$  и наоборот. Совокупность всех элементов  $k$  образуют некоторое подмножество  $K$  в  $G$  и по определению имеется взаимнооднозначное соответствие между элементами множества  $K \subset G$  и элементами  $G/H$ . Тогда произвольный элемент  $g_0 \in G$  однозначно записывается в виде

$$g_0 = k \cdot h, \quad (6.4.40) \quad \text{mgh01}$$

где  $h \in H$ .

В примере 3.) Раздела 6.1 мы определили левое действие группы  $G$  на свое фактор-пространство  $G/H$ , которое, в связи с однозначностью представления (6.4.40), можно записать в виде

$$g \cdot k = k(g, k) \cdot h(g, k), \quad \forall k \in K, \quad \forall g \in G, \quad (6.4.41) \quad \text{mgh02}$$

где  $k(g, k) \in K$  и  $h(g, k) \in H$ . Таким образом, левое действие элемента  $g \in G$  на  $G/H$  реализуется как левое действие  $g$  на подмножестве  $K \subset G$ , и это действие сводится к преобразованию

$$k \xrightarrow{g} k(g, k) = g \cdot k \cdot h(g, k)^{-1}, \quad (6.4.42) \quad \text{mgh02a}$$

заданному в (6.4.41). При этом имеют место соотношения

$$k(g_2, k(g_1, k)) = k(g_2 \cdot g_1, k), \quad (6.4.43) \quad \text{mgh02b}$$



$$h(g_2, k(g_1, k)) \cdot h(g_1, k) = h(g_2 \cdot g_1, k) , \quad (6.4.44) \quad \text{mgh02bb}$$

которые получаются из сравнения правых частей равенств

$$\begin{aligned} g_2 \cdot g_1 \cdot k &= g_2 \cdot k(g_1, k) \cdot h(g_1, k) = k(g_2, k(g_1, k)) \cdot h(g_2, k(g_1, k)) \cdot h(g_1, k) , \\ g_2 \cdot g_1 \cdot k &= k(g_2 \cdot g_1, k) \cdot h(g_2 \cdot g_1, k) . \end{aligned}$$

Соотношение (6.4.43) совпадает со стандартным свойством (2.3.9), которое необходимо для того, чтобы отображение (6.4.42) было действием  $G$  на  $K$ .

Отвлечемся на время от основного изложения и заметим, что соотношение (6.4.44), вместе с (6.4.43), говорит нам о том, что функция  $h(g, k): G \times K \rightarrow H$  может быть использована для построения специального представления группы  $G$ , которое называется представлением, индуцированным из представления подгруппы  $H \subset G$ . Поясним конструкцию индуцированных представлений более подробно.

Пусть задано любое представление подгруппы  $H \subset G$  в пространстве  $\mathcal{V}$ , то есть для любых  $h \in H$  и  $v \in \mathcal{V}$  задано действие  $v \rightarrow h \cdot v \in \mathcal{V}$ . Определим представление  $T$  группы  $G$ , которое действует в пространстве функций  $v(k)$  ( $k \in K$ ), принимающих значения в  $\mathcal{V}$ , следующим образом

$$T(g) \cdot v(k) = [h(g^{-1}, k)]^{-1} \cdot v(k(g^{-1}, k)) \equiv v_g(k) , \quad \forall g \in G . \quad (6.4.45) \quad \text{ind01}$$

Докажем, что  $T$  – гомоморфизм (4.1.1). Действительно,

$$\begin{aligned} T(g_1) \cdot T(g_2) \cdot v(k) &= T(g_1) \cdot v_{g_2}(k) = [h(g_1^{-1}, k)]^{-1} \cdot v_{g_2}(k(g_1^{-1}, k)) = \\ &= [h(g_1^{-1}, k)]^{-1} \cdot [h(g_2^{-1}, k(g_1^{-1}, k))]^{-1} \cdot v(k(g_2^{-1}, k(g_1^{-1}, k))) . \end{aligned} \quad (6.4.46) \quad \text{ind02}$$

С другой стороны, согласно (6.4.45), мы имеем

$$T(g_1 \cdot g_2) \cdot v(k) = [h((g_1 \cdot g_2)^{-1}, k)]^{-1} \cdot v(k((g_1 \cdot g_2)^{-1}, k)) . \quad (6.4.47) \quad \text{ind03}$$

Правые части (6.4.46) и (6.4.47) совпадают в силу соотношений (6.4.43) и (6.4.44), поэтому равны их левые части и, с учетом произвольности функции  $v(k)$ , мы получаем условие гомоморфизма для  $T$ :  $T(g_2) \cdot T(g_1) = T(g_2 \cdot g_1)$ . Таким образом, формула (6.4.45) задает представление  $G$ , которое и называется представлением, индуцированным из представления подгруппы  $H \subset G$ .

**Замечание.** Возьмем в качестве представления подгруппы  $H$  в  $\mathcal{V}$  тривиальное представление:  $v \rightarrow h \cdot v = v$  ( $\forall h \in H, \forall v \in \mathcal{V}$ ). В этом случае согласно определению (6.4.45) мы получаем представление группы  $G$  следующего вида

$$[T(g) \cdot v](k) = v(k(g^{-1}, k)) . \quad (6.4.48) \quad \text{ind04}$$

Если подгруппа  $H$  тривиальна (состоит из одного единичного элемента  $e \in G$ ), то любое представление  $H$  – тривиально, а  $K = G$ . В этом случае формулы (6.4.45) и (6.4.48) переходят в формулу (4.6.36) для левого регулярного представления  $G$ .

Нетривиальные примеры индуцированных представлений будут рассмотрены в Главе 9.

### 6.4.3 Инвариантная метрика на однородных пространствах.

Займемся построением инвариантных метрик на однородных пространствах. В интересующих нас случаях (смотри, например, Раздел 6.2) подмножество  $K \subset G$ , параметризующее элементы в  $G/H$ , всегда можно выбрать так, что  $K$  будет обладать структурой гладкого подмногообразия, вложенного в многообразие группы Ли  $G$ . В этом случае на  $K$  можно ввести метрику, то есть определить интервал  $ds^2(k_1, k_2)$  для близких элементов  $k_1$  и  $k_2$  из  $K$ . Например, метрику на подмножестве  $K \subset G$  можно определить, воспользовавшись метрикой, заданной на всей группе  $G$  (см. Раздел 3.1.6). В силу взаимнооднозначного соответствия  $K \leftrightarrow G/H$ , метрику, заданную на  $K$ , будем в дальнейшем называть метрикой на  $G/H$ . Метрика  $ds^2(k_1, k_2)$  на  $G/H$  называется инвариантной, если для всех  $g \in G$  и всех близких  $k_1, k_2 \in K$  справедливо равенство (сравните с (3.1.68))

$$ds^2(k_1, k_2) = ds^2(k(g, k_1), k(g, k_2)) , \quad (6.4.49) \quad \text{mgh03}$$

где элементы  $k(g, k_i)$  определяются в (6.4.42). Наша задача — построить инвариантную метрику на  $G/H = K$ .

Без ограничения общности можно считать, что подмножество  $K$  содержит единичный элемент  $e \in G$ , который соответствует смежному классу  $eH = H$ . Действительно, элемент  $k_0 \in K$ , нумерующий смежный класс  $eH$ , должен принадлежать  $H$ :  $k_0 \in H$ . Поэтому, сдвигая одновременно все элементы  $K \rightarrow K k_0^{-1}$ , мы всегда можем выбрать такое подмножество  $K$ , что  $e \in K$ .

Положим  $g = k_1^{-1}$  в (6.4.49), тогда для инвариантной метрики (6.4.49) получаем

$$ds^2(k_1, k_2) = ds^2(e, k(k_1^{-1}, k_2)) , \quad (6.4.50) \quad \text{mgh04s}$$

где правая часть является метрикой на  $K$  вблизи единичного элемента. Таким образом, определяя метрику на  $K$  вблизи единичного элемента (то есть, пользуясь лишь локальными свойствами группы  $G$  и ее подгруппы  $H$  вблизи единицы) мы можем потом распространить эту метрику на все однородное пространство  $K = G/H$ .

Пусть  $\dim(G) = n$  и  $\dim(H) = n - d$ , тогда  $\dim(G/H) = d$ . В алгебре Ли  $\mathcal{A}(G)$  группы  $G$  выберем базис

$$\{Y_1, \dots, Y_{n-d}, X_1, \dots, X_d\} , \quad (6.4.51) \quad \text{mgh04}$$

причем сделаем это таким образом, что  $Y_a$  ( $a = 1, \dots, n - d$ ) — образующие алгебры Ли  $\mathcal{A}(H)$  подгруппы  $H$  в  $G$ , а  $X_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, d$ ) — оставшиеся образующие в  $\mathcal{A}(G)$ . Тогда согласно (6.4.40) в локальной координатной окрестности  $U_e$  единицы  $e \in G$  можно выбрать координаты  $\{a_1, \dots, a_{n-d}, b_1, \dots, b_d\}$  так, чтобы любой элемент  $g \in G$  представлялся в виде

$$g = k(\vec{a}) \cdot h(\vec{b}) = \exp(a^\alpha X_\alpha) \cdot \exp(b^a Y_a) , \quad (6.4.52) \quad \text{mgh08}$$

где  $\vec{b} = (b^1, \dots, b^{n-d})$  — параметры подгруппы  $H$ , а параметры  $\vec{a} = (a^1, \dots, a^d)$  — интерпретируются как локальные координаты на однородном пространстве  $G/H$ . Согласно (6.4.40) и (6.4.52) подмножество  $K$ , параметризующее однородное пространство  $G/H$  в окрестности  $U_e$ , состоит из всех элементов вида

$$k(\vec{a}) = \exp(a^\alpha X_\alpha) \in K . \quad (6.4.53) \quad \text{mgh08a}$$

**Определение 6.4.1** Пусть  $\mathcal{H}$  — подалгебра Ли в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  с базисом (6.4.51), где  $\{Y_1, \dots, Y_{n-d}\}$  — образующие подалгебры  $\mathcal{H}$ . Подалгебра  $\mathcal{H}$  называется ортонормальной в  $\mathcal{A}$ , если в  $\mathcal{A}$  можно выбрать базис (6.4.51) такой, что структурные соотношения имеют вид:

$$[Y_a, Y_b] = C_{ab}^d Y_d, \quad (6.4.54) \quad \text{mgh05}$$

$$[Y_b, X_\alpha] = C_{b\alpha}^\beta X_\beta, \quad (6.4.55) \quad \text{mgh06}$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^d Y_d + C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad (6.4.56) \quad \text{mgh07}$$

где  $C_{ab}^d$ ,  $C_{b\alpha}^\beta$ ,  $C_{\alpha\beta}^d$  и  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  — структурные константы.

Соотношения (6.4.54) и (6.4.55) показывают, что присоединенное действие ортонормальной подалгебры  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{A}$  разбивает  $\mathcal{A}$  на два инвариантных подпространства, то есть задает вполне приводимое представление  $\mathcal{H}$ .

**Утверждение 6.4.1** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра Ли,  $\mathcal{H}$  ее подалгебра Ли и в  $\mathcal{A}$  имеется инвариантное невырожденное скалярное произведение. Пусть  $\mathcal{A}^\perp$  — ортогональное дополнение к  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{A}$  по отношению к данному скалярному произведению. Если  $\mathcal{A}$ , как векторное пространство, равно прямой сумме своих векторных подпространств  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{A}^\perp$ , то есть  $\mathcal{A} = \mathcal{H} + \mathcal{A}^\perp$ , то подалгебра  $\mathcal{H}$  ортонормальна в  $\mathcal{A}$ .

**Доказательство.** Необходимо доказать возможность выбора базиса (6.4.51) в  $\mathcal{A}$ , для которого выполнялись бы структурные соотношения (6.4.54) – (6.4.56). Соотношения (6.4.54) отражают тот факт, что элементы  $Y_a$  являются образующими подалгебры  $\mathcal{H}$ , а обоснование соотношений (6.4.56) не требуется, так как они записаны в наиболее общем виде. Остается обосновать соотношения (6.4.55). Воспользуемся тем, что в алгебре Ли  $\mathcal{A}$  имеется инвариантное невырожденное скалярное произведение, удовлетворяющее (5.1.2). Выберем элементы  $X_\alpha$  в (6.4.51) так, чтобы они принадлежали  $\mathcal{A}^\perp$  и образовывали базис в  $\mathcal{A}^\perp$ , то есть  $(Y_a, X_\beta) = 0$ ,  $\forall a, \beta$ . Тогда для всех  $Y_a \in \mathcal{H}$  и всех  $X_\beta \in \mathcal{A}^\perp$  мы имеем

$$(Y_a, [Y_b, X_\beta]) = -([Y_b, Y_a], X_\beta) = 0,$$

и следовательно  $[Y_b, X_\beta] \in \mathcal{A}^\perp$ , что доказывает (6.4.55) для выбранного базиса  $\{Y_a, X_\beta\}$  в  $\mathcal{A}$ . ■

**Замечание 1.** Для компактной алгебры Ли  $\mathcal{A}$  любая ее подалгебра  $\mathcal{H}$  является ортонормальной. Это следует из того, что в компактной алгебре Ли  $\mathcal{A}$  всегда имеется инвариантное невырожденное и положительно определенное скалярное произведение, относительно которого  $\mathcal{A}$  всегда разбивается в прямую сумму двух своих подпространств  $\mathcal{A} = \mathcal{H} + \mathcal{A}^\perp$ , где  $\mathcal{A}^\perp$  — ортогональное дополнение к  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{A}$  относительно данного скалярного произведения.

**Замечание 2.** Если алгебра Ли  $\mathcal{A}$  некомпактна, то не всякая ее подалгебра  $\mathcal{H}$  является ортонормальной. В качестве примера рассмотрим простую алгебру  $\mathcal{A} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  с базисными элементами  $\{\mathfrak{h}, e_+, e_-\}$  и структурными соотношениями (3.2.91). Выберем одномерную подалгебру Ли  $\mathcal{H}$  в  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , которая образована элементом  $Y = e_+$ , а оставшиеся элементы обозначим как  $X_1 = \mathfrak{h}$  и  $X_2 = e_-$ . Тогда согласно (3.2.91) мы

имеем  $[Y, X_1] = -Y$ , что противоречит (6.4.55). Отметим, однако, что если бы мы выбрали одномерную подалгебру  $\mathcal{H}$  в  $sl(2, \mathbb{R})$ , связанную с элементом  $(e_+ + e_-)$ , или с диагональным элементом  $\mathfrak{h}$ , то структурные соотношения (6.4.55) имели бы место.

Пусть  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$  — алгебра Ли группы  $G$  и  $\mathcal{H} = \mathcal{A}(H)$  — алгебра Ли подгруппы  $H \subset G$ . Пусть  $\mathcal{H}$  — ортонормальная подалгебра Ли в  $\mathcal{A}$ . В этом случае подгруппа  $H$  будет называться ортонормальной в  $G$ . Соотношения (6.4.55) задают линейное представление подалгебры  $\mathcal{A}(H)$ , и соответственно ее группы Ли  $H$ , на векторном пространстве  $\mathcal{K}$ , натянутом на образующие  $X_a \in \mathcal{A}(G)$ . Выберем подмножество  $K$ , параметризующее пространство  $G/H$  так, как это сделано в (6.4.52) и (6.4.53). Тогда соотношения (6.4.55) приводят к важному следствию

$$h \cdot \mathcal{K} \cdot h^{-1} \subset \mathcal{K} \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot K \cdot h^{-1} \subset K, \quad \forall h \in H, \quad (6.4.57) \quad \text{mgh09}$$

которое будет использоваться ниже и будет ключевым при построении инвариантных метрик на  $G/H$ .

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только матричных групп Ли  $G$  и таких однородных пространств  $K = G/H$ , для которых выполняется свойство (6.4.57). Это означает, что подгруппа  $H$  — ортонормальна в группе  $G$ .

Возьмем элемент  $k(\vec{a})$  (6.4.53), принадлежащий пространству  $K = G/H$  и построим матрицу  $k^{-1} dk$ , где  $dk$  обозначает дифференциал матрицы  $k$ :

$$dk(\vec{a}) = d(\exp(a^\alpha X_\alpha)) = (da^\alpha) \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \exp(a^\alpha X_\alpha).$$

Из соотношения (3.1.81) следует, что  $k^{-1} \cdot dk$  — касательный вектор<sup>29</sup> к  $G$  в единичном элементе, то есть  $k^{-1} \cdot dk \in \mathcal{A}(G)$  и  $k^{-1} \cdot dk$  можно разложить по базису алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ :

$$\begin{aligned} k^{-1} \cdot dk &= \epsilon^\alpha X_\alpha + \omega^b Y_b = \epsilon + \omega, \\ \epsilon^\alpha &= E_\mu^\alpha da^\mu, \quad \omega^a = \omega_\mu^a da^\mu, \end{aligned} \quad (6.4.58) \quad \text{koth}$$

где формы  $k^{-1} \cdot dk$ ,  $\epsilon$  и  $\omega$  называются формами Маурера–Картана.

**Утверждение 6.4.2** При левом действии группы  $G$  на пространстве  $G/H$  (преобразовании (6.4.42)) формы Маурера–Картана  $\epsilon \in \mathcal{K}$  и  $\omega \in \mathcal{A}(H)$  преобразуются следующим образом

$$\epsilon \xrightarrow{g} \tilde{\epsilon} = h(g, k) \cdot \epsilon \cdot h(g, k)^{-1} \in \mathcal{K}, \quad (6.4.59) \quad \text{mgh10}$$

$$\omega \xrightarrow{g} \tilde{\omega} = h(g, k) \cdot \omega \cdot h(g, k)^{-1} - (dh(g, k)) \cdot h(g, k)^{-1} \in \mathcal{A}(H), \quad (6.4.60) \quad \text{mgh10b}$$

то есть форма  $\epsilon \in \mathcal{K}$  преобразуется однородно, а форма  $\omega \in \mathcal{A}(H)$  преобразуется как связность (6.4.22).

**Доказательство.** Действие группы  $G$  на однородное пространство  $G/H$  приводит к преобразованию касательного вектора  $k^{-1} \cdot dk$  и задает преобразования форм  $\epsilon$  и  $\omega$ :

$$k^{-1} \cdot dk \xrightarrow{g} k(g, k)^{-1} \cdot dk(g, k) = \tilde{\epsilon}^\alpha X_\alpha + \tilde{\omega}^a Y_a = \tilde{\epsilon} + \tilde{\omega}. \quad (6.4.61) \quad \text{mgh10a}$$

<sup>29</sup>Более точно здесь надо говорить о кокасательном векторе.

Подставляя в (6.4.61) выражение для  $k(g, k)$  из (6.4.42), получаем

$$\begin{aligned} k(g, k)^{-1} \cdot dk(g, k) &= h(g, k) \cdot k^{-1} \cdot g^{-1} \cdot d(g \cdot k \cdot h(g, k)^{-1}) = \\ &= h(g, k) \cdot k^{-1} \cdot d(k \cdot h(g, k)^{-1}) = h(g, k) \cdot (k^{-1} \cdot dk) \cdot h(g, k)^{-1} - dh(g, k) \cdot h(g, k)^{-1}, \end{aligned}$$

где мы учли, что  $h \cdot dh^{-1} = -dh \cdot h^{-1}$ . Отсюда с учетом (6.4.57) следуют преобразования (6.4.59) и (6.4.60). ■

Согласно (6.4.58) касательный к  $G$  вектор  $k^{-1} \cdot dk$  разлагается в сумму двух касательных векторов  $\epsilon$  и  $\omega$ , где вектор  $\omega$  направлен вдоль алгебры Ли подгруппы  $H$ , а вектор  $\epsilon$  можно интерпретировать как касательный вектор к многообразию  $K = G/H$ . Таким образом, в качестве компонент дуального базисного репера (компонент  $e_\mu^a$  в (6.4.11)) на многообразии  $G/H$  естественно выбрать компоненты  $E_\mu^\alpha$  касательного вектора  $\epsilon = E_\mu^\alpha X_\alpha da^\mu$ , тогда присоединенные преобразования (6.4.59) представляют собой калибровочные преобразования репера (6.4.13). Этот выбор определяет инвариантную метрику  $ds^2$  на однородном пространстве  $K = G/H$  в виде следа  $\text{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon)$ , который инвариантен относительно преобразований (6.4.59). Таким образом, мы имеем (ср. с общим определением метрики (6.4.15))

$$ds^2 = \text{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon) = da^\mu g_{\mu\nu}(\vec{a}) da^\nu, \quad (6.4.62) \quad \text{mgh11}$$

где

$$g_{\mu\nu}(\vec{a}) = E_\mu^\alpha(\vec{a}) E_\nu^\beta(\vec{a}) \eta_{\alpha\beta}, \quad \eta_{\alpha\beta} = \text{Tr}(X_\alpha \cdot X_\beta). \quad (6.4.63) \quad \text{mgh11a}$$

Здесь "плоская" метрика  $\eta_{\alpha\beta}$  в общем случае, в зависимости от конкретного выбора группы  $G$  и ее ортонормальной подгруппы  $H$ , может иметь псевдоевклидову сигнатуру  $(p, d-p)$ . Элементы  $\eta_{\alpha\beta} E_\nu^\beta(\vec{a}) g^{\mu\nu} = (\epsilon_\alpha)^\mu$  задают репер векторов  $\vec{\epsilon}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, d$ ) с компонентами  $(\epsilon_\alpha)^\mu$ , которые образуют базис в касательном пространстве к однородному пространству  $K = G/H$  в точке  $\vec{a}$ .

Отметим, что если мы выберем в качестве  $H$  тривиальную подгруппу, состоящую из одного единичного элемента, то есть  $G/H = G$ , то метрика (6.4.62), (6.4.63) совпадает с выражениями (3.1.77), (3.1.82) и (3.1.83) для лево-инвариантной метрики на группе. При этом матрицы  $\|E_\mu^\alpha(\vec{a})\|$  являются аналогами матриц  $\|[L^{-1}]_j^i\|$  из формулы (3.1.77), см. Задачу 57.

**Пример 1.** Рассмотрим простейшее нетривиальное однородное пространство  $S^2 = SU(2)/U(1)$ , которое уже встречалось нам ранее (см. (6.2.17)). В качестве образующих группы  $SU(2)$  согласно (3.2.120) выберем три оператора  $\tau_\alpha = -i\sigma_\alpha/2$ , где  $\sigma_\alpha$  – матрицы Паули. Элементы одномерной ортонормальной подгруппы  $H = U(1) \subset SU(2)$  задаются экспоненциальным отображением

$$\exp(2b\tau_3) = \begin{pmatrix} e^{-ib} & 0 \\ 0 & e^{ib} \end{pmatrix}, \quad (6.4.64) \quad \text{kk06}$$

где  $b$  – параметр подгруппы  $U(1)$ . Тогда в качестве элементов, параметризующих однородное пространство  $SU(2)/U(1)$ , можно выбрать матрицы (см. (6.4.53))

$$k(a_1, a_2) = \exp(A), \quad (6.4.65) \quad \text{kk01}$$

где  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  и

$$A = -2(a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.4.66) \quad \text{kk02}$$

Для матрицы  $A$  выполняется соотношение  $A^2 = -|a|^2 I_2$ , поэтому элементы (6.4.65) записываются в виде (сравните с представлением (3.1.17))

$$k(\vec{a}) = \exp(A) = I_2 \cos |a| + A \frac{\sin |a|}{|a|} = I_2 \alpha^0 + i(\alpha^1 \sigma_1 + \alpha^2 \sigma_2), \quad (6.4.67) \quad \text{kk08}$$

где  $\alpha^0 = \cos |a|$  и  $\alpha^m = a_m \sin |a|/|a|$  (здесь  $m = 1, 2$ ) — новые координаты на однородном пространстве  $SU(2)/U(1) = S^2$ , связанные соотношением

$$(\alpha^0)^2 + (\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 = 1. \quad (6.4.68) \quad \text{kk09}$$

Вначале выберем в качестве независимых координат на  $SU(2)/U(1) = S^2$  параметры  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$  и вычислим формы Маурера-Картана и метрику на  $SU(2)/U(1) = S^2$  в терминах этих координат. Для формы Маурера-Картана (6.4.58) мы получаем выражение

$$\begin{aligned} k(\alpha)^{-1} dk(\alpha) &= \epsilon + \omega = (I_2 \alpha^0 - i\alpha^m \sigma_m) \cdot d(I_2 \alpha^0 + i\alpha^k \sigma_k) = \\ &= i\sigma_m (\alpha^0 d\alpha^m - \alpha^m d\alpha^0) + i\sigma_3 (\alpha^1 d\alpha^2 - \alpha^2 d\alpha^1). \end{aligned} \quad (6.4.69) \quad \text{kk10}$$

Пользуясь равенством  $\alpha^0 d\alpha^0 + \alpha^m d\alpha^m = 0$ , которое вытекает из (6.4.68), получаем выражения для форм репера  $\epsilon$  и связности  $\omega$ :

$$\epsilon = i\sigma_m \left( \alpha^0 \delta_{mk} + \frac{\alpha^m \alpha^k}{\alpha^0} \right) d\alpha^k, \quad \omega = i\sigma_3 (\alpha^1 d\alpha^2 - \alpha^2 d\alpha^1). \quad (6.4.70) \quad \text{kk11}$$

здесь индексы  $k, m$  пробегает два значения 1, 2. Согласно определению (6.4.62), инвариантную метрику на однородном пространстве  $SU(2)/U(1) = S^2$  можно записать в виде

$$ds^2 = \text{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon) = - \left( (\alpha^0)^2 \delta_{mk} + \frac{(1 + (\alpha^0)^2)}{(\alpha^0)^2} \alpha^m \alpha^k \right) d\alpha^m d\alpha^k = -g_{mk} d\alpha^m d\alpha^k, \quad (6.4.71) \quad \text{kk12}$$

где функция  $\alpha^0(\alpha^1, \alpha^2)$  определена в (6.4.68).

- **Задача 180.** Доказать, что метрика  $g^{mk}$ , обратная к метрике  $g_{mk}$  (6.4.71) имеет вид

$$g^{mk} = \frac{1}{(\alpha^0)^2} (\delta^{mk} - [1 + (\alpha^0)^2] \alpha^m \alpha^k). \quad (6.4.72) \quad \text{kk13}$$

Отметим, что явный вид метрики (6.4.71) для сферы  $S^2$  не совпадает с метрикой (6.3.16), которая была построена для всех поверхностей, заданных квадратичными соотношениями вида (6.3.12) и (6.4.68). Это связано тем, что координаты  $\vec{\alpha} = (\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2)$  в (6.4.68) определены с точностью до локальных ортогональных преобразований  $\vec{\alpha} \rightarrow O(\vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha}$ , которые меняют явный вид метрики (6.4.71).

Для того, чтобы получить изложенным выше способом известную метрику для сферы  $S^2$  (скажем, метрику вида (6.3.15)), мы перейдем к другим координатам при описании элементов  $k(\vec{a})$  (6.4.67). Для этого введем новую матрицу  $Z$  и определим новый комплексный параметр  $z$  вместо матрицы  $A$  и параметра  $a$ :

$$k(\vec{a}) = \exp(A) = I_2 \cos |a| + A \frac{\sin |a|}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} (I_2 + Z), \quad (6.4.73) \quad \text{kk07}$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z^* & 0 \end{pmatrix} = A \frac{\operatorname{tg} |a|}{|a|} \Rightarrow \cos |a| = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

В терминах новых переменных для формы Маурера-Картана (6.4.58) мы получаем выражение

$$k(\vec{a})^{-1} dk(\vec{a}) = \epsilon + \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} (I_2 - Z) \cdot d \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} (I_2 + Z) \right). \quad (6.4.74) \quad \text{kk03}$$

Здесь  $\omega \in \mathfrak{u}(1)$  – диагональные матрицы, а  $\epsilon$  – матрица, имеющая структуру (6.4.66), поэтому  $U(1)$  форма связности  $\omega$  дается в (6.4.74) четными степенями матрицы  $Z$ , а форма репера  $\epsilon$  – нечетными. Таким образом, согласно (6.4.74) получаем

$$\omega = -\frac{(dz z^* + dz^* z) I_2 + 2 Z \cdot dZ}{2(1 + |z|^2)} = \frac{(dz^* z - dz z^*)}{2(1 + |z|^2)} \sigma_3, \quad \epsilon = \frac{dZ}{(1 + |z|^2)}. \quad (6.4.75) \quad \text{kk04}$$

Окончательно, пользуясь выражением для  $\epsilon$  (6.4.75), инвариантную метрику (6.4.62) на однородном пространстве  $SU(2)/U(1) = S^2$  можно представить в виде

$$ds^2 = \operatorname{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon) = -2 \frac{dz dz^*}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (6.4.76) \quad \text{kk05}$$

С точностью до постоянного коэффициента метрика (6.4.76) совпадает с метрикой (6.3.15), полученной в стереографических координатах.

- **Задача 181.** \* Пользуясь формулами (6.4.58) и (6.4.62) получить метрику Фубини-Штуди

$$ds^2 = \frac{dz_i dz_i^*}{1 + |z|^2} - \frac{(dz_i z_i^*)(z_k dz_k^*)}{(1 + |z|^2)^2} = dz_k dz_i^* \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial z_i^*} \ln(1 + |z|^2), \quad (6.4.77) \quad \text{mFSh1}$$

для однородного пространства  $\mathbb{CP}^n = U(n+1)/(U(n) \times U(1))$ , которое рассматривалось в примере 8.) раздела 6.2.

- **Задача 182.** Пользуясь определениями (6.4.58) и (6.4.62) построить инвариантную метрику для сфер  $S^k$ , которые заданы как однородные пространства (6.2.8) и (6.2.15). Указание: воспользоваться методами решения задачи 181.

- *Задача 183.* Построить инвариантную метрику для однородного пространства  $(G \times G)/G_V$ , где  $G$  — матричная группа Ли, а  $G_V$  — диагональная подгруппа в  $G \times G$  (смотри пример 11.) в разделе 6.2).
- *Задача 184.* Построить инвариантную метрику для пространств де Ситтера и анти де Ситтера, заданных как однородные пространства в (6.2.13). Указание: воспользоваться методами решения задачи 181.

VRN

Итак, метрика на пространстве  $G/H$  полностью определяется формой  $\epsilon$ , которая возникает в разложении (6.4.58). В конкретных задачах для вычисления форм  $\epsilon$  и  $\omega$ , в случае параметризации (6.4.53), иногда удобно пользоваться тождеством Кэмпбелла–Пуанкаре (см. уравнение (10.4.11) в Приложении 1.)

Чтобы прояснить геометрический смысл форм  $\epsilon$  и  $\omega$ , воспользуемся тождеством Маурера–Картана

$$\partial_\mu(k^{-1} \partial_\nu k) - \partial_\nu(k^{-1} \partial_\mu k) = -[k^{-1} \partial_\mu k, k^{-1} \partial_\nu k], \quad (6.4.78) \quad \text{tmkar}$$

которое компактно записывается в виде  $d(k^{-1} \cdot dk) = -(k^{-1} \cdot dk) \wedge (k^{-1} \cdot dk)$ .

- *Задача 185.* Доказать тождество Маурера–Картана (6.4.78).

Подставляя в тождество Маурера–Картана разложение (6.4.58), мы получаем

$$\begin{aligned} d(\epsilon^\alpha X_\alpha + \omega^b Y_b) &= -(\epsilon^\alpha X_\alpha + \omega^a Y_a) \wedge (\epsilon^\beta X_\beta + \omega^b Y_b) = \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^\alpha \wedge \epsilon^\beta [X_\alpha, X_\beta] - \frac{1}{2} \omega^a \wedge \omega^b [Y_a, Y_b] - \omega^a \wedge \epsilon^\beta [Y_a, X_\beta] = \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^\alpha \wedge \epsilon^\beta (C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma + C_{\alpha\beta}^b Y_b) - \frac{1}{2} \omega^a \wedge \omega^b C_{ab}^d Y_d - \omega^b \wedge \epsilon^\beta C_{b\beta}^\alpha X_\alpha, \end{aligned}$$

что эквивалентно двум уравнениям

$$d\epsilon^\alpha = -\frac{1}{2} \epsilon^\gamma \wedge \epsilon^\beta C_{\gamma\beta}^\alpha - \omega^b \wedge \epsilon^\beta C_{b\beta}^\alpha, \quad (6.4.79) \quad \text{mgh13}$$

$$d\omega^b = -\frac{1}{2} \epsilon^\gamma \wedge \epsilon^\delta C_{\gamma\delta}^b - \frac{1}{2} \omega^a \wedge \omega^d C_{ad}^b. \quad (6.4.80) \quad \text{mgh14}$$

Напомним, что  $\epsilon^\alpha$  выступает в качестве формы дуального репера на  $G/H$ . Сравнивая (6.4.79) с первым структурным уравнением Картана (6.4.26), мы приходим к тому, что  $\omega_\beta^\alpha = \omega^b C_{b\beta}^\alpha$  необходимо рассматривать как форму спиновой связности. Тогда уравнение (6.4.80) переписывается в виде

$$d\omega_\beta^\alpha = -\frac{1}{2} \epsilon^\gamma \wedge \epsilon^\delta C_{\gamma\delta}^b C_{b\beta}^\alpha - \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma, \quad (6.4.81) \quad \text{mgh16}$$

и оно представляет собой не что иное, как второе структурное уравнение Картана (6.4.38). Таким образом, уравнения (6.4.79) и (6.4.80) позволяют найти тензор кручения и тензор кривизны на  $G/H$ . Сравнивая (6.4.26) и (6.4.79), мы получаем выражение для коэффициентов кручения:

$$T_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{1}{2} E_\mu^\gamma E_\nu^\beta C_{\gamma\beta}^\alpha. \quad (6.4.82) \quad \text{mgh15}$$



Сравнивая (6.4.81) со вторым структурным уравнением Картана (6.4.38), мы получаем выражение для тензора кривизны на  $G/H$

$$R^\alpha{}_\beta = R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta da^\mu \wedge da^\nu = -\epsilon^\gamma \wedge \epsilon^\delta C_{\gamma\delta}^b C_{b\beta}^\alpha \Rightarrow R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta = -E_\mu^\gamma E_\nu^\delta C_{\gamma\delta}^b C_{b\beta}^\alpha. \quad (6.4.83) \quad \text{mgh17}$$

**Замечание 1.** Согласно (6.4.55) и (6.4.57) мы имеем представление группы  $H$ , которое действует в касательном пространстве  $T_e(K)$  к многообразию  $K = G/H$  в точке, соответствующей единичному элементу  $e \in K$ . Действие группы  $H$  в этом представлении сохраняет плоскую метрику  $\eta_{\alpha\beta}$  (6.4.63). Это следует из соотношений

$$\text{Tr}([Y_b, X_\alpha], X_\gamma) + \text{Tr}(X_\alpha, [Y_b, X_\gamma]) = 0 \Rightarrow C_{b\alpha}^\beta \eta_{\beta\gamma} + \eta_{\alpha\beta} C_{b\gamma}^\beta = 0.$$

Поэтому группа  $H$  в этом представлении реализуется как подгруппа в  $SO(p, d-p)$ . Так как связность  $\omega$  на  $G/H$  принимает значения в алгебре Ли  $\mathcal{A}(H)$ , то группа голономий многообразия  $G/H$  (см. определение группы голономий в конце Раздела 6.4.1) должна совпадать с  $H$  или быть подгруппой в ней.

**Замечание 2.** Пусть алгебра Ли  $\mathcal{A}(G)$  и ее ортонормальная подалгебра  $\mathcal{A}(H)$  таковы, что структурные константы  $C_{\gamma\beta}^\alpha$  равны нулю, то есть структурные соотношения (6.4.54) – (6.4.56) для  $\mathcal{A}(G)$  принимают вид

$$[Y_a, Y_b] = C_{ab}^d Y_d, \quad [Y_b, X_\alpha] = C_{b\alpha}^\beta X_\beta, \quad [X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^d Y_d. \quad (6.4.84) \quad \text{mgh18}$$

Тогда, согласно (6.4.82), кручение на  $G/H$  равно нулю и следовательно ковариантная производная от компонент репера также равна нулю:  $D_\lambda E_\mu^\alpha = 0$ . В этом случае из формулы (6.4.83) следует, что тензор кривизны для пространства  $G/H$  ковариантно постоянен,  $D_\lambda R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta = 0$ . Пространства с ковариантно постоянным тензором кривизны называются симметрическими. Таким образом, если группа  $G$  и ее подгруппа  $H$  таковы, что для их алгебр Ли можно выбрать базис, в котором структурные соотношения имеют вид (6.4.84), то однородное пространство  $G/H$  заведомо оказывается симметрическим пространством. Отметим, что алгебры со структурными соотношениями (6.4.84) называются  $\mathbb{Z}_2$ -градуированными алгебрами Ли, так как  $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}^{(0)} + \mathcal{A}^{(1)}$ , где подпространства  $\mathcal{A}^{(0)}$  и  $\mathcal{A}^{(1)}$  натянуты соответственно на образующие  $Y_a$  и  $X_\alpha$ , а соотношения (6.4.84) записываются в виде

$$[\mathcal{A}^{(i)}, \mathcal{A}^{(j)}] = \mathcal{A}^{(i+j) \bmod(2)}.$$

**Пример 2.** Для описания достаточно обширного класса симметрических пространств рассмотрим группу Ли  $G$ , состоящую из матриц  $(n+k) \times (n+k)$ . Пусть алгебра Ли группы  $G$  разбивается на два подпространства  $\mathcal{A}^{(0)}$  и  $\mathcal{A}^{(1)}$ , которые состоят из блочных матриц вида

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{nn} & 0_{nk} \\ \hline 0_{kn} & D_{kk} \end{array} \right) \in \mathcal{A}^{(0)}, \quad \left( \begin{array}{c|c} 0_{nn} & B_{nk} \\ \hline C_{kn} & 0_{kk} \end{array} \right) \in \mathcal{A}^{(1)}, \quad (6.4.85) \quad \text{mgh51}$$

где  $A_{nn}, B_{nk}, \dots$  — ненулевые блоки соответствующего размера  $(n \times n), (n \times k), \dots$ , а  $0_{nk}$  — нулевые  $(n \times k)$  матрицы. Тогда алгебра Ли, обладающая структурой (6.4.85),

будет иметь коммутационные соотношения вида (6.4.84) и вектора подпространства  $\mathcal{A}^{(0)}$  образуют ортонормальную подалгебру Ли в  $\mathcal{A}(G)$ . В этом случае однородное пространство  $G/H$ , где подгруппа  $H$  имеет алгебру Ли  $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}^{(0)}$ , является симметрическим пространством. Отсюда в частности следует, что все однородные пространства

$$SU(n+k)/(SU(n) \times SU(k)), \quad SO(n+k)/(SO(n) \times SO(k)), \quad (6.4.86) \quad \text{mgh54}$$

где подгруппы  $SO(n) \times SO(k)$  и  $SU(n) \times SU(k)$  вложены в  $SU(n+k)$  и  $SO(n+k)$  блочно-диагональным образом (то есть элементы этих подгрупп представляются в виде матриц типа  $\mathcal{A}^{(0)}$  (6.4.85)) являются симметрическими пространствами и не имеют кручения. Все однородные пространства, рассмотренные в разделе 6.2 (в том числе и пространство  $SU(2)/U(1)$ , детально обсуждавшееся чуть выше) представляют собой примеры симметрических пространств.

- **Задача 186.** Доказать, что однородные пространства

$$(G_L \times G_R)/G_V,$$

(смотри пример 11. в разделе 6.2) являются симметрическими. Указание. Пусть  $X_a^{(L)}$  и  $X_a^{(R)}$  — образующие алгебр Ли групп  $G_L$  и  $G_R$ , соответственно. Тогда  $Y_a = X_a^{(L)} + X_a^{(R)}$  — образующие диагональной подгруппы  $G_V$ , и  $X_a = X_a^{(L)} - X_a^{(R)}$ . Проверить для  $\{Y_a, X_b\}$  выполнение соотношений (6.4.84).

VRN

- **Задача 187.** Доказать, что однородные пространства

$$SO(2n)/U(n), \quad SU(n)/SO(n), \quad SU(2n)/Usp(2n), \quad Usp(2n)/U(n),$$

являются симметрическими. Для этого проверить, что соответствующие алгебры Ли имеют структуру (6.4.84).

Простейшие однородные пространства с кручением возникают, если рассмотреть матричную группу Ли  $G$ , алгебра Ли которой разбивается на два подпространства  $\mathcal{A}^{(0)}$  и  $\mathcal{A}^{(1)}$  вида

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{nn} & 0_{nk} \\ \hline 0_{kn} & 0_{kk} \end{array} \right) \in \mathcal{A}^{(0)}, \quad \left( \begin{array}{c|c} 0_{nn} & B_{nk} \\ \hline C_{kn} & D_{kk} \end{array} \right) \in \mathcal{A}^{(1)}. \quad (6.4.87) \quad \text{mgh55}$$

Алгебра Ли  $\mathcal{A}(G)$ , обладающая структурой (6.4.87), будет иметь в общем случае коммутационные соотношения (6.4.54) – (6.4.56), а элементы подпространства  $\mathcal{A}^{(0)}$  образуют ортонормальную подалгебру Ли в  $\mathcal{A}(G)$ . Из-за наличия ненулевых структурных констант  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  в (6.4.56) соответствующее однородное пространство  $G/H$  будет иметь ненулевое кручение (6.4.82).

- **Задача 188.** Рассмотреть однородные пространства

$$SU(n+k)/SU(n), \quad SO(n+k)/SO(n),$$

где  $n > k$ ,  $k \geq 2$  и вычислить для этих пространств коэффициенты кручения (6.4.82).

- *Задача 189.* Рассмотреть однородное пространство  $SU(3)/[U(1) \times U(1)]$ , где подгруппа  $U(1) \times U(1)$  образована генераторами подалгебры Картана в алгебре Ли группы  $SU(3)$ . Вычислить коэффициенты кручения (6.4.82) для пространства  $SU(3)/[U(1) \times U(1)]$ .

VRN

#### 6.4.4 Регулярные представления и инвариантные векторные поля на группах Ли.

BSF

Рассмотрим пространство гладких функций на  $n$ -мерной группе Ли  $G$ . Обозначим эти функции как  $\alpha(g)$ , где  $g \in G$ . Операторы  $\tilde{T}^{(R)}(h)$  правого регулярного представления, соответствующие элементам  $h \in G$ , действуют на функции  $\alpha(g)$  следующим образом (см. формулу (4.6.37))

$$[\tilde{T}^{(R)}(h)\alpha](g) = \alpha(g \cdot h) . \quad (6.4.88) \quad \text{mgh12b}$$

Пусть элемент  $h$  лежит в координатной окрестности единичного элемента  $e \in G$ . Тогда его можно представить в виде  $h = \exp(t^a X_a)$ , где  $X_a$  — образующие алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ , а  $\vec{t} = (t^1, \dots, t^n)$  — параметры элемента  $h$ . Разлагая  $h$  вблизи единичного элемента (при малых  $\{t^a\}$ ), мы получаем, исходя из (6.4.88), формулу

$$[\tilde{T}^{(R)}(X_a)\alpha](g) = \left. \frac{\partial}{\partial t^a} \alpha(g \cdot h(\vec{t})) \right|_{\vec{t}=0} , \quad (6.4.89) \quad \text{mgh12d}$$

которую можно рассматривать как определение правого регулярного представления алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ . Левую и правую часть в (6.4.89) можно воспринимать как функции от  $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$  — координат элемента  $g = g(\vec{x}) \in G$  в некоторой локальной координатной карте  $U \subset G$ , содержащей элемент  $g$ . Воспользуемся теперь соотношениями (3.1.78) и  $g(\vec{x}) \cdot h(\vec{t}) = g(F(\vec{x}, \vec{t}))$  (см. формулу (3.1.74) и ее обсуждение), в результате для (6.4.89) получаем

$$[\tilde{T}^{(R)}(X_a)\alpha](g) = \left. \frac{\partial}{\partial t^a} \alpha(F(\vec{x}, \vec{t})) \right|_{\vec{t}=0} = L_a^m(\vec{x}) \partial_m \alpha(\vec{x}) , \quad (6.4.90) \quad \text{mgh12x}$$

где для краткости мы ввели обозначение  $\alpha(\vec{x}) = \alpha(g(\vec{x}))$ . Таким образом, правое регулярное представление образующей  $X_i \in \mathcal{A}(G)$  реализуется как дифференциальный оператор первого порядка (лево-инвариантное векторное поле на  $G$ )

$$\tilde{T}^{(R)}(X_a) = L_a^m(\vec{x}) \partial_m \equiv \rho_L(X_a) . \quad (6.4.91) \quad \text{mgh22}$$

Аналогично, для левого регулярного представления (4.6.36) группы Ли  $G$  мы получаем соответствующее представление ее алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  в виде:

$$[T^{(R)}(X_a)\alpha](g) = \left. \frac{\partial}{\partial t^a} \alpha(h^{-1}(\vec{t}) \cdot g(\vec{x})) \right|_{\vec{t}=0} = -R_a^m(\vec{x}) \partial_m \alpha(\vec{x}) . \quad (6.4.92) \quad \text{mgh12y}$$

Таким образом, дифференциальные операторы (право-инвариантные векторные поля на  $G$ )

$$T^{(R)}(X_a) = -R_a^m(\vec{x}) \partial_m \equiv \rho_R(X_a) , \quad (6.4.93) \quad \text{mgh26}$$

реализуют левое регулярное представление алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ .

Образующие  $X_a$  удовлетворяют структурным соотношениям

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^d X_d, \quad (6.4.94) \quad \text{mgh21}$$

поэтому дифференциальные операторы первого порядка (6.4.91) и (6.4.93) также подчиняются структурным соотношениям

$$[\rho_L(X_a), \rho_L(X_b)] = C_{ab}^d \rho_L(X_d), \quad [\rho_R(X_a), \rho_R(X_b)] = C_{ab}^d \rho_R(X_d). \quad (6.4.95) \quad \text{mgh20}$$

Это следует из того, что по построению операторы  $\rho_L(X_a)$  и  $\rho_R(X_a)$  реализуют представления базисных элементов  $X_a$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ .

Пусть  $T$  — матричное представление группы Ли  $G$ . В этом случае элементы матриц представления  $\|T_{\alpha\beta}(g)\|$ , где  $g \in G$ , можно считать числовыми функциями на группе  $G$ . Операторы  $T^{(R)}(h)$  левого регулярного представления (4.6.36) действуют на функции  $T_{\alpha\beta}(g)$  следующим образом

$$[T^{(R)}(h) \cdot T_{\alpha\beta}](g) = T_{\alpha\beta}(h^{-1} \cdot g) = T_{\alpha\gamma}(h^{-1}) T_{\gamma\beta}(g). \quad (6.4.96) \quad \text{sff19}$$

Возьмем элемент  $h \in G$  достаточно близкий к единичному и представим его в виде  $h(\vec{t}) = \exp(t^a X_a)$ . Далее, дифференцируя (6.4.96) по  $t^a$  в точке  $\vec{t} = 0$ , мы получаем (сравните с (6.4.92))

$$[T^{(R)}(X_a) \cdot T_{\alpha\beta}](g(\vec{x})) = -T_{\alpha\gamma}(X_a) T_{\gamma\beta}(g(\vec{x})) = -R_a^m \partial_m T_{\alpha\beta}(g(\vec{x})). \quad (6.4.97) \quad \text{sff20}$$

Соотношения (6.4.96) и (6.4.97) в частности показывают, что подпространство функций, натянутое на элементы  $T_{\alpha\beta}(g)$  как на базис, является инвариантным по отношению к действию левого регулярного представления, поэтому левое регулярное представление приводимо и содержит в себе все матричные представления  $T$  группы  $G$  как подпредставления.

Аналогичные утверждения имеют место и для правого регулярного представления.

- **Задача 190.** Воспользовавшись определениями правого регулярного представления (6.4.88), (6.4.90) для группы  $G$  и ее алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ , доказать аналоги соотношений (6.4.96) и (6.4.97):

$$[\tilde{T}^{(R)}(h) \cdot T_{\alpha\beta}](g) = T_{\alpha\gamma}(g) T_{\gamma\beta}(h), \quad (6.4.98) \quad \text{sff21}$$

$$T_{\alpha\gamma}(g(\vec{x})) T_{\gamma\beta}(X_a) = L_a^m \partial_m T_{\alpha\beta}(g(\vec{x})). \quad (6.4.99) \quad \text{sff22}$$

Пусть  $G$  — матричная группа Ли и соответственно  $\mathcal{A}(G)$  — матричная алгебра Ли. В этом случае мы имеем равенства (3.1.80) и (3.1.81), которые можно переписать в виде

$$X_a \cdot g(\vec{x}) = R_a^m(\vec{x}) \partial_m g(\vec{x}) \Leftrightarrow g(\vec{x})^{-1} \cdot X_a = -R_a^m(\vec{x}) \partial_m g(\vec{x})^{-1}, \quad (6.4.100) \quad \text{mgh27}$$

$$g(\vec{x}) \cdot X_i = L_i^m(\vec{x}) \partial_m g(\vec{x}) = \rho_L(X_k) g(\vec{x}). \quad (6.4.101) \quad \text{mgh12}$$

Отметим, что эти равенства представляют собой частные случаи формул (6.4.97) и (6.4.99), где в качестве  $T$  выбрано определяющее представление матричной группы  $G$ .

С помощью равенств (6.4.97) и (6.4.99) можно непосредственно продемонстрировать справедливость структурных соотношений (6.4.95). Например, применяя формулу (6.4.99) дважды, получаем

$$\begin{aligned} [T(g(\vec{x})) \cdot T(X_a)] \cdot T(X_b) &= \rho_L(X_a) [T(g(\vec{x})) \cdot T(X_b)] = \\ &= \rho_L(X_a) \rho_L(X_b) T(g(\vec{x})) , \end{aligned} \quad (6.4.102) \quad \text{mgh19}$$

где для краткости мы опустили матричные индексы. Переставляя в (6.4.102) индексы  $a$  и  $b$  и вычитая получившееся равенство из изначального, с учетом соотношений  $[T(X_a), T(X_b)] = T([X_a, X_b])$  и (6.4.94) мы приходим к уравнению

$$([\rho_L(X_a), \rho_L(X_b)] - C_{ab}^d \rho_L(X_d)) T(g(\vec{x})) = 0 ,$$

из которого с учетом произвольности представления  $T$  следует (6.4.95).

- **Задача 191.** Пользуясь формулами (3.1.80) и (3.1.81) (или (6.4.100) и (6.4.101)), доказать, что при действии группы Ли  $G$  на себя слева и справа:

$$g(\vec{x}) \rightarrow g_L^{-1} \cdot g(\vec{x}) \cdot g_R , \quad \forall g_L, g_R \in G ,$$

компоненты  $R_a^m(\vec{x})$  и  $L_a^m(\vec{x})$  право- и лево- инвариантных векторных полей преобразуются следующим образом:

$$R_a^m(\vec{x}) \rightarrow \text{ad}(g_L)_a^b R_b^m(\vec{x}) , \quad L_a^m(\vec{x}) \rightarrow \text{ad}(g_R)_a^b L_b^m(\vec{x}) , \quad (6.4.103) \quad \text{mgh26a}$$

где  $\|\text{ad}(g)_a^b\|$  — матрица присоединенного представления (4.1.15) элемента  $g \in G$  в базисе  $X_a \in \mathcal{A}(G)$ . Это и оправдывает использование термина левоинвариантное (или правоинвариантное) векторное поле для  $\rho_L(X_a) = L_a^m \partial_m$  (или  $\rho_R(X_a) = -R_a^m \partial_m$ ).

ESF

#### 6.4.5 Операторы Лапласа на группах Ли и однородных пространствах.

BSF

Пусть группа Ли  $G$  полупроста. Определим невырожденную метрику в алгебре Ли  $\mathcal{A}(G)$  стандартным образом:  $\eta_{ab} = \text{Tr}(\text{ad}(X_a) \cdot \text{ad}(X_b))$ . Квадратичный оператор Казимира  $C_2$  (4.7.12) в регулярных представлениях  $\rho_L$  (6.4.91) и  $\rho_R$  (6.4.93) будет записываться в виде дифференциальных операторов второго порядка

$$\begin{aligned} \Delta_L \equiv \rho_L(C_2) &= \eta^{ab} L_a^m(\vec{x}) \partial_m L_b^j(\vec{x}) \partial_j , \\ \Delta_R \equiv \rho_R(C_2) &= \eta^{ab} R_a^m(\vec{x}) \partial_m R_b^j(\vec{x}) \partial_j . \end{aligned} \quad (6.4.104) \quad \text{mgh24}$$

Эти операторы называются операторами Лапласа на группе  $G$ . Из явного вида преобразований (6.4.103) следует, что операторы  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$  одновременно являются и право- и лево- инвариантными.

Напомним, что на группе  $G$  можно определить инвариантную метрику (см. формулы (3.1.76), (3.1.77) и (3.1.79))

$$\begin{aligned} g_{nm}(\vec{x}) &= [L^{-1}(\vec{x})]_n^a [L^{-1}(\vec{x})]_m^b \eta_{ab} = [R^{-1}(\vec{x})]_n^a [R^{-1}(\vec{x})]_m^b \eta_{ab} \iff \\ g^{nm}(\vec{x}) &= [L(\vec{x})]_a^n [L(\vec{x})]_b^m \eta^{ab} = [R(\vec{x})]_a^n [R(\vec{x})]_b^m \eta^{ab}. \end{aligned} \quad (6.4.105) \quad \text{mgh23}$$

При этом элементы матриц  $L_a^m(\vec{x})$  (или  $R_a^m(\vec{x})$ ) выступают в качестве компонент репера  $e_a^m(x)$ ; соответственно элементы  $[L^{-1}(\vec{x})]_m^a$  (или  $[R^{-1}(\vec{x})]_m^a$ ) интерпретируются как компоненты дуального репера  $e_m^a(x)$ . Здесь  $a$  – индекс плоского касательного пространства, а  $m$  – индекс, нумерующий компоненты касательных векторов, аналогичный индексу  $\mu$  (см. Раздел 6.4.1). С помощью метрики (6.4.105) на группе  $G$  строится стандартный оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \partial_n \sqrt{|\det(g)|} g^{nm} \partial_m, \quad (6.4.106) \quad \text{mgh25}$$

где  $\det(g) = \det(|g_{mn}|) = \det^{-1}(|g^{mn}|)$ .

**Утверждение 6.4.3** Для операторов  $\Delta$ ,  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$ , действующих в пространстве функций на группе  $G$ , имеет место тождество

$$\Delta = \Delta_L = \Delta_R, \quad (6.4.107) \quad \text{11rr03}$$

то есть, оператор Лапласа-Бельтрами (6.4.106) и операторы Лапласа  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$  (6.4.104), построенные из лево- и право-инвариантных векторных полей (6.4.91) и (6.4.93), совпадают.

**Доказательство.** Операторы  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$  (6.4.104) можно записать единым образом

$$\Delta' = \eta^{ab} e_b^n \partial_n e_a^m \partial_m,$$

где  $e_a^m = L_a^m(\vec{x})$  или  $e_a^m = -R_a^m(\vec{x})$ . Тогда для метрики (6.4.105) имеем  $g_{nm} = e_n^a e_m^b \eta_{ab}$ , откуда следует, что

$$|\det(g)| = e^2 \cdot |\det(\eta)|,$$

где  $e = \det |e_m^a|$ . Оператор (6.4.106) в терминах компонент  $e_m^a$  переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{e} \partial_n e e_b^n \eta^{ab} e_a^m \partial_m = \left[ \frac{1}{e} (\partial_n e) e_b^n \eta^{ab} + \eta^{ab} (\partial_n e_b^n) \right] e_a^m \partial_m + \eta^{ab} e_b^n \partial_n e_a^m \partial_m = \\ &= [e_d^r (\partial_n e_r^d) e_b^n \eta^{ab} + \eta^{ab} (\partial_n e_b^n)] e_a^m \partial_m + \Delta' = \\ &= [-e_r^d (\partial_n e_d^r) e_b^n \eta^{ab} + \eta^{ab} (\partial_n e_b^n)] e_a^m \partial_m + \Delta', \end{aligned} \quad (6.4.108) \quad \text{11rr05}$$

где мы учли, что  $e_d^r (\partial_n e_r^d) = -(\partial_n e_d^r) e_r^d$ . Векторные поля  $\rho(X_a) = e_a^m \partial_m$  реализуют представление образующих  $X_a$  алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  и согласно (6.4.95) мы имеем:

$$[e_a^m \partial_m, e_b^n \partial_n] = C_{ab}^d e_r^d \partial_r \Rightarrow e_a^m (\partial_m e_b^n) - e_b^m (\partial_m e_a^n) = C_{ab}^d e_d^n. \quad (6.4.109) \quad \text{11rr06}$$

Свернем обе части второго соотношения в (6.4.109) с  $e_n^a$  и учтем свойство антисимметрии (3.2.109) структурных констант  $C_{abd}$ , в результате получаем

$$(\partial_n e_b^n) - e_b^m e_n^a (\partial_m e_a^n) = C_{ab}^a = C_{abd} \eta^{ad} = 0 .$$

Из этого соотношения следует, что выражение в квадратных скобках в (6.4.108) равно нулю, откуда мы получаем  $\Delta = \Delta'$ . Согласно (6.4.105) оператор  $\Delta$  (6.4.106) одинаков вне зависимости от выбора  $e_a^m = L_a^m(\vec{x})$  или  $e_a^m = -R_a^m(\vec{x})$ , поэтому соотношение  $\Delta = \Delta'$  эквивалентно двум равенствам (6.4.107). ■

**Замечание 1.** В частности мы доказали, что если векторные поля  $\rho(X_a) = e_a^m \partial_m$  на некотором многообразии  $\mathcal{M}$  образуют полупростую алгебру Ли с определяющими соотношениями (6.4.109) и метрикой  $\eta_{ab}$ , то всегда имеет место тождество, связывающее оператор Лапласа-Бельтрами и квадратичный оператор Казимира:

$$\eta^{ab} e_a^n \partial_n e_b^m \partial_m = \frac{1}{e} \partial_n (e e_b^n \eta^{ab} e_a^m) \partial_m \equiv \Delta . \quad (6.4.110) \quad \text{11rr09}$$

**Замечание 2.** Оператор Лапласа  $\Delta = \rho_L(C_2) = \rho_R(C_2)$  (6.4.107) замечателен тем, что, будучи квадратичным оператором Казимира, он коммутирует с векторными полями (6.4.91) и (6.4.93):

$$[\rho_L(X_a), \Delta] = 0 = [\rho_R(X_a), \Delta] .$$

**Пример 1.** Построим оператор Лапласа  $\Delta$  (6.4.107) для группы  $G = SU(2)$  (сферы  $S^3$ ). Воспользуемся для этого параметризацией группы  $SU(2)$ , которая задана в (3.1.17). Из четырех координат  $\{x_\alpha\}$  независимыми будем считать три координаты  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Тогда для  $g(\vec{x}) \in SU(2)$  имеем

$$g(\vec{x})^{-1} \partial_m g(\vec{x}) = (x_0 - i\sigma_k x_k)(\partial_m x_0 + i\sigma_m) = i\sigma_r \left( x_0 \delta_{rm} + x_k \varepsilon_{kmr} + \frac{x_r x_m}{x_0} \right) , \quad (6.4.111) \quad \text{examp01}$$

где  $k, r, m = 1, 2, 3$  и мы использовали тождество  $x_0 \partial_m x_0 + x_m = 0$ . Выберем в качестве образующих группы  $SU(2)$  операторы  $X_r = i\sigma_r$ , где  $\sigma_r$  – матрицы Паули. Тогда, сравнивая (6.4.111) и (6.4.101), мы получаем

$$(L^{-1})_m^r = \left( x_0 \delta_{rm} + x_k \varepsilon_{kmr} + \frac{x_r x_m}{x_0} \right) \Rightarrow L_k^m(\vec{x}) = (x_0 \delta_{km} + x_r \varepsilon_{krm}) . \quad (6.4.112) \quad \text{examp02}$$

Таким образом, правое регулярное представление (6.4.91) для образующих  $X_k = i\sigma_k \in su(2)$  в терминах лево-инвариантных векторных полей записывается следующим образом

$$X_k = i\sigma_k \rightarrow \rho_L(X_k) = L_k^m(\vec{x}) \partial_m = x_0 \partial_k + x_r \varepsilon_{krm} \partial_m , \quad (6.4.113) \quad \text{examp03}$$

а для метрики (6.4.105) мы получаем выражение  $g^{mr} = \delta^{kj} L_k^m L_j^r = (\delta_{mr} - x_r x_m)$ . Окончательно, с учетом (6.4.113) оператор Лапласа (6.4.104) принимает вид:

$$\Delta_L = \rho_L(X_m) \rho_L(X_m) = \partial_k^2 - (x_k \partial_k)^2 - 2(x_k \partial_k) . \quad (6.4.114) \quad \text{examp04}$$

- **Задача 192.** Проверить, что дифференциальные операторы  $\rho_L(X_k)$  (6.4.113) удовлетворяют структурным соотношениям  $su(2)$ :

$$[\rho_L(X_k), \rho_L(X_m)] = -2 \varepsilon_{kmr} \rho_L(X_r) . \quad (6.4.115) \quad \text{mgh68}$$

Проверить, что оператор Лапласа (6.4.114) можно представить в стандартном виде (6.4.106), где  $g^{nm} = (\delta_{mn} - x_n x_m)$ ,  $|\det(g)|^{-1/2} = |\det(L_k^m)|$  и  $L_k^m$  определены в (6.4.112). Переписать оператор Лапласа (6.4.114) в координатах стереографической проекции (6.3.13) и в сферических координатах (3.1.85).

Оператор Лапласа  $\Delta$  (6.4.107) и (6.4.114) для группы  $G = SU(2)$  в другой параметризации (отличной от (3.1.17)), а именно в параметризации углов Эйлера (6.2.5), будет рассмотрен ниже при изучении представлений группы  $SU(2)$  (см. формулу (7.4.62)).

Так как группа  $G$  действует слева не только на себя, но и на любое свое однородное пространство  $G/H$ , то образующие алгебры  $\mathcal{A}(G)$  также можно реализовать как дифференциальные операторы (векторные поля) на однородном пространстве  $G/H$ . При этом построение дифференциальных реализаций алгебры  $\mathcal{A}(G)$  во многом повторяет изложенную выше конструкцию построения образующих  $\mathcal{A}(G)$  как векторных полей на  $G$ . Аналогом левого регулярного представления в этом случае выступает индуцированное представление (6.4.45). Обсудим этот вопрос подробнее.

Рассмотрим множество элементов  $k = k(\vec{a}) \in G$ , которые параметризуют однородное пространство  $G/H$ , где  $\vec{a} = (a^1, \dots, a^d)$  — координаты на однородном пространстве в некоторой локальной карте. Выберем ортонормальную подгруппу  $H$  в  $G$  и базис в  $\mathcal{A}(G)$  так, как это сделано в (6.4.54) – (6.4.56), тогда в качестве элементов  $k(\vec{a})$  в локальной окрестности единицы можно взять элементы (6.4.53). Запишем уравнение (6.4.41) в виде

$$g(\tau^\alpha, t^a) \cdot k(\vec{a}) = k(\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^d) \cdot \exp(\tilde{b}^a(\vec{a}, \tau, t) Y_a) , \quad (6.4.116) \quad \text{mgh61}$$

где

$$g(\tau^\alpha, t^a) = \exp(\tau^\alpha X_\alpha + t^a Y_a) ,$$

$\tilde{a}^\beta = \tilde{a}^\beta(\vec{a}, \tau, t)$  и параметры  $t^a, \tau^\alpha$  — малы. Рассмотрим простейшее индуцированное представление, заданное в (6.4.48), и перепишем соотношение (6.4.48) с учетом (6.4.116) в виде

$$[T(g(-\tau^\alpha, -t^a)) \cdot v](k(\vec{a})) = v(k(\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^d)) , \quad (6.4.117) \quad \text{mgh71}$$

где  $v$  — гладкая функция на однородном пространстве  $G/H$ . Продифференцируем соотношение (6.4.117) по  $t^a$  и  $\tau^\alpha$  и затем положим  $t^a = 0 = \tau^\alpha$ . В результате получаются соотношения

$$[T(Y_b) \cdot v](k(\vec{a})) = -R_b^\beta(\vec{a}) \frac{\partial}{\partial a^\beta} v(k(\vec{a})) \equiv \rho(Y_b) v(k(\vec{a})) , \quad (6.4.118) \quad \text{mgh28a}$$

$$[T(X_\alpha) \cdot v](k(\vec{a})) = -R_\alpha^\beta(\vec{a}) \frac{\partial}{\partial a^\beta} v(k(\vec{a})) \equiv \rho(X_\alpha) v(k(\vec{a})) , \quad (6.4.119) \quad \text{mgh29a}$$



где матрицы, определяющие право-инвариантные векторные поля, даются формулами

$$R_b^\beta(\vec{a}) = \frac{\partial \tilde{a}^\beta}{\partial t^b} \Big|_{t=0}, \quad R_\alpha^\beta(\vec{a}) = \frac{\partial \tilde{a}^\beta}{\partial \tau^\alpha} \Big|_{t=0}, \quad (6.4.120) \quad \text{mgh72}$$

и  $t = 0$  обозначает  $t^a = \tau^\alpha = 0$ . Таким образом, мы получили представление  $\rho$  алгебры  $\mathcal{A}(G)$  в виде векторных полей на  $G/H$ :

$$\rho(Y_b) = -R_b^\beta(\vec{a}) \partial_\beta, \quad \rho(X_\alpha) = -R_\alpha^\beta(\vec{a}) \partial_\beta. \quad (6.4.121) \quad \text{mgh31}$$

- *Задача 193.* Пусть группа  $G$  — матричная. С помощью дифференцирования равенства (6.4.116) по  $t^b$  и  $\tau^\alpha$  в точке  $t^b = 0 = \tau^\alpha$ , получить соотношения

$$Y_b \cdot k(\vec{a}) = R_b^\beta(\vec{a}) \partial_\beta k(\vec{a}) + k(\vec{a}) \bar{R}_b^d(\vec{a}) Y_d, \quad (6.4.122) \quad \text{mgh28}$$

$$X_\alpha \cdot k(\vec{a}) = R_\alpha^\beta(\vec{a}) \partial_\beta k(\vec{a}) + k(\vec{a}) \bar{R}_\alpha^b(\vec{a}) Y_b, \quad (6.4.123) \quad \text{mgh29}$$

где матрицы  $R$  определены в (6.4.120), а для матриц  $\bar{R}$  мы имеем

$$\bar{R}_b^d(\vec{a}) = \frac{\partial \tilde{b}^d}{\partial t^b} \Big|_{t=0}, \quad \bar{R}_\beta^d(\vec{a}) = \frac{\partial \tilde{b}^d}{\partial \tau^\beta} \Big|_{t=0}.$$

- *Задача 194.* Выберем  $k(\vec{a})$  в виде (6.4.53). Доказать, что в этом случае формула (6.4.122) записывается следующим образом:

$$Y_b \cdot k(\vec{a}) = a^\alpha C_{b\alpha}^\beta \partial_\beta k(\vec{a}) + k(\vec{a}) \cdot Y_b,$$

$$\text{то есть } \rho(Y_b) = -a^\alpha C_{b\alpha}^\beta \partial_\beta.$$

Пусть алгебра  $\mathcal{A}(G)$  полупроста, тогда оператор Лапласа на однородном пространстве  $G/H$ , соответствующий квадратичному оператору Казимира

$$C_2 = \eta^{ab} Y_a Y_b + \eta^{\alpha\xi} X_\alpha X_\xi,$$

дается формулой

$$\Delta_{G/H} = \rho(C_2) = \eta^{ab} R_a^\beta(\vec{a}) \partial_\beta R_b^\gamma(\vec{a}) \partial_\gamma + \eta^{\alpha\xi} R_\alpha^\beta(\vec{a}) \partial_\beta R_\xi^\gamma(\vec{a}) \partial_\gamma, \quad (6.4.124) \quad \text{mgh30}$$

где  $\|\eta^{ab}\|$  и  $\|\eta^{\alpha\xi}\|$  — матрицы, обратные к матрицам с элементами

$$\eta_{ab} = \text{Tr}(\text{ad}(Y_a)\text{ad}(Y_b)), \quad \eta_{\alpha\beta} = \text{Tr}(\text{ad}(X_\alpha)\text{ad}(X_\beta)).$$

Напомним, что метрика Киллинга на  $\mathcal{A}(G)$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \|\eta_{ab}\| & 0 \\ 0 & \|\eta_{\alpha\beta}\| \end{pmatrix}.$$

- **Задача 195.** Доказать, что  $\Delta_{G/H} = \Delta$ , то есть оператор (6.4.124) равен стандартному оператору Лапласа-Бельтрами (6.4.106), где метрика  $g_{mn}$  на однородном пространстве  $G/H$  определена согласно формулам (6.4.58) и (6.4.62). Указание: воспользоваться Замечанием 1 к Утверждению 6.4.3.

**Пример 2.** Найдем оператор Лапласа (6.4.124) для однородного пространства  $S^2 = SU(2)/U(1)$ . Воспользуемся параметризацией для пространства  $SU(2)/U(1)$  с помощью элементов (6.4.67):

$$k(\alpha) = I_2 \alpha^0 + i\sigma_1 \alpha^1 + i\sigma_2 \alpha^2, \quad (6.4.125) \quad \text{mgh62}$$

где параметры  $\alpha^{0,1,2} \in \mathbb{R}$  удовлетворяют соотношениям (6.4.68) и независимыми координатами на  $S^2 = SU(2)/U(1)$  как и прежде мы будем считать параметры  $\alpha^1, \alpha^2$ . Произвольный элемент группы  $SU(2)$  из локальной окрестности единицы представим в экспоненциальной форме  $g(\vec{t}) = \exp(it_k \sigma_k)$ , а элемент подгруппы  $U(1)$  выбираем в виде (6.4.64), то есть  $h = \exp(-ib\sigma_3)$ . Тогда уравнение (6.4.41), (6.4.116) для элемента  $g(\vec{t})$  близкого к единице (при малых параметрах  $t_i$  и соответственно при малом  $b$ ) запишется следующим образом

$$(I_2 + it_k \sigma_k) k(\alpha) = k(\tilde{\alpha}) (I_2 - ib\sigma_3). \quad (6.4.126) \quad \text{mgh65}$$

что эквивалентно уравнению

$$k(\alpha) + i(t_k \sigma_k k(\alpha) + b k(\alpha) \sigma_3) = k(\tilde{\alpha}). \quad (6.4.127) \quad \text{mgh64}$$

Подставим сюда выражение (6.4.125). Сравнивая коэффициенты в (6.4.127) при матрицах  $I_2, \sigma_k$ , мы вычисляем параметры  $\tilde{\alpha}_k$  и  $b$  с точностью до линейных членов по  $t_k$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \alpha^1 + t_1 \left( \alpha^0 - \frac{(\alpha^2)^2}{\alpha^0} \right) + t_2 \frac{\alpha^1 \alpha^2}{\alpha^0} + t_3 2 \alpha^2, \\ \tilde{\alpha}_2 &= \alpha^2 + t_1 \frac{\alpha^1 \alpha^2}{\alpha^0} + t_2 \left( \alpha^0 - \frac{(\alpha^1)^2}{\alpha^0} \right) - t_3 2 \alpha^1, \\ b &= -t_3 + \frac{1}{\alpha^0} (t_1 \alpha^2 - t_2 \alpha^1). \end{aligned} \quad (6.4.128) \quad \text{mgh63}$$

Дифференцируя (6.4.126) по  $t_k$  и полагая затем  $t_k = 0$ , мы получаем аналоги соотношений (6.4.122), (6.4.123)

$$\begin{aligned} X_1 \cdot k(\alpha) &= \left( \alpha^0 \partial_1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^0} (\alpha^1 \partial_2 - \alpha^2 \partial_1) \right) k(\alpha) - \frac{\alpha^2}{\alpha^0} k(\alpha) \cdot Y, \\ X_2 \cdot k(\alpha) &= \left( \alpha^0 \partial_2 - \frac{\alpha^1}{\alpha^0} (\alpha^1 \partial_2 - \alpha^2 \partial_1) \right) k(\alpha) + \frac{\alpha^1}{\alpha^0} k(\alpha) \cdot Y, \\ Y \cdot k(\alpha) &= -2 (\alpha^1 \partial_2 - \alpha^2 \partial_1) k(\alpha) + k(\alpha) \cdot Y, \end{aligned} \quad (6.4.129) \quad \text{mgh66}$$

где  $\partial_m = \frac{\partial}{\partial \alpha^m}$  для  $(m = 1, 2)$  и мы ввели обозначения  $X_m = i\sigma_m$ ,  $Y = i\sigma_3$  для образующих  $SU(2)$ . Представление для этих образующих в терминах право-инвариантных векторных полей (6.4.121) согласно (6.4.129) будет иметь вид

$$\begin{aligned} i\sigma_1 &\rightarrow \rho(X_1) = - \left( \alpha^0 \partial_1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^0} (\alpha^1 \partial_2 - \alpha^2 \partial_1) \right), \\ i\sigma_2 &\rightarrow \rho(X_2) = - \left( \alpha^0 \partial_2 - \frac{\alpha^1}{\alpha^0} (\alpha^1 \partial_2 - \alpha^2 \partial_1) \right), \\ i\sigma_3 &\rightarrow \rho(X_3) \equiv \rho(Y) = 2 (\alpha^1 \partial_2 - \alpha^2 \partial_1). \end{aligned} \quad (6.4.130) \quad \text{mgh67}$$

- **Задача 196.** Доказать, что операторы  $\rho(X_k)$ , полученные в (6.4.130), удовлетворяют структурным соотношениям (6.4.115) для алгебры Ли  $su(2)$ . Указание: воспользоваться тем, что  $[\alpha_0, (\alpha^1 \partial_2 - \alpha^2 \partial_1)] = 0$ .

Оператор Лапласа (6.4.124), соответствующий оператору Казимира для алгебры Ли  $su(2)$  в представлении (6.4.130) дается формулой

$$\Delta_{SU(2)/U(1)} = \rho(X_k) \rho(X_k) = \frac{1}{(\alpha^0)^2} \partial_m^2 - 2 \alpha^m \partial_m - \frac{1 + (\alpha^0)^2}{(\alpha^0)^2} (\alpha^m \partial_m)^2 ,$$

и представляет собой оператор Лапласа-Бельтрами (6.4.106) на двумерной сфере (6.4.68), записанный в координатах  $\alpha^m = (\alpha^1, \alpha^2)$ , с метрикой, полученной для  $S^2 = SU(2)/U(1)$  в (6.4.71), (6.4.72). Пример оператора  $\Delta_{G/H}$  (6.4.124) для случая однородного пространства  $G/H = SU(2)/U(1)$ , записанного в других координатах, а именно в сферических координатах (в параметризации углов Эйлера), будет рассмотрен ниже при изучении представлений группы  $SU(2)$  (см. формулу (7.4.62)).

ESF

#### 6.4.6 Сферические функции на однородных пространствах.

BSF

Пусть  $G$  — компактная группа Ли и  $H$  — подгруппа в  $G$ . Пусть  $T^{(\lambda)}$  — неприводимое представление группы  $G$  размерности  $N_\lambda$ , которое унитарно и действует в пространстве  $\mathcal{V}_\lambda$ . Унитарность означает, что в  $\mathcal{V}_\lambda$  задано положительно определенное и инвариантное скалярное произведение такое, что

$$\langle u | v \rangle = \langle T^{(\lambda)}(g) \cdot u | T^{(\lambda)}(g) \cdot v \rangle , \quad \forall |u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{V}_\lambda , \quad \forall g \in G .$$

Представление  $T^{(\lambda)}$  группы  $G$  одновременно является представлением и для ее подгруппы  $H \subset G$ , которое в общем случае может быть приводимым, то есть в  $\mathcal{V}_\lambda$  могут содержаться подпространства, инвариантные относительно действия подгруппы  $H$  в представлении  $T^{(\lambda)}$ . Пусть в  $\mathcal{V}_\lambda$  имеется такое одномерное инвариантное подпространство  $\mathcal{V}_\lambda^0$ , на которое  $H$  действует тривиально. В этом случае представление  $T^{(\lambda)}$  группы  $G$  называется представлением класса 1 относительно подгруппы  $H$ . Выберем в  $\mathcal{V}_\lambda$  ортонормированный базис векторов  $|\lambda, m\rangle$ , где  $m = 0, 1, \dots, N_\lambda - 1$ , так, чтобы первый вектор  $|\lambda, 0\rangle$  был базисным в одномерном подпространстве  $\mathcal{V}_\lambda^0$ . Он инвариантен относительно действия  $H$ :

$$T^{(\lambda)}(h) |\lambda, 0\rangle = |\lambda, 0\rangle , \quad \forall h \in H . \quad (6.4.131) \quad \text{sff07}$$

В выбранном базисе оператору  $T^{(\lambda)}(g)$  согласно правилу (2.2.33) сопоставляется матрица с элементами

$$T_{mr}^{(\lambda)}(g) = \langle \lambda, m | T^{(\lambda)}(g) | \lambda, r \rangle . \quad (6.4.132) \quad \text{sff01a}$$

Из соотношения (6.4.131) следует, что матричные элементы

$$T_{m0}^{(\lambda)}(g) = \langle \lambda, m | T^{(\lambda)}(g) | \lambda, 0 \rangle , \quad m = 0, 1, \dots, N_\lambda - 1 , \quad (6.4.133) \quad \text{sff01}$$

являются функциями на однородном пространстве  $G/H$ , так как мы имеем

$$\begin{aligned} \langle \lambda, m | T^{(\lambda)}(k \cdot h) | \lambda, 0 \rangle &= \langle \lambda, m | T^{(\lambda)}(k) \cdot T^{(\lambda)}(h) | \lambda, 0 \rangle = \\ &= \langle \lambda, m | T^{(\lambda)}(k) | \lambda, 0 \rangle , \quad \forall h \in H . \end{aligned} \quad (6.4.134) \quad \text{sff05}$$

Выберем элементы  $k \in G$ , которые параметризуют точки однородного пространства  $G/H$ , см. (6.4.40). Функции  $T_{m0}^{(\lambda)}$  на  $G/H$ , заданные в (6.4.133), называются присоединенными сферическими функциями представления  $T^{(\lambda)}$ . Среди этих функций имеется функция  $T_{00}^{(\lambda)}$ , которая инвариантна относительно как правых, так и левых сдвигов в группе  $G$  на элементы  $h \in H$ , и которая называется зональной сферической функцией представления  $T^{(\lambda)}$ .

Сферические функции  $T_{m0}^{(\lambda)}(k)$  на  $G/H$  составляют пространство  $\mathcal{Y}^{(\lambda)}$  некоторого специального представления группы  $G$ . Действительно, используя свойство гомоморфизма для представления  $T^{(\lambda)}$ , а также соотношения (6.4.41) и (6.4.134), мы получаем

$$T_{mr}^{(\lambda)}(g^{-1}) T_{r0}^{(\lambda)}(k) = T_{m0}^{(\lambda)}(k(g^{-1}, k)) . \quad (6.4.135) \quad \text{sff11}$$

Левую часть этой формулы (а, соответственно, и правую часть) можно рассматривать как результат действия некоторого линейного оператора  $\rho(g)$  на пространстве  $\mathcal{Y}^{(\lambda)}$ , которое образовано сферическими функциями  $T_{r0}^{(\lambda)}(k)$ :

$$\rho(g) \cdot T_{m0}^{(\lambda)}(k) = T_{m0}^{(\lambda)}(k(g^{-1}, k)) . \quad (6.4.136) \quad \text{sff08}$$

Последняя формула определяет некоторое отображение  $\rho$  из группы  $G$  в множество операторов, действующих на  $\mathcal{Y}^{(\lambda)}$ . Операторы  $\rho(g)$ , согласно (6.4.136), осуществляют сдвиги на однородном пространстве  $G/H$ :  $k \rightarrow k(g^{-1}, k)$ . Гомоморфность отображения  $\rho$ , заданного в (6.4.136), проверяется следующим образом

$$\begin{aligned} \rho(g_1) \cdot \rho(g_2) \cdot T_{m0}^{(\lambda)}(k) &= \rho(g_1) \cdot T_{m0}^{(\lambda)}(k(g_2^{-1}, k)) = T_{m0}^{(\lambda)}(k(g_2^{-1}, k(g_1^{-1}, k))) = \\ &= T_{m0}^{(\lambda)}(k(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}, k)) = \rho(g_1 \cdot g_2) \cdot T_{m0}^{(\lambda)}(k) . \end{aligned}$$

Таким образом, отображение  $\rho$  является представлением. На самом деле это представление есть не что иное как конечномерное подпредставление, вложенное в простейший вариант индуцированного представления, что следует из сравнения формулы (6.4.136) с (6.4.48) и (6.4.117)). Для элементов  $g$ , близких к единице, операторы  $\rho(g)$  (6.4.136) могут быть реализованы как экспоненты от векторных полей (6.4.121), то есть соответствующие векторные поля реализуют представление алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$ .

- **Задача 197.** Пользуясь определением (6.4.136) для представления  $\rho$  группы Ли  $G$  и равенствами (6.4.118), (6.4.119) и (6.4.135), построить соответствующее представление для алгебры Ли  $\mathcal{A}(G)$  и доказать соотношения

$$\begin{aligned} \rho(Y_a) \cdot T_{m0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) &= -R_a^\alpha(\vec{a}) \partial_\alpha T_{m0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) = -T_{mp}^{(\lambda)}(Y_a) T_{p0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) , \\ \rho(X_\alpha) \cdot T_{m0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) &= -R_\alpha^\beta(\vec{a}) \partial_\beta T_{m0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) = -T_{mp}^{(\lambda)}(X_\alpha) T_{p0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) . \end{aligned} \quad (6.4.137) \quad \text{sff12}$$

Пусть подгруппа  $H$  в  $G$  такова, что все неприводимые представления  $T^{(\lambda)}$  группы  $G$  являются представлениями класса 1 относительно подгруппы  $H$ . Такая подгруппа  $H$  называется массивной в  $G$ . В этом случае с помощью теоремы Петера–Вейля **4.6.5**

и ряда (4.6.41) можно доказать, что любая функция  $f(k)$  на однородном пространстве  $G/H$  разлагается по базисным сферическим функциям  $T_{m0}^{(\lambda)}(k)$ :

$$f(k) = \sum_{m,\lambda} C_\lambda^m T_{m0}^{(\lambda)}(k) = \sum_{m,\lambda} C_\lambda^m \langle \lambda, m | T^{(\lambda)}(k) | \lambda, 0 \rangle, \quad (6.4.138) \quad \text{sff02}$$

где элемент  $k \in G$  параметризует пространство  $G/H$ , а  $C_\lambda^m$  — коэффициенты разложения. Отметим, что все функции (6.4.138), рассматриваемые как функции на группе  $G$ , постоянны на левых смежных классах  $G/H$  и образуют подпространство  $L^2(G/H, d\mu) = \oplus_\lambda \mathcal{Y}^{(\lambda)}$  в пространстве  $L^2(G, d\mu)$ .

Итак, сферические функции  $T_{m0}^{(\lambda)}$  образуют базис в  $L^2(G/H, d\mu)$ . Более того для базисных функций  $T_{m0}^{(\lambda)}$  справедливо условие ортогональности. Это условие возникает из соотношений ортогональности (4.6.42), которые для функций  $T_{m0}^{(\lambda)}$  переписываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_\nu} \delta^{\lambda\nu} \delta_{m,m'} &= \frac{1}{V} \int d\mu(g) T_{m0}^{(\nu)*}(g) T_{m'0}^{(\lambda)}(g) = \\ &= \frac{1}{V} \int d\mu(k) \int d\mu(h) J(k, h) T_{m0}^{(\nu)*}(k \cdot h) T_{m'0}^{(\lambda)}(k \cdot h), \end{aligned} \quad (6.4.139) \quad \text{sff03}$$

где мы положили  $g = k \cdot h$  (элемент  $k \in G$  параметризует  $G/H$  и  $h \in H$ ) и заменили интеграл по группе  $G$  на интеграл по фактор-пространству  $G/H$  и интеграл по подгруппе  $H$ . Для этого мы представили меру  $d\mu(g)$  на группе  $G$  в виде произведения меры  $d\mu(h)$  на подгруппе  $H$  и меры  $d\mu(k)$  на однородном пространстве  $G/H$ :

$$d\mu(g) = d\mu(h) d\mu(k) J(k, h).$$

Здесь  $J(k, h)$  — якобиан преобразования, возникающий при переходе от одних координат элемента  $g \in G$  к другим координатам этого элемента, которые соответствуют представлению  $g = k \cdot h$ . Учитывая свойство (6.4.134), можно окончательно записать формулу (6.4.139) в виде условия ортогональности для сферических функций  $T_{m0}^{(\lambda)}$ :

$$\frac{1}{N_\nu} \delta^{\lambda\nu} \delta_{m,m'} = \frac{1}{V} \int d\mu(k) J(k) T_{m0}^{(\nu)*}(k) T_{m'0}^{(\lambda)}(k), \quad (6.4.140) \quad \text{sff04}$$

где функция  $J(k)$  дается интегралом по подгруппе  $H$ :  $J(k) = \int d\mu(h) J(k, h)$ .

Напомним, что для представления  $T^{(\lambda)}$  элементы матриц  $T^{(\lambda)}(g)$  можно рассматривать как функции на группе  $G$  и для них справедливы соотношения (6.4.97):

$$\rho_R(X_a) \cdot T_{mm'}^{(\lambda)}(g) = -T_{mp}^{(\lambda)}(X_a) T_{pm'}^{(\lambda)}(g), \quad (6.4.141) \quad \text{sff10}$$

где  $\rho_R(X_a) = -R_a^m \partial_m$ . Соотношение (6.4.141) вновь показывает, что левое регулярное представление приводимо и содержит в себе все неприводимые представления  $T^{(\lambda)}$ .

Далее напомним, что квадратичный оператор Казимира  $C_2 = \eta^{ab} X_a X_b$  принимает фиксированное значение в неприводимом представлении  $T^{(\lambda)}$  (см. формулу (4.7.11)):

$$T^{(\lambda)}(C_2) = c^{(\lambda)} I_\lambda.$$

Тогда, согласно (6.4.141), действие оператора Лапласа  $\Delta$  (6.4.107) на все функции  $T_{m,m'}^{(\lambda)}(g) = T_{m,m'}^{(\lambda)}(g(\vec{x}))$  имеет вид

$$\Delta T_{m,m'}^{(\lambda)}(g) = T_{m,p}^{(\lambda)}(C_2) T_{p,m'}^{(\lambda)}(g) = c^{(\lambda)} T_{m,m'}^{(\lambda)}(g),$$

то есть все элементы  $T_{m,m'}^{(\lambda)}(g(\vec{x}))$  — собственные функции оператора Лапласа  $\Delta$ .

Рассуждая аналогично, можно показать, пользуясь соотношениями (6.4.137), что сферические функции  $T_{m,0}^{(\lambda)}(k(\vec{a}))$ , как функции на однородном пространстве  $G/H$ , также являются собственными функциями оператора Лапласа  $\Delta_{G/H}$  (6.4.124):

$$\Delta_{G/H} T_{m,0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) = c^{(\lambda)} T_{m,0}^{(\lambda)}(k(\vec{a})) . \quad (6.4.142) \quad \text{sff06}$$

Конкретные примеры сферических функций  $T_{m,0}^{(\lambda)}(k(\vec{a}))$ , а также аналоги формул (6.4.140) и (6.4.142), будут построены и изучены для случая однородного пространства  $G/H = SO(3)/SO(2) = SU(2)/U(1) = S^2$  в следующей Главе 7 в Разделе 7.4.3. **ESF**

## 7 Конечномерные представления $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли.

### 7.1 Конечномерные представления алгебр Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{C})$ со старшим весом.

Мы уже знаем, что у алгебры  $su(2)$  с образующими  $\tau_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) и определяющими соотношениями (3.2.121) имеются по крайней мере три конечномерных представления. Это тривиальное одномерное представление  $T^{(0)} = T_0$ , такое что  $T^{(0)}(\tau_\alpha) = 0$ , определяющее двумерное представление  $T^{(1/2)} = T_{1/2}$  (4.7.15), реализованное матрицами Паули, и трехмерное присоединенное представление  $T^{(1)} = T_1$  (4.7.16).

В этом разделе мы покажем, что для алгебры  $su(2)$  существует бесконечный набор конечномерных неэквивалентных неприводимых представлений  $T^{(j)}$ , которые характеризуются неотрицательными целыми и полуцелыми числами  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$  (спинами) и имеют размерность  $(2j + 1)$ . Мы построим эти представления явно. Мы также убедимся, что построенные представления исчерпывают все конечномерные неприводимые представления алгебры  $su(2)$ . **VRN**

Для начала напомним, что алгебра Ли  $su(2)$  является вещественной формой алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ , а образующие  $\tau_\alpha$  алгебры  $su(2)$  одновременно являются и образующими алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ . Другой базис  $\{e_\pm, \mathbf{h}\}$  в алгебре  $sl(2, \mathbb{C})$  (см. (3.2.110)) связан с базисом  $\{\tau_\alpha\}$  простыми линейными соотношениями **VRN**

$$\begin{aligned} e_\pm &= i \tau_1 \mp \tau_2, \quad \mathbf{h} = i \tau_3, \\ \tau_1 &= -\frac{i}{2}(e_- + e_+), \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(e_- - e_+), \quad \tau_3 = -i \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (7.1.1) \quad \text{slso}$$

так что структурные соотношения (3.2.91) и (3.2.121) переходят друг в друга. Согласно Замечанию 1 раздела 4.4.1 имеется взаимнооднозначное соответствие между конечномерными комплексными представлениями алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  и ее вещественной формы  $su(2)$ : если известно представление алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ , то известны (согласно (7.1.1)) представления образующих  $\tau_i$  и, следовательно, представление алгебры  $su(2)$ , **VRN**

и наоборот. Отметим, что некоторые комплексные представления алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  могут рассматриваться как вещественные представления  $su(2)$  той же размерности (смотри, например, (4.7.16)). Более удобно строить неприводимые комплексные представления для алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ , поэтому в дальнейшем мы сконцентрируемся на рассмотрении представлений именно этой алгебры.

Далее, так как представление алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  – это гомоморфизм из  $sl(2, \mathbb{C})$  в ассоциативную алгебру линейных операторов, действующих в некотором векторном пространстве  $\mathcal{V}$ , то задача о построении представлений  $sl(2, \mathbb{C})$  эквивалентна задаче о построении представлений обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C}))$  (определение обертывающей алгебры для алгебры Ли дано в разделе 4.7). Для обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C}))$  определяющие соотношения (3.2.91) можно записать в виде

$$e_+ e_- = 2\mathbf{h} + e_- e_+, \quad \mathbf{h} e_{\pm} = e_{\pm} (\mathbf{h} \pm 1). \quad (7.1.2) \quad \text{li2}$$

В дальнейшем нам понадобится квадратичный оператор Казимира  $J^2 \in \mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C}))$ :

$$J^2 = \frac{1}{2}(e_- e_+ + e_+ e_-) + \mathbf{h}^2 = e_- e_+ + \mathbf{h}(\mathbf{h} + 1), \quad (7.1.3) \quad \text{kaz}$$

который получается из (4.7.13) заменой базиса (7.1.1) и который коммутирует со всеми образующими  $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C}))$ .

- **Задача 198.** Проверить, что оператор (7.1.3) удовлетворяет соотношениям:

$$[J^2, e_{\pm}] = 0, \quad [J^2, \mathbf{h}] = 0. \quad (7.1.4) \quad \text{j2}$$

Как уже отмечалось в разделе 4.7.2, согласно Лемме Шура образ элемента  $J^2$  в любом неприводимом представлении алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  пропорционален единичному оператору.

Пусть векторное пространство  $\mathcal{V}$  является пространством некоторого представления  $T$  алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ . Пространство  $\mathcal{V}$  можно разложить в прямую сумму подпространств  $\mathcal{V}_{\lambda}$ , нумеруемых собственными значениями  $\lambda$  образующей  $\mathbf{h}$ <sup>30</sup>,  $\mathcal{V} = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{V}_{\lambda}$ , где подпространства  $\mathcal{V}_{\lambda}$  определяются следующим образом

$$\mathcal{V}_{\lambda} = \{v^{(\lambda)} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{h} \cdot v^{(\lambda)} = \lambda v^{(\lambda)}\}.$$

Если  $v^{(\lambda)} \in \mathcal{V}_{\lambda}$ , то согласно (7.1.2) мы имеем  $e_+ v^{(\lambda)} \in \mathcal{V}_{\lambda+1}$  и  $e_- v^{(\lambda)} \in \mathcal{V}_{\lambda-1}$ , поскольку

$$\mathbf{h} e_{\pm} v^{(\lambda)} = e_{\pm} (\mathbf{h} \pm 1) v^{(\lambda)} = (\lambda \pm 1) e_{\pm} v^{(\lambda)}.$$

Таким образом, операторы  $e_+$  и  $e_-$ , действуя на собственные вектора оператора  $\mathbf{h}$ , производят новые собственные вектора оператора  $\mathbf{h}$ , причем собственные значения соответственно повышаются и понижаются на единицу. Вообще говоря, таким способом из вектора  $v^{(\lambda)}$  можно построить бесконечное число новых собственных векторов оператора  $\mathbf{h}$ :  $e_-^k v^{(\lambda)} \in \mathcal{V}_{\lambda-k}$  и  $e_+^n v^{(\lambda)} \in \mathcal{V}_{\lambda+n}$ , где  $k$  и  $n$  – любые целые неотрицательные

<sup>30</sup>В дальнейшем, где это не будет вызывать путаницы, мы для упрощения формул будем писать  $e_{\pm}$  и  $\mathbf{h}$  вместо  $T(e_{\pm})$  и  $T(\mathbf{h})$ .

числа. При этом, если вектора  $e_-^k v^{(\lambda)}$  и  $e_+^n v^{(\lambda)}$  не равны нулю ни при каких  $n$  и  $k$ , то пространство представления  $\mathcal{V}$  будет бесконечномерным, так как вектора  $e_-^k v^{(\lambda)}$  и  $e_+^n v^{(\lambda)}$  имеют разные собственные значения оператора  $\mathbf{h}$  и поэтому линейно независимы. Последнее свойство — следствие простого утверждения, которое мы сейчас докажем.

**Утверждение 7.1.1** *Ненулевые собственные вектора некоторого оператора  $\mathbf{h}$ , имеющие различные собственные значения, линейно независимы. Другими словами, пусть  $v$  — собственный вектор оператора  $\mathbf{h}$  с собственным значением  $\nu$  и  $v_k$  — набор собственных векторов оператора  $\mathbf{h}$  с другими собственными значениями  $\nu_k \neq \nu$  для всех  $k$ . Тогда  $v$  не может быть представлен как линейная комбинация  $v_k$ .*

**Доказательство.** Докажем это утверждение от противного. Выделим из набора собственных векторов  $v_k$  поднабор линейно независимых векторов  $v_\alpha$ ; при этом  $\nu_\alpha \neq \nu$  для всех  $\alpha$ . Предположим, что  $v = \sum_\alpha d_\alpha v_\alpha$ , то есть вектора  $v, v_1, v_2, \dots$ , имеющие разные собственные значения, линейно зависимы. Построим оператор  $\prod_\alpha (\mathbf{h} - \nu_\alpha)$  и подействуем им на обе части уравнения  $v = \sum_\alpha d_\alpha v_\alpha$ . Правая часть обнуляется, а для левой части получаем  $\prod_\alpha (\nu - \nu_\alpha) \cdot v$ , что равно нулю только если  $v \equiv 0$ . Следовательно,  $\sum_\alpha d_\alpha v_\alpha = 0$ , а это противоречит линейной независимости векторов  $v_\alpha$ . ■

Для получения конечномерных представлений алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  процедура построения собственных векторов оператора  $\mathbf{h}$  с возрастающими и убывающими собственными значениями должна обрываться, то есть должны выполняться условия  $e_-^{k+1} v^{(\lambda)} = 0 = e_+^{n+1} v^{(\lambda)}$  при каких-то фиксированных  $k$  и  $n$ . Эти условия определяют размерность  $\mathcal{V}$ , то есть размерность представления, и, как мы увидим ниже, однозначно фиксируют собственное значение оператора Казимира (7.1.3). Удобно начинать построение конечномерного неприводимого представления, начиная с собственного вектора  $v_0 = e_+^n v^{(\lambda)}$ , имеющего наибольшее собственное значение  $\lambda + n$ , и действуя на него "понижающим" оператором  $e_-$ , построить все базисные вектора пространства  $\mathcal{V}$ . Эквивалентно, можно начинать с собственного вектора  $v_0 = e_-^k v^{(\lambda)}$ , имеющего наименьшее собственное значение  $\lambda - k$ , и действовать на него "повышающим" оператором  $e_+$ .

**Определение 7.1.1** *Пусть существует такое  $\mathcal{V}_\lambda \neq \emptyset$ , что для всех ненулевых векторов  $v_0 \in \mathcal{V}_\lambda$  выполняется  $\mathcal{V}_{\lambda+1} = \emptyset$ , то есть*

$$e_+ v_0 = 0, \quad \mathbf{h} v_0 = \lambda v_0. \quad (7.1.5) \quad \text{lie33}$$

Вектора  $v_0 \in \mathcal{V}_\lambda$  называются старшими векторами, а их собственное значение  $\lambda$  называется старшим весом. Представление, которое порождается многократным действием образующих  $sl(2, \mathbb{C})$  на старший вектор  $v_0$ , называется представлением со старшим весом. Ненулевые вектора  $v \in \mathcal{V}_\mu$  такие, что  $\mathcal{V}_{\mu-1} = \emptyset$ , то есть

$$\mathbf{h} v = \mu v, \quad e_- v = 0, \quad (7.1.6) \quad \text{lie33m}$$

называются младшими векторами, а  $\mu$  — младшим весом. Соответственно представление, которое порождается действием образующих алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  на  $v$ , называется представлением с младшим весом.



Пусть  $\mathcal{V}$  – пространство неприводимого представления  $T$  алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим вектором  $v_0 \in \mathcal{V}$  и старшим весом  $\lambda$ . Будем порождать из  $v_0$  новые вектора, действуя на него ”понижающими” операторами  $e_-$ :

$$v_k := \frac{1}{k!} e_-^k v_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1.7) \quad \text{vvkk}$$

Пользуясь (7.1.2), легко проверить следующие формулы

$$\begin{aligned} (a) \quad & \mathfrak{h} v_k = (1/k!) \mathfrak{h} e_-^k v_0 = (1/k!) e_-^k (\mathfrak{h} - k) v_0 = (\lambda - k) v_k, \\ (b) \quad & e_- v_k = (1/k!) e_-^{k+1} v_0 = (k+1) v_{k+1}, \\ (c) \quad & e_+ v_k = (1/k!) e_+ e_-^k v_0 = (2\lambda - k + 1) v_{k-1} \quad (k \geq 0), \end{aligned} \quad (7.1.8) \quad \text{li3}$$

где в последнем равенстве мы полагаем  $v_{-1} = 0$ . Формулы (a) и (b) очевидны. Формула (c) получается, если подействовать на  $v_0$  левой и правой частью тождества

$$e_+ e_-^k = e_-^k e_+ + k e_-^{k-1} (2\mathfrak{h} - k + 1). \quad (7.1.9) \quad \text{li3a}$$

• **Задача 199.** Пользуясь соотношениями (7.1.2) вывести тождество (7.1.9).

Из (7.1.8)(a) следует, что все  $v_k \neq 0$  имеют различные собственные значения и, таким образом, согласно утверждению **7.1.1**, являются линейно независимыми.

Пусть  $\mathcal{V}$  конечномерное пространство  $\dim \mathcal{V} < \infty$ , которое порождается из  $v_0$  действием всех образующих  $sl(2, \mathbb{C})$ . Следуя традиции, сменим обозначения и обозначим старший вес как  $j$  (вместо  $\lambda$ ). Тогда существует такое наименьшее целое число  $n \geq 0$ , для которого  $v_n \neq 0$ , но  $v_{n+1} = 0$  и, следовательно,  $v_{n+k} = 0 \quad \forall k \geq 1$ . В этом случае в качестве базиса в  $\mathcal{V}$  можно выбрать вектора  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  с собственными значениями  $\mathfrak{h}$ :  $(j, j-1, j-2, \dots, j-n)$  и мы имеем разложение  $\mathcal{V}$  в сумму одномерных подпространств

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{V}_{j-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{j-n} \Rightarrow \dim \mathcal{V} = n + 1. \quad (7.1.10) \quad \text{razl}$$

Рассмотрим в этом случае формулу (7.1.8c) для  $k = n+1$ :  $e_+ v_{n+1} = (2j - n) v_n$ . Так как  $v_{n+1} = 0$ ,  $v_n \neq 0$ , то мы заключаем, что  $j = \frac{n}{2}$ , то есть старший вес должен равняться неотрицательному целому или полуцелому числу. Обозначим построенное конечномерное представление  $sl(2, \mathbb{C})$  как  $T^{(j)}$ .

С другой стороны, пусть старший вес равен неотрицательному целому или полуцелому числу  $j = \frac{n}{2}$ , тогда из (7.1.8) (c) следует, что  $e_+ v_{n+1} = 0$  и либо  $v_{n+1} = 0$  и мы получаем как и ранее конечномерное представление  $T^{(j)}$ , либо  $v_{n+1} \neq 0$  и мы имеем вектор  $v_{n+1}$ , который выступает как новый старший вектор (сравните с (7.1.5)):

$$e_+ v_{n+1} = 0, \quad \mathfrak{h} v_{n+1} = (j - n - 1) v_{n+1}, \quad (7.1.11) \quad \text{rs14}$$

из которого действием образующих  $sl(2, \mathbb{C})$  порождается векторное подпространство  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$ , натянутое на вектора  $v_k$  с  $k \geq n+1$ . Подпространство  $\mathcal{V}_1$  по построению (в силу (7.1.11)) будет инвариантным подпространством в  $\mathcal{V}$ , то есть представление  $T$  приводимо. Таким образом, только для  $v_{n+1} = 0$  представление со старшим весом  $j = \frac{n}{2}$  неприводимо.

- **Задача 200.** Доказать, что представление  $T^{(j)}$  со старшим весом  $j = \frac{n}{2}$  и  $v_{n+1} = 0$ , построенное выше, является неприводимым. Указание: доказать, что любой ненулевой вектор  $\sum_k \alpha_k v_k \in \mathcal{V}$ , действуя на него образующими  $e_+$  и  $e_-$ , можно перевести в любой базисный вектор  $v_k \in \mathcal{V}$ ,  $k = 0, \dots, n$ , то есть в  $\mathcal{V}$  нет нетривиальных инвариантных подпространств.

В дальнейшем мы будем обозначать множество целых неотрицательных чисел  $\{0, 1, 2, \dots\}$  как  $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ .

Итак, представление  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим весом конечномерно и неприводимо тогда и только тогда, когда старший вес равен  $j = n/2$ , где  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . При этом согласно (7.1.10) пространство представления со старшим весом  $j = n/2$  разлагается в сумму одномерных подпространств

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{-\frac{n}{2}} \oplus \mathcal{V}_{-\frac{n}{2}+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{\frac{n}{2}}, \quad (7.1.12) \quad \text{razlo}$$

и его размерность равна  $n+1$ . Базис в пространстве  $\mathcal{V}$  образован векторами  $v_k$  (7.1.7), где  $k = 0, 1, \dots, n$ . Наконец, собственные значения оператора  $\mathbf{h}$  на векторах  $v_k$  равны  $n/2 - k = j - k$  и следовательно мы имеем для спектра этого оператора

$$\text{Spec}(\mathbf{h}) : m = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (7.1.13) \quad \text{spec-h}$$

Таким образом, собственные значения  $m$  – целые, если  $j$  – целое, и полуцелые, если  $j$  – полуцелое.

Квадратичный оператор Казимира  $J^2$  (7.1.3) на всех векторах пространства неприводимого представления  $\mathcal{V}$  имеет одно и то же собственное значение, которое проще всего подсчитать, если подействовать им на старший вектор:

$$J^2 v_0 = (e_- e_+ + \mathbf{h}(\mathbf{h} + 1)) v_0 = j(j+1) v_0. \quad (7.1.14) \quad 260^{**}$$

Отсюда в частности следует, что представления  $T^{(j)}$  неэквивалентны для разных  $j$ , так как операторы  $T^{(j)}(J^2) = j(j+1) I_{2j+1}$  для разных  $j = n/2$ ,  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  невозможно свести друг к другу преобразованиями эквивалентности.

Все вышесказанное можно просуммировать в виде следующего утверждения.

**Утверждение 7.1.2** Все конечномерные неприводимые представления  $T^{(j)}$  для алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  (или  $su(2)$ ) являются представлениями со старшим весом  $j = \frac{n}{2}$ , где  $n$  – неотрицательное целое число. Размерность этих представлений определяется старшим весом и равна  $2j+1 = n+1$ . Для разных  $j$  представления  $T^{(j)}$  неэквивалентны.

Матричное представление алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим весом  $j = \frac{n}{2}$  в пространстве (7.1.12) задается аналогами формул (2.2.33):

$$\mathbf{h} \cdot v_k = v_\ell \tilde{T}_{\ell k}(\mathbf{h}), \quad e_\pm \cdot v_k = v_\ell \tilde{T}_{\ell k}(e_\pm), \quad (7.1.15) \quad \text{Te2he}$$

где согласно (7.1.8) мы имеем

$$\tilde{T}_{\ell k}(\mathbf{h}) = \left(\frac{n}{2} - k\right) \delta_{\ell k}, \quad \tilde{T}_{\ell k}(e_+) = (n - k + 1) \delta_{\ell, k-1}, \quad \tilde{T}_{\ell k}(e_-) = (k + 1) \delta_{\ell, k+1}, \quad (7.1.16) \quad 260^*$$

где  $\ell, k = 0, 1, \dots, n$  и  $\delta_{\ell, -1} = 0 = \delta_{\ell, n+1}$ . Отметим, что получающиеся таким образом матрицы  $\tilde{T}(\mathbf{h})$  и  $\tilde{T}(e_{\pm})$  вещественны и следовательно могут быть использованы в качестве вещественных представлений для алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  (соответствующие представления алгебры  $su(2)$  — комплексные для полуцелых  $j$  и эквивалентны вещественным для целых  $j$ ).

VRN:  
OK!

- **Задача 201.** Пользуясь формулами (7.1.16) выписать 1, 2, 3-мерные матричные представления ( $j = 0, 1/2, 1$ ) образующих  $\mathbf{h}$  и  $e_{\pm}$  алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ . Найти соответствующие представления для образующих  $\tau_{\alpha}$  алгебры  $su(2)$  и сравнить их с представлениями (4.7.15) и (4.7.16).

Как мы указывали выше, построенные неприводимые конечномерные представления  $T^{(j)}$  алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  одновременно являются и представлениями алгебры  $su(2)$ . В этом случае старший вес  $j = \frac{n}{2}$ , где  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , называется спином и соответствует  $(2j + 1)$  мерному неприводимому представлению алгебры  $su(2)$  (и, соответственно, группы  $SU(2)$ ). Мы знаем, что всякое представление  $\tilde{T}$  алгебры Ли  $su(2)$  (как и любой другой компактной алгебры Ли) эквивалентно антиэрмитовому представлению  $T$ . Из формул (7.1.1) следует, что в таком представлении матричные элементы операторов  $e_{\pm}$  должны обладать свойством

$$T_{\ell k}(e_-) = T_{k\ell}^*(e_+) , \quad (7.1.17) \quad \text{add-s25-**}$$

однако матричные элементы (7.1.16) этого свойства не имеют. Приведем матрицы (7.1.16) к виду, соответствующему (7.1.17). Для этого сделаем линейную замену базиса в пространстве  $\mathcal{V}$  представления  $T^{(j)}$  и определим вместо базисных элементов  $v_k$  ( $k = 0, \dots, 2j$ ) новые базисные элементы  $|j, m\rangle$  ( $m = -j, \dots, j - 1, j$ ) следующим образом

$$|j, m\rangle := \sqrt{(j+m)!(j-m)!} \, v_{j-m} = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(j-m)!}} \, e_-^{j-m} \cdot v_0 . \quad (7.1.18) \quad \text{emod}$$

Для выбранного в (7.1.18) базиса, исходя из равенств (7.1.15) и (7.1.16), мы получаем следующие матричные представления для образующих  $e_{\pm}$  и  $\mathbf{h}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \cdot |j, m\rangle &= m |j, m\rangle = |j, m'\rangle T_{m'm}(\mathbf{h}) , \\ e_{\pm} \cdot |j, m\rangle &= \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} |j, m \pm 1\rangle = |j, m'\rangle T_{m'm}(e_{\pm}) , \end{aligned} \quad (7.1.19) \quad \text{Te3he}$$

где

$$\begin{aligned} T_{m'm}(\mathbf{h}) &= m \delta_{m'm} , \quad T_{m'm}(e_+) = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m',m+1} , \\ T_{m'm}(e_-) &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m',m-1} . \end{aligned} \quad (7.1.20) \quad \text{Te4he}$$

При этом мы имеем  $T_{m'm}(e_+) = T_{mm'}(e_-)$ , то есть для матриц (7.1.20) с учетом их вещественности свойство (7.1.17) выполняется, и представление (7.1.20) алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  соответствует антиэрмитовому представлению алгебры  $su(2)$ .

Определим теперь в комплексном пространстве  $\mathcal{V}$  представления  $T^{(j)}$  скалярное произведение  $\langle \beta | \alpha \rangle$  двух векторов  $|\alpha\rangle = \sum_m \alpha_m |j, m\rangle$  и  $|\beta\rangle = \sum_m \beta_m |j, m\rangle$  следующим образом

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_m \beta_m^* \alpha_m, \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*, \quad (7.1.21) \quad \text{absp}$$

(здесь  $\alpha_m, \beta_m \in \mathbb{C}$ ). Относительно этого скалярного произведения вектора  $|j, m\rangle$  ортонормированы

$$\langle j, m' | j, m \rangle = \delta_{mm'}, \quad (7.1.22) \quad \text{absp1}$$

а матричные элементы (7.1.20) записываются, согласно (7.1.19), в виде

$$\langle j, m' | \mathbf{h} | j, m \rangle = T_{m'm}(\mathbf{h}), \quad \langle j, m' | e_{\pm} | j, m \rangle = T_{m'm}(e_{\pm}). \quad (7.1.23) \quad \text{VRN: } \Phi\text{-ла (7.1.23)}$$

Для дальнейшего нам удобно ввести дуальное к пространству  $\mathcal{V}$  пространство  $\mathcal{V}^*$ , которое реализовано как  $(2j+1)$ -мерное комплексное векторное пространство и состоит из векторов  $\langle \alpha | = \sum_m \langle j, m | \alpha_m^*$ . Таким образом,  $\mathcal{V}^*$  натянуто на базисные вектора  $\langle j, m |$ , где  $m = -j, \dots, j-1, j$ . Учитывая формулы (7.1.21) и (7.1.22), дуальные вектора  $\langle \alpha |$  можно рассматривать как эрмитово сопряженные вектора  $|\alpha\rangle^\dagger$ :

$$\langle \alpha | = |\alpha\rangle^\dagger, \quad \langle j, m | = |j, m\rangle^\dagger, \quad (7.1.24) \quad \text{Te9he}$$

а скалярное произведение  $\langle \beta | \alpha \rangle$  интерпретировать как свертку вектора  $|\alpha\rangle$  и дуального вектора  $\langle \beta |$ . Пользуясь формулами (7.1.22), (7.1.23) и (7.1.20) для дуального базиса мы получаем соотношения

$$\langle j, m | \cdot \mathbf{h} = \langle j, m | m, \quad \langle j, m | \cdot e_{\pm} = \langle j, m \mp 1 | \sqrt{(j \pm m)(j \mp m + 1)}. \quad (7.1.25) \quad \text{Te5he}$$

из которых для базисных векторов следуют выражения

$$\langle j, m | = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(j-m)!(2j)!}} \langle j, j | \cdot e_+^{j-m}. \quad (7.1.26) \quad \text{emod1}$$

Здесь  $\langle j, j | = |j, j\rangle^\dagger$  — дуальный старший вектор, который определяется, согласно VRN (7.1.5), уравнениями

$$\langle j, j | \cdot e_- = 0, \quad \langle j, j | \cdot \mathbf{h} = j \langle j, j |. \quad (7.1.27) \quad \text{emod2}$$

Соответственно для младшего дуального вектора мы имеем

$$\langle j, -j | \cdot e_+ = 0, \quad \langle j, -j | \cdot \mathbf{h} = -j \langle j, -j |. \quad (7.1.28) \quad \text{Te6he}$$

Ортонормированность векторов (7.1.22) согласована с формулами (7.1.25), что можно проверить непосредственно, записав

$$\langle j, m' | j, m \rangle = \sqrt{\frac{(j+m')!}{(j-m')!(2j)!}} \langle j, j | \cdot e_+^{j-m'} \cdot |j, m\rangle = \delta_{m',m} \langle j, j | j, j \rangle = \delta_{m',m}. \quad (7.1.29) \quad \text{emod3}$$

Базисные вектора (7.1.18) в представлении  $T^{(j)}$  характеризуются двумя числами: спином  $j$  (характеристика представления) и весом  $m$  — собственными значениями оператора  $\mathbf{h} = i\tau_3$  (“проекция оператора вектора спина на третью ось”), при этом веса

$m$  могут принимать, согласно (7.1.13), значения  $m = j, j-1, \dots, 1-j, -j$ . Квадрат оператора вектора спина в этом представлении равен

$$T^{(j)}(J^2) = -T^{(j)}(\tau_\alpha)T^{(j)}(\tau_\alpha) = j(j+1) I_{2j+1}, \quad (7.1.30) \quad \text{Vkaz}$$

что также согласуется с (7.1.14).

- **Задача 202.** Построить конечномерные представления  $sl(2, \mathbb{C})$  с младшим весом  $\mu$ . Доказать, что в этом случае  $\mu = -n/2$ , где  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Доказать, что  $(2j+1)$ -мерные представления  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим весом  $j = n/2$  и с младшим весом  $\mu = -n/2$  эквивалентны.

**Замечание.** Представления  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим весом  $j \neq n/2$  и младшим весом  $\mu \neq -n/2$ , где  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , являются бесконечномерными. У алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  имеются также бесконечномерные представления, которые не являются представлениями со старшим (или младшим) весом, то есть в пространствах этих представлений нет векторов, которые удовлетворяют (7.1.5) (или (7.1.6)) и которые можно интерпретировать как старший (младший) вектор.

## 7.2 Дифференциальная реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и представления со старшим весом.

### 7.2.1 Реализация алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ с помощью дифференциальных операторов.

Группа  $SL(2, \mathbb{C})$  действует в двумерном комплексном пространстве  $\mathbb{C}^2$ . Определим это действие несколько необычным образом. Зададим  $\mathbb{C}^2$  как двумерное векторное пространство всех линейных комбинаций

$$\alpha_1 s + \alpha_2 t = \alpha_\beta u^\beta, \quad \alpha_\beta \in \mathbb{C}, \quad (7.2.1) \quad \text{dr00}$$

натянутых на две переменные  $s = u^1$  и  $t = u^2$  как на базис ( $\alpha_\beta$  – координаты вектора в  $\mathbb{C}^2$ ). То есть мономы первого порядка  $s$  и  $t$  выступают в качестве базисных элементов в пространстве однородных полиномов первого порядка по  $s$  и  $t$ . Теперь определяющее представление группы  $SL(2, \mathbb{C})$  в пространстве полиномов (7.2.1) можно задать стандартным образом согласно (4.1.8)

$$T(g) \cdot (s, t) = (s, t) g = (sA_1^1 + tA_2^1, sA_1^2 + tA_2^2) = (s', t'). \quad (7.2.2) \quad \text{dr01a}$$

Здесь  $g = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix}$  – элемент группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Пусть этот элемент имеет экспоненциальное представление

$$g = \exp(a_1 \mathbf{h} + a_2 e_+ + a_3 e_-), \quad (7.2.3) \quad \text{dr01}$$

где  $a_i$  – параметры группы, а матричные образующие  $\mathbf{h}, e_{\pm} \in sl(2, \mathbb{C})$  даны в (3.2.110). Тогда, дифференцируя обе части равенства (7.2.2) по каждому из параметров  $a_i$  и полагая затем  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , получаем три соотношения

$$\begin{aligned} T(e_+) \cdot u &= u \cdot e_+ = (0, s), & T(e_-) \cdot u &= u \cdot e_- = (t, 0), \\ T(\mathbf{h}) \cdot u &= u \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2}(s, -t), \end{aligned} \quad (7.2.4) \quad \text{pre1}$$

где использовано обозначение для вектора  $(s, t) = u$ . Из соотношений (7.2.4) видно, что  $T(e_+)$ ,  $T(e_-)$  и  $T(\mathbf{h})$  можно реализовать как дифференциальные операторы

$$\hat{e}_+ := T(e_+) = s \partial_t, \quad \hat{e}_- := T(e_-) = t \partial_s, \quad \hat{\mathbf{h}} := T(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}(s \partial_s - t \partial_t). \quad (7.2.5) \quad \text{pre}$$

Эти операторы, по построению, удовлетворяют структурным соотношениям (3.2.91) для образующих  $\mathbf{h}, e_{\pm}$  алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ .

- **Задача 203.** Проверить, что дифференциальные операторы (7.2.5) удовлетворяют соотношениям (3.2.91).

Отметим еще раз, что преобразования (7.2.2) задают определяющее представление группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , а вектора (7.2.1), которые можно записать как  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ , образуют пространство этого представления.

Данную конструкцию можно обобщить следующим образом. Рассмотрим пространство  $\mathcal{F}$  гладких функций  $f(s, t) \equiv f(u)$  и определим в этом пространстве представление группы  $SL(2, \mathbb{C})$  с помощью соотношений (сравните с определением правого регулярного представления (6.4.88)):

$$[T(g) \cdot f](u) = f(u \cdot g). \quad (7.2.6) \quad \text{drg01}$$

Подставляя  $g$  в виде (7.2.3) и дифференцируя (7.2.6) по  $a_i$  в точке  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  мы получаем дифференциальное представление (7.2.5) для образующих алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  (сравните с формулами (6.4.90)):

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{h}) \cdot f](u) &= \left. \frac{\partial}{\partial a_1} f(u \cdot g) \right|_{a_i=0} = \frac{1}{2}(s \partial_s - t \partial_t) f(u), \\ [T(e_+) \cdot f](u) &= \left. \frac{\partial}{\partial a_2} f(u \cdot g) \right|_{a_i=0} = s \partial_t f(u), \\ [T(e_-) \cdot f](u) &= \left. \frac{\partial}{\partial a_3} f(u \cdot g) \right|_{a_i=0} = t \partial_s f(u). \end{aligned} \quad (7.2.7) \quad \text{drg02}$$

Таким образом, представление (7.2.5) алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  соответствует представлению группы Ли  $SL(2, \mathbb{C})$ , которое задано в (7.2.6).

Рассмотрим теперь транспонированный к  $u = (s, t)$  вектор-столбец  $\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{pmatrix}$  с компонентами  $\bar{s}, \bar{t}$ , которые также образуют векторное пространство однородных полиномов первой степени по переменным  $\bar{s}$  и  $\bar{t}$ :

$$\bar{\alpha}^1 \bar{s} + \bar{\alpha}^2 \bar{t} = \bar{\alpha}^\beta \bar{u}_\beta, \quad \bar{\alpha}^\beta \in \mathbb{C}, \quad (7.2.8) \quad \text{VRN, Ф-ла (7.2.8)}$$

и определим действие группы  $SL(2, \mathbb{C})$  в этом пространстве следующим образом

$$\bar{T}(g) \cdot \bar{u} = g^{-1} \cdot \bar{u} , \quad (7.2.9) \quad \text{dr03}$$

где матрица  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  задана в (7.2.2). Это преобразование, очевидно, совпадает с действием (4.1.11) представления  $SL(2, \mathbb{C})$ , контргradientного к определяющему. Отметим, что преобразование (7.2.9), одновременно с преобразованием (7.2.2), оставляет инвариантным свертку базисных векторов

$$(s, t) \left( \begin{array}{c} \bar{s} \\ \bar{t} \end{array} \right) = (s\bar{s} + t\bar{t}) = u^\beta \bar{u}_\beta \quad (\beta = 1, 2) , \quad (7.2.10) \quad \text{dr02.10}$$

которая является функцией от четырех переменных и принадлежит прямому произведению векторных пространств (7.2.1) и (7.2.8). Возьмем в (7.2.9) элемент  $g$  в виде (7.2.3) и продифференцируем обе части (7.2.9) по параметрам  $a_i$ , положив затем  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ . В результате получаем соотношения

$$\begin{aligned} \bar{T}(e_+) \cdot \bar{u} &= -e_+ \cdot \bar{u} = - \left( \begin{array}{c} \bar{t} \\ 0 \end{array} \right) , \quad \bar{T}(e_-) \cdot \bar{u} = -e_- \cdot \bar{u} = - \left( \begin{array}{c} 0 \\ \bar{s} \end{array} \right) , \\ \bar{T}(\mathbf{h}) \cdot \bar{u} &= -\mathbf{h} \cdot \bar{u} = -\frac{1}{2} \cdot \left( \begin{array}{c} \bar{s} \\ \bar{t} \end{array} \right) , \end{aligned} \quad (7.2.11) \quad \text{sopre1}$$

то есть мы снова можем определить  $\bar{T}(e_\pm)$  и  $\bar{T}(\mathbf{h})$  как дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} \bar{e}_+ &:= \bar{T}(e_+) = -\bar{t} \partial_{\bar{s}} , \quad \bar{e}_- := \bar{T}(e_-) = -\bar{s} \partial_{\bar{t}} , \\ \bar{\mathbf{h}} &:= \bar{T}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} (\bar{t} \partial_{\bar{t}} - \bar{s} \partial_{\bar{s}}) . \end{aligned} \quad (7.2.12) \quad \text{sopre}$$

Эти операторы, так же как и (7.2.5), образуют алгебру Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ , то есть удовлетворяют определяющим соотношениям (3.2.91).

- **Задача 204.** Проверить, что дифференциальное представление (7.2.12) для алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  соответствует представлению группы Ли  $SL(2, \mathbb{C})$  в пространстве  $\bar{\mathcal{F}}$  гладких функций  $f(\bar{u})$  (сравните с левым регулярным представлением (4.6.36)):

$$[\bar{T}(g) \cdot f](\bar{u}) = f(g^{-1} \cdot \bar{u}) . \quad (7.2.13) \quad \text{drg03}$$

- **Задача 205.** Проверить, что дифференциальные операторы (7.2.12), а также операторы (смотри (4.3.13))

$$T_{(p)}(e_\pm) = (\hat{e}_\pm + \bar{e}_\pm) , \quad T_{(p)}(\mathbf{h}) = (\hat{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{h}}) ,$$

действующие в пространстве гладких функций  $f(u, \bar{u})$  (считаем переменные  $u = (s, t)$  и  $\bar{u} = (\bar{s}, \bar{t})$  независимыми), удовлетворяют соотношениям (3.2.91). Доказать, что любые функции вида  $f(s\bar{s} + t\bar{t})$  являются решениями дифференциальных уравнений

$$T_{(p)}(e_\pm) \cdot f(s\bar{s} + t\bar{t}) = 0 , \quad T_{(p)}(\mathbf{h}) \cdot f(s\bar{s} + t\bar{t}) = 0 . \quad (7.2.14) \quad \text{sstt}$$

VRN,  
ф-ла  
(7.2.10)

VRN:  
Убрал три-  
виальность

Заметим, что преобразования (7.2.9), (7.2.11) можно получить из (7.2.2), (7.2.4) если отождествить

$$\bar{s} = t, \quad \bar{t} = -s \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} u^\beta, \quad (7.2.15) \quad \text{otojd}$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta}$  - антисимметричный тензор 2-ого ранга (2.2.8),  $\epsilon_{12} = 1$ . Соответственно, образующие (7.2.5) и (7.2.12) также переходят друг в друга с помощью преобразований (7.2.15). Эти факты говорят о том, что *определяющее и контргрессиентное к нему представления  $sl(2, \mathbb{C})$  эквивалентны*, и достаточно рассматривать только одно из этих представлений. VRN

Дифференциальная реализация для образующих  $\tau_\alpha$  алгебры  $su(2)$  получается из (7.2.5) и (7.2.12) с помощью преобразований (7.1.1).

### 7.2.2 Построение представлений со старшим весом для дифференциальных реализаций $sl(2, \mathbb{C})$ .

Действие образующих алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ , реализованных операторами (7.2.5), очевидным образом распространяется на бесконечномерное пространство  $\mathcal{F}$  функций  $f(s, t)$  от двух переменных  $s$  и  $t$ . Соответствующие формулы приведены в (7.2.7). Выделим в пространстве  $\mathcal{F}$  инвариантные подпространства конечномерных неприводимых представлений  $sl(2, \mathbb{C})$ , пользуясь техникой построения представлений со старшим весом. Для этого найдем старший вектор  $v_0(s, t) \in \mathcal{F}$  такой, что

$$\hat{e}_+ \cdot v_0 = 0, \quad \hat{h} \cdot v_0 = j v \quad \Rightarrow \quad s \partial_t v_0 = 0, \quad (s \partial_s - t \partial_t) v_0 = 2j v_0, \quad (7.2.16) \quad \text{stvtj0}$$

где  $j$  - старший вес. Решением этих дифференциальных уравнений, с точностью до произвольного постоянного множителя, является функция

$$v_0 = s^{2j} \in \mathcal{F}, \quad (7.2.17) \quad \text{stvtj}$$

которую мы и будем рассматривать как старший вектор в  $\mathcal{F}$ . Породим из этой функции, действуя на нее понижающими операторами  $\hat{e}_- = t \partial_s$ , последовательность векторов, аналогичных (7.1.7):

$$\begin{aligned} \hat{e}_- \cdot v_0 = 2j s^{2j-1} t &\Rightarrow \hat{e}_-^2 \cdot v_0 = 2j(2j-1) s^{2j-2} t^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ \hat{e}_-^k \cdot v_0 &= 2j(2j-1) \dots (2j-k+1) s^{2j-k} t^k, \dots \end{aligned} \quad (7.2.18) \quad \text{stvtj1}$$

При этом на каждом шаге степень  $s$  понижается на единицу, а степень  $t$  повышается на единицу, так что все вектора  $\hat{e}_-^k \cdot v_0$  оказываются мономами одной и той же, общей по переменным  $s$  и  $t$ , степени  $2j$ , которая определяется степенью старшего вектора (7.2.17). Если  $j = \frac{n}{2}$ , где  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , то последовательность векторов  $\hat{e}_-^k \cdot v_0$  оборвется при  $k = 2j + 1$ , так как  $\hat{e}_-^{2j+1} v_0 = 0$ . В этом случае из старшего вектора  $v_0$  (7.2.17) порождается  $(2j + 1)$  базисных векторов

$$T_m^j(s, t) = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} s^{j+m} t^{j-m} =: \langle s, t | j, m \rangle, \quad (7.2.19) \quad \text{tjm}$$

$$m = -j, -j+1, \dots, j,$$

которые образуют  $(2j + 1)$ -мерное пространство  $\mathcal{V}_{2j+1}$  неприводимого представления  $T^{(j)}$  алгебр Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  и  $su(2)$ . Здесь для мономов  $T_m^j(s, t)$  мы ввели обозначение



$\langle s, t | j, m \rangle$  вместо  $|j, m\rangle$ , чтобы отличать данную конкретную форму базисных векторов от векторов (7.1.18), которые использовались для абстрактного построения представления со старшим весом<sup>31</sup>. Более подробное описание таких обозначений, которые чрезвычайно удобны и называются обозначениями Дирака, содержится в [43] и в разделе 7.3, см. ниже.

Пространство  $\mathcal{V}_{2j+1}$ , натянутое на базисные векторы (7.2.19), состоит из всех однородных полиномов от двух переменных  $(s, t)$  общей степени  $2j$  (сравните с (7.2.1)):

$$P_{2j}(s, t) = \sum_{m=-j}^j \alpha_m T_m^j(s, t), \quad \alpha_m \in \mathbb{C}, \quad (7.2.20) \quad \text{p2jst}$$

и является конечномерным подпространством в  $\mathcal{F}$ , инвариантным относительно действия алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  (и  $su(2)$ ). Подпространство  $\mathcal{V}_{2j+1} \in \mathcal{F}$  будет одновременно пространством неприводимого представления  $T^{(j)}$  не только для алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  (и  $su(2)$ ), но и для соответствующей группы Ли  $SL(2, \mathbb{C})$  (и  $SU(2)$ ), согласно определению представления этой группы, данному в (7.2.6).

Нормировочный множитель в (7.2.19) выбран так, чтобы вектора (7.2.19) образовывали ортонормированный базис по отношению к скалярному произведению

$$(T(s, t), T'(s, t)) = T(\partial_s, \partial_t) \cdot T'(s, t) \Big|_{s=t=0}, \quad (7.2.21) \quad \text{noTT}$$

где  $T(s, t)$  и  $T'(s, t)$  – любые полиномы из  $\mathcal{F}$ . Скалярное произведение (7.2.21) эквивалентно скалярному произведению, заданному в (7.1.29), в силу их совпадения на базисных векторах в соответствующих пространствах представлений (более детальное обоснование такого скалярного произведения содержится ниже в Утверждении 7.3.2 подраздела 7.3.2). Напомним, что индекс  $m$  принимает в (7.2.19) целые значения, если  $j$  – целое, и полуцелые значения, если  $j$  – полуцелое.

В качестве примера приведем функции  $T_m^j(s, t)$  для значений  $j = \frac{1}{2}, 1$ :

- 1.)  $j = 1/2$  ( $m = \pm 1/2$ )  $\Rightarrow T_{-1/2}^{1/2} = t$ ,  $T_{1/2}^{1/2} = s$ ,
- 2.)  $j = 1$  ( $m = -1, 0, 1$ )  $\Rightarrow T_{-1}^1 = t^2/\sqrt{2}$ ,  $T_0^1 = st$ ,  $T_1^1 = s^2/\sqrt{2}$ .

Таким образом, в случае  $j = 1/2$  функции  $T_m^{1/2}$  воспроизводят базисные вектора определяющего представления  $u = (s, t)$ , которые использовались для построения дифференциальной реализации (7.2.5). В случае  $j = 1$  мы получаем базисные вектора для трехмерного присоединенного представления  $sl(2, \mathbb{C})$ .

- **Задача 206.** Построить конечномерные представления  $\bar{T}^{(j)}$  со старшим весом для контргрессиентного представления алгебры и группы Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  и  $SL(2, \mathbb{C})$ , которые заданы в (7.2.12) и (7.2.13). Показать, что базисные вектора в пространстве этих представлений реализуется однородными мономиями типа (7.2.19):

$$\bar{T}_m^j = \frac{(-1)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \bar{s}^{j-m} \bar{t}^{j+m}. \quad (7.2.22) \quad \text{stjm}$$

<sup>31</sup>В этом разделе для упрощения формул мы будем опускать часть  $\langle s, t |$  в обозначениях  $\langle s, t | j, m \rangle$ .

Отметим, что при отождествлении (7.2.15) мы имеем  $\bar{T}_m^j = T_m^j$ , как и следовало ожидать.

По построению все вектора (7.2.19) являются собственными векторами для дифференциального оператора  $\hat{h}$  (7.2.5):

$$\hat{h} T_m^j = m T_m^j \Leftrightarrow \hat{h} |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (7.2.23) \quad \text{stvtj31}$$

(напомним, что в этом разделе мы договорились для краткости опускать часть  $\langle s, t|$  в обозначениях  $\langle s, t|j, m\rangle$  для векторов (7.2.19)). Кроме того, пользуясь явными формулами для образующих (7.2.5), мы получаем формулы

VRN

$$\begin{aligned} \hat{e}_+ |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle, \\ \hat{e}_- |j, m\rangle &= \sqrt{(j-m+1)(j+m)} |j, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (7.2.24) \quad \text{stvtj3}$$

Формулы (7.2.23) и (7.2.24) совпадают с (7.1.19) и (7.1.20), при этом, как мы уже говорили, базисные вектора (7.2.19) удовлетворяют условию ортонормированности (7.1.22) в скалярном произведении (7.2.21). Таким образом, мы воспроизвели в формализме дифференциальных реализаций результаты раздела 7.1.

Те же формулы (7.2.23) и (7.2.24) имеют место и для контргрессиентных представлений (7.2.12) и (7.2.22), что следует из эквивалентности (7.2.15).

- **Задача 207.** Получить обобщения формул (7.2.24):

$$\hat{e}_\pm^k |j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j \pm m + k)!(j \mp m)!}{(j \pm m)!(j \mp m - k)!}} |j, m \pm k\rangle. \quad (7.2.25) \quad \text{stvtj33}$$

BSF

Рассмотрим прямое произведение  $T^{(j)} \otimes \bar{T}^{(j)}$  двух неприводимых представлений  $T^{(j)}$  и  $\bar{T}^{(j)}$ , действующих в функциональных пространствах с базисами (7.2.19) и (7.2.22), соответственно. В качестве базиса в пространстве представления  $T^{(j)} \otimes \bar{T}^{(j)}$  можно выбрать все мономы вида  $T_m^j(u) \bar{T}_{m'}^j(\bar{u})$ , где  $m, m' = -j, \dots, j$ . Представление  $T^{(j)} \otimes \bar{T}^{(j)}$  в общем случае приводимо и в его разложении по неприводимым представлениям содержится тривиальное одномерное представление. Это представление понадобится нам ниже, при вычислении коэффициентов Клебша-Гордана (см. раздел 7.5.4), поэтому мы выделим его из  $T^{(j)} \otimes \bar{T}^{(j)}$  явно. Для этого рассмотрим функцию  $(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j}$ , инвариантную относительно преобразований (7.2.6) и (7.2.13) (смотри также (7.2.14)), где  $j = n/2$  и  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ , и разложим ее с помощью формулы бинома Ньютона:

$$(s\bar{s} + t\bar{t})^{2j} = \sum_{m=-j}^j \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} (s\bar{s})^{j+m} (t\bar{t})^{j-m} = (2j)! \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \bar{T}_{-m}^j T_m^j. \quad (7.2.26) \quad \text{sstt1}$$

Правая часть этого соотношения очевидно является вектором в пространстве представления  $T^{(j)} \otimes \bar{T}^{(j)}$  алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  (группы  $SL(2, \mathbb{C})$ ) и этот вектор — инвариант по

отношению к преобразованиям (7.2.6) и (7.2.13) в силу инвариантности левой части (7.2.26). Таким образом, правая часть (7.2.26) дает нам инвариантную свертку базисных векторов  $T_m^j$  (7.2.19) и  $\bar{T}_m^j$  (7.2.22) и определяет базисный вектор пространства тривиального одномерного подпредставления в  $T^{(j)} \otimes \bar{T}^{(j)}$ .

VRN

ESF

Любой однородный полином  $P_{2j}(s, t)$ , составленный как линейная комбинация базисных мономов (7.2.19), может быть записан в виде

$$P_{2j}(s, t) = t^{2j} \phi_{2j}(z), \quad (7.2.27) \quad \text{pphi}$$

где мы сделали замену переменных  $s, t \rightarrow z = s/t, t$  и определили полином  $\phi_{2j}(z)$  степени  $2j$  от одной переменной  $z = s/t$ . В новых переменных  $(z, t)$  операторы  $\hat{e}_\pm, \hat{h}$  (7.2.5) записываются следующим образом

$$\hat{e}_+ = zt\partial_t - z^2\partial_z, \quad \hat{e}_- = \partial_z, \quad \hat{h} = z\partial_z - \frac{1}{2}t\partial_t, \quad (7.2.28) \quad \text{pphi03}$$

Так как действие операторов  $\hat{e}_\pm, \hat{h}$  на полиномы  $P_{2j}(s, t)$  не меняет их степень однородности, то, пользуясь (7.2.27) и (7.2.28), мы можем определить, как эти операторы действуют в пространстве полиномов  $\phi_{2j}(z)$

$$\hat{e}_\pm \cdot (t^{2j} \phi_{2j}(z)) = t^{2j} T_z(e_\pm) \cdot \phi_{2j}(z), \quad \hat{h} \cdot (t^{2j} \phi_{2j}(z)) = t^{2j} T_z(h) \cdot \phi_{2j}(z), \quad (7.2.29) \quad \text{pphi04}$$

где

$$T_z(e_+) = 2jz - z^2\partial_z, \quad T_z(e_-) = \partial_z, \quad T_z(h) = z\partial_z - j. \quad (7.2.30) \quad \text{s124}$$

Таким образом, формулы (7.2.30) задают представление алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  в пространстве полиномов  $2j$ -го порядка от одной переменной  $z$ .

VRN

- **Задача 208.** Доказать, что операторы (7.2.30) образуют базис алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ . Вычислить оператор Казимира  $J^2$  для реализации (7.2.30).
- **Задача 209.** Для реализации (7.2.30) алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  найти старший вектор  $v_0$ :

$$e_+ v_0 = 0, \quad h v_0 = \lambda v_0,$$

доказать, что  $\lambda = j$ , и построить представление  $T$  для  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим весом  $\lambda = j$ . Показать, что  $T$  – конечномерное представление, только если  $2j$  – целое неотрицательное число. Описать в этом случае пространство представления  $T$  и найти его размерность. Описать бесконечномерные представления  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим весом в случае  $2j \neq \mathbf{Z}_{\geq 0}$ .

## 7.3 Обозначения Дирака.

### 7.3.1 Бра и кет вектора. Координатное и импульсное представление.

Рассмотрим комплексное векторное (конечномерное или бесконечномерное) пространство  $\mathcal{V}$ . Вектора в  $\mathcal{V}$  будем обозначать как  $|\Psi\rangle$ , где в качестве  $\Psi$  мы можем, вообще

VRN:  
помечен-  
ные мелкие  
правки  
по всему  
разделу

говоря, использовать несколько символов, индексов, чисел и т.д., характеризующих данный вектор. Мы уже использовали такие обозначения ранее в (7.1.18) и (7.2.19). Рассмотрим также дуальное к  $\mathcal{V}$  комплексное векторное пространство  $\mathcal{V}^*$  линейных функционалов на  $\mathcal{V}$ . Будем обозначать вектора из  $\mathcal{V}^*$  как  $\langle\Phi|$ . Тогда по определению каждому  $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^*$  соответствует функция:  $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ , которую обозначим как  $\langle\Phi|\Psi\rangle$ , при этом

$$\langle\Phi|\Psi\rangle \in \mathbb{C}, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{V}. \quad (7.3.31) \quad \text{VRN dira01}$$

Определение (7.3.31) можно рассматривать с дуальной точки зрения, а именно, каждому вектору  $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$  соответствует линейный функционал:  $\mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{C}$ . Выражение  $\langle\Phi|\Psi\rangle$  мы будем называть сверткой двух векторов  $|\Psi\rangle$  и  $\langle\Phi|$ . Пусть в  $\mathcal{V}$  задан базис  $|\alpha\rangle$ , где индекс  $\alpha$ , нумерующий базисные вектора, обозначает в общем случае набор индексов (мульти-индекс). Индексы, входящие в мульти-индекс  $\alpha$ , могут принимать как непрерывные, так и дискретные значения. Базис векторов  $\langle\beta|$  в  $\mathcal{V}^*$  называется дуальным к базису  $|\alpha\rangle \in \mathcal{V}$ , если  $\beta$  обозначает тот же тип мульти-индекса, что и  $\alpha$ , и выполняется условие ортонормированности

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \delta_{\alpha,\beta}, \quad (7.3.32) \quad \text{VRN dira02}$$

где  $\delta_{\alpha,\beta}$  — произведение символов Кронеккера и дельта-функций от индексов, входящих в  $\alpha$  и  $\beta$ , в зависимости от того, принимают ли эти индексы дискретные или непрерывные значения. Согласно (7.3.32) любые вектора  $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$  и  $\langle\Phi| \in \mathcal{V}^*$  разлагаются по соответствующим базисным векторам следующим образом

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha|\Psi\rangle, \quad \langle\Phi| = \sum_{\alpha} \langle\Phi|\alpha\rangle \langle\alpha|, \quad (7.3.33) \quad \text{dira03}$$

где  $\sum_{\alpha}$  обозначает многократный интеграл и многократную сумму по непрерывным и дискретным индексам, входящим в мульти-индекс  $\alpha$ .

Для любого линейного оператора  $T$ , действующего в  $\mathcal{V}$ , мы можем определить оператор  $T$ , который действует в  $\mathcal{V}^*$ , и обратно, согласно правилу

$$\langle\Phi|(T \cdot |\Psi\rangle) = (\langle\Phi| \cdot T) |\Psi\rangle, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{V}, \quad \forall \langle\Phi| \in \mathcal{V}^*, \quad (7.3.34) \quad \text{dira05}$$

при этом оператор  $T$  действует на  $\mathcal{V}$  слева, а на  $\mathcal{V}^*$  справа. Из соотношений (7.3.33) следует, что единичный оператор  $I$ , действующий в пространствах  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{V}^*$ , разлагается по полной системе базисных векторов следующим образом:

$$I = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha|, \quad (7.3.35) \quad \text{VRN dira03b}$$

а свертка  $\langle\Phi|\Psi\rangle$  представляется в виде

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \langle\Phi|\alpha\rangle \langle\alpha|\Psi\rangle. \quad (7.3.36) \quad \text{dira03a}$$

Линейные операторы  $T$ , заданные на пространстве  $\mathcal{V}$ , имеют "матричные" представления  $\langle\beta|T|\alpha\rangle$  (сравните с (2.2.33) и (2.2.37)), которые действуют в пространстве функций  $\langle\alpha|\Psi\rangle$  (координат вектора  $|\Psi\rangle \in \mathcal{V}$ )

$$T|\beta\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle\alpha|T|\beta\rangle \Rightarrow \langle\beta|T|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} \langle\beta|T|\alpha\rangle \langle\alpha|\Psi\rangle, \quad (7.3.37) \quad \text{dira03d}$$

где мы воспользовались формулой (7.3.35) для единичного оператора.

Установим взаимно однозначное соответствие между векторами пространств  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{V}^*$ , потребовав выполнения следующего свойства для свертки

$$(\langle \Phi | \Psi \rangle)^* = \langle \Psi | \Phi \rangle, \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{V}, \quad \forall \langle \Phi| \in \mathcal{V}^*, \quad (7.3.38) \quad \text{dira04}$$

где  $*$  обозначает комплексное сопряжение. Тогда координаты векторов  $\langle \Phi|$  и  $|\Phi\rangle$  сопряжены друг другу:

$$(\langle \alpha | \Phi \rangle)^* = \langle \Phi | \alpha \rangle, \quad (7.3.39) \quad \text{dira06}$$

а свертка (7.3.36) записывается в виде

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{\alpha} (\langle \alpha | \Phi \rangle)^* \langle \alpha | \Psi \rangle. \quad (7.3.40) \quad \text{dira07}$$

Из соотношений (7.3.33) и (7.3.39) следует, что вектор  $\langle \Phi| \in \mathcal{V}^*$  можно рассматривать как эрмитово сопряженный вектор к  $|\Phi\rangle \in \mathcal{V}$ , то есть  $(|\Phi\rangle)^\dagger = \langle \Phi|$ , а свертка

$$\langle \Phi | \Psi \rangle \equiv (|\Phi\rangle)^\dagger |\Psi\rangle, \quad (7.3.41) \quad \text{dira08}$$

в этом случае интерпретируется как эрмитово скалярное произведение в комплексном пространстве  $\mathcal{V}$  (см. определение 2.2.8). Для того, чтобы правая часть (7.3.40) имела смысл, необходимо потребовать квадратичной интегрируемости и суммируемости для функций  $\langle \alpha | \Phi \rangle$  по переменным  $\alpha$ . В общем случае квадратичная интегрируемость и суммируемость понимается здесь в классе обобщенных функций. Наконец, пользуясь (7.3.34) и (7.3.41), определим оператор  $H^\dagger$ , эрмитово сопряженный к  $H$ , следующим образом

$$\langle \Psi | H^\dagger | \Phi \rangle = (\langle \Phi | H | \Psi \rangle)^* \Rightarrow \langle \Phi | \cdot H^\dagger = (H \cdot | \Phi \rangle)^\dagger.$$

Оператор  $H$ , для которого выполняются равенства

$$H^\dagger = H \Leftrightarrow \langle \alpha | H | \beta \rangle = (\langle \beta | H | \alpha \rangle)^*,$$

называется эрмитовым.

В квантовой механике состояниям квантовой системы соответствуют вектора из комплексного векторного пространства  $\mathcal{V}$  и отождествленного с ним дуального пространства  $\mathcal{V}^*$ , а динамическим наблюдаемым данной системы, таким как координата, импульс, орбитальный момент и т.д., соответствуют эрмитовы операторы, действующие в  $\mathcal{V}$ . Обозначения  $\langle \Phi|$  и  $|\Psi\rangle$  для векторов из пространств  $\mathcal{V}^*$  и  $\mathcal{V}$  были введены П. Дираком [43], который назвал их бра- и кет- векторами, соответственно. Названия бра- и кет- происходят от частей "bra" и "ket" английского слова "bracket".

Выделим из множества всех наблюдаемых квантовомеханической системы полный набор коммутирующих наблюдаемых  $H_i = H_i^\dagger$  ( $i = 1, 2, \dots$ ):  $[H_i, H_j] = 0$ . Собственные значения операторов  $H_i$  обозначим как  $\alpha_i$ , а их собственные вектора как  $|\alpha\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \dots\rangle$ :

$$H_i |\alpha\rangle = \alpha_i |\alpha\rangle. \quad (7.3.42) \quad \text{dira09}$$

VRN

VRN

- **Задача 210.** Доказать, что собственные значения  $\alpha_i$  эрмитовых операторов  $H_i$  вещественны и  $\langle \alpha' | \alpha \rangle \propto \delta_{\alpha', \alpha}$ .

VRN

Нормировку собственных векторов  $|\alpha\rangle$  наблюдаемых  $H_i$  можно подобрать так, чтобы они удовлетворяли двум условиям: условию ортонормируемости (7.3.32) и условию полноты (7.3.35).

**Пример. Координатное и импульсное представление.**

Состояния квантовомеханической частицы в  $\mathbb{R}^d$  описываются векторами  $|\Psi\rangle$  в бесконечномерном комплексном векторном пространстве  $\mathcal{V}$  с заданным эрмитовым скалярным произведением<sup>32</sup>. Динамическим переменным частицы соответствуют операторы в  $\mathcal{V}$ . Например, координатам  $d$ -мерной частицы соответствуют эрмитовы операторы  $\hat{x}_k$  ( $k = 1, \dots, d$ ), а компонентам ее импульса – эрмитовы операторы  $\hat{p}_k$  с коммутационными соотношениями

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_j] = 0 = [\hat{p}_k, \hat{p}_j], \quad [\hat{x}_k, \hat{p}_j] = i I \delta_{kj}, \quad (7.3.43) \quad \text{dira10}$$

где  $I$  — единичный оператор в  $\mathcal{V}$ . Алгебра с  $2d$  образующими  $\{\hat{x}_k, \hat{p}_k\}$  и определяющими соотношениями (7.3.43) называется *алгеброй Гейзенберга*. Собственные вектора операторов  $\hat{x}_k$  и  $\hat{p}_k$  в  $\mathcal{V}$  обозначим как  $|\vec{x}\rangle$  и  $|\vec{p}\rangle$ :

$$\hat{x}_k |\vec{x}\rangle = x_k |\vec{x}\rangle, \quad \hat{p}_k |\vec{p}\rangle = p_k |\vec{p}\rangle, \quad (7.3.44) \quad \text{dira11}$$

где  $x_k, p_k \in \mathbb{R}$  — соответствующие собственные значения. Состояния частицы, которые даются векторами  $|\vec{x}\rangle$  и  $|\vec{p}\rangle$ , называются состояниями с определенными координатами и определенными импульсами, соответственно. Пусть  $|\vec{y}\rangle \in \mathcal{V}$  — также собственный вектор всех операторов  $\hat{x}_k$  с собственными значениями  $y_k$ . Тогда, пользуясь коммутационными соотношениями (7.3.43), мы получаем

$$\hat{x}_k \cdot e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle = (x_k e^{-i x_k \hat{p}_k} + e^{-i x_k \hat{p}_k} \cdot \hat{x}_k) |\vec{y}\rangle = (x_k + y_k) e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle.$$

Таким образом, вектор  $e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle$  — собственный вектор операторов  $\hat{x}_k$  с собственными значениями  $(x_k + y_k)$ :

$$e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{y}\rangle = |\vec{x} + \vec{y}\rangle. \quad (7.3.45) \quad \text{dira11a}$$

Дифференцируя обе части формулы (7.3.45) по  $x_k$  и полагая в ней  $\vec{y} = \vec{0}$ , мы получаем

$$i \partial_k |\vec{x}\rangle = i \partial_k e^{-i x_k \hat{p}_k} |\vec{0}\rangle = \hat{p}_k |\vec{x}\rangle \Rightarrow \langle \vec{x} | \hat{p}_k = -i \partial_k \langle \vec{x} |. \quad (7.3.46) \quad \text{dira11b}$$

где  $\partial_k = \partial/\partial x_k$  и второе соотношение выводится из первого с помощью эрмитова сопряжения.

Каждому состоянию  $|\Psi\rangle$  соответствует комплексная функция  $\langle \vec{x} | \Psi \rangle \equiv \Psi(\vec{x})$ , которая представляет собой координатное представление вектора  $|\Psi\rangle$  в базисе  $|\vec{x}\rangle$  и называется волновой функцией системы. Такое соответствие взаимнооднозначно. Действие операторов  $\hat{x}_k$  и  $\hat{p}_k$  на произвольное состояние  $|\Psi\rangle$  в терминах ее волновой

VRJ

<sup>32</sup>Если такое пространство  $\mathcal{V}$  является полным (норма задается скалярным произведением), то  $\mathcal{V}$  называется гильбертовым.

функции  $\langle \vec{x} | \Psi \rangle$  записывается следующим образом (см. (7.3.37)):

$$\begin{aligned}\langle \vec{x} | \hat{x}_k | \Psi \rangle &= \int d^d x' \langle \vec{x} | \hat{x}_k | \vec{x}' \rangle \langle \vec{x}' | \Psi \rangle = x_k \langle \vec{x} | \Psi \rangle , \\ \langle \vec{x} | \hat{p}_k | \Psi \rangle &= \int d^d x' \langle \vec{x} | \hat{p}_k | \vec{x}' \rangle \langle \vec{x}' | \Psi \rangle = -i \partial_k \langle \vec{x} | \Psi \rangle ,\end{aligned}\tag{7.3.47} \quad \text{dira12}$$

где мы учли условие полноты (7.3.35):

$$\int d^d x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = I ,\tag{7.3.48} \quad \text{dira13a}$$

и формулы (7.3.44) и (7.3.46). С точки зрения теории представлений, формулы (7.3.47) определяют дифференциальное координатное представление  $\rho$  алгебры Гейзенберга (7.3.43):

$$\rho(\hat{x}_k) = x_k , \quad \rho(\hat{p}_k) = -i \partial_k ,\tag{7.3.49} \quad \text{dira12a}$$

которое действует в пространстве волновых функций  $\langle \vec{x} | \Psi \rangle$ .

- *Задача 211. Построить дифференциальное импульсное представление алгебры Гейзенберга (7.3.43), которое действует в пространстве волновых функций  $\langle \vec{p} | \Psi \rangle$ .*

Состояние  $|\vec{p}\rangle$  частицы с определенным импульсом  $p_k$  дается волновой функцией  $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle$ , которая согласно (7.3.44) и (7.3.47) удовлетворяет уравнениям

$$-i \partial_k \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = p_k \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle .$$

Решением этих уравнений являются функции

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp(ip_k x_k) ,\tag{7.3.50} \quad \text{dira15}$$

где нормировочный множитель фиксируется из условия ортонормируемости (7.3.32):

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \int d^d x \langle \vec{p}' | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \delta^d(p - p') .\tag{7.3.51} \quad \text{dira13}$$

Здесь мы воспользовались условием полноты (7.3.48). Для волновой функции в импульсном представлении с учетом формулы (7.3.50), мы получаем соотношение

$$\langle \vec{p} | \Psi \rangle = \int d^d x \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \Psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d x \exp(-ip_k x_k) \langle \vec{x} | \Psi \rangle ,\tag{7.3.52} \quad \text{dira14}$$

которое связывает импульсное и координатное представление волновых функций. Соотношение (7.3.52) является хорошо известным преобразованием Фурье от координатного представления к импульсному.

Еще один пример применения обозначений Дирака мы рассмотрим в следующем подразделе.

## 7.3.2 Голоморфное и антиголоморфное представление. VRJ

VRJ  
весь раздел

Кроме координатного и импульсного представления в квантовой механике часто используют представление Фока и еще два представления, которые называются голоморфным и антиголоморфным. Для формулировки этих представлений вместо  $\hat{x}_k$  и  $\hat{p}_k$  введем новые динамические переменные:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (i \hat{p}_k + \hat{x}_k) , \quad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i \hat{p}_k + \hat{x}_k) , \quad (7.3.53) \quad \text{dira16}$$

которые, согласно (7.3.43), коммутируют следующим образом

$$[a_k, a_m] = 0 , \quad [a_k^\dagger, a_m^\dagger] = 0 , \quad [a_k, a_m^\dagger] = \delta_{km} . \quad (7.3.54) \quad \text{dira17}$$

Эти переменные удобны, например, при рассмотрении  $d$ -мерного квантового осциллятора, оператор энергии (гамильтониан) которого записывается в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (\hat{p}_k^2 + \hat{x}_k^2) = \sum_{k=1}^d \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) . \quad (7.3.55) \quad \text{dira18}$$

Собственные состояния оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  строятся стандартным образом с помощью осцилляторных переменных (7.3.53), которые порождают пространство Фока  $\mathcal{F}$ . А именно, вводится нормированный вакуумный вектор  $|0\rangle \in \mathcal{F}$  такой, что

$$a_k |0\rangle = 0 , \quad \forall k , \quad \langle 0|0\rangle = 1 . \quad (7.3.56) \quad \text{dira19a}$$

Соответственно, для сопряженного вектора  $\langle 0| = (|0\rangle)^\dagger$  мы имеем  $\langle 0|a_k^\dagger = 0$ . Далее строятся нормированные вектора

$$|n_1, n_2, \dots, n_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} (a_1^\dagger)^{n_1} \cdot (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_d^\dagger)^{n_d} |0\rangle , \quad (7.3.57) \quad \text{dira19}$$

которые образуют базис в пространстве Фока  $\mathcal{F}$ , то есть любой вектор из  $\mathcal{F}$  представим в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} \psi_{n_1, \dots, n_d} |n_1, n_2, \dots, n_d\rangle \in \mathcal{F} , \quad \psi_{n_1, \dots, n_d} \in \mathbb{C} .$$

Пространство Фока совпадает с пространством всех состояний квантовомеханической частицы в  $\mathbb{R}^d$ : любое ее состояние можно представить в указанном виде. Согласно (7.3.54), (7.3.57) мы получаем

$$a_k |n_1, \dots, n_k, \dots, n_d\rangle = \sqrt{n_k} |n_1, \dots, n_k - 1, \dots, n_d\rangle ,$$

$$a_k^\dagger |n_1, \dots, n_k, \dots, n_d\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_1, \dots, n_k + 1, \dots, n_d\rangle ,$$

поэтому операторы  $a_k$  называются операторами уничтожения, а  $a_k^\dagger$  — операторами рождения.



- **Задача 212.** Доказать, что вектора (7.3.57) ортонормированы:  $\langle k_1, \dots, k_d | n_1, \dots, n_d \rangle = \delta_{k_1 n_1} \cdots \delta_{k_d n_d}$ . Проверить, что эти вектора являются собственными для гамильтониана (7.3.55):

$$\hat{\mathcal{H}} |n_1, n_2, \dots, n_d\rangle = \left( \sum_{k=1}^d n_k + \frac{1}{2} \right) |n_1, n_2, \dots, n_d\rangle . \quad (7.3.58) \quad \text{dira20}$$

Условие полноты (7.3.35) для векторов  $|n_1, n_2, \dots, n_d\rangle$  записывается следующим образом

$$I = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty} |n_1, n_2, \dots, n_d\rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_d| . \quad (7.3.59) \quad \text{dira20a}$$

где  $I$  – единичный оператор в пространстве Фока. Таким образом мы приходим к представлению Фока алгебры Гейзенберга:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_k + a_k^\dagger) , \quad \hat{p}_k = \frac{1}{i\sqrt{2}} (a_k - a_k^\dagger) .$$

Перейдем теперь к построению голоморфного и антиголоморфного представлений. Напомним, что в предыдущем примере для построения координатного и импульсного представлений мы использовали полные системы собственных векторов (7.3.44) для операторов координаты  $\hat{x}_k$  и импульса  $\hat{p}_k$ , соответственно. Для построения (анти)голоморфного представления вводится полная система собственных векторов для операторов уничтожения  $a_k$ :

$$a_k |z\rangle = z_k |z\rangle , \quad (7.3.60) \quad \text{dira21}$$

где  $|z\rangle := |z_1, z_2, \dots, z_d\rangle$  и  $z_k$  – комплексные координаты. Вектора  $|z\rangle$  называются когерентными состояниями, и их можно построить следующим образом (здесь и далее суммирование по  $k$  подразумевается):

$$|z\rangle = \exp(z_k a_k^\dagger) |0\rangle , \quad (7.3.61) \quad \text{dira22}$$

где  $|0\rangle$  – вакуумное состояние пространства Фока. Соотношение (7.3.60) следует из (7.3.61) с учетом (7.3.54). Пользуясь представлением (7.3.61), мы получаем

$$a_k^\dagger |z\rangle = \frac{\partial}{\partial z_k} |z\rangle . \quad (7.3.62) \quad \text{dira23}$$

- **Задача 213.** Найти волновые функции  $\langle x_k | z \rangle$  когерентных состояний в координатном представлении.

VRJ

Для сопряженных векторов  $\langle z^* | = (|z\rangle)^\dagger$  мы имеем аналогичные соотношения

$$\langle z^* | = \langle 0 | \exp(z_k^* a_k) , \quad \langle z^* | a_k^\dagger = z_k^* \langle z^* | , \quad \langle z^* | a_k = \frac{\partial}{\partial z_k^*} \langle z^* | . \quad (7.3.63) \quad \text{dira24}$$

Свертка двух когерентных состояний равна:

$$\langle z^* | w \rangle = \langle 0 | \exp(z_k^* a_k) | w \rangle = \langle 0 | \exp(z_k^* w_k) | w \rangle = \exp(z_k^* w_k) , \quad (7.3.64) \quad \text{dira25}$$

где  $z, w \in \mathbb{C}$ , и мы воспользовались формулой (7.3.60) и соотношением  $\langle 0 | w \rangle = 1$ ,  $\forall w \in \mathbb{C}$ . Отсюда видно, что когерентные состояния  $|w\rangle$  и  $|z\rangle$  не ортогональны друг другу. Тем не менее, их можно использовать для построения новых представлений в квантовой механике. Ключевым здесь является следующее утверждение.

**Утверждение 7.3.1** *Условие полноты (7.3.59) для когерентных состояний записывается следующим образом (сравните с (7.3.48))*

$$\int d\mu(z, z^*) \exp(-z_k^* z_k) |z\rangle \langle z^*| = I , \quad (7.3.65) \quad \text{dira26}$$

где мера  $d\mu(z, z^*)$  определяется в виде

$$d\mu(z, z^*) = \frac{i^d}{(2\pi)^d} \prod_{k=1}^d dz_k dz_k^* = \frac{1}{\pi^d} \prod_{k=1}^d dx_k dy_k , \quad z_k = x_k + iy_k . \quad (7.3.66) \quad \text{dira26a}$$

**Доказательство.** Мы докажем (7.3.65) для одномерного случая  $d = 1$ , обобщение на случай произвольного конечного числа измерений  $d$  — тривиально. Подставим определения когерентных состояний (7.3.61), (7.3.63) в левую часть (7.3.65) и перепишем интеграл в полярных координатах  $z = \rho e^{i\phi}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\pi} \int dz \wedge dz^* \exp(-|z|^2) \sum_{m,n} \frac{(za)^n}{n!} |0\rangle \langle 0| \frac{(z^* a^\dagger)^m}{m!} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\rho e^{-\rho^2} \sum_{m,n} \rho^{n+m+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{n!} \int_0^\infty d\rho \rho^{2n+1} e^{-\rho^2} |n\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^\infty |n\rangle \langle n| = I , \end{aligned} \quad (7.3.67) \quad \text{dira27}$$

что и требовалось доказать. ■

Теперь, так же как и в случаях координатного и импульсного представлений, вместо вектора состояния  $|\Psi\rangle$  можно рассматривать функцию  $\langle z^* | \Psi \rangle \equiv \Psi(z^*)$ , которая называется волновой функцией в *антиголоморфном представлении*. Действие операторов  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  на произвольное состояние  $|\Psi\rangle$  в терминах антиголоморфного представления записывается в виде (см. (7.3.63))

$$\langle z^* | a_k | \Psi \rangle = \frac{\partial}{\partial z_k^*} \langle z^* | \Psi \rangle , \quad \langle z^* | a_k^\dagger | \Psi \rangle = z_k^* \langle z^* | \Psi \rangle , \quad (7.3.68) \quad \text{dira28}$$

а скалярное произведение  $\langle \Phi | \Psi \rangle$  двух состояний с учетом условия полноты (7.3.65) выглядит в этом представлении следующим образом:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \langle \Phi | z \rangle \langle z^* | \Psi \rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} (\Phi(z^*))^* \Psi(z^*) . \quad (7.3.69) \quad \text{dira29}$$

Таким образом, формулы (7.3.68) определяют *антиголоморфное представление*  $\bar{\rho}$  алгебры осцилляторов  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  (сравните с (7.3.49))

$$\bar{\rho}(a_k) = \frac{\partial}{\partial z_k^*}, \quad \bar{\rho}(a_k^\dagger) = z_k^*, \quad (7.3.70) \quad \text{dira30}$$

действующих в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций  $\Psi(z^*) = \langle z^* | \Psi \rangle$  со скалярным произведением (7.3.69).

Если в (7.3.65), (7.3.68) и (7.3.69) сделать замену  $z_k^* \leftrightarrow z_k$ ,  $(\forall k)$ , то возникает еще одно полезное представление, которое называется голоморфным. Пространством голоморфного представления  $\rho$  алгебры (7.3.54) является гильбертово пространство голоморфных функций  $\langle z | \Psi \rangle = \Psi(z) \equiv \Psi(z_1, \dots, z_d)$  со скалярным произведением

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \langle \Phi | z^* \rangle \langle z | \Psi \rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} (\Phi(z))^* \Psi(z), \quad (7.3.71) \quad \text{dira31}$$

и реализацией алгебры осцилляторов (7.3.54) в виде

$$\rho(a_k) = \frac{\partial}{\partial z_k}, \quad \rho(a_k^\dagger) = z_k. \quad (7.3.72) \quad \text{dira32}$$

Соответственно, условие полноты (7.3.65) в голоморфном представлении записывается так:

$$\int d\mu(z, z^*) \exp(-z_k^* z_k) |z^*\rangle \langle z| = I, \quad (7.3.73) \quad \text{dira26h}$$

а базисные вектора (7.3.57) реализуются следующим образом (сравните с формулой (7.2.19))

$$\langle z | n_1, \dots, n_d \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_d^{n_d}. \quad (7.3.74) \quad \text{dira32a}$$

**Утверждение 7.3.2** Для скалярного произведения (7.3.71) имеет место представление (сравните с (7.2.21))

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \Phi(\partial_1, \dots, \partial_d) \cdot \Psi(z) \Big|_{z_1=\dots=z_d=0}, \quad (7.3.75) \quad \text{dira32b}$$

где  $\partial_k = \partial / \partial z_k$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать тождество (7.3.75) в случае, когда в качестве вектора  $\Phi(z) = \langle z | \Phi \rangle$  выбран любой базисный вектор (7.3.74). В этом случае, применяя правило интегрирования по частям, мы имеем

$$\begin{aligned} \langle n_1, \dots, n_d | \Psi \rangle &= \int d\mu(z, z^*) \langle n_1, \dots, n_d | z^* \rangle \langle z | \Psi \rangle e^{-z_k^* z_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) \frac{z_1^{*n_1} \dots z_d^{*n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} \langle z | \Psi \rangle e^{-z_k^* z_k} = \int d\mu(z, z^*) (-1)^{\sum n_k} \langle z | \Psi \rangle \frac{\partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} e^{-z_k^* z_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \frac{\partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} \langle z | \Psi \rangle = \frac{\partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}}{\sqrt{n_1! \dots n_d!}} \Psi(z) \Big|_{z_1=\dots=z_d=0}. \end{aligned} \quad (7.3.76) \quad \text{dira32d}$$

Так как любая голоморфная функция  $\Phi(z)$  представима в виде ряда по базисным мономам (7.3.74), то из (7.3.76) следует (7.3.75). ■

Любой оператор  $A$ , действующий в пространстве Фока  $\mathcal{F}$ , можно с помощью (7.3.54) записать в нормальной (виковской) форме

$$A = \sum_{\mu, \nu} A_{\mu, \nu} (a_1^\dagger)^{n_1} \cdot (a_2^\dagger)^{n_2} \cdots (a_d^\dagger)^{n_d} (a_1)^{m_1} \cdot (a_2)^{m_2} \cdots (a_d)^{m_d}, \quad (7.3.77) \quad \text{dira33}$$

где  $\mu$  и  $\nu$  — мультииндексы:  $\mu = (m_1, \dots, m_d)$  и  $\nu = (n_1, \dots, n_d)$  и  $A_{\mu, \nu} \in \mathbb{C}$ . Термин “нормальная форма” означает, что в сумме (7.3.77) в каждом слагаемом все операторы уничтожения стоят справа, а рождения слева. Антиголоморфное представление удобно для определения *виковских символов* операторов  $A$ , действующих в  $\mathcal{F}$ . Для определения такого символа запишем в антиголоморфном представлении действие оператора (7.3.77) на некоторый вектор  $|\Psi\rangle$ :

$$\langle w^* | A | \Psi \rangle = \int d\mu(z, z^*) e^{-z_k^* z_k} \langle w^* | A | z \rangle \langle z^* | \Psi \rangle, \quad (7.3.78) \quad \text{dira34}$$

где  $\langle w^* | A | z \rangle$  — ядро оператора  $A$ , которое легко вычисляется с помощью (7.3.60) и (7.3.63):

$$\langle w^* | A | z \rangle = A(w^*, z) e^{w_k^* z_k}, \quad (7.3.79) \quad \text{dira35}$$

$$A(w^*, z) = \sum_{\mu, \nu} A_{\mu, \nu} (w_1^*)^{n_1} \cdot (w_2^*)^{n_2} \cdots (w_d^*)^{n_d} (z_1)^{m_1} \cdot (z_2)^{m_2} \cdots (z_d)^{m_d}.$$

Функция  $A(w^*, z)$  называется *виковским (нормальным) символом* оператора  $A$ , заданного в нормальной форме (7.3.77). Виковские символы полезны в том случае, когда необходимо привести к нормальной форме (7.3.77) произведение двух операторов  $A_1$  и  $A_2$ , каждый из которых записан в нормальной форме.

**Утверждение 7.3.3** Пусть  $A_1(w^*, z)$  и  $A_2(w^*, z)$  — виковские символы операторов  $A_1$  и  $A_2$ , тогда виковский символ оператора  $A_1 \cdot A_2$  дается соотношением

$$(A_1 \cdot A_2)(w^*, v) = \int d\mu(z, z^*) e^{-(z_k^* - w_k^*)(z_k - v_k)} A_1(w^*, z) A_2(z^*, v), \quad (7.3.80) \quad \text{dira36}$$

где мера  $d\mu(z, z^*)$  определена в (7.3.66).

**Доказательство.** Согласно формуле (7.3.79), которая связывает ядро оператора и его символ, мы имеем

$$\begin{aligned} (A_1 \cdot A_2)(w^*, v) &= \langle w^* | A_1 \cdot A_2 | v \rangle e^{-w_k^* v_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) \langle w^* | A_1 | z \rangle \langle z^* | A_2 | v \rangle e^{-z_k^* z_k - w_k^* v_k} = \\ &= \int d\mu(z, z^*) A_1(w^*, z) A_2(z^*, v) e^{w_k^* z_k + z_k^* v_k} e^{-z_k^* z_k - w_k^* v_k}, \end{aligned}$$

что совпадает с (7.3.80). ■

Итак, с помощью (7.3.80) вычисляется виковский символ для  $A_1 \cdot A_2$ , по которому уже не составляет труда записать оператор  $A_1 \cdot A_2$  в нормальной форме.

## 7.4 Конечномерные представления групп $SL(2, \mathbb{C})$ и $SU(2)$ .

### 7.4.1 Параметризации группы $SU(2)$ .

Любой элемент  $A$  алгебры Ли  $su(2)$  можно записать в виде

$$A = \psi \cdot (n_k \tau_k) = -i \frac{\psi}{2} (n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3), \quad (\tau_k = -i \sigma_k / 2), \quad (7.4.1) \quad \text{lisu2r}$$

где  $\psi \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_k$  – матрицы Паули и  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  – единичный вектор в  $\mathbb{R}^3$ , компоненты которого можно задать с помощью сферических углов  $\phi \in [0, 2\pi)$  и  $\theta \in [0, \pi]$ : **VRN**

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad n_3 = \cos \theta. \quad (7.4.2) \quad \text{napr}$$

Экспоненциальное представление для элемента группы  $SU(2)$  – унитарной и специальной  $2 \times 2$  матрицы с единичным детерминантом – имеет вид

$$\exp(A) = \exp(\psi \cdot (n_k \tau_k)) = \exp\left(-i \frac{\psi}{2} (n_k \sigma_k)\right). \quad (7.4.3) \quad \text{usu2a}$$

Напомним (смотри раздел **3.2.13**), что два элемента  $\pm \exp(\psi (n_k \tau_k))$  группы  $SU(2)$  соответствуют одному элементу группы  $SO(3)$  (3.2.145):

$$O(\psi, \vec{n}) = \exp(\psi \cdot (n_k S_k)), \quad (7.4.4) \quad \text{usu2b}$$

который задает вращение в  $\mathbb{R}^3$  на угол  $\psi$  вокруг оси, направленной вдоль  $\vec{n}$ . Поэтому для группы  $SO(3)$  достаточно считать, что  $\psi \in [-\pi, \pi)$ . В то же время, для группы  $SU(2)$ , чтобы покрыть всю сферу  $S^3$  и дважды накрыть группу  $SO(3)$ , необходимо (как мы покажем чуть ниже) расширить область изменения параметра  $\psi$  в (7.4.3) до  $\psi \in [-2\pi, 2\pi)$ .

Введем обозначение для элементов группы  $SU(2)$ :

$$U_{\vec{n}}(\psi) = \exp\left(i \frac{\psi}{2} (n_i \sigma_i)\right). \quad (7.4.5) \quad \text{usu2}$$

Матрицы Паули  $\sigma_i$  удовлетворяют соотношениям (3.2.119), из которых следуют равенства

$$(n_k \sigma_k)^2 = \vec{n}^2 I_2 = I_2 \Rightarrow (i n_k \sigma_k)^2 = -I_2. \quad (7.4.6) \quad \text{usu26}$$

Поэтому, используя операторную формулу Эйлера (3.2.16), мы получаем для экспоненты (7.4.5) матричное представление

$$\begin{aligned} U_{\vec{n}}(\psi) &= \exp\left(i (n_i \sigma_i) \frac{\psi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + i (n_i \sigma_i) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} + i n_3 \sin \frac{\psi}{2}, & (n_2 + i n_1) \sin \frac{\psi}{2} \\ -(n_2 - i n_1) \sin \frac{\psi}{2}, & \cos \frac{\psi}{2} - i n_3 \sin \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.4.7) \quad \text{usu27}$$

которое согласуется с (3.1.14) при выборе расширенного интервала  $\psi \in [-2\pi, 2\pi)$ . Действительно, сужение интервала изменения параметра  $\psi$  в (7.4.5) и (7.4.7) до

$\psi \in [-\pi, \pi)$  (как для параметризации группы  $SO(3)$ ) привело бы к дополнительным ограничениям на параметр  $\alpha$  в (3.1.14):  $\operatorname{Re}(\alpha) = x_0 = \cos \frac{\psi}{2} > 0$ . При этом покрывается не вся сфера  $S^3$ , заданная в (3.1.16), а только ее половина:  $x_0 > 0$ .

Элементы группы  $SO(3)$  в параметризации углов Эйлера записываются в виде (6.2.5). В силу соответствия  $SO(3) = SU(2)/Z_2$  аналогичную параметризацию можно использовать и для элементов группы  $SU(2)$ :

$$U = U_{\vec{e}_3}(\phi) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta) \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} = \quad (7.4.8) \quad \text{usu281}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{1}{2}(\psi+\phi)}, & \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{1}{2}(\phi-\psi)} \\ -\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i\frac{1}{2}(\psi-\phi)}, & \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{-i\frac{1}{2}(\psi+\phi)} \end{pmatrix}. \quad (7.4.9) \quad \text{usu28}$$

Матрица (7.4.9) также согласуется с (3.1.14) при определенном выборе областей изменения трех углов  $\phi, \theta$  и  $\psi$ . Этот выбор важен, например, в случае необходимости интегрирования по всей группе  $SU(2)$  в координатах  $\phi, \theta$  и  $\psi$ . Напомним, что в случае группы  $SO(3)$  область изменения углов Эйлера  $\phi, \theta$  и  $\psi$  выбирается следующим образом (см. подробности в примере 2.) в разделе 6.2):

$$SO(3) : \quad \psi \in [-\pi, \pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (7.4.10) \quad \text{su2eu}$$

Для покрытия всей группы  $SU(2)$  (сферы  $S^3$ ) с помощью матриц (7.4.9), в случае стандартной области изменения сферических углов  $\phi, \theta$  (7.4.10) мы должны положить

$$SU(2) : \quad \psi \in [-2\pi, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (7.4.11) \quad \text{su2ev}$$

При таком изменении углов группа  $SU(2)$  дважды накрывает группу  $SO(3)$  и элементы  $U_{\vec{e}_3}(\psi)$ , стоящие в произведении (7.4.8) справа, образуют полную подгруппу  $U(1)$  в  $SU(2)$ . Последний факт понадобится нам ниже, когда мы будем обсуждать сферические функции на однородном пространстве  $SU(2)/U(1)$ .

**ISA** новая формула и ред. правка

• **Задача 214. Доказать тождество**

$$(n_i \sigma_i) = U_{\theta, \phi}^{-1} \cdot \sigma_3 \cdot U_{\theta, \phi}, \quad (7.4.12) \quad \text{eqz}$$

где  $U_{\theta, \phi} = \exp \left( i \frac{\theta}{2} \sigma_2 \right) \exp \left( i \frac{\phi}{2} \sigma_3 \right) = U_{\vec{e}_2}(\theta) \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi)$  и, согласно (7.4.7), мы имеем

$$U_{\vec{e}_2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad U_{\vec{e}_3}(\phi) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (7.4.13) \quad \text{eqz23}$$

Из соотношения (7.4.12) следует, что любой элемент  $U_{\vec{n}}(\psi) \in SU(2)$  (7.4.5) с помощью преобразования подобия приводится к диагональному виду:

$$U_{\vec{n}}(\psi) = U_{\theta, \phi}^{-1} \cdot \exp \left( i \frac{\psi}{2} \sigma_3 \right) \cdot U_{\theta, \phi}. \quad (7.4.14) \quad \text{eqz01}$$

Наконец, укажем еще одну параметризацию элементов группы  $SU(2)$ , которая следует из того, что многообразие  $SU(2)$  гомеоморфно сфере  $S^3$ . Воспользуемся представлением любого элемента  $SU(2)$  в виде (3.1.17) и представим координаты  $x_\alpha$  с помощью трехмерных сферических углов  $(\chi, \theta, \phi)$  в виде (3.1.85). Тогда для элементов  $U \in SU(2)$ , заданных в (3.1.14) и (3.1.17), мы получаем

$$U = x_\alpha \tilde{\sigma}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \chi + i \sin \chi \sin \theta \sin \phi, & \sin \chi (\sin \theta \cos \phi + i \cos \theta) \\ \sin \chi (-\sin \theta \cos \phi + i \cos \theta), & \cos \chi - i \sin \chi \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (7.4.15) \quad \text{eqz06}$$

где область изменения сферических углов можно выбрать следующим образом

$$\chi \in [-\pi, \pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

В заключение отметим, что имеется простая замена параметров

$$\frac{\psi}{2} = \chi, \quad n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta \cos \phi, \quad n_3 = \sin \theta \sin \phi,$$

которая связывает представления (7.4.7) и (7.4.15). Подчеркнем также, что параметризацию элементов  $SU(2)$  с помощью трехмерных сферических углов (7.4.15) не следует путать с параметризацией  $SU(2)$  в терминах углов Эйлера (7.4.9).

#### 7.4.2 Конечномерные представления групп $SL(2, \mathbb{C})$ , $SU(2)$ и $SO(3)$ . Функции Вигнера.

Пользуясь обозначениями  $s = u^1, t = u^2$ , введенными в (7.2.1), и выражением (7.2.19) для базисных векторов  $T_m^j(s, t)$ , любой однородный полином (7.2.20) можно записать в виде

$$P_{2j}(s, t) = \psi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2j}} u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \dots u^{\alpha_{2j}}, \quad (7.4.16) \quad \text{pjst}$$

где компоненты  $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \in \mathbb{C}$  образуют произвольный симметричный (в силу симметричности произведения  $u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}}$ ) тензор ранга  $2j$ . Таким образом, пространство  $\mathcal{V}_{2j+1}$  однородных полиномов (7.2.20) эквивалентно пространству симметричных тензоров ранга  $2j$ .

- **Задача 215.** Доказать, что связь компонент  $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}$  из (7.4.16) с параметрами  $\alpha_m$  из (7.2.20) задается формулой

$$\psi_{\underbrace{1, \dots, 1}_{j+m}, \underbrace{2, \dots, 2}_{j-m}} = \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(2j)!} \alpha_m.$$

Действие (7.2.6), (7.2.2) группы  $SL(2, \mathbb{C})$  (и  $SU(2)$ ) на базисные мономы  $u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}}$  имеет вид

$$u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}} \rightarrow T(g) \cdot [u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_{2j}}] = u^{\beta_1} \cdot u^{\beta_2} \dots u^{\beta_{2j}} A_{\beta_1}^{\alpha_1} A_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots A_{\beta_{2j}}^{\alpha_{2j}}. \quad (7.4.17) \quad \text{usu32i}$$

Это действие на произвольный полином (7.4.16), являющийся произвольным вектором в пространстве  $\mathcal{V}_{2j+1}$  неприводимого представления  $T^{(j)}$ , согласно общей процедуре (2.2.33) и (2.2.37), приводит к преобразованию координат этого вектора, то есть компонент  $\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}$  симметричного тензора ранга  $2j$ :

$$\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \rightarrow [T^{(j)}(g) \cdot \psi]_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} = A_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots A_{\alpha_{2j}}^{\beta_{2j}} \psi_{\beta_1, \dots, \beta_{2j}}. \quad (7.4.18) \quad \text{actpsi}$$

Сравнивая правую часть этого равенства с формулой (4.3.7), мы видим, что пространство  $\mathcal{V}_{2j+1}$  симметричных тензоров  $\psi$  ранга  $2j$  можно вложить в прямое произведение 2-мерных векторных пространств  $\mathcal{V}_2$  определяющего представления  $T^{(1/2)}$ :

$$\mathcal{V}_{2j+1} \subset \underbrace{\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}_2}_{2j},$$

при этом  $T^{(j)}(g)$  действует так же, как тензорное произведение  $T^{(1/2)}(g) \otimes \cdots \otimes T^{(1/2)}(g)$ . Другими словами, прямое произведение 2-мерных представлений  $\mathcal{V}_2^{\otimes 2j}$  приводимо, и в его разложении по неприводимым представлениям содержится представление  $\mathcal{V}_{2j+1}$ , реализованное в пространстве симметричных тензоров ранга  $2j$  (мы будем обсуждать этот факт более подробно ниже в разделах 7.5.2 и 7.5.3).

Аналогично, любой однородный полином степени  $2j$  по переменным  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (\bar{s}, \bar{t})$ , построенный из базисных мономов (7.2.22), представляется в виде (сравните с (7.2.8))

$$\bar{P}_{2j}(\bar{s}, \bar{t}) = \bar{u}_{\alpha_1} \bar{u}_{\alpha_2} \cdots \bar{u}_{\alpha_{2j}} \bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}},$$

где компоненты  $\bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \in \mathbb{C}$  также образуют произвольный симметричный тензор ранга  $2j$ . Согласно (7.2.9) аналогии преобразований (7.4.18) для тензора  $\bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}}$  имеют вид

$$\bar{\psi}^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} \rightarrow [T^{(j)}(g) \cdot \bar{\psi}]^{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}} = \bar{\psi}^{\beta_1, \dots, \beta_{2j}} (A^{-1})_{\beta_1}^{\alpha_1} \cdots (A^{-1})_{\beta_{2j}}^{\alpha_{2j}}. \quad (7.4.19)$$

Таким образом, симметричный тензор  $\bar{\psi}$  преобразуется контргradientно по отношению к преобразованиям (7.4.18) тензора  $\psi$ , то есть на пространстве симметричных тензоров  $\bar{\psi}$  реализовано представление  $\bar{T}^{(j)}$ , контргradientное к представлению  $T^{(j)}$ . Здесь следует отметить, что представления  $T^{(j)}$  и соответствующие им копредставления  $\bar{T}^{(j)}$ , как для группы  $SL(2, \mathbb{C})$  так и для группы  $SU(2)$ , оказываются эквивалентными и переводятся друг в друга с помощью преобразований

$$\varepsilon_{\alpha_1 \beta_1} \cdots \varepsilon_{\alpha_{2j} \beta_{2j}} \bar{\psi}^{\beta_1, \dots, \beta_{2j}} = \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2j}},$$

что с очевидностью следует из формул (7.2.15). Поэтому далее в этом разделе мы сконцентрируемся только на рассмотрении неприводимых представлений  $T^{(j)}$ .

Итак, однородный полином  $P_{2j}(s, t)$  по переменным  $(s, t)$  степени  $2j$  после преобразований (7.2.2), (7.2.6) и (7.4.17) останется однородным полиномом степени  $2j$ , то есть пространство однородных полиномов степени  $2j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  образует инвариантное пространство  $\mathcal{V}_{2j+1}(\mathbb{C})$  представления  $T^{(j)}$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Базис в  $\mathcal{V}_{2j+1}(\mathbb{C})$  образован мономами  $\{T_m^j(s, t)\}$  (7.2.19), число которых равно  $(2j + 1)$ , поэтому представление  $T^{(j)}$  имеет размерность  $(2j + 1)$ . Данное представление  $T^{(j)}$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$  неприводимо, так как в разделе 7.2.2 оно было построено как неприводимое представление алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  со старшим весом.

Согласно (7.2.2), (7.2.6) и (7.4.17) моном  $T_m^j(s, t)$  (7.2.19) при действии на него элемента  $g = \|A_\beta^\alpha\| \in SL(2, \mathbb{C})$  преобразуется в однородный полином степени  $2j$  следующего вида:

$$[T^{(j)}(g) \cdot T_m^j](s, t) = T_m^j(s', t') = \frac{(sA_1^1 + tA_2^1)^{j+m} (sA_1^2 + tA_2^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} = \quad (7.4.20)$$



$$= \sum_{k=0}^{j+m} \sum_{k'=0}^{j-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!k'!(j+m-k)!(j-m-k')!} (t^{k+k'} s^{2j-k-k'}) \cdot (A_1^1)^{j+m-k} (A_1^2)^{j-m-k'} (A_2^1)^k (A_2^2)^{k'}, \quad (7.4.21) \quad \text{usu33}$$

где мы воспользовались формулой бинома Ньютона. Теперь мы можем представить полином (7.4.21) в виде линейной комбинации базисных мономов  $T_{m'}^j(s, t)$  ( $m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ ). Удобно использовать определения

$$n! = \infty \quad \text{при } n < 0, \quad 0! = 1, \quad (7.4.22) \quad \text{may6-1}$$

которые соответствуют аналитическому продолжению факториальной функции как гамма-функции:  $n! = \Gamma(n+1)$ . При таком определении можно опустить пределы суммирования в (7.4.21), так как факториалы в знаменателе равны бесконечности вне пределов суммирования. Если положить  $m' = j - k - k'$ , то  $m'$  должно пробегать все целочисленные значения для целых  $j$  и все полуцелые значения для полуцелых  $j$ . Выделяя мономы  $T_{m'}^j(s, t)$  в (7.4.21), мы получаем

$$[T^{(j)}(g) \cdot T_m^j](s, t) = \sum_{m'=-j}^j T_{m'}^j(s, t) \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\|A_\beta^\alpha\|), \quad (7.4.23) \quad \text{usu34}$$

где  $g = \|A_\beta^\alpha\|$  и возникшая в правой части  $(2j+1) \times (2j+1)$  матрица с элементами

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g) = \sum_k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!} \cdot (A_1^1)^{j+m-k} (A_1^2)^{k-m+m'} (A_2^1)^k (A_2^2)^{j-k-m'} \quad (7.4.24) \quad \text{usu35}$$

определяет матрицу неприводимого представления  $T^{(j)}$  для любого  $g \in SL(2, \mathbb{C})$ . Так как  $T^{(j)}$  – представление (отображение  $T^{(j)}$  – гомоморфизм), то для матриц  $\mathcal{D}^{(j)}$  также выполняется свойство гомоморфизма

$$\mathcal{D}_{m_1 m_2}^{(j)}(\|A_\beta^\alpha B_\alpha^\gamma\|) = \mathcal{D}_{m_1 m_3}^{(j)}(\|A_\beta^\alpha\|) \mathcal{D}_{m_3 m_2}^{(j)}(\|B_\beta^\alpha\|), \quad (7.4.25) \quad \text{homsu}$$

что в частности следует из формулы (7.4.23). Отметим, что равенство (7.4.25), с учетом явного вида (7.4.24) матриц  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}$ , представляет собой набор достаточно нетривиальных тождеств.

Конечномерное представление  $T^{(j)}$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , построенное в (7.4.23), не является унитарным, в чем можно убедиться непосредственно, заметив, что матрица  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$  не унитарна для некоторых  $g = \|A_\beta^\alpha\| \in SL(2, \mathbb{C})$ . Действительно эрмитова свертка векторов  $T_m^j(s, t)$  (сравните с (7.2.26))

$$\sum_{m=-j}^j T_m^j(s, t) (T_m^j(s, t))^* = \frac{(|s|^2 + |t|^2)^{2j}}{(2j)!} \quad (7.4.26) \quad \text{usu36}$$

должна была бы быть инвариантной при преобразованиях (7.4.20), (7.4.23) с унитарной матрицей  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$ . Однако ясно, что правая часть (7.4.26) не сохраняется при таких преобразованиях, когда двумерные матрицы  $g = \|A_\beta^\alpha\| \in SL(2, \mathbb{C})$  не унитарны (неунитарные двумерные преобразования (7.2.2) не сохраняют квадратичную форму:  $|s|^2 + |t|^2 \neq |s'|^2 + |t'|^2$ ). Тем не менее матрицы  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}\|$  с элементами (7.4.24) обладают рядом замечательных свойств.

**Утверждение 7.4.1** Матрицы  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$  конечномерных представлений группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , заданные в (7.4.24), эквивалентны псевдоортогональным матрицам для целых  $j$  и симплектическим матрицам для полуцелых  $j$ .

**Доказательство.** Пользуясь отождествлением (7.2.15), инвариант (7.2.26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j} &= (2j)! \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} T_m^j(s_1, t_1) T_{-m}^j(s_2, t_2) = \\ &= (2j)! \sum_{m, m'} T_m^j(s_1, t_1) \eta_{m, m'}^{(j)} T_{m'}^j(s_2, t_2), \end{aligned} \quad (7.4.27) \quad \text{sstt2}$$

где мы определили метрику<sup>33</sup>

$$\eta_{m, m'}^{(j)} = (-1)^{j-m} \delta_{m, -m'}, \quad (7.4.28) \quad \text{sstt27}$$

для которой имеем

$$\eta_{m', m}^{(j)} = (-1)^{2m} \eta_{m, m'}^{(j)},$$

ISA нов.  
формула

и следовательно она симметрична  $\eta_{m, m'}^{(j)} = \eta_{m', m}^{(j)}$  для целых  $j$  и антисимметрична  $\eta_{m, m'}^{(j)} = -\eta_{m', m}^{(j)}$  для полуцелых  $j$ . В силу инвариантности свертки (7.4.27) относительно преобразований (7.4.23) мы получаем, что метрика (7.4.28) обладает следующим свойством инвариантности

VRJ

$$\mathcal{D}^{(j)} \cdot \eta^{(j)} \cdot \mathcal{D}^{(j)T} = \eta^{(j)}, \quad (7.4.29) \quad \text{sstt28}$$

где матрицы  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$  заданы в (7.4.24) и определяют представление  $T^{(j)}$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Квадрат матрицы метрики  $\|\eta_{m, m'}^{(j)}\|$  равен

ISA ред.  
правка

$$\eta^{(j)} \cdot \eta^{(j)} = (-1)^{2j} I_{2j+1}, \quad (7.4.30) \quad \text{sstt29}$$

поэтому в случае целых  $j$  ее собственные значения равны  $\pm 1$ , и при приведении этой матрицы к диагональному виду она примет стандартный вид (2.2.54). В этом случае из условия (7.4.29) следует, что нечетно-мерные матрицы  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(g)\|$  для всех  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  эквивалентны псевдоортогональным матрицам. В случае полуцелых  $j$  четно-мерная антисимметричная матрица  $\|\eta_{m, m'}^{(j)}\|$  приводится (перестановкой строк и столбцов) к стандартному виду (2.2.57) и условие (7.4.29) эквивалентно условию (2.2.58) для симплектических матриц. ■

Заметим теперь, что вся схема построения конечномерного неприводимого представления для группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , изложенная выше (формулы (7.2.2), (7.4.20) – (7.4.24)), может быть без изменений применена и для случая группы  $SU(2)$  – вещественной формы группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Для этого необходимо вместо матрицы  $g = \|A_{\beta}^{\alpha}\| \in SL(2, \mathbb{C})$

<sup>33</sup>Напомним, что  $(j - m)$  всегда принимает целые значения, даже если спин  $j$  – полуцелый, и поэтому все ненулевые элементы метрики  $\eta_{m, m'}^{(j)}$  равны  $\pm 1$ .

в (7.2.2) и (7.4.20) использовать специальную унитарную  $(2 \times 2)$  матрицу  $U$ , представленную, например, в виде (3.1.14). В этом случае вместо (7.2.2) мы имеем

$$(s', t') = (s, t) U = (s\alpha - t\beta^*, s\beta + t\alpha^*), \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1), \quad (7.4.31) \quad \text{usu36a}$$

а формулы (7.4.20), (7.4.23) и (7.4.24) записываются следующим образом

$$T_m^j(s', t') = [T^{(j)}(U) \cdot T_m^j](s, t) = \sum_{m'} T_{m'}^j(s, t) \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta), \quad (7.4.32) \quad \text{usu37}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) &= \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U) = \langle j, m' | U | j, m \rangle = \\ &= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!} \alpha^{j+m-k} \beta^{k-m+m'} (\beta^*)^k (\alpha^*)^{j-k-m'}, \end{aligned} \quad (7.4.33) \quad \text{usu38}$$

где суммирование идет по целым  $k$ .

- **Задача 216. ★** Доказать, что элементы  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)$ , заданные в (7.4.33), можно записать в компактном виде

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) = A_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^{j+m'} (y-1)^{j+m} (y+1)^{j-m} \Big|_{y=2\alpha\alpha^*-1}, \quad (7.4.34) \quad \text{WigF01}$$

$$\text{где } A_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta) = \frac{2^{m'-j} \sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m')!(j-m)!(j+m)!}} \cdot \alpha^{m'+m} \beta^{m'-m} \text{ и } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

В (7.4.33) мы использовали дираковские обозначения  $\langle j, m' | U | j, m \rangle$  для компонент матрицы  $||\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U)||$ , определяющей элемент  $U \in SU(2)$  в представлении  $T^{(j)}$ . Данные обозначения обсуждались нами в разделе 7.3 и являются чрезвычайно удобными. Например, пользуясь этими обозначениями, соотношения (7.4.32) можно записать как равенства

$$\langle s', t' | j, m \rangle = \langle s, t | U | j, m \rangle = \sum_{m'} \langle s, t | j, m' \rangle \langle j, m' | U | j, m \rangle, \quad (7.4.35) \quad \text{usu37a}$$

где мы положили (смотри (7.2.19) и (7.4.31))

$$\langle s', t' | = \langle s, t | U, \quad \langle s, t | j, m \rangle = T_m^{(j)}(s, t). \quad (7.4.36) \quad \text{usu36b}$$

С учетом (7.3.37) равенство (7.4.35) может быть получено как частный случай более компактной и универсальной формулы

$$U | j, m \rangle = \sum_{m'} | j, m' \rangle \langle j, m' | U | j, m \rangle, \quad (7.4.37) \quad \text{usu10}$$

где оператор  $U$  понимается уже не как  $(2 \times 2)$  матрица, а как абстрактный элемент группы  $SU(2)$ . При этом вектора  $|j, m\rangle$  также должны рассматриваться как абстрактные вектора, введенные в (7.1.18). Соотношения (7.4.32), (7.4.35) возникают из (7.4.37), если обе части этой формулы свернуть с вектором  $\langle s, t |$ , для которого

VRN

VRJ

выполняются равенства (7.4.36). Наконец, формула (7.4.25) в дираковских обозначениях принимает следующий вид

$$\langle j, m_1 | U \cdot U' | j, m_2 \rangle = \sum_{m_3} \langle j, m_1 | U | j, m_3 \rangle \langle j, m_3 | U' | j, m_2 \rangle, \quad \forall U, U' \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (7.4.38) \quad \text{homsu1}$$

Ясно, что Утверждение 7.4.1 справедливо не только для матриц представлений группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , но и для матриц  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)\|$  представлений унитарной группы  $SU(2)$ . Более того, в отличие от случая  $SL(2, \mathbb{C})$  конечномерные представления (7.4.32), (7.4.33) группы  $SU(2)$  оказываются унитарными VRN

$$\sum_m \mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta) \mathcal{D}_{mm''}^{(j)*}(\alpha, \beta) = \delta_{m'm''},$$

так как эрмитова свертка (7.4.26) очевидно инвариантна относительно преобразований (7.4.32) (в силу инвариантности квадратичной формы  $|s|^2 + |t|^2$ , возникшей в правой части (7.4.26), при всех двумерных унитарных преобразованиях (7.4.31)).

Согласно явной формуле (7.4.33), мы имеем

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(-\alpha, -\beta) = (-1)^{2j} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta), \quad (7.4.39) \quad \text{usu39a}$$

поэтому для целых  $j = \ell$  элементы (7.4.33) не меняются при замене  $U \rightarrow -U$  и оказываются однозначными функциями на группе  $SO(3)$ , элементам которой соответствуют пары  $\pm U \in SU(2)$ . Это означает, что неприводимые представления (7.4.32), (7.4.33) группы  $SU(2)$  для целых  $j = \ell$  являются одновременно неприводимыми представлениями и для группы  $SO(3)$ , причем эти представления исчерпывают все конечномерные неприводимые представления  $SO(3)$ . Действительно, так как  $SU(2)$  – универсальная накрывающая группы  $SO(3)$ , то все конечномерные неприводимые представления  $SO(3)$  содержатся в множестве конечномерных неприводимых представлений  $SU(2)$ , которые нумеруются целыми и полуцелыми неотрицательными числами  $j$ . Остается доказать, что представления (7.4.32), (7.4.33) для полуцелых  $j$  не являются представлениями  $SO(3)$ . Это следует из того, что при полуцелых  $j$  функции  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta)$ , согласно (7.4.39), меняют знак при замене  $U \rightarrow -U$  и не могут быть представлениями группы  $SO(3)$  (в обычном смысле<sup>34</sup>). VRN

При выборе для элементов матрицы (3.1.14) параметризации (7.4.7):

$$\alpha = \cos(\psi/2) + i \sin(\psi/2) \cos \theta, \quad \beta = i \sin \theta \cdot \sin(\psi/2) e^{-i\phi},$$

где мы учли (7.4.2), коэффициенты (7.4.33) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\psi, \vec{n}) &= e^{i\phi(m-m')} \frac{(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \frac{\psi}{2})^j}{(-1)^{m'} (\sin \theta)^{m-m'}} \frac{(\cos \theta - i \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2})^m}{(\cos \theta + i \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2})^{m'}} \cdot \\ &\cdot \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j-k+m)!(k-m+m')!} \left( \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \frac{\psi}{2}}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right)^k, \end{aligned} \quad (7.4.40) \quad \text{usu39}$$

<sup>34</sup>В литературе представления  $T^{(j)}$  с полуцелыми спинами  $j$  иногда называются двузначными представлениями  $SO(3)$ .

а в параметризации углов Эйлера (7.4.9):

$$\alpha = \cos(\theta/2) e^{i\frac{1}{2}(\psi+\phi)}, \quad \beta = \sin(\theta/2) e^{i\frac{1}{2}(\phi-\psi)}$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi) &= \langle j, m' | U(\phi, \theta, \psi) | j, m \rangle = e^{im'\phi + im\psi} d_{m'm}^{(j)}(\theta) = \\ &= \sum_k \frac{(-1)^k \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2k-m+m'} \cos^{2j}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{im'\phi + im\psi}. \end{aligned} \quad (7.4.41) \quad \text{usu40}$$

Здесь элементы  $U(\phi, \theta, \psi)$  заданы в (7.4.8), и мы выделили в (7.4.41) функции

$$\begin{aligned} d_{m'm}^{(j)}(\theta) &= \langle j, m' | U_{\vec{e}_2}(\theta) | j, m \rangle = \\ &= \cos^{2j}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{m-m'}} \sum_k \frac{(-1)^k \operatorname{tg}^{2k}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k-m+m')!}, \end{aligned} \quad (7.4.42) \quad \text{usu40a}$$

которые называются  $D$ -функциями Вигнера. Функции (7.4.41) упрощаются в некоторых частных случаях. Например, положим  $\theta = \phi = 0$  в (7.4.41), тогда в силу того, что  $\operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}) = 0$  и с учетом значений факториалов в знаменателе, из всей суммы по  $k$  выживет только слагаемое с  $2k = m - m' = 0$ . В результате мы получаем

$$\begin{aligned} \langle j, m' | U_{\vec{e}_3}(\psi) | j, m \rangle &= \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(0, 0, \psi) = e^{im\psi} \delta_{m,m'}, \\ m', m &= -j, -j+1, \dots, j. \end{aligned} \quad (7.4.43) \quad \text{usu15}$$

В следующих разделах мы покажем, что сферические функции, присоединенные функции Лежандра, полиномы Лежандра и Чебышева выражаются через  $D$ -функции Вигнера.

• **Задача 217.** Получить из (7.4.41) следующие равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{jm}^{(j)} &= \left( \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}^{j-m}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{2j}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{ij\phi + im\psi}, \\ \mathcal{D}_{mj}^{(j)} &= (-1)^{j-m} \left( \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}^{j-m}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{2j}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{im\phi + ij\psi}, \\ \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi) &= \mathcal{D}_{-m-m'}^{(j)}(-\psi, \theta, -\phi). \end{aligned} \quad (7.4.44) \quad \text{usu15a}$$

### 7.4.3 Сферические функции на $S^2 = SU(2)/U(1)$ . Операторы Лапласа на $SU(2) = S^3$ и $SU(2)/U(1) = S^2$ .

Материал данного подраздела можно рассматривать как иллюстрацию к общим конструкциям, изложенным в разделах 6.4.4, 6.4.5 и 6.4.6.

Элементы  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U) = \langle j, m' | U | j, m \rangle$  (7.4.33) матриц неприводимых представлений  $T^{(j)}$  группы  $SU(2)$  для всех  $j$ , согласно теореме Петера-Вейля 4.6.5, образуют полную систему функций на группе  $SU(2)$ , то есть на сфере  $S^3$ . Соответственно, если мы ограничимся только элементами (7.4.33) для целых  $j = \ell$ , то они образуют полную систему функций на группе  $SO(3)$  (напомним, что представления  $T^{(\ell)}$  исчерпывают все конечномерные неприводимые представления  $SO(3)$ ).

BSF  
VRN

VRN

В дальнейшем в этом разделе мы будем пользоваться параметризацией (7.4.9) элементов  $U \in SU(2)$  в терминах углов Эйлера. Элементы  $U(\phi, \theta, \psi) \in SU(2)$  действуют на базисные вектора  $|j, m\rangle$  векторного пространства  $\mathcal{V}_{2j+1}$  представления  $T^{(j)}$  согласно (7.4.37), а с учетом (7.4.41) это действие выглядит следующим образом:

$$|j, m\rangle \rightarrow U(\phi, \theta, \psi)|j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j |j, m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi). \quad (7.4.45) \quad \text{usu15b}$$

Таким образом, функции  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\phi, \theta, \psi)$  образуют полную систему функций на многообразии  $SU(2)$ , то есть сфере  $S^3$ . Отметим, что матрицы  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U)\|$  с элементами (7.4.41) являются аналогами матриц  $\|T_{mr}^{(\lambda)}(g)\|$  с элементами (6.4.132), которые рассматривались в разделе 6.4.6, где  $g = U \in SU(2) = G$ , а индекс  $\lambda$ , нумерующий представления  $G$ , в данном случае соответствует спину  $j$ .

В группе  $SU(2)$  с элементами (7.4.8) имеется подгруппа  $H = U(1)$ , образованная матрицами

$$U_{\vec{e}_3}(\psi) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}, \quad \psi \in [-2\pi, 2\pi).$$

Все конечномерные представления  $T^{(j)}$  для элементов  $U_{\vec{e}_3}(\psi) \in H = U(1)$  задаются матрицами  $\|\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(0, 0, \psi)\|$  (7.4.43). Для целых  $j = \ell$  представления  $T^{(\ell)}$  подгруппы  $U(1)$  одновременно являются представлениями подгруппы  $SO(2) \subset SO(3)$ , которая образована элементами (6.2.2) и (7.4.4):

$$T_3(-\psi) = O(-\psi, \vec{e}_3) = \exp(-\psi S_3), \quad \psi \in [-\pi, \pi).$$

В соответствии с (7.4.43) и (7.4.45), действие любого элемента  $U = U_{\vec{e}_3}(\psi)$  из подгруппы  $H = U(1)$  в представлении  $T^{(j)}$  на базисные вектора  $|j, m\rangle \in \mathcal{V}_{2j+1}$  имеет вид

$$U_{\vec{e}_3}(\psi)|j, m\rangle = \sum_{m'=-j}^j |j, m'\rangle \langle j, m'|U_{\vec{e}_3}(\psi)|j, m\rangle = e^{im\psi}|j, m\rangle, \quad (7.4.46) \quad \text{usu15f}$$

$$m \in [-j, -j+1, \dots, j-1, j].$$

Таким образом, представление  $T^{(j)}$  абелевой подгруппы  $H = U(1) \in SU(2)$  (в полном согласии со Следствием 2. к Лемме Шура 4.4.3) приводимо и распадается в прямую сумму одномерных представлений, число которых равно  $(2j+1)$ . Если  $j$  принимает целые значения  $\ell$ , то индекс  $m$  у базисных векторов  $|\ell, m\rangle \in \mathcal{V}_{2\ell+1}$  также принимает целые значения и может равняться нулю. В этом случае среди базисных векторов  $|\ell, m\rangle$  имеется специальный вектор  $|\ell, 0\rangle$ , который в силу (7.4.46) является инвариантным (стационарным) относительно действия подгруппы  $H = U(1)$ :

$$U_{\vec{e}_3}(\psi)|\ell, 0\rangle = |\ell, 0\rangle, \quad \forall \psi. \quad (7.4.47) \quad \text{usu15v}$$

Пользуясь этим фактом, мы получаем (см. также формулу (6.4.134) в разделе 6.4.6) **VRN**

$$\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(U \cdot U_{\vec{e}_3}) = \langle \ell, m|U \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi)|\ell, 0\rangle = \langle \ell, m|U|\ell, 0\rangle = \mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(U), \quad (7.4.48) \quad \text{usu15x}$$

то есть компоненты  $\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(U)$  оказываются функциями на однородном пространстве  $SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$  и, согласно общей терминологии, принятой в подразделе **6.4.6**, называются присоединенными сферическими функциями представления  $T^{(\ell)}$ . Если элемент  $U \in SU(2)$  задан в параметризации углов Эйлера, то функции (7.4.48) записываются в виде

$$\mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\phi, \theta) = \langle \ell, m | U_{\vec{e}_3}(\phi) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta) \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi) | \ell, 0 \rangle = \langle \ell, m | U_{\vec{e}_3}(\phi) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta) | \ell, 0 \rangle, \quad (7.4.49) \quad \text{usu15d}$$

и не зависят от параметра  $\psi$ , а зависят только от углов  $\phi$  и  $\theta$ , которые параметризуют однородное пространство  $SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$ , то есть сферу  $S^2$ . Функции (7.4.49) имеют специальное обозначение:

$$Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) := \mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\phi, \theta) = e^{im\phi} d_{m0}^{(\ell)}(\theta), \quad (7.4.50) \quad \text{usu17s}$$

и называются сферическими функциями или сферическими гармониками. С помощью формулы (7.4.34) функция  $d_{m0}^{(\ell)}(\theta)$ , входящая в определение  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$ , представляется в виде

$$d_{m0}^{(\ell)}(\theta) = \frac{\sqrt{(\ell - m)!}}{\sqrt{(\ell + m)!}} \cdot P_m^{(\ell)}(\cos \theta), \quad (7.4.51) \quad \text{WigF05}$$

где

$$P_m^{(\ell)}(y) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - y^2)^{m/2} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^{\ell+m} (y^2 - 1)^\ell \quad (7.4.52) \quad \text{WigF06}$$

называется присоединенной функцией Лежандра. Среди функций  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$  имеется функция  $Y_0^{(\ell)}(\phi, \theta) = d_{00}^{(\ell)}(\theta)$ , которая не зависит от  $\phi$  и называется зональной сферической функцией. Согласно (7.4.51) и (7.4.52) мы имеем  $Y_0^{(\ell)}(\theta) = P^{(\ell)}(\cos \theta)$ , где полиномы

$$P^{(\ell)}(y) = P_0^{(\ell)}(y) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\ell (y^2 - 1)^\ell, \quad (7.4.53) \quad \text{WigF07}$$

называются полиномами Лежандра.

В подразделе **6.4.6** указывалось, что если группа  $G$  компактна, а подгруппа  $H \subset G$  массивна, то все присоединенные сферические функции на однородном пространстве  $G/H$  образуют полную систему функций на этом пространстве. Согласно (7.4.47) все представления  $T^{(\ell)}$  группы  $SO(3)$  являются представлениями класса 1 относительно подгруппы  $SO(2)$ , то есть подгруппа  $SO(2)$  массивна в  $SO(3)$ . Поэтому сферические гармоники  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) = \mathcal{D}_{m0}^{(\ell)}(\phi, \theta)$  образуют полную систему функций на  $S^2 = SO(3)/SO(2)$ . Положим  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 0$ ,  $m_3 = m'$  и  $U' = U(\phi, \theta, \psi)$  в соотношениях (7.4.38), которые в этом случае записываются в виде

$$Y_m^{(\ell)}(\phi', \theta') = \langle \ell, m | U \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi) \cdot U_{\vec{e}_2}(\theta) | \ell, 0 \rangle = \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(U) Y_{m'}^{(\ell)}(\phi, \theta), \quad (7.4.54) \quad \text{usu16}$$

где  $U$  — любой элемент  $SU(2)$  и преобразованные углы  $\phi'$ ,  $\theta'$  однозначно определяются из уравнений

$$U \cdot U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta) U_{\vec{e}_3}(\psi) = U_{\vec{e}_3}(\phi') U_{\vec{e}_2}(\theta') U_{\vec{e}_3}(\psi'). \quad (7.4.55) \quad \text{usu17}$$

Соотношения (7.4.54) являются примерами общих формул (6.4.135) и (6.4.136) для конкретного случая однородного пространства  $G/H = SU(2)/U(1)$  и определяют специальное представление  $\rho^{(\ell)}$  группы  $SU(2)$ :

$$[\rho^{(\ell)}(U^{-1}) \cdot Y_m^{(\ell)}](\phi, \theta) = Y_m^{(\ell)}(\phi', \theta') = \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(U) Y_{m'}^{(\ell)}(\phi, \theta). \quad (7.4.56) \quad \text{usu17a}$$

Из соотношений (7.4.54), (7.4.56) следует, что сферические функции  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$  образуют базис в пространствах специальных конечномерных неприводимых представлений  $\rho^{(\ell)}$  группы  $SU(2)$ , которые нумеруются целыми числами  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . Эти конечномерные представления эквивалентны представлениям  $T^{(\ell)}$  и вкладываются как подпредставления в бесконечномерное индуцированное представление  $SU(2)$ :

$$[\rho(U^{-1}) \cdot f](\phi, \theta) = f(\phi', \theta'), \quad (\forall U \in SU(2)), \quad (7.4.57) \quad \text{usu19r}$$

которое действует на всем пространстве гладких функций  $f(\phi, \theta)$  на сфере  $S^2 = SU(2)/U(1)$ . Напомним, что представления (7.4.56) (так как  $\ell$  – целое) одновременно являются и неприводимыми представлениями группы  $SO(3)$ .

- **Задача 218.** Пользуясь формулами (7.4.25), (7.4.38) и (7.4.50) доказать теорему сложения для сферических функций:

$$\begin{aligned} P^{(\ell)}(\cos \omega_{12}) &= \sum_m Y_{-m}^{(\ell)}(-\phi_1, \theta_1) Y_m^{(\ell)}(\phi_2, \theta_2) = \\ &= \sum_m e^{im(\phi_1 + \phi_2)} P_{-m}^{(\ell)}(\cos \theta_1) P_m^{(\ell)}(\cos \theta_2), \end{aligned} \quad (7.4.58) \quad \text{teo-sL}$$

где  $\cos \omega_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$ .

- **Задача 219.** \* Пусть элемент  $U = \exp(\frac{i}{2} t^k \sigma_k) = \exp(-t^k \tau_k)$  группы  $SU(2)$  близок к единичному, то есть параметры  $t^i$  – малы. Показать, что функции  $\phi', \theta', \psi'$  в уравнении (7.4.55) в первом порядке по  $t^i$  равны

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + (t^1 \cos(\phi) - t^2 \sin(\phi)) \operatorname{ctg}(\theta) + t^3 + O_2, \\ \theta' &= \theta + t^1 \sin(\phi) + t^2 \cos(\phi) + O_2, \\ \psi' &= \psi + (-t^1 \cos(\phi) + t^2 \sin(\phi)) \sin^{-1}(\theta) + O_2. \end{aligned} \quad (7.4.59) \quad \text{usu18}$$

где символом  $O_2$  обозначены члены второго и более порядка по переменным  $\{t^k\}$ .

Перед тем, как обсуждать более подробно конечномерные представления (7.4.56), действующие в пространстве функций на двумерной сфере, рассмотрим левое регулярное представление группы  $SU(2)$ :

$$[T^{(R)}(U^{-1}) \cdot f](U(\phi, \theta, \psi)) = f(U \cdot U(\phi, \theta, \psi) = f(U(\phi', \theta', \psi')), \quad (7.4.60) \quad \text{usu18r}$$

которое действует в пространстве функций на  $SU(2)$  с базисом, образованным элементами (7.4.41). Положим  $U = \exp(-t^i \tau_i)$ . Дифференцируя (7.4.60) по  $t^i$  с учетом **VRN:** **так?**



(7.4.55), (7.4.59) и затем полагая  $t^i = 0$ , мы получаем (согласно общей методике, изложенной в разделе 6.4.4, смотри формулу (6.4.92)) представления образующих  $\tau_i$  алгебры  $su(2)$  в виде дифференциальных операторов  $\hat{\tau}_k \equiv T^{(R)}(\tau_k)$ :

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_1 &= \cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \sin(\phi) \partial_\theta - \cos(\phi) \sin^{-1}(\theta) \partial_\psi, \\ \hat{\tau}_2 &= -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \cos(\phi) \partial_\theta + \sin(\phi) \sin^{-1}(\theta) \partial_\psi, \quad \hat{\tau}_3 = \partial_\phi,\end{aligned}\tag{7.4.61} \quad \text{usu19}$$

которые по построению (см. разделы 3.1.6 и 6.4.4) совпадают с право-инвариантными векторными полями  $-R_k^j \partial_j$  (3.1.80), (6.4.93) на группе  $SU(2)$ .

- **Задача 220.** Проверить, что операторы (7.4.61) образуют базис алгебры  $su(2)$ , то есть удовлетворяют структурным соотношениям (3.2.121).
- **Задача 221.** Доказать, что квадратичный оператор Казимира  $\hat{\tau}_k \hat{\tau}_k$  (оператор Лапласа на сфере  $S^3$ ) для образующих (7.4.61) в параметризации углов Эйлера равен

$$\hat{\tau}_k \hat{\tau}_k = \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \operatorname{ctg} \theta \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\partial_\psi - 2 \cos \theta \partial_\phi) \partial_\psi. \tag{7.4.62} \quad \text{usu19k}$$

Рассмотрим теперь представления (7.4.56) (представления (6.4.136) в случае одномерного пространства  $SU(2)/U(1)$ ), действующие в пространстве сферических функций (7.4.50). Дифференциальная реализация (6.4.121), (6.4.137) для образующих  $SU(2)$  в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_1 &= \cos(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \sin(\phi) \partial_\theta, \\ \hat{\tau}_2 &= -\sin(\phi) \operatorname{ctg}(\theta) \partial_\phi + \cos(\phi) \partial_\theta, \quad \hat{\tau}_3 = \partial_\phi,\end{aligned}\tag{7.4.63} \quad \text{usu19gh}$$

и может быть также получена дифференцированием соотношений (7.4.57) и (7.4.56) по параметрам  $t^i$  с учетом (7.4.55) и (7.4.59). При этом аналоги формул (6.4.137), истекающие в рассматриваемом случае из (7.4.56) и связывающие матричные представления  $T^{(\ell)}$  образующих  $\tau_k$  и их дифференциальные реализации (7.4.63), имеют вид

$$\hat{\tau}_k \cdot Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) = - \sum_{m'} \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\tau_k) Y_{m'}^{(\ell)}(\phi, \theta),$$

где  $\|\mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\tau_k)\|$  – матрицы образующих  $\tau_k$  алгебры Ли  $su(2)$  в представлении  $T^{(\ell)}$ . Та же формула в обозначениях Дирака записывается следующим образом

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_k \langle \ell, m | U(\phi, \theta, 0) | \ell, 0 \rangle &= - \langle \ell, m | \tau_k \cdot U(\phi, \theta, 0) | \ell, 0 \rangle = \\ &= - \sum_{m'} \langle \ell, m | \tau_k | \ell, m' \rangle \langle \ell, m' | U(\phi, \theta, 0) | \ell, 0 \rangle.\end{aligned}\tag{7.4.64} \quad \text{usu16f}$$

Отметим, что представление (7.4.63) возникает из формул (7.4.61), если в них положить  $\partial_\psi = 0$  и таким образом занулить все производные вдоль кривых на многообразии группы  $SU(2)$ , которые соответствуют одномерной подгруппе стабильности  $U(1)$ .

Оператор Лапласа (7.4.62) в случае представления (7.4.63) приобретает стандартный вид оператора Лапласа на сфере  $S^2$  (см. общую формулу (6.4.124)):

$$\hat{\tau}_k \hat{\tau}_k = \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \operatorname{ctg} \theta \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right) \equiv \Delta_{SU(2)/U(1)}. \quad (7.4.65) \quad \text{usu19gg}$$

Выписывая явно для выбранных параметров  $(x^1, x^2, x^3) = (\phi, \theta, \psi)$  соответствующую векторным полям (7.4.61) матрицу

$$||R_k^j|| = \begin{pmatrix} -\cos \phi \operatorname{ctg} \theta, & -\sin \phi, & \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \\ \sin \phi \operatorname{ctg} \theta, & -\cos \phi, & -\frac{\sin \phi}{\sin \theta} \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

и вычисляя ее детерминант, получаем  $\det^{-1}(|R_k^j|) = \sin(\theta)$ . Поэтому инвариантная мера Хаара (3.1.86) на группе  $SU(2)$ , записанная в параметрах Эйлера, равна **VRN**

$$d\mu(U) = \frac{1}{16\pi^2} \sin(\theta) d\phi d\theta d\psi, \quad (7.4.66) \quad \text{mersu}$$

где константа выбрана так, чтобы объем всей группы  $SU(2)$  равнялся единице. Соотношение ортогональности (4.6.20) для матричных элементов  $\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U)$  (7.4.41) для неприводимых представлений  $T^{(j)}$  группы  $SU(2)$  записываются в виде

$$\int d\mu(U) \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(U) \left( \mathcal{D}_{k'k}^{(j')}(U) \right)^* = c(j) \delta^{jj'} \delta_{m'k'} \delta_{mk}, \quad (7.4.67) \quad \text{mersu01}$$

где константу  $c(j)$  в (7.4.67) можно вычислить, если зафиксировать  $j = j', k = m = j, k' = m' = j$  и воспользоваться (7.4.44). В этом случае интеграл (7.4.67) сводится к следующему интегралу для функций Вигнера (область изменения углов Эйлера для группы  $SU(2)$  указана в (7.4.11)):

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) d_{jj}^{(j)}(\theta) d_{jj}^{(j)}(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \cos^{4j}(\theta/2) = c(j), \quad (7.4.68) \quad \text{mersu02}$$

откуда получаем, что

$$c(j) = \frac{1}{2j+1}. \quad (7.4.69) \quad \text{coef-c}$$

Из формулы (7.4.67) также следует соотношение ортогональности (см. общую формулу (6.4.139)) для сферических функций (7.4.50):

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) \left( Y_{m'}^{(\ell')}(\phi, \theta) \right)^* = c(\ell) \delta^{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (7.4.70) \quad \text{mersu03}$$

и соответственно для присоединенных функций Лежандра (7.4.52) и полиномов Лежандра (7.4.53).

- **Задача 222.** Доказать, что с учетом (7.4.69), (7.4.50) и (7.4.51) из формулы (7.4.70) следует соотношение ортогональности для присоединенных функций Лежандра:

$$\int_{-1}^1 dx P_m^{(\ell)}(x) P_m^{(\ell')}(x) = \frac{2}{(2\ell+1)} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta^{\ell\ell'}.$$

Отметим, что связь (7.4.64) матричных представлений образующих  $\tau_k$  и их дифференциальных реализаций (7.4.63) показывает, что действие дифференциального оператора  $\hat{\tau}_k$  на сферические функции  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$  эквивалентно действию справа образующей  $(-\tau_k)$  на дуальные вектора  $\langle \ell, m |$ . В соответствии с этим замечанием замена (7.1.1) для образующих (7.4.63) приводит к тому, что действие операторов

$$\hat{e}_{\pm} = i \hat{\tau}_1 \mp \hat{\tau}_2 = e^{\mp i\phi} (\mp \partial_{\theta} + i \operatorname{ctg} \theta \partial_{\phi}) , \quad \hat{h} = i \hat{\tau}_3 = i \partial_{\phi} , \quad (7.4.71) \quad \text{usu31}$$

на  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$  определяется соответственно действием образующих  $(-e_{\pm})$ ,  $(-h)$  справа на дуальный вектор  $\langle \ell, m |$ . Таким образом, в согласии с (7.4.54) можно считать, **VRN** что сферические функции  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$  образуют базис дуального пространства к пространству представления  $T^{(\ell)}$  для группы  $SO(3)$ , а операторы (7.4.71) по построению должны порождать это дуальное пространство из старших или младших векторов, каковыми являются функции  $Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$  и  $Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$ , соответствующие  $\langle \ell, \ell |$  и  $\langle \ell, -\ell |$ . Выберем в (7.4.41)  $j = \ell$  и положим  $m' = \ell$ ,  $m = 0$ , или  $m' = -\ell$ ,  $m = 0$ , в результате получаем

$$Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) = \frac{\sqrt{(2\ell)!}}{2^{\ell}(\ell!)} e^{i\ell\phi} \sin^{\ell}(\theta) , \quad Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) = (-1)^{\ell} \frac{\sqrt{(2\ell)!}}{2^{\ell}(\ell!)} e^{-i\ell\phi} \sin^{\ell}(\theta) . \quad (7.4.72) \quad \text{usu30}$$

- **Задача 223.** Проверить, что функции  $Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$  и  $Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta)$  (7.4.72) удовлетворяют условиям для старшего и младшего дуального вектора (смотри (7.1.28)):  $\hat{e}_{-} Y_{\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) = 0$ ,  $\hat{e}_{+} Y_{-\ell}^{(\ell)}(\phi, \theta) = 0$ .
- **Задача 224.** Показать, что функции  $Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta)$ , заданные в (7.4.50), подчиняются уравнениям, вытекающим из (7.1.25):

$$\begin{aligned} (-\hat{h}) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= m Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) , \\ (-\hat{e}_{-}) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \sqrt{(\ell + m + 1)(\ell - m)} Y_{m+1}^{(\ell)}(\phi, \theta) , \\ (-\hat{e}_{+}) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \sqrt{(\ell - m + 1)(\ell + m)} Y_{m-1}^{(\ell)}(\phi, \theta) . \end{aligned} \quad (7.4.73) \quad \text{prob5}$$

С учетом автоморфизма (3.2.188) уравнения (7.4.73) можно переписать в более привычном виде (сравните с (7.2.24))

$$\begin{aligned} \hat{h}' Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= m Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) , \\ \hat{e}'_{+} Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \sqrt{(\ell + m + 1)(\ell - m)} Y_{m+1}^{(\ell)}(\phi, \theta) , \\ \hat{e}'_{-} Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) &= \sqrt{(\ell - m + 1)(\ell + m)} Y_{m-1}^{(\ell)}(\phi, \theta) , \end{aligned} \quad (7.4.74) \quad \text{prob51}$$

где вместо (7.4.71) мы имеем

$$\hat{e}'_{\pm} = -e^{\pm i\phi} (\pm \partial_{\theta} + i \operatorname{ctg} \theta \partial_{\phi}) , \quad \hat{h}' = -i \hat{\tau}_3 = -i \partial_{\phi} . \quad (7.4.75) \quad \text{prob57}$$

- **Задача 225.** Пользуясь равенствами (7.4.73) или (7.4.74), доказать, что сферические функции  $Y_m^{(\ell)}$  являются собственными функциями оператора Лапласа на двумерной сфере  $\Delta_{SU(2)/U(1)}$  (7.4.65):

$$\Delta_{SU(2)/U(1)} Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta) = \ell(\ell + 1) Y_m^{(\ell)}(\phi, \theta), \quad \forall m,$$

то есть проверить соотношение (7.1.30) для данного представления (см. также общую формулу (6.4.142)).

VRN

ESF

## 7.5 Прямое произведение конечномерных представлений группы $SU(2)$ и его разложение в прямую сумму неприводимых представлений. Коэффициенты Клебша - Гордана.

### 7.5.1 Разложение Клебша-Гордана.

Пусть представления  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  группы  $G$  неприводимы. Обозначим соответствующие пространства представлений как  $\mathcal{V}_1$  и  $\mathcal{V}_2$ . Прямое произведение этих представлений  $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  в общем случае приводимо. Пусть группа  $G$  компактна. Тогда, согласно Утверждению 4.5.1, представление  $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  всегда разложимо в прямую сумму по неприводимым представлениям  $T^{(\alpha)}$  группы  $G$ , которые действуют в пространствах представлений  $\mathcal{V}_\alpha$  (индекс  $\alpha$  нумерует неприводимые представления). Таким образом, мы имеем разложение

$$\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 = \oplus_\alpha m_\alpha \mathcal{V}_\alpha, \quad (7.5.1) \quad \text{klg-0}$$

где  $m_\alpha$  – кратности вхождения неприводимых представлений, эквивалентных  $T^{(\alpha)}$ , в тензорное произведение представлений  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ . Другими словами, существует такая обратимая матрица  $C$ , с помощью которой все матрицы представления  $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  приводятся к блочно-диагональному виду

$$C (T^{(1)}(g) \otimes T^{(2)}(g)) C^{-1} = \oplus_\alpha m_\alpha T^{(\alpha)}(g) \quad \Rightarrow \quad (7.5.2) \quad \text{klgo}$$

$$\hat{C} : (\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2) \rightarrow \oplus_\alpha m_\alpha \mathcal{V}_\alpha, \quad (7.5.3) \quad \text{klgo1}$$

где  $g$  – произвольный элемент  $G$ , а  $\hat{C}$  – обратимый оператор, который соответствует матрице  $C$  и переводит базис пространства  $(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2)$ , состоящий из прямого произведения базисных векторов  $\mathcal{V}_1$  и  $\mathcal{V}_2$ , в естественный базис пространства  $\oplus_\alpha m_\alpha \mathcal{V}_\alpha$ , состоящий из базисных векторов всех слагаемых подпространств  $\mathcal{V}_\alpha$ . Элементы матрицы  $C$  называются коэффициентами Клебша-Гордана. Действие оператора  $\hat{C}$  (7.5.3), можно записать в явном матричном виде

$$\sum_{d,b} C_{(\alpha,c)}^{(1,d),(2,b)} |d\rangle_1 \otimes |b\rangle_2 = |c\rangle_\alpha, \quad (7.5.4) \quad \text{klgo2}$$

где  $|d\rangle_1$ ,  $|b\rangle_2$  и  $|c\rangle_\alpha$  – нормированные базисные вектора пространств  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  и  $\mathcal{V}_\alpha$ , соответственно, и индексы  $d, b, c$  нумеруют эти базисные вектора. Формула (7.5.4) называется разложением (или рядом) Клебша-Гордана.

**Проблема построения ряда Клебша-Гордана в теории представлений групп является одной из самых сложных задач, решение которой известно только для некоторого класса групп и определенных типов представлений.**

В этом разделе мы изучим проблему построения ряда Клебша-Гордана для конечномерных представлений  $T^{(j)}$  группы  $SU(2)$ . Эти представления, как мы видели, соответствуют конечномерным представлениям алгебры Ли  $su(2)$  или конечномерным представлениям алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ .

Прежде всего мы обсудим метод нахождения кратностей  $m_\alpha$  в разложении (7.5.2), (7.5.3). Пусть мы имеем два неприводимых представления  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$  группы  $SU(2)$  или, что то же самое, два неприводимых представления  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$  алгебр Ли  $su(2)$  и  $sl(2, \mathbb{C})$  с определяющими соотношениями (3.2.121) и (3.2.91). Эти представления действуют в пространствах  $\mathcal{V}_{2j+1}$  с базисными векторами  $|j, m\rangle$  (7.1.18) с  $j = j_1$  и  $j = j_2$  и реализуются в виде  $(2j_1 + 1)$  и  $(2j_2 + 1)$ -мерных матриц (7.4.33), соответственно. В рассматриваемом случае равенство (7.5.2) можно переписать в виде

$$C \left( T^{(j_1)}(U) \otimes T^{(j_2)}(U) \right) C^{-1} = \bigoplus_j m_j T^{(j)}(U), \quad \forall U \in SU(2). \quad (7.5.5) \quad \text{tt-t}$$

Возьмем элемент  $U \in SU(2)$  в параметризации (7.4.5):  $U = U_{\vec{n}}(\psi)$ . Тогда из (7.5.5) следует соотношение для характеров:

$$\chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) = \sum_j m_j \chi^j(\psi), \quad (7.5.6) \quad \text{chit}$$

где

$$\chi^{(j)}(\psi) = \text{Tr}_{2j+1} \left( T^{(j)}(U_{\vec{n}}(\psi)) \right) = \sum_{m=-j}^j \langle j, m | U_{\vec{n}}(\psi) | j, m \rangle. \quad (7.5.7) \quad \text{chit2}$$

**Утверждение 7.5.1** Характер (7.5.7) не зависит от направления  $\vec{n}$ , а зависит только от угла  $\psi$ , и равен

$$\chi^{(j)}(\psi) = \frac{\sin(\psi(j + 1/2))}{\sin(\psi/2)}. \quad (7.5.8) \quad \text{chip}$$

Угол поворота  $\psi \in [-2\pi, 2\pi)$  характеризует класс сопряженных элементов в группе  $SU(2)$ , состоящий из всех элементов  $U_{\vec{n}}(\psi)$  (7.4.5) с фиксированным  $\psi$  и произвольным  $\vec{n}$ .

**Доказательство.** Преобразования подобия (7.4.14) элемент  $U_{\vec{n}}(\psi)$  (7.4.5) с любым  $\vec{n}$  сводится к элементу  $U_{\vec{e}_3}(\psi)$ , который нумерует класс сопряженных элементов. При этом характер элемента  $U_{\vec{n}}(\psi)$  зависит только от угла  $\psi$  и не зависит от  $\vec{n}$ :

$$\begin{aligned} \chi^{(j)}(\psi) &= \text{Tr}_{2j+1} \left( T^{(j)}(U_{\vec{n}}(\psi)) \right) = \text{Tr}_{2j+1} \left( T^{(j)}(U^{-1} \cdot U_{\vec{e}_3}(\psi) \cdot U) \right) = \\ &= \text{Tr}_{2j+1} \left( T^{(j)}(U_{\vec{e}_3}(\psi)) \right) = \sum_m \langle j, m | U_{\vec{e}_3}(\psi) | j, m \rangle. \end{aligned} \quad (7.5.9) \quad \text{chit3}$$

Пользуясь последней формулой и явным видом матрицы (7.4.43) для элемента  $U_{\vec{e}_3}(\psi)$  в представлении  $T^{(j)}$ , мы вычисляем характер (7.5.7) для любого элемента  $U_{\vec{n}}(\psi)$ :

$$\chi^{(j)}(\psi) = \sum_m \langle j, m | U_{\vec{e}_3}(\psi) | j, m \rangle = \sum_{m=-j}^j e^{im\psi} = \frac{e^{i\psi(j+1/2)} - e^{-i\psi(j+1/2)}}{e^{i\psi/2} - e^{-i\psi/2}}, \quad (7.5.10) \quad \text{chip1}$$

что и дает (7.5.8). ■ VRN

Зная явное выражение (7.5.8) для характеров  $\chi^{(j)}$  всех неприводимых представлений  $T^{(j)}$  группы  $SU(2)$ , мы могли бы получить разложение (7.5.6) и тем самым вычислить кратности  $m_j$  воспользовавшись полнотой и ортогональностью функций  $\chi^{(j)}(\psi)$  в соответствии с общей теорией характеров компактных групп, изложенной в Разделе 4.6.2. Однако, здесь мы приведем прямой способ вычисления кратностей  $m_j$  в разложении (7.5.6). Подставим функции (7.5.8) в левую часть (7.5.6) и воспользуемся тождеством

$$\sin(a) \sin(b) = \sin(a+b-c) \sin(c) + \sin(a-c) \sin(b-c),$$

которое справедливо для любых  $a, b$  и  $c$ . Тогда левая часть (7.5.6) переписывается следующим образом VRN

$$\begin{aligned} \chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) &= \frac{\sin(\psi(j_1 + \frac{1}{2})) \sin(\psi(j_2 + \frac{1}{2}))}{\sin^2(\psi/2)} = \\ &= \frac{\sin(\psi(j_1 + j_2 + \frac{1}{2}))}{\sin(\psi/2)} + \frac{\sin(\psi j_1) \sin(\psi j_2)}{\sin^2(\psi/2)} = \chi^{(j_1+j_2)}(\psi) + \chi^{(j_1-\frac{1}{2})}(\psi) \cdot \chi^{(j_2-\frac{1}{2})}(\psi). \end{aligned} \quad (7.5.11) \quad \text{psip}$$

Второе слагаемое в правой части (7.5.11) может быть снова расписано с помощью тождества (7.5.11), после чего оно приобретает вид

$$\chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) = \chi^{(j_1+j_2)}(\psi) + \chi^{(j_1+j_2-1)}(\psi) + \chi^{(j_1-1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2-1)}(\psi),$$

где к третьему слагаемому в правой части мы снова можем применить (7.5.11) и так далее. Пусть  $j_1 \geq j_2$  (случай  $j_2 \geq j_1$  рассматривается аналогично), тогда после  $(2j_2)$  шагов мы получим, что в последнем квадратичном слагаемом второй сомножитель будет равен единице:  $\chi^{(0)}(\psi) = 1$ , после чего процедура оборвется и в результате мы получим разложение

$$\chi^{(j_1)}(\psi) \cdot \chi^{(j_2)}(\psi) = \chi^{(j_1+j_2)}(\psi) + \chi^{(j_1+j_2-1)}(\psi) + \dots + \chi^{(j_1-j_2)}(\psi). \quad (7.5.12) \quad \text{chi05}$$

Сравнивая этот результат с разложением (7.5.6), мы получаем, что в (7.5.6) необходимо положить  $m_j = 1$  для  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$  и  $m_j = 0$  для других  $j$ . Таким образом, мы имеем следующее утверждение.

**Утверждение 7.5.2** Разложение (7.5.5) прямого произведения двух неприводимых конечномерных представлений  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$  группы  $SU(2)$  имеет вид

$$\left( T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \right) = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} T^{(j)}, \quad (7.5.13) \quad \text{chi06}$$

что соответствует тождеству характеров (7.5.12).

Данное утверждение эквивалентно тому, что прямое произведение двух базисных векторов  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ , принадлежащих пространствам представлений  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$ , разлагается в прямую сумму векторов, принадлежащих пространствам представлений  $T^{(j)}$  со спином  $j$ , который лежит в интервале  $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ . Этот результат хорошо известен в квантовой механике и называется правилом сложения спинов  $j_1$  и  $j_2$ . Справедливость формулы (7.5.13) можно также проверить путем подсчета размерностей соответствующих пространств представлений, что эквивалентно проверке тождества:

VRN

$$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j + 1) .$$

**Замечание.** Из формулы (7.5.12) для  $j_1 = j$  и  $j_2 = 1/2$  получаем соотношение

$$\chi^{(j)} \cdot \chi^{(\frac{1}{2})} = \chi^{(j+\frac{1}{2})} + \chi^{(j-\frac{1}{2})} , \quad (7.5.14) \quad \text{chi07}$$

где

$$\chi^{(0)} = 1 , \quad \chi^{(1/2)} = 2 \cos(\psi/2) . \quad (7.5.15) \quad \text{chi77}$$

Согласно тождеству (7.5.14), которое можно рассматривать как рекуррентное соотношение  $\chi^{(j+\frac{1}{2})} = \chi^{(j)} \cdot \chi^{(\frac{1}{2})} - \chi^{(j-\frac{1}{2})}$  с начальными данными (7.5.15), все функции  $\chi^{(j)}(\psi)$ , заданные в (7.5.8), являются полиномами  $P_{2j}(x)$  степени  $2j$  от переменной  $x = \cos(\psi/2)$ . Полиномы  $P_{2j}(x)$  называются полиномами Чебышева. Ортогональность этих полиномов следует из общего утверждения (4.6.22), которое справедливо для характеров неприводимых представлений любой компактной группы.

Итак, задача о вычислении кратностей в (7.5.2) решена. Далее задача построения ряда Клебша-Гордана сводится к явному выделению неприводимых компонент в прямом произведении представлений  $T^{(j)}$  с разными  $j$  и вычислению коэффициентов матрицы  $C$  (коэффициентов Клебша-Гордана), фигурирующих в формулах (7.5.2) и (7.5.4). В следующих разделах мы рассмотрим различные методы, которые используются при решении этих задач в случае конечномерных неприводимых представлений группы  $SU(2)$ .

VRN

### 7.5.2 Выделение неприводимых представлений со старшим весом в прямом произведении представлений.

В этом подразделе мы опишем способ выделения неприводимых компонент в прямом произведении представлений  $T^{(j)}$  с разными  $j$  с помощью метода построения представлений со старшим весом (смотри раздел 7.1). Этот способ удобен для практических вычислений при не слишком больших значениях  $j$ .

Выберем, как это принято в квантовой механике, в качестве образующих алгебры  $su(2)$  эрмитовы операторы  $S_\alpha$  (в определяющем представлении мы имеем  $S_\alpha = i \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma_\alpha$ ), которые удовлетворяют соотношениям, вытекающим из (3.2.121):

$$[S_\alpha, S_\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) . \quad (7.5.16) \quad \text{oprs}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями  $S_x = S_1, S_y = S_2, S_z = S_3$  и называть эти образующие компонентами оператора вектора спина.

Рассмотрим двумерное определяющее представление алгебры  $su(2)$  (группы  $SU(2)$ ) и зафиксируем базис в 2-мерном пространстве  $\mathcal{V}$  этого представления следующим образом:

$$|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.5.17) \quad \text{compos0}$$

Стрелки здесь соответствуют направлениям вектора спина по отношению к оси  $z$  (вверх и вниз) или, что тоже самое, знаку собственного значения  $m = \pm 1/2$  оператора  $S_z$ , взятого в определяющем представлении  $S_z = 1/2\sigma_3$ : **VRN**

$$S_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle, \quad S_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle.$$

Далее мы пользуемся следующими обозначениями для базисных векторов в пространствах  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}, \dots$  (здесь  $\mathcal{V}$  – пространство определяющего представления):

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.5.18) \quad \text{compos1}$$

$$|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \quad (7.5.19) \quad \text{compos2}$$

и так далее. В квантовой механике вектора (7.5.18) и (7.5.19) соответствуют композитным состояниям двух и трех частиц со спином  $1/2$ .

В соответствии с определениями, данными в разделе 4.3.1, действие операторов компонент вектора спина  $S_x, S_y, S_z$  на композитные состояния (7.5.18) определяется правилами (4.3.13) и (4.3.14), сформулированными для прямого произведения двух представлений. В рассматриваемом случае мы имеем (смотри (4.3.13)):

$$\Delta(S_\alpha) = S_\alpha \otimes I + I \otimes S_\alpha, \quad (7.5.20) \quad \text{comult}$$

где  $I$  – единичный оператор в  $\mathcal{V}$  и  $\Delta$  – обозначает представление обертывающей алгебры  $\mathcal{U}(su(2))$  в пространстве  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ . Операторы  $\Delta(S_\alpha)$  (7.5.20) применяются к состояниям  $(v \otimes u)$ , где  $v, u \in \mathcal{V}$ , согласно (4.3.14):

$$\Delta(S_\alpha)(v \otimes u) = (S_\alpha \otimes I + I \otimes S_\alpha)(v \otimes u) = (S_\alpha v) \otimes u + v \otimes (S_\alpha u). \quad (7.5.21) \quad \text{comuv}$$

Напомним, что операторы  $S_\alpha$ , действующие на вектора из  $\mathcal{V}$ , берутся в определяющем представлении. Далее, для определения действия образующих  $S_\alpha$  алгебры  $su(2)$  на базисные состояния (7.5.19) в  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ , которые представляют собой композицию трех частиц со спином  $1/2$  (тензорное произведение трех двумерных векторов), мы пользуемся формулой

$$\Delta^2(S_\alpha) = S_\alpha \otimes I \otimes I + I \otimes S_\alpha \otimes I + I \otimes I \otimes S_\alpha, \quad (7.5.22) \quad \text{comult1}$$

где  $\Delta^2$  – обозначает представление  $\mathcal{U}(su(2))$  в пространстве  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ , и так далее. Для определения действия операторов спина  $S_\alpha$  на состояния  $n$  частиц со спином  $1/2$



(прямое произведение  $n$  двумерных векторов, принадлежащих пространству  $\mathcal{V}^{\otimes n}$ ) мы должны воспользоваться представлением (сравните с формулами (4.7.51)-(4.7.53)):

$$\Delta^{n-1}(S_\alpha) = \sum_{k=1}^n S_\alpha^{(k)} , \quad (7.5.23) \quad \text{dNS}$$

где

$$S_\alpha^{(k)} = I^{\otimes(k-1)} \otimes S_\alpha \otimes I^{\otimes(n-k)} . \quad (7.5.24) \quad \text{dNS1}$$

Отметим еще раз, что правила (7.5.20), (7.5.21) являются ни чем иным как квантовомеханическим правилом суммирования спинов, которое определяет представление  $T$  для образующих  $S_\alpha$  (компонент оператора вектора спина) алгебры Ли  $su(2)$  в пространстве прямых произведений двух неприводимых представлений  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$  алгебры  $su(2)$ . В этом случае мы имеем (4.3.13), (4.7.50):

$$T(S_\alpha)(v \otimes u) = (T^{(j_1)}(S_\alpha)v) \otimes u + v \otimes (T^{(j_2)}(S_\alpha)u) , \quad (7.5.25) \quad \text{comuvtt}$$

где  $v$  и  $u$  — вектора из пространств представлений  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$ , соответственно.

Применим это правило и правило, вытекающее из (7.5.22), к состояниям (7.5.18) и (7.5.19). Тогда собственные значения  $m$  оператора  $T(S_z)$  на состояниях (7.5.18) равны 1, 0, 0, -1, а на состояниях (7.5.19) равны 3/2, -1/2, 1/2, ..., соответственно.

Если мы рассмотрим всевозможные тензорные произведения  $n$  базисных векторов (7.5.17), то мы получим базис пространства  $\mathcal{V}^{\otimes n}$ , в котором реализуется представление  $su(2)$  размерности  $2^n$ . Соответствующее представление  $T = \Delta^{n-1}$  алгебры  $su(2)$ , заданное с помощью (4.7.53) и (7.5.23), оказывается приводимым и пространство  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  разбивается на инвариантные подпространства неприводимых представлений. Для выделения неприводимых компонент из  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  воспользуемся стандартной процедурой построения представлений со старшим весом. Введем повышающие и понижающие операторы  $S_\pm$  (аналоги образующих  $e_\pm \in sl(2, \mathbb{C})$ , которые заданы в (7.1.2)):

$$S_+ = S_x + iS_y , \quad S_- = S_x - iS_y , \\ [S_+, S_-] = 2S_z , \quad [S_z, S_\pm] = \pm S_\pm .$$

Здесь  $S_z$  — аналог образующей  $\mathfrak{h}$  из (7.1.2). В определяющем представлении имеем

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \\ S_+|\uparrow\rangle = 0 , \quad S_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle , \\ S_-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle , \quad S_-|\downarrow\rangle = 0 . \quad (7.5.26) \quad \text{spsm}$$

Итак, в этом представлении операторы  $S_+$  и  $S_-$  либо "переворачивают" спины, либо уничтожают соответствующие вектора. **VRN**

Вначале рассмотрим процедуру выделения неприводимых представлений на примере 4-мерного пространства  $\mathcal{V}^{\otimes 2}$  с базисными векторами (7.5.18). Для удобства эти вектора мы запишем в виде "башни" в соответствии с их собственными значениями  $m$  оператора  $S_z$ :

$$\begin{array}{ll} |\uparrow\uparrow\rangle & m = 1 \\ |\uparrow\downarrow\rangle , |\downarrow\uparrow\rangle & m = 0 \\ |\downarrow\downarrow\rangle & m = -1 \end{array} \quad (7.5.27) \quad \text{4dimir}$$

В дальнейшем собственные значения  $m$  оператора  $S_z$  будут называться *проекцией спина на ось  $z$* . В качестве вектора со старшим весом, согласно определению (7.1.5), мы можем выбрать состояние  $|\uparrow\uparrow\rangle$  с максимальной проекцией  $m = 1$ , так как это состояние уничтожается повышающим оператором, который в соответствии с (7.5.20) равен  $\Delta(S_+) = S_+ \otimes I + I \otimes S_+$ . Затем, для того чтобы породить из старшего вектора  $|\uparrow\uparrow\rangle$  все пространство неприводимого представления, мы воспользуемся стандартной процедурой и подействуем на  $|\uparrow\uparrow\rangle$  понижающим оператором  $\Delta(S_-)$  с учетом (7.5.20) и (7.5.26). В результате получаем

$$(\Delta S_-) \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (\Delta S_-)^2 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = 2|\downarrow\downarrow\rangle, \quad (\Delta S_-)^3 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = 0.$$

Таким образом, мы построили три симметричных вектора

$$\begin{array}{ll} |\uparrow\uparrow\rangle & m = 1, \\ (\Delta S_-) \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle & m = 0, \\ (\Delta S_-)^2 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = 2|\downarrow\downarrow\rangle & m = -1 \end{array} \quad (7.5.28) \quad \text{3dimirr}$$

которые определяют базис в инвариантном 3-х мерном подпространстве, вложенном в 4-х мерное пространство  $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ . Данное 3-х мерное инвариантное пространство соответствует неприводимому представлению  $su(2)$  со спином  $j = 1$ , что следует из вычисления собственного значения  $j(j+1)$  для оператора Казимира:

$$J^2 = \frac{1}{2}(S_+S_- + S_-S_+) + S_z^2 = S_-S_+ + (1 + S_z)S_z, \quad (7.5.29) \quad \text{cassp1}$$

на векторах (7.5.28). Напомним, что оператор Казимира (7.5.29) имеет одно и то же собственное значение  $j(j+1)$  на всех векторах неприводимого представления со спином  $j$ , поэтому достаточно вычислить это собственное значение на любом из данных векторов. Наиболее легко это собственное значение вычисляется для вектора со старшим (или младшим) весом, и мы имеем

$$\Delta(J^2)|\uparrow\uparrow\rangle = (1 + \Delta(S_z))\Delta(S_z)|\uparrow\uparrow\rangle = 2|\uparrow\uparrow\rangle,$$

то есть  $j(j+1) = 2$ , что соответствует значению  $j = 1$ . Пользуясь обозначениями  $|j, m\rangle$ , вектора (7.5.28) после их нормировки можно записать следующим образом:

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle), \quad |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle,$$

что соответствует разложению Клебша-Гордана (7.5.13) для  $j_1 = j_2 = 1/2$  и  $j = 1$ .

Итак, мы выделили из пространства (7.5.27) трехмерное инвариантное подпространство  $\mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}^{\otimes 2}$  с базисом (7.5.28). Так как  $\mathcal{V}^{\otimes 2}$  — четырехмерно, то остается 1-мерное подпространство  $\mathcal{V}_1$  в  $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ , не входящее в пространство  $\mathcal{V}_3$ . Очевидно, что вектор, образующий подпространство  $\mathcal{V}_1$ , имеет проекцию  $m = 0$  и его можно выделить из  $\mathcal{V}^{\otimes 2}$ , налагая условие старшего веса, но уже на произвольное состояние с проекцией  $m = 0$ :

$$\Delta S_+ \cdot (a_1|\downarrow\uparrow\rangle + a_2|\uparrow\downarrow\rangle) = 0.$$

Как нетрудно увидеть это условие дает  $a_1 = -a_2$ . Таким образом, мы находим последний вектор в  $\mathcal{V}^{\otimes 2}$  (в дополнение к трем векторам (7.5.28)):

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle), \quad (7.5.30) \quad \text{ldimirr}$$

который антисимметричен и соответствует одномерному неприводимому представлению со спином  $j = 0$ . То, что этот вектор действительно образует тривиальное одномерное инвариантное подпространство следует из того факта, что  $\Delta S_-$  и  $\Delta S_z$  также равны нулю на этом векторе.

Отметим еще раз, что состояния (7.5.28) — симметричные комбинации произведений двумерных векторов (7.5.18), а вектор (7.5.30) — антисимметричен.

Применим ту же процедуру выделения неприводимых представлений в случае тензорного произведения двух представлений  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$  с произвольными  $j_1$  и  $j_2$ . Базис в пространстве  $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$  представления  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$  состоит из векторов  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ , где  $m_i = -j_i, -j_i + 1, \dots, j_i - 1, j_i$ . Действие операторов  $S_\alpha$  на эти вектора определяется формулой (7.5.25). Вектор  $|v_0\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$  удовлетворяет всем требованиям для вектора со старшим весом представления  $T^{(j_1+j_2)}$ :

$$T(S_z)|v_0\rangle = (j_1 + j_2)|v_0\rangle, \quad T(S_+)|v_0\rangle = 0,$$

и следовательно мы имеем

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle. \quad (7.5.31) \quad \text{tj12a}$$

Подействуем на обе части этого соотношения понижающим оператором  $T(S_-)$  и воспользуемся формулами (7.5.25) и (7.1.19), (7.2.24). В результате получаем вектор

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle := \frac{\sqrt{j_1}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle + \frac{\sqrt{j_2}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle, \quad (7.5.32) \quad \text{tj12b}$$

где множитель  $(j_1 + j_2)^{-1/2}$  введен для нормировки. Этот вектор является линейной комбинацией двух собственных векторов оператора  $T(S_z)$ , имеющих собственное значение  $m = (j_1 + j_2 - 1)$ . Подействуем теперь на состояние (7.5.32) понижающим оператором  $T(S_-)$ , в результате мы получим вектор с собственным значением  $m = (j_1 + j_2 - 2)$  и так далее. Продолжая действовать на получающиеся состояния понижающими операторами  $T(S_-)$ , мы породим все базисные вектора пространства  $\mathcal{V}_{2(j_1+j_2)+1}$  неприводимого представления  $T^{(j_1+j_2)}$ .

В пространстве  $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$  имеется еще один, ортогональный к (7.5.32), вектор  $|v_1\rangle$ , имеющий то же собственное значение  $(j_1 + j_2 - 1)$  оператора  $T(S_z)$ . Будем искать этот вектор в виде

$$|v_1\rangle = \alpha_1 |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle + \alpha_2 |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle. \quad (7.5.33) \quad \text{tj12d}$$

Этот вектор, ортогональный к (7.5.32), должен уничтожаться повышающим оператором  $T(S_+)$ .

- **Задача 226.** Доказать, что из соотношения  $\langle j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 | v_1 \rangle = 0$  следует тождество  $T(S_+) |v_1\rangle = 0$ .

VRN

Таким образом, вектор  $|v_1\rangle$  удовлетворяет требованиям:

$$T(S_z)|v_1\rangle = (j_1 + j_2 - 1)|v_1\rangle, \quad T(S_+)|v_1\rangle = 0,$$

и следовательно является старшим вектором  $|v_1\rangle = |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$  представления  $T^{(j_1+j_2-1)}$ . Уравнение  $T(S_+)|v_1\rangle = 0$ , условие нормировки  $\langle v_1|v_1\rangle = 1$  и требование вещественности коэффициентов определяет вектор (7.5.33) однозначно (с точностью до общего знака, который выбирается по соглашению):

$$|v_1\rangle = |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = \frac{\sqrt{j_1}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle - \frac{\sqrt{j_2}}{\sqrt{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle. \quad (7.5.34) \quad \text{tj12f}$$

Действуя далее на вектор (7.5.34) понижающими операторами  $T(S_-)$ , мы породим все базисные вектора пространства  $\mathcal{V}_{2(j_1+j_2)-1}$  представления  $T^{(j_1+j_2-1)}$ .

Теперь рассмотрим подпространство в  $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$ , образованное всеми векторами  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$  с собственным значением  $m = m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2$  оператора  $T(S_z)$ . В этом подпространстве мы можем выделить, решая уравнение  $T(S_+)|v_3\rangle = 0$ , единственный старший вектор  $|v_3\rangle$  с весом  $(j_1 + j_2 - 2)$ . После этого, действуя на  $|v_3\rangle$  понижающими операторами  $T(S_-)$ , мы получаем инвариантное подпространство в  $\mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1}$ , соответствующее неприводимому представлению  $T^{(j_1+j_2-2)}$ , и так далее. Продолжая данную процедуру мы в конце-концов воспроизведем разложение прямого произведения представлений  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$  в прямую сумму представлений  $T^{(j)}$ , которое было получено в (7.5.13). Отметим, что при этом формулы (7.5.32) и (7.5.34) обобщаются следующим образом

$$|j_3, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m\rangle, \quad (7.5.35) \quad \text{kgk4z}$$

где  $j_3$  – любой спин из интервала  $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ , а  $|j_3, m\rangle$ ,  $|j_1, m_1\rangle$  и  $|j_2, m_2\rangle$  – базисные ортонормированные вектора (смотри (7.1.22)) в пространствах представлений  $T^{(j_3)}$ ,  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$ , соответственно. В формуле (7.5.35) мы ввели обозначение

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_3, m\rangle := (\langle j_1, m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 |) | j_3, m\rangle. \quad (7.5.36) \quad \text{kgk6z}$$

для коэффициентов Клебша-Гордана. В частности константы в правых частях формул (7.5.32) и (7.5.34) дают явные выражения для соответствующих коэффициентов Клебша-Гордана.

**Пример.** В заключение этого раздела в качестве примера приведем вычисление коэффициентов Клебша-Гордана, возникающих при разложении тензорного произведения представлений  $T^{(j_1)} \otimes T^{(1/2)}$  на неприводимые представления. Согласно Утверждению 7.5.2 мы имеем  $T^{(j_1)} \otimes T^{(1/2)} = T^{(j_1 + \frac{1}{2})} \oplus T^{(j_1 - \frac{1}{2})}$ . В качестве старшего вектора представления  $T^{(j_1 + 1/2)}$  выбираем вектор

$$|j_1 + 1/2, j_1 + 1/2\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |1/2, 1/2\rangle. \quad (7.5.37) \quad \text{exa-01}$$

Действуя на обе части (7.5.37) оператором

$$T(S_-^k) = (T^{(j_1)}(S_-) \otimes I + I \otimes T^{(1/2)}(S_-))^k, \quad (7.5.38) \quad \text{exa-05}$$

**ISA**  
небольшое  
уточнение

**ISA**  
Пример

получаем

$$S_-^k |j_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2}\rangle = S_-^k |j_1, j_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + k S_-^{k-1} |j_1, j_1\rangle \otimes S_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad (7.5.39) \quad \text{exa-02}$$

где мы использовали краткую форму записи:  $T^{(j_1)}(S_-^k) |j_1, j_1\rangle \equiv S_-^k |j_1, j_1\rangle$ , и так далее. Теперь, пользуясь (7.2.25), соотношение (7.5.39) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & |j_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2} - k\rangle = \\ & = \sqrt{\frac{(2j_1+1-k)}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{k}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - k + 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (7.5.40) \quad \text{exa-03}$$

Старший вектор  $|v_1\rangle = |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2}\rangle$  представления  $T^{(j_1-\frac{1}{2})}$  ищем в виде комбинации (сравните с (7.5.33)):

$$|j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2}\rangle = \alpha_1 |j_1, j_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \alpha_2 |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad (7.5.41) \quad \text{exa-04}$$

где коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2$  определяются так же как и для вектора (7.5.33) и приведены в (7.5.34) (необходимо положить  $j_2 = 1/2$ ):

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2j_1}{(2j_1+1)}}, \quad \alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{(2j_1+1)}}.$$

Снова действуем на обе части уравнения (7.5.41) оператором (7.5.38). В результате с учетом (7.2.25) получаем для левой и правой частей, соответственно,

$$\begin{aligned} & S_-^k |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{k!(2j_1-1)!}{(2j_1-1-k)!}} |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2} - k\rangle, \\ & \alpha_2 S_-^k |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha_2 k S_-^{k-1} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes S_- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha_1 S_-^k |j_1, j_1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \\ & = \alpha_2 \sqrt{\frac{(k+1)!(2j_1-1)!}{(2j_1-1-k)!}} |j_1, j_1 - 1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha_2 k \sqrt{\frac{k!(2j_1-1)!}{(2j_1-k)!}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \\ & + \alpha_1 \sqrt{\frac{k!(2j_1)!}{(2j_1-k)!}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \\ & = -\sqrt{\frac{(k+1)!(2j_1-1)!}{(2j_1+1)(2j_1-1-k)!}} |j_1, j_1 - 1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{(2j_1-k)k!(2j_1-1)!}{(2j_1+1)(2j_1-k-1)!}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} & |j_1 - \frac{1}{2}, j_1 - \frac{1}{2} - k\rangle = \\ & = -\sqrt{\frac{(k+1)}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - 1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{(2j_1-k)}{(2j_1+1)}} |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (7.5.42) \quad \text{exa-06}$$

Сворачивая соотношения (7.5.40) и (7.5.42) с вектором  $\langle j_1, m_1 | \otimes \langle \frac{1}{2}, m_2 |$  и учитывая (7.5.36), мы получаем следующую знаменитую таблицу коэффициентов Клебша-Гордана  $\langle j_1, m_1; \frac{1}{2}, m_2 | j, m \rangle$ , которая приведена во многих учебниках по квантовой механике:

	$m_2 = 1/2$	$m_2 = -1/2$
$j = j_1 + \frac{1}{2}$	$\left(\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$
$j = j_1 - \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{j_1-m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1+m+1/2}{2j_1+1}\right)^{1/2}$

## 7.5.3 Спиновая цепочка Гейзенберга

BSF

Пусть  $\mathcal{V}$  снова обозначает двумерное пространство определяющего представления алгебры  $su(2)$ . Задача о выделении неприводимых инвариантных подпространств из прямого произведения пространств определяющего представления  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  интересна с точки зрения изучения некоторых квантовых физических систем. Например, пространство  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  можно рассматривать как пространство квантовых состояний модели спиновой цепочки Гейзенберга, состоящей из  $n$  узлов и описываемой оператором (гамильтонианом)

$$\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_{\alpha}^{(k)} \cdot S_{\alpha}^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{2} S_+^{(k)} \cdot S_-^{(k+1)} + \frac{1}{2} S_-^{(k)} \cdot S_+^{(k+1)} + S_z^{(k)} \cdot S_z^{(k+1)} \right), \quad (7.5.43) \quad \text{spinH}$$

который действует в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  и интерпретируется как оператор энергии системы. Гамильтониан  $\mathcal{H}_n$  коммутирует с компонентами оператора вектора полного спина (7.5.23), что приводит к вырождению спектра энергии.

- **Задача 227.** Проверить, что гамильтониан (7.5.43) коммутирует с операторами (7.5.23), то есть

$$[\mathcal{H}_n, \Delta^{n-1}(S_{\alpha})] = 0. \quad (7.5.44) \quad \text{spinH1 VRN}$$

*Указание.* Воспользоваться тем, что каждое слагаемое  $S_{\alpha}^{(k)} \cdot S_{\alpha}^{(k+1)}$  в (7.5.43) является поляризованным оператором Казимира (4.7.54) для алгебры Ли  $su(2)$ , и применить формулу (4.7.55).

Таким образом, инвариантные подпространства в  $\mathcal{V}^{\otimes n}$ , соответствующие неприводимым представлениям алгебры  $su(2)$ , могут быть выбраны так, что они будут состоять из векторов (состояний квантовой спиновой цепочки), имеющих одно и то же собственное значение оператора энергии (7.5.43).

Общая процедура выделения инвариантных подпространств из  $\mathcal{V}^{\otimes n}$ , соответствующих неприводимым представлениям  $su(2)$ , основана на методе построения представлений со старшим весом (см. предыдущий раздел 7.5.2) и может быть описана следующим образом. Рассмотрим башню, составленную из базисных векторов в  $\mathcal{V}^{\otimes n}$

$$\begin{array}{lll}
 (1) & |\underbrace{\uparrow\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle & m = n/2 \\
 (n) & |\underbrace{\downarrow\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle, |\underbrace{\uparrow\downarrow\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle, \dots, |\underbrace{\uparrow\uparrow \dots \uparrow\downarrow}_n\rangle & m = n/2 - 1 \\
 (\frac{n(n-1)}{2}) & |\underbrace{\downarrow\downarrow\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle, |\underbrace{\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle, \dots, |\underbrace{\uparrow\uparrow \dots \uparrow\downarrow\downarrow}_n\rangle & m = n/2 - 2 \\
 \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\
 (n) & |\underbrace{\uparrow\downarrow \dots \downarrow}_n\rangle, |\underbrace{\downarrow\uparrow\downarrow \dots \downarrow}_n\rangle, \dots, |\underbrace{\downarrow\downarrow \dots \downarrow\uparrow}_n\rangle & m = -n/2 + 1 \\
 (1) & |\underbrace{\downarrow\downarrow \dots \downarrow}_n\rangle & m = -n/2
 \end{array} \quad (7.5.45) \quad \text{vtn}$$

Здесь слева указаны размерности соответствующих подпространств, а именно, подпространство с  $m = n/2 - k$  имеет размерность  $C_n^k$ . Возьмем состояние  $|\underbrace{\uparrow\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle$ , то

есть вектор с максимальной проекцией  $m = n/2$ , для которого все спины направлены вверх. Это вектор со старшим весом. Действительно,  $S_z |\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle = \frac{n}{2} |\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle$  и оператор

$$\begin{aligned} \Delta^{n-1}(S_+) &= \underbrace{S_+ \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1}_n + \underbrace{1 \otimes S_+ \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1}_n + \dots + \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes S_+}_n \equiv \\ &\equiv S_+^1 + S_+^2 + \dots + S_+^n . \end{aligned} \quad (7.5.46) \quad \text{dnsp}$$

(в последней строке мы использовали краткие обозначения (7.5.24)) равен нулю на этом векторе. Кроме того, этот вектор является собственным для гамильтониана (7.5.43) с собственным значением энергии  $E = (n-1)/4$ .

Подействуем на  $|\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle$  понижающим оператором

$$\begin{aligned} \Delta^{n-1}(S_-) &= \underbrace{S_- \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1}_n + \underbrace{1 \otimes S_- \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1}_n + \dots + \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes S_-}_n \equiv \\ &\equiv S_-^1 + S_-^2 + \dots + S_-^n , \end{aligned} \quad (7.5.47) \quad \text{dnsm}$$

в результате чего получаем вектор с проекцией  $m = n/2 - 1$ , который представляется в виде симметричной линейной комбинации всех векторов, каждый из которых имеет только один из спинов, направленный вниз,

$$|n/2, n/2 - 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} (|\downarrow \uparrow \dots \uparrow\rangle + |\uparrow \downarrow \uparrow \dots \uparrow\rangle + \dots + |\uparrow \dots \uparrow \downarrow\rangle) . \quad (7.5.48) \quad \text{oup}$$

Здесь в левой части мы использовали стандартное обозначение  $|j, m\rangle$  для базисных векторов пространства представления  $T^{(j)}$  и нормировочный множитель выбран так, чтобы вектор  $|n/2, n/2 - 1\rangle$  имел единичную длину. Далее к полученному вектору применяем снова  $\Delta^{n-1}(S_-)$  и так далее. После действия  $(\Delta^{n-1}(S_-))^k$  мы получаем симметричный вектор с проекцией  $m = n/2 - k$ , то есть  $k$  спинов направлены вниз. Процедура остановится на шаге  $k = n$ , когда действие  $\Delta^{n-1}(S_-)$  на полученное последнее состояние даст нуль, так как все спины в этом состоянии будут направлены вниз. Построенное таким образом пространство  $\mathcal{V}_{n+1}$  неприводимого представления  $T^{(n/2)}$  имеет размерность  $(n+1)$  и все вектора этого пространства — собственные вектора гамильтониана (7.5.43) с одним и тем же собственным значением  $E = (n-1)/4$ . Отметим, что в пространство  $\mathcal{V}_{n+1}$  входит по одному вектору из подпространств с определенным  $m$ , натянутых на вектора из каждой строчки в (7.5.45).

Затем мы берем произвольную комбинацию векторов в  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  с проекцией спина на ось  $z$ , равной  $m = n/2 - 1$  (вторая строчка в (7.5.45)):

$$|n/2 - 1, n/2 - 1\rangle = a_1 |\downarrow \uparrow \dots \uparrow\rangle + a_2 |\uparrow \downarrow \uparrow \dots \uparrow\rangle + \dots + a_n |\uparrow \dots \uparrow \downarrow\rangle \quad (7.5.49) \quad \text{1up}$$

и налагаем на получившееся состояние условие старшего вектора

$$\Delta^{n-1}(S_+) |n/2 - 1, n/2 - 1\rangle = 0 . \quad (7.5.50) \quad \text{2up}$$

ISA  
нормировка

VRN

ISA  
уточнение

Условие (7.5.50), с учетом (7.5.26), дает

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0, \quad (7.5.51) \quad \text{Зур}$$

что эквивалентно ортогональности вектора (7.5.49) и вектора (7.5.48). Требование того, чтобы состояния (7.5.49) были собственными векторами гамильтониана (7.5.43) приводит к дополнительным уравнениям на параметры  $a_i$ . Явные решения дополнительных уравнений определяют  $(n-1)$  собственное состояние типа  $|j, m\rangle = |\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-1\rangle$ , каждое из которых называется одно-магнонным состоянием спиновой цепочки и может использоваться в качестве старшего вектора для стандартного построения инвариантных подпространств представлений  $T^{(n/2-1)}$ . Мы не будем здесь выписывать эти одно-магнонные состояния и их собственные значения, так как данный материал уже выходит за рамки нашей книги, и отсылаем читателя к специальной литературе (смотри, например, монографию [47]).

Тем не менее, для пояснения дальнейшей процедуры выделения инвариантных подпространств в  $\mathcal{V}^{\otimes n}$ , соответствующих неприводимым представлениям  $T^{(n/2-1)}$ , мы выберем любые  $(n-1)$  независимых старших векторов среди состояний (7.5.49), (7.5.51), при этом не требуя, чтобы они были собственными для гамильтониана (7.5.43). В частности мы можем выбрать  $a_1 = -a_2$ ,  $a_i = 0$  ( $\forall i > 2$ ), или  $a_2 = -a_3$ ,  $a_1, a_i = 0$  ( $\forall i > 3$ ), и т.д.. В результате мы получаем  $(n-1)$  различных независимых векторов со старшим весом  $m = n/2 - 1$  и спином  $j = n/2 - 1$ . Из этих старших векторов, в результате действия понижающими операторами (7.5.47), порождаются эквивалентные  $(n-1)$ -мерные неприводимые представления  $T^{(n/2-1)}$ . Действительно, как мы отмечали выше в разделе 7.5.2, антисимметричную комбинацию двух спинов ( $\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow$ ) можно рассматривать как скаляр (синглетное состояние), поэтому например вектор (7.5.49) с  $a_k = -a_{k+1}$  и  $a_i = 0$  ( $\forall i \neq k, k+1$ ), который можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (S_-^k - S_-^{k+1}) |\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{k-1} \downarrow \uparrow \uparrow \dots\rangle - |\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{k-1} \uparrow \downarrow \uparrow \dots\rangle), \quad (7.5.52) \quad \text{norm33}$$

естественно рассматривать как старший вектор  $|\underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{n-2}\rangle$ . Далее, мы действуем на вектор (7.5.52) понижающими операторами  $(\Delta^{n-1}(S_-))_k^k$ , где  $k = 1, \dots, n-2$ , и в результате, пользуясь (7.5.47) и (7.5.26), порождаем инвариантное  $(n-1)$ -мерное пространство со спином  $j = n/2 - 1$  как это было описано выше. После чего мы снова выделяем в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  вектора со старшим весом, но уже с проекцией  $m = n/2 - 2$  (третья строчка в (7.5.45)), которые будут ортогональны векторам, полученным ранее с помощью действия понижающих операторов на (7.5.48) и (7.5.49), (7.5.51). Число новых старших векторов будет равно  $(n-1)n/2 - n = (n-3)n/2$ . Собственные состояния гамильтониана (7.5.43) в этом секторе называются двух-магнонными состояниями. Действуя на новые старшие вектора понижающими операторами, мы порождаем  $(n-3)$ -мерные инвариантные подпространства со спином  $j = (n/2 - 2)$ , и так далее.

Таким образом, в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  мы получаем инвариантные  $(2j+1)$ -мерные подпространства  $\mathcal{V}_{2j+1}$  представлений  $T^{(j)}$  со спинами  $j = n/2, n/2 - 1, \dots, 0$  или  $j = n/2, n/2 - 1, \dots, 1/2$ , в зависимости от того является ли  $n$  четным или нечетным



числом. Общая формула разложения  $\mathcal{V}^{\otimes n}$  по инвариантным подпространствам  $\mathcal{V}_{2j+1}$  с учетом кратностей имеет вид

$$\mathcal{V}^{\otimes n} = \mathcal{V}_{n+1} + (n-1)\mathcal{V}_{n-1} + \frac{n(n-3)}{2}\mathcal{V}_{n-3} + \dots = \mathcal{V}_{n+1} + \sum_{k=1}^{[n/2]} (C_n^k - C_n^{k-1})\mathcal{V}_{n-2k+1}, \quad (7.5.53) \quad \text{vnsv}$$

где  $[n/2]$  — целая часть числа  $n/2$ , и соответствует разложению (аналог формулы (7.5.1))

$$(T^{(1/2)})^{\otimes n} = T^{(n/2)} + \sum_{k=1}^{[n/2]} (C_n^k - C_n^{k-1})T^{(n/2-k)}. \quad (7.5.54) \quad \text{vnsv1}$$

Соотношения (7.5.53) и (7.5.54) позволяют прояснить вопрос о кратностях вырождения собственных значений гамильтониана спиновой цепочки (7.5.43).

- **Задача 228.** Проверить формулу (7.5.53) подставив в нее размерности соответствующих пространств:  $\dim(\mathcal{V}^{\otimes n}) = 2^n$  и  $\dim(\mathcal{V}_n) = n$ .

ESF

#### 7.5.4 Метод вычисления коэффициентов Клебша-Гордана.

В этом разделе мы рассмотрим метод получения явных выражений для коэффициентов матрицы  $C$  (коэффициентов Клебша-Гордана), фигурирующих в формулах (7.5.2) и (7.5.4). Данный метод рассматривался Б.Л. Ван-дер-Варденом в [19], смотри также [8].

Пусть мы имеем два представления  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$  (или  $SU(2)$ ) в пространствах с базисными векторами  $T_m^{j_1}$  и  $T_m^{j_2}$  (7.2.19), которые являются мономы степени  $(2j_1)$  и  $(2j_2)$  от переменных  $u^\alpha = (s_1, t_1)$  и  $v^\alpha = (s_2, t_2)$ , соответственно. Начнем с замечания, что для  $j_1 = j_2 = j$  в прямом произведении  $T^{(j)} \otimes T^{(j)}$  двух таких представлений содержится одномерное тривиальное представление  $SL(2, \mathbb{C})$ , которое реализуется на инвариантном векторе  $(s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j}$ . Действительно, функция  $\varepsilon_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = (s_1 t_2 - s_2 t_1)$  инвариантна относительно одновременных преобразований (7.2.2) векторов  $(s_1, t_1)$  и  $(s_2, t_2)$  с одним и тем же элементом  $g \in SL(2, \mathbb{C})$ . Поэтому любая степень этой функции:  $(s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j}$  также будет инвариантом. Разложение функции  $(s_1 t_2 - s_2 t_1)^{2j}$  в ряд по переменным  $s_i$  и  $t_i$  дает инвариантную свертку (7.4.27) для базисных векторов  $T_m^j(s_1, t_1)$  и  $T_m^j(s_2, t_2)$ . Свертка (7.4.27) была записана с помощью инвариантной метрики (7.4.28), которую удобно для дальнейшего представить в виде:

$$\eta_{m, -m'}^{(j)} = (-1)^{j-m} \delta_{m, m'}, \quad (7.5.55) \quad \text{sstt25}$$

и которая будет играть существенную роль в разделе 7.6.

Вернемся к общему случаю представлений  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$ . Рассмотрим еще одно представление  $\bar{T}^{(j_3)}$  группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , реализованное на переменных  $(\bar{s}_3, \bar{t}_3)$ , с базисом (7.2.22). Тогда в прямом произведении трех представлений  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes \bar{T}^{(j_3)}$  можно выделить тривиальное одномерное представление, базисный вектор которого задается инвариантной однородной функцией  $\mathcal{I}$ , зависящей от 6 переменных  $\{s_1, t_1, s_2, t_2, \bar{s}_3, \bar{t}_3\}$ :

$$\mathcal{I} = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{n_3} (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^{n_2} (s_2 \bar{s}_3 + t_2 \bar{t}_3)^{n_1}, \quad (7.5.56) \quad \text{confinv}$$

где  $n_1, n_2, n_3$  – целые неотрицательные числа и

$$n_3 = j_1 + j_2 - j_3, \quad n_1 = j_3 + j_2 - j_1, \quad n_2 = j_3 + j_1 - j_2. \quad (7.5.57) \quad \text{confjjj}$$

Действительно, степень однородности по каждой паре переменных  $(s_1, t_1)$ ,  $(s_2, t_2)$  и  $(\bar{s}_3, \bar{t}_3)$  всех слагаемых полинома, возникающего при разложении (7.5.56), равна  $n_3 + n_2 = 2j_1$ ,  $n_3 + n_1 = 2j_2$  и  $n_1 + n_2 = 2j_3$ , соответственно, а значит вектор (7.5.56) принадлежит пространству представления  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes \bar{T}^{(j_3)}$ . Кроме того этот вектор инвариантен, что следует из инвариантности функций (7.2.26) и (7.4.27), и следовательно он образует пространство одномерного представления  $SL(2, \mathbb{C})$ .

- **Задача 229.** Используя дифференциальные реализации (7.2.5) и (7.2.12) для образующих алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ , проверить условие инвариантности для  $\mathcal{I}$ , которое записывается в виде

$$(\hat{e}_{\pm}^{(1)} + \hat{e}_{\pm}^{(2)} + \bar{e}_{\pm}^{(3)})\mathcal{I} = 0, \quad (\hat{h}^{(1)} + \hat{h}^{(2)} + \bar{h}^{(3)})\mathcal{I} = 0. \quad (7.5.58) \quad \text{cfteq}$$

Поскольку инвариант  $\mathcal{I}$  (7.5.56) является однородным полиномом по  $\bar{s}_3, \bar{t}_3$  степени  $2j_3$ , он может быть представлен в виде свертки:

$$\mathcal{I} = \sum_{m=-j_3}^{j_3} (-1)^{j_3-m} W_m^{j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2) \cdot \bar{T}_{-m}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3). \quad (7.5.59) \quad \text{invdop}$$

Из сравнения этой инвариантной свертки с инвариантом (7.2.26) с необходимостью следует, что функции  $W_m^{j_3}$ , принадлежащие пространству представления  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ , преобразуются так же, как вектора  $T_m^{j_3}(s_3, t_3)$ . Таким образом, функции  $W_m^{j_3}$  могут рассматриваться в качестве базисных векторов пространства неприводимого представления, эквивалентного  $T^{(j_3)}$  и вложенного в  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ .

Найдем разложение  $W_m^{j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2)$  по мономам  $T_{m_1}^{(j_1)}(s_1, t_1) \cdot T_{m_2}^{(j_2)}(s_2, t_2)$ , образующим базис в пространстве представления  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ . Чтобы это сделать, рассмотрим разложение инварианта (7.5.56) в ряд по всем переменным  $(s_1, t_1, s_2, t_2, \bar{s}_3, \bar{t}_3)$ , которое получается с помощью формулы бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_{k, k_1, k_2} (-1)^k C_{n_3}^k C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} (s_1 t_2)^{n_3-k} (s_2 t_1)^k (s_1 \bar{s}_3)^{n_2-k_2} (t_1 \bar{t}_3)^{k_2} (s_2 \bar{s}_3)^{n_1-k_1} (t_2 \bar{t}_3)^{k_1} = \\ &= \sum_{k, k_1, k_2} (-1)^k C_{n_3}^k C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} (s_1^{n_3+n_2-k-k_2} t_1^{k+k_2}) (s_2^{n_1-k_1+k} t_2^{n_3-k+k_1}) (\bar{s}_3^{n_1+n_2-k_1-k_2} \bar{t}_3^{k_1+k_2}), \end{aligned} \quad (7.5.60) \quad \text{confinv2}$$

где  $C_n^k$  – биномиальные коэффициенты, и суммирование идет по  $0 \leq k \leq n_3$ ,  $0 \leq k_1 \leq n_1$ ,  $0 \leq k_2 \leq n_2$ . На самом деле мы можем считать, что суммирование по  $k, k_1, k_2$  не ограничено, так как согласно (7.4.22) биномиальные коэффициенты равны нулю вне пределов суммирования. Для выделения в (7.5.60) базисных векторов пространств представлений  $T^{(j_1)}$ ,  $T^{(j_2)}$  и  $\bar{T}^{(j_3)}$  (смотри (7.2.19) и (7.2.22)) мы зафиксируем  $n_1, n_2$  и  $n_3$  согласно (7.5.57) и сделаем замену переменных суммирования ( $k_{1,2} \rightarrow m_{1,2}$ ):

$$\begin{aligned} k + k_2 = j_1 - m_1 &\Rightarrow 0 \leq j_1 - m_1 \leq n_3 + n_2 \Rightarrow -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \\ n_3 - k + k_1 = j_2 - m_2 &\Rightarrow 0 \leq j_2 - m_2 \leq n_3 + n_1 \Rightarrow -j_2 \leq m_2 \leq j_2. \end{aligned}$$

При этом мы имеем

$$k_1 + k_2 = j_3 - (m_1 + m_2) .$$

Заметим, что после всех этих замен суммирование по  $k$  в (7.5.60) остается, но затрагивает только биномиальные коэффициенты. Поэтому разложение (7.5.60) перепи- сывается следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_{m_1, m_2} \left( \sum_k (-1)^k C_{n_3}^k C_{2j_2-n_3}^{j_2-n_3-m_2+k} C_{2j_1-n_3}^{j_1-m_1-k} \right) (s_1^{j_1+m_1} t_1^{j_1-m_1}) (s_2^{j_2+m_2} t_2^{j_2-m_2}) (\bar{s}_3^{j_3+m} \bar{t}_3^{j_3-m}) = \\ &= \mathcal{D}(j_1, j_2, j_3) \sum_{m_1, m_2} \langle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m \rangle \rangle (-1)^{j_3-m} T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \bar{T}_{-m}^{j_3} , \end{aligned} \quad (7.5.61) \quad \text{ttbart}$$

где  $m = m_1 + m_2$ ,  $\sum_{m_1, m_2} = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2}$  и

$$\mathcal{D}(j_1, j_2, j_3) = (j_2 + j_3 - j_1)!(j_1 + j_3 - j_2)!(j_2 + j_1 - j_3)! .$$

В формуле (7.5.61) мы использовали символы  $\langle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m \rangle \rangle$  для выражений [19]:

$$\begin{aligned} \langle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m \rangle \rangle &= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m)!(j_3-m)!}}{(j_1-m_1-k)!(j_1-n_3+m_1+k)!(j_2+m_2-k)!(j_2-n_3-m_2+k)!k!(n_3-k)!} = \\ &= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m)!(j_3-m)!}}{(j_1-m_1-k)!(j_3-j_2+m_1+k)!(j_2+m_2-k)!(j_3-j_1-m_2+k)!k!(j_1+j_2-j_3-k)!} , \end{aligned} \quad (7.5.62) \quad \text{kgk}$$

которые, как становится ясно, с точностью до нормировки совпадают с коэффици- VRJ  
ентами Клебша-Гордана, введенными в (7.5.4). Мы вновь можем опустить пределы суммирования по  $k$  в (7.5.62), так как в силу соглашения (7.4.22) дробь в правой части (7.5.62) обращается в нуль, если хотя бы один из шести факториалов в знаменателе, скажем,  $k!$  или  $(j_1 - m_1 - k)!$  становится бесконечным. Сравнивая инвариант (7.5.61) с инвариантной сверткой (7.5.59), мы получаем

$$W_m^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2) = \mathcal{D}(j_1, j_2, j_3) \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \langle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m \rangle \rangle . \quad (7.5.63) \quad \text{kgk4ww}$$

Отметим, что вектор  $W_m^{j_3}$  не нормирован относительно скалярного произведения (7.2.21). Поэтому вместо вектора  $W_m^{j_3}$  мы определим нормированный вектор

$$T_m^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2) = \frac{\mu}{\mathcal{D}} W_m^{j_3} = \sum_{m_1, m_2} T_{m_1}^{j_1} T_{m_2}^{j_2} \langle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m \rangle \rangle , \quad (7.5.64) \quad \text{kgk4w}$$

где  $\mu(j_1, j_2, j_3)$  — нормировочный множитель, который будет зафиксирован ниже (смотри Утверждение 7.5.3), и мы ввели обозначение для коэффициентов Клебша-Гордана

$$\langle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle \rangle = \mu(j_1, j_2, j_3) \langle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle \rangle \delta_{m, m_1+m_2} . \quad (7.5.65) \quad \text{kgk46}$$

То, что это действительно коэффициенты Клебша-Гордана, следует из сравнения формул (7.5.64) и (7.5.4). С учетом (7.5.64) инвариант (7.5.56), (7.5.59) записывается в виде

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{D}}{\mu} \sum_{m=-j_3}^{j_3} (-1)^{j_3-m} T_m^{j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2) \cdot \bar{T}_{-m}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3) = \quad (7.5.66) \quad \text{invdop1}$$

$$= \frac{\mathcal{D}}{\mu} \sum_{m_1, m_2, m_3} (-1)^{j_3-m_3} T_{m_1}^{j_1}(s_1, t_1) T_{m_2}^{j_2}(s_2, t_2) \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3 \rangle \bar{T}_{-m_3}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3) . \quad (7.5.67) \quad \text{invdop2}$$

**Утверждение 7.5.3** Нормировочный коэффициент  $\mu(j_1, j_2, j_3)$  в формулах (7.5.64) и (7.5.65) равен

$$\mu(j_1, j_2, j_3) = \sqrt{2j_3 + 1} \Delta(j_1, j_2, j_3) , \quad (7.5.68) \quad \text{chi06mu}$$

где комбинация

**VRJ**

$$\Delta(j_1, j_2, j_3) = \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j_3)!(j_1 + j_3 - j_2)!(j_2 + j_3 - j_1)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!}} , \quad (7.5.69) \quad \text{trKo}$$

называется треугольным коэффициентом.

**Доказательство.** Рассмотрим инвариантный вектор (7.5.56). Его норма согласно **VRJ** (7.2.21) равна

$$(\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_3} \cdot (\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})^{n_2} \cdot (\partial_{s_2} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_2} \partial_{\bar{t}_3})^{n_1} \cdot \mathcal{I} . \quad (7.5.70) \quad \text{nor2}$$

Для получения этой нормы воспользуемся замечательными тождествами

$$\begin{aligned} & (\partial_{s_2} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_2} \partial_{\bar{t}_3}) \cdot (s_1 t_2 - s_2 t_1)^p (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^q (s_2 \bar{s}_3 + t_2 \bar{t}_3)^r = \\ & = r(r + p + q + 1) (s_1 t_2 - s_2 t_1)^p (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^q (s_2 \bar{s}_3 + t_2 \bar{t}_3)^{r-1} , \end{aligned} \quad (7.5.71) \quad \text{nor3}$$

$$(\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{t_1} \partial_{s_2}) \cdot (s_1 t_2 - s_2 t_1)^p = p(p + 1) (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{p-1} , \quad (7.5.72) \quad \text{nor33}$$

которые выводятся прямым вычислением. Тождества, аналогичные (7.5.71), имеют место и для действия операторов  $(\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})$  и  $(\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})$  на инвариант  $\mathcal{I}$ . Применим (7.5.71) и (7.5.72) для вычисления (7.5.70):

$$\begin{aligned} & (\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_1} (\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})^{n_2} (\partial_{s_2} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_2} \partial_{\bar{t}_3})^{n_1} \mathcal{I} \\ & = \frac{n_1!(n_1+n_2+n_3+1)!}{(n_2+n_3+1)!} (\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_3} (\partial_{s_1} \partial_{\bar{s}_3} + \partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_3})^{n_2} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{n_3} (s_1 \bar{s}_3 + t_1 \bar{t}_3)^{n_2} \\ & = \frac{n_1!(n_1+n_2+n_3+1)!}{(n_2+n_3+1)!} \cdot \frac{n_2!(n_2+n_3+1)!}{(n_3+1)!} (\partial_{s_1} \partial_{t_2} - \partial_{s_2} \partial_{t_1})^{n_3} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{n_3} \\ & = \frac{n_1!(n_1+n_2+n_3+1)!}{(n_2+n_3+1)!} \cdot \frac{n_2!(n_2+n_3+1)!}{(n_3+1)!} \cdot n_3!(n_3 + 1)! \\ & = n_1! n_2! n_3! (n_1 + n_2 + n_3 + 1)! \end{aligned}$$

Итак, нормированный инвариантный вектор равен

$$\frac{\mathcal{I}}{\sqrt{n_1! n_2! n_3! (n_1 + n_2 + n_3 + 1)!}} , \quad (7.5.73) \quad \text{nor4}$$

а его разложение имеет вид

VRJ

$$\frac{\mathcal{I}}{\sqrt{n_1!n_2!n_3!(n_1+n_2+n_3+1)!}} = \frac{1}{\sqrt{2j_3+1}} \sum_{m_3} (-1)^{j_3-m_3} \bar{T}_{-m_3}^{j_3}(\bar{s}_3, \bar{t}_3) T_{m_3}^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2), \quad (7.5.74) \quad \text{nor5}$$

где, напомним,  $T_{m_3}^{j_3}(s_1, t_1, s_2, t_2)$  — нормированные базисные вектора в подпространстве представления  $T^{(j_3)}$ , вложенного в пространство представления  $T^{j_1} \otimes T^{j_2}$ ; коэффициент в правой части (7.5.74) определяется тем, что она должна представлять собой нормированный вектор. Сравнивая формулы (7.5.74) и (7.5.66), мы и получаем коэффициент  $\mu(j_1, j_2, j_3)$ , который дан в (7.5.68). ■

Соотношение (7.5.64), используя обозначения Дирака, переписывается в виде (7.5.35):

$$|j_3, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle, \quad (7.5.75) \quad \text{kgk4}$$

где напомним, что  $j_3$  — любой спин из интервала  $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ , а  $|j_3, m\rangle$ ,  $|j_1 m_1\rangle$  и  $|j_2 m_2\rangle$  — ортонормированные базисные вектора в пространствах представлений  $T^{(j_3)}$ ,  $T^{(j_1)}$  и  $T^{(j_2)}$ , соответственно. Из соотношений (7.5.75) можно вывести следующее представление для коэффициентов Клебша-Гордана

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle := (\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 |) | j_3 m \rangle. \quad (7.5.76) \quad \text{kgk6}$$

Отметим, что в силу очевидной симметрии инварианта (7.5.56):

$$\mathcal{I}_{j_1, j_2, j_3}(s_1, t_1; s_2, t_2; \bar{s}_3, \bar{t}_3) = (-1)^{j_1+j_2-j_3} \mathcal{I}_{j_2, j_1, j_3}(s_2, t_2; s_1, t_1; \bar{s}_3, \bar{t}_3),$$

коэффициенты Клебша-Гордана (7.5.76) меняются при перестановке векторов  $\langle j_1 m_1 |$  и  $\langle j_2 m_2 |$  в правой части (7.5.76) следующим образом

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j_3} \langle j_2 m_2, j_1 m_1 | j_3 m \rangle. \quad (7.5.77) \quad \text{kgk6a}$$

Отметим также, что для базисного вектора  $|j_3 m\rangle$  в левой части (7.5.75) и в правой части (7.5.76) иногда полезно использовать более информативное обозначение  $|j_1 j_2; j_3 m\rangle$ , в котором явно указываются спины  $j_1$  и  $j_2$  изначальных состояний. Базис в пространстве представления  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$  составленный из векторов  $|j_1 j_2; j_3 m\rangle$  называется *базисом связанных состояний* или просто *связанным базисом*.

Поддействуем эрмитовым сопряжением на обе части соотношения (7.5.75) для чего воспользуемся равенствами (7.1.24). В результате получим равенство

$$\langle j_1, j_2; j_3, m | = \sum_{m_1, m_2} \langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 |, \quad (7.5.78) \quad \text{kgk45}$$

где в силу вещественности коэффициентов Клебша-Гордана (7.5.65) мы имеем

$$\langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle = \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m \rangle. \quad (7.5.79) \quad \text{kgk47}$$

Если свернуть обе части (7.5.78) с вектором  $|j_1, j_2; j_4, m_4\rangle$  и воспользоваться представлением (7.5.76), то получается (с заменой  $m \rightarrow m_3$ ) условие ортогональности для коэффициентов Клебша-Гордана

$$\delta_{j_3, j_4} \delta_{m_3, m_4} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_3 m_3 | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_4, m_4 \rangle . \quad (7.5.80) \quad \text{kgk48}$$

Далее, рассмотрим оператор  $\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |j_1, j_2; j_3, m\rangle \langle j_1, j_2; j_3, m|$ , который действует в пространстве  $\mathcal{V}$  представления  $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$  и, согласно Утверждению 7.5.2, проецирует все состояния из  $\mathcal{V}$  на состояния, имеющие собственное значение оператора  $\mathbf{h}$ , равное  $m$ . В пространстве  $\mathcal{V}$  можно определить другой оператор

$$\sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} (|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle) (\langle j_1 m_1| \otimes \langle j_2 m_2|) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} |j_1 m_1\rangle \langle j_1 m_1| \otimes |j_2 m_2\rangle \langle j_2 m_2| ,$$

с точно таким же действием, поэтому мы имеем тождество

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |j_1, j_2; j_3, m\rangle \langle j_1, j_2; j_3, m| = \sum_{\substack{m'_1, m'_2 \\ m'_1+m'_2=m}} |j_1 m'_1\rangle \langle j_1 m'_1| \otimes |j_2 m'_2\rangle \langle j_2 m'_2| , \quad (7.5.81) \quad \text{kgk49}$$

которое позволяет обратить разложение Клебша-Гордана (7.5.75). Действительно, умножим равенство (7.5.81) справа на вектор  $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ . В результате, пользуясь сопряженным к (7.5.76) представлением

$$\langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle := \langle j_3 m | (|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle) , \quad (7.5.82) \quad \text{kgk61}$$

мы получаем обратное к (7.5.75) разложение Клебша-Гордана

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |j_1, j_2; j_3 m\rangle \langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle , \quad (7.5.83) \quad \text{kgk5}$$

где в силу определения (7.5.65) коэффициентов Клебша-Гордана мы имеем  $m = m_1 + m_2$ . Теперь если свернуть обе части равенства (7.5.83) с вектором  $\langle j_1 m'_1 | \otimes \langle j_2 m'_2 |$ , то в дополнение к (7.5.80) возникает еще одно условие ортогональности для коэффициентов Клебша-Гордана

$$\sum_{j_3=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1 m'_1, j_2 m'_2 | j_3 m \rangle \langle j_3 m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} ,$$

где опять же следует помнить, что  $m = m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$ .

**Замечание 1.** С учетом переопределения (7.5.57) и отождествления  $\bar{t}_3 = -s_3$ ,  $\bar{s}_3 = t_3$  (7.2.15), запишем инвариант (7.5.56) в симметричном виде

$$(-1)^{j_2-j_1-j_3} \mathcal{I} = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^{j_1+j_2-j_3} (s_3 t_1 - s_1 t_3)^{j_3+j_1-j_2} (s_2 t_3 - s_3 t_2)^{j_3+j_2-j_1} . \quad (7.5.84) \quad \text{confinv4}$$

Тогда после перенормировки (7.5.73) мы имеем

$$\frac{(-1)^{j_2-j_1-j_3} \mathcal{I}}{\sqrt{n_1!n_2!n_3!(n_1+n_2+n_3+1)!}} = \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} T_{m_1}^{j_1}(s_1 t_1) T_{m_2}^{j_2}(s_2 t_2) T_{m_3}^{j_3}(s_3 t_3). \quad (7.5.85) \quad \text{confinv5}$$

где коэффициенты  $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$  называются 3- $j$  символами Вигнера. По определению 3- $j$  символы отличны от нуля только если  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$  и связаны согласно (7.5.74), (7.5.64) простыми соотношениями с коэффициентами Клебша-Гордана (7.5.65):

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_2-j_1-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3, -m_3 \rangle. \quad (7.5.86) \quad \text{3jkkg}$$

Так как выражение (7.5.84) не меняется (с точностью до замены общего знака) при любой перестановке трех индексов  $\{1, 2, 3\}$ , или при замене  $s_i \leftrightarrow t_i$ , то соответствующей симметрией обладает и 3- $j$  символ (7.5.86). В частности, переставляя индексы, мы имеем

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (7.5.87) \quad \text{3jinv}$$

где сумма  $(j_1 + j_2 + j_3)$  в силу соотношений (7.5.57) всегда является целым числом. Таким образом, 3- $j$  символы (7.5.86) обладают следующими свойствами.

1. Согласно (7.5.87) они не меняются при четной перестановке столбцов

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix},$$

и приобретают фазовый множитель  $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$  при нечетной перестановке столбцов.

2. Из формул (7.5.84), (7.5.85) при замене  $s_i \leftrightarrow t_i$  также следует, что 3- $j$  символы приобретают фазовый множитель  $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$  при изменении знаков всех проекций  $m_i$  на противоположные:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix}. \quad (7.5.88) \quad \text{3jinv1}$$

3. Если  $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$ , то

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = 0.$$

- **Задача 230.** Пользуясь соотношениями (7.5.62), (7.5.65), (7.5.68) и (7.5.86), получить формулу

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_2-j_1-m_2} \Delta(j_1, j_2, j_3)}{(j_1+j_2-j_3)!(j_1+j_3-j_2)!} \sqrt{\frac{(2j_1)!(j_2-m_2)!(j_3-m_3)!}{(j_2+m_2)!(j_3+m_3)!}} \delta_{j_1, -m_2-m_3}. \quad (7.5.89) \quad \text{j1-m1}$$

**Замечание 2.** С помощью однородных координат  $z_i = s_i/t_i$  симметричная форма (7.5.84) для  $\mathcal{I}$  переписывается в виде

$$\mathcal{I} = t_1^{2j_1} t_2^{2j_2} t_3^{2j_3} (z_1 - z_2)^{j_1+j_2-j_3} (z_1 - z_3)^{j_3+j_1-j_2} (z_2 - z_3)^{j_3+j_2-j_1} ,$$

а уравнения инвариантности (7.5.58) в этих координатах выглядят следующим образом

$$\sum_{i=1}^3 \partial_{z_i} \mathcal{I} = 0 , \quad \sum_{i=1}^3 (z_i t_i \partial_{t_i} - z_i^2 \partial_{z_i}) \mathcal{I} = 0 , \quad \sum_{i=1}^3 \left( z_i \partial_{z_i} - \frac{1}{2} t_i \partial_{t_i} \right) \mathcal{I} = 0 . \quad (7.5.90) \quad \text{cfteq1}$$

При этом инвариантная функция  $\mathcal{I}^{-1}$  после соответствующей перенормировки дает голоморфную часть

$$G(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{j_1+j_2-j_3} (z_1 - z_3)^{j_3+j_1-j_2} (z_2 - z_3)^{j_3+j_2-j_1}} , \quad (7.5.91) \quad \text{cft1a}$$

выражения для 3-х точечной функции Грина в 2-мерных конформных теориях поля

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle = \frac{1}{|z_1 - z_2|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} |z_1 - z_3|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2} |z_2 - z_3|^{\Delta_3+\Delta_2-\Delta_1}} ,$$

где параметры  $\Delta_a = 2j_a$  называются конформными размерностями скалярных полей  $\phi_a(z_a, \bar{z}_a)$ . Связь (7.5.91) с функциями Грина не случайна, она вытекает из того факта, что 3-х точечные голоморфные функции  $G(z_1, z_2, z_3)$  в двумерных конформных теориях поля удовлетворяют тождествам Уорда:

$$\sum_{i=1}^3 \partial_{z_i} G = 0 , \quad \sum_{i=1}^3 (z_i^2 \partial_{z_i} - z_i \Delta_i) G = 0 , \quad \sum_{i=1}^3 \left( z_i \partial_{z_i} - \frac{\Delta_i}{2} \right) G = 0 , \quad (7.5.92) \quad \text{cfteq2}$$

которые эквивалентны уравнениям инвариантности (7.5.90) (сравните дифференциальные операторы в (7.5.92) с операторами в (7.2.30)).

**Замечание 3.** На практике часто необходимо вычислить коэффициенты Клебша-Гордана не для всех спинов  $j_1$  и  $j_2$  в (7.5.5), а только для некоторых фиксированных и не очень больших значений  $j_1$  или  $j_2$ . В этом случае бывает полезным подход, основанный на использовании "правила сложения спинов" (4.3.13), (4.7.50), (7.5.25), которое в случае алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  (алгебры  $su(2)$  с учетом связи (7.1.1)) записывается в виде

$$T(e_{\pm}) = T^{(j_1)}(e_{\pm}) \otimes 1 + 1 \otimes T^{(j_2)}(e_{\pm}) , \quad T(\mathbf{h}) = T^{(j_1)}(\mathbf{h}) \otimes 1 + 1 \otimes T^{(j_2)}(\mathbf{h}) . \quad (7.5.93) \quad \text{mrep08}$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | (T^{(j)}(e_{\pm}) | j m \rangle) &= (\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | T(e_{\pm})) | j m \rangle = \\ &= (\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | [T^{(j_1)}(e_{\pm}) \otimes 1 + 1 \otimes T^{(j_2)}(e_{\pm})]) | j m \rangle = \\ &= (\langle j_1 m_1 | T^{j_1}(e_{\pm}) \otimes \langle j_2 m_2 |) | j m \rangle + (\langle j_1 m_1 | \otimes \langle j_2 m_2 | T^{j_2}(e_{\pm}) |) | j m \rangle , \end{aligned} \quad (7.5.94) \quad \text{racah1}$$



где мы учли правило сложения спинов (7.5.93). Сравним левую и правую части в (7.5.94), воспользуемся правилами действия образующих  $e_{\pm}$  на дуальные вектора (7.1.25) и определением коэффициентов Клебша-Гордана (7.5.76). В результате получаем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \pm 1 \rangle = \\ & = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1, m_1 \mp 1; j_2, m_2 | j, m \rangle + \\ & + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 \mp 1 | j, m \rangle. \end{aligned} \quad (7.5.95) \quad \text{racah2}$$

Подставляя в (7.5.94) вместо операторов  $e_{\pm}$  оператор  $h$ , мы получаем условие

$$(m_1 + m_2 - m) \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle = 0, \quad (7.5.96) \quad \text{racah3}$$

откуда вновь следует, что коэффициент Клебша-Гордана  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle$ , заданный в (7.5.76), отличен от нуля только если  $m = m_1 + m_2$ . VRJ

- **Задача 231.** Рассмотреть матричный элемент  $\langle jm | T^{(j)}(e_{\mp}) (|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle)$  и получить уравнения для обратных коэффициентов Клебша-Гордана (7.5.82):

$$\begin{aligned} & \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j, m \pm 1 | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle = \\ & = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j, m | j_1, m_1 \mp 1; j_2, m_2 \rangle + \\ & + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j, m | j_1, m_1; j_2, m_2 \mp 1 \rangle, \end{aligned} \quad (7.5.97) \quad \text{racah4}$$

$$(m_1 + m_2 - m) \langle j, m | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle = 0. \quad (7.5.98) \quad \text{racah5}$$

Сравнить эти уравнения с уравнениями (7.5.95), (7.5.96) с учетом условия (7.5.79).

Возьмем теперь уравнение (7.5.95) с верхним знаком и положим в нем  $m = j$ . Тогда левая часть (7.5.95) исчезает и мы получаем набор соотношений, с помощью которых находим коэффициенты Клебша-Гордана  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, j \rangle$  с точностью до общего фактора, определяемого нормировкой и соглашением, что  $\langle j_1, j_1; j_2, j - j_1 | j, j \rangle$  реален и положителен. Выбирая теперь нижний знак в (7.5.95), мы выражаем  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m - 1 \rangle$  через  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle$  и, следовательно, пользуясь лестничной процедурой, находим все коэффициенты Клебша-Гордана, начиная с  $m = j$ , с точностью до общего нормировочного множителя.

Метод нахождения коэффициентов Клебша-Гордана, изложенный в этом Замечании, вероятно является наилучшим методом, допускающим обобщение на случай конечномерных представлений других простых алгебр Ли  $\mathcal{A}$ , отличных от  $sl(2, \mathbb{C})$  и  $su(2)$ . При этом необходимо иметь аналоги формул (7.1.25) и (7.2.24), где в качестве повышающих (понижающих) операторов должны выступать образующие  $\mathcal{A}$ , соответствующие корневым векторам (смотри раздел 5.4.2).

## 7.6 Тензорные операторы и $3n$ - $j$ символы.

### 7.6.1 Тензорные операторы и теорема Вигнера-Эккарта.

Пусть  $T$  – конечномерное представление группы  $G$  в пространстве  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$ . Выберем в  $\mathcal{V}_n(\mathbb{K})$  базис  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда каждому элементу  $g \in G$  в представлении  $T$  сопоставляется  $n \times n$  матрица с элементами  $T_{ij}(g) \in \mathbb{K}$  (смотри (4.1.3)):

$$T(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j T_{ji}(g) .$$

Пусть  $\rho$  – унитарное представление группы  $G$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{V}$ .

**Определение 7.6.1** Набор операторов  $\{\hat{T}_i^{(T)}\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), действующих в пространстве  $\mathcal{V}$ , называется тензорным оператором группы  $G$  в представлении  $T$ , если

$$\rho(g) \cdot \hat{T}_i^{(T)} \cdot \rho(g^{-1}) = T_{ij}(g) \hat{T}_j^{(T)} , \quad \forall g \in G . \quad (7.6.1) \quad \text{ten-op1}$$

Если представление  $T$  – (не)приводимо, то тензорный оператор  $\{\hat{T}_i^{(T)}\}$  называется (не)приводимым.

Отметим, что в некоторых случаях при введении тензорных операторов требования конечномерности представления  $T$  и унитарности представления  $\rho$  можно ослабить. Здесь мы не будем рассматривать подобные обобщения.

Пусть  $G$  – группа Ли и  $\mathcal{A}(G)$  соответствующая алгебра Ли. Подставляя в (7.6.1) вместо элемента  $g \in G$  элементы кривой  $g(t) = \exp(tA)$ , где  $A \in \mathcal{A}(G)$ , и затем дифференцируя обе части соотношения (7.6.1) по  $t$  в точке  $t = 0$ , мы получаем определение тензорного оператора на уровне алгебры Ли:

$$[\rho(A), \hat{T}_i^{(T)}] = T_{ij}(A) \hat{T}_j^{(T)} , \quad \forall A \in \mathcal{A}(G) . \quad (7.6.2) \quad \text{ten-op2}$$

Тензорные операторы играют важную роль в квантовой теории и особенно в квантовой теории поля. Например, квантованные поля в релятивистской квантовой теории поля – это тензорные операторы группы Пуанкаре. Мы будем обсуждать этот пример более подробно в Главе 9. Отметим, что в случае компактных групп Ли  $G$  и их алгебр  $\mathcal{A}(G)$  в качестве представления  $\rho$  обычно рассматривают регулярное представление, которое включает в себя все конечномерные представления  $G$  и  $\mathcal{A}(G)$  и действует в пространстве  $\mathcal{V} = L^2(G, d\mu)$  квадратично интегрируемых функций на группе  $G$  (смотри задачи 133 и 134 в Разделе 4.6.2).

Рассмотрим неприводимый тензорный оператор  $\{\hat{T}_m^j\}$  ( $m = -j, \dots, j-1, j$ ) группы  $SU(2)$  в представлении  $T^{(j)}$ , то есть оператор, преобразующийся при действии алгебры Ли  $su(2)$  так же как и базисные элементы (7.2.19) в пространстве неприводимого представления  $T^{(j)}$ . В соответствии с соотношениями (7.2.23), (7.2.24) и (7.6.2) запишем

$$[\rho(\mathbf{h}), \hat{T}_m^j] = m \hat{T}_m^j , \quad (7.6.3) \quad \text{prtop1}$$

$$[\rho(\hat{e}_\pm), \hat{T}_m^j] = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \hat{T}_{m \pm 1}^j . \quad (7.6.4) \quad \text{prtop2}$$

Здесь  $\rho$  любое унитарное представление  $SU(2)$ , которое включает в себя все конечномерные представления  $T^{(j)}$  ( $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ ), например, регулярное представление (7.4.61).

В качестве конкретного примера тензорного оператора группы  $SU(2)$  рассмотрим сферические гармоники  $\{Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi)\}$  ( $m = -\ell, \dots, \ell$ ), которые действуют как операторы в пространстве  $\mathcal{V}$  всех квадратично интегрируемых функций  $f(\theta, \phi)$  на сфере  $S^2$  (смотри Раздел 6.4.6) следующим образом:

$$f(\theta, \phi) \rightarrow f'(\theta, \phi) = Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi) \cdot f(\theta, \phi) .$$

При этом, левые части соотношений (7.4.74) записываются в виде коммутаторов функции  $Y_m^{(\ell)}(\theta, \phi)$  и образующих  $\hat{\mathbf{h}}' = \rho(\mathbf{h})$  и  $\hat{e}'_{\pm} = \rho(e_{\pm})$ , заданных как дифференциальные операторы (7.4.75) в  $\mathcal{V}$ , после чего соотношения (7.4.74) приобретают вид (7.6.3) и (7.6.4).

- **Задача 232.** Показать, что мономы (7.2.19) могут рассматриваться как тензорные операторы, действующие в пространстве всех функций  $f(s, t)$ . Переписать соотношения (7.2.24) в виде коммутаторов (7.6.3) и (7.6.4).

По определению (смотри (7.6.3) и (7.6.4)) на тензорных операторах  $\hat{T}_m^j$ , как и на векторах  $|j, m\rangle$ , реализуется конечномерное представление  $T^{(j)}$  алгебры  $su(2)$ . Произведение неприводимых тензорных операторов  $\hat{T}_{m_1}^{j_1} \cdot \hat{T}_{m_2}^{j_2}$  является новым тензорным оператором (в общем случае приводимым), который преобразуется при действии алгебры  $su(2)$  так же как тензорные произведения соответствующих векторов  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ . Таким образом, для произведения неприводимых тензорных операторов можно использовать аналоги разложений Клебша-Гордана (7.5.64) и (7.5.83):

$$\hat{X}_m^j = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} \hat{T}_{m_1}^{j_1} \cdot \hat{U}_{m_2}^{j_2} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j m \rangle , \quad (7.6.5) \quad \text{kgk43}$$

$$\hat{T}_{m_1}^{j_1} \cdot \hat{U}_{m_2}^{j_2} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \hat{X}_m^j \langle j_1, j_2; j m | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle , \quad (7.6.6) \quad \text{kgk53}$$

где  $\hat{X}_m^j$ ,  $\hat{T}_{m_1}^{j_1}$  и  $\hat{U}_{m_2}^{j_2}$  — тензорные операторы, удовлетворяющие (7.6.3), (7.6.4). Положим  $j_1 = j_2$  и  $m = 0, j = 0$  в (7.6.5) и учтем вытекающее из (7.5.62), (7.5.65) и (7.5.68) равенство (сравните с метрикой (7.5.55))

$$\langle j_1 m_1, j_1 m_2 | 0, 0 \rangle = \frac{(-1)^{j_1-m_1}}{\sqrt{2j_1+1}} \delta_{m_1, -m_2} .$$

В левой части (7.6.5) возникает оператор  $\hat{X}_0^0$ :

$$\hat{X}_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \hat{T}_m^j \hat{U}_{-m}^j , \quad (7.6.7) \quad \text{kgk44}$$

который естественно рассматривать как инвариантную свертку, с помощью метрики (7.5.55), двух тензорных операторов  $\hat{T}_m^j$  и  $\hat{U}_m^j$  (сравните эту свертку с (7.4.27)).

В представлении сферических гармоник формула (7.6.7) дает знаменитую теорему сложения (7.4.58), которая с помощью замены  $\phi_1 \rightarrow \pi - \phi_1$  записывается в виде, аналогичном (7.6.7),

$$(-1)^\ell P_\ell(\cos w_{12}) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^{\ell-m} Y_m^{(\ell)}(\theta_1, \phi_1) Y_{-m}^{(\ell)}(\theta_2, \phi_2),$$

где  $\cos w_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$ .

В различных физических задачах возникает необходимость вычисления матричных элементов  $\langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m_2}^{j_2} | j_1 m_1 \rangle$  тензорных операторов  $\hat{T}_{m_2}^{j_2}$ . Покажем, что эта задача сводится к задаче о вычислении коэффициентов Клебша-Гордана. Подействуем на соотношения (7.6.3) и (7.6.4) состояниями  $\langle j_3 m_3 |$  и  $| j_1 m_1 \rangle$  слева и справа, соответственно. В результате получаем

$$(m_3 - m_1) \langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle = m \langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle, \quad (7.6.8) \quad \text{prtop3a}$$

$$\langle j_3 m_3 | [\rho(\hat{e}_\pm), \hat{T}_m^j] | j_1 m_1 \rangle = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m \pm 1}^j | j_1 m_1 \rangle. \quad (7.6.9) \quad \text{prtop3}$$

Первое из этих соотношений дает правило отбора: матричный элемент  $\langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle$  может не равняться нулю, только если  $m_3 - m_1 = m$ , а второе соотношение с учетом (7.2.24) сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} \sqrt{(j_3 \mp m_3 + 1)(j_3 \pm m_3)} \langle j_3 m_3 \mp 1 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \rangle = \\ = \sqrt{(j \pm m + 1)(j \mp m)} \langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m \pm 1}^j | j_1 m_1 \rangle + \\ + \sqrt{(j_1 \pm m_1 + 1)(j_1 \mp m_1)} \langle j_3 m_3 | \hat{T}_m^j | j_1 m_1 \pm 1 \rangle. \end{aligned} \quad (7.6.10) \quad \text{prtop4}$$

Уравнения (7.6.8) и (7.6.10) совпадают с уравнениями (7.5.97) и (7.5.98), которые определяют коэффициенты Клебша-Гордана с точностью до нормировки. Поэтому ясно, что матричные элементы тензорных операторов и коэффициенты Клебша-Гордана пропорциональны друг-другу:

$$\langle j_3 m_3 | \hat{T}_{m_2}^{j_2} | j_1 m_1 \rangle = \frac{(j_3 || \hat{T}^{j_2} || j_1)}{\sqrt{2j_3 + 1}} \cdot \langle j_3 m_3 | j_1 m_1, j_2 m_2 \rangle, \quad (7.6.11) \quad \text{ten-kkg}$$

где нормировочный коэффициент  $(j_3 || \hat{T}^{j_2} || j_1)$  не зависит от  $m_1, m_2$  и  $m_3$  и называется в физической литературе *приведенным матричным элементом* (множитель  $\frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}}$  вводится для удобства). Соотношение (7.6.11), связывающее матричный элемент тензорного оператора  $\hat{T}_{m_2}^{j_2}$  и коэффициент Клебша-Гордана, является содержанием знаменитой теоремы Вигнера-Эккарта.

### 7.6.2 Коэффициенты Рака и 3n-j символы.

Матричные элементы тензорных операторов (7.6.11), коэффициенты Клебша-Гордана (7.5.62) и 3-j символы (7.5.86) можно рассматривать как тензоры 3-его ранга с компонентами, имеющими три индекса  $m_1, m_2, m_3$ , которые пробегают значения  $m_k =$

**ISA** весь  
раздел

$(-j_k, -j_k + 1, \dots, j_k - 1, j_k)$  (понятие тензора введено в разделе 4.3.1, смотри определение 4.3.1). Каждый из этих тензоров реализуют некоторое представление алгебры  $su(2)$  (группы  $SU(2)$ ), вложенное в прямое произведение трех представлений со спинами  $j_1, j_2, j_3$ .

В силу инвариантности свертки, стоящей в правой части равенства (7.5.85), а также свертки (7.5.67), относительно преобразований (7.4.23), где  $g \in SU(2)$ , мы получаем, что 3-j символ (7.5.86) и коэффициенты Клебша-Гордана (7.5.65) обладают следующими свойствами

$$\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(g) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(g) \mathcal{D}_{m_3 m'_3}^{(j_3)}(g) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (7.6.12) \quad 3j\text{-kkg}$$

$$\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(g) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(g) \langle j_1 m'_1, j_2 m'_2 | j_3 m'_3 \rangle \mathcal{D}_{m'_3 m_3}^{(j_3)-1}(g) = \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle, \quad (7.6.13) \quad 3j\text{-kkg1}$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование. Таким образом, 3-j символы и коэффициенты Клебша-Гордана согласно определению 4.3.2 являются компонентами инвариантных тензоров третьего ранга. Очевидно, что такие тензоры можно сворачивать друг с другом по индексам  $m_k$ , соответствующим одному и тому же представлению (со спином  $j_k$ ), используя при этом инвариантную метрику  $\eta^{(j_k)}$ , заданную в (7.4.28), (7.5.55). В результате таких сверток возникают новые инвариантные тензоры другого ранга, в том числе и инвариантные скалярные величины.

Следуя этим правилам, мы, например, можем рассматривать правую часть условия ортогональности (7.5.80) как инвариантную свертку 2-х коэффициентов Клебша-Гордана, в результате которой возникает инвариантный тензор второго ранга. С учетом (7.5.86) и свойств симметрии (7.5.87), (7.5.88) условие ортогональности (7.5.80) в терминах 3-j символов переписывается в виде

$$\sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_1 + j_2 - m_1 - m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ -m_1 & -m_2 & m_4 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_3 - m_3}}{2j_3 + 1} \delta_{m_3, -m_4} \delta_{j_3, j_4}, \quad (7.6.14) \quad 6\text{-j1}$$

где в правой части стоит тензор второго ранга, пропорциональный инвариантной метрике  $\|\eta_{m_3, m_4}^{(j_3)}\|$ . Если мы положим  $j_4 = j_3$  и  $m_4 = -m_3$  в (7.6.14), умножим обе части на  $(-1)^{j_3 - m_3}$  и просуммируем по  $m_3$ , то мы получим полную инвариантную свертку двух 3-j символов, которая тривиальна и равна единице:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2, m_3} (-1)^{\sum_{k=1}^3 (j_k - m_k)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \\ = \eta_{m_1, m'_1}^{(j_1)} \eta_{m_2, m'_2}^{(j_2)} \eta_{m_3, m'_3}^{(j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = 1, \end{aligned} \quad (7.6.15) \quad 6\text{-j1a}$$

(во второй строчке по повторяющимся индексам идет суммирование).

Легко понять, что для произведения трех 3-j символов скалярной инвариантной свертки не существует, так как невозможно попарно свернуть их девять индексов  $m_k$ . Поэтому далее рассмотрим скалярные инвариантные свертки четырех 3-j символов. Ниже мы продемонстрируем, что существует всего одна такая нетривиальная свертка, которая не тривиализуется с помощью тождеств (7.6.14), и которую в терминах

коэффициентов Клебша-Гордана можно записать в виде

$$\sum_{m_1, \dots, m_6} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle \langle j_5 m_5 | j_1 m_1, j_6 m_6 \rangle \langle j_6 m_6 | j_2 m_2, j_4 m_4 \rangle \langle j_4 m_4, j_3 m_3 | j_5 m_5 \rangle . \quad (7.6.16) \quad 6-j_2$$

Данная свертка инвариантна относительно преобразований  $SU(2)$  и задает скалярную величину. Инвариантность (7.6.16) следует из (7.6.13) и того факта, что каждому вектору "бра"  $\langle j_k m_k |$  в (7.6.16) имеется свой вектор "кет"  $|j_k m_k\rangle$  и по всем парам проекций  $m_k$  идет суммирование. С учетом (7.5.86), (7.5.87) и (7.5.88) инвариант (7.6.16) с точностью до некоторой тривиальной функции, зависящей только от спинов  $j_k$ , переписывается в виде инвариантной свертки по всем проекциям  $m_i$  четырех 3-j символов

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{\sum_{i=1}^6 (j_i - m_i)} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & -m_3 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_6 & j_5 \\ -m_1 & -m_6 & m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ -m_2 & -m_4 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ m_4 & m_3 & -m_5 \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{B(j_1, \dots, j_6)} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} . \end{aligned} \quad (7.6.17) \quad 6-j_2a$$

В левой части (7.6.17) все свертки по  $m_k$  осуществляются с помощью инвариантных метрик (7.5.55). Отметим, что в каждом из 3-j символов в (7.6.17) мы можем делать перестановку столбцов, пользуясь соотношениями симметрии (7.5.87). При этом левая часть (7.6.17) может домножиться на некоторый знаковый фактор. Этот произвол в знаке учитывается коэффициентом  $(-1)^{B(j_1, \dots, j_6)}$ , где  $B(j_1, \dots, j_6) = 0, 1 \pmod{2}$ . При определенном выборе  $(-1)^{B(j_1, \dots, j_6)}$  (отметим, что (7.6.17) совпадает с формулой (108,2) для 6-j символа в [20] при выборе  $B = 2j_3$ ) скалярные коэффициенты  $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$  равны (см. например [32], [20]):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} &= \Delta(j_1, j_2, j_3) \Delta(j_1, j_5, j_6) \Delta(j_4, j_2, j_6) \Delta(j_4, j_5, j_3) \cdot \\ &\cdot \sum_k (-1)^k (k+1)! \frac{[(k-j_1-j_2-j_3)!(k-j_1-j_5-j_6)!(k-j_4-j_2-j_6)!(k-j_4-j_5-j_3)!]^{-1}}{(j_1+j_2+j_4+j_5-k)!(j_1+j_3+j_4+j_6-k)!(j_2+j_3+j_5+j_6-k)!} . \end{aligned} \quad (7.6.18) \quad 6-j_3$$

и называются *6-j символами Вигнера*. Это название связано с тем, что величины (7.6.18) являются функциями от значений шести спинов  $j_1, \dots, j_6$ . В формуле (7.6.18) мы использовали треугольные коэффициенты  $\Delta(j_1, j_2, j_3)$ , которые были определены в (7.5.69). Формула (7.6.18) будет получена нами ниже в разделе **7.6.4**.

Вместо 6-j символов в спектроскопии часто используются *коэффициенты Рака*  $W(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6)$ , которые были введены независимо и отличаются от 6-j символов фазовым множителем

$$W(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6) = (-1)^{j_1+j_2+j_5+j_4} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} .$$

При инвариантной свертке большего (чем четыре) числа 3-j символов мы можем в некоторых случаях получать новые инвариантные объекты, которые не тривиализуются и отличаются от произведения 6-j символов (7.6.18), то есть не распадаются в произведение инвариантов, состоящих из свертки меньшего числа 3-j символов.

Для исследования вопроса о тривиальности или нетривиальности различных сверток  $3$ - $j$  символов удобно пользоваться диаграммной техникой, представленной на рисунках 7, 8. Аналогичная техника была предложена в [32]. На рисунке 8 дано графическое представление для инвариантной метрики (7.4.28), (7.5.55). При использовании данной диаграммной техники следует следить за ориентацией диаграмм: зеркальное отражение диаграммы (относительно какой либо оси), не сводящееся к ее повороту в плоскости, в общем случае приводит к изменению знака соответствующего выражения (см. вторую строчку на рисунке 7). В качестве примера применения данной техники, на Рис. 9 приведено графическое представление для тождеств (7.6.14), (7.6.15).

$$\begin{array}{c} j_1 m_1 \\ | \\ j_3 m_3 \end{array} \begin{array}{c} j_2 m_2 \end{array} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{c} j_1 m_1 \\ | \\ j_3 m_3 \end{array} \begin{array}{c} j_2 m_2 \end{array} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \cdot \begin{array}{c} j_3 m_3 \\ | \\ j_1 m_1 \end{array} \begin{array}{c} j_2 m_2 \end{array}$$

Рис. 7: Графическое представление  $3$ - $j$  символов.

$$\begin{array}{c} j_2 m_2 \\ \leftarrow j_1 m_1 \end{array} = (-1)^{j_1-m_1} \delta_{m_1, -m_2} \delta_{j_1, j_2} \equiv (-1)^{2j_1} \cdot \begin{array}{c} j_2 m_2 \\ \rightarrow j_1 m_1 \end{array}$$

Рис. 8: Графическое представление инвариантной метрики.

$$\begin{array}{c} j_1 \\ \leftarrow j_2 \end{array} \begin{array}{c} j_3 m_3 \end{array} \begin{array}{c} j_4 m_4 \end{array} = (-1)^{j_1+j_2+j_4} \cdot \begin{array}{c} j_1 \\ \leftarrow j_2 \end{array} \begin{array}{c} j_3 m_3 \end{array} \begin{array}{c} j_4 m_4 \end{array} = \frac{1}{(2j_3+1)} \cdot \begin{array}{c} j_4 m_4 \end{array}$$

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} \cdot \begin{array}{c} j_1 \\ \leftarrow j_2 \end{array} \begin{array}{c} j_3 m_3 \end{array} \begin{array}{c} j_4 m_4 \end{array} = 1$$

Рис. 9: Графическое представление для тождеств (7.6.14) и (7.6.15).

Рассмотрим теперь произведение четного числа  $3$ - $j$  символов и пусть все их проекции  $m_k$  попарно засуммированы с помощью инвариантных метрик по правилам, которые были указаны выше (смотри например (7.6.15) и (7.6.17)). Возникающая при этом свертка  $3$ - $j$  символов является скалярным инвариантом. Очевидно, что такая скалярная свертка графически изображаются как замкнутый граф все вершины которого – трехвалентны и соответствуют  $3$ - $j$  символам, а ребра ориентированы, помечены своими спинами  $j_k$  и соответствуют сверткам по  $m_k$  с помощью инвариантных метрик. В таком замкнутом графе очевидно выполняется соотношение  $3V = 2E$ , где  $V$  – число вершин графа (число  $3$ - $j$  символов), а  $E$  – число ребер в графе (число спинов  $j_1, j_2, \dots$ ). Это соотношение означает, что  $V$  – обязательно четное число, скажем  $V = 2n$ , тогда  $E = 3n$  – делится на 3. Таким образом, в результате свертки  $3$ - $j$  символов могут возникать скалярные инварианты, только если число  $3$ - $j$  символов четно

и инвариант зависит от  $3n$  спинов  $j_1, j_2, \dots, j_{3n}$ . Соответственно данные скалярные инварианты называются  $3n$ - $j$  символами.

Диаграммная техника позволяет графически представлять свертки большого числа  $3$ - $j$  символов, а также производить с такими свертками различные наглядные манипуляции и преобразования, применяя, например, соотношения, представленные на рисунке 9. Продемонстрируем работу этой техники на примере вычисления некоторой инвариантной скалярной свертки четырех  $3$ - $j$  символов (смотри рис. 10). Здесь мы последовательно использовали сначала первое, а затем второе тождество на рис. 9 и при этом учли равенство (7.4.30).

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with four } 3\text{-}j \text{ symbols in a square, spins } j_1, j_2, j_3, j_4 \text{ on outer edges and } j_5, j_6 \text{ on inner edges.} \\
 &= \delta_{j_3 j_4} \frac{(-1)^{j_1+j_2-j_3}}{2j_3+1} \cdot \text{Diagram with one } 3\text{-}j \text{ symbol, spins } j_3, j_5, j_6. \\
 &= \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_5+j_6}}{(2j_3+1)} \delta_{j_3 j_4}.
 \end{aligned}$$

Рис. 10: Тривиальная свертка четырех  $3$ - $j$  символов.

Результат, представленный на рис. 10, показывает, что скалярная свертка четырех  $3$ - $j$  символов в левой части рис. 10 является тривиальной. Нетривиальную свертку (7.6.17) четырех  $3$ - $j$  символов, или  $6$ - $j$  символ, можно изобразить, пользуясь указанной на рис. 7 и 8 диаграммной техникой, в виде тетраэдра (смотри Рис. 11). Отсюда сразу же следует симметрия  $6$ - $j$  символа относительно специальных перестановок значений спинов  $j_k$ , присущая тетраэдру, что также демонстрирует полезность диаграммной техники.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram of a tetrahedron with spins } j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 \text{ on its edges.} \\
 &= (-1)^{B(j_1, \dots, j_6)} \cdot \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 11: Графическое представление  $6$ - $j$  символа.

Отметим, что ориентация ребер у графов, соответствующих  $3n$ - $j$  символам, и в частности у тетраэдра на Рис. 11, является существенной. Например, изменение в замкнутом графе ориентации ребра, помеченного спином  $j_k$ , приводит к преобразованию соответствующего инварианта, как это показано на Рис. 12.

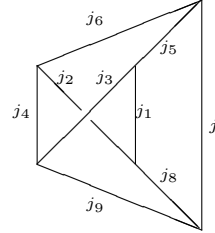
$$\begin{aligned}
 & \text{Graph with a loop labeled } j_k. \\
 &= (-1)^{2j_k} \cdot \text{Graph with a loop labeled } j_k \text{ (orientation reversed)}.
 \end{aligned}$$

Рис. 12: Изменение ориентации ребер.

Единственный нетривиальный  $9$ - $j$  инвариант, составленный из шести  $3$ - $j$  символов и называемый  $9$ - $j$  символом, дается непланарным графом, который изображен на



Рис. 13. То, что мы не указываем на этом графе направления ребер, учитывается произвольным фазовым фактором  $(-1)^{B''}$  в правой части. Пример "тривиального" скалярного 9-j инварианта, составленного из шести 3-j символов, рассматривается ниже в задаче 234 (смотри рис. 19 к этой задаче).



$$= (-1)^{B''} \cdot \begin{Bmatrix} j_3 & j_1 & j_5 \\ j_6 & j_8 & j_7 \\ j_4 & j_2 & j_9 \end{Bmatrix}$$

Рис. 13: Графическое представление 9-j символа (тетраэдр, у которого пара противоположных ребер соединена еще одним ребром  $j_1$ ).

### 7.6.3 6-j символы и ассоциативность произведения представлений.

Замечательным фактом является то, что 6-j символы связаны с условием ассоциативности в тензорной алгебре представлений  $SU(2)$ :

$$(T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) \otimes T^{(j_3)} = T^{(j_1)} \otimes (T^{(j_2)} \otimes T^{(j_3)}) . \quad (7.6.19) \quad \text{assoc}$$

Для того, чтобы пояснить это утверждение, рассмотрим представление  $T = T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} \otimes T^{(j_3)}$ , действующее в пространстве  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_2+1} \otimes \mathcal{V}_{2j_3+1}$ , и будем строить связанный базис в векторном пространстве  $\mathcal{V}$ , применяя разложение Клебша-Гордана. Имеется два способа построения такого базиса, реализуя его через базисные вектора  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle \in \mathcal{V}$ . Первый способ заключается в том, что сначала мы применим формулу Клебша-Гордана (7.5.83) к произведению  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$  и разложим это произведение по базисным векторам  $|j_1, j_2; j_4, m_4\rangle$ , где  $m_4 = m_1 + m_2$  и  $|j_1 - j_2| \leq j_4 \leq j_1 + j_2$ , а затем применим формулу Клебша-Гордана к произведению  $|j_1, j_2; j_4, m_4\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$ . В результате мы получаем

$$\begin{aligned} & |j_4, j_3; j_5, m_5\rangle = \\ & = \sum_{m_1, m_2, m_3} (|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle) \otimes |j_3, m_3\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4\rangle \langle j_4, m_4; j_3, m_3 | j_5, m_5\rangle , \end{aligned} \quad (7.6.20) \quad \text{assoc3}$$

где напомним  $m_4 = m_1 + m_2$  и  $m_5 = m_1 + m_2 + m_3$ . Аналогично, второй способ заключается в том, что формула разложения Клебша-Гордана (7.5.83) применяется сначала к произведению  $|j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$ , а потом уже к произведению вектора  $|j_1, m_1\rangle$  и промежуточного связанного состояния  $|j_2, j_3; j_6, m_6\rangle$ :

$$\begin{aligned} & |j_1, j_6; j_5, m_5\rangle = \\ & = \sum_{m_1, m_2, m_3} |j_1, m_1\rangle \otimes (|j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle) \langle j_2, m_2; j_3, m_3 | j_6, m_6\rangle \langle j_1, m_1; j_6, m_6 | j_5, m_5\rangle , \end{aligned} \quad (7.6.21) \quad \text{assoc4}$$

где  $m_6 = m_2 + m_3$  и  $m_5 = m_1 + m_2 + m_3$ . Иногда спины промежуточных состояний удобно обозначать как  $j_4 = j_{12}$  и  $j_6 = j_{23}$ . Здесь и далее, например в левых частях формул (7.6.20) и (7.6.21), мы используем более информативные обозначения  $|j_4, j_3; j_5, m_5\rangle$  и  $|j_1, j_6; j_5, m_5\rangle$  для векторов  $|j_5, m_5\rangle$  связанного базиса. Это сделано для того, чтобы различать вообще говоря несовпадающие вектора  $|j_4, j_3; j_5, m_5\rangle$  и  $|j_1, j_6; j_5, m_5\rangle$ , которые получаются с помощью различных промежуточных связанных состояний.

Поясним последнее утверждение более подробно для чего в качестве иллюстрации рассмотрим произведение трех представлений со спинами  $j_1 = 1/2$ ,  $j_2 = 3$  и  $j_3 = 1$ :

$$T^{(1/2)} \otimes T^{(3)} \otimes T^{(1)} \begin{array}{c} \nearrow (T^{(5/2)} \oplus T^{(7/2)}) \otimes T^{(1)} \\ \searrow T^{(1/2)} \otimes (T^{(2)} \oplus T^{(3)} \oplus T^{(4)}) \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} T^{(3/2)} \oplus 2T^{(5/2)} \oplus 2T^{(7/2)} \oplus T^{(9/2)}.$$

Согласно разложению, которое получено в правой части этой формулы, имеются два вектора связанного базиса с квантовыми числами  $j = 5/2$ ,  $m = m_5$  и два вектора с квантовыми числами  $j = 7/2$ ,  $m = m_5$ . Поэтому пространства связанных состояний, имеющих такие квантовые числа, оказываются двумерными. В этом случае вектора типа  $|5/2, m_5\rangle$  и  $|7/2, m_5\rangle$ , возникающие в первом подходе (7.6.20) не обязаны совпадать с векторами того же типа из второго подхода (7.6.21) (хотя и принадлежат одному и тому же двумерному пространству — следствие ассоциативности (7.6.19)), а могут представляться в виде их линейных комбинаций

$$\begin{aligned} |5/2, 1; 5/2, m_5\rangle &= w_1 |1/2, 2; 5/2, m_5\rangle + w_2 |1/2, 3; 5/2, m_5\rangle, \\ |7/2, 1; 5/2, m_5\rangle &= w_3 |1/2, 2; 5/2, m_5\rangle + w_4 |1/2, 3; 5/2, m_5\rangle. \end{aligned} \quad (7.6.22) \quad \text{assoc2a}$$

Аналогичные формулы имеют место и для векторов типа  $|7/2, m_5\rangle$ . Как мы покажем ниже, коэффициенты  $w_\alpha$  в (7.6.22) зависят только от первоначальных спинов  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$  и спинов связанных состояний  $j_4$ ,  $j_5$  и  $j_6$  и не зависят от проекции  $m_5$ . Кроме того мы покажем, что коэффициенты  $w_\alpha$  с точностью до домножения на некоторые тривиальные функции от спинов  $j_k$  совпадают с 6-j символами (7.6.18).

Вернемся к обсуждению общего случая. Базисные вектора (7.6.20) и (7.6.21), имеющие одни и те же квантовые числа  $j_5$  и  $m_5$ , связаны друг с другом, так же как и в рассмотренном выше частном случае (смотри (7.6.22)), некоторым линейным преобразованием:

$$|j_4, j_3; j_5, m_5\rangle = \sum_{j_6} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} |j_1, j_6; j_5, m_5\rangle, \quad (7.6.23) \quad \text{assoc5}$$

где в качестве коэффициентов (аналогов  $w_\alpha$ ) выступают символы, которые согласно (7.6.23) можно представить в виде матричного элемента

$$\langle j_1, j_{23}; j_5, m_5 | j_{12}, j_3; j_5, m'_5 \rangle = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \delta_{m_5, m'_5}, \quad (7.6.24) \quad \text{assoc5b}$$

где  $j_{12} = j_4$  и  $j_{23} = j_6$ .

**Утверждение 7.6.1** Коэффициенты  $\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix}$  в уравнениях (7.6.23) и (7.6.24) не зависят от проекции  $m_5$ .

**Доказательство.** Учтем, что

$$|j_{12}, j_3; j_5, j_5 - 1\rangle = (2j_5)^{-1/2} e_- |j_{12}, j_3; j_5, j_5\rangle ,$$

и запишем

$$\begin{aligned} \langle j_1, j_{23}; j_5, j_5 - 1 | j_{12}, j_3; j_5, j_5 - 1 \rangle &= (2j_5)^{-1} \langle j_1, j_{23}; j_5, j_5 | e_+ \cdot e_- | j_{12}, j_3; j_5, j_5 \rangle = \\ &= (2j_5)^{-1} \langle j_1, j_{23}; j_5, j_5 | 2\mathbf{h} | j_{12}, j_3; j_5, j_5 \rangle = \langle j_1, j_{23}; j_5, j_5 | j_{12}, j_3; j_5, j_5 \rangle . \end{aligned}$$

Таким образом, левые части (7.6.24) совпадают при  $m_5 = j_5$  и  $m_5 = j_5 - 1$ . Доказательство для более низких  $m_5$  проводится по индукции. ■

С учетом соотношений (7.6.20) и (7.6.21) и того, что вектора  $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \otimes |j_3, m_3\rangle$  образуют базис в  $\mathcal{V}$ , равенство (7.6.23) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m_4} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle \langle j_4, m_4; j_3, m_3 | j_5, m_5 \rangle = \\ \sum_{j_6} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \sum_{m_6} \langle j_2, m_2; j_3, m_3 | j_6, m_6 \rangle \langle j_1, m_1; j_6, m_6 | j_5, m_5 \rangle . \end{aligned} \quad (7.6.25) \quad \text{assoc6}$$

При преобразованиях из группы  $SU(2)$  левая часть, а также все слагаемые (в сумме по  $j_6$ ) в правой части этого тождества ведут себя как тензоры 4-ого ранга — свертка этих тензоров с тензорами  $(-1)^{j_5-m_5} T_{-m_5}^{j_5} \cdot T_{m_1}^{j_1} \cdot T_{m_2}^{j_2} \cdot T_{m_3}^{j_3}$  будет инвариантом. Таким образом, соотношение (7.6.25) является соотношением между тензорами 4-ого ранга, которое для дальнейшего удобно переписать в терминах 3-j символов (7.5.86):

$$\begin{aligned} \sum_{m_4} (-1)^{j_4-m_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ m_1 & m_2 & -m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ m_4 & m_3 & m_5 \end{pmatrix} = \\ = (-1)^{2j_3} \sum_{j_6} \sqrt{\frac{2j_6+1}{2j_4+1}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{bmatrix} \sum_{m_6} (-1)^{j_6-m_6} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_6 \\ m_2 & m_3 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_6 & j_5 \\ m_1 & m_6 & m_5 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (7.6.26) \quad \text{assoc6b}$$

С помощью диаграммной техники (см. Рис. 7) это соотношение графически изображается так, как показано на рисунке 14 (для дальнейшего нам также удобно сделать замену индекса суммирования  $j_6 \rightarrow j'_6$ ).

$$\text{Diagram 1} = (-1)^{2j_3} \sum_{j'_6} \sqrt{\frac{2j'_6+1}{2j_4+1}} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j'_6 \end{bmatrix} \cdot \text{Diagram 2}$$

Рис. 14: Графическое представление условия ассоциативности (7.6.26).

Если взять диаграмму для тензора 4-ого ранга из правой части соотношения на Рис. 14, сделать в ней обратную замену  $j'_6 \rightarrow j_6$ , отразить эту диаграмму относительно вертикальной оси и получившийся дуальный тензор свернуть (посредством инвариантных метрик) с тензорами в обеих частях соотношения на Рис. 14, то слева (как это показано на Рис. 15) возникнет инвариант, который изображается как

тетраэдр, то есть инвариант соответствующий 6-j символу  $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$  (смотри Рис. 11), а в правой части будет стоять сумма коэффициентов  $\left[ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j'_6 \end{matrix} \right]$ , умноженных на скалярные инварианты, которые соответствуют графам, изображенным в левой части соотношения на Рис. 10. Таким образом, соотношение, представленное на Рис. 14 переписывается в виде равенства для скалярных инвариантов как это показано на Рис. 15. При этом, в силу соотношения (7.6.14), которое графически представлено на Рис. 9, скалярный 6-j инвариант из правой части равенства на Рис. 15 вычисляется, как это показано на Рис. 10, и его явное выражение тривиально и приведено на Рис. 16.

$$\text{tetrahedron}(j_1, j_2, j_4, j_3, j_5, j_6) = (-1)^{2j_3} \sum_{j'_6} \sqrt{\frac{2j'_6+1}{2j_4+1}} \left[ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j'_6 \end{matrix} \right] \cdot \text{loop}(j_1, j_2, j_3, j_5, j_6, j'_6)$$

Рис. 15: Инвариантная скалярная форма соотношения на Рис. 14.

$$\text{loop}(j_1, j_2, j_3, j_5, j_6, j'_6) = \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3-j_5}}{(2j_6+1)} \delta_{j_6 j'_6}$$

Рис. 16: Тривиальный 6-j скалярный инвариант.

Подставляя это выражение на Рис. 16 в правую часть равенства на Рис. 15 и учитывая то, что инвариант, имеющий представление в виде тетраэдра, соответствует 6-j символу (смотри Рис. 11), мы окончательно переписываем тождество, изображенное на Рис. 15, в виде

$$\begin{aligned} (-1)^{B(j_1 \dots j_4 j_3 \dots j_6) + 2(j_1 + \dots + j_6)} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{j_1+j_2-j_3-j_5}}{\sqrt{(2j_6+1)(2j_4+1)}} \cdot \left[ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right] = \\ &= \frac{(-1)^{j_1+j_2-j_3-j_5}}{\sqrt{(2j_6+1)(2j_4+1)}} \cdot \langle j_1, j_6; j_5, m_5 | j_4, j_3; j_5, m_5 \rangle. \end{aligned} \quad (7.6.27) \quad \text{assoc10}$$

Фактор  $(-1)^{2(j_1 + \dots + j_6)}$  в левой части соотношения (7.6.27) возник из-за того, что диаграмма (тетраэдр) в левой части Рис. 15 является, с точностью до замены  $j_3 \leftrightarrow j_4$ , зеркальным отражением относительно вертикальной оси диаграммы (тетраэдра) на Рис. 11. Пользуясь равенством (7.6.27), условие ассоциативности (7.6.26) (см. Рис. 14) можно переписать в терминах 6-j символов, как это и сделано на Рис. 17.

Таким образом, 6-j символы однозначно определяют коэффициенты в условии ассоциативности (7.6.19) для тензорного произведения трех представлений, представленном в более явном виде на Рис. 17, и поэтому иногда 6-j символы называют ассоциаторами.

$$= \sum_{j_6} (-1)^{2j_3 - B'} (2j_6 + 1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}.$$

Рис. 17: Условие ассоциативности (7.6.26), представленное на Рис. 14, переписанное в терминах 6- $j$  символов.

Согласно Утверждению 7.6.1 правая часть в (7.6.27) не зависит от  $m_5$ . В соответствии с этим 6- $j$  символ можно определить и так:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_4 \\ j_3 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{B'}}{\sqrt{(2j_4 + 1)(2j_6 + 1)(2j_5 + 1)}} \sum_{m_5} \langle j_1, j_6; j_5, m_5 | j_4, j_3; j_5, m_5 \rangle, \quad (7.6.28) \quad \text{nov21-a}$$

где  $B' = j_1 - j_2 - j_3 + j_5 - B(j_1 \dots j_4 j_3 \dots j_6)$ . В следующем подразделе мы будем использовать именно это определение.

- **Задача 233.** Пользуясь той же процедурой, что и при переходе от соотношения на Рис. 14 к скалярному соотношению на Рис. 15, доказать тождество, представленное на Рис. 18 и при этом вычислить фазовый фактор  $(-1)^{B^{(4)}}$ .

ISA Но-  
вые задачи

$$= (-1)^{B^{(4)}} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}.$$

Рис. 18: Тождество для свертки трех 3- $j$  символов.

- **Задача 234.** Доказать, что инвариант, сконструированный из шести 3- $j$  символов и показанный на Рис. 19, не является новым нетривиальным инвариантом и выражается в виде произведения двух 6- $j$  символов (здесь  $(-1)^{B'''}$  — некоторый фазовый фактор, зависящий от спинов  $j_k$  и выбора ориентации ребер на графе в левой части Рис. 19). Указание: воспользоваться соотношением, представленным на Рис. 18.

**Замечание 1.** Тождество на Рис. 18 может быть использовано для получения компактного выражения для 6- $j$  символа в виде однократной суммы. Для этого надо положить в этом тождестве  $m_1 = j_1$  и воспользоваться явным видом 3- $j$  символа  $\left( \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & m_2 & m_3 \end{matrix} \right)$ , которое приведено в (7.5.89).

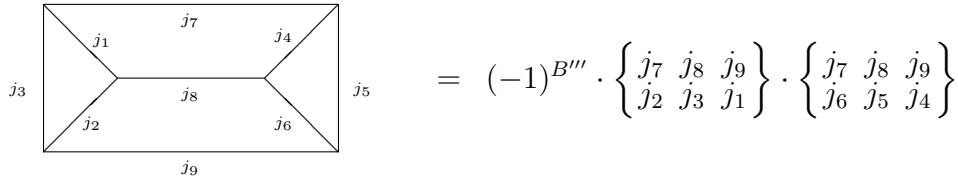


Рис. 19: Свертка шести 3-j символов, дающая "тривиальный" 9-j инвариант.

**Замечание 2.** Отметим, что нетривиальный инвариант, соответствующий 9-j символу на Рис. 13, связан с условием ассоциативности для тензорного произведения четырех представлений (сравните с (7.6.19))

$$(T^{(j_1)} \otimes T^{(j_3)}) \otimes (T^{(j_2)} \otimes T^{(j_4)}) = (T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) \otimes (T^{(j_3)} \otimes T^{(j_4)}) . \quad (7.6.29) \quad \text{assoc9j}$$

Это условие ассоциативности приводит к некоторому тождеству на 3-j символы, которое графически изображено на Рис. 20 (аналог соотношения представленного на Рис. 14), где в правой части возникает 9-j символ, а  $f(j_1, \dots, j_9)$  – некоторая тривиальная функция от спинов  $j_k$ , возникающая при переходе от коэффициентов Клебша-Гордана к 3-j символам и в частности содержащая фазовые факторы.

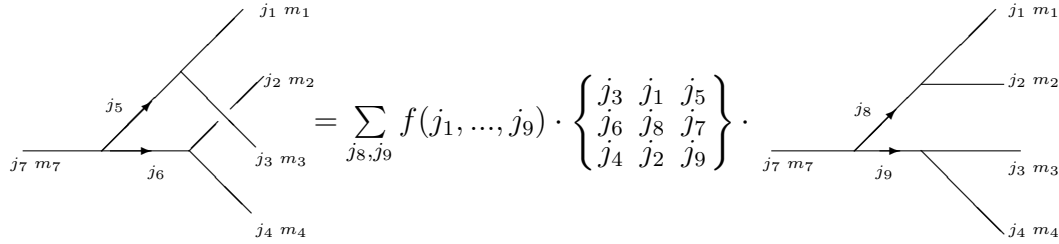


Рис. 20: Графическое представление условия ассоциативности для определения 9-j символа.

Осуществляя ту же процедуру, что и при переходе от соотношения на Рис. 14 к соотношению на Рис. 15, мы в левой части соотношения на Рис. 20 получим граф совпадающий с диаграммой для 9-j символа, которая представлена на Рис. 13, а в правой части получается сумма 9-j символов с тривиальными скалярными инвариантами, представленными графами, которые вычисляются с помощью формул, приведенных на Рис. 13.

**Замечание 3.** Так как 6-j символ является ассоциатором для тензорного произведения трех представлений, что выражается в виде тождества, представленного на Рис. 17, то 6-j символ автоматически удовлетворяет пентагональному соотношению, которое вытекает из рассмотрения диаграммы, изображенной на Рис. 21.

Эта диаграмма указывает на эквивалентность двух путей перехода от тензорного произведения четырех представлений  $((T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) \otimes T^{(j_3)}) \otimes T^{(j_4)}$ , которое вычисляется в указанном порядке, к тензорному произведению тех же представлений  $T^{(j_1)} \otimes (T^{(j_2)} \otimes (T^{(j_3)} \otimes T^{(j_4)}))$ , но вычисляемое в противоположном порядке. В этом случае говорят, что диаграмма на Рис. 21 — "коммутативна". Каждый шаг на этой

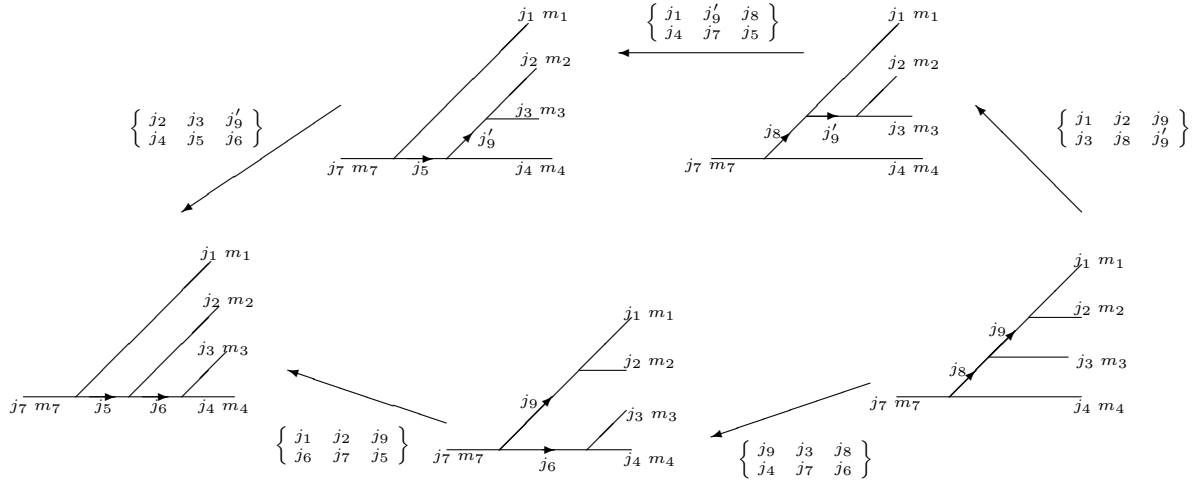


Рис. 21: Пентагональное соотношение для ассоциаторов.

диаграмме – это применение соотношения ассоциативности для тензорного произведения трех представлений, которое изображено на Рис. 17. Сравнивая выражения, получающиеся в результате этих двух разных путей перехода, мы получаем тождество на 6-j символы, которое называется тождеством Биденхарна – Эллиотта:

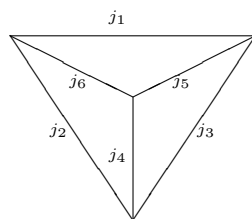
$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_9 \\ j_6 & j_7 & j_5 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_9 & j_3 & j_8 \\ j_4 & j_7 & j_6 \end{matrix} \right\} = \sum_{j_9'} (-1)^R (2j_9' + 1) \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_3 & j_9' \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_9 \\ j_3 & j_8 & j_9' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_9' & j_8 \\ j_4 & j_7 & j_5 \end{matrix} \right\},$$

(7.6.30) BidE11

где  $(-1)^R$  – фазовый фактор.

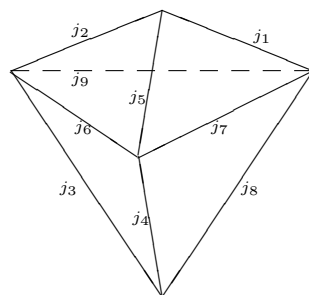
Это тождество имеет замечательную трехмерную геометрическую интерпретацию, если вспомнить, что 6-j символы представляются в виде тетраэдров (смотри Рис. 11). В данном случае однако удобно представлять (смотри Рис. 22) 6-j символ в виде тетраэдра, дуального по отношению к тетраэдру, изображенному в левой части соотношения на Рис. 11. То есть, трех-валентной вершине (3-j символу) тетраэдра на диаграмме Рис. 11 соответствует грань (треугольник) у дуального тетраэдра на диаграмме Рис. 22, и наоборот. Пользуясь этим дуальным представлением для 6-j символов, тождество Биденхарна – Эллиотта (7.6.30) графически представляется так, как показано на Рис. 23. Это графическое соотношение можно интерпретировать как одну из перестроек триангуляций трех-мерных пространств, когда склейка двух тетраэдров, имеющих одну общую грань, (левая часть соотношения на Рис. 23) представляется как склейка трех тетраэдров, имеющих одно общее ребро и каждая пара из этих тетраэдров имеет общую грань (правая часть соотношения на Рис. 23). Данное геометрическое свойство 6-j символов позволяет использовать их при построении триангулированных версий теории гравитации (гравитация Редже).

- **Задача 235.** Получить тождество Биденхарна – Эллиотта (7.6.30) вычислив инвариант, соответствующий диаграмме в левой части Рис. 19, другим способом. А именно, сначала преобразовать эту диаграмму с помощью соотношения ассоциативности, которое дано на Рис. 17 (применяя его к подграфу, содержащему спины  $j_1, j_3, j_7, j_5, j_4$ , смотри диаграмму в левой



$$= (-1)^{\tilde{B}} \cdot \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$$

Рис. 22: Дуальное графическое представление  $6$ -j символа.



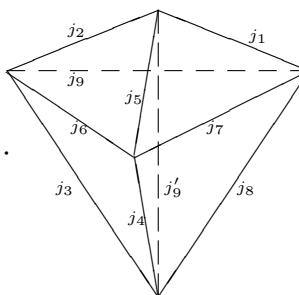
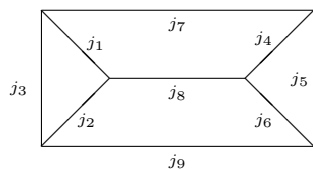
$$= \sum_{j'_9} (-1)^{R'} (2j'_9 + 1) \cdot$$


Рис. 23: Графическое представление для тождества Биденхарна – Эллиотта (7.6.30).

части Рис. 24) и получить соотношение, представленное на Рис. 24, правая часть которого снова вычисляется с помощью тождества, изображенного на Рис. 18. Далее использовать симметрию  $6$ -j символа, присущую тетраэдру.



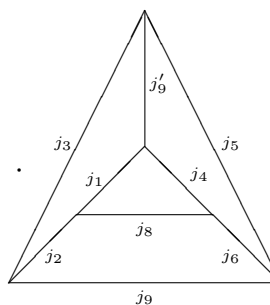
$$= \sum_{j'_9} (-1)^{B^{(5)}} (2j'_9 + 1) \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_3 & j_7 \\ j_5 & j_4 & j'_9 \end{matrix} \right\} \cdot$$


Рис. 24: Преобразование диаграммы на Рис. 19 с помощью условия ассоциативности.

#### 7.6.4 Вычисление $6$ -j символов. Метод Швингера.

В этом подразделе мы изложим метод вычисления  $6$ -j символов, который использует метод производящих функций, предложенный Ю.Швингером [48] (смотри также [49]). Этот же метод применим и для вычисления  $9$ -j символов [48]. Здесь под вычислением  $3n$ -j символов мы понимаем получение для них наиболее компактных выражений, имеющих наименьшее число суммирований.



## 1. Функциональное представление.

Умножим тензор  $\sum_{m_4} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_4, m_4 \rangle \langle j_4, m_4; j_3, m_3 | j_5, m_5 \rangle$  из левой части (7.6.25) на вектор

$$T_{m_1}^{j_1}(s_1, t_1), \quad T_{m_2}^{j_2}(s_2, t_2), \quad T_{m_3}^{j_3}(s_3, t_3), \quad (-1)^{j_5-m_5} T_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T}), \quad (7.6.31) \quad \text{tttt}$$

и просуммируем по проекциям  $m_1, m_2, m_3, m_5$ . В результате, с учетом скалярного произведения (7.2.21) и формулы (7.5.67), мы получаем (с точностью до нормировки) инвариантный полином по переменным  $s_1, t_1, s_2, t_2, s_3, t_3, \bar{S}, \bar{T}$  вида

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{12} = & (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} \\ & \times (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma \bar{S} + \tau \bar{T})^{n_{4\sigma}} (s_3 \bar{S} + t_3 \bar{T})^{n_{34}} \Big|_{\sigma=\tau=0}, \end{aligned} \quad (7.6.32) \quad \text{pol12}$$

где

$$\begin{aligned} n_{12} = j_1 + j_2 - j_{12}, \quad n_{1\sigma} = j_{12} + j_1 - j_2, \quad n_{2\sigma} = j_{12} + j_2 - j_1, \\ n_{3\sigma} = j_{12} + j_3 - j_5, \quad n_{4\sigma} = j_5 + j_{12} - j_3, \quad n_{34} = j_5 + j_3 - j_{12}. \end{aligned} \quad (7.6.33) \quad \text{nov22-c1}$$

По построению он является однородным полиномом по парам переменных  $(s_1, t_1)$ ,  $(s_2, t_2)$ ,  $(s_3, t_3)$  степени  $2j_1, 2j_2, 2j_3$ , соответственно, то есть при фиксированных  $\bar{S}, \bar{T}$  принадлежит  $\mathcal{V}_{(1)} \otimes \mathcal{V}_{(2)} \otimes \mathcal{V}_{(3)}$ , где  $\mathcal{V}_{(k)} \equiv \mathcal{V}_{2j_k+1}$ . По переменным  $(s_1, t_1)$ ,  $(s_2, t_2)$  он имеет те же трансформационные свойства, что и полином

$$\mathcal{I} = (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \bar{s} + t_1 \bar{t})^{n_{1\sigma}} (s_2 \bar{s} + t_2 \bar{t})^{n_{2\sigma}},$$

то есть он принадлежит подпространству  $\mathcal{V}_{(12)} \subset \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$  представления спина  $j_{12}$  (так как степень однородности  $\mathcal{I}$  по  $\bar{s}, \bar{t}$  равна  $2j_{12}$ ). Наконец, инвариантный полином (7.6.32) имеет степень  $2j_5$  по переменным  $(\bar{S}, \bar{T})$  и поэтому имеет место разложение

$$\mathcal{I}_{12} = N_{12} \sum_{m_5} (-1)^{j_5-m_5} \bar{T}_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T}) T_{m_5}^{j_5, j_{12}}(s_1, \dots, t_3) \quad (7.6.34) \quad \text{nov21-b}$$

где  $\bar{T}_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T})$  и  $T_{m_5}^{j_5, j_{12}}(s_1, \dots, t_3)$  – нормированные базисные вектора в пространствах  $\bar{\mathcal{V}}_{(5)}$  и  $\mathcal{V}_{(5)} \subset \mathcal{V}_{(12)} \otimes \mathcal{V}_{(3)}$  и  $N_{12}$  – нормировочный коэффициент. Он определяется соотношением **VRJ**

$$(2j_5 + 1) N_{12}^2 = (\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12}) = \mathcal{I}_{12}(\hat{s}_1, \dots, \hat{\bar{T}}) \cdot \mathcal{I}_{12}(s_1, \dots, \bar{T}) \Big|_{s_i=t_i=\bar{s}=\bar{t}=0} \quad (7.6.35) \quad \text{nov24-d}$$

где  $\hat{s} = \partial_s$ , и т.д.

Аналогично, сворачивая с векторами (7.6.31) тензор

$$\sum_{m_6} \langle j_2, m_2; j_3, m_3 | j_6, m_6 \rangle \langle j_1, m_1; j_6, m_6 | j_5, m_5 \rangle,$$

из правой части (7.6.25), сопоставим ему инвариантный полином

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{23} = & (s_2 t_3 - t_2 s_3)^{r_{23}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{r_{2\sigma}} (s_3 \partial_\sigma + t_3 \partial_\tau)^{r_{3\sigma}} \\ & \times (\tau s_1 - \sigma t_1)^{r_{1\sigma}} (\sigma \bar{S} + \tau \bar{T})^{r_{4\sigma}} (s_1 \bar{S} + t_1 \bar{T})^{r_{14}} \Big|_{\sigma=\tau=0}, \end{aligned} \quad (7.6.36) \quad \text{pol23}$$

где

$$\begin{aligned} r_{23} &= j_2 + j_3 - j_{23}, & r_{2\sigma} &= j_{23} + j_2 - j_3, & r_{1\sigma} &= j_{23} + j_1 - j_5, \\ r_{3\sigma} &= j_{23} + j_3 - j_2, & r_{4\sigma} &= j_5 + j_{23} - j_1, & r_{14} &= j_5 + j_1 - j_{23} \end{aligned} \quad (7.6.37) \quad \text{nov22-c2}$$

Точно так же, как и в (7.6.34), полином (7.6.36) раскладывается в виде

$$\mathcal{I}_{23} = N_{23} \sum_{m_5} (-1)^{j_5 - m_5} \bar{T}_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T}) T_{m_5}^{j_5, j_{23}}(s_1, \dots, t_3), \quad (7.6.38) \quad \text{nov21-c}$$

где  $\bar{T}_{-m_5}^{j_5}(\bar{S}, \bar{T})$  и  $T_{m_5}^{j_5, j_{23}}(s_1, \dots, t_3)$  – нормированные базисные вектора в пространствах  $\bar{\mathcal{V}}_{(5)}$  и  $\mathcal{V}_{(5)} \subset \mathcal{V}_{(1)} \otimes \mathcal{V}_{(23)}$ , а нормировочный коэффициент  $N_{23}$  вычисляется по формуле, аналогичной (7.6.35).

Для дальнейшего в (7.6.32) и (7.6.36) удобно сделать замену переменных  $\bar{S} \rightarrow t_4$ ,  $\bar{T} \rightarrow -s_4$  и рассматривать полиномы

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{12} &= (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} \\ &\times (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}} (s_3 t_4 - t_3 s_4)^{n_{34}} \big|_{\sigma=\tau=0}, \end{aligned} \quad (7.6.39) \quad \text{invve-1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{23} &= (s_2 t_3 - t_2 s_3)^{r_{23}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{r_{2\sigma}} (s_3 \partial_\sigma + t_3 \partial_\tau)^{r_{3\sigma}} \\ &\times (\tau s_1 - \sigma t_1)^{r_{1\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{r_{4\sigma}} (s_1 t_4 - t_1 s_4)^{r_{14}} \big|_{\sigma=\tau=0}. \end{aligned} \quad (7.6.40) \quad \text{invve-2}$$

Теперь формула (7.6.28) с учетом (7.6.34) и (7.6.38) представляется в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{matrix} \right\} &= \frac{(-1)^{B'}}{\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)(2j_5+1)}} \sum_{m_5} (T_{m_5}^{j_5, j_{23}}, T_{m_5}^{j_5, j_{12}}) = \\ &= \frac{(-1)^{B'}}{\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}} \frac{(\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12})}{\sqrt{(\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12})(\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{23})}}, \end{aligned} \quad (7.6.41) \quad \text{nov22-a}$$

причем скалярное произведение  $(, )$  нужно понимать так же, как и в (7.6.35).

**Утверждение 7.6.2** Инвариантные вектора (7.6.39) и (7.6.40) нормированы следующим образом:

$$(\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12}) = \mu_{12} \frac{(1 + n_{12} + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})! (1 + n_{34} + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!}{(2j_{12} + 1)}, \quad (7.6.42) \quad \text{nov22-k}$$

$$(\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{23}) = \mu_{23} \frac{(1 + r_{23} + r_{2\sigma} + r_{3\sigma})! (1 + r_{14} + r_{1\sigma} + r_{4\sigma})!}{(2j_{23} + 1)}, \quad (7.6.43) \quad \text{nov22-kk}$$

где

$$\mu_{12} = n_{12}! n_{1\sigma}! n_{2\sigma}! n_{3\sigma}! n_{4\sigma}! n_{34}!, \quad \mu_{23} = r_{23}! r_{1\sigma}! r_{2\sigma}! r_{3\sigma}! r_{4\sigma}! r_{14}!. \quad (7.6.44) \quad \text{ja1317}$$

**Доказательство.** Формула (7.6.43) получается из (7.6.42) соответствующими подстановками, поэтому достаточно вычислить только норму (7.6.42). Запишем по определению

$$(\mathcal{I}_{12}, \mathcal{I}_{12}) = \mathcal{I}_{12}(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_4, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_4) \cdot \mathcal{I}_{12}(s_1, \dots, s_4, t_1, \dots, t_4) = \\ (\hat{s}_1 \hat{t}_2 - \hat{t}_1 \hat{s}_2)^{n_{12}} (\hat{s}_1 \partial_\zeta + \hat{t}_1 \partial_\theta)^{n_{1\sigma}} (\hat{s}_2 \partial_\zeta + \hat{t}_2 \partial_\theta)^{n_{2\sigma}} (\zeta \hat{t}_3 - \theta \hat{s}_3)^{n_{3\sigma}} (\zeta \hat{t}_4 - \theta \hat{s}_4)^{n_{4\sigma}} (\hat{s}_3 \hat{t}_4 - \hat{t}_3 \hat{s}_4)^{n_{34}} \\ \times (s_1 t_2 - t_1 s_2)^{n_{12}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}} (s_3 t_4 - t_3 s_4)^{n_{34}},$$

где подразумевается, что после вычисления всех производных  $\partial_\theta, \partial_\sigma, \hat{s}_1, \hat{t}_1, \dots$ , необходимо положить все соответствующие переменные  $\theta, \sigma, s_1, t_1, \dots$  равными нулю. Подействуем операторами  $(\hat{s}_1 \hat{t}_2 - \hat{t}_1 \hat{s}_2)^{n_{12}}$  и  $(\hat{s}_3 \hat{t}_4 - \hat{t}_3 \hat{s}_4)^{n_{34}}$  на  $\mathcal{I}_{12}(s_1, \dots, s_4, t_1, \dots, t_4)$ . В соответствии с (7.5.71) получим

$$(\hat{s}_3 \hat{t}_4 - \hat{t}_3 \hat{s}_4)^{n_{34}} (\hat{s}_1 \hat{t}_2 - \hat{t}_1 \hat{s}_2)^{n_{12}} \cdot \mathcal{I}_{12} = \\ = \frac{n_{12}! (1 + n_{12} + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})!}{(1 + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})!} \cdot \frac{n_{34}! (1 + n_{34} + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!}{(1 + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!} \\ \times (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}}. \quad (7.6.45) \quad \text{nov22-h}$$

Осталось вычислить

$$(\hat{s}_1 \partial_\zeta + \hat{t}_1 \partial_\theta)^{n_{1\sigma}} (\hat{s}_2 \partial_\zeta + \hat{t}_2 \partial_\theta)^{n_{2\sigma}} (\zeta \hat{t}_3 - \theta \hat{s}_3)^{n_{3\sigma}} (\zeta \hat{t}_4 - \theta \hat{s}_4)^{n_{4\sigma}} \\ \times (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}} \\ = (\hat{s}_1 \partial_\zeta + \hat{t}_1 \partial_\theta)^{n_{1\sigma}} (s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau)^{n_{1\sigma}} (\hat{s}_2 \partial_\zeta + \hat{t}_2 \partial_\theta)^{n_{2\sigma}} (s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)^{n_{2\sigma}} \\ (\zeta \hat{t}_3 - \theta \hat{s}_3)^{n_{3\sigma}} (\sigma t_3 - \tau s_3)^{n_{3\sigma}} (\zeta \hat{t}_4 - \theta \hat{s}_4)^{n_{4\sigma}} (\sigma t_4 - \tau s_4)^{n_{4\sigma}}. \quad (7.6.46) \quad \text{st1st2}$$

Для того, чтобы выполнить дифференцирование в (7.6.46) по  $s_1, t_1, \dots, s_4, t_4$ , воспользуемся тождествами типа  $[\hat{s}_k \partial_\zeta + \hat{t}_k \partial_\theta, s_k \partial_\sigma + t_k \partial_\tau] = (\partial_\zeta \partial_\sigma + \partial_\theta \partial_\tau)$ . Тогда выражение (7.6.46) приводится к виду

$$n_{1\sigma}! n_{2\sigma}! n_{3\sigma}! n_{4\sigma}! \times (\partial_\zeta \partial_\sigma + \partial_\theta \partial_\tau)^{n_{1\sigma} + n_{2\sigma}} (\zeta \sigma + \theta \tau)^{n_{3\sigma} + n_{4\sigma}}, \quad (7.6.47) \quad \text{nov22-i}$$

где согласно (7.6.33) мы имеем  $n_{1\sigma} + n_{2\sigma} = n_{3\sigma} + n_{4\sigma} = 2j_{12}$ . Наконец, применяя (7.5.72), мы получаем

$$(\partial_\zeta \partial_\sigma + \partial_\theta \partial_\tau)^{n_{1\sigma} + n_{2\sigma}} (\zeta \sigma + \theta \tau)^{n_{3\sigma} + n_{4\sigma}} = (n_{3\sigma} + n_{4\sigma})! (1 + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})! = \\ = \frac{1}{2^{j_{12}+1}} (1 + n_{1\sigma} + n_{2\sigma})! (1 + n_{3\sigma} + n_{4\sigma})!. \quad (7.6.48) \quad \text{nov22-j}$$

Собирая появившиеся в (7.6.45), (7.6.47), (7.6.48) множители, мы приходим к результату (7.6.42). ■

Подставим выражения (7.6.42), (7.6.43) в (7.6.41), в результате чего получим

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{matrix} \right\} = (-1)^{B'} \Delta(j_1, j_2, j_{12}) \Delta(j_2, j_3, j_{23}) \Delta(j_1, j_{23}, j_5) \Delta(j_{12}, j_3, j_5) \\ \times \frac{1}{\mu_{12} \mu_{23}} (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12}) \quad (7.6.49) \quad \text{nov22-b}$$

где  $\Delta(p, q, r)$  — треугольные коэффициенты, заданные в (7.5.69), и в знаменателе стоят факторы  $\mu_{12}$  и  $\mu_{23}$ , фигурирующие в (7.6.42), (7.6.43). Отметим, что с точностью до замены  $j_3 \leftrightarrow j_4$  произведение  $\Delta$ -факторов в (7.6.49) совпадает с произведением, приведенным в (7.6.18) (смотри также [20], формула (108.10)).

VRJ

**Замечание.** С точки зрения описания симметрий 6- $j$  символа (7.6.41), (7.6.49) оказывается более полезным описывать его не в терминах шести спинов  $j_k$ , а в терминах двенадцати неотрицательных целых параметров, фигурирующих в (7.6.33), (7.6.37). Эти параметры удобно представлять в виде таблицы  $3 \times 4$ , которая была введена Шелепиным [50] и называется  $R$ -символом:

$$\left\| \begin{array}{cccc} n_{34} & r_{23} & r_{14} & n_{12} \\ r_{3\sigma} & n_{3\sigma} & n_{1\sigma} & r_{1\sigma} \\ r_{4\sigma} & n_{2\sigma} & n_{4\sigma} & r_{2\sigma} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \end{array} \right\| = \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{array} \right\}.$$

Например, было показано, что 6- $j$  символ не меняется при произвольной перестановке строк или столбцов в  $R$ -символе.

- **Задача 236.** Проверить тождества, которые связывают параметры  $R_{\alpha p}$ :

$$R_{\alpha p} + R_{\beta q} = R_{\alpha q} + R_{\beta p}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad p, q = 1, 2, 3, 4).$$

Найти все соотношения типа  $2j_1 = R_{13} + R_{24} = R_{14} + R_{23}$ , которые выражают спины  $j_k$  через коэффициенты  $R_{\alpha p}$ .

## 2. Метод производящих функций.

VRJ

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{12}(z_{12}, z_{i\sigma}, z_{34}) &= \exp [z_{12}(s_1 t_2 - t_1 s_2) + z_{1\sigma}(s_1 \partial_\sigma + t_1 \partial_\tau) + z_{2\sigma}(s_2 \partial_\sigma + t_2 \partial_\tau)] \\ &\times \exp [z_{3\sigma}(\sigma t_3 - \tau s_3) + z_{4\sigma}(\sigma t_4 - \tau s_4) + z_{34}(s_3 t_4 - t_3 s_4)]|_{\sigma, \tau=0}, \\ \mathcal{K}_{23}(w_{23}, w_{i\sigma}, w_{14}) &= \exp [w_{23}(s_2 t_3 - t_2 s_3) + w_{2\sigma}(s_2 \partial_\zeta + t_2 \partial_\theta) + w_{3\sigma}(s_3 \partial_\zeta + t_3 \partial_\theta)] \\ &\times \exp [w_{1\sigma}(\theta s_1 - \zeta t_1) + w_{4\sigma}(\zeta t_4 - \theta s_4) + w_{14}(s_1 t_4 - t_1 s_4)]|_{\zeta, \theta=0}. \end{aligned}$$

(7.6.50) ja1301

Коэффициенты их разложений по мономам

$$\frac{(z_{12}^{n_{12}} \cdot z_{1\sigma}^{n_{1\sigma}} \cdot z_{2\sigma}^{n_{2\sigma}} \cdot z_{3\sigma}^{n_{3\sigma}} \cdot z_{4\sigma}^{n_{4\sigma}} \cdot z_{34}^{n_{34}})}{n_{12}! n_{1\sigma}! n_{2\sigma}! n_{3\sigma}! n_{4\sigma}! n_{34}!}, \quad \frac{(w_{23}^{r_{23}} \cdot w_{1\sigma}^{r_{1\sigma}} \cdot w_{2\sigma}^{r_{2\sigma}} \cdot w_{3\sigma}^{r_{3\sigma}} \cdot w_{4\sigma}^{r_{4\sigma}} \cdot w_{14}^{r_{14}})}{r_{23}! r_{1\sigma}! r_{2\sigma}! r_{3\sigma}! r_{4\sigma}! r_{14}!}, \quad (7.6.51) \quad \text{ja1302}$$

совпадают соответственно с векторами  $\mathcal{I}_{12}$  и  $\mathcal{I}_{23}$ , которые заданы в (7.6.39) и (7.6.40). Выполним в (7.6.50) дифференцирование по  $\zeta$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ , воспользовавшись стандартными формулами типа  $e^{a\partial_\theta} F(\theta) = F(\theta + a)e^{a\partial_\theta}$ . В результате для функций  $\mathcal{K}_{12}$  и  $\mathcal{K}_{23}$  получаем формулы:

$$\mathcal{K}_{12} = \exp \left[ \sum_{p < q} z_{pq}(s_p t_q - t_p s_q) \right], \quad \mathcal{K}_{23} = \exp \left[ \sum_{i < j} w_{ij}(s_i t_j - t_i s_j) \right], \quad (7.6.52) \quad \text{ja1303}$$

где  $i, j, p, q = 1, 2, 3, 4$  и наборы переменных таковы:

$$\begin{aligned} z : & (z_{12}; z_{13} = z_{1\sigma}z_{3\sigma}; z_{14} = z_{1\sigma}z_{4\sigma}; z_{23} = z_{2\sigma}z_{3\sigma}; z_{24} = z_{2\sigma}z_{4\sigma}; z_{34}) , \\ w : & (w_{12} = w_{1\sigma}w_{2\sigma}; w_{23}; w_{24} = w_{2\sigma}w_{4\sigma}; w_{13} = w_{1\sigma}w_{3\sigma}; w_{14}; w_{34} = w_{3\sigma}w_{4\sigma}) . \end{aligned} \quad (7.6.53) \quad \text{nov22-1}$$

Теперь выражение

$$\frac{1}{\mu_{12} \mu_{23}} (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12}) , \quad (7.6.54) \quad \text{ja1304}$$

где  $\mu_{12}, \mu_{23}$  определены в (7.6.44), можно представить как коэффициент при мономе

$$(w_{23}^{r_{23}} \cdot w_{1\sigma}^{r_{1\sigma}} \cdot w_{2\sigma}^{r_{2\sigma}} \cdot w_{3\sigma}^{r_{3\sigma}} \cdot w_{4\sigma}^{r_{4\sigma}} \cdot w_{14}^{r_{14}}) \cdot (z_{12}^{n_{12}} \cdot z_{1\sigma}^{n_{1\sigma}} \cdot z_{2\sigma}^{n_{2\sigma}} \cdot z_{3\sigma}^{n_{3\sigma}} \cdot z_{4\sigma}^{n_{4\sigma}} \cdot z_{34}^{n_{34}}) , \quad (7.6.55) \quad \text{nov22-n}$$

в разложении производящей функции (7.6.52):

VRJ

$$\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq}) = \left\{ \exp \left[ \sum_{i < j} w_{ij} (\hat{s}_i \hat{t}_j - \hat{t}_i \hat{s}_j) \right] \times \exp \left[ \sum_{p < q} z_{pq} (s_p t_q - t_p s_q) \right] \right\}_{s_i = t_i = 0} . \quad (7.6.56) \quad \text{nov22-k1}$$

Напомним, что здесь мы используем обозначение  $\hat{s}_i = \partial_{s_i}$ ,  $\hat{t}_i = \partial_{t_i}$ . Для дальнейшего нам удобно доопределить  $z_{ij}$  и  $w_{ij}$  при  $i > j$  как антисимметричные матрицы  $||w_{ij}||$  и  $||z_{ij}||$  с элементами  $z_{ij} = -z_{ji}$  и  $w_{ij} = -w_{ji}$ .

**Утверждение 7.6.3** Рассмотрим  $d$ -мерный аналог функции (7.6.56), то есть индексы  $i, j, p, q$  пробегает значения  $\{1, 2, \dots, d\}$ , а переменные  $z_{ij}$  и  $w_{ij}$  определяют антисимметричные  $d$ -мерные матрицы  $w = ||w_{ij}||$  и  $z = ||z_{ij}||$ . Тогда для  $d$ -мерной функции (7.6.56) имеет место детерминантное представление

$$\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq}) = \frac{1}{\det(I_d + w \cdot z)} , \quad (7.6.57) \quad \text{ja1305}$$

где  $I_d$  — единичная  $d$ -мерная матрица.

**Доказательство.** Прежде всего запишем  $d$ -мерную функцию  $\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq})$ , заданную в (7.6.56), как матричный элемент

$$\mathcal{K}(w_{ij}, z_{pq}) = \langle K_w | K_z \rangle , \quad (7.6.58) \quad \text{ja1307}$$

где

$$|K_z\rangle = \exp \left( \sum_{i,j=1}^d z_{ij} a_i^\dagger b_j^\dagger \right) |0\rangle , \quad \langle K_w| = \langle 0| \exp \left( \sum_{i,j=1}^d w_{ij} a_i b_j \right) , \quad (7.6.59) \quad \text{ja1306}$$

а  $\{a_i, a_i^\dagger\}$  и  $\{b_j, b_j^\dagger\}$  — два набора независимых операторов рождения и уничтожения для  $d$ -мерных осцилляторов (смотри раздел 7.3.2). Воспользуемся условием полноты (7.3.73) для когерентных состояний  $|\alpha^*, \beta^*\rangle$  в голоморфном представлении:

VRJ

$$a_i |\alpha^*, \beta^*\rangle = \alpha_i^* |\alpha^*, \beta^*\rangle , \quad b_j |\alpha^*, \beta^*\rangle = \beta_j^* |\alpha^*, \beta^*\rangle ,$$

и перепишем матричный элемент (7.6.58) в виде:

$$\begin{aligned} \langle K_w | K_z \rangle &= \int d\mu(\alpha, \alpha^*) d\mu(\beta, \beta^*) e^{-\alpha_i \alpha_i^* - \beta_i \beta_i^*} \langle K_w | \alpha^*, \beta^* \rangle \langle \alpha, \beta | K_z \rangle = \\ &= \int d\mu(\alpha, \alpha^*) d\mu(\beta, \beta^*) \exp(w_{ij} \alpha_i^* \beta_j^* + z_{ij} \alpha_i \beta_j) \exp[-\alpha_i \alpha_i^* - \beta_i \beta_i^*], \end{aligned} \quad (7.6.60) \quad \text{ja1308}$$

где мы опустили знаки суммирования по повторяющимся индексам, и мера  $d\mu(\alpha, \alpha^*)$  определена в (7.3.66). Гауссов интеграл (7.6.60) можно вычислить, сделав замену переменных интегрирования:  $\beta_i \rightarrow \gamma_i + \alpha_k^* w_{ki}$ ,  $\beta_i^* \rightarrow \bar{\gamma}_i + \alpha_k z_{ki}$ . В результате получаем

$$\langle K_w | K_z \rangle = \left( \int d\mu(\alpha, \alpha^*) \exp(-\alpha_i^* (\delta_{ij} + w_{ik} z_{kj}) \alpha_j) \right) \left( \int d\mu(\gamma, \bar{\gamma}) e^{-\gamma_i \bar{\gamma}_i} \right), \quad (7.6.61) \quad \text{ja1309}$$

где первый интеграл по  $\alpha_i$  и  $\alpha_i^*$  равен  $\det^{-1}(I + wz)$ , а интеграл по  $\gamma_i$  и  $\bar{\gamma}_i$  равен единице. ■

**Замечание.** Детерминант  $\det(I + wz)$  в правой части (7.6.57) представляет собой весьма примечательный объект. Например, этот детерминант всегда представляется **VRJ** в виде квадрата от некоторого четного полинома по переменным  $w_{ij}$  и  $z_{ij}$ . Проще всего это продемонстрировать следующим образом. Пусть  $A, B, C$  и  $D$  — четыре **ISA**  $d \times d$  матрицы. Для любой  $2d \times 2d$  матрицы имеет место следующее тождество

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - C \cdot A^{-1} \cdot B), \quad (7.6.62) \quad \text{ja1501}$$

которое следует из очевидного разложения

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_d & A^{-1} \cdot B \\ 0 & D - C \cdot A^{-1} \cdot B \end{pmatrix},$$

где  $0$  — нулевая  $d \times d$  матрица. Положим  $A = -I_d$ ,  $B = z$ ,  $C = w$  и  $D = I_d$ , тогда из (7.6.62) следует, что

$$\det \begin{pmatrix} -I_d & z \\ w & I_d \end{pmatrix} = \det(-I_d) \det(I_d + w \cdot z) = (-1)^d \det(I_d + w \cdot z),$$

или, переставляя столбцы в матрице в левой части этого соотношения, мы получаем

$$\det(I_d + w \cdot z) = \det \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix} = \left[ \text{Pf} \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix} \right]^2. \quad (7.6.63) \quad \text{ja1502}$$

Здесь мы воспользовались тем, что матрица  $Z(z, w) = \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix}$  — четно-мерная и антисимметричная, и поэтому для нее определен пфаффиан и применима формула (2.2.24). Из равенства

$$Z(-z, -w) = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & -I_d \end{pmatrix} \cdot Z(z, w)^T \cdot \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & -I_d \end{pmatrix},$$

и тождества (2.2.29) следует, что  $\text{Pf}(Z(z, w)) = \text{Pf}(Z(-z, -w))$ , то есть  $\text{Pf}(Z(z, w))$  — четный полином по переменным  $w_{ij}$  и  $z_{ij}$ .

**Утверждение 7.6.4** Пусть  $w$  и  $z$  две  $d$ -мерные антисимметричные матрицы. Тогда имеет место следующая формула

$$\det(I_d + w \cdot z) = \left( 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{(d-2k)!} \tilde{w}_{i_1 \dots i_{d-2k}} \cdot \tilde{z}_{i_1 \dots i_{d-2k}} \right)^2, \quad (7.6.64) \quad \text{ja1314}$$

где  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  — целая часть  $\frac{d}{2}$  и

$$\tilde{z}_{i_1 \dots i_{d-2k}} = \frac{1}{2^k k!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{d-2k} j_1 j_2 j_3 j_4 \dots j_{2k}} z_{j_1 j_2} z_{j_3 j_4} \dots z_{j_{2k-1} j_{2k}}.$$

— объект, который естественно назвать неполным пфаффианом.

VRJ

**Доказательство.** Соотношение (7.6.64) следует из равенства

$$\text{Pf} \begin{pmatrix} z & -I_d \\ I_d & w \end{pmatrix} = (-1)^{n(n+1)/2} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{(d-2k)!} \tilde{w}_{i_1 \dots i_{d-2k}} \cdot \tilde{z}_{i_1 \dots i_{d-2k}} \right),$$

которое получается непосредственно с помощью вычисления пфаффиана по формуле (2.2.21). ISA ■

Приведем явные выражения для  $\det(I_d + wz)$  для некоторых первых значений  $d$ . Для  $d = 2$  и  $d = 3$ , то есть для случая  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  матриц, мы соответственно имеем

$$\det(I_2 + wz) = [1 - z_{12}w_{12}]^2, \quad \det(I_3 + wz) = \left[ 1 - \sum_{i < j} z_{ij}w_{ij} \right]^2.$$

Эти формулы легко проверяются прямым вычислением. Для  $4 \times 4$  матриц из (7.6.64) следует формула:

$$\det(I_4 + wz) = \left[ 1 - \sum_{i < j} z_{ij}w_{ij} + \text{Pf}(z) \cdot \text{Pf}(w) \right]^2, \quad (7.6.65) \quad \text{ja1311}$$

где пфаффиан  $\text{Pf}(z)$ , согласно его определению (2.2.21), равен

$$\text{Pf}(z) = \frac{1}{8} \varepsilon_{ijkm} z_{ij} z_{km} = (z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{23}z_{14}). \quad (7.6.66) \quad \text{ja1312}$$

Наконец, для  $5 \times 5$  матриц мы получаем

$$\det(I_5 + wz) = \left[ 1 - \sum_{i < j} z_{ij}w_{ij} + \tilde{z}_\ell \tilde{w}_\ell \right]^2,$$

где  $\tilde{z}_\ell = \frac{1}{8} \varepsilon_{ijkml} z_{ij} z_{km}$ . Например,  $\tilde{z}_1 = (z_{23}z_{45} - z_{24}z_{35} + z_{34}z_{25})$ , сравните с (7.6.66).

### 3. Выражения для 6-j -символов

Для вычисления 6-j символов нам необходимо воспользоваться выражением для детерминанта в правой части (7.6.57) для случая  $d = 4$ . В этом случае, пользуясь (7.6.65) и (7.6.66), мы для производящей функции (7.6.56) получаем

$$\mathcal{K} = \left[ 1 - \frac{1}{2} z_{ij} w_{ij} + (z_{12} z_{34} - z_{13} z_{24} + z_{23} z_{14})(w_{12} w_{34} - w_{13} w_{24} + w_{23} w_{14}) \right]^{-2}. \quad (7.6.67) \quad \text{nov22-q}$$

Для специальных наборов (7.6.53) переменных  $z_{ij}$  и  $w_{ij}$  выражение (7.6.67) упрощается, поскольку  $z_{13} z_{24} = z_{14} z_{23}$ ,  $w_{12} w_{34} = w_{13} w_{24}$ . Имеем поэтому

$$\mathcal{K}(z_{ij}, w_{ij}) = \frac{1}{\left[ 1 - \left( \sum_{i < j} z_{ij} w_{ij} \right) + z_{12} z_{34} w_{23} w_{14} \right]^2}. \quad (7.6.68) \quad \text{ja1315}$$

Это и есть окончательное выражение для производящей функции 6-j-символов. Нас интересует коэффициент при мономе (7.6.55) в разложении функции  $\mathcal{K}$  (7.6.68). Запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z_{ij}, w_{ij}) &= \sum_Q (Q+1) \left[ \left( \sum_{i < j} z_{ij} w_{ij} \right) - z_{12} z_{34} w_{23} w_{14} \right]^Q \\ &= \sum_Q (Q+1)! \left\{ \frac{1}{Q!} \left[ \left( \sum_{i < j} z_{ij} w_{ij} \right) - z_{12} z_{34} w_{23} w_{14} \right]^Q \right\}, \end{aligned} \quad (7.6.69) \quad \text{ja1316}$$

и разложим функцию, стоящую в фигурных скобках с помощью обобщения биномиального разложения:

$$[x_1 + \dots + x_k]^Q = \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ a_1 + \dots + a_k = Q}} \frac{Q!}{a_1! \dots a_k!} x_1^{a_1} \dots x_k^{a_k}. \quad (7.6.70) \quad \text{ja1321}$$

- **Задача 237.** Доказать формулу (7.6.70) по индукции.

Для общего члена разложения в фигурных скобках в (7.6.69) будем иметь

$$(-1)^b \cdot \left( \prod_{i < j} \frac{(w_{ij} z_{ij})^{a_{ij}}}{a_{ij}!} \right) \cdot \frac{(w_{23} w_{14} z_{12} z_{34})^b}{b!},$$

где  $a_{ij}$  ( $i < j$ ) и  $b$  – целые числа, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{i < j} a_{ij} + b = Q. \quad (7.6.71) \quad \text{nov22-p}$$

Принимая во внимание соответствие (7.6.53), распишем этот общий член явно

$$\begin{aligned} &(-1)^b \cdot \frac{(w_{1\sigma} w_{2\sigma} z_{12})^{a_{12}}}{a_{12}!} \cdot \frac{(w_{1\sigma} w_{3\sigma} z_{1\sigma} z_{3\sigma})^{a_{13}}}{a_{13}!} \cdot \frac{(w_{14} z_{1\sigma} z_{4\sigma})^{a_{14}}}{a_{14}!} \\ &\times \frac{(w_{23} z_{2\sigma} z_{3\sigma})^{a_{23}}}{a_{23}!} \cdot \frac{(w_{2\sigma} w_{4\sigma} z_{2\sigma} z_{4\sigma})^{a_{24}}}{a_{24}!} \cdot \frac{(w_{3\sigma} w_{4\sigma} z_{34})^{a_{34}}}{a_{34}!} \cdot \frac{(w_{23} w_{14} z_{12} z_{34})^b}{b!}. \end{aligned}$$



Сравнивая этот общий член с мономом (7.6.55), и учитывая (7.6.71), мы получаем набор уравнений на параметры  $a_{ij}, b$ , для которых, вспоминая (7.6.33) и (7.6.37), находим

$$\begin{aligned} b &= j_1 + j_2 + j_3 + j_5 - Q \\ a_{12} &= Q - j_3 - j_{12} - j_5 \\ a_{13} &= j_1 + j_3 + j_{12} + j_{23} - Q \\ a_{14} &= Q - j_2 - j_3 - j_{23} \\ a_{23} &= Q - j_1 - j_{23} - j_5 \\ a_{24} &= j_2 + j_{12} + j_{23} + j_5 - Q \\ a_{34} &= Q - j_1 - j_2 - j_{12} \end{aligned} \quad (7.6.72)$$

Это дает ответ для скалярного произведения (7.6.54)

$$\frac{1}{\mu_{12} \mu_{23}} (\mathcal{I}_{23}, \mathcal{I}_{12}) = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_5} \sum_Q (-1)^Q \frac{(Q+1)!}{\left(\prod_{i<j} a_{ij}!\right) b!},$$

и соответственно для 6j-символа (7.6.49):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_5 & j_{23} \end{matrix} \right\} &= (-1)^{B'+j_1+j_2+j_3+j_5} \Delta(j_1, j_2, j_{12}) \Delta(j_2, j_3, j_{23}) \Delta(j_1, j_{23}, j_5) \Delta(j_3, j_{12}, j_5) \\ &\times \sum_Q (-1)^Q \frac{(Q+1)!}{\left(\prod_{i<j} a_{ij}!\right) b!}. \end{aligned} \quad (7.6.73) \quad \text{ja1323}$$

Этот ответ с точностью до замены  $j_3 \leftrightarrow j_{12}$  (напомним, что  $j_{12} = j_4$ ,  $j_{23} = j_6$ ),  $Q \rightarrow k$  и выбора знакового фактора  $(-1)^{B'+j_1+j_2+j_3+j_5} = 1$  совпадает с (7.6.18) (смотри также [20], формула (108.10)).

В заключение отметим, что выбор  $B' = -(j_1 + j_2 + j_3 + j_5) + \text{mod}(2)$ , который убирает фазовый множитель в (7.6.73), согласно определению  $B' = j_1 - j_2 - j_3 + j_5 - B(\dots, j_4, j_3, \dots)$  в (7.6.28) дает  $B(\dots, j_4, j_3, \dots) = 2j_1 + 2j_5$ , что не совпадает с определением в [20] (смотри обсуждение перед формулой (7.6.18)).

## 8 Конечномерные представления $SU(N)$ и $SL(N)$ и их алгебр Ли.

План.

1. Группа перестановок.
2. Прямое произведение определяющих представлений  $SU(N)$  и  $SL(N)$ .
3. Выделение неприводимых представлений, диаграммы Юнга, дуальность Шура-Вейля.
4. Формула для размерностей Вейля.
5. Разложение представлений  $SU(N)$  по представлениям  $SU(N - 1)$ .

Все конечномерные неприводимые представления групп  $SU(N)$  и  $SL(N)$  можно строить как подпредставления в тензорном произведении определяющих представлений  $T$  этих групп. При этом оказывается, что неприводимые представления  $SL(N)$  (или  $SU(N)$ ), которые выделяются из представления  $T^{\otimes r}$ , классифицируются с помощью неприводимых представлений симметрической группы  $S_r$ . Данная замечательная связь между представлениями линейных групп Ли и симметрической группой называется дуальностью Шура-Вейля. Поэтому прежде чем перейти к изучению конечномерных неприводимых представлений групп  $SU(N)$  и  $SL(N)$ , мы сначала обсудим некоторые простые факты из теории симметрической группы.

### 8.1 Группа перестановок (симметрическая группа) $S_n$ .

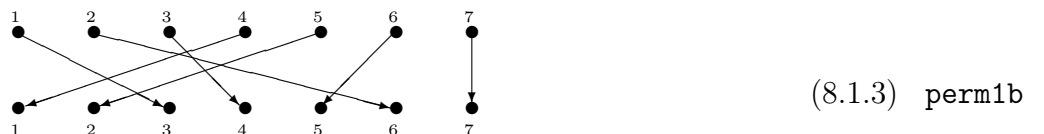
Определение группы перестановок (симметрической группы)  $S_n$  было дано в Примере 7. Раздела 2.1.1. Там же было отмечено, что элементы группы перестановок  $S_n$  удобно представлять в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad (8.1.1) \quad \text{perm1}$$

где  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – некоторое новое размещение чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Перестановки также удобно изображать графически. Например, перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in S_7, \quad (8.1.2) \quad \text{perm1a}$$

можно представить в виде косы, состоящей из семи прядей:



В таком представлении коса, соответствующая произведению  $A \cdot B$  двух перестановок  $A, B \in S_n$ , изображается следующим образом: сначала рисуется коса из  $n$  прядей, соответствующая первой перестановке  $B$ , а затем к ней снизу пририсовывается коса

из  $n$  прядей, соответствующая второй перестановке  $A$ . В результате получается коса, отвечающая перестановке  $A \cdot B$ . Эта процедура соответствует правилу произведения перестановок, которое было указано в (2.1.11).

Напомним, что циклическими перестановками или циклами  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  ( $\forall k \leq n$ ) мы называем перестановки, которые объекты  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  переставляют циклически  $a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, \dots, a_{k-1} \rightarrow a_k, a_k \rightarrow a_1$ , а остальные  $(n - k)$  объектов оставляют неизменными. Для упрощения записи циклы, состоящие из одного элемента, не выписываются. Любая перестановка распадается в произведение циклов (смотри Задачу 7). Циклы  $(a, b)$  длины 2, переставляющие лишь два различных символа, называется *транспозициями*.

**Утверждение 8.1.1** *Любой цикл распадается в произведение транспозиций:*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1}) \cdots (a_1, a_2). \quad (8.1.4) \quad \text{tr1}$$

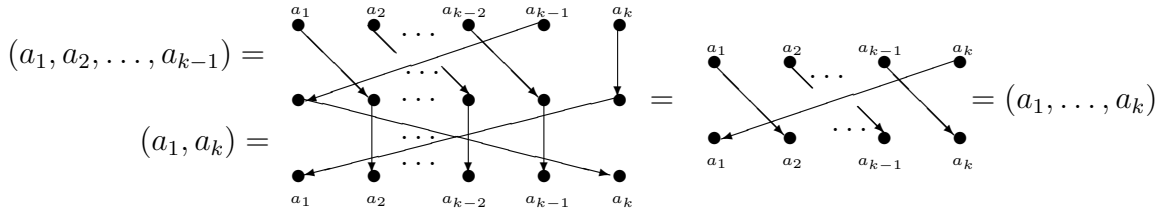
**Доказательство.** Докажем сначала следующее утверждение ( $\forall k > 2$ )

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}), \quad (8.1.5) \quad \text{tr2}$$

которое проверяется прямым вычислением:  $(a_1, a_k)(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}) =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{k-1} & a_1 & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{k-1} & a_k & a_1 \end{pmatrix}.$$

Напоминаем, что первой перестановкой считается перестановка, которая стоит справа. Пользуясь графическим представлением (8.1.3), это тождество можно изобразить в виде



Применяя (8.1.5) последовательно для  $k = n, n - 1, \dots, 3$ :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_n)(a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1})(a_1, \dots, a_{n-2}) = \dots,$$

мы получаем (8.1.4). ■

Так как любая перестановка записывается в виде произведения циклов, то из Утверждения 8.1.1 следует, что любая перестановка представима в виде произведения транспозиций. Более того, любая перестановка записывается в виде произведения соседних транспозиций  $(k, k + 1) = \sigma_k$ . Это следует из того, что любая транспозиция представляется в виде произведения соседних транспозиций. Последнее утверждение легко пояснить с помощью следующего рассуждения: осуществляя последовательные соседние перестановки, любой объект  $a_i$  из  $n$  объектов  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

можно поставить на место любого другого элемента  $a_j$ , а элемент  $a_j$  переместить на место  $a_i$  и при этом остальные объекты останутся на своих местах. Например, для случая  $j > i$ , мы сначала переставляем  $a_i$  и  $a_{i+1}$ , то есть делаем транспозицию  $\sigma_i$ , при этом объект  $a_i$  будет расположен на  $(i+1)$ -ом месте, а  $a_{i+1}$  встанет на  $i$ -ое место. Потом к новому размещению  $\{a_k\}$  применяем соседнюю транспозицию  $\sigma_{i+1}$ , чтобы поставить  $a_i$  на  $(i+2)$ -ое место и так далее. Последняя соседняя транспозиция  $\sigma_{j-1}$  поставит объект  $a_i$  на  $j$ -ое место, а все объекты  $a_m$  ( $m = i+1, \dots, j$ ) будут располагаться на  $(m-1)$ -ом месте. После этого, точно также (с помощью соседних транспозиций), объект  $a_j$  с  $(j-1)$ -ого места можно передвинуть влево на  $i$ -ое место. В результате получаем тождество

$$(i, j) = \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \cdot \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i . \quad (8.1.6) \quad \text{sigkj}$$

Так как любая перестановка представима в виде произведения транспозиций (смотри Утверждение 8.1.1), то согласно (8.1.6) любую перестановку можно представить в виде произведения соседних транспозиций  $\sigma_k$ . Таким образом, мы доказали, что соседние транспозиции составляют полный набор образующих группы перестановок.

- **Задача 238.** Проверить формулу (8.1.6), пользуясь правилом произведения перестановок (2.1.11). Записать перестановку (8.1.2) в виде произведения соседних транспозиций  $\sigma_i \in S_7$ .

Для группы  $S_n$  обычно выбирают один из 2-х наборов образующих:

**1.)** Набор из всех соседних транспозиций, то есть набор из  $(n-1)$ -ой образующей  $\sigma_i = (i, i+1)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ), которые удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i , \quad (|i-j| > 1) , \quad (8.1.7) \quad \text{local}$$

$$\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} , \quad (8.1.8) \quad \text{braid}$$

причем для каждой соседней транспозиции мы имеем

$$\sigma_i^2 = e , \quad (i = 1, \dots, n-1) , \quad (8.1.9) \quad \text{braid-p}$$

где  $e$  — тождественная перестановка. Элементы  $\sigma_i$  очевидно обратимы: из тождества (8.1.9) следует, что  $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$

**2.)** Набор из двух образующих — первой транспозиции  $\sigma_1 = (1, 2)$  и самого длинного цикла  $C = (1, 2, \dots, n)$ .

- **Задача 239.** Доказать соотношения (8.1.8) для соседних транспозиций  $\sigma_i = (i, i+1)$ . Доказать, что набор из двух элементов — первой транспозиции  $\sigma_1 = (1, 2)$  и самого длинного цикла  $C = (1, 2, \dots, n)$  являются образующими всей группы  $S_n$  (указание: использовать соотношения  $C \cdot \sigma_i \cdot C^{-1} = \sigma_{i+1}$ ).

Если не требовать выполнения тождества (8.1.9), то образующие  $\sigma_i$ , удовлетворяющие только соотношениям (8.1.7) и (8.1.8), порождают группу  $B_n$ , которая называется группой кос. Тождества (8.1.7) и (8.1.8) называются соответственно соотношениями локальности и соотношениями группы кос. Такое название оправдывается тем, что, например, соотношения (8.1.8) изображаются графически в виде тождественности двух кос, состоящих из трех прядей (линий):

$$\sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} = \begin{array}{c} i \quad i+1 \quad i+2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ | \quad \diagdown \quad / \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad \diagdown \quad | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ | \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} = \begin{array}{c} i \quad i+1 \quad i+2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad / \quad | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ | \quad \diagdown \quad / \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad \diagup \quad | \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} = \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i$$

где мы воспользовались представлением

$$\sigma_a = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & a & a+1 & \dots & n \\ \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet \\ | & | & & \diagdown & / & & | \\ \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet \\ 1 & 2 & \dots & a & a+1 & \dots & n \end{array} \quad (8.1.10) \quad \text{figas}$$

Отметим, что в случае группы  $B_n$  при изображении пересечения линий (прядей косы) важно, что одна из линий проходит сверху, а другая — снизу, как это изображено на (8.1.10). В случае группы  $S_n$  это не существенно (смотри представление (8.1.3)), так как в силу соотношения (8.1.9) мы имеем

$$\sigma_i = \begin{array}{cc} i & i+1 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & / \\ \bullet & \bullet \end{array} = \begin{array}{cc} i & i+1 \\ \bullet & \bullet \\ / & \diagdown \\ \bullet & \bullet \end{array} = \sigma_i^{-1}$$

Группа кос  $B_n$ , в отличие от группы перестановок  $S_n$ , имеет бесконечный порядок. Это следует из того, что все степени элементов  $\sigma_i$ , то есть элементы  $\sigma_i^k \in B_n$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), оказываются нетривиальными и независимыми. Например:

$$\sigma_i^2 = \begin{array}{cc} i & i+1 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & / \\ \bullet & \bullet \\ / & \diagdown \\ \bullet & \bullet \end{array} \neq \begin{array}{cc} i & i+1 \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ \bullet & \bullet \end{array} = e,$$

то есть, коса  $\sigma_i^2 \in B_n$  имеет нетривиальное зацепление, которое нельзя распутать.

Графическое представление (8.1.10) для образующих  $\sigma_i \in S_n$  подсказывает для них важную матричную реализацию  $T$ , которая соответственно определяет матричную реализацию всей группы  $S_n$ . Сопоставим каждой вершине с номером  $a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) на диаграмме (8.1.10) в верхнем ряду индекс  $k_a$ , а в нижнем ряду — индекс  $j_a$ , и пусть индексы  $k_a$  и  $j_a$  пробегает  $N$  значений:  $1, 2, \dots, N$ . Каждой стрелке, связывающей вершины с индексами  $k_a$  и  $j_b$  сопоставим символ Кронекера  $\delta_{j_b}^{k_a}$ . В результате для транспозиции  $\sigma_a$  (8.1.10) получаем представление в виде матрицы

$$\sigma_a \rightarrow (T(\sigma_a))_{j_1 \dots j_n}^{k_1 \dots k_n} = \delta_{j_1}^{k_1} \cdot \delta_{j_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot \delta_{j_{a-1}}^{k_{a-1}} \cdot \delta_{j_a}^{k_{a+1}} \delta_{j_{a+1}}^{k_a} \cdot \delta_{j_{a+2}}^{k_{a+2}} \cdot \dots \cdot \delta_{j_n}^{k_n}. \quad (8.1.11) \quad \text{matSn}$$

Пусть  $P$  — оператор перестановки, заданный в (4.4.13), (4.4.14). Тогда матрица (8.1.11) соответствует оператору

$$T(\sigma_a) = \underbrace{I_N \otimes \cdots \otimes I_N}_{a-1} \otimes P \otimes \underbrace{I_N \otimes \cdots \otimes I_N}_{n-a-1}, \quad (8.1.12) \quad \text{matSn2}$$

который действует в пространстве  $\mathcal{V}_N^{\otimes n}$  тензорного произведения  $N$ -мерных векторных пространств  $\mathcal{V}_N = \mathbb{C}^N$ . Произведению двух перестановок  $A, B \in S_n$  сопоставляется произведение соответствующих матриц

$$(T(A \cdot B))_{m_1 \dots m_n}^{k_1 \dots k_n} = (T(A))_{j_1 \dots j_n}^{k_1 \dots k_n} (T(B))_{m_1 \dots m_n}^{j_1 \dots j_n}, \quad (8.1.13) \quad \text{matSn1}$$

поэтому отображение (8.1.11) задает матричное представление группы  $S_n$ .

- **Задача 240.** Проверить, что соотношения группы кос (8.1.8) выполняются для матричной реализации (8.1.11), (8.1.12).

Напомним (смотри Определение 2.1.5), что перестановки, которые представляются в виде произведения четного (нечетного) числа транспозиций, называются четными (нечетными). При этом следует отметить, что перестановки записываются в виде произведения транспозиций неоднозначно, так как для транспозиций имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (i, j) \cdot (j, k) &= (j, k) \cdot (i, k) = (i, k) \cdot (i, j), & (i, j)^2 &= e \quad (\forall i, j, k), \\ (i, j) \cdot (k, m) &= (k, m) \cdot (i, j) & (i \neq k \neq j, \quad i \neq m \neq j). \end{aligned} \quad (8.1.14) \quad \text{tr3}$$

- **Задача 241.** Доказать формулы (8.1.14) для транспозиций  $(i, j)$ .

Тем не менее видно, что преобразования, использующие соотношения (8.1.14), сохраняют четность перестановки. Четные перестановки образуют подгруппу в группе перестановок  $S_n$  (произведение двух четных перестановок имеет представление в виде произведения четного числа транспозиций и, таким образом, снова есть четная перестановка). Эта подгруппа обозначается  $A_n$  и называется альтернативной (или знакопеременной) подгруппой. Подгруппа  $A_n$  является инвариантной подгруппой в группе  $S_n$ , так как очевидно, что присоединенное преобразование  $h \rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1}$  ( $\forall g \in S_n$ ) сохраняет четность элементов  $h$ .

Напомним (смотри Утверждение 2.1.3), что в группе  $S_n$  две перестановки, имеющие одинаковое разложение в произведение циклов (то есть одинаковое количество циклов и одинаковые длины соответствующих циклов), содержатся в одном и том же классе сопряженных элементов. Для того, чтобы решить вопрос, входят ли две перестановки  $A$  и  $B$  в один и тот же класс сопряженности, удобно расположить все циклы, входящие в  $A$  (или  $B$ ), слева на право в порядке убывания их длин, пока самый короткий цикл не окажется на последнем месте справа. Если длины всех циклов  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и их число одинаковы для перестановок  $A$  и  $B$ , то эти перестановки принадлежат одному и тому же классу сопряженности, в противном случае

это не так. Таким образом, каждый класс характеризуется последовательностью целых чисел  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ , удовлетворяющих условиям  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$  и  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = k_m = n$ . Каждая такая последовательность называется *разбиением* числа  $n$  и обозначается  $\lambda \vdash n$ . Удобно представлять различные разбиения  $\lambda \vdash n$  в виде диаграммы Юнга

$$\lambda = \begin{array}{c} m_1 \text{ рядов} \\ m_2 \text{ рядов} \\ m_3 \text{ рядов} \\ \dots \\ m_k \text{ рядов} \end{array} \begin{array}{c} \lambda_{(1)} \\ \lambda_{(2)} \\ \lambda_{(3)} \\ \dots \\ \lambda_{(k)} \end{array} \Leftrightarrow \lambda = [\lambda_{(1)}^{m_1}, \lambda_{(2)}^{m_2}, \dots, \lambda_{(k)}^{m_k}] , \quad (8.1.15) \quad \text{qdima01}$$

которая изображает перестановки, имеющие  $m_1$  циклов с длиной  $\lambda_{(1)}$  (то есть длины первых  $m_1$  циклов совпадают  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{m_1}$  и равны  $\lambda_{(1)}$ ),  $m_2$  циклов с длиной  $\lambda_{(2)}$ , и т.д. Конкретную перестановку, например (2.1.25):

$$\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_{\lambda_1})}_{\lambda_1} \underbrace{(a_{\lambda_1+1}, a_{\lambda_1+2}, \dots, a_{\lambda_1+\lambda_2})}_{\lambda_2} \dots \underbrace{(a_{\lambda_1+\dots+\lambda_{m-1}+1}, \dots, a_{\lambda_1+\dots+\lambda_m})}_{\lambda_m},$$

можно представить в виде таблицы, заполняя клетки диаграммы Юнга соответствующими элементами

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$\dots$	$a_{k_1}$
$a_{k_1+1}$	$a_{k_1+2}$	$\dots$	$\dots$	$a_{k_2}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$a_{k_{m-1}+1}$	$\dots$	$a_{k_m}$			

$$(8.1.16) \quad \text{Асус1}$$

Здесь мы положили  $k_1 = \lambda_1$ ,  $k_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\dots$ ,  $k_m = \lambda_1 + \dots + \lambda_m = n$ .

### Примеры.

1. Рассмотрим группу перестановок  $S_3$ . Мы имеем следующие разбиения  $3! = 6$  перестановок 3-х элементов на 3 различных класса сопряженных элементов:

$$\begin{aligned} 1. & \quad e = (1)(2)(3), \\ 2. & \quad (1, 2), (1, 3), (2, 3), \\ 3. & \quad (1, 2, 3), (1, 3, 2), \end{aligned} \quad (8.1.17) \quad \text{Асус5}$$

Соответствующие диаграммы Юнга имеют вид

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \bullet \bullet \bullet = [1^3] , \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \bullet \bullet = [2, 1] , \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \bullet \bullet \bullet = [3] .$$

Согласно (8.1.17) размерности классов  $[1^3]$ ,  $[2, 1]$ ,  $[3]$  соответственно равны 1, 3, 2.

2. Рассмотрим группу перестановок  $S_4$ . Мы имеем следующие разбиения 24-х перестановок 4-х элементов на 5 различных классов ( $\#$  — обозначает их размерность)

$$\begin{aligned} 1. & \quad e = (1)(2)(3)(4) \in \bullet \bullet \bullet \bullet = [1^4] \quad (\#1), \\ 2. & \quad (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \in \bullet \bullet = [2, 1^2] \quad (\#6), \\ 3. & \quad (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3) \in \bullet \bullet = [2, 2] \quad (\#3), \end{aligned} \quad (8.1.18) \quad \text{dimS4}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 3, 4), (1, 4, 3), \\ & (2, 3, 4), (2, 4, 3) \in \bullet\bullet\bullet = [3, 1] \quad (\#8), \end{aligned} \tag{8.1.19} \quad \text{dimS4a}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), \\ & (1, 4, 2, 3), (4, 3, 2, 1) \in \bullet\bullet\bullet\bullet = [4] \quad (\#6), \end{aligned}$$

$$\sum \# = 1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24 = 4!.$$

Оказывается, что для числа сопряженных элементов класса  $K_\lambda \subset S_n$ , где  $\lambda = [\lambda_{(1)}^{m_1}, \lambda_{(2)}^{m_2}, \dots, \lambda_{(k)}^{m_k}]$ , можно получить общую формулу.

**Утверждение 8.1.2** Рассмотрим класс  $K_\lambda$  сопряженных элементов, которые имеют разложение в циклы, соответствующее диаграмме Юнга  $\lambda = [\lambda_{(1)}^{m_1}, \lambda_{(2)}^{m_2}, \dots, \lambda_{(k)}^{m_k}]$ , представленной в (8.1.15). Тогда, число  $|Z_\lambda|$  перестановок  $g \in Z_\lambda \subset S_n$  таких, что фиксированный элемент  $\kappa \in K_\lambda$  – стабилен (т.е.  $g\kappa g^{-1} = \kappa$ ) равно

$$|Z_\lambda| = m_1! \lambda_{(1)}^{m_1} m_2! \lambda_{(2)}^{m_2} \cdots m_k! \lambda_{(k)}^{m_k}, \tag{8.1.20} \quad \text{zlam}$$

а число элементов в классе  $K_\lambda$  определяется формулой

$$|K_\lambda| = \frac{n!}{|Z_\lambda|} = \frac{n!}{m_1! \lambda_{(1)}^{m_1} m_2! \lambda_{(2)}^{m_2} \cdots m_k! \lambda_{(k)}^{m_k}}. \tag{8.1.21} \quad \text{kلام}$$

**Доказательство.** Согласно (8.1.15), (8.1.16) перестановка  $g \in Z_\lambda$  оставляющая элемент  $\kappa \in K_\lambda$  – стабильным, либо переставляет в  $\lambda$  циклы одинаковой длины, либо делает циклическую перестановку элементов внутри цикла. То есть, для циклов длины  $\lambda_{(i)}$ , которых  $m_i$  штук, имеется  $m_i!$  способов для первого действия и  $\lambda_{(i)}^{m_i}$  для второго действия. Произведение этих чисел дает (8.1.20).

Заметим, что  $Z_\lambda$  – подгруппа в  $S_n$ . Вся группа  $S_n$  действует на  $\kappa$  преобразованием сопряжения  $\kappa \rightarrow g\kappa g^{-1}$  так, что все элементы  $g$  из левого смежного класса  $h \cdot Z_\lambda$  (для некоторого фиксированного  $h \in S_n$ ) переводят  $\kappa$  в один и тот же элемент  $h\kappa h^{-1}$ . Более того, разные элементы из множества  $g\kappa g^{-1}$  ( $\forall g \in S_n$ ) соответствуют разным смежным классам по подгруппе  $Z_\lambda$ , т.к. из  $h\kappa h^{-1} \neq h'\kappa h'^{-1}$  следует, что  $h^{-1}h' \notin Z_\lambda$ . Т.о., число элементов в классе  $K_\lambda$  равно числу смежных классов в  $S_n$  по подгруппе  $Z_\lambda$  и, пользуясь Теоремой Лагранжа (смотри Задачу 14) и формулой (8.1.20), мы получаем (8.1.21). ■

Заметим, что формула (8.1.21) имеет нетривиальный комбинаторный смысл, так как все числа  $|K_\lambda|$  должны быть целыми, а их сумма по всем разбиениям  $\lambda \vdash n$  равняется  $\text{ord}(S_n) = n!$ , то есть мы имеем тождество  $\sum_{\lambda \vdash n} |Z_\lambda|^{-1} = 1$ , которое допускает вероятностную интерпретацию.

- **Задача 242.** Посчитать по формуле (8.1.21) размерность классов сопряженности в  $S_4$ , которые соответствуют диаграммам  $[1^4]$ ,  $[2, 1^2]$ ,  $[2^2]$ ,  $[3, 1]$ ,  $[4]$  и сравнить эти размерности с размерностями, указанными в (8.1.18), (8.1.19). Посчитать по формуле (8.1.21) размерность классов сопряженности в  $S_5$ , которые соответствуют диаграммам  $[1^5]$ ,  $[2, 1^3]$ ,  $[2^2, 1]$ ,  $[3, 1^2]$ ,  $[3, 2]$ ,  $[4, 1]$ ,  $[5]$  и проверить, что сумма этих размерностей равна  $5!$ .



Напомним, что важность группы перестановок заключается в том, что любая конечная группа  $G$  порядка  $n$  является подгруппой в  $S_n$  (это следует из Теоремы Кэли 2.3.3). Поэтому в определенном смысле изучение всех конечных групп порядка  $n$  сводится к изучению различных подгрупп группы перестановок  $S_n$ . Напомним также, что число неприводимых представлений конечной группы  $G$  совпадает с числом классов сопряженных элементов в  $G$  (смотри Утверждение 4.6.4). На самом деле эта связь более тесная и имеется взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями группы  $G$  и ее классами сопряженности. Так как классы сопряженных элементов в  $S_n$  характеризуются диаграммами Юнга  $\lambda \vdash n$ , то естественно ожидать и мы покажем это ниже, что неприводимые представления симметрической группы  $S_n$  также характеризуются диаграммами Юнга с  $n$  клетками.

## 8.2 Прямое произведение определяющих представлений $SL(N)$ .

Пусть  $T$  — определяющее представление группы  $SL(N, \mathbb{C})$ , действующее в  $N$ -мерном комплексном векторном пространстве  $\mathcal{V} = \mathbb{C}^N$ . Выберем в  $\mathcal{V}$  базис  $\{\vec{e}_i\}$  ( $i = 1, \dots, N$ ), тогда действие элемента  $g = \|g_j^i\|$  группы  $SL(N, \mathbb{C})$  в определяющем представлении в пространстве  $\mathcal{V}$  задается стандартным образом согласно (4.1.8)

$$T(g) \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_j g_i^j. \quad (8.2.1) \quad \text{resun0}$$

Соответственно на координатах вектора  $\vec{\psi} = \psi^i \vec{e}_i \in \mathcal{V}$  действие (8.2.1) записывается в виде

$$\psi^i \rightarrow \psi'^i = [T(g) \cdot \vec{\psi}]^i = g_j^i \psi^j. \quad (8.2.2) \quad \text{resun1}$$

Здесь и далее нам удобно размещать "входящие" (соответствующие строкам) индексы у матриц сверху, а "исходящие" (соответствующие столбцам) — снизу.

Рассмотрим теперь тензорное произведение  $T^{\otimes r} := T \otimes \dots \otimes T$  любого числа  $r$  определяющих представлений  $T$  группы  $SL(N, \mathbb{C})$ . Это представление (согласно определению тензорного произведения представлений, данному в разделе 4.3.1) сопоставляет каждому элементу  $g = \|g_j^i\| \in SL(N, \mathbb{C})$  оператор

$$T^{\otimes r}(g) := \underbrace{T(g) \otimes \dots \otimes T(g)}_r, \quad (8.2.3) \quad \text{resun6}$$

который действует в тензорном произведении  $\mathcal{V}^{\otimes r}$   $N$ -мерных векторных пространств следующим образом

$$\begin{aligned} (T^{\otimes r}(g)) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) g_{i_1}^{j_1} \dots g_{i_r}^{j_r}, \\ \psi^{i_1 \dots i_r} \rightarrow \psi'^{i_1 \dots i_r} &= [(T^{\otimes r}(g)) \cdot \Psi]^{i_1 \dots i_r} = g_{j_1}^{i_1} \dots g_{j_r}^{i_r} \cdot \psi^{j_1 \dots j_r}, \end{aligned} \quad (8.2.4) \quad \text{resun4}$$

где  $\Psi = \psi^{j_1 \dots j_r} (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) \in \mathcal{V}^{\otimes r}$  — тензор  $r$ -ого ранга, а  $\psi^{j_1 \dots j_r}$  — его координаты. Единичный оператор  $I_N^{\otimes r}$  в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes r}$  задается стандартным образом

$$\begin{aligned} (I_N^{\otimes r}) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_r}) &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j_r}) \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_r}^{j_r}, \\ \psi^{i_1 \dots i_r} \rightarrow \psi'^{i_1 \dots i_r} &= [(I_N^{\otimes r}) \cdot \Psi]^{i_1 \dots i_r} = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_r}^{i_r} \psi^{j_1 \dots j_r}. \end{aligned} \quad (8.2.5) \quad \text{resun5}$$

Очевидно, что единичный оператор коммутирует со всеми операторами, действующими в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes r}$ , в том числе и с операторами  $(T^{\otimes r}(g))$ , то есть со всеми элементами  $g \in SL(N, \mathbb{C})$  в представлении  $T^{\otimes r}$ .

Рассмотрим теперь набор операторов  $\mathbf{s}(\sigma)$ , которые производят перестановку векторов в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes r}$ :

$$\mathbf{s}(\sigma) \cdot (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_r) = (\vec{v}_{\sigma(1)} \otimes \vec{v}_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \vec{v}_{\sigma(r)}) , \quad (8.2.6) \quad \text{resun7w}$$

где  $\sigma$  обозначает соответствующую перестановку  $r$  элементов  $(1, 2, \dots, r)$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(r) \end{pmatrix} .$$

Из определения (8.2.6) следует, что оператор  $\mathbf{s}(\sigma)$  имеет следующее матричное представление (сравните с (8.2.5)):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\sigma) \cdot (\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_r}) &= (\vec{e}_{i_{\sigma(1)}} \otimes \vec{e}_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{\sigma(r)}}) = \\ &= (\vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_r}) \delta_{i_{\sigma(1)}}^{j_1} \cdot \delta_{i_{\sigma(2)}}^{j_2} \cdots \delta_{i_{\sigma(r)}}^{j_r} = (\vec{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_r}) [\mathbf{s}(\sigma)]_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} , \quad (8.2.7) \quad \text{resun7} \\ \psi^{i_1 \dots i_r} &\rightarrow \psi^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} = [\mathbf{s}(\sigma) \cdot \Psi]^{i_1 \dots i_r} = \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots \delta_{j_{\sigma(r)}}^{i_r} \psi^{j_1 \dots j_r} , \end{aligned}$$

Таким образом, каждому элементу  $\sigma$  группы перестановок  $S_r$  сопоставляется оператор  $\mathbf{s}(\sigma)$ , заданный в (8.2.7). Примером оператора типа (8.2.7) для  $r = 2$  служит оператор перестановки  $P$ , определение которого было дано в (4.4.14). Для  $r = N$  в качестве примера для (8.2.7) можно рассматривать операторы (8.1.11) и (8.1.12).

Пусть  $T$  — определяющее представление группы  $SL(N, \mathbb{C})$  в пространстве  $\mathcal{V}$  и  $X$  —  $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантный оператор в  $\mathcal{V}^{\otimes r}$ , то есть оператор, коммутирующий с действием группы  $SL(N, \mathbb{C})$  в представлении  $T^{\otimes r}$ :

$$X \cdot (T^{\otimes r}(g)) = (T^{\otimes r}(g)) \cdot X , \quad \forall g \in SL(N, \mathbb{C}) . \quad (8.2.8) \quad \text{resun8}$$

**Утверждение 8.2.1** *Любой  $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантный оператор  $X$ , действующий в  $\mathcal{V}^{\otimes r}$ , представляется в виде линейной комбинации операторов (8.2.7):*

$$X = \sum_{\sigma \in S_r} x_{\sigma} \mathbf{s}(\sigma) , \quad (8.2.9) \quad \text{resun9}$$

где  $x_{\sigma}$  — комплексные коэффициенты и сумма идет по всем  $r!$  перестановкам  $\sigma \in S_r$ .

**Доказательство.** Инвариантность оператора (8.2.9), или другими словами его коммутативность с действием группы  $SL(N, \mathbb{C})$  в представлении  $T^{\otimes r}$ , следует из инвариантности каждого из слагаемых в (8.2.9), то есть из инвариантности операторов  $\mathbf{s}(\sigma)$  для всех  $\sigma$ . Действительно, используя представление (8.2.4), мы имеем

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}(\sigma)]_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} g_{k_1}^{j_1} \cdots g_{k_r}^{j_r} &= \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots \delta_{j_{\sigma(r)}}^{i_r} g_{k_1}^{j_1} \cdots g_{k_r}^{j_r} = \\ &= \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots \delta_{j_{\sigma(r)}}^{i_r} g_{k_{\sigma(1)}}^{j_{\sigma(1)}} \cdots g_{k_{\sigma(r)}}^{j_{\sigma(r)}} = g_{k_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots g_{k_{\sigma(r)}}^{i_r} = \end{aligned}$$

$$= g_{j_1}^{i_1} \cdots g_{j_r}^{i_r} \delta_{k_{\sigma(1)}}^{j_1} \cdots \delta_{k_{\sigma(r)}}^{j_r} = g_{j_1}^{i_1} \cdots g_{j_r}^{i_r} [s(\sigma)]_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_r}.$$

Докажем теперь, что любой оператор  $X$ , удовлетворяющий (8.2.8), представляется в виде (8.2.9). Возьмем в качестве элемента  $g$  в (8.2.8) диагональную матрицу  $g = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$ , где  $a_i$  — произвольные комплексные параметры (без ограничения общности мы можем считать, что  $g$  — элемент группы  $GL(N, \mathbb{C})$ ). Тогда соотношение (8.2.8) переписывается в виде

$$(a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_r} - a_{k_1} \cdot a_{k_2} \cdots a_{k_r}) X_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} = 0, \quad (8.2.10) \quad \text{resun10}$$

(суммирования по повторяющимся индексам нет). Так как  $a_i$  — произвольны, то из (8.2.10) следует, что все частные решения для коэффициентов оператора  $X$  записываются в виде (это можно продемонстрировать, дифференцируя (8.2.10) по параметрам  $a_i$ ):

$$X_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} = x_{\sigma; i_1 \dots i_r} \delta_{k_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots \delta_{k_{\sigma(r)}}^{i_r}, \quad (8.2.11) \quad \text{resun11}$$

где  $x_{\sigma; i_1 \dots i_r} \in \mathbb{C}$  и  $\sigma$  — любая перестановка элементов  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Подставим (8.2.11) в (8.2.8). В результате получаем

$$(x_{\sigma; i_1 \dots i_r} - x_{\sigma; k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(r)}}) g_{k_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots g_{k_{\sigma(r)}}^{i_r} = 0,$$

и так как  $g_{k_{\sigma(r)}}^{i_r}$  — произвольны (с точностью до условия  $\det(g) \neq 0$ ), то мы получаем  $x_{\sigma; i_1 \dots i_r} = x_{\sigma; k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(r)}}$ , то есть все коэффициенты  $x_{\sigma; i_1 \dots i_r}$  в (8.2.11) не зависят от индексов  $(i_1 \dots i_r)$  и равны некоторой константе  $x_{\sigma}$ . После чего выражение в (8.2.11) приобретает вид  $x_{\sigma} s(\sigma)$ . Суммируя все такие частные решения по всевозможным перестановкам  $\sigma$ , мы получаем (8.2.8). ■

Итак, из Утверждения 8.2.1 следует, что имеется не единичная матрица (8.2.9), коммутирующая со всеми матрицами представления  $T^{\otimes r}$  группы  $SL(N, \mathbb{C})$ . Таким образом, согласно Лемме Шура, представление  $T^{\otimes r}$  приводимо и в нем можно выделить неприводимые представления.

**Пример.** Этот пример основан на Примере 2, который был приведен в конце раздела 4.4.2. Рассмотрим тензорное произведение двух определяющих представлений  $T \otimes T$  группы  $SL(N, \mathbb{C})$ , то есть рассмотрим случай  $r = 2$ . Согласно Утверждению 8.2.1 в пространстве  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$  существует нетривиальный оператор  $X$ , для которого имеет место соотношение

$$X \cdot (T(g) \otimes T(g)) = (T(g) \otimes T(g)) \cdot X, \quad \forall g \in SL(N, \mathbb{C}), \quad (8.2.12) \quad \text{ad-inv0}$$

и который в общем случае представляется в виде

$$X = x_0 I_N \otimes I_N + x_1 P, \quad (8.2.13) \quad \text{ad-in01}$$

где  $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$  — произвольные константы,  $I_N \otimes I_N$  — единичный оператор и  $P$  — оператор перестановки в  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ . Построим два проектора (смотри (4.4.15))

$$P^+ = \frac{1}{2} (I_N \otimes I_N + P), \quad P^- = \frac{1}{2} (I_N \otimes I_N - P), \quad (8.2.14) \quad \text{resun12}$$

которые представляют собой частные случаи оператора (8.2.13) и поэтому коммутируют с действием группы  $SL(N, \mathbb{C})$ . Согласно (4.4.16) операторы  $P^+$  и  $P^-$  образуют полную систему взаимно ортогональных проекторов и, будучи  $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантными операторами, они разбивают  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$  на два нетривиальных инвариантных подпространства (смотри Пример 2 в разделе 4.4.2):

$$\mathcal{V}^{(+)} = P^+ (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) , \quad \mathcal{V}^{(-)} = P^- (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) .$$

Таким образом, представление  $T \otimes T$  — приводимо. Инвариантные подпространства  $\mathcal{V}^{(+)}$  и  $\mathcal{V}^{(-)}$  являются подпространствами симметричных и антисимметричных тензоров в  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ . Обозначим соответствующие подпредставления в  $T \otimes T$  как  $T^{(+)}$  и  $T^{(-)}$ .

**Утверждение 8.2.2** *Представления  $T^{(+)}$  и  $T^{(-)}$  неприводимы.*

**Доказательство.** Докажем это утверждение от противного. Пусть, например, представление  $T^{(+)}$  приводимо (рассуждение в случае приводимости  $T^{(-)}$  аналогично), то есть в его пространстве  $\mathcal{V}^{(+)}$  имеется нетривиальное инвариантное подпространство  $\mathcal{V}^{(+)'}$ . Определим оператор  $P^{+'}$ , действующий в  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$  и проектирующий на подпространство  $\mathcal{V}^{(+)'}$ . Так как  $\mathcal{V}^{(+)'}$  инвариантно, то оператор  $P^{+'}$  должен коммутировать с действием группы в  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ , то есть удовлетворять соотношениям (8.2.12), и в то же время действовать в  $\mathcal{V}^{(+)}$  нетривиально, чтобы спроектировать на нетривиальное подпространство  $\mathcal{V}^{(+)'} \subset \mathcal{V}^{(+)}$ . В силу Утверждения 8.2.1 оператор  $P^{+'}$  должен строиться из единичного оператора и оператора перестановки, однако эти операторы действуют на подпространство  $\mathcal{V}^{(+)}$  тривиально (тождественно с точностью до знака) и поэтому не могут составить оператор  $P^{+'}$ , который выделял бы нетривиальное подпространство в  $\mathcal{V}^{(+)}$ . ■

Пример выделения двух неприводимых представлений  $T^{(+)}$  и  $T^{(-)}$ , разобранный нами для случая прямого произведения двух определяющих представлений ( $r = 2$ ), подсказывает общий метод, который позволяет выделять неприводимые представления из прямого произведения  $T^{\otimes r}$  любого числа  $r$  определяющих представлений  $T$  группы  $SL(N, \mathbb{C})$ . Прежде всего, нам необходимо среди операторов вида (8.2.9) выделить операторы  $P_\alpha$  (индекс  $\alpha$  перечисляет эти операторы), которые образуют полный набор взаимно ортогональных проекторов:

$$P_\alpha P_\beta = P_\alpha \delta_{\alpha\beta} , \quad \sum_{\alpha} P_\alpha = I_N^{\otimes r} , \quad (8.2.15) \quad \text{resun12b}$$

при этом проектора  $P_\alpha$  должны быть *примитивными*, то есть их нельзя разложить далее в сумму других проекторов. После этого неприводимые представления  $T^{(\alpha)}$  в  $T^{\otimes r}$  выделяются с помощью проекторов  $P_\alpha$ , а именно инвариантное подпространство  $\mathcal{V}^{(\alpha)}$  представления  $T^{(\alpha)}$  определяется как

$$\mathcal{V}^{(\alpha)} = P_\alpha \cdot \mathcal{V}^{\otimes r} .$$

Так как проектор  $P_\alpha$  коммутирует с действием  $T^{\otimes r}(g)$  для всех  $g \in SL(N, \mathbb{C})$ , то инвариантность подпространства  $\mathcal{V}^{(\alpha)}$  следует из цепочки равенств:

$$T^{\otimes r}(g) \cdot \mathcal{V}^{(\alpha)} = T^{\otimes r}(g) \cdot P_\alpha \cdot \mathcal{V}^{\otimes r} = P_\alpha \cdot T^{\otimes r}(g) \cdot \mathcal{V}^{\otimes r} \subset \mathcal{V}^{(\alpha)} .$$

Заметим теперь, что операторы  $\mathbf{s}(\sigma)$ , заданные в (8.2.6) и (8.2.7), определяют представление  $\mathbf{s}$  симметрической группы  $S_r$  в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes r}$ . Действительно, легко проверить свойство гомоморфизма для отображения  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s}(\sigma) \cdot \mathbf{s}(\sigma') = \mathbf{s}(\sigma \cdot \sigma') \quad \forall \sigma, \sigma' \in S_r.$$

Если в качестве перестановок  $\sigma$  выбрать соседние транспозиции  $\sigma_i = (i, i+1)$ , то матрицы операторов  $\mathbf{s}(\sigma_i)$  совпадают с матрицами (8.1.11), которые были построены нами в предыдущем Разделе 8.1. Здесь следует отметить, что операторы (8.2.9) и (8.2.14) являются линейными комбинациями представлений  $\mathbf{s}(\sigma)$  для элементов  $\sigma$  симметрической группы  $S_r$ . Поэтому операторы (8.2.9) и (8.2.14) следует рассматривать как представления элементов групповой алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$  группы  $S_r$ . Понятие групповой алгебры группы  $G$  было дано в Разделе 4.6.2 (смотри Определение 4.6.2). *Подчеркнем, что любое представление группы  $G$  одновременно является и представлением ее групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$ , и наоборот, любое представление групповой алгебры  $\mathbb{C}[G]$  задает представление группы  $G$ .*

Итак, группа  $S_r$  в представлении  $\mathbf{s}$ , также как и группа  $SL(N, \mathbb{C})$  в представлении  $T^{\otimes r}$ , действует в пространстве  $\mathcal{V}^{\otimes r}$ , и при этом действие группы  $S_r$  коммутирует с действием группы  $SL(N, \mathbb{C})$ . Проектора (8.2.15), необходимые для выделения неприводимых представлений группы  $SL(N, \mathbb{C})$  из представления  $T^{\otimes r}$  (напомним, что  $T$  — определяющее представление  $SL(N, \mathbb{C})$ ), являются образами  $\mathbf{s}(e_\alpha)$  некоторых элементов  $e_\alpha$  групповой алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$ . В силу равенств (8.2.15) элементы  $e_\alpha$  должны удовлетворять соотношениям

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \quad e = \sum_{\alpha=1}^s e_\alpha, \quad (8.2.16) \quad \text{resun14}$$

где  $e$  — единичный элемент в  $\mathbb{C}[S_r]$ . Как мы увидим ниже, элементы  $e_\alpha$ , которые называются примитивными идемпотентами, определяют полностью структуру алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$  и оказываются основными объектами при построении всех неприводимых представлений симметрической группы.

### 8.3 Идемпотенты. Разложения Пирса для ассоциативных алгебр.

С алгебраической точки зрения все, что было сказано в конце предыдущего раздела о выделении неприводимых представлений  $SL(N, \mathbb{C})$  из представления  $T^{\otimes r}$  привело нас к тому, что в групповой алгебре  $\mathcal{A} = \mathbb{C}[S_r]$  должны быть построены специальные элементы  $e_\alpha \in \mathcal{A}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ), которые обладают свойствами (8.2.16). При этом, так как речь шла о неприводимых представлениях  $SL(N, \mathbb{C})$ , то элементы  $e_\alpha$  должны быть примитивными, то есть не разложимыми далее в сумму таких же элементов.

В любой ассоциативной алгебре  $\mathcal{A}$  элементы  $e_\alpha$ , удовлетворяющие соотношению  $e_\alpha^2 = e_\alpha$ , называются *идемпотентами*<sup>35</sup>. Примитивные идемпотенты  $e_\alpha \in \mathcal{A}$  со свой-

<sup>35</sup>Термин "идемпотент" происходит от латинских слов *idem* ("тот же самый") и *potens* ("способный"). Этот термин был предложен американским математиком Бенджамин Пирсом (Benjamin Peirce) в статьях, написанных в 1870-х годах.

ствами (8.2.16) играют важную роль в теории представлений алгебры  $\mathcal{A}$ . Для конечномерных алгебр  $\mathcal{A}$  число  $s$  примитивных идемпотентов — конечно.

Любая ассоциативная алгебра  $\mathcal{A}$  действует на свое векторное пространство левыми и правыми умножениями. Возникающие при этом представления алгебры  $\mathcal{A}$  называются *регулярными*. Пользуясь условием полноты для идемпотентов  $e_\alpha$  (смотри второе соотношение в (8.2.16)), алгебру  $\mathcal{A}$  можно разложить в сумму ее подпространств  $\mathcal{L}_\alpha$  и  $\mathcal{R}_\alpha$

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{A} \cdot e_\alpha = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_\alpha, \quad \mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s e_\alpha \cdot \mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{R}_\alpha. \quad (8.3.1) \quad \text{resun13}$$

Каждое подпространство  $\mathcal{L}_\alpha$  (или  $\mathcal{R}_\alpha$ ) образует инвариантное подпространство в  $\mathcal{A}$  по отношению к левому (или соответственно правому) действию алгебры  $\mathcal{A}$ . То есть, для любых  $v \in \mathcal{L}_\alpha$  и  $v' \in \mathcal{R}_\alpha$  мы имеем

$$a \cdot v \in \mathcal{L}_\alpha, \quad v' \cdot a \in \mathcal{R}_\alpha, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (8.3.2) \quad \text{resun15}$$

Докажем инвариантность для левых подпространств  $\mathcal{L}_\alpha$  (доказательство инвариантности правых подпространств  $\mathcal{R}_\alpha$  аналогично). Для этого достаточно проверить, что не существует элементов  $a \in \mathcal{A}$ , для которых действие  $a$  на  $\mathcal{L}_\alpha$ , то есть произведение  $a \cdot e_\alpha \neq 0$ , не принадлежит пространству  $\mathcal{L}_\alpha$ :

$$a \cdot e_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} b_\beta \cdot e_\beta, \quad b_\beta \in \mathcal{A}, \quad (8.3.3) \quad \text{resun15b}$$

где некоторые из элементов  $b_\beta$  не нулевые. Подействуем на это соотношение справа идемпотентом  $e_\alpha$  и воспользуемся соотношением ортогональности (8.2.16). В результате получаем  $a \cdot e_\alpha = 0$ , что противоречит (8.3.3) в предположении, что некоторые из  $b_\beta$  не нулевые.

Из (8.3.2) следует, что инвариантные подпространства  $\mathcal{L}_\alpha$  (и  $\mathcal{R}_\alpha$ ) являются левыми (и правыми) идеалами в алгебре  $\mathcal{A}$ , и следовательно подалгебрами в  $\mathcal{A}$ . Кроме того, подпространства  $\mathcal{L}_\alpha$  (и  $\mathcal{R}_\alpha$ ), будучи инвариантными, оказываются пространствами левых (и правых) регулярных подпредставлений алгебры  $\mathcal{A}$ , а формулы (8.3.1) показывают, как алгебра  $\mathcal{A}$  разлагается в прямую сумму пространств своих левых и правых регулярных подпредставлений.

Обратно, пусть  $\mathcal{L}$  — любой левый идеал в  $\mathcal{A}$ , который по определению является левым инвариантным подпространством в  $\mathcal{A}$  и реализует пространство подпредставления в левом регулярном представлении. Так как левое регулярное представление для конечномерной алгебры  $\mathcal{A}$  вполне приводимо, то  $\mathcal{A}$ , как векторное пространство, разлагается в прямую сумму своих левых идеалов

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{L}_\alpha. \quad (8.3.4) \quad \text{resun16}$$

Будем считать, что все левые идеалы  $\mathcal{L}_\alpha$  в разложении (8.3.4) не содержат нетривиальных левых инвариантных подпространств (левых идеалов). Такие левые идеалы

называются простыми. Из формулы (8.3.4) следует, что любой элемент  $\mathcal{A}$  представляется в виде суммы  $a = \sum_{\alpha} a_{\alpha}$ , где  $a_{\alpha} \in \mathcal{L}_{\alpha}$ . В частности для единичного элемента  $e \in \mathcal{A}$  мы имеем разложение

$$e = \sum_{\alpha=1}^s e_{\alpha}, \quad e_{\alpha} \in \mathcal{L}_{\alpha}. \quad (8.3.5) \quad \text{resun17}$$

Рассмотрим элементы  $e_{\alpha}$ , возникшие в (8.3.5), более подробно. Так как  $e_{\beta} \in \mathcal{L}_{\beta}$ , то произведение  $e_{\alpha} \cdot e_{\beta}$  в силу инвариантности  $\mathcal{L}_{\beta}$  также должно принадлежать  $\mathcal{L}_{\beta}$  и из соотношения

$$e_{\alpha} = e_{\alpha} \cdot e = \sum_{\beta} e_{\alpha} \cdot e_{\beta} \in \mathcal{L}_{\alpha},$$

следует, что  $e_{\alpha} \cdot e_{\beta} = 0$  для всех  $\alpha \neq \beta$  и  $e_{\alpha} \cdot e_{\alpha} = e_{\alpha}$ , то есть

$$e_{\alpha} \cdot e_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} e_{\alpha}. \quad (8.3.6) \quad \text{resun18}$$

Таким образом,  $e_{\alpha}$  — идемпотенты, причем примитивные, так как  $\mathcal{L}_{\alpha}$  — простые левые идеалы. Пользуясь соотношениями (8.3.5) и (8.3.6), рассматриваемая алгебра  $\mathcal{A}$  может быть разложена в виде (8.3.1).

Разложения (8.3.1) называются соответственно *левым* и *правым* разложениями Пирса. Применяя одновременно левое и правое разложение Пирса, мы получаем *двухстороннее* разложение Пирса

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha, \beta=1}^s e_{\alpha} \mathcal{A} e_{\beta} = \bigoplus_{\alpha, \beta=1}^s \mathcal{A}_{\alpha, \beta}, \quad \mathcal{A}_{\alpha, \beta} := e_{\alpha} \mathcal{A} e_{\beta}. \quad (8.3.7) \quad \text{resun19}$$

Подействуем произвольным элементом  $a \in \mathcal{A}$  слева на идемпотент  $e_{\alpha}$  и применим к произведению  $a \cdot e_{\alpha}$  правое разложение Пирса. В результате получим формулу

$$a \cdot e_{\alpha} = \sum_{\beta} e_{\beta} a_{\beta\alpha}, \quad (8.3.8) \quad \text{resun19r}$$

где  $a_{\beta\alpha} = e_{\beta} \cdot a \cdot e_{\alpha} \in \mathcal{A}$  — коэффициенты двухстороннего разложения Пирса (8.3.7) элемента  $a$ . Формулу (8.3.8) можно интерпретировать как правило коммутирования элемента  $a$  с идемпотентом  $e_{\alpha}$ . Из этой формулы сразу же, с учетом ассоциативности  $\mathcal{A}$ , следует матричное правило умножения коэффициентов двухстороннего разложения Пирса

$$(a \cdot b)_{\beta\alpha} = \sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} b_{\gamma\alpha}, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

**Определение 8.3.1** Алгебра  $\mathcal{A}$  называется *простой*, если она не имеет нетривиальных двухсторонних идеалов. Алгебра  $\mathcal{A}$  называется *полупростой*, если она изоморфна прямой сумме простых двухсторонних идеалов.

Отметим, что в любой полупростой алгебре  $\mathcal{A}$  имеется два важных набора идемпотентов, удовлетворяющих (8.2.16): 1.) примитивные идемпотенты — о которых шла

речь выше; 2.) примитивные центральные идемпотенты — это идемпотенты, которые принадлежат центру алгебры  $\mathcal{A}$ . Во втором случае мы имеем

$$e_\alpha \mathcal{A} e_\beta = \delta_{\alpha,\beta} e_\alpha \mathcal{A} = \delta_{\alpha,\beta} \mathcal{A} e_\alpha .$$

Таким образом, левое, правое, а также двухстороннее разложения Пирса для центральных идемпотентов совпадают и мы получаем

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s e_\alpha \mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{A} e_\alpha = \bigoplus_{\alpha=1}^s \mathcal{A}_{\alpha,\alpha} , \quad (8.3.9) \quad \text{resun20}$$

где  $\mathcal{A}_{\alpha,\alpha}$  — двухсторонние идеалы (*инвариантные* подалгебры в  $\mathcal{A}$ ). Таким образом, формула (8.3.9) дает разложение  $\mathcal{A}$ , как векторного пространства, в прямую сумму ее инвариантных подалгебр<sup>36</sup>. Разложение (8.3.9) аналогично разложению полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых алгебр Ли, которое рассматривалось нами при доказательстве Утверждения 5.2.1.

**Замечание.** Система примитивных нецентральных идемпотентов (8.3.5) и (8.3.6) определяется неоднозначно. Например, мы можем сделать преобразования

$$e_\alpha \rightarrow e'_\alpha = S \cdot e_\alpha \cdot S^{-1} , \quad \forall \alpha , \quad (8.3.10) \quad \text{resun20f}$$

где  $S$  — любой обратимый элемент в  $\mathcal{A}$ , при этом возникает новая система ортогональных примитивных идемпотентов  $e'_\alpha$ . Отметим, что при преобразованиях (8.3.10) центральные идемпотенты не меняются.

**Пример 1.** Рассмотрим матричную алгебру  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  (смотри Задачу 24). Базисными элементами в  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  являются матричные единицы  $e_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) с определяющими соотношениями:

$$e_{ij} \cdot e_{km} = \delta_{jk} e_{im} , \quad (8.3.11) \quad \text{resun23}$$

а в качестве примитивных идемпотентов выступают элементы  $e_i := e_{ii}$  такие, что (сравните с (8.3.5), (8.3.6)):

$$\sum_{i=1}^n e_i = I_n , \quad e_i \cdot e_k = \delta_{ik} e_i .$$

Тогда, для любого элемента (матрицы)  $a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e_{ij} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  ( $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ) мы имеем левое разложение Пирса

$$a = a \cdot \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n a_i , \quad (8.3.12) \quad \text{resun23f}$$

где  $a_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_{ki}$  — элемент  $i$ -ого левого идеала  $\mathcal{L}_i$ , в качестве которого выступает  $i$ -ый столбец матрицы  $a$ . Так как в (8.3.12) матрица  $a$  была произвольной, то любой

<sup>36</sup>Как алгебра,  $\mathcal{A}$  разлагается в прямое произведение своих инвариантных подалгебр  $\mathcal{A}_{\alpha,\alpha}$



элемент  $x$  из левого идеала  $\mathcal{L}_i$  записывается в виде  $x = \sum_k x_k e_{ki}$ ,  $x_k \in \mathbb{C}$ . С учетом (8.3.11) действие слева образующей  $e_{rs}$  на  $x \in \mathcal{L}_i$  дает

$$x \rightarrow e_{rs} \cdot x = e_{rs} \cdot \sum_k x_k e_{ki} = x_s e_{ri} \in \mathcal{L}_i ,$$

и в соответствии со стандартным правилом (2.2.37) мы получаем известное матричное представление  $(e_{rs})_{km}$  для образующей  $e_{rs}$ :

$$x_k \rightarrow (e_{rs} \cdot x)_k = (e_{rs})_{km} x_m , \quad (e_{rs})_{km} = \delta_{rk} \delta_{sm} .$$

Пространства  $\mathcal{L}_i$  для всех  $i \in (1, \dots, n)$  изоморфны  $\mathbb{C}^n$  и таким образом изоморфны друг-другу, а соответствующие представления  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  — эквивалентны. Компонентами двухстороннего разложения Пирса (8.3.9) для алгебры  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  являются одномерные векторные пространства, натянутые на матричные единицы

$$e_{ii} \cdot \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \cdot e_{jj} = \mathbb{C} \cdot e_{ij} .$$

Центр в алгебре  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  тривиален и состоит из матриц, пропорциональных единичной матрице  $I_n$ , поэтому алгебра  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  не имеет нетривиальных двухсторонних идеалов и следовательно она проста.

**Пример 2.** Рассмотрим симметрическую группу  $S_2$ , состоящую из двух элементов  $\{e, \sigma_1\}$ , где  $e$  — единичный элемент и  $\sigma_1$  — соседняя транспозиция:  $\sigma_1 = (1, 2)$ . Взаимно ортогональные примитивные идемпотенты для  $\mathbb{C}[S_2]$  имеют вид

$$\begin{aligned} e_{[2]} &= \frac{1}{2}(e + \sigma_1) , & e_{[1^2]} &= \frac{1}{2}(e - \sigma_1) , \\ e_{[2]} \cdot e_{[1^2]} &= 0 , & (e_{[2]})^2 &= e_{[2]} , & (e_{[1^2]})^2 &= e_{[1^2]} , & e_{[2]} + e_{[1^2]} &= e . \end{aligned} \quad (8.3.13) \quad \text{reS1}$$

Идемпотенты  $e_{[2]}$  и  $e_{[1^2]}$  являются центральными, так как очевидно коммутируют с единственной образующей  $\sigma_1$ . Перестановка  $\sigma_1 = (1, 2)$  действует на идемпотенты  $e_{[2]}$  и  $e_{[1^2]}$  следующим образом:

$$\sigma_1 \cdot e_{[2]} = e_{[2]} , \quad \sigma_1 \cdot e_{[1^2]} = -e_{[1^2]} , \quad (8.3.14) \quad \text{reS2}$$

то есть не меняет знак у  $e_{[2]}$  и меняет знак у  $e_{[1^2]}$ . Поэтому  $e_{[2]}$  и  $e_{[1^2]}$  называются соответственно *симметризатором* и *антисимметризатором* в  $\mathbb{C}[S_2]$ . В соответствии с (8.3.13) алгебра  $\mathbb{C}[S_2]$  разлагается в прямую сумму двух одномерных двухсторонних идеалов  $\mathcal{L}_{[2]}$  и  $\mathcal{L}_{[1^2]}$  и следовательно имеет всего лишь два неприводимых одномерных представления, которые определяются согласно (8.3.14):

$$1.) \quad T_{[2]}(e) = 1 , \quad T_{[2]}(\sigma_1) = 1 ; \quad 2.) \quad T_{[1^2]}(e) = 1 , \quad T_{[1^2]}(\sigma_1) = -1 .$$

Эти представления и соответствующие идемпотенты иногда представляются графически как диаграммы Юнга с двумя клетками

$$T_{[2]} \sim [2] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} , \quad T_{[1^2]} \sim [1^2] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} . \quad (8.3.15) \quad \text{reS3}$$

Отметим, что идемпотенты (8.3.13) в матричном представлении (8.2.7) дают проектора (8.2.14).

**Пример 3.** Рассмотрим симметрическую группу  $S_3$  и ее презентацию (8.1.7), (8.1.8), (8.1.9) в терминах двух образующих  $\sigma_1, \sigma_2$ . В этой презентации шесть элементов группы  $S_3$  имеют вид

$$e, \quad \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_2\sigma_1, \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2. \quad (8.3.16) \quad \text{resun21b}$$

В качестве взаимно ортогональных примитивных идемпотентов для  $\mathbb{C}[S_3]$  можно выбрать следующие элементы

$$\begin{aligned} e_{[3]} &= \frac{1}{6}(1 + \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2)(1 + \sigma_1), \\ e_{[1^3]} &= \frac{1}{6}(1 - \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2)(1 - \sigma_1), \\ e_{[2,1]_1} &= \frac{1}{3}\left(1 - \sigma_2 + \varepsilon(1 - \sigma_1)\sigma_2\right)(1 + \sigma_1), \\ e_{[2,1]_2} &= \frac{1}{3}(1 - \sigma_1)\left(1 + \sigma_2 - \varepsilon\sigma_2(1 + \sigma_1)\right), \end{aligned} \quad (8.3.17) \quad \text{resun21}$$

где  $\varepsilon$  – произвольный параметр и мы для простоты записали элемент  $e$  как единицу 1. Действие образующих  $\sigma_i$  на идемпотенты  $e_{[3]}$  и  $e_{[1^3]}$  слева и справа дает:

$$\sigma_i \cdot e_{[3]} = e_{[3]} \cdot \sigma_i = e_{[3]}, \quad \sigma_i \cdot e_{[1^3]} = e_{[1^3]} \cdot \sigma_i = -e_{[1^3]}, \quad (8.3.18) \quad \text{resun22}$$

поэтому идемпотенты  $e_{[3]}$  и  $e_{[1^3]}$  являются центральными и называются соответственно *симметризатором* и *антисимметризатором* в  $\mathbb{C}[S_3]$ . Идемпотенты  $e_{[2,1]_1}$  и  $e_{[2,1]_2}$  — нецентральны и их зависимость от произвольного параметра  $\varepsilon$  показывает, что выбор нецентральных примитивных идемпотентов вообще говоря не однозначен (смотри выше Замечание перед Примером 1.).

- **Задача 243.** Пользуясь соотношениями (8.1.7), (8.1.8) и (8.1.9), проверить для операторов (8.3.17) выполнение равенств (8.3.18) и (8.2.16). Указание: воспользоваться проекторными свойствами операторов  $P_i^\pm = (1 \pm \sigma_i)$ :

$$P_i^+ P_i^- = 0, \quad P_i^\pm \sigma_i = \sigma_i P_i^\pm = \pm P_i^\pm.$$

Из (8.3.18) следует, что идемпотенты  $e_{[3]}$  и  $e_{[1^3]}$  задают одномерные двухсторонние идеалы в  $\mathbb{C}[S_3]$ . Идемпотент  $e_{[3]}$  определяет тривиальное одномерное представление  $T_{[3]}(\sigma) = +1$  ( $\forall \sigma \in S_3$ ), а идемпотент  $e_{[1^3]}$  определяет одномерное представление:  $T_{[1^3]}(\sigma) = +1$  для четных  $\sigma \in S_3$  и  $T_{[1^3]}(\sigma) = -1$  для нечетных  $\sigma \in S_3$ . Так как единица  $e$  и идемпотенты  $e_{[3]}$ ,  $e_{[1^3]}$  — центральны, то из разложения единицы

$$e = e_{[3]} + e_{[1^3]} + e_{[2,1]_1} + e_{[2,1]_2},$$

мы получаем, что сумма

$$e_{[2,1]_1} + e_{[2,1]_2} = \frac{1}{3}\left(2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1\right) =: e_{[2,1]}, \quad (8.3.19) \quad \text{resun31y}$$

также является центральным идемпотентом и центральное разложение единицы принимает вид  $e = e_{[3]} + e_{[13]} + e_{[2,1]}$ . Отметим, что, как и ожидалось, центральный идемпотент  $e_{[2,1]}$  не зависит от произвольного параметра  $\varepsilon$ .

Рассмотрим теперь для примера левый идеал  $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ , который порождается нецентральный идемпотентом  $e_{[2,1]_1}$ . Представим этот идемпотент в виде

$$e_{[2,1]_1} = \frac{1}{3}(e_1 + \varepsilon e_2), \quad (8.3.20) \quad \text{resun28d}$$

где

$$e_1 = (1 - \sigma_2)(1 + \sigma_1), \quad e_2 = (1 - \sigma_1)\sigma_2(1 + \sigma_1). \quad (8.3.21) \quad \text{resun28}$$

Действуя на (8.3.20) слева всеми элементами (8.3.16) и используя соотношения

$$\sigma_1 \cdot e_1 = e_1 + e_2, \quad \sigma_1 \cdot e_2 = -e_2, \quad \sigma_2 \cdot e_1 = -e_1, \quad \sigma_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2, \quad (8.3.22) \quad \text{resun26}$$

получаем, что идеал  $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$  — двумерен и любой элемент  $x \in \mathcal{L}_{[2,1]_1}$  записывается как линейная комбинация

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{C}.$$

То есть, элементы  $e_1$  и  $e_2$  образуют базис в  $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ . Из соотношений (8.3.22) следует (согласно стандартному правилу (2.2.33)) двумерное неприводимое представление группы  $S_3$ :

$$T_{[2,1]}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{[2,1]}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.3.23) \quad \text{resun25}$$

- **Задача 244.** Проверить для представления (8.3.23) выполнение структурных соотношений (8.1.8), (8.1.9). Проверить, что представление (8.3.23) эквивалентно двумерным представлениям  $T^{(+)}$  и  $T^{(-)}$ , заданным в (4.6.9):

$$T^{(\pm)}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm q \\ \pm q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(\pm)}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где в соответствии с (4.6.12) мы положили  $\sigma_1 = g_1^{-1} \cdot r \cdot g_1$  и  $\sigma_2 = r$ .  
Указание: проверить, что

$$S \cdot T_{[2,1]}(\sigma_i) \cdot S^{-1} = T^{(+)}(\sigma_i), \quad S = \begin{pmatrix} 1 & q^{-1} \\ -1 & -q \end{pmatrix} \quad (q^3 = 1, \quad q \neq 1).$$

- **Задача 245.** Проверить структурные соотношения для образующих  $e_1, e_2$  подалгебры (левого идеала)  $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$ :

$$e_1 \cdot e_1 = 3e_1, \quad e_2 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_2 \cdot e_1 = 3e_2. \quad (8.3.24) \quad \text{resun27}$$

Указание: воспользоваться формулами (8.3.22), или тождеством  $(e_{[2,1]_1})^2 = e_{[2,1]_1}$ , где элемент  $e_{[2,1]_1}$  определен общей формулой (8.3.20) с произвольным параметром  $\varepsilon$ .

В алгебре  $\mathbb{C}[S_3]$  имеется автоморфизм

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 = S \cdot \sigma_1 \cdot S^{-1}, \quad \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 = S \cdot \sigma_2 \cdot S^{-1}, \quad S \equiv \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1, \quad (8.3.25) \quad \text{resun29a}$$

при котором

$$e_1 \rightarrow e_3 = (1 - \sigma_1)(1 + \sigma_2), \quad e_2 \rightarrow e_4 = (1 - \sigma_2)\sigma_1(1 + \sigma_2), \quad (8.3.26) \quad \text{resun29b}$$

а (8.3.22) и (8.3.24) переходят в соотношения

$$\sigma_2 \cdot e_3 = e_3 + e_4, \quad \sigma_2 \cdot e_4 = -e_4, \quad \sigma_1 \cdot e_3 = -e_3, \quad \sigma_1 \cdot e_4 = e_3 + e_4, \quad (8.3.27) \quad \text{resun29}$$

$$e_3 \cdot e_3 = 3e_3, \quad e_4 \cdot e_4 = 0, \quad e_3 \cdot e_4 = 0, \quad e_4 \cdot e_3 = 3e_4. \quad (8.3.28) \quad \text{resun30}$$

Пользуясь соотношениями (8.3.22) и (8.3.27) мы находим, что левый идеал  $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$ , который порождается идемпотентом (смотрите (8.3.17))

$$e_{[2,1]_2} = \frac{1}{3}(e_3 - \varepsilon e_2), \quad (8.3.29) \quad \text{resun30a}$$

также двумерен. Положим для простоты  $\varepsilon = 0$ . Тогда любой элемент  $x' \in \mathcal{L}_{[2,1]_2}$  представляется в виде

$$x' = x_3 e_3 + x_4 e_4, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{C}.$$

Аutomорфизм (8.3.25), (8.3.26) переводит идемпотенты  $e_{[2,1]_1}$  и  $e_{[2,1]_2}$  друг в друга (для случая  $\varepsilon = 0$ ) и устанавливает эквивалентность представлений, реализованных на соответствующих левых идеалах  $\mathcal{L}_{[2,1]_1}$  и  $\mathcal{L}_{[2,1]_2}$ .

Рассмотрим теперь двухсторонний идеал  $\mathcal{L}_{[2,1]}$ , который порождается центральным идемпотентом (8.3.19) и, согласно соотношениям (8.3.22) и (8.3.27), является четырехмерным, так как произвольный элемент  $x \in \mathcal{L}_{[2,1]}$  записывается в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4.$$

Структурные соотношения для базисных элементов  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  двухстороннего идеала  $\mathcal{L}_{[2,1]}$  (инвариантной подалгебры в  $\mathbb{C}[S_3]$ ) даются соотношениями (8.3.24), (8.3.28) и перекрестными соотношениями

$$e_1 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0, \quad e_2 \cdot e_3 = e_4 \cdot e_1 = 0, \\ e_3 \cdot e_2 = 3e_2, \quad e_1 \cdot e_4 = 3e_4.$$

Из этих соотношений следует, что двухсторонний идеал  $\mathcal{L}_{[2,1]}$  не содержит нетривиальных инвариантных подалгебр (двухсторонних идеалов) и поэтому является простой алгеброй. Матричные коэффициенты двухстороннего разложения Пирса (8.3.7) для элементов  $\sigma_1, \sigma_2$  равны (сравните с (8.3.23))

$$\begin{pmatrix} e_1 \sigma_1 e_1 & e_1 \sigma_1 e_3 \\ e_3 \sigma_1 e_1 & e_3 \sigma_1 e_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ e_2 & -e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 \sigma_2 e_1 & e_1 \sigma_2 e_3 \\ e_3 \sigma_2 e_1 & e_3 \sigma_2 e_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -e_1 & e_4 \\ 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

Вся шестимерная алгебра  $\mathbb{C}[S_3]$ , базис в которой может быть теперь составлен из элементов  $\{e_{[3]}, e_{[1^3]}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , является прямым произведением трех инвариантных простых подалгебр  $\mathcal{L}_{[3]}$ ,  $\mathcal{L}_{[1^3]}$  и  $\mathcal{L}_{[2,1]}$  и поэтому  $\mathbb{C}[S_3]$  — полупроста. В следующем

Разделе 8.4 мы продемонстрируем, что представления  $T_{[3]}$ ,  $T_{[1^3]}$  и  $T_{[2,1]} \sim T_{[2,1]_2}$  и соответствующие центральные идемпотенты  $e_{[3]}$ ,  $e_{[1^3]}$  и  $e_{[2,1]}$  графически представляются в виде диаграмм Юнга

$$[3] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad [1^3] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}, \quad [2, 1] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}.$$

По сути дела в последнем примере мы решали ту же задачу, что и в пункте 2 раздела 4.6.1. А именно, мы выделяли неприводимые представления группы  $S_3$  из ее регулярного представления. При этом здесь мы применили метод, отличный от прямого метода, который использовался в разделе 4.6.1. Метод, изложенный здесь для случая группы  $S_3$  и основанный на выделении примитивных ортогональных идемпотентов, оказывается универсальным и применим, как мы увидим в следующем разделе для групп  $S_r$  с любым  $r > 3$ .

## 8.4 Представления симметрической группы $S_r$ . Симметризаторы Юнга.

В данном разделе мы изложим стандартную схему построения всех примитивных идемпотентов алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$  и соответственно изложим способ выделения неприводимых представлений группы  $S_r$  из ее регулярного представления. Данное построение принадлежит Юнгу и Фробениусу и позволяет сформулировать явно всю теорию представлений  $S_r$ .

В разделе 8.1 мы показали, что все классы сопряженных элементов в группе  $S_r$  нумеруются разбиениями  $\lambda \vdash r$  числа  $r$ , которые графически представляются как диаграммы Юнга с  $r$  клетками (8.1.15). Напомним, что число классов сопряженных элементов в конечной группе совпадает с числом неэквивалентных неприводимых представлений этой группы (смотри Утверждение 4.6.4). Поэтому естественно предположить, что каждому неэквивалентному неприводимому представлению группы  $S_r$  однозначно соответствует некоторая диаграмма Юнга с  $r$  клетками.

Рассмотрим диаграмму Юнга  $\lambda \vdash r$  и расставим во всех ее  $r$  клетках разные номера, как показано в (8.1.16), где  $k_m = r$  и  $(a_1, \dots, a_r)$  – некоторая перестановка чисел  $(1, 2, \dots, r)$ . Диаграмма Юнга  $\lambda$  с такой расстановкой номеров в клетках называется *таблицей Юнга* и обозначается  $T_\lambda$ . Если таблица Юнга  $T_\lambda$  получена нумерацией клеток в диаграмме  $\lambda$ , то в дальнейшем будем говорить, что таблица  $T_\lambda$  имеет форму диаграммы  $\lambda$ .

**Определение 8.4.1** Таблица Юнга  $\tilde{T}_\lambda$  называется *дуальной к таблице Юнга  $T_\lambda$* , если она получается из  $T_\lambda$  отражением относительно главной диагонали. При этом строки таблицы  $T_\lambda$  становятся столбцами таблицы  $\tilde{T}_\lambda$ , а столбцы  $T_\lambda$  становятся строками  $\tilde{T}_\lambda$ . Соответственно диаграмма Юнга  $\tilde{\lambda}$  (форма таблицы  $\tilde{T}_\lambda$ ) называется *дуальной к диаграмме Юнга  $\lambda$*  (форма таблицы  $T_\lambda$ ).

Например, две таблицы  $T_\lambda$  и  $\tilde{T}_\lambda$ :

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 8 & 10 & 7 & 4 \\ \hline 2 & 9 & 3 & 6 & \\ \hline 11 & 1 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \tilde{T}_{\tilde{\lambda}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 11 \\ \hline 8 & 9 & 1 \\ \hline 10 & 3 & \\ \hline 7 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array},$$

являются дуальными друг другу. Соответствующие диаграммы Юнга  $\lambda = [5, 4, 2]$  и  $\tilde{\lambda} = [3, 3, 2, 2, 1]$  также дуальны друг другу.

Имеется  $r!$  способов распределения  $r$  чисел  $(1, 2, \dots, r)$  в клетках диаграммы  $\lambda$ , то есть имеется  $r!$  разных таблиц  $T_\lambda$ , соответствующих одной и той же диаграмме Юнга  $\lambda$ . Рассмотрим множество  $\mathcal{M}_\lambda$  всех таблиц  $T_\lambda$ , имеющих форму  $\lambda$ . На множестве  $\mathcal{M}_\lambda$  действует группа перестановок  $S_r$ . А именно, перестановка  $\sigma \in S_r$  действует на таблицу  $T_\lambda$  так, что ставит в клетку с номером  $i \in \{1, \dots, r\}$  новый номер  $\sigma(i)$ . При этом таблица  $T_\lambda$  переходит в новую таблицу  $\sigma \cdot T_\lambda = T'_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$ .

Пусть  $T_\lambda$  — таблица Юнга, где  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$  — диаграмма Юнга с  $m$  строками и пусть  $H(T_\lambda)$  — множество горизонтальных перестановок  $p \in S_r$ , которые переставляют отдельно номера в каждой из строк таблицы  $T_\lambda$ , но не переставляют номера из разных строк. Очевидно, что  $H(T_\lambda)$  — подгруппа в группе  $S_r$ . Так как горизонтальные перестановки номеров в какой-то одной из строк длиной  $\lambda_k$  образуют группу  $S_{\lambda_k}$ , то мы имеем

$$H(T_\lambda) = S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_m} \subset S_r, \quad \text{ord}(H(T_\lambda)) = \lambda_1! \cdots \lambda_m!.$$

Подгруппа  $H(T_\lambda)$  называется *строчным стабилизатором*.

Аналогично можно определить подгруппу  $V(T_\lambda) \subset S_r$  всех вертикальных перестановок номеров в таблице  $T_\lambda$ , то есть таких перестановок  $q \in S_r$ , которые переставляют номера отдельно в каждом столбце таблицы  $T_\lambda$ , но не переставляют номера из разных столбцов. Таким образом, мы имеем

$$V(T_\lambda) = S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \dots \times S_{\lambda'_m} \subset S_r, \quad \text{ord}(V(T_\lambda)) = \lambda'_1! \cdots \lambda'_m!,$$

где  $[\lambda'_1, \dots, \lambda'_m]$  — длины всех  $m'$  столбцов диаграммы  $\lambda$ . Подгруппа  $V(T_\lambda)$  называется *столбцовым стабилизатором*.

Отметим, что если таблица  $T'_\lambda$  получается из таблицы  $T_\lambda$  с помощью перестановки  $\sigma \in S_r$ :  $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$ , то элементы  $p \in H(T_\lambda)$  и  $q \in V(T_\lambda)$  связаны с соответствующими элементами  $p' \in H(T'_\lambda)$  и  $q' \in V(T'_\lambda)$  соотношениями

$$p' = \sigma \cdot p \cdot \sigma^{-1} \Rightarrow H(T'_\lambda) = H(\sigma \cdot T_\lambda) = \sigma \cdot H(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}, \quad (8.4.1) \quad \text{yng04a}$$

$$q' = \sigma \cdot q \cdot \sigma^{-1} \Rightarrow V(T'_\lambda) = V(\sigma \cdot T_\lambda) = \sigma \cdot V(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}. \quad (8.4.2) \quad \text{yng04b}$$

Поясним соотношение (8.4.1) для подгруппы  $H(T_\lambda)$  (для строчного стабилизатора). Рассмотрение для столбцового стабилизатора  $V(T_\lambda)$  проводится аналогично. Возьмем любую, например  $k$ -ую, строку в таблице  $T_\lambda$ , в которой располагаются номера  $(i_1, i_2, \dots, i_{\lambda_k})$ . После применения перестановки  $\sigma \in S_r$  к таблице  $T_\lambda$  мы получим таблицу  $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$ , в  $k$ -ой строке которой будут стоять номера  $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{\lambda_k}))$ . Подействуем на таблицу  $T'_\lambda$  горизонтальной перестановкой  $p' \in H(T'_\lambda)$  в результате

чего возникает таблица  $p' \cdot \sigma \cdot T_\lambda$ , в  $k$ -ой строке которой произойдет перестановка содержащихся в ней номеров:

$$(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_{\lambda_k})) \rightarrow (\sigma(i_{\bar{p}'(1)}), \dots, \sigma(i_{\bar{p}'(\lambda_k)}))$$

где  $\bar{p}'$  — перестановка номеров  $(1, 2, \dots, \lambda_k)$ , соответствующая горизонтальной перестановке  $p'$ . Наконец, применение перестановки  $\sigma^{-1}$  к таблице  $p' \cdot \sigma \cdot T_\lambda$  дает таблицу  $\sigma^{-1} \cdot p' \cdot \sigma \cdot T_\lambda$ , в  $k$ -ом ряду которой стоят номера  $(i_{\bar{p}'(1)}, \dots, i_{\bar{p}'(\lambda_k)})$ , то есть некоторая перестановка номеров  $k$ -ой строки изначальной таблицы  $T_\lambda$ . Так как в качестве  $k$ -ой строки была выбрана любая из  $m$  строк таблицы  $T_\lambda$ , то мы получаем, что перестановка  $p = \sigma^{-1} \cdot p' \cdot \sigma$  действует на  $T_\lambda$  как горизонтальная перестановка из подгруппы  $H(T_\lambda)$ .

Образуем теперь из элементов  $p$  подгруппы  $H(T_\lambda)$  и элементов  $q$  подгруппы  $V(T_\lambda)$  два оператора

$$P = \sum_{p \in H(T_\lambda)} p, \quad (8.4.3) \quad \text{yng01}$$

$$Q = \sum_{q \in V(T_\lambda)} \delta_q q, \quad (8.4.4) \quad \text{yng02}$$

где  $\delta_q$  — четность перестановки  $q$ , то есть  $\delta_q = +1$ , если перестановка  $q$  четная и  $\delta_q = -1$ , если перестановка  $q$  нечетная. В (8.4.3) сумма берется по всем горизонтальным перестановкам из  $H(T_\lambda)$ , а в (8.4.4) сумма берется по всем вертикальным перестановкам из  $V(T_\lambda)$ . Операторы  $P$  и  $Q$  являются элементами групповых алгебр  $\mathbb{C}[H(T_\lambda)]$  и  $\mathbb{C}[V(T_\lambda)]$  и называются соответственно горизонтальным симметризатором и вертикальным антисимметризатором таблицы  $T_\lambda$ .

Из определений (8.4.3) и (8.4.4) для операторов  $P \in \mathbb{C}[H(T_\lambda)]$  и  $Q \in \mathbb{C}[V(T_\lambda)]$  следуют соотношения

$$\begin{aligned} p \cdot P &= P \cdot p = P, & q \cdot Q &= Q \cdot q = \delta_q Q, \\ \forall p \in H(T_\lambda), & & \forall q \in V(T_\lambda). \end{aligned} \quad (8.4.5) \quad \text{yng05}$$

Согласно (8.4.1), (8.4.2) эти соотношения означают, что горизонтальные симметризаторы  $P$  совпадают для всех таблиц  $T_\lambda$ , которые получаются друг из друга горизонтальными перестановками  $p: T_\lambda \rightarrow p \cdot T_\lambda$  и, соответственно, вертикальные антисимметризаторы  $Q$  совпадают для таблиц, которые связаны вертикальными перестановками  $q: T_\lambda \rightarrow q \cdot T_\lambda$  (в последнем случае мы имеем  $Q \rightarrow q \cdot Q \cdot q^{-1} = \delta_q^2 Q$ ).

- **Задача 246.** Пользуясь (8.4.5), доказать, что операторы  $P$  и  $Q$  пропорциональны идемпотентам  $E_P = \alpha^{-1}P$  и  $E_Q = \beta^{-1}Q$ :

$$P \cdot P = \alpha P, \quad Q \cdot Q = \beta Q \Rightarrow E_P^2 = E_P, \quad E_Q^2 = E_Q, \quad (8.4.6) \quad \text{yng05a}$$

где  $\alpha = \text{ord}(H(T_\lambda))$  и  $\beta = \text{ord}(V(T_\lambda))$ .

Рассмотрим произведение операторов (8.4.3) и (8.4.4), вычисленных для одной и той же таблицы  $T_\lambda$ ,

$$Y(T_\lambda) = Q \cdot P = \sum_{q \in V(T_\lambda)} \sum_{p \in H(T_\lambda)} \delta_q q \cdot p. \quad (8.4.7) \quad \text{yng03}$$

Оператор  $Y(T_\lambda)$  называется *симметризатором Юнга* таблицы  $T_\lambda$ . Важность симметризаторов Юнга заключается в том, что, как мы покажем ниже, эти операторы пропорциональны идемпотентам.

- **Задача 247.** Показать, что симметризаторы Юнга  $Y(T_\lambda)$  для таблиц  $T_\lambda = T_{[3]}, T_{[1^3]}, T_{[2,1]_1}$  и  $T_{[2,1]_2}$ :

$$T_{[3]} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad T_{[1^3]} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad T_{[2,1]_1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad T_{[2,1]_2} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array},$$

пропорциональны идемпотентам (8.3.17) для случая  $\varepsilon = 0$ .

Сразу же отметим, что можно выбрать другой набор симметризаторов Юнга, построенных в виде произведений:  $\tilde{Y}(T_\lambda) = P \cdot Q$ . Этот набор симметризаторов связан с набором (8.4.7) некоторым специальным автоморфизмом  $\phi$  в алгебре  $\mathbb{C}[S_r]$ , при котором любая перестановка  $\sigma \in S_r$  заменяется на эту же перестановку, умноженную на ее четность:  $\sigma \rightarrow \sigma \delta_\sigma$ . Данный автоморфизм переводит симметризатор  $P$  для таблицы  $T_\lambda$  в антисимметризатор  $\tilde{Q}$  для дуальной таблицы  $\tilde{T}_\lambda$ , а антисимметризатор  $Q$  для  $T_\lambda$  переводит в симметризатор  $\tilde{P}$  для  $\tilde{T}_\lambda$ . Соответственно для симметризаторов Юнга мы получаем

$$\phi(Q \cdot P) = \tilde{P} \cdot \tilde{Q} \quad \Rightarrow \quad \phi(Y(T_\lambda)) = \tilde{Y}(\tilde{T}_\lambda).$$

Рассмотрение симметризаторов Юнга  $\tilde{Y}(T_\lambda) = P \cdot Q$  принципиально ничем не отличается от рассмотрения симметризаторов (8.4.7). В дальнейшем мы будем изучать только набор симметризаторов (8.4.7).

Симметризаторы Юнга для разных таблиц  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$ , имеющих одну и ту же форму  $\lambda$ , связаны друг с другом некоторой перестановкой  $\sigma$  номеров в клетках:  $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$ , поэтому в силу соотношений (8.4.1), (8.4.2) эти симметризаторы выражаются друг через друга с помощью преобразования эквивалентности

$$Y(T'_\lambda) = \sigma \cdot Y(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1}. \quad (8.4.8) \quad \text{yng06}$$

Отметим, что из формул (8.4.5) вытекают равенства

$$\begin{aligned} q \cdot Y(T_\lambda) &= Y(T_\lambda) \delta_q, \quad Y(T_\lambda) \cdot p = Y(T_\lambda), \\ \forall q \in V(T_\lambda), \quad \forall p \in H(T_\lambda), \end{aligned} \quad (8.4.9) \quad \text{yng-qp}$$

которые понадобятся нам ниже.

**Утверждение 8.4.1** Пусть  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$  — две таблицы Юнга, соответствующие диаграммам  $\lambda \vdash r$  и  $\lambda' \vdash r$ , причем имеются два различных номера, которые находятся в одной строке  $T'_\lambda$  и в одном столбце  $T_\lambda$ . Тогда

$$Y(T'_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = 0. \quad (8.4.10) \quad \text{yng17}$$



**Доказательство.** В таблицах  $T'_{\lambda'}$  и  $T_{\lambda}$  имеются два различных номера, скажем  $r$  и  $k$ , которые находятся в одной строке  $T'_{\lambda'}$  и в одном столбце  $T_{\lambda}$ . Поэтому транспозиция  $(r, k)$  принадлежит одновременно и  $H(T'_{\lambda'})$  и  $V(T_{\lambda})$ . Тогда, учитывая тождество  $(r, k)^2 = e$  и соотношения (8.4.9), мы получаем

$$Y(T'_{\lambda'}) \cdot Y(T_{\lambda}) = Y(T'_{\lambda'}) \cdot (r, k)^2 \cdot Y(T_{\lambda}) = -Y(T'_{\lambda'}) \cdot Y(T_{\lambda}),$$

откуда следует равенство (8.4.10).  $\blacksquare$

Пусть  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$  и  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_h]$  — две диаграммы Юнга  $\lambda \vdash r$  и  $\mu \vdash r$ . Рассмотрим последовательность чисел  $(\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \dots)$ . Будем писать  $\lambda > \mu$ , если первая неравная нулю разность  $\lambda_k - \mu_k$  положительна (то есть  $\lambda_k - \mu_k > 0$ ). Будем также говорить, что диаграмма  $\mu$  включена в диаграмму  $\lambda$  и писать  $\mu \subset \lambda$ , если все клетки  $\mu$  содержатся и в  $\lambda$ . Отметим, что  $\lambda > \mu$  не означает, что диаграмма  $\mu$  может быть включена в диаграмму  $\lambda$ . Например, пусть  $\lambda = (3, 1)$  и  $\mu = (2, 2)$ , тогда  $\lambda > \mu$ , но  $\mu \not\subset \lambda$ .

Сформулируем теперь основную комбинаторную Лемму.

**Лемма 8.4.2** Пусть  $T_{\lambda}$  и  $T'_{\lambda'}$  — две таблицы Юнга, имеющие соответственно форму

$$\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \vdash r, \quad \lambda' = [\lambda'_1, \dots, \lambda'_k] \vdash r,$$

и пусть  $\lambda' \geq \lambda$ . Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:

- 1.) Существуют два различных номера, которые находятся в одной строке  $T'_{\lambda'}$  и в одном столбце  $T_{\lambda}$ .
- 2.)  $\lambda = \lambda'$  и существуют элементы  $p \in H(T_{\lambda})$  и  $q \in V(T_{\lambda})$ , для которых

$$T'_{\lambda'} = T'_{\lambda} = q \cdot p \cdot T_{\lambda}.$$

**Доказательство.** Предположим, что утверждение 1.) не выполняется. Тогда все номера, находящиеся в клетках первой строки таблицы  $T'_{\lambda'}$  должны располагаться в разных столбцах таблицы  $T_{\lambda}$ . Поэтому существует элемент  $q_1 \in V(T_{\lambda})$  такой, что эти номера будут располагаться в первой строке таблицы  $q_1 \cdot T_{\lambda}$  и следовательно  $\lambda_1 \geq \lambda'_1$ . Так как  $\lambda' \geq \lambda$  (то есть  $\lambda'_1 \geq \lambda_1$ ), то  $\lambda'_1 = \lambda_1$ . Номера, находящиеся в клетках второй строки таблицы  $T'_{\lambda'}$  должны снова располагаться в разных столбцах таблицы  $T_{\lambda}$  и соответственно в разных столбцах таблицы  $q_1 \cdot T_{\lambda}$ . Поэтому существует элемент  $q_2 \in V(q_1 \cdot T_{\lambda}) = V(T_{\lambda})$ , который не трогает номера в первой строке  $q_1 \cdot T_{\lambda}$  и располагает номера второй строки  $T'_{\lambda'}$  во второй строке таблицы  $q_2 \cdot q_1 \cdot T_{\lambda}$ . В частности мы имеем  $\lambda_2 \geq \lambda'_2$ . Опять же, из условия  $\lambda' \geq \lambda$  (с учетом  $\lambda'_1 = \lambda_1$ ) мы получаем  $\lambda'_2 = \lambda_2$ . Продолжая эту процедуру до последней строки  $\lambda'$ , мы находим элемент  $q_k \cdots q_2 \cdot q_1$  такой, что номера последней  $k$ -ой строки таблицы  $T'_{\lambda'}$  будут располагаться в  $k$ -ой строке таблицы  $q_k \cdots q_1 \cdot T_{\lambda}$ . Поэтому  $m = k$  и мы имеем равенство  $\lambda = \lambda'$ , входящее в утверждение 2. Пусть теперь  $k$  — число рядов в диаграмме  $\lambda = \lambda'$  и  $q = q_k \cdots q_2 \cdot q_1$ , тогда таблицы  $q \cdot T_{\lambda}$  и  $T'_{\lambda'} = T'_{\lambda}$  имеют те же номера в каждом ряду и следовательно имеется элемент  $p' \in H(T'_{\lambda'})$  такой, что  $p' \cdot T'_{\lambda} = q \cdot T_{\lambda}$ . Применим теперь к таблице  $T'_{\lambda} = (p')^{-1} \cdot q \cdot T_{\lambda}$  формулу (8.4.1), согласно которой существует элемент  $p^{-1} \in H(T_{\lambda})$  такой, что

$$p' = ((p')^{-1} \cdot q) \cdot p^{-1} ((p')^{-1} \cdot q)^{-1} \Rightarrow p' = q \cdot p^{-1} \cdot q^{-1}.$$

Таким образом, мы получаем  $T'_\lambda = (p')^{-1} \cdot q \cdot T_\lambda = q \cdot p \cdot T_\lambda$ . ■

**Следствие 1.** Если  $\lambda' > \lambda$ , то существуют два номера, которые находятся в одной строке таблицы  $T'_{\lambda'}$  и в одном столбце таблицы  $T_\lambda$ . Поэтому, согласно Утверждению 8.4.1 мы имеем  $Y(T'_{\lambda'}) \cdot Y(T_\lambda) = 0$ .

**Следствие 2.** Пусть  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$  — две разные таблицы, имеющие одну и ту же форму  $\lambda$  и связанные друг с другом некоторой перестановкой  $g \in S_r$ :  $T'_\lambda = g \cdot T_\lambda$ . Тогда, если элемент  $g \in S_r$  не представим в виде  $g = q \cdot p$ , где  $q \in V(T_\lambda)$  и  $p \in H(T_\lambda)$ , то в таблицах  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$  имеются два номера, которые находятся в одной строке  $T'_\lambda$  и в одном столбце  $T_\lambda$ , то есть согласно Утверждению 8.4.1 выполняется тождество:  $Y(T'_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = 0$ . Аналогично, если  $g$  не может быть представлен в виде  $g = p \cdot q$ , то существуют два различных номера, которые находятся в одном столбце  $T'_\lambda$  и в одной строке  $T_\lambda$  и соответственно мы имеем  $Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_\lambda) = 0$ .

**Утверждение 8.4.3** Симметризаторы Юнга (8.4.7), построенные по таблице  $T_\lambda$ , имеющей форму  $\lambda \vdash r$ , пропорциональны идемпотентам. То есть для  $Y(T_\lambda) \in \mathbb{C}[S_r]$  справедливо соотношение

$$Y(T_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = \alpha_\lambda Y(T_\lambda) , \quad (8.4.11) \quad \text{yng15}$$

где  $\alpha_\lambda$  — константа, которая определяется равенством

$$\alpha_\lambda = \frac{r!}{f(\lambda)} , \quad (8.4.12) \quad \text{yng15a}$$

и  $f(\lambda)$  — размерность левого идеала (пространства представления группы  $S_r$ ), порожденного элементом  $Y(T_\lambda)$ .

**Доказательство.** Заметим, что из (8.4.9) вытекает тождество  $q \cdot Y(T_\lambda) \cdot p = Y(T_\lambda) \delta_q$  для всех  $p \in H(T_\lambda)$  и  $q \in V(T_\lambda)$ . Обратно, пусть элемент  $a \in \mathbb{C}[S_r]$  такой, что

$$q \cdot a \cdot p \delta_q = a , \quad (8.4.13) \quad \text{yng09}$$

для всех  $p \in H(T_\lambda)$  и  $q \in V(T_\lambda)$ . Покажем, что в этом случае  $a = \alpha Y(T_\lambda)$ , где  $\alpha$  — некоторая константа. Любой элемент  $a \in \mathbb{C}[S_r]$  представим в виде

$$a = \sum_{g \in S_r} a(g) g , \quad a(g) \in \mathbb{C} , \quad (8.4.14) \quad \text{yng10}$$

и если для него выполняются соотношения (8.4.13), то мы имеем:

$$a = \sum_{g \in S_r} \delta_q a(g) q \cdot g \cdot p = \sum_{g \in S_r} \delta_q a(q^{-1} \cdot g \cdot p^{-1}) g . \quad (8.4.15) \quad \text{yng11}$$

Сравнивая коэффициенты при  $g$  в левой и правой частях (8.4.15), мы получаем соотношение

$$a(g) = a(q^{-1} \cdot g \cdot p^{-1}) \delta_q , \quad (8.4.16) \quad \text{yng12}$$

справедливое для всех  $p \in H(T_\lambda)$ ,  $q \in V(T_\lambda)$  и  $g \in S_r$ . В частном случае, полагая  $g = q \cdot p$ , мы получаем

$$a(q \cdot p) = a(e) \delta_q, \quad (8.4.17) \quad \text{yng13}$$

и все коэффициенты  $a(q \cdot p)$ , возникающие в сумме (8.4.14), с точностью до знака  $\delta_q$  совпадают друг с другом. Пусть  $g$  не представимо в виде  $q \cdot p$ , докажем, что в этом случае  $a(g) = 0$ . Рассмотрим таблицы  $T_\lambda$  и  $g \cdot T_\lambda$ . Так как  $g \neq q \cdot p$ , то согласно Следствию 2 к Лемме 8.4.2 имеются два номера  $j$  и  $k$ , которые располагаются в одной строке  $g \cdot T_\lambda$  и в одном столбце  $T_\lambda$ , поэтому для транспозиции  $t = (j, k)$  мы имеем  $t \in H(g \cdot T_\lambda)$  и  $t \in V(T_\lambda)$  и из соотношений (8.4.1) мы получаем  $g^{-1} \cdot t \cdot g \in H(T_\lambda)$ . Положим  $q = t$ ,  $p^{-1} = g^{-1} \cdot t \cdot g$  и учтем знак  $\delta_q = \delta_t = -1$  в формуле (8.4.16):

$$a(g) = a(q^{-1} \cdot g \cdot p^{-1}) \delta_q = -a(g).$$

Отсюда следует, что если  $g \neq q \cdot p$ , то  $a(g) = 0$ . Учитывая этот факт и соотношение (8.4.17), формула (8.4.14) переписывается в виде

$$a = \sum_{g \in S_r} a(g) g = \sum_{q \in V(T_\lambda)} \sum_{p \in H(T_\lambda)} \delta_q a(e) q \cdot p = \alpha Y(T_\lambda), \quad (8.4.18) \quad \text{yng14}$$

где  $\alpha = a(e)$ .

Для любого элемента  $x \in \mathbb{C}[S_r]$  рассмотрим произведение  $a = Y(T_\lambda) \cdot x \cdot Y(T_\lambda)$ . Для этого произведения в силу соотношений (8.4.9) выполняется условие (8.4.13), поэтому мы имеем

$$Y(T_\lambda) \cdot x \cdot Y(T_\lambda) = \alpha Y(T_\lambda). \quad (8.4.19) \quad \text{yng18x}$$

где  $\alpha$  – некоторая константа. В частности для  $x = e$  мы получаем

$$Y(T_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = \alpha_\lambda Y(T_\lambda), \quad (8.4.20) \quad \text{yng18}$$

и следовательно элемент  $E(T_\lambda) = \alpha_\lambda^{-1} Y(T_\lambda)$ , пропорциональный симметризатору Юнга  $Y(T_\lambda)$ , является идемпотентом  $E(T_\lambda)^2 = E(T_\lambda)$ .

Остается показать, что константа  $\alpha_\lambda$  в (8.4.11) дается формулой (8.4.12). Левый идеал  $\mathcal{L}_{T_\lambda}$  алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$ , который порождается идемпотентом  $E(T_\lambda)$  (или, что тоже самое оператором  $Y(T_\lambda)$ ), состоит из всех элементов  $\mathbb{C}[S_r]$  вида

$$x \cdot Y(T_\lambda), \quad \forall x \in \mathbb{C}[S_r]. \quad (8.4.21) \quad \text{yng19}$$

Обозначим размерность  $\mathcal{L}_{T_\lambda}$  как  $f_{(\lambda)}$ . Выберем полный набор базисных векторов  $e_a$  ( $a = 1, \dots, r!$ ) в  $\mathbb{C}[S_r]$  так, чтобы первые  $f_{(\lambda)}$  векторов образовывали базис в  $\mathcal{L}_{T_\lambda}$ , а остальные вектора  $e_a$  ( $a > f_{(\lambda)}$ ) не принадлежали  $\mathcal{L}_{T_\lambda}$ . Любые вектора в  $\mathcal{L}_{T_\lambda}$ , в том числе и базисные вектора  $e_a$  ( $a \leq f_{(\lambda)}$ ), должны представляться как произведения (8.4.21), поэтому существуют элементы  $x_a \in \mathbb{C}[S_r]$  ( $a \leq f_{(\lambda)}$ ) такие, что

$$e_a = x_a \cdot Y(T_\lambda), \quad 1 \leq a \leq f_{(\lambda)}. \quad (8.4.22) \quad \text{yng20}$$

Теперь вычислим произведение  $e_a \cdot Y(T_\lambda)$  двумя способами. С одной стороны рассмотрим произведение  $e_a \cdot Y(T_\lambda)$  как действие элемента  $Y(T_\lambda)$  справа на базисный элемент  $e_a$

$$e_a \cdot Y(T_\lambda) = \sum_{b=1}^{r!} D_{ab}(Y(T_\lambda)) e_b, \quad (8.4.23) \quad \text{yng21}$$

где  $\|D_{ab}(Y(\mathbf{T}_\lambda))\|$  — матрица элемента  $Y(\mathbf{T}_\lambda)$  в регулярном представлении  $S_r$ . Заметим, что симметризатор Юнга (8.4.7) записывается в виде

$$Y(\mathbf{T}_\lambda) = \sum_{g \in S_r} a(g) g = e + \sum_{g \neq e} a(g) g ,$$

то есть коэффициент  $a(e)$  при единичном элементе  $e$  равен 1. Поэтому, вспоминая формулы (4.6.25) для характера регулярного представления конечной группы, мы получаем

$$\mathrm{Tr}\left(D(Y(\mathbf{T}_\lambda))\right) = \mathrm{Tr}\left(D(e)\right) = r! , \quad (8.4.24) \quad \text{yng22}$$

где след берется по  $r!$ -мерному пространству регулярного представления. С другой стороны, так как  $e_a \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) \in \mathcal{L}_{\mathbf{T}_\lambda}$ , то суммирование в правой части (8.4.23) содержит только члены с  $b \leq f_{(\lambda)}$ , поэтому

$$D_{ab}(Y(\mathbf{T}_\lambda)) = 0 , \quad \forall b > f_{(\lambda)} . \quad (8.4.25) \quad \text{yng23}$$

Из формулы (8.4.22) для всех  $a \leq f_{(\lambda)}$  мы имеем

$$e_a \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = x_a \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \alpha_\lambda x_a \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \alpha_\lambda e_a . \quad (8.4.26) \quad \text{yng24}$$

Таким образом, из соотношений (8.4.23) и (8.4.26) следует равенство  $D_{ab}(Y(\mathbf{T}_\lambda)) = \alpha_\lambda \delta_{ab}$  для всех  $b \leq f_{(\lambda)}$ , что с учетом (8.4.25) дает

$$\mathrm{Tr}\left(D(Y(\mathbf{T}_\lambda))\right) = \alpha_\lambda f_{(\lambda)} . \quad (8.4.27) \quad \text{yng25}$$

Сравнивая (8.4.24) и (8.4.27), мы получаем (8.4.12). ■

**Следствие.** Идемпотент  $E(\mathbf{T}_\lambda)$ , пропорциональный симметризатору Юнга  $Y(\mathbf{T}_\lambda)$ , — примитивен. Докажем это от противного. Пусть идемпотент  $E(\mathbf{T}_\lambda)$  не примитивен. Тогда левый идеал  $\mathcal{L}_{\mathbf{T}_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot E(\mathbf{T}_\lambda)$  распадается в прямую сумму двух нетривиальных левых идеалов  $\mathcal{L}'_{\mathbf{T}_\lambda}$  и  $\mathcal{L}''_{\mathbf{T}_\lambda}$ , причем существуют элементы  $x_1, x_2 \in \mathbb{C}[S_r]$  такие, что  $x_1 + x_2 = e$  и

$$\mathcal{L}'_{\mathbf{T}_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot x_1 \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) , \quad \mathcal{L}''_{\mathbf{T}_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot x_2 \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) .$$

Тогда из (8.4.19) следует, что хотя бы одно из произведений  $Y(\mathbf{T}_\lambda) \cdot x_1 \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \alpha_1 Y(\mathbf{T}_\lambda)$  и  $Y(\mathbf{T}_\lambda) \cdot x_2 \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \alpha_2 Y(\mathbf{T}_\lambda)$  не равно нулю. Пусть  $Y(\mathbf{T}_\lambda) \cdot x_1 \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \alpha_1 Y(\mathbf{T}_\lambda) \neq 0$ . Тогда

$$\mathcal{L}_{\mathbf{T}_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) \cdot x_1 \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \mathbb{C}[S_r] \cdot x_1 \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) = \mathcal{L}'_{\mathbf{T}_\lambda} .$$

То есть, пространство  $\mathcal{L}'_{\mathbf{T}_\lambda}$  совпадает с пространством  $\mathcal{L}_{\mathbf{T}_\lambda}$  и следовательно идемпотент  $E(\mathbf{T}_\lambda)$  — примитивен.

Пусть в (8.4.19) элемент  $x$  таков, что константа  $\alpha \neq 0$ . Тогда, умножая обе части соотношения (8.4.19) справа и слева на  $x$ , мы получаем, что элементы

$$Y'(\mathbf{T}_\lambda) = Y(\mathbf{T}_\lambda) \cdot x , \quad Y''(\mathbf{T}_\lambda) = x \cdot Y(\mathbf{T}_\lambda) ,$$

снова (как и симметризатор Юнга  $Y(\mathbf{T}_\lambda)$ ) пропорциональны идемпотентам.

**Утверждение 8.4.4** Пусть симметризаторы Юнга  $Y(T_\lambda)$  и  $Y(T'_\lambda)$  построены по разным таблицам  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$ , которые имеют одну и ту же форму  $\lambda$ . Тогда левые регулярные представления в пространствах левых идеалов, порожденных операторами  $Y(T_\lambda)$  и  $Y(T'_\lambda)$  — эквивалентны. Аналогичное утверждение имеет место и для правых регулярных представлений.

**Доказательство.** Доказательство эквивалентности для правых регулярных представлений такое же как и для левых регулярных представлений. Поэтому здесь мы приведем только доказательство эквивалентности левых регулярных представлений. Рассмотрим пространство левого идеала  $\mathcal{L}_{T_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(T_\lambda)$ , и пусть элементы  $e_a$  ( $a = 1, \dots, f(\lambda)$ ) образуют базис в пространстве  $\mathcal{L}_{T_\lambda}$ . Так как таблицы  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$  имеют одну и ту же форму  $\lambda$ , то существует перестановка  $\sigma \in S_r$  такая, что  $T'_\lambda = \sigma \cdot T_\lambda$  и соответствующие симметризаторы Юнга связаны соотношением (8.4.8). Тогда любой элемент в пространстве

$$\mathcal{L}_{T'_\lambda} = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(T'_\lambda) = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(T_\lambda) \cdot \sigma^{-1},$$

левого идеала, порожденного оператором  $Y(T'_\lambda)$ , представляется в виде линейной комбинации элементов  $e'_a = e_a \cdot \sigma^{-1}$ , которые таким образом образуют базис в пространстве  $\mathcal{L}_{T'_\lambda}$ . Линейная независимость векторов  $\{e'_a\}$  следует из линейной независимости векторов  $\{e_a\}$ . Рассмотрим левое регулярное представление  $\rho$  в пространстве  $\mathcal{L}_{T_\lambda}$ . Матрица элемента  $x \in \mathbb{C}[S_r]$  в представлении  $\rho$  будет, согласно стандартной процедуре (2.2.33), определяться следующим образом  $x \cdot e_a = e_b \rho_{ba}(x)$ . Аналогично определяется матрица элемента  $x \in \mathbb{C}[S_r]$  в левом регулярном представлении  $\rho'$  в пространстве  $\mathcal{L}_{T'_\lambda}$ :  $x \cdot e'_a = e'_b \rho'_{ba}(x)$ . С другой стороны мы имеем

$$x \cdot e'_a = x \cdot e_a \cdot \sigma^{-1} = (e_b \rho_{ba}(x)) \cdot \sigma^{-1} = e'_b \rho_{ba}(x) \Rightarrow \rho'_{ba}(x) = \rho_{ba}(x).$$

Таким образом, если в пространстве  $\mathcal{L}_{T'_\lambda}$  выбрать специальный базис  $\{e'_a = e_a \cdot \sigma^{-1}\}$ , то матрица  $\rho'(x)$  представления любого элемента  $x \in \mathbb{C}[S_r]$  в этом базисе совпадает с матрицей  $\rho(x)$  в представлении  $\rho$ . Следовательно, левые регулярные представления  $\rho$  и  $\rho'$ , порожденные симметризаторами Юнга  $Y(T_\lambda)$  и  $Y(T'_\lambda)$  (которые построены по таблицам, имеющим одну и ту же форму  $\lambda$ ), являются эквивалентными. ■

Выбирая в (8.4.8) горизонтальную перестановку  $\sigma = p \in H(T_\lambda)$ , или вертикальную перестановку  $\sigma = q \in V(T_\lambda)$ , мы получаем

$$Y(p \cdot T_\lambda) = p \cdot Y(T_\lambda), \quad Y(q \cdot T_\lambda) = \delta_q Y(T_\lambda) \cdot q, \quad (8.4.28) \quad \text{yng08}$$

что следует из равенств (8.4.9). В соответствии с (8.4.28) левый идеал, порожденный идемпотентом  $Y(p \cdot T_\lambda)$ , для всех  $p \in H(T_\lambda)$  совпадает с левым идеалом, порожденным идемпотентом  $Y(T_\lambda)$ , а правый идеал, порожденный идемпотентом  $Y(q \cdot T_\lambda)$ , для всех  $q \in V(T_\lambda)$  совпадает с правым идеалом, порожденным  $Y(T_\lambda)$ ,

$$\mathbb{C}[S_r] \cdot Y(p \cdot T_\lambda) = \mathbb{C}[S_r] \cdot Y(T_\lambda), \quad Y(q \cdot T_\lambda) \cdot \mathbb{C}[S_r] = Y(T_\lambda) \cdot \mathbb{C}[S_r].$$

Поэтому симметризаторы Юнга  $Y(T_\lambda)$  и  $Y(p \cdot T_\lambda)$ ,  $Y(q \cdot T_\lambda)$ , построенные по всем таблицам типа  $p \cdot T_\lambda$  и  $q \cdot T_\lambda$ , имеющим одну и ту же форму  $\lambda$ , не должны одновременно входить в полную систему независимых примитивных идемпотентов. Один из

способов исключения зависимых идемпотентов связан с тем, что выбираются только симметризаторы Юнга  $Y(T_\lambda)$ , которые строятся по так называемым *стандартным таблицам* Юнга  $T_\lambda$ .

**Определение 8.4.2** *Таблицы  $T_\lambda$ , в которых номера клеток возрастают в каждой строке слева направо и в каждом столбце сверху вниз, называются стандартными таблицами.*

Например, рассмотрим три таблицы Юнга, имеющие одну и ту же форму  $\lambda = [6, 5, 4, 3] \vdash 18$ :

5	17	18	13	15	10
6	16	2	12	8	
14	3	1	7		
11	9	4			

 $\xrightarrow{p}$ 

5	10	13	15	17	18
2	6	8	12	16	
1	3	7	14		
4	9	11			

 $\xrightarrow{q'}$ 

1	3	7	12	16	18
2	6	8	14	17	
4	9	11	15		
5	10	13			

Первые две таблицы не стандартны, а последняя – стандартна. Понятно, что если таблица  $T_\lambda$  – стандартна, то любая горизонтальная или вертикальная перестановка  $\sigma$  переведет ее в нестандартную таблицу  $\sigma \cdot T_\lambda$ . Поэтому выбор симметризаторов Юнга, построенных только по стандартным таблицам, приводит к отсутствию лишних идемпотентов, связанных друг с другом соотношениями (8.4.28).

**Замечание 1.** Стандартные таблицы Юнга обладают замечательным свойством, а именно, из стандартной таблицы  $T_{\lambda_r}$  с  $r$  клетками можно удалить клетку с последним номером  $r$  и в результате снова получить стандартную таблицу  $T_{\lambda_{r-1}}$ , но уже с  $(r-1)$ -ой клеткой. Из стандартной таблицы  $T_{\lambda_{r-1}}$  можно также удалить клетку с последним номером  $(r-1)$  и снова получить стандартную таблицу  $T_{\lambda_{r-2}}$ . Продолжая эту процедуру и далее, из стандартной таблицы  $T_{\lambda_r}$  строится последовательность стандартных таблиц  $\{T_{\lambda_r}, T_{\lambda_{r-1}}, \dots, T_{\lambda_1}\}$ , которая заканчивается таблицей  $T_{\lambda_1}$ , состоящей из одной клетки с номером 1. Рассмотрим теперь последовательность диаграмм Юнга  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , которые соответствуют построенным таблицам  $T_{\lambda_k}$  ( $k = 1, \dots, r$ ). В этой последовательности диаграмм каждая следующая диаграмма содержит предыдущую:  $\lambda_{k-1} \subset \lambda_k$ . Очевидно, что по последовательности  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$  однозначно восстанавливается изначальная таблица Юнга  $T_{\lambda_r}$ . Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между стандартными таблицами Юнга и указанными выше последовательностями диаграмм Юнга. Это соответствие будет использовано в следующем Разделе 8.5.

**Утверждение 8.4.5** *Пусть мы имеем две стандартные таблицы  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$ , которые имеют одну и ту же форму  $\lambda$ . Тогда либо эти таблицы совпадают, либо существуют два номера, которые находятся в одной строке (столбце) таблицы  $T_\lambda$  и в одном столбце (строке)  $T'_\lambda$ .*

**Доказательство.** Так как  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$  – стандартные таблицы, то номер 1 в этих таблицах располагается в одной и той же клетке: в первой клетке первой строки. Каждую клетку диаграммы Юнга  $\lambda$  можно задать с помощью двух координат  $(i, j)$ , где  $i$  – номер строки, а  $j$  – номер столбца в  $\lambda$ . Таким образом, номер 1 в таблицах  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$

располагается в клетке  $(1, 1)$ . Сравним нумерацию клеток для двух разных стандартных таблиц  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$ , имеющих одну и ту же форму  $\lambda$ . Будем проводить сравнение в каждой строке слева направо, начиная с первой. Пусть первый различающийся номер возникает в  $i$ -ой строке, в клетке  $(i, j)$ , и он равен  $k$  для таблицы  $T_\lambda$  и равен  $k'$  для таблицы  $T'_\lambda$ . Если  $k' > k$ , то будем говорить, что стандартная таблица  $T'_\lambda$  *доминирует* над стандартной таблицей  $T_\lambda$ . Так как все номера в предыдущих клетках в строках с первой по  $i$ -ую у таблиц  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$  совпадали, то номер  $k$  в стандартной таблице  $T'_\lambda$  должен находиться в одной из последующих строк с номером  $i' > i$ , например в клетке  $(i', j')$ . Так как  $k' > k$  и таблица  $T'_\lambda$  — стандартная, то очевидно, что  $j' < j$ , смотри Рис. 25:

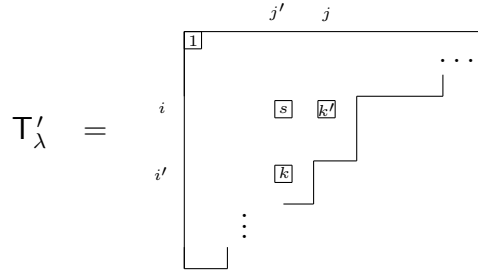


Рис. 25: Размещение клеток с номерами  $k$  и  $k'$  в стандартной таблице Юнга  $T'_\lambda$ .

В силу того, что все предыдущие номера в строках с первой по  $i$ -ую совпадали у таблиц  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$ , то в строке  $i$  в клетке  $(i, j')$  в обеих таблицах располагается один и тот же номер  $s$  ( $1 \leq s < k$ ). Таким образом, мы получаем, что два номера  $k$  и  $s$  располагаются в одной строке таблицы  $T_\lambda$  и в одном столбце таблицы  $T'_\lambda$ . Отметим, что если бы мы выше положили  $k' < k$ , то рассуждения, аналогичные только что рассмотренным, привели бы нас к заключению, что два номера  $k$  и  $s$  располагаются в одной строке таблицы  $T'_\lambda$  и в одном столбце таблицы  $T_\lambda$ . ■

**Следствие 8.4.5.1** Если стандартная таблица  $T'_\lambda$  *доминирует* над стандартной таблицей  $T_\lambda$ , то существуют два номера в одном столбце  $T'_\lambda$  и в одной строке  $T_\lambda$  и следовательно

$$Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_\lambda) = 0. \quad (8.4.29) \quad \text{yng16}$$

Подчеркнем, что порядок доминирования устанавливается только для стандартных таблиц имеющих одну и ту же форму.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим порядок доминирования стандартных таблиц, имеющих форму диаграммы Юнга  $\nu = [3, 2]$ :

$$T_{1,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T_{2,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T_{3,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \quad T_{4,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}, \quad T_{5,\nu} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}. \quad (8.4.30) \quad \text{yng-tbl}$$

Таблицы, располагающиеся правее, доминируют над таблицами, располагающимися левее. Легко проверить, что утверждение Следствия 8.4.5.1 согласуется с порядком доминирования, представленном в (8.4.30). Рассмотрим, например, первую и последнюю таблицы. Два номера 1 и 2 находятся в одной строке таблицы  $T_{1,\nu}$  и в одном столбце таблицы  $T_{5,\nu}$ . Заметим, что почти для всех пар таблиц, изображенных в

(8.4.30), имеется обратная ситуация, а именно, если  $T'$  доминирует над  $T$ , то существует пара номеров, которые находятся в одной строке таблицы  $T'$  и в одном столбце таблицы  $T$ . Исключение дается первой  $T_{1,\nu}$  и последней  $T_{5,\nu}$  таблицами, представленными на (8.4.30). Действительно, не существует двух номеров, которые находятся в одном столбце таблицы  $T_{1,\nu}$  и в одной строке таблицы  $T_{5,\nu}$ . Напомним, что в этом случае (смотри Следствие 2 к Лемме 8.4.2) имеются элементы

$$p = (4, 5)(2, 3) \in H(T_{1,\nu}), \quad q = (2, 5) \in V(T_{1,\nu}), \quad (8.4.31) \quad \text{yng25z}$$

такие, что  $T_{5,\nu} = q \cdot p \cdot T_{1,\nu}$ .

**Замечание 2.** Из рассмотрения предыдущего примера и из Утверждений 8.4.1, 8.4.3 следует, что для всех  $a, b = 1, \dots, 5$ , кроме единственного случая  $(a = 5, b = 1)$ , выполняются тождества

$$Y(T_{a,\nu}) \cdot Y(T_{b,\nu}) = \alpha_\nu Y(T_{b,\nu}) \delta_{ab}. \quad (8.4.32) \quad \text{yng29}$$

Покажем, что  $Y(T_{5,\nu}) \cdot Y(T_{1,\nu}) \neq 0$ . Рассмотрим общий случай. Пусть стандартная таблица  $T'_\lambda$  доминирует над стандартной таблицей  $T_\lambda$  и не существует двух номеров, находящихся в одной строке  $T'_\lambda$  и в одном столбце  $T_\lambda$  (например,  $T_\lambda = T_{1,\nu}$  и  $T'_\lambda = T_{5,\nu}$ , смотри (8.4.30)). Тогда согласно Лемме 8.4.2 имеется элемент  $g = q \cdot p \in S_r$  такой, что  $T'_\lambda = g \cdot T_\lambda$  и следовательно с учетом (8.4.9) мы получаем

$$\begin{aligned} Y(T'_\lambda) &= g \cdot Y(T_\lambda) \cdot g^{-1} = q \cdot p \cdot Y(T_\lambda) \cdot q^{-1} \Rightarrow \\ Y(T'_\lambda) \cdot q &= q \cdot p \cdot Y(T_\lambda), \end{aligned} \quad (8.4.33) \quad \text{yng26y}$$

откуда (сравните с (8.4.29)):

$$Y(T'_\lambda) \cdot Y(T_\lambda) = q \cdot p \cdot Y(T_\lambda) \cdot q^{-1} \cdot Y(T_\lambda) = q \cdot p \cdot Y(T_\lambda) \delta_q \alpha_\lambda \neq 0. \quad (8.4.34) \quad \text{yng26w}$$

- **Задача 248.** Проверить тождество  $Y(T_{5,\nu}) \cdot Y(T_{1,\nu}) = -q \cdot p \cdot Y(T_{1,\nu}) \alpha_\nu$ , где  $q$  и  $p$  определены в (8.4.31).

Таким образом, симметризаторы Юнга, построенные по стандартным таблицам  $T_\lambda$ , где  $\lambda \vdash r$ , вообще говоря не образуют набор взаимно ортогональных идемпотентов в  $\mathbb{C}[S_r]$ . В подобных случаях некоторые из симметризаторов  $Y(T_\lambda)$  должны быть модифицированы. Рассмотрим следующую модификацию симметризатора  $Y(T_\lambda)$ :

$$Y(T_\lambda) \rightarrow \tilde{Y}(T_\lambda) = (e - (q \cdot p \cdot q^{-1})) \cdot Y(T_\lambda) = Y(T_\lambda) - Y(T'_\lambda) \cdot q \delta_q, \quad (8.4.35) \quad \text{yng26u}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались соотношениями (8.4.33). Тогда вместо (8.4.34) мы имеем

$$\begin{aligned} Y(T'_\lambda) \cdot \tilde{Y}(T_\lambda) &= Y(T'_\lambda) \cdot (Y(T_\lambda) - Y(T'_\lambda) \cdot q \delta_q) = \\ &= q \cdot p \cdot Y(T_\lambda) \delta_q \alpha_\lambda - \alpha_\lambda Y(T'_\lambda) \cdot q \delta_q = 0. \end{aligned} \quad (8.4.36) \quad \text{yng26z}$$



Модифицированный симметризатор  $\tilde{Y}(T_\lambda)$  пропорционален идемпотенту. Действительно, из определений (8.4.35) и ортогональности  $Y(T_\lambda) \cdot Y(T'_\lambda) = 0$  следует равенство

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(T_\lambda) \cdot \tilde{Y}(T_\lambda) &= (e - (q \cdot p \cdot q^{-1})) \cdot Y(T_\lambda) \cdot (Y(T_\lambda) - Y(T'_\lambda) \cdot q \delta_q) = \\ &= (e - (q \cdot p \cdot q^{-1})) \cdot Y(T_\lambda) \alpha_\lambda = \tilde{Y}(T_\lambda) \alpha_\lambda.\end{aligned}$$

Наконец то, что модифицированный симметризатор  $\tilde{Y}(T_\lambda)$  ортогонален остальным симметризаторам  $Y(T''_\lambda)$ , где  $T''_\lambda \neq (T'_\lambda, T_\lambda)$ , вытекает из первоначальной ортогональности и цепочки равенств

$$Y(T''_\lambda) \cdot \tilde{Y}(T_\lambda) = Y(T''_\lambda) \cdot (Y(T_\lambda) - Y(T'_\lambda) \cdot q \delta_q) = 0 \quad (8.4.37) \quad \text{yng27}$$

В качестве примера снова рассмотрим таблицы, представленные в (8.4.30). Для соответствующих симметризаторов Юнга необходимо сделать единственную модификацию согласно (8.4.35):

$$Y(T_{1,\nu}) \rightarrow \tilde{Y}(T_{1,\nu}) = (e - (24)(35)) \cdot Y(T_{1,\nu}), \quad (8.4.38) \quad \text{yng26}$$

где мы воспользовались тождеством

$$q \cdot p \cdot q^{-1} = (25)(45)(23)(25) = (24)(35),$$

и  $q, p$  определены в (8.4.31). Ортогональность  $Y(T_{5,\nu}) \cdot \tilde{Y}(T_{1,\nu}) = 0$  следует из очевидного тождества  $Y(T_{5,\nu}) \cdot (e - (24)(35)) = 0$ . Соотношения ортогональности  $Y(T_{a,\nu}) \cdot \tilde{Y}(T_{1,\nu}) = 0$  для  $a = 2, 3, 4$  получаются из (8.4.37).

- **Задача 249.** Проверить ортогональность  $Y(T_{a,\nu}) \cdot \tilde{Y}(T_{1,\nu}) = 0$  для  $a = 2, 3, 4, 5$  с помощью явных вычислений (указание: воспользоваться последним равенством в (8.4.35)). Проверить, что оператор (8.4.38) пропорционален идемпотенту.

В общем случае рецепт построения всех примитивных, взаимно ортогональных идемпотентов для  $S_r$  заключается в следующем.

- 1.) Берутся все диаграммы Юнга  $\lambda \vdash r$  и для каждой диаграммы строятся все стандартные таблицы Юнга  $T_{a,\lambda}$  ( $a = 1, \dots, f(\lambda)$ ).
- 2.) По каждой стандартной таблице  $T_{a,\lambda}$  вычисляются горизонтальный симметризатор  $P$ , вертикальный антисимметризатор  $Q$ , а затем симметризатор Юнга  $Y(T_{a,\lambda}) = Q \cdot P$ .
- 3.) Для симметризаторов Юнга  $Y(T_{a,\lambda})$  проверяются соотношения (8.4.32) для  $\nu = \lambda$ . Если некоторые из этих соотношений не выполняются, то подбираются факторы  $y_a \in \mathbb{C}[S_r]$  такие, что для модифицированных симметризаторов

$$\tilde{Y}(T_{a,\lambda}) = y_a \cdot Y(T_{a,\lambda}), \quad (8.4.39) \quad \text{yng30a}$$

соотношения (8.4.32) при  $\nu = \lambda$  будут выполнены.

В качестве недостатка изложенного выше метода построения примитивных ортогональных идемпотентов для алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$  следует отметить необходимость подбора модифицированных симметризаторов Юнга (8.4.39). В следующем разделе мы изложим другой способ построения примитивных ортогональных идемпотентов для алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$ , причем в рамках этого другого метода, диаграммы и стандартные таблицы Юнга будут возникать автоматически естественным образом.

В заключении этого раздела приведем две полезные формулы для вычисления числа  $f_{(\lambda)}$  стандартных таблиц, имеющих форму  $\lambda$ , или, что тоже самое, размерности неприводимого представления  $S_r$ , соответствующего диаграмме  $\lambda$  и реализованного на левых идеалах, порожденных симметризаторами  $Y(T_{a,\lambda})$ . Первая формула для  $f_{(\lambda)}$ , которую мы приводим, была получена сравнительно недавно в 1954 году (Дж.Фрэйм, Дж.Робинсон и Р.Тролл [53]) и называется формулой крюков:

$$f_{(\lambda)} = \frac{r!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{(i,j)}}. \quad (8.4.40) \quad \text{yng30}$$

Здесь в знаменателе стоит произведение по всем клеткам  $(i, j)$  диаграммы  $\lambda$ , а  $h_{(i,j)}$  — длина крюка в диаграмме  $\lambda$  для клетки  $(i, j)$ , то есть число клеток в диаграмме  $\lambda$ , расположенных правее и ниже клетки  $(i, j)$ , включая саму клетку  $(i, j)$ . Вторая формула была получена ранее Фробениусом и имеет вид

$$f_{(\lambda)} = \frac{r!}{(h_1! \dots h_k!)} \prod_{i > j} (h_i - h_j), \quad (8.4.41) \quad \text{yng30f}$$

где  $k$  — число строк в диаграмме  $\lambda$  и  $h_i = h_{i,1}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) длины крюков для клеток в первом столбце  $\lambda$ . В качестве примера вычисления длин крюков рассмотрим диаграмму  $\mu = [6, 5, 3, 3] \vdash 17$  и поставим в каждой ее клетке вместо стандартных номеров  $(1, 2, \dots, 17)$  соответствующие длины крюков:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & 6 & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline & \bullet & & & & \\ \hline & \bullet & & & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 9 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 7 & 6 & 5 & 2 & 1 & \\ \hline 4 & 3 & 2 & & & \\ \hline 3 & 2 & 1 & & & \\ \hline \end{array}. \quad (8.4.42) \quad \text{yng31}$$

Мы не будем здесь доказывать формулы (8.4.40) и (8.4.41), их доказательство можно найти во многих книгах (смотри, например, [51], [52], [54]).

- **Задача 250.** Вычислить по формулам (8.4.40) и (8.4.41) размерность  $f_{(\mu)}$  представления группы  $S_{17}$ , соответствующего диаграмме (8.4.42).

## 8.5 Представления симметрической группы $S_r$ . Подход Окунькова-Вершика.

### 8.5.1 Элементы Юциса-Мерфи и сплетающие операторы в алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ .

В этом разделе мы построим все неприводимые представления симметрической группы, пользуясь подходом, который был предложен в окончательном виде А. Окуньковым и А. Вершиком [55].

Мы будем пользоваться презентацией симметрической группы, в которой образующими  $S_n$  являются соседние транспозиции  $\sigma_k = (k, k+1)$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ), удовлетворяющие соотношениям (8.1.7), (8.1.8) и (8.1.9). Определим в групповой алгебре  $\mathbb{C}[S_n]$  симметрической группы  $S_n$  набор элементов  $\{y_m\}$  ( $m = 1, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \quad y_m = \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_k \cdots \sigma_{m-2} \sigma_{m-1} \sigma_{m-2} \cdots \sigma_k = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \cdots \sigma_{m-1} = (1, m) + (2, m) + \dots + (m-1, m), \quad (8.5.1) \quad \text{sim02} \\ m &= 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Тривиальный элемент  $y_1 = 0$  включен в этот набор для удобства. Операторы  $y_m$  называются элементами Юциса-Мерфи и играют важную роль в теории представлений симметрической группы. Отметим, что элементы Юциса-Мерфи (8.5.1) можно задать с помощью индуктивной процедуры

$$y_1 = 0, \quad y_{m+1} = \sigma_m + \sigma_m \cdot y_m \cdot \sigma_m. \quad (8.5.2) \quad \text{sim02i}$$

Для иллюстрации выпишем несколько первых элементов  $y_m$ :

$$y_2 = \sigma_1, \quad y_3 = \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \quad y_4 = \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \quad \dots \quad (8.5.3) \quad \text{sim02ex}$$

Из определений (8.5.1), (8.5.2) и соотношений кос (8.1.8) следует, что элементы  $y_m$  удовлетворяют следующим тождествам (они понадобятся нам в дальнейшем):

$$y_{m+1} \cdot \sigma_m = \sigma_m \cdot y_m + 1, \quad \sigma_m \cdot y_{m+1} = y_m \cdot \sigma_m + 1, \quad (8.5.4) \quad \text{sim03}$$

$$[y_m, \sigma_i] = 0, \quad m \neq i, i+1. \quad (8.5.5) \quad \text{sim03a}$$

**Утверждение 8.5.1** Операторы Юциса-Мерфи  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  образуют полный набор коммутирующих элементов в  $\mathbb{C}[S_n]$ :

$$[y_i, y_j] = 0, \quad \forall i, j. \quad (8.5.6) \quad \text{sim03y}$$

**Доказательство.** Докажем сначала коммутативность элементов  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Воспользуемся для этого последним представлением из (8.5.1) и для определенности будем считать, что  $j > i$ , тогда

$$\begin{aligned} [y_i, y_j] &= \left[ \sum_{k=1}^{i-1} (k, i), \sum_{m=1}^{j-1} (m, j) \right] = \sum_{k=1}^{i-1} \left[ (k, i), \sum_{m=1}^{j-1} (m, j) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} [(k, i), (k, j) + (i, j)] = \sum_{k=1}^{i-1} \left( [(i, j), (k, i)] + [(k, i), (i, j)] \right) = 0, \end{aligned}$$

где мы учли то, что  $[(k, i), (m, j)] \neq 0$  только, если  $m = k, i$  (для случая  $i < j$ ), и использовали тождество  $(k, i)(k, j) = (i, j)(k, i)$ .

Доказательство полноты набора коммутирующих переменных  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  на данном этапе нетривиально и мы оставим это утверждение без доказательства. ■

- **Задача 251.** Проверить явно, что  $[y_2, y_3] = 0$ ,  $[y_2, y_4] = 0$  и  $[y_3, y_4] = 0$ , пользуясь (8.5.3) и соотношениями (8.1.7) – (8.1.9).

**Определение 8.5.1** Абелева подалгебра  $Y_n \subset \mathbb{C}[S_n]$ , порожденная всеми элементами Юциса-Мерфи  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , называется подалгеброй Гельфанда-Цейтлина.

Отметим, что так как алгебра  $\mathbb{C}[S_n]$  порождается образующими  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}\}$ , которые образуют подалгебру  $\mathbb{C}[S_{n-1}] \subset \mathbb{C}[S_n]$ , и последней образующей  $\sigma_{n-1}$ , то мы имеем естественное включение друг в друга групповых подалгебр  $\mathbb{C}[S_k]$  и соответствующих подалгебр Гельфанда-Цейтлина  $Y_k$  ( $k = 2, \dots, n-1$ ):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}[S_2] & \subset & \mathbb{C}[S_3] & \subset & \dots & \subset & \mathbb{C}[S_{n-1}] & \subset & \mathbb{C}[S_n] \\ \cup & & \cup & & \dots & & \cup & & \cup \\ Y_2 & \subset & Y_3 & \subset & \dots & \subset & Y_{n-1} & \subset & Y_n \end{array} \quad (8.5.7) \quad \text{sim04yy}$$

Определим в алгебре  $\mathbb{C}[S_n]$  сплетающие операторы  $U_k$ , которые будут чрезвычайно важны для нашего дальнейшего рассмотрения:

$$U_k = \sigma_k \cdot y_k - y_k \cdot \sigma_k = y_{k+1} \cdot \sigma_k - \sigma_k \cdot y_{k+1} = \sigma_k(y_k - y_{k+1}) + 1, \quad (8.5.8) \quad \text{sim04}$$

$$k = 1, \dots, n-1.$$

**Утверждение 8.5.2** Для сплетающих операторов  $U_k$  имеют место следующие тождества

$$U_k \cdot \sigma_k = -\sigma_k \cdot U_k, \quad [U_k, \sigma_m] = 0 \quad (|k - m| > 1). \quad (8.5.9) \quad \text{sim05a}$$

Кроме того, коммутационные соотношения сплетающего оператора  $U_k$  с элементами Юциса-Мерфи  $y_m$  имеют вид:

$$\begin{aligned} [U_k, y_m] &= 0 \quad (m \neq k, k+1), \\ U_k \cdot y_k &= y_{k+1} \cdot U_k, \quad U_k \cdot y_{k+1} = y_k \cdot U_k, \end{aligned} \quad (8.5.10) \quad \text{sim05}$$

Наконец, сплетающие операторы  $U_k$  удовлетворяют соотношениям группы кос:

$$U_k \cdot U_{k+1} \cdot U_k = U_{k+1} \cdot U_k \cdot U_{k+1}, \quad (8.5.11) \quad \text{sim06}$$

а квадрат оператора  $U_k$  принадлежит подалгебре  $Y_n$ , то есть выражается в виде функции от элементов  $y_k$  и  $y_{k+1}$ :

$$U_k^2 = (1 + y_{k+1} - y_k)(1 - y_{k+1} + y_k). \quad (8.5.12) \quad \text{sim07}$$

**Доказательство.** Первое соотношение в (8.5.9) получается с помощью (8.1.9) следующим образом

$$U_k \cdot \sigma_k = (\sigma_k \cdot y_k - y_k \cdot \sigma_k) \sigma_k = -\sigma_k(\sigma_k \cdot y_k - y_k \cdot \sigma_k) = -\sigma_k \cdot U_k.$$

Второе соотношение в (8.5.9) и первое в (8.5.10) непосредственно следуют из соотношений локальности (8.1.7) и (8.5.5). Докажем второе соотношение в (8.5.10) (третье

соотношение в (8.5.10) доказывается аналогично). Воспользуемся представлениями (8.5.2), (8.5.8) и коммутативностью (8.5.6):

$$\begin{aligned} y_{k+1} \cdot U_k &= y_{k+1} \cdot (\sigma_k(y_k - y_{k+1}) + 1) = (\sigma_k \cdot y_k + 1)(y_k - y_{k+1}) + y_{k+1} = \\ &= \sigma_k(y_k - y_{k+1})y_k + y_k = U_k \cdot y_k . \end{aligned}$$

Соотношение (8.5.12) получается следующим образом

$$\begin{aligned} U_k \cdot U_k &= (\sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) + 1) \cdot U_k = \sigma_k \cdot U_k \cdot (y_{k+1} - y_k) + U_k = \\ &= (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_k) + 1 = (1 + y_{k+1} - y_k) \cdot (1 - y_{k+1} + y_k) , \end{aligned}$$

где мы воспользовались последним представлением из (8.5.8) и равенствами (8.5.10).

Перейдем теперь к доказательству соотношения кос (8.5.11). Преобразуем сначала правую часть (8.5.11) для чего, учитывая явное выражение (8.5.8) и формулы (8.5.9), (8.5.10), постараемся протащить все элементы Юциса-Мерфи  $y_m$  направо:

$$\begin{aligned} U_{k+1} \cdot U_k \cdot U_{k+1} &= \left( \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + 1 \right) \cdot U_k \cdot U_{k+1} = \\ &= \sigma_{k+1} \cdot U_k \cdot U_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+1}) + U_k \cdot U_{k+1} = \\ &= \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+1}) + \\ &+ \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+1}) + (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+1}) + \\ &+ \sigma_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_k \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+2}) + \\ &+ \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + 1 , \end{aligned} \tag{8.5.13} \quad \text{sim06r}$$

где мы подставили формулу

$$\begin{aligned} U_k \cdot U_{k+1} &= \left( \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) + 1 \right) \cdot U_{k+1} = \sigma_k \cdot U_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) + U_{k+1} = \\ &= \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_{k+1} \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + 1 \end{aligned}$$

Пользуясь этой же формулой, соотношениями (8.5.10), а также последним представлением из (8.5.8), мы получаем для левой части (8.5.11):

$$\begin{aligned} (U_k \cdot U_{k+1}) \cdot U_k &= \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot U_k \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \\ &+ \sigma_k \cdot U_k \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \sigma_{k+1} \cdot U_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + U_k = \\ &= \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \\ &+ \sigma_k \cdot \sigma_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_{k+1} - y_{k+2}) + \\ &+ \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+2}) + \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k \cdot (y_k - y_{k+1}) \cdot (y_k - y_{k+2}) + \\ &+ \sigma_{k+1} \cdot (y_k - y_{k+2}) + 1 , \end{aligned} \tag{8.5.14} \quad \text{sim06le}$$

Сравнивая правые части в (8.5.13) и (8.5.14), мы получаем (8.5.11). ■

**Следствие.** Согласно (8.5.10) действие сплетающего оператора  $U_k$  слева на любую функцию  $f(y_1, \dots, y_n)$  сводится к перестановке двух элементов Юциса-Мерфи  $y_k$  и  $y_{k+1}$ :

$$U_k \cdot f(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = f(y_1, \dots, y_{k+1}, y_k, \dots, y_n) \cdot U_k . \quad (8.5.15) \quad \text{sim03f}$$

Это соотношение для любой симметрической функции  $f_s(y_1, \dots, y_n)$ , с учетом последнего представления в (8.5.8) и коммутативности элементов  $y_m$  переписываются в виде

$$[U_k, f_s(y_1, \dots, y_n)] = 0 \Rightarrow [\sigma_k, f_s(y_1, \dots, y_n)] \cdot (y_k - y_{k+1}) = 0 , \quad \forall k .$$

На самом деле последнее равенство является следствием более сильного утверждения.

**Утверждение 8.5.3** *Любая симметрическая функция  $f_s$  от переменных  $\{y_1, \dots, y_n\}$  принадлежит центру групповой алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$ :*

$$[\sigma_k, f_s(y_1, \dots, y_n)] = 0 , \quad \forall k . \quad (8.5.16) \quad \text{centS}$$

**Доказательство.** Центральность (8.5.16) симметрической функции  $f_s(y_1, \dots, y_n)$  следует из того, что любую такую функцию можно, учитывая симметрию по двум переменным  $y_k$  и  $y_{k+1}$ , записать в виде

$$f_s(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = \tilde{f}(y_1, \dots, y_{k-1}, (y_k \cdot y_{k+1}), (y_k + y_{k+1}), y_{k+2}, \dots, y_n) ,$$

после чего следует воспользоваться соотношениями локальности (8.5.5) и равенствами

$$[\sigma_k, y_k \cdot y_{k+1}] = 0 , \quad [\sigma_k, y_k + y_{k+1}] = 0 ,$$

которые проверяются непосредственно с помощью индуктивной формулы (8.5.2). ■

### 8.5.2 Идемпотенты и спектр операторов Юциса-Мерфи.

Будем теперь искать полный набор примитивных взаимно ортогональных идемпотентов  $e_\alpha$ , для которых выполнялись бы соотношения (8.3.5), (8.3.6), и кроме того эти идемпотенты являлись бы собственными векторами операторов Юциса-Мерфи:

$$y_k \cdot e_\alpha = a_k^{(\alpha)} e_\alpha \quad (a_k^{(\alpha)} \in \mathbb{C}) \quad \forall k . \quad (8.5.17) \quad \text{sim08}$$

Идемпотенты (8.3.13), которые рассматривались в Разделе 8.3 в Примере 2, являются идемпотентами такого типа (сравните (8.5.17) с соотношениями (8.3.14), где  $\sigma_1 = y_2$ ). Построение идемпотентов, удовлетворяющих (8.5.17), эквивалентно тому, что мы ищем в левом регулярном представлении  $\mathbb{C}[S_n]$  базис, в котором операторы  $y_k$  диагонализуются одновременно.

Из формулы (8.5.17) следует коммутативность идемпотентов  $e_\alpha$  и образующих Юциса-Мерфи  $\{y_k\}$ . Действительно, умножим обе части (8.5.17) слева на идемпотент  $e_\beta$ :

$$e_\beta \cdot y_k \cdot e_\alpha = \delta_{\alpha\beta} a_k^{(\alpha)} e_\alpha ,$$

и просуммируем по всем  $\alpha$ . Учитывая (8.3.5), в результате имеем

$$e_\beta \cdot y_k = a_k^{(\beta)} e_\beta . \quad (8.5.18) \quad \text{sim08a}$$

Сравнивая это соотношение с (8.5.17), мы получаем  $[y_k, e_\alpha] = 0$ . Так как элементы Юциса-Мерфи  $\{y_k\}$  образуют полный набор коммутирующих операторов в  $\mathbb{C}[S_n]$  (смотри Утверждение 8.5.1), то идемпотенты  $e_\alpha$ , удовлетворяющие (8.5.17), принадлежат подалгебре Гельфанда-Цейтлина  $Y_n$  и должны строиться как некоторые функции от  $\{y_m\}$ .

**Пример** (продолжение Примера 3 из Раздела 8.3). Рассмотрим три взаимно коммутирующих элемента Юциса-Мерфи в  $\mathbb{C}[S_3]$ :

$$y_1 = 0 , \quad y_2 = \sigma_1 , \quad y_3 = \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 .$$

Подействуем элементами  $y_1, y_2, y_3$  слева на примитивные идемпотенты (8.3.17). Оказывается, что при определенном значении параметра  $\varepsilon$ , а именно для  $\varepsilon = 1/2$ , все идемпотенты (8.3.17) становятся собственными векторами операторов  $y_k$ :

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[3]} &= (0, 1, 2) e_{[3]} , \\ (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[1^3]} &= (0, -1, -2) e_{[1^3]} , \\ (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[2,1]_1} &= (0, 1, -1) e_{[2,1]_1} , \\ (y_1, y_2, y_3) \cdot e_{[2,1]_2} &= (0, -1, 1) e_{[2,1]_2} . \end{aligned} \quad (8.5.19) \quad \text{resun31}$$

Здесь в правых частях в скобках даны собственные значения соответствующих операторов  $y_k$ .

- **Задача 252.** Проверить, что идемпотенты (8.3.17) при  $\varepsilon = 1/2$  выражаются через операторы Юциса-Мерфи:

$$\begin{aligned} e_{[3]} &= \frac{1}{6}(1 + y_2) \cdot (1 + y_3) , \quad e_{[1^3]} = \frac{1}{6}(1 - y_2) \cdot (1 - y_3) , \\ e_{[2,1]_1} &= \frac{1}{6}(2 - y_3) \cdot (1 + y_2) , \quad e_{[2,1]_2} = \frac{1}{6}(1 - y_2) \cdot (2 + y_3) . \end{aligned} \quad (8.5.20) \quad \text{ress3}$$

Рассмотрим теперь следующее размещение целых чисел в верхнем левом углу бесконечной матрицы

0	1	2	3	...
-1	0	1	2	...
-2	-1	0	1	...
-3	-2	-1	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

то есть, на главной диагонали стоят нули, на ближайшей к главной диагонали сверху стоят  $+1$ , на ближайшей к главной диагонали снизу стоят  $-1$ , и так далее. Другими словами клетка с координатами  $(n, m)$ , где  $n$  – номер строки, а  $m$  – номер столбца

имеет *содержание*  $(m-n)$ . Поместим теперь в этот угол возможные диаграммы Юнга с тремя клетками. В результате получаем три диаграммы

$$[3] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad [1^3] = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array}, \quad [2, 1] = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & \\ \hline \end{array}. \quad (8.5.21) \quad \text{resun32}$$

Заметим, что содержание клеток (контент) в этих диаграммах в точности совпадает со спектром коммутирующих операторов  $y_k$  на соответствующих идемпотентах, который приведен в формулах (8.5.19). Однако соответствие между диаграммами Юнга с указанным контентом (8.5.21) и идемпотентами (8.3.17) не является взаимнооднозначным, так как двум разным идемпотентам  $e_{[2,1]_1}$ ,  $e_{[2,1]_2}$  соответствует одна и та же диаграмма  $[2, 1]$  с контентом. Для того, чтобы получить взаимно однозначное соответствие, пронумеруем клетки в диаграммах (8.5.21) так, чтобы номера в клетках возрастали слева направо в каждой строке и сверху вниз в каждом столбце. Диаграммы Юнга с такой нумерацией клеток называются *стандартными таблицами Юнга* (смотри Определение 8.4.2 в Разделе 8.4). В результате получаем четыре стандартные таблицы Юнга с контентом:

$$[3] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad [1^3] = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline 3 & -2 \\ \hline \end{array}, \quad [2, 1]_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & -1 \\ \hline \end{array}, \quad [2, 1]_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & -1 \\ \hline \end{array}, \quad (8.5.22) \quad \text{resun33}$$

которые уже взаимно однозначно соответствуют четырем идемпотентам (8.3.17). Соответствие согласно (8.5.19) устанавливается следующим образом: в таблицах (8.5.22) клетки с номером  $i$  и координатами  $(n, m)$  выглядят как  $\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline m-n \\ \hline \end{array}$  и это означает, что собственное значение оператора  $y_i$  на соответствующем идемпотенте равно  $(m-n)$  (сравните (8.5.19) и (8.5.22)). Таким образом, примитивные идемпотенты (8.3.17) с одной стороны ассоциируются со стандартными таблицами Юнга с тремя клетками и контентом (8.5.22), а с другой стороны, как мы знаем, связаны с неприводимыми представлениями алгебры  $\mathbb{C}[S_3]$  (группы  $S_3$ ). Далее мы продемонстрируем эту связь между стандартными таблицами Юнга, с указанным контентом клеток, и примитивными идемпотентами (неприводимыми представлениями) групповой алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$  для общего случая  $n \geq 2$ .

Итак, согласно (8.5.17) каждый примитивный идемпотент  $e_\alpha$  характеризуется набором своих собственных значений

$$\Lambda^{(\alpha)} = (a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}, \dots, a_n^{(\alpha)}) \in \text{Spec}(y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (8.5.23) \quad \text{sim09}$$

**Утверждение 8.5.4** *Спектр операторов Юциса-Мерфи  $y_j$  для алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$  таков, что*

$$\text{Spec}(y_j) \subset \{\mathbb{Z}_j\} \quad (\forall j = 1, 2, \dots, r), \quad (8.5.24) \quad \text{spec}$$

где  $\mathbb{Z}_j$  обозначает набор целых чисел  $\{1-j, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, j-1\}$ .

**Доказательство.** Мы докажем (8.5.24) по индукции. Из условия (8.1.9) мы имеем для элемента  $y_2 = \sigma_1$  характеристическое тождество:

$$(y_2 - 1)(y_2 + 1) = 0. \quad (8.5.25) \quad \text{spec3}$$



Таким образом,  $\text{Spec}(y_2) = \{-1, +1\}$  и следовательно спектр оператора  $y_2$  удовлетворяет (8.5.24). Допустим, что спектр  $y_{j-1}$  удовлетворяет (8.5.24) для некоторого  $j \geq 3$ . Рассмотрим характеристическое уравнение для элемента  $y_{j-1}$  (сравните с (8.5.25)):

$$\prod_{\alpha} (y_{j-1} - a_{j-1}^{(\alpha)}) = 0 \quad (a_{j-1}^{(\alpha)} \in \text{Spec}(y_{j-1})) . \quad (8.5.26) \quad \text{spec3d}$$

Введем обозначение для функции, стоящей в левой части (8.5.26)

$$f(y_{j-1}) \equiv \prod_{\alpha} (y_{j-1} - a_{j-1}^{(\alpha)}) .$$

Используя сплетающие операторы  $U_j$  и их свойства (8.5.10), (8.5.12), из уравнения (8.5.26) мы получаем тождество

$$0 = U_j \cdot f(y_{j-1}) \cdot U_j = f(y_j) \cdot U_j^2 = f(y_j) \cdot (1 + y_{j-1} - y_j) \cdot (1 - y_{j-1} + y_j) , \quad (8.5.27) \quad \text{spec1}$$

которое означает, что

$$\text{Spec}(y_j) \subset \text{Spec}(y_{j-1}) \cup (\text{Spec}(y_{j-1}) + 1) \cup (\text{Spec}(y_{j-1}) - 1) ,$$

и следовательно доказывает (8.5.24). ■

Пусть  $\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  — возможный спектр образующих  $(y_1, \dots, y_n)$  коммутативной подалгебры  $Y_n$ , который соответствует некоторому примитивному идемпотенту  $e_{\Lambda} \in \mathbb{C}[S_n]$ .

**Утверждение 8.5.5** *Собственные значения соседних операторов Юциса-Мерфи  $y_i$  и  $y_{i+1}$  на одном и том же идемпотенте  $e_{\Lambda}$  не совпадают. То есть,  $a_i \neq a_{i+1}$  для всех  $i = 1, \dots, n-1$ .*

**Доказательство.** Будем доказывать это утверждение от противного. Пусть для некоторого примитивного идемпотента  $e_{\Lambda}$  мы имеем  $a_i = a_{i+1}$ , то есть

$$y_i \cdot e_{\Lambda} = y_{i+1} \cdot e_{\Lambda} = a_i e_{\Lambda} . \quad (8.5.28) \quad \text{sim10}$$

Тогда, пользуясь определением (8.5.8) сплетающего оператора  $U_i$ , мы получаем

$$e_{\Lambda} \cdot U_i \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} \cdot (\sigma_i \cdot (y_i - y_{i+1}) + 1) \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} . \quad (8.5.29) \quad \text{sim11}$$

С другой стороны мы имеем

$$e_{\Lambda} \cdot U_i \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} \cdot (\sigma_i \cdot y_i - y_i \cdot \sigma_i) \cdot e_{\Lambda} = e_{\Lambda} \cdot (\sigma_i \cdot a_i - a_i \cdot \sigma_i) \cdot e_{\Lambda} = 0 .$$

Сравнивая это равенство с (8.5.29), мы видим, что в предположении одновременной диагонализуемости всех образующих  $y_k$  (то есть при выполнении соотношений (8.5.18)), равенство (8.5.28) может быть справедливым только для  $e_{\Lambda} = 0$ . ■

Рассмотрим подалгебру  $\mathbb{C}[\hat{S}_2]$  в алгебре  $\mathbb{C}[S_n]$  с образующими  $y_i, y_{i+1}$  и  $\sigma_i$  (для фиксированного  $i \leq n$ ) и структурными соотношениями (8.1.9), (8.5.4) и (8.5.6):

$$\sigma_i^2 = 1, \quad \sigma_i \cdot y_{i+1} = y_i \cdot \sigma_i + 1, \quad y_i \cdot y_{i+1} = y_{i+1} \cdot y_i.$$

Исследуем для этой подалгебры все возможные неприводимые представления. Пусть идемпотент  $e_\Lambda$  является общим собственным вектором для  $y_i, y_{i+1}$ :  $y_i \cdot e_\Lambda = a_i e_\Lambda$ ,  $y_{i+1} \cdot e_\Lambda = a_{i+1} e_\Lambda$ . Тогда, левое действие образующих  $\mathbb{C}[\hat{S}_2]$  в базисе  $v_1 = e_\Lambda, v_2 = \sigma_i \cdot e_\Lambda$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_i \cdot (v_1, v_2) &= (v_2, v_1), \quad y_i \cdot (v_1, v_2) = (a_i v_1, a_{i+1} v_2 - v_1), \\ y_{i+1} \cdot (v_1, v_2) &= (a_{i+1} v_1, a_i v_2 + v_1), \end{aligned}$$

и согласно стандартному соглашению (2.2.33) мы получаем двумерное представление  $\rho$  для образующих  $\mathbb{C}[\hat{S}_2]$ :

$$\rho(\sigma_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(y_i) = \begin{pmatrix} a_i & -1 \\ 0 & a_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \rho(y_{i+1}) = \begin{pmatrix} a_{i+1} & 1 \\ 0 & a_i \end{pmatrix}. \quad (8.5.30) \quad \text{abmw1a}$$

Матрицы  $\rho(y_i), \rho(y_{i+1})$  (8.5.30) могут быть одновременно диагонализированы с помощью преобразования эквивалентности  $y \rightarrow V^{-1} \cdot y \cdot V$ , где

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_i - a_{i+1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{a_i - a_{i+1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как результат мы получаем следующее эквивалентное матричное представление

$$\tilde{\rho}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a_i - a_{i+1}} & 1 - \frac{1}{(a_i - a_{i+1})^2} \\ 1 & \frac{1}{a_i - a_{i+1}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}(y_i) = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho}(y_{i+1}) = \begin{pmatrix} a_{i+1} & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix}, \quad (8.5.31) \quad \text{ah1}$$

которое реализуется в новом базисе

$$(v_1, v_2) V = \left( v_1, \frac{v_1}{a_i - a_{i+1}} + v_2 \right) \equiv (v_\Lambda, v_{\Lambda'}), \quad (8.5.32) \quad \text{ah2}$$

где  $a_i \neq a_{i+1}$ , иначе матрицы  $y_i, y_{i+1}$  не являются диагонализуемыми (смотри Утверждение 8.5.5). Заметим, что только для случая  $a_{i+1} = a_i \pm 1$  двумерное представление (8.5.31) приводимо и разлагается в два одномерных представления, для которых  $\tilde{\rho}(\sigma_i) = \pm 1$ , соответственно. Все результаты, полученные выше, мы просуммируем в виде следующего утверждения [55].

**Теорема 8.5.6** Пусть

$$\Lambda = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \text{Спец}(y_1, \dots, y_n), \quad (8.5.33) \quad \text{comb}$$

— возможный спектр образующих  $(y_1, \dots, y_n)$  коммутативной подалгебры  $Y_n$ , который соответствует примитивному идемпотенту  $e_\Lambda \in \mathbb{C}[S_n]$ . Тогда,  $a_i \in \mathbb{Z}_i$

(8.5.24) и

- (1)  $a_i \neq a_{i+1}$  для всех  $i < n$ ;
- (2) если  $a_{i+1} = a_i \pm 1$ , то  $\sigma_i \cdot e_\Lambda = \pm e_\Lambda$ ;
- (3) если  $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$ , то

$$\Lambda' = (a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) \in \text{Спец}(y_1, \dots, y_n), \quad (8.5.34) \quad \text{lam}$$

и левое действие элементов  $\sigma_i, y_i, y_{i+1}$  в базисе  $(v_\Lambda, v_{\Lambda'})$ , заданном соотношениями

$$v_\Lambda = e_\Lambda, \quad v_{\Lambda'} = \sigma_i e_\Lambda + \frac{1}{a_i - a_{i+1}} e_\Lambda,$$

определяется матричным представлением (8.5.31).

**Следствие.** Комбинации  $(\dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots) = (\dots, a, a \pm 1, a, \dots)$  не могут возникать в спектре (8.5.33), так как согласно условию (2) Теоремы 8.5.6 в этом случае реализуются одномерные представления  $\sigma_i = \pm 1$  и  $\sigma_{i+1} = \mp 1$ , что противоречит соотношению кос (8.1.8).

Отметим, что идемпотенты  $e_\Lambda$  и  $e_{\Lambda'}$ , соответствующие спектрам (8.5.33) и (8.5.34) и удовлетворяющие условию (3) из Теоремы 8.5.6, связаны преобразованием подобия

$$U_i \cdot e_\Lambda = e_{\Lambda'} \cdot U_i, \quad (8.5.35) \quad \text{UeeU}$$

где  $U_i$  – сплетающие операторы, заданные в (8.5.8).

**Теорема 8.5.7** [55]. Рассмотрим набор  $\Lambda = (a_1, \dots, a_n)$  чисел  $a_i \in \mathbb{Z}_i$  (8.5.24). Тогда  $\Lambda \in \text{Спец}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , если и только если  $\Lambda$  удовлетворяет следующим условиям ( $z \in \mathbb{Z}$ ):

- (1)  $a_1 = 0$ ;
  - (2)  $a_r = z \Rightarrow \{a_r + 1, a_r - 1\} \cap \{a_1, \dots, a_{r-1}\} \neq \emptyset \quad \forall r > 1, \quad z \neq 0;$
  - (3)  $a_i = a_j = z \quad (i < j) \Rightarrow \{z + 1, z - 1\} \subset \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}.$
- (8.5.36) con1

**Доказательство.** Условие (1) следует из тождества  $y_1 = 0$ .

(2) Согласно пункту (3) Теоремы 8.5.6 спектр (8.5.33) можно трансформировать следующим образом. Если  $a_r \neq a_{r-1} \pm 1$ , то  $a_r$  и  $a_{r-1}$  можно переставить в  $\Lambda$  и получить новый допустимый спектр

$$\Lambda' = (a_1, \dots, a_{r-2}, a_r, a_{r-1}, \dots, a_n) \in \text{Спец}(y_1, \dots, y_n).$$

Далее, если  $a_r \neq a_{r-2} \pm 1$ , то  $a_r$  и  $a_{r-2}$  можно переставить в  $\Lambda'$  и получить  $\Lambda'' = (\dots, a_r, a_{r-2}, a_{r-1}, \dots) \in \text{Спец}(y_1, \dots)$ . Если среди собственных значений  $\{a_1, \dots, a_{r-1}\}$  не содержатся собственные значения  $(a_r + 1)$ , или  $(a_r - 1)$ , то, пользуясь вышеизложенной процедурой, собственное значение  $a_r = z \neq 0$  можно переместить в допустимом спектре на первое место, что противоречит условию (1).

(3) Без ограничения общности можно считать, что среди  $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$  нет собственных значений, равных  $z$ . Рассуждение, аналогичное использованному выше при

доказательстве условия (2), приводит нас к заключению, что одно из собственных значений  $\{z + 1, z - 1\}$  обязательно содержится среди  $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$ , иначе  $a_j = z$  можно было бы переместить на место  $a_{i+1}$  и это противоречило бы условию (1) Теоремы 8.5.6. Пусть  $(z - 1) \in \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$ , тогда нам необходимо доказать, что среди  $\{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$  обязательно присутствует и собственное значение  $(z + 1)$  (случай, когда сначала мы имеем  $(z + 1) \in \{a_{i+1}, \dots, a_{j-1}\}$  рассматривается аналогично). Данное утверждение может быть доказано по индукции, если воспользоваться условиями (1) и (3) Теоремы 8.5.6, а также Следствием к этой Теореме. Мы оставляем читателю довести это достаточно простое, но очень длинное, доказательство до конца в качестве самостоятельного Упражнения (смотри доказательство аналогичной Теоремы 5.1 в [55]). ■

Каждая стандартная таблица Юнга  $T_{\nu_n}$  с  $n$  клетками определяет возрастающий набор стандартных таблиц, вложенных друг в друга:  $T_{\nu_1} \subset T_{\nu_2} \subset \dots \subset T_{\nu_n}$  (смотри Замечание 1 в Разделе 8.4). Припишем каждой клетке с координатами  $(k, m)$  в стандартной таблице Юнга число  $(m - k)$ , как это сделано, например, для таблицы:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 1 & 0 & 2 & 1 \\
 \hline
 3 & -1 & 5 & 0 \\
 \hline
 7 & -2 & & \\
 \hline
 \end{array}
 &
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 4 & 2 & 6 & 3 \\
 \hline
 8 & 1 & & \\
 \hline
 & & & \\
 \hline
 \end{array}
 &
 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{m} \\
 \downarrow k
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (8.5.37) \quad 111$$

В общем случае для таблицы  $T_{\nu_n}$   $i$ -ая клетка  $T_{\nu_i}/T_{\nu_{i-1}}$  с координатами  $(k, m)$  выглядит следующим образом:  $\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline (m-k) \\ \hline \end{array}$ , при этом числа  $a_i = (m - k)$  называются содержанием (или контентом) клетки с номером  $i$ . Таким образом, с каждой стандартной таблицей Юнга  $T_{\nu_n}$ , имеющей  $n$  клеток, мы связываем последовательность чисел  $(a_1, \dots, a_n)$  такую, что  $a_i = (m - k)$ , если  $i$ -ая клетка имеет координаты  $(k, m)$ . Теперь можно утверждать, что наборам допустимых собственных значений (8.5.33), удовлетворяющим условиям Теорем 8.5.6 и 8.5.7, однозначно соответствуют стандартные таблицы Юнга  $T_{\nu_n}$  с  $n$  клетками, в которых проставлено их содержание.

Например, для стандартной таблицы (8.5.37) соответствующий набор чисел имеет вид  $(a_1, \dots, a_8) = (0, 1, -1, 2, 0, 3, -2, 1)$ . Заметим, что этот набор удовлетворяет всем условиям Теорем 8.5.6 и 8.5.7 и следовательно

$$(0, 1, -1, 2, 0, 3, -2, 1) \in \text{Spec}(y_1, \dots, y_8) .$$

Окончательно наше утверждение может быть сформулировано следующим образом (Утверждение 5.3 из [55]):

**Утверждение 8.5.8** *Имеется взаимно однозначное соответствие между множеством  $\mathcal{T}(n)$  стандартных таблиц Юнга с  $n$  клетками (в которых указано их содержание) и множеством  $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$ .*

### 8.5.3 Граф Юнга и явное построение идемпотентов $e_\alpha$

Представим теперь результаты, изложенные в предыдущем подпункте, в несколько иной графической форме. А именно, представим эти результаты в форме графа Юнга. По определению граф Юнга — это граф с диаграммы Юнга в качестве вершин, (напомним, что диаграммы Юнга с  $n$  клетками ассоциируются с неприводимыми представлениями  $S_n$ ), и ребрами (которые указывают правило ветвления неприводимых представлений). На ребрах ставятся индексы, которые соответствуют кратностям ветвления представлений. В нашем случае в силу невырожденности спектра операторов Юциса-Мерфи  $y_i$  (смотри Утверждение 8.5.1) кратности равны 1. Вместо кратностей мы поместим на ребрах графа Юнга, которые идут к диаграммам Юнга  $\nu_i$  с  $i$  клетками, собственные значения  $a_i$  элементов Юциса-Мерфи  $y_i$  так, чтобы содержанием последней  $i$ -ой клетки соответствующей диаграммы  $\nu_i$  в вершине равнялось  $a_i$ . Такой граф Юнга мы будем называть раскрашенным. В результате вдоль пути из вершины  $\emptyset$  графа Юнга к некоторой другой вершине (диаграмме Юнга  $\nu_n$  с  $n$  клетками) возникает последовательность индексов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , стоящих на ребрах, и эта последовательность дает содержания (контенты) клеток таблицы Юнга  $T_{\nu_n}$ , имеющей форму диаграммы Юнга  $\nu_n$ . В качестве примера рассмотрим раскрашенный граф Юнга для группы  $S_4$ , который имеет вид:

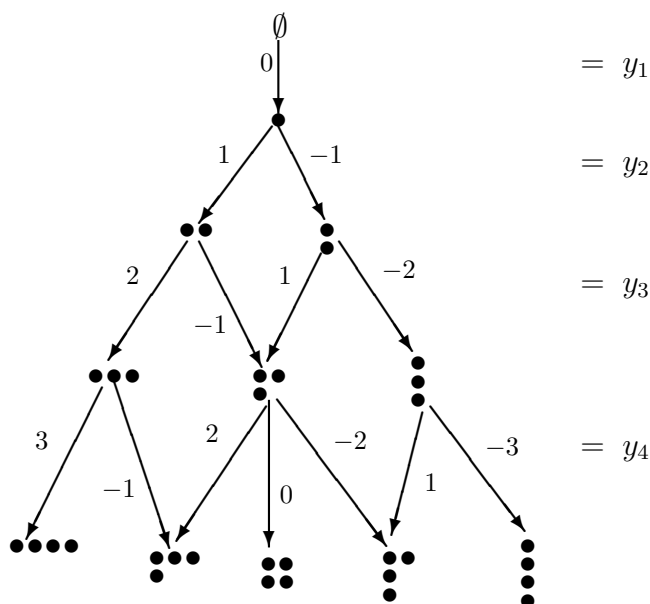


Рис. 26: Раскрашенный граф Юнга для  $S_4$ .

Путь

$$\{\emptyset \xrightarrow{0} \bullet \xrightarrow{1} \bullet\bullet \xrightarrow{-1} \bullet\bullet \xrightarrow{0} \bullet\bullet\bullet\} , \quad (8.5.38) \quad \text{way4}$$

на рисунке 26 соответствует таблице Юнга

$$T_{\nu_4} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} , \quad (8.5.39) \quad Tnu4$$

то есть, форма таблицы (диаграмма Юнга  $\nu_4$ ) дается формой последней вершины пути, в то время как номера клеток таблицы показывают в какой последовательности клетки  $\bullet$  появляются в вершинах вдоль рассматриваемого пути. Контент клеток соответствует последовательности  $(a_1, \dots, a_4) = (0, 1, -1, 0)$  и дается индексами на ребрах пути. Числа  $(a_1, \dots, a_4) = (0, 1, -1, 0)$  являются собственными значениями элементов Юциса-Мерфи  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ , полученными в результате их действия на примитивный идемпотент  $e(T_{\nu_4})$ .

Таким образом, мы ассоциировали стандартные таблицы Юнга  $T_{\nu_n}$ , имеющие форму диаграммы Юнга с  $n$  клетками, во-первых, с элементами множества всех допустимых спектров  $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$  или, что тоже самое, с примитивными ортогональными идемпотентами в алгебре  $\mathbb{C}[S_n]$ , и, во-вторых, с путями в графе Юнга. При этом соответствие устанавливается по следующим правилам. Путь, который мы ассоциируем со стандартной таблицей Юнга  $T_{\nu_n}$ , начинается из верхней вершины  $\emptyset$  и заканчивается в вершине, пронумерованной диаграммой Юнга  $\nu_n$ , имеющей ту же форму, что и таблица Юнга  $T_{\nu_n}$ . Обозначим через  $X(n)$  множество всех путей длины  $n$ , которые начинаются из  $\emptyset$  идут вниз и заканчиваются диаграммой Юнга с  $n$  клетками (множество путей с  $n$  ребрами на раскрашенном графе Юнга).

**Утверждение 8.5.9** *Имеется взаимно однозначное соответствие между множеством  $\mathcal{T}(n)$  стандартных таблиц с  $n$  клетками, в которых указано содержание, множеством  $\text{Spec}(y_1, \dots, y_n)$  и множеством  $X(n)$  всех путей длины  $n$  в раскрашенном графе Юнга.*

Согласно рассмотрению, данному в Разделе 8.4, размерность неприводимого представления алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$  (группы  $S_n$ ), которое соответствует диаграмме Юнга  $\nu_n$ , равна числу стандартных таблиц  $T_{\nu_n}$ , имеющих форму  $\nu_n$ , или как мы только что продемонстрировали, числу путей длины  $n$  в графе Юнга, которые ведут к этой диаграмме из вершины  $\emptyset$ . Это число дается формулами (8.4.40) и (8.4.41), которые мы привели в конце Раздела 8.4.

Так как раскрашенный граф Юнга для группы  $S_n$  полностью нами описан и может быть явно построен для любого фиксированного  $n$ , то, как мы сейчас покажем, мы можем вывести явные выражения (в терминах элементов Юциса-Мерфи  $y_k$ ) для всех ортогональных примитивных идемпотентов алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$ , используя простую индуктивную процедуру.

Рассмотрим диаграмму Юнга  $\lambda_n = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2 - n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k - n_{k-1}}]$  с  $n_k$  рядами и  $n$  клетками:

$$n = \sum_{i=1}^k (n_i - n_{i-1}) \lambda_{(i)},$$

где  $n_0 = 0$ . Таким образом, первые  $n_1$  рядов в диаграмме  $\lambda_n$  имеют длину  $\lambda_{(1)}$ , следующие  $(n_2 - n_1)$  рядов имеют длину  $\lambda_{(2)}$  и так далее, и наконец последние  $(n_k - n_{k-1})$  рядов имеют длину  $\lambda_{(k)}$ . Графически такая диаграмма изображается так, как показано на Рис. 27, где  $(n_i, \lambda_{(i)})$  координаты клеток, соответствующие углам диаграммы  $\lambda_n$ .

Рассмотрим любую стандартную таблицу Юнга  $T_{\lambda_n}$ , имеющую форму диаграммы, изображенной на Рис. 27. Пусть нам известен примитивный идемпотент  $e(T_{\lambda_n}) \in$

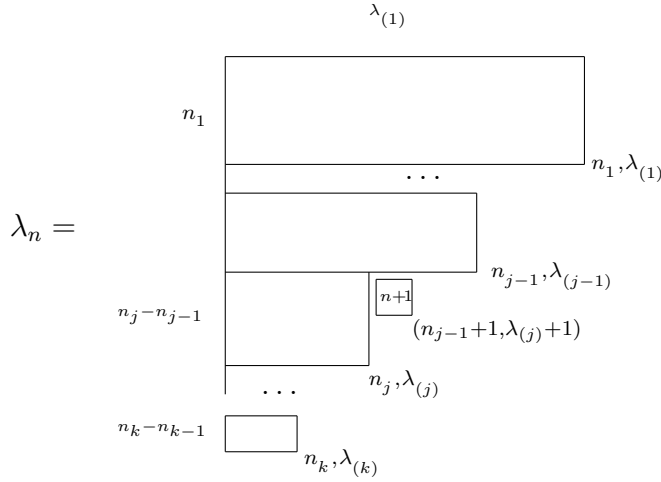


Рис. 27: Диаграмма Юнга  $\lambda_n = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2-n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k-n_{k-1}}]$  с добавленной  $(n+1)$ -ой клеткой, имеющей координаты  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$ .

$\mathbb{C}[S_n] \subset \mathbb{C}[S_{n+1}]$ , который соответствует таблице  $T_{\lambda_n}$  и такой, что

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot e(T_{\lambda_n}) = (0, a_2, \dots, a_n) e(T_{\lambda_n}), \quad (8.5.40) \quad \text{pij10}$$

где  $(0, a_2, \dots, a_n)$  — содержания клеток таблицы  $T_{\lambda_n}$ . Принимая во внимание правило ветвления, которое следует из раскрашенного графа Юнга для  $S_{n+1}$ , мы заключаем, что для оператора  $e(T_{\lambda_n})$ , рассматриваемого уже как элемент алгебры  $\mathbb{C}[S_{n+1}]$ , имеет место следующее тождество

$$e(T_{\lambda_n}) \cdot \prod_{r=1}^{k+1} (y_{n+1} - a_{n+1}^{(r)}) = 0, \quad (8.5.41) \quad \text{pij01}$$

где  $a_{n+1}^{(r)} = (\lambda_{(r)} - n_{r-1})$  и мы фиксируем  $\lambda_{(k+1)} = n_0 = 0$ . Действительно, в раскрашенном графе Юнга для  $S_{n+1}$  из вершины с диаграммой  $\lambda_n$ , изображенной на Рис.27, могут исходить только ребра с индексами  $a_{n+1}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, k+1$ ), которые являются содержанием возможных новых клеток с координатами  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$  ( $j = 1, \dots, k+1$ ), смотри рисунок 27. Это означает, что идемпотент  $e(T_{\lambda_n})$  определяет подпространство регулярного представления, на котором элемент Юиса-Мерфи  $y_{n+1}$  может иметь только собственные значения  $a_{n+1}^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, k+1$ ). Этот факт и зафиксирован в виде тождества (8.5.41). Пусть новая стандартная таблица  $T_{j, \lambda_{n+1}}$  получается добавлением к таблице  $T_{\lambda_n}$ , имеющей форму диаграммы  $\lambda_n$ , новой  $(n+1)$ -ой клетки с координатами  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$ , смотри Рис.27.

**Утверждение 8.5.10** *Примитивный ортогональный идемпотент  $e(T_{j, \lambda_{n+1}})$  в алгебре  $\mathbb{C}[S_{n+1}]$ , соответствующий таблице  $T_{j, \lambda_{n+1}}$ , имеет вид*

$$e(T_{j, \lambda_{n+1}}) = e(T_{\lambda_n}) \cdot \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{k+1} \frac{(y_{n+1} - a_{n+1}^{(r)})}{(a_{n+1}^{(j)} - a_{n+1}^{(r)})}. \quad (8.5.42) \quad \text{pij}$$

**Доказательство.** В силу тождества (8.5.41) для оператора (8.5.42) мы получаем

$$y_{n+1} \cdot e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}) = a_{n+1}^{(j)} e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}), \quad (8.5.43) \quad \text{pij06}$$

что в соответствии с (8.5.40) дает

$$(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) \cdot e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}) = (0, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}^{(j)}) e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}})$$

Это равенство и соотношение (8.5.43) согласуется с тем, что  $(n+1)$ -ая клетка в  $\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}$  имеет координаты  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$  и ее контент соответственно равен  $a_{n+1}^{(j)} = \lambda_{(j)} - n_{j-1}$ . Из равенства (8.5.43) с учетом соотношения  $[e(\mathbb{T}_{\lambda_n})]^2 = e(\mathbb{T}_{\lambda_n})$  мы получаем, что оператор (8.5.42) действительно является идемпотентом

$$e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}) \cdot e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}) = e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}), \quad e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}) \cdot e(\mathbb{T}_{j', \lambda_{n+1}}) = 0 \quad (j \neq j'),$$

где таблица  $\mathbb{T}_{j', \lambda_{n+1}}$  также получается из таблицы  $\mathbb{T}_{\lambda_n}$  добавлением новой  $(n+1)$ -ой клетки, но с другими координатами  $(n_{j'-1} + 1, \lambda_{(j')} + 1)$ . Кроме того для идемпотентов (8.5.42) мы имеем спектральное разложение (соотношение полноты):

$$\sum_j e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}) = e(\mathbb{T}_{\lambda_n}), \quad (8.5.44) \quad \text{pij07}$$

в полном соответствии с правилом ветвления представлений. ■

Используя формулу (8.5.42) и соглашение  $e(\boxed{1}) = 1$  мы можем теперь шаг за шагом вывести все примитивные взаимно ортогональные идемпотенты.

**Пример.** Построим с помощью указанной выше процедуры идемпотент, соответствующий стандартной таблице  $T_{\nu_4}$ , представленной в (8.5.39). Будем двигаться на графе Юнга (Рис. 26) вдоль пути (8.5.38), который соответствует таблице  $T_{\nu_4}$ . Первый шаг  $\{\emptyset \xrightarrow{0} \bullet\}$  — тривиален. На втором шаге к клетке  $\boxed{1}$  мы добавляем вторую клетку  $\boxed{2}$ . Это можно сделать двумя возможными способами, как показано звездочками на рисунке

$$\begin{array}{c} \boxed{1} * \\ * \end{array}$$

поэтому аналог формулы (8.5.41) имеет вид

$$e(\boxed{1}) \cdot (y_2 - 1) \cdot (y_2 + 1) = 0,$$

и согласно (8.5.42) мы имеем два идемпотента для  $\mathbb{C}[S_2]$  (сравните с (8.3.13))

$$e(\boxed{1 \mid 2}) = \frac{(1 + y_2)}{2}, \quad e\left(\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline 2 \end{array}\right) = \frac{(1 - y_2)}{2}, \quad (8.5.45) \quad \text{pij02}$$

Вторая клетка на втором шаге  $\{\bullet \xrightarrow{1} \bullet \bullet\}$  в (8.5.38) стоит в одном ряду с первой, поэтому ее контент равен  $+1$  и соответствующий идемпотент дается оператором  $e(\boxed{1 \mid 2})$



из (8.5.45). На третьем шаге клетка с номером 3 ставится на одном из двух возможных мест (как показано звездами)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} *$$

поэтому аналог формулы (8.5.41) имеет вид

$$e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}\right) \cdot (y_3 - 2) \cdot (y_3 + 1) = 0 ,$$

и согласно (8.5.42) мы снова имеем два идемпотента (сравните с  $e_{[2,1]}$  и  $e_{[3]}$  из (8.5.20))

$$e\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 3 & & \end{array}\right) = e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}\right) \cdot \frac{(y_3 - 2)}{(-1 - 2)} = \frac{(1 + y_2)}{2} \cdot \frac{(2 - y_3)}{3} , \quad (8.5.46) \quad 3\text{idem}$$

$$e\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}\right) = e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}\right) \cdot \frac{(y_3 + 1)}{(2 + 1)} = \frac{(1 + y_2)}{2} \cdot \frac{(1 + y_3)}{3} . \quad (8.5.47) \quad 2\text{idem}$$

Третья клетка на третьем шаге  $\{\bullet\bullet \xrightarrow{-1} \bullet\bullet\}$  в (8.5.38) становится так, что следующий индепотент должен быть выбран в виде (8.5.46). Наконец на 4-ом шаге клетка с номером 4 может возникнуть в одном из 3-х мест

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & * \\ \hline \end{array} * ,$$

поэтому аналог формулы (8.5.41) имеет вид

$$e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}\right) \cdot y_4 \cdot (y_4 - 2) \cdot (y_4 + 2) = 0 .$$

Соответственно мы имеем три идемпотента (с учетом (8.5.46))

$$\begin{aligned} e\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \end{array}\right) &= e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}\right) \cdot \frac{y_4 \cdot (y_4 + 2)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{6 \cdot 8} (1 + y_2) \cdot (2 - y_3) \cdot y_4 \cdot (y_4 + 2) , \\ e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) &= e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}\right) \cdot \frac{y_4 \cdot (y_4 - 2)}{2 \cdot (-2 - 2)} = \frac{1}{6 \cdot 8} (1 + y_2) \cdot (2 - y_3) \cdot y_4 \cdot (2 - y_4) , \\ e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) &= e\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}\right) \cdot \frac{(y_4 + 2) \cdot (y_4 - 2)}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{6 \cdot 4} (1 + y_2) \cdot (2 - y_3) \cdot (2 + y_4) \cdot (2 - y_4) , \end{aligned} \quad (8.5.48) \quad 4\text{idem}$$

Четвертая клетка на последнем шаге  $\{\bullet\bullet \xrightarrow{0} \bullet\bullet\}$  в (8.5.38) занимает такое место, что таблица  $T_{\nu_4}$  из (8.5.39) соответствует идемпотенту (8.5.48).

- **Задача 253.** Доказать, что полный симметризатор  $e([n])$  и антисимметризатор  $e([1^n])$  для алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$  записываются в виде (сравните с операторами  $e([3])$  и  $e([1^3])$  из (8.5.20))

$$\begin{aligned} e([n]) &= \frac{1}{n!} (1 + y_2) \cdot (1 + y_3) \cdots (1 + y_n) , \\ e([1^n]) &= \frac{1}{n!} (1 - y_2) \cdot (1 - y_3) \cdots (1 - y_n) . \end{aligned}$$

## 8.6 Дуальность Шура-Вейля. Формула Вейля для размерностей неприводимых представлений $SL(N)$ .

Напомним, что представление  $\mathbf{s}$  алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$ , заданное в (8.2.7), действует в пространстве  $V_N^{\otimes r}$ , где  $V_N = \mathbb{C}^N$  – пространство определяющего представления  $T$  группы  $SL(N)$ . Пусть  $\lambda \vdash r$  – разбиение числа  $r$  (диаграмма Юнга с  $r$  клетками). Каждой такой диаграмме Юнга  $\lambda$  соответствует набор стандартных таблиц Юнга  $T_{a,\lambda}$ , ( $a = 1, \dots, f(\lambda)$ ), где число  $f(\lambda)$  дается формулами (8.4.40), (8.4.41). По каждой стандартной таблице строится примитивный идемпотент  $e(T_{a,\lambda}) \in \mathbb{C}[S_r]$ , который порождает пространство неприводимого подпредставления  $\rho_a$  алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$  в ее в регулярном представлении. Все представления  $\rho_a$  ( $a = 1, \dots, f(\lambda)$ ) – эквивалентны друг-другу. С другой стороны, операторы  $\mathbf{s}(e(T_{a,\lambda}))$  действуют как проектора в пространстве  $V_N^{\otimes r}$  тензорного произведения представлений  $T^{\otimes r}$  группы  $SL(N)$  и выделяют в этом пространстве подпространства  $V^{(\lambda)} = \mathbf{s}(e(T_{a,\lambda})) \cdot V_N^{\otimes r}$  неприводимых представлений  $T_a^{(\lambda)}$  группы  $SL(N)$ . Опять же все неприводимые представления  $T_a^{(\lambda)}$  группы  $SL(N)$  для всех  $a$  оказываются эквивалентными  $T_a^{(\lambda)} \equiv T^{(\lambda)}$ . Данное взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями алгебры  $\mathbb{C}[S_r]$  (группы  $S_r$ ) и неприводимыми представлениями группы  $SL(N)$ , действующей в пространстве  $V_N^{\otimes r}$ , называется *дуальностью Шура-Вейля*.

Итак, дуальность Шура-Вейля между симметрической группой  $S_r$  и матричной группой  $SL(N)$  выражается следующим разложением

$$V_N^{\otimes r} = \bigoplus_{\lambda \vdash r} \mathcal{R}_\lambda \otimes V^{(\lambda)},$$

где  $\lambda \vdash r$  – разбиение числа  $r$  (диаграмма Юнга с  $r$  клетками),  $\mathcal{R}_\lambda$  – пространство неприводимого представления группы  $S_r$ , которое соответствует диаграмме  $\lambda$  (базисные элементы в пространстве  $\mathcal{R}_\lambda$  этого представления нумеруются стандартными таблицами, имеющими форму  $\lambda$ ),  $V^{(\lambda)}$  – пространство неприводимого представления группы  $SL(N)$ , соответствующее диаграмме Юнга  $\lambda$ . Существенно, что действие на  $V_N^{\otimes r}$  группы  $S_r$  в представлении (8.2.7) коммутирует с действием на  $V_N^{\otimes r}$  группы  $SL(N)$  в представлении  $T^{\otimes r}$ . В этом случае говорят, что в пространстве  $V_N^{\otimes r}$  группа  $S_r$  *централизует* группу  $SL(N)$  и наоборот, группа  $SL(N)$  *централизует* группу  $S_r$ .

Определим операцию  $\text{Tr}_{(m)}$  – взятия следа в пространстве  $V_N$ , которое находится на  $m$ -ом месте в произведении  $V_N^{\otimes n} = V_N \otimes \dots \otimes V_N$ . Полный след в пространстве  $V_N^{\otimes n}$  определяется как последовательное взятие следов во всех пространствах

$$\text{Tr} = \text{Tr}_{(1)} \text{Tr}_{(2)} \dots \text{Tr}_{(n)}. \quad (8.6.1) \quad \text{map0}$$

Операцию взятия следа  $\text{Tr}_{(n)}$  можно рассматривать как линейное отображение из алгебры  $\mathbb{C}[S_n]$  в алгебру  $\mathbb{C}[S_{n-1}]$  элементы которых заданы в соответствующих матричных представлениях  $\mathbf{s}$ , смотри (8.2.7). В частности мы имеем ( $X, Y \in \mathbb{C}[S_{n-1}]$  в представлении  $\mathbf{s}$ ):

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(n)}(X) &= X N, \quad \text{Tr}_{(n)}(X Z Y) = X \text{Tr}_{(n)}(Z) Y, \\ \text{Tr}_{(n)}(\mathbf{s}(\sigma_{n-1}) \cdot X \cdot \mathbf{s}(\sigma_{n-1})) &= \text{Tr}_{(n)}(X), \quad \text{Tr}_{(n)}(\mathbf{s}(\sigma_{n-1})) = I_N^{\otimes(n-1)}, \end{aligned} \quad (8.6.2) \quad \text{map}$$

Из соотношений (8.5.4) получаем

$$(y_{n+1} - \tau)\sigma_n = \sigma_n(y_n - \tau) + 1 \quad (8.6.3) \quad \text{dimL01}$$

где  $\tau$  – произвольный параметр. Перепишем (8.6.3) в виде

$$\sigma_n \frac{1}{(y_n - \tau)} = \frac{1}{(y_{n+1} - \tau)} \sigma_n + \frac{1}{(y_n - \tau)(y_{n+1} - \tau)} \Rightarrow \quad (8.6.4) \quad \text{dimL02}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n \frac{1}{(y_n - \tau)} \sigma_n &= \frac{1}{(y_{n+1} - \tau)} + \frac{1}{(y_n - \tau)} \left( \frac{1}{(y_{n+1} - \tau)} \sigma_n \right) = \\ &= \frac{1}{(y_{n+1} - \tau)} + \frac{1}{(y_n - \tau)} \sigma_n \frac{1}{(y_n - \tau)} - \frac{1}{(y_n - \tau)^2 (y_{n+1} - \tau)} \end{aligned} \quad (8.6.5) \quad \text{dimL03}$$

Рассмотрим образ соотношения (8.6.5) в матричном представлении  $\mathbf{s}$  и возьмем след  $\text{Tr}_{(n+1)}$  от левой и правой частей равенства (8.6.5). Тогда с учетом (8.6.2) мы получаем уравнение

$$X_n(\tau) = \left( 1 - \frac{1}{(y_n - \tau)^2} \right) \cdot X_{n+1}(\tau), \quad (8.6.6) \quad \text{dimL04}$$

где

$$X_n(\tau) = \text{Tr}_{(n)} \left( \frac{1}{(y_n - \tau)} \right) - 1, \quad X_1(\tau) = -\frac{N}{\tau} - 1.$$

Здесь и далее мы опускаем знак представления  $\mathbf{s}$  для упрощения формул. Уравнение (8.6.6) легко решается и мы получаем

$$1 + \text{Tr}_{(n+1)} \left( \frac{1}{(\tau - y_{n+1})} \right) = \left( 1 + \frac{N}{\tau} \right) \prod_{k=1}^n \frac{(\tau - y_k)^2}{(\tau - y_k + 1)(\tau - y_k - 1)}. \quad (8.6.7) \quad \text{dimL05}$$

Так как согласно (8.5.5) левая часть (8.6.7) коммутирует со всеми  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ), то правая часть является образом центрального элемента в  $\mathbb{C}[S_n]$ . Действительно, справа стоит симметрическая функция от переменных  $(y_1, \dots, y_n)$ , поэтому она центральна в  $\mathbb{C}[S_n]$  в соответствии с Утверждением 8.5.3.

Обозначим матричное представление  $\mathbf{s}$  идемпотентов  $e(\mathsf{T}_\lambda)$  следующим образом:

$$P(\mathsf{T}_\lambda) = \mathbf{s}(e(\mathsf{T}_\lambda)). \quad (8.6.8) \quad \text{dimL06}$$

**Утверждение 8.6.1** *Полный след (8.6.1) от проекторов  $P(\mathsf{T}_\lambda)$  и  $P(\mathsf{T}'_\lambda)$ , которые соответствуют двум таблицам Юнга  $\mathsf{T}_\lambda$  и  $\mathsf{T}'_\lambda$ , имеющим одну и ту же форму  $\lambda$ , равны друг-другу (то есть не зависят от расстановки номеров в клетках диаграммы  $\lambda$ ) и равны размерности пространства  $V^{(\lambda)}$  представления  $T^{(\lambda)}$ :*

$$\text{Tr}(P(\mathsf{T}_\lambda)) = \text{Tr}(P(\mathsf{T}'_\lambda)) = \dim(V^{(\lambda)}). \quad (8.6.9) \quad \text{dimL07}$$

**Доказательство.** Идемпотенты  $e(\mathsf{T}_\lambda)$  и  $e(\mathsf{T}'_\lambda)$  соответствующие двум разным стандартным таблицам  $\mathsf{T}_\lambda$  и  $\mathsf{T}'_\lambda$ , имеющим одну и ту же форму  $\lambda$ , связаны несколькими преобразованиями подобия типа (8.5.35). Отсюда следует равенство  $\text{Tr}(P(\mathsf{T}_\lambda)) =$

$\text{Tr}(P(T'_\lambda))$ . Так как  $P(T_\lambda)$  – проектор:  $P^2 = P$ , то спектр  $P(T_\lambda)$  содержит только собственные значения 0 и +1, причем собственные вектора с собственным значением +1 лежат в подпространстве, являющемся образом проектора  $P(T_\lambda)$ . Так как след  $\text{Tr}(P(T_\lambda))$  равен сумме собственных значений оператора  $P(T_\lambda)$ , то эта сумма очевидно равна размерности подпространства, являющимся образом проектора  $P(T_\lambda)$ .

■

Найдем результат действия центрального элемента (8.6.7) при  $m = n$  на проектор  $P(T_{\lambda_n})$ , соответствующий идемпотенту  $e(T_{\lambda_n})$  (смотри (8.6.8)), который построен по таблице  $T_{\lambda_n}$ , имеющей форму диаграммы Юнга на Рис. 27. Выберем таблицу Юнга  $T_{\lambda_n}$ , у которой клетки пронумерованы подряд в каждом ряду слева направо, смотри например таблицу

$$T_{\lambda_{11}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 & \\ \hline 10 & 11 & & & \\ \hline \end{array} .$$

Такие таблицы называются стандартными *по рядам*. Для таблицы  $T_{\lambda_n}$  стандартной по рядам, имеющей форму диаграммы Юнга  $\lambda_n = [\lambda_{(1)}^{n_1}, \lambda_{(2)}^{n_2 - n_1}, \dots, \lambda_{(k)}^{n_k - n_{k-1}}]$  с  $n$  клетками (смотри Рис.27), содержания клеток будет соответствовать следующим собственным значениям операторов Юциса-Мерфи

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 2, \quad \dots, \quad y_{\lambda_{(1)}-1} = (\lambda_{(1)} - 2), \quad y_{\lambda_{(1)}} = (\lambda_{(1)} - 1), \\ y_{\lambda_{(1)}+1} &= -1, \quad y_{\lambda_{(1)}+1} = 0, \quad \dots, \quad y_{2\lambda_{(1)}} = (\lambda_{(1)} - 2), \\ &\dots, \\ y_{n_{(1)}-\lambda_{(1)}+1} &= -n_1 + 1, \quad \dots, \quad y_{n_{(1)}} = (\lambda_{(1)} - n_1), \\ y_{n_{(1)}+1} &= -n_1, \quad \dots, \quad y_{n_{(1)}+\lambda_{(2)}} = (\lambda_{(2)} - n_1 - 1), \\ &\dots, \\ y_{n_{(1)}+n_{(2)}-\lambda_{(2)}+1} &= -n_2 + 1, \quad \dots, \quad y_{n_{(1)}+n_{(2)}} = (\lambda_{(2)} - n_2), \\ &\dots, \\ y_{n-\lambda_k+1} &= -n_k + 1, \quad \dots, \quad y_n = (\lambda_k - n_k), \end{aligned}$$

где для краткости мы ввели обозначение  $n_{(m)} = (n_m - n_{m-1})\lambda_{(m)}$  для числа клеток в блоке, объединяющем все строки одинаковой длины  $\lambda_{(m)}$ . Таким образом, для идемпотента  $e(T_{\lambda_n})$ , построенного по таблице  $T_{\lambda_n}$ , имеющей форму диаграммы Юнга  $\lambda_n$ , представленной на Рис. 27, мы, после сокращения большого числа факторов в числителе и знаменателе в правой части, получаем тождество

$$\begin{aligned} &P(T_{\lambda_n}) \left( 1 + \text{Tr}_{(n+1)} \left( \frac{1}{(\tau - y_{n+1})} \right) \right) = \\ &= P(T_{\lambda_n}) \frac{(\tau + N)(\tau - (\lambda_{(1)} - n_1))(\tau - (\lambda_{(2)} - n_2)) \dots (\tau - (\lambda_{(k)} - n_k))}{(\tau - \lambda_{(1)})(\tau - (\lambda_{(2)} - n_1)) \dots (\tau - (\lambda_{(k)} - n_{k-1}))(\tau + n_k)}, \end{aligned} \quad (8.6.10) \quad \text{qdimon}$$

которое может быть переписано в более компактном виде ( $n_0 := 0$ )

$$\text{Tr}_{(n+1)} \left( P(T_{\lambda_n}) \cdot \frac{1}{\tau - y_{n+1}} \right) = P(T_{\lambda_n}) \left( \frac{\tau + N}{\tau + n_k} \prod_{j=1}^k \frac{(\tau - (\lambda_{(j)} - n_j))}{(\tau - (\lambda_{(j)} - n_{j-1}))} - 1 \right). \quad (8.6.11) \quad \text{qdim11}$$

Формула в правой части уравнения (8.6.10) получается, если вычислить действие оператора, стоящего в правой части (8.6.7), на проектор  $P(\mathbb{T}_{\lambda_n})$  сначала для каждого прямоугольного блока  $\lambda(m) \subset \lambda_n$ , все строки которого имеют одинаковую длину  $\lambda(m)$ , а число строк равно  $(n_m - n_{m-1})$ . Результат такого вычисления для каждого блока можно представить графически

$$\begin{array}{c}
 \lambda(m) \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 +1 & & -1 \\
 \hline
 & & \\
 \hline
 & & +1 \\
 \hline
 -1 & & \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 n_m - n_{m-1} \\
 n_m - n_{m-1}, \lambda(m)
 \end{array}
 = \prod_{i=1}^4 (\tau - \mu_i)^{\alpha_i}$$

Рис. 28: Прямоугольный блок  $\lambda(m) = [\lambda(m)^{n_m - n_{m-1}}] \subset \lambda_n$  с четырьмя клетками, которые имеют содержание  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) и в которых указаны индексы  $\alpha_i = \pm 1$ , обозначающие степени факторов  $(\tau - \mu_i)^{\alpha_i}$ . Остальные клетки имеют степени равные нулю и вклада в правую часть (8.6.10) не дают.

После этого окончательный результат возникает как произведение множителя  $\frac{\tau + N}{\tau}$  и факторов, указанных на Рис.28, по всем  $k$  прямоугольным блокам  $\lambda(m)$ , которые составляют диаграмму  $\lambda_n$  (смотри Рис.27). Отметим, что на самом деле результат (8.6.10) не зависит от расстановки номеров в клетках таблицы  $\mathbb{T}_{\lambda_n}$  (то есть, не обязательно выбирать стандартную таблицу, упорядоченную по рядам), так как функция от  $\{y_m\}$  в правой части (8.6.7) является симметрической и произведение, которое выписано в правой части, интерпретируется просто как произведение по всем клеткам диаграммы  $\lambda_n$ .

Подставим в левую часть уравнения (8.6.11) спектральное разложение проектора  $P(\mathbb{T}_{\lambda_n})$  (смотри (8.5.44), (8.5.43))

$$P(\mathbb{T}_{\lambda_n}) = \sum_j P_{j, \lambda_{n+1}}, \\
 P_{j, \lambda_{n+1}} \cdot y_{n+1} = P_{j, \lambda_{n+1}} (\lambda_{(j)} - n_{j-1}) = P_{j, \lambda_{n+1}} a_{n+1}^{(j)},$$

где мы использовали краткое обозначение

$$P_{j, \lambda_{n+1}} \equiv P(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}) = s(e(\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}})),$$

для проектора, построенного по таблице Юнга  $\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}$ . Напомним, что таблица  $\mathbb{T}_{j, \lambda_{n+1}}$  имеет форму диаграммы Юнга  $\lambda_{n+1}$  (с  $n + 1$  клетками), которая построена из диаграммы Юнга  $\lambda_n$  добавлением  $(n + 1)$ -ой клетки в угол с координатами  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$  (смотри Рис.27). Операторы  $P_{j, \lambda_{n+1}}$  проектирует  $y_{n+1}$  на собственные значения:  $a_{n+1}^{(j)} = (\lambda_{(j)} - n_{j-1})$  ( $j = 1, \dots, k$ ), которые возникли в факторах в знаменателе правой части (8.6.10). Принимая это во внимание, мы можем представить уравнение (8.6.11) как

$$\text{Tr}_{(n+1)} \left( \sum_{j=1}^k P_{j, \lambda_{n+1}} \frac{1}{\tau - (\lambda_{(j)} - n_{j-1})} \right) = P(\mathbb{T}_{\lambda_n}) \left( \frac{\tau + N}{\tau + n_k} \prod_{j=1}^k \frac{(\tau - (\lambda_{(j)} - n_j))}{(\tau - (\lambda_{(j)} - n_{j-1}))} - 1 \right). \quad (8.6.12) \quad \text{qdim12}$$

Сравнивая вычеты в точке  $\tau = (\lambda_{(j)} - n_{j-1})$  в обеих частях этого уравнения, мы получаем тождество

$$\begin{aligned} Tr_{(n+1)}(P_{j,\lambda_{n+1}}) &= \\ &= P(\mathbf{T}_{\lambda_n}) \cdot \left( \frac{(N + \lambda_{(j)} - n_{j-1})(n_j - n_{j-1})}{(n_k + \lambda_{(j)} - n_{j-1})} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^k \frac{((\lambda_{(j)} - n_{j-1}) - (\lambda_{(r)} - n_r))}{((\lambda_{(j)} - n_{j-1}) - (\lambda_{(r)} - n_{r-1}))} \right). \end{aligned} \quad (8.6.13) \quad \text{qdim13a}$$

**Утверждение 8.6.2** Для диаграммы Юнга  $\lambda_n$  и диаграммы  $\lambda_{n+1}$  (которая получается из  $\lambda_n$  добавлением  $(n+1)$ -ой клетки  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$ , смотри Рис.27) имеет место следующее тождество

$$\frac{(n_j - n_{j-1})}{(n_k + \lambda_{(j)} - n_{j-1})} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^k \frac{((\lambda_{(j)} - n_{j-1}) - (\lambda_{(r)} - n_r))}{((\lambda_{(j)} - n_{j-1}) - (\lambda_{(r)} - n_{r-1}))} = \frac{\prod_{(r,m) \in \lambda_n} h_{r,m}}{\prod_{(r,m) \in \lambda_{n+1}} h'_{r,m}} \quad (8.6.14) \quad \text{qdim10}$$

где  $n_0 \equiv 0$ , а  $h_{r,m}$  и  $h'_{r,m}$  — длины крюков для клеток с координатами  $(r, m)$  в диаграммах  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n+1}$ , соответственно. Произведения в правой части идут по всем клеткам диаграмм  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n+1}$ .

**Доказательство.** Заметим, что длины крюков  $h_{r,m}$  и  $h'_{r,m}$  для диаграмм  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n+1}$  отличаются только для клеток, у которых  $r = n_{j-1} + 1$ , или  $m = \lambda_{(j)} + 1$ , то есть для клеток, располагающихся в одном столбце, или в одном ряду с добавочной клеткой  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$ . Поэтому мы имеем

$$\frac{\prod_{r,m \in \lambda_n} h_{r,m}}{\prod_{r,m \in \lambda_{n+1}} h'_{r,m}} = \prod_{r=1}^{n_{j-1}} \frac{h_{r,\lambda_{(j)}+1}}{h'_{r,\lambda_{(j)}+1}} \prod_{m=1}^{\lambda_{(j)}} \frac{h_{n_{j-1}+1,m}}{h'_{n_{j-1}+1,m}}. \quad (8.6.15) \quad \text{qdim14}$$

Далее, если строки с номерами  $r$  и  $r+1$  в диаграмме  $\lambda_n$  имеют одинаковую длину, то мы очевидно имеем  $h_{r,\lambda_{(j)}+1} = h'_{r+1,\lambda_{(j)}+1}$ . Аналогично, если столбцы с номерами  $m$  и  $m+1$  в диаграмме  $\lambda_n$  имеют одинаковую высоту, то мы имеем  $h_{n_{j-1}+1,m} = h'_{n_{j-1}+1,m+1}$ . Поэтому большое число факторов в отношениях в правой части (8.6.15) сократится и мы, согласно рисунку 27, получим

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^{n_{j-1}} \frac{h_{r,\lambda_{(j)}+1}}{h'_{r,\lambda_{(j)}+1}} &= \frac{(\lambda_{(1)} - \lambda_{(j)} + n_{j-1} - n_1)(\lambda_{(2)} - \lambda_{(j)} + n_{j-1} - n_2) \cdots (\lambda_{(j-1)} - \lambda_{(j)})}{(\lambda_{(1)} - \lambda_{(j)} + n_{j-1})(\lambda_{(2)} - \lambda_{(j)} + n_{j-1} - n_1) \cdots (\lambda_{(j-1)} - \lambda_{(j)} + n_{j-1} - n_{j-2})}, \\ \prod_{m=1}^{\lambda_{(j)}} \frac{h_{n_{j-1}+1,m}}{h'_{n_{j-1}+1,m}} &= \frac{(\lambda_{(j)} - \lambda_{(k)} + n_k - n_{j-1})(\lambda_{(j)} - \lambda_{(k-1)} + n_{k-1} - n_{j-1}) \cdots (n_j - n_{j-1})}{(\lambda_{(j)} + n_k - n_{j-1})(\lambda_{(j)} - \lambda_{(k)} + n_{k-1} - n_{j-1}) \cdots (\lambda_{(j)} - \lambda_{(j+1)} + n_j - n_{j-1})}. \end{aligned}$$

Подстановка этих формул в (8.6.15) дает (8.6.14).  $\blacksquare$

Подставим теперь тождество (8.6.14) в формулу (8.6.13). В результате получаем

$$Tr_{(n+1)}(P_{j,\lambda_{n+1}}) = P(\mathbf{T}_{\lambda_n}) \cdot \left( (N + \lambda_{(j)} - n_{j-1}) \frac{\prod_{r,m \in \lambda_n} h_{r,m}}{\prod_{r,m \in \lambda_{n+1}} h'_{r,m}} \right). \quad (8.6.16) \quad \text{qdim13}$$

Далее, вычисляя полный след  $\text{Tr}(\dots)$ , заданный в (8.6.1), от обеих частей уравнения (8.6.16), мы выводим рекуррентное соотношение

$$\dim(V^{(\lambda_{n+1})}) = \dim(V^{(\lambda_n)}) [N + \lambda_{(j)} - n_{j-1}] \frac{\prod_{r,m \in \lambda_n} h_{r,m}}{\prod_{r,m \in \lambda_{n+1}} h'_{r,m}}, \quad (8.6.17) \quad \text{qdim15}$$

где определение  $\dim(V^{(\lambda)})$  дано в (8.6.9). Рекуррентное соотношение (8.6.17) однозначно решается следующим образом

$$\dim(V^{(\lambda)}) = \prod_{(r,m) \in \lambda} \frac{(N + m - r)}{h_{r,m}}, \quad (8.6.18) \quad \text{weylhk}$$

где в правой части произведение берется по всем клеткам с координатами  $(r, m)$  ( $r$  – номер строки,  $m$  – номер столбца) в диаграмме  $\lambda$  и  $h_{r,m}$  – длина крюка, соответствующего клетке  $(r, m)$ . Формула (8.6.18) для размерности представления группы  $SL(N)$ , которое соответствует диаграмме Юнга  $\lambda_n$ , была впервые получена Г.Вейлем и называется формулой Вейля, или формулой крюков.

Утверждение **8.6.1** можно обобщить следующим образом.

**Утверждение 8.6.3** Пусть  $\|g_j^i\| \in SL(N)$ . Полный след  $\text{Tr}$  (определение полного следа дано в (8.6.1))

$$\chi_{\lambda_n}(g) := \text{Tr} \left( \underbrace{(g \otimes \dots \otimes g)}_n P(T_{\lambda_n}) \right), \quad (8.6.19) \quad \text{qdim16}$$

не зависит от расстановки номеров в клетках таблицы  $T_{\lambda_n}$  (зависит только от формы диаграммы Юнга  $\lambda_n$ ) и является характером группы  $SL(N)$  в неприводимом представлении, соответствующем диаграмме  $\lambda_n$ .

Пусть матрица  $g = \|g_j^i\| \in GL(N)$  — диагонализуема и может быть приведена с помощью преобразования эквивалентности в диагональную матрицу  $g \rightarrow X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ . Тогда, характер  $\chi_{\lambda_n}(X)$  является симметрическим полиномом степени  $n$  от  $n$  переменных  $\{x_i\}$ , который называется полиномом Шура для диаграммы  $\lambda_n$ .

## 8.7 Конечномерные неприводимые представления $SU(N)$ . Примеры.

Так как группа  $SU(N)$  является вещественной формой группы  $SL(N, \mathbb{C})$ , то вся общая процедура построения конечномерных комплексных представлений  $SL(N, \mathbb{C})$ , изложенная в Разделе **8.2**, без изменения переносится на случай построения конечномерных комплексных представлений группы  $SU(N)$ . Таким образом, конечномерные неприводимые представления группы  $SU(N)$  можно выделять из тензорного произведения определяющих представлений  $SU(N)$ . Выделение осуществляется с помощью проекторов, которые согласно дуальности Шура-Вейля классифицируются неприводимыми представлениями симметрической группы или соответствующими диаграммами Юнга. При разложении тензорных произведений  $n$  определяющих

представлений  $SU(N)$  в прямую сумму по неприводимым представлениям мы получаем неприводимые представления, которые классифицируются с помощью диаграмм Юнга  $\lambda_n \vdash n$  (смотри Рис.27). Действительно, каждой таблице Юнга  $T_\lambda$ , имеющей форму диаграммы Юнга  $\lambda$  с  $n$  клетками, сопоставляются тензоры  $\psi_{T_\lambda}$  ранга  $n$ , определенным образом симметризованные. А именно, компоненты тензоров  $\psi_{T_\lambda}$  получаются симметризацией произвольных несимметризованных тензоров  $\psi$  следующим образом

$$\psi_{T_\lambda}^{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \left( s(Y(T_\lambda)) \cdot \psi \right)^{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{q \in V(T_\lambda)} \sum_{p \in H(T_\lambda)} \delta_q \psi^{q \cdot p(i_1 i_2 \dots i_n)}, \quad (8.7.1) \quad \text{qdim17}$$

где оператор  $Y(T_\lambda)$  задан в (8.4.7), представление  $s$  определено в (8.2.7), а  $q \cdot p(i_1 \dots i_n)$  — новый порядок индексов  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , полученный в результате применения перестановки  $q \cdot p$ . Иногда удобно представлять такие тензоры в виде таблицы Юнга  $T_\lambda$ , в каждой клетке которой с номером  $k$  проставлен тензорный индекс  $i_k$ . Разным таблицам Юнга  $T_\lambda$  и  $T'_\lambda$ , имеющим одинаковую форму диаграммы Юнга  $\lambda$ , соответствуют эквивалентные представления группы  $SU(N)$ . Поэтому неэквивалентные неприводимые представления  $SU(N)$  нумеруются диаграммами Юнга (а не таблицами, которым вообще говоря соответствуют разные тензоры  $\psi_{T_\lambda}$  и  $\psi_{T'_\lambda}$ ).

Например, диаграмма с одной клеткой  $\boxed{i}$  сопоставляется вектору  $\vec{\psi}$  с координатами  $\psi^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) в пространстве  $V_N$  определяющего представления группы  $SU(N)$  (сравните с (8.2.2)):

$$\psi^i \rightarrow g^i_j \psi^j \quad g \in SU(N).$$

Двум диаграммам Юнга с двумя клетками  $\boxed{i} \boxed{j}$ ,  $\boxed{j} \boxed{i}$  сопоставляются, соответственно, симметричный  $\psi_s^{ij}$  и антисимметричный  $\psi_a^{ij}$  тензоры второго ранга:

$$\psi_s^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} + \psi^{ji}), \quad \psi_a^{ij} = \frac{1}{2}(\psi^{ij} - \psi^{ji}), \quad (8.7.2) \quad \text{simasim}$$

которые выделяются из  $V_N \otimes V_N$  с помощью проекторов (8.2.14) и преобразуются по правилу (сравните с (8.2.4))

$$\psi_s^{ij} \rightarrow g^i_k g^j_m \psi_s^{km}, \quad \psi_a^{ij} \rightarrow g^i_k g^j_m \psi_a^{km}, \quad \forall g \in SU(N),$$

и так далее.

Размерность неприводимого представления группы  $SU(N)$ , которое соответствует диаграмме  $\lambda_n$  (число независимых компонент определенным образом симметризованного тензора  $\psi$  ранга  $n$ ), также как и в случае представлений группы  $SL(N, \mathbb{C})$  определяется формулой Вейля (8.6.18).

### Произведение неприводимых представлений $SU(N)$ .

Рассмотрим тензорное произведение представления, соответствующего произвольной диаграмме Юнга  $\lambda_n$ , представленной на Рис.27, и определяющего представления, соответствующего диаграмме Юнга  $[1] = \boxed{1}$ . Согласно разложению проекторов, которое дается формулой (8.5.44), мы получаем

$$\lambda_n \otimes [1] = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_{n+1}(j), \quad (8.7.3) \quad \text{qdim19}$$



где мы для краткости использовали диаграммы Юнга  $\lambda$  для обозначения соответствующих представлений  $T^{(\lambda)}$ , и  $\lambda_{n+1}(j)$  – обозначает диаграмму  $\lambda_n$  с добавленной клеткой с координатами  $(n_{j-1} + 1, \lambda_{(j)} + 1)$ , смотри Рис.27.

**Пример.**

### Сопряженное и присоединенное представления $SU(N)$ .

Рассмотрим тензор  $(N - 1)$ -ого ранга, который соответствует диаграмме

$$\lambda = [1^{(N-1)}] = \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} (N - 1) .$$

- **Задача 254.** Вычислить размерность пространства представления, соответствующего диаграмме  $\lambda = [1^{(N-1)}]$ , с помощью формулы Вейля (8.6.18).

Согласно (8.7.1) этот тензор является полностью антисимметричным и его компоненты  $\psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}}$  с помощью полностью антисимметричного тензора  $N$ -ого ранга  $\varepsilon$  можно записать в виде

$$\bar{\psi}_i = \varepsilon_{i i_1 i_2 \dots i_{N-1}} \psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}} .$$

Действие группы  $SU(N)$  на тензор  $\bar{\psi}$  согласно (8.2.4) имеет вид

$$\bar{\psi}_i \rightarrow \varepsilon_{i i_1 i_2 \dots i_{N-1}} g_{k_1}^{i_1} \dots g_{k_{N-1}}^{i_{N-1}} \psi^{k_1 k_2 \dots k_{N-1}} = \varepsilon_{k i_1 i_2 \dots i_{N-1}} \psi^{i_1 i_2 \dots i_{N-1}} (g^{-1})_i^k , \quad (8.7.4) \quad \text{qdim18}$$

где мы воспользовались тождеством (2.2.10) и равенством  $\det(g) = 1, \forall g \in SU(N)$ . Заметим, что свертка  $(\bar{\psi}_i \phi^i)$ , где  $\phi^i$  – компоненты вектора из пространства определяющего представления  $SU(N)$ , инвариантна относительно действия  $SU(N)$ . Учитывая условие унитарности  $g^{-1} = g^\dagger$ , преобразования (8.7.4) можно записать в виде  $\bar{\psi} \rightarrow g^* \cdot \bar{\psi}$ . То есть,  $\bar{\psi}$  преобразуется как сопряженное представление к определяющему представлению.

Рассмотрим тензорное произведение сопряженного представления, соответствующего диаграмме  $[1^{(N-1)}]$ , и определяющего представления  $[1]$ . Согласно формуле (8.7.3) мы имеем

$$(N - 1) \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} \otimes \square = (N - 1) \left\{ \begin{array}{cc} \square & \square \\ \vdots & \vdots \\ \square & \square \end{array} \right\} \oplus N \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}$$

В терминах компонент соответствующих тензоров эта формула записывается в виде

$$\psi^j \bar{\psi}_k = \frac{1}{N} \delta_k^j (\psi^i \bar{\psi}_i) + \left( \psi^j \bar{\psi}_k - \frac{1}{N} \delta_k^j (\psi^i \bar{\psi}_i) \right) , \quad (8.7.5) \quad \text{meson0}$$

где инвариант  $(\psi^i \bar{\psi}_i)$  соответствует тривиальному представлению  $[1^N]$ , а бесследовый тензор второго ранга  $A_k^j = (\psi^j \bar{\psi}_k - \frac{1}{N} \delta_k^j (\psi^i \bar{\psi}_i))$  соответствует неприводимому представлению  $[2, 1^{(N-1)}]$ . Заметим, что действие группы  $SU(N)$  на матрицу  $\|A_k^j\|$  имеет вид  $A \rightarrow g \cdot A \cdot g^{-1}$ . Поэтому тензор  $\|A_k^j\|$ , реализующий представление  $[2, 1^{(N-1)}]$ , соответствует присоединенному представлению.

### Кварки и $SU(3)$ симметрия. Массовые формулы.

В физике элементарных частиц, при рассмотрении унитарной симметрии  $SU(3)$ , координатам вектора  $\psi^i = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$  в пространстве определяющего представления  $SU(3)$  сопоставляются три кварка  $(u, d, s)$ . Т.е. кварки преобразуются по представлению  $\begin{bmatrix} \mathbf{i} \end{bmatrix}$  группы  $SU(3)$ . Антикваркам  $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$  сопоставляются координаты антисимметричного тензора  $\bar{\psi}_j = \varepsilon_{jik} \psi_a^{ik}$  (8.7.2) и они преобразуются по сопряженному представлению  $\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$  группы  $SU(3)$ . Мезоны – это связанные состояния кварков и антикварков и их поля преобразуются по неприводимым представлениям, возникающим при прямом произведении кваркового и антикваркового представлений (смотри (8.7.5))

$$\psi^j \bar{\psi}_k = \frac{1}{3} \delta_k^j (\psi^i \bar{\psi}_i) + \left( \psi^j \bar{\psi}_k - \frac{1}{3} \delta_k^j (\psi^i \bar{\psi}_i) \right) \quad (8.7.6) \quad \text{meson}$$

или в терминах диаграмм Юнга:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

где в правой части первая диаграмма соответствует мезонному синглету  $(\psi_i \bar{\psi}^i)$  (размерность этого представления очевидно  $= 1$ ), а вторая диаграмма соответствует мезонному октету  $M_j^k = (\psi_j \bar{\psi}^k - \frac{1}{3} \delta_j^k (\psi_i \bar{\psi}^i))$  (размерность этого представления  $= 8$ , т.к. размерность всего представления в левой части равна  $3 \times 3 = 9$ ). Бесследовая матрица  $M_j^k$  сопоставляется октету псевдоскалярных мезонов следующим образом

$$M_j^k = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (8.7.7) \quad \text{meson1}$$

Квадратичный по элементам матрицы (8.7.7) (по мезонным полям)  $SU(3)$ -инвариант имеет вид  $M_j^k M_k^j$  и, соответственно, инвариантный массовый член в мезонном лагранжиане был бы  $\mathcal{L} = \frac{m_M^2}{2} M_j^k M_k^j$ . Т.к. симметрия между  $u, d$  кварками, с одной стороны, и  $s$  кварком, с другой стороны, нарушена, то массовый член, учитывающий это нарушение, должен иметь вид

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \frac{m_M^2}{2} M_j^k M_k^j + \delta_M^2 (M_j^3 M_3^j). \quad (8.7.8) \quad \text{meson2}$$

Подставляя сюда матрицу (8.7.7) мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{m_M^2}{2} (2(\pi^+\pi^- + K^+K^- + \bar{K}^0K^0) + \eta^2 + \pi^{02}) + \delta_M^2 (K^+K^- + \bar{K}^0K^0 + \frac{4}{6}\eta^2) = \\ &= \frac{m_M^2}{2} (\pi^+\pi^- + \pi^-\pi^+) + \frac{m_M^2}{2} \pi^{02} + \\ &+ (\frac{m_M^2}{2} + \frac{\delta_M^2}{2}) (K^+K^- + K^-K^+ + \bar{K}^0K^0 + K^0\bar{K}^0) + (\frac{m_M^2}{2} + \frac{4\delta_M^2}{6}) \eta^2.\end{aligned}\quad (8.7.9) \quad \text{meson3}$$

Т.о., мы имеем следующие значения для масс мезонов

$$m_\pi^2 = m_M^2, \quad m_K^2 = m_M^2 + \delta_M^2, \quad m_\eta^2 = m_M^2 + \frac{4\delta_M^2}{3}, \quad (8.7.10) \quad \text{meson4}$$

откуда вытекает соотношение  $3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 4m_K^2$ , которое выполняется с хорошей точностью ( $m_\pi = 135 - 140 \text{ Mev}$ ,  $m_K = 494 - 498 \text{ Mev}$ ,  $m_\eta = 547, 5 \text{ Mev}$ ).

Барионы – это связанные состояния трех кварков и их поля преобразуются по неприводимым представлениям, возникающим при прямом произведении трех кварковых представлений

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \square \oplus \square) \otimes \square = \square \oplus 2\square \oplus \square$$

где в правой части первая диаграмма соответствует барионному синглету, вторая диаграмма соответствует двум барионным октетам (размерность этих представлений = 8), а последняя диаграмма соответствует барионному декуплету (размерность представления = 10, т.к. в левой части размерность представления равна  $3^3 = 27$  и мы имеем  $27 - 1 - 2 \times 8 = 10$ ). Все эти размерности также легко получить воспользовавшись формулой (8.6.18). Для барионов, состоящих из кварков  $u, d, s$  также можно получить массовые формулы, аналогичные (8.7.10), которые выполняются с хорошей точностью.

Попытки получить удовлетворительные массовые формулы для адронов (мезонов и барионов), построенных также и из кварков  $c, b, t$ , не увенчались успехом. Это связано с тем, что кварки  $c, b, t$  гораздо более массивны чем кварки  $u, d, s$  и говорить об  $SU(6)$  симметрии (и ее нарушении) с точки зрения классификации адронов по их массам, не вполне корректно. Тем не менее идея о том, что все адроны конструируются только из 6 кварков  $u, d, s, c, b, t$  (т.е. все мезоны это связанные состояния кварков и антикварков, а барионы – связанные состояния 3-х кварков) не подвергается сомнению.

## 9 Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления.

### 9.1 Пространство Минковского $\mathcal{M}$ . Группы Лоренца и Пуанкаре. Бусты. Алгебра Ли для группы Пуанкаре.

#### 1. Пространство Минковского $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ .

Рассмотрим  $N$  мерное вещественное векторное (линейное) пространство  $\mathcal{V}_N$  в котором для любых двух векторов  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}_N$  задано скалярное произведение  $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}$ .

Относительно этого скалярного произведения выберем в пространстве  $\mathcal{V}_N$  ортогональный базис  $\{\vec{e}_i\}$ ,  $(i = 1, \dots, N)$ , то есть базис, для которого матрица  $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \eta_{ij}$  диагональна  $\eta_{ij} = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$ . Матрица  $\eta_{ij}$  называется метрикой в пространстве  $\mathcal{V}_N$ . С помощью растяжения базисных векторов  $\vec{e}_j \rightarrow \lambda_j \vec{e}_j$  мы всегда можем свести числа  $\eta_i$  к двум значениям  $\eta_i = \pm 1$ . Напомним, что если все  $\eta_i = +1$ , то пространство  $\mathcal{V}_N$  называется евклидовым, если в наборе  $\{\eta_j\}$  встречаются как  $+1$  так и  $-1$ , то  $\mathcal{V}_N$  называется псевдоевклидовым.

Многомерное пространство Минковского  $\mathcal{M}$  — это вещественное  $N$ -мерное псевдоевклидово пространство  $\mathcal{V}_N = \mathbb{R}^{1, N-1}$ , в котором имеется базис  $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{N-1})$  такой, что

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \ (i \neq j), \quad (\vec{e}_0, \vec{e}_0) = 1, \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \dots = (\vec{e}_{N-1}, \vec{e}_{N-1}) = -1.$$

Матрица

$$||\eta_{ij}|| = ||(\vec{e}_i, \vec{e}_j)|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.1.1) \quad \text{mMin}$$

называется метрикой пространства Минковского. Физическое пространство Минковского — это то вещественное четырехмерное псевдоевклидово пространство  $\mathcal{V}_4 = \mathbb{R}^{1,3}$ .

## 2. Группа Лоренца.

Рассмотрим линейное преобразование базиса в пространстве  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1, N-1}$

$$\vec{e}_j' = \Lambda \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_k \Lambda^k_j, \quad (9.1.2) \quad \text{preob}$$

при этом метрика будет преобразовываться согласно правилу

$$\eta'_{ij} = (\vec{e}_i', \vec{e}_j') = \Lambda^k_i \Lambda^n_j (\vec{e}_k, \vec{e}_n) = \Lambda^k_i \Lambda^n_j \eta_{kn}. \quad (9.1.3) \quad \text{preob1}$$

Отметим, что у матрицы  $\Lambda^k_i$  мы будем различать не только верхний и нижний, но и левый ( $k$ ) и правый ( $i$ ) индексы.

**Определение 9.1.1** Преобразования (9.1.2) базиса в пространстве Минковского  $\mathcal{M}$  называются преобразованиями Лоренца, если они не меняют метрику  $\eta_{ij}$ :

$$\eta_{ij} = \Lambda^k_i \eta_{kn} \Lambda^n_j \Leftrightarrow \eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \quad (9.1.4) \quad \text{preob2}$$

Заметим, что (9.1.4) переписывается в виде:

$$\eta^{ij} = \Lambda^i_k \eta^{kn} \Lambda^n_j \Leftrightarrow \eta^{-1} = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^T, \quad (9.1.5) \quad \text{preob2g}$$

где мы ввели обозначение для обратной матрицы  $(\eta^{-1})_{jk} = \eta^{kj}$ .

Рассмотрим вектор  $\vec{x} = x^j \vec{e}_j \in \mathcal{M}$  с координатами  $x^j \in \mathbb{R}$ . При преобразовании базиса (9.1.2) координаты этого вектора меняются согласно правилу (2.2.37):

$$x'^j = \Lambda^j_k x^k. \quad (9.1.6) \quad \text{preob3}$$

В силу этих преобразований координаты  $x^j$  с верхними индексами называются *ковариантными*. Координаты с нижними индексами

$$x_j = (\vec{x}, \vec{e}_j) = x^k \eta_{kj} , \quad (9.1.7) \quad \text{cocon}$$

согласно (9.1.4) (9.1.6) преобразуются следующим образом

$$x'_j = x_k (\Lambda^{-1})^k_j , \quad (9.1.8) \quad \text{preob3v}$$

и называются *контравариантными*. Соотношение, обратное к (9.1.7), имеет вид

$$x^k = x_j (\eta^{-1})^{jk} = x_j \eta^{kj} , \quad (9.1.9) \quad \text{cocon2}$$

Таким образом, с помощью метрик  $\eta_{jk}$  и  $\eta^{kj}$  можно опускать и поднимать индексы у координат векторов пространства Минковского. Рассматривая прямое произведение  $r$  векторов  $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(r)} \in \mathcal{M}$ , мы приходим к определению тензора ранга  $r$ , компоненты которого задаются как произведения координат векторов  $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(r)}$ :

$$t_{k_{p+1} \dots k_{p+q}}^{k_1 \dots k_p} = \vec{x}^{(1)k_1} \dots \vec{x}^{(p)k_p} \cdot \vec{x}^{(p+1)}_{k_{p+1}} \dots \vec{x}^{(p+q)}_{k_{p+q}} ,$$

где для первых  $p$  векторов мы использовали ковариантные координаты, а для последних  $q = r - p$  векторов мы выбрали контравариантные координаты.

**Определение 9.1.2** Тензором типа  $(p, q)$  в пространстве Минковского  $\mathcal{M}$  называется объект, который задан набором коэффициентов  $t_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p}$  и который при преобразованиях (9.1.2) базиса в пространстве  $\mathcal{M}$  преобразуется следующим образом:

$$t_{j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_p} \rightarrow \Lambda^{k_1}_{s_1} \dots \Lambda^{k_p}_{s_p} t_{\ell_1 \dots \ell_q}^{s_1 \dots s_p} (\Lambda^{-1})^{\ell_1}_{j_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\ell_q}_{j_q} . \quad (9.1.10) \quad \text{TM01}$$

В силу преобразований (9.1.10) два произвольных тензора сворачиваются ковариантно (то есть в результате получается снова тензор), если верхние индексы компонент одного тензора сворачиваются с нижними индексами компонент другого тензора. Очевидно, что поднимать и опускать индексы у компонент тензоров можно с помощью метрик  $\eta_{jk}$  и  $\eta^{kj}$ .

Преобразования (9.1.6), с матрицами  $\Lambda$ , удовлетворяющими (9.1.4), сохраняют скалярный квадрат  $(\vec{x}, \vec{x}) = x^i \eta_{ij} x^j$  вектора  $\vec{x}$ :

$$(\vec{x}', \vec{x}') = x'^i \eta_{ij} x'^j = x^k \Lambda^i_k \eta_{ij} \Lambda^j_n x^n = \tilde{x}^k \eta_{kn} \tilde{x}^n ,$$

и, как было показано в разделе **2.2.5**, множество таких преобразований образует группу  $O(1, N-1)$ , которая называется  $N$ -мерной группой Лоренца. Структура всех групп  $O(1, N-1)$  ( $N > 1$ ) подробно обсуждалась в Примере **11**. раздела **3.1.2**. В частности мы получили, что группа Лоренца  $O(1, N-1)$  состоит из четырех смежных классов (3.1.28):

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &\geq 1, & \det(\Lambda) &= 1, & O_+^\uparrow \\ \Lambda_0^0 &\geq 1, & \det(\Lambda) &= -1, & O_-^\uparrow \\ \Lambda_0^0 &\leq -1, & \det(\Lambda) &= -1, & O_-^\downarrow \\ \Lambda_0^0 &\leq -1, & \det(\Lambda) &= 1, & O_+^\downarrow \end{aligned} \quad (9.1.11) \quad \text{clasy5}$$

где подмножества

$$O^\uparrow = O_+^\uparrow \cup O_-^\uparrow, \quad O_+ = O_+^\uparrow \cup O_+^\downarrow = SO(1, N-1), \quad O_+^\uparrow = O_+ \cap O^\uparrow,$$

образуют соответственно ортохронную, собственную и собственную ортохронную подгруппы в  $O(1, N-1)$ .

Рассмотрим специальные преобразования Лоренца, которые не меняют базисные вектора  $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{N-1}$  и нетривиально действуют в плоскости векторов  $\vec{e}_0, \vec{e}_1$ . В этом случае матрица  $\Lambda$  имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и мы сводим изучение группы Лоренца к изучению двумерной группы  $O(1, 1)$ , которая сохраняет форму (3.1.21), и включает в себя преобразования 4-х типов (3.1.22). Преобразования первого класса  $I_+$  (собственные ортохронные преобразования) записываются в виде известных формул для преобразований Лоренца (3.1.25) и называются лоренцевскими бустами (происходит от английского слова "boost" – сдвиг) в плоскости  $(\vec{e}_0, \vec{e}_1)$ .

Пусть  $\Lambda \in O_+^\uparrow$  – произвольное собственное ортохронное преобразование Лоренца. Тогда  $\Lambda$  можно всегда однозначно разложить в произведение:  $\Lambda = B \cdot R$ , где  $B$  – буст и  $R$  – собственное вращение в  $(N-1)$ -мерном евклидовом пространстве, натянутом на  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{N-1}$ .

- **Задача 255.** Доказать, что произвольное  $\Lambda \in O_+^\uparrow$  однозначно разлагается в произведение  $\Lambda = B \cdot R$  буста  $B$  и собственного вращения  $R$  в  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

**3. Группа Пуанкаре.** Группа Лоренца была определена как группа всех преобразований пространства Минковского  $\mathcal{M}$ , которые оставляют инвариантной метрику  $\eta_{km}$  (т.е., не меняют длины интервалов) и оставляют неподвижной фиксированную точку  $O$  начала системы координат. Если не требовать, от рассматриваемых преобразований, неподвижности какой-либо точки  $O$ , а ограничиться только требованием сохранения интервалов, то мы приходим к преобразованиям, которые образуют группу Пуанкаре. По отношению к действию этой группы, пространство Минковского однородно (т.е. все точки  $\mathcal{M}$  равноправны), что соответствует равноправию событий в теории относительности.

Чтобы описать преобразования этой группы мы рассмотрим наряду с лоренцевскими вращениями (9.1.6) сдвиги всех векторов в  $\mathcal{M}$  на постоянные вектора  $\vec{a}$ . Такое преобразование в координатной записи имеет вид

$$x^m \rightarrow \tilde{x}^m = \Lambda^m_k x^k + a^m. \quad (9.1.12) \quad \text{пуанс}$$

Эти преобразования называются неоднородными (смотри раздел **2.3.4**) и образуют группу  $IO(1, N-1)$ , которая называется  $N$ -мерной группой Пуанкаре.

- **Задача 256.** Проверить, что преобразования (9.1.12) сохраняют интервалы  $(\vec{y} - \vec{x})^2 = (y^k - x^k)(y_k - x_k)$ , где  $\vec{y}, \vec{x} \in \mathcal{M}$ .

Группы  $IO(p, q)$  были рассмотрены в конце раздела **2.3.4**. Два последовательных преобразования (9.1.12), обозначим их  $(\Lambda, \vec{a})$  и  $(\Lambda', \vec{a}')$ , определяют композицию этих преобразований

$$(\Lambda', \vec{a}') \cdot (\Lambda, \vec{a}) = (\Lambda' \cdot \Lambda, \Lambda' \vec{a} + \vec{a}') . \quad (9.1.13) \quad \text{comp9}$$

Этот закон композиции записывается в матричном виде, если воспользоваться матричным представлением (2.3.17) и сопоставить преобразованию  $(\Lambda, \vec{a})$  матрицу

$$\rho(\Lambda, \vec{a}) = \left( \begin{array}{c|c} \Lambda_n^m & a^m \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) . \quad (9.1.14) \quad \text{map99}$$

Группа Лоренца  $O(1, N-1)$  и абелева группа  $T$  сдвигов (трансляций)  $x^m \rightarrow x^m + a^m$  являются подгруппами в группе Пуанкаре  $IO(1, N-1)$ . Группа  $IO(1, N-1)$  строится как полупрямое произведение своих подгрупп  $O(1, N-1)$  и  $T$  (смотри Пример 1. в разделе **2.3.5**).

**4. Алгебра Ли группы Пуанкаре.** Рассмотрим преобразования Лоренца (9.1.6) с матрицами  $\Lambda$ , близкими к единичной матрице

$$\Lambda_m^k = \delta_m^k + \omega_m^k + \dots ,$$

где мы считаем параметры  $\omega_m^k$  – малыми (то есть рассматриваем преобразования Лоренца вблизи единичного элемента). Из условий инвариантности метрики (9.1.4) при таких преобразованиях следует, что

$$\omega_i^k \eta_{kj} + \eta_{ik} \omega_j^k = 0 \Rightarrow \omega_{ji} + \omega_{ij} = 0 , \quad (9.1.15) \quad \text{preob7}$$

где мы определили  $\omega_{ij} = \eta_{ik} \omega_j^k$ . Теперь матрицу (9.1.14), соответствующую преобразованию из группы Пуанкаре, с учетом условия (9.1.15), можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho(\Lambda, \vec{a}) &= I_{N+1} + e_m^k \omega_m^k + e_m^N a^m + \dots = I_{N+1} + \frac{1}{2} M^{mk} \omega_{mk} + P_m a^m + \dots , \\ m, k &= 0, \dots, N-1 , \end{aligned} \quad (9.1.16) \quad \text{preob6}$$

где  $e_B^A$  – матричные единицы:

$$e_D^C \cdot e_B^A = \delta_B^C e_D^A , \quad (A, B, C, D = 0, \dots, N) ,$$

и мы определили операторы

$$P_m = e_m^N , \quad M^{mk} = \eta^{mn} e_n^k - \eta^{kn} e_n^m , \quad (9.1.17) \quad \text{lilo}$$

которые задают базис в алгебре Ли группы Пуанкаре  $IO(1, N-1)$ . В  $N$ -мерном случае число независимых операторов  $P_m$  равно  $N$ , а операторов  $M^{mk}$  (в силу их антисимметрии  $M^{mk} = -M^{km}$ ) равно  $N(N-1)/2$ . Эти операторы образуют алгебру Ли с определяющими соотношениями

$$[P^n, P^m] = 0 , \quad [P^n, M^{mk}] = \eta^{mn} P^k - \eta^{kn} P^m , \quad (9.1.18) \quad \text{genP}$$

$$[M^{nm}, M^{kl}] = \eta^{mk} M^{nl} - \eta^{ln} M^{km} - \eta^{nk} M^{ml} + \eta^{lm} M^{kn} , \quad (9.1.19) \quad \text{lilo2}$$

которые следуют из явного вида (9.1.17).

- **Задача 257.** Проверить соотношения (9.1.19), (9.1.18) для операторов (9.1.17).

Формулы (9.1.17) – (9.1.19) справедливы и для общего случая  $(p + q)$ -мерных псевдоевклидовых групп  $IO(p, q)$ , для которых метрика имеет вид

$$||\eta_{nm}|| = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q), \quad (p + q = N).$$

Определяющее представление для образующих  $M^{nm}$  подгруппы  $SO(p, q) \subset IO(p, q)$  задается второй формулой в (9.1.17) и мы имеем

$$(M^{mk})^n_j = (\eta^{nm} \delta_j^k - \eta^{kn} \delta_j^m), \quad (n, m, k, j = 0, \dots, p + q - 1). \quad (9.1.20) \quad \text{deflor}$$

- **Задача 258.** Доказать, что оператор  $J^2 = M^{mn} M_{mn}$  (квадратичный оператор Казимира) является центральным элементом для алгебры Ли (9.1.19) группы  $SO(p, q)$ , то есть  $[J^2, M^{kl}] = 0 \quad (\forall k, l)$ . Доказать, что оператор  $J^2$  не является центральным для алгебры Ли группы  $IO(p, q)$ .
- **Задача 259.** Доказать, что подгруппа трансляций  $T$  является инвариантной подгруппой в группе  $IO(p, q)$  и фактор группа  $IO(p, q)/T$  изоморфна группе  $SO(p, q)$ .

## 9.2 Группа $SL(2, \mathbb{C})$ и группа Лоренца $O(1, 3)$ . Спинорные представления группы Лоренца.

В этом разделе мы будем рассматривать четырех-мерную группу Лоренца  $O(1, 3)$ , которая действует в физическом четырех-мерном пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

### 9.2.1 Группа $SL(2, \mathbb{C})$ и группа Лоренца.

Рассмотрим группу  $SL(2, \mathbb{C})$ , которая образована унимодулярными комплексными матрицами

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix}, \quad A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^1 = 1, \quad (9.2.1) \quad \text{uni2}$$

где  $A_1^1, A_1^2, A_2^1, A_2^2 \in \mathbb{C}$ . Обратная матрица к матрице (9.2.1) имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_2^2 & -A_1^2 \\ -A_2^1 & A_1^1 \end{pmatrix}. \quad (9.2.2) \quad \text{uni2m}$$

Каждому 4-вектору  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{1,3}$  с координатами  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  мы сопоставим  $2 \times 2$  эрмитову матрицу

$$X = x^m \sigma_m = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (9.2.3) \quad \text{Xx}$$



где мы использовали 4 матрицы  $\sigma_m$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9.2.4) \quad \text{sign}$$

которые образуют базис в пространстве эрмитовых  $2 \times 2$  матриц. Соответствие  $x^m \leftrightarrow X$  взаимно однозначно, так как имеется обратная формула

$$x^m = \frac{1}{2} \text{Tr}(X \cdot \sigma_m), \quad (9.2.5) \quad \text{xx}$$

которая следует из равенства  $\frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_n \sigma_m) = \delta_{nm}$ . Отметим однако, что эта формула не совсем корректна, т.к. связывает объекты с нижним и верхним лоренцевским индексами. Это противоречие будет нами разрешено в следующем подпункте "Спиноры".

Рассмотрим линейное преобразование матрицы  $X$ , оставляющее ее эрмитовой:

$$X \rightarrow X' = A X A^\dagger = x'^m \sigma_m, \quad (9.2.6) \quad \text{prelo2}$$

где  $A$  — любая матрица из  $SL(2, \mathbb{C})$ . Заметим, что это преобразование сохраняет детерминант матрицы  $X$ :

$$\det(X') = \det(A X A^\dagger) = |\det(A)|^2 \det(X) = \det(X).$$

Так как

$$\det(X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^m x_m,$$

то линейное преобразование  $x^m \rightarrow x'^m$  (9.2.6) сохраняет длины интервалов в пространстве Минковского ( $x^m x_m = x'^m x'_m$ ), и следовательно является преобразованием Лоренца. Более того, преобразования (9.2.6) соответствуют только собственным ортохронным преобразованиям Лоренца (смотри Задачу 261 ниже).

Отметим, что согласно (9.2.6) две матрицы  $\pm A$  обслуживают одно и то же преобразование Лоренца из  $SO^\uparrow(1, 3)$ , т.е. группа  $SL(2, \mathbb{C})$  дважды накрывает собственную ортохронную группу Лоренца. Отметим также, что у группы  $SL(2, \mathbb{C})$  имеется 3 комплексных параметра (т.е. 6 вещественных параметров) и т.о. размерности многообразий групп  $SO^\uparrow(1, 3)$  и  $SL(2, \mathbb{C})$  совпадают.

### 9.2.2 Спиноры.

Группа матриц  $SL(2, \mathbb{C})$  естественно действует в пространстве двухкомпонентных векторов  $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ , которые представляют собой пару комплексных чисел  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Такое действие записывается следующим образом

$$\xi_\alpha \rightarrow \xi'_\alpha = A_\alpha{}^\beta \xi_\beta, \quad \xi' = A \xi. \quad (9.2.7) \quad \text{spin1}$$

**Определение 9.2.1** Вектора  $\xi$  в двумерном комплексном пространстве  $\mathbb{C}^2$  с действием на них группы  $SL(2, \mathbb{C})$  (9.2.7) называются ковариантными спинорами (или просто спинорами).

Т.о., пространство ковариантных спиноров является пространством определяющего представления группы  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Определим спинор с верхним индексом  $\eta^\alpha$  и его преобразование так, чтобы свертка  $\eta^\alpha \xi_\alpha$  была инвариантна при преобразованиях (9.2.7). Соответствующее преобразование спинора  $\eta^\alpha$  имеет вид

$$\eta^\alpha \rightarrow \eta'^\alpha = \eta^\beta (A^{-1})_\beta^\alpha, \quad \eta' = \eta A^{-1} \Rightarrow \eta'^T = (A^{-1})^T \eta^T. \quad (9.2.8) \quad \text{spin2}$$

Спинор с верхним индексом  $\eta^\beta$ , который преобразуется по правилу (9.2.8), будем называть контрвариантным. Заметим теперь, что матрицы  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  (9.2.1) и  $(A^{-1})^T$  (матрица  $A^{-1}$  определена в (9.2.2)) связаны между собой преобразованиями

$$(A^{-1})^T = \mathcal{E} A \mathcal{E}^{-1} \Rightarrow (A^{-1})_\beta^\alpha = \mathcal{E}^{\alpha\gamma} A_\gamma^\delta \mathcal{E}_{\delta\beta}, \quad (9.2.9) \quad \text{aat}$$

$$\mathcal{E} = \|\mathcal{E}^{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}^{-1} = \|\mathcal{E}_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}^{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (9.2.10) \quad \text{metr}$$

Для простоты мы не будем указывать знак степени "-1" у элементов  $\mathcal{E}_{\beta\gamma}$  (с нижними индексами) обратной матрицы  $\mathcal{E}^{-1}$ . На самом деле соотношение (9.2.9) есть следствие условия  $\det(A) = 1$  (см. (2.2.10)):

$$\mathcal{E}^{\gamma\delta} A_\gamma^\alpha A_\delta^\beta = \mathcal{E}^{\alpha\beta}, \quad A_\gamma^\alpha A_\delta^\beta \mathcal{E}_{\alpha\beta} = \mathcal{E}_{\gamma\delta}.$$

Из соотношения (9.2.9) следует, что контрвариантный спинор  $\eta^\alpha$  и ковариантный спинор  $\xi_\alpha$  преобразуются (см. (9.2.7), (9.2.8)) по эквивалентным представлениям группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Т.о., мы всегда спинор с верхним индексом можем перевести в спинор с нижним индексом (и наоборот) воспользовавшись матрицами  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^{-1}$ :

$$\eta_\alpha = -\eta^\beta \mathcal{E}_{\beta\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha\beta} \eta^\beta, \quad \xi^\alpha = \mathcal{E}^{\alpha\beta} \xi_\beta = -\xi_\beta \mathcal{E}^{\beta\alpha}. \quad (9.2.11) \quad \text{metr1}$$

Действительно, легко проверить, что  $\mathcal{E}_{\alpha\beta} \eta^\beta$  преобразуется как спинор с нижним индексом, если  $\eta^\beta$  преобразуется согласно (9.2.8):

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} \eta'^\beta = -\eta^\gamma (A^{-1})_\gamma^\beta \mathcal{E}_{\beta\alpha} = -A_\alpha^\delta \mathcal{E}_{\gamma\delta} \eta^\gamma = A_\alpha^\delta \mathcal{E}_{\delta\gamma} \eta^\gamma,$$

при этом инвариантная (относительно преобразований группы  $SL(2, \mathbb{C})$ ) билинейная форма  $\eta^\alpha \xi_\alpha$  оказывается кососимметричной

$$\eta^\alpha \xi_\alpha = \eta^\alpha \mathcal{E}_{\alpha\beta} \xi^\beta = -\eta_\alpha \mathcal{E}^{\alpha\beta} \xi_\beta = -\xi^\alpha \eta_\alpha.$$

Каждой матрице  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  можно сопоставить комплексно сопряженную матрицу  $A^* \in SL(2, \mathbb{C})$  с помощью которой, как следует из (9.2.7), преобразуется комплексно сопряженный спинор  $\xi_\alpha^*$

$$\xi^* \rightarrow \xi'^* = A^* \xi^*, \quad \xi'^*_\alpha = A^*_{\alpha}{}^\beta \xi^*_\beta, \quad (9.2.12) \quad \text{spin3}$$

$$A^* = \|(A^*_{\alpha}{}^\beta)\| = \begin{pmatrix} A^{*1}_1 & A^{*2}_1 \\ A^{*1}_2 & A^{*2}_2 \end{pmatrix}, \quad A^{*1}_1 A^{*2}_2 - A^{*2}_1 A^{*1}_2 = 1. \quad (9.2.13) \quad \text{uni4}$$

Отображение  $\rho: A \rightarrow A^*$  очевидно является гомоморфизмом  $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  и, т.о., отображение  $\rho$  определяет представление группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , которое называется комплексно сопряженным. Докажем, что это комплексно сопряженное представление не является эквивалентным определяющему представлению (9.2.1). Для этого надо показать, что для всех матриц  $A$  (9.2.1) и их комплексно сопряженных матриц  $A^*$  (9.2.13) не существует фиксированной матрицы  $V$  такой, что  $A^* = V A V^{-1}$ . Действительно, если бы такая матрица  $V$  существовала, то мы всегда имели бы равенство  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^*)$ , что в действительности реализуется не для всех матриц  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ . Отметим, что для унитарных матриц  $U$  (3.1.14) мы очевидно имеем  $\text{Tr}(U) = \text{Tr}(U^*)$ . Более того, из условия унитарности и требования  $\det(U) = 1$  мы имеем  $U^* = (U^{-1})^T = \mathcal{E} U \mathcal{E}^{-1}$ , и следовательно для группы  $SU(2)$  определяющее и комплексно сопряженные представления эквивалентны.

В вычислениях удобно индексы у сопряженного представления  $SL(2, \mathbb{C})$  отличать от индексов у обычного спинорного представления (дабы не было соблазна их свернуть друг с другом), поэтому индексы сопряженного представления отмечаются точкой. Например, для комплексно сопряженного спинора  $\xi_\alpha^* \equiv \xi_\alpha$  формулы (9.2.12) и (9.2.13) переписываются в виде

$$\xi^* \rightarrow \xi'^* = A^* \xi^*, \quad \xi'_\alpha = A^*_{\dot{\alpha}}{}^\beta \xi_\beta = \xi_\beta A^{\dagger\beta}{}_{\dot{\alpha}}, \quad (9.2.14) \quad \text{spin5}$$

$$A^* = ||A^*_{\dot{\alpha}}{}^\beta|| = \begin{pmatrix} A^*_{\dot{1}}{}^1 & A^*_{\dot{1}}{}^2 \\ A^*_{\dot{2}}{}^1 & A^*_{\dot{2}}{}^2 \end{pmatrix}. \quad (9.2.15) \quad \text{uni5}$$

Контравариантные сопряженные спиноры имеют верхний пунктирный индекс и преобразуются по правилу

$$\xi^{\dot{\alpha}} \rightarrow \xi'^{\dot{\alpha}} = \xi^{\dot{\beta}} (A^*)^{-1}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}, \quad (9.2.16) \quad \text{spin5K}$$

а метрические матрицы имеют такой же вид как и в (9.2.10), (9.2.11)

$$\eta_\alpha = -\eta^{\dot{\beta}} \mathcal{E}_{\dot{\beta}\alpha} = \mathcal{E}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}, \quad \xi^{\dot{\alpha}} = \mathcal{E}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}} = -\xi_{\dot{\beta}} \mathcal{E}^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}. \quad (9.2.17) \quad \text{metr2}$$

$$||\mathcal{E}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}|| \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ||\mathcal{E}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}|| \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathcal{E}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}}. \quad (9.2.18) \quad \text{metr3}$$

Рассмотрим теперь матрицу  $X$  (9.2.3). В силу закона преобразования (9.2.6) и формул (9.2.7), (9.2.14) элементы матрицы  $X$  необходимо обозначать  $X_{\alpha\dot{\beta}}$ . Т.к. матрица  $X$  построена из матриц  $\sigma_m$ , то элементы этих матриц также необходимо обозначать как  $(\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}}$ . Теперь ясно, почему формула (9.2.5) некорректна – две матрицы  $X_{\beta\dot{\alpha}}$  и  $(\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}}$  невозможно ковариантно умножить друг на друга, так как при этом надо сворачивать нижние точечные и бесточечные индексы. Для того, чтобы умножать такие матрицы ковариантно определим набор "сопряженных"  $\sigma$ -матриц

$$(\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\alpha} = \mathcal{E}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathcal{E}^{\alpha\beta} (\sigma_m)_{\beta\dot{\beta}}, \quad (9.2.19) \quad \text{sopsi}$$

$$\tilde{\sigma}_m = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3), \quad \tilde{\sigma}^m = \tilde{\sigma}_n g^{nm} = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (9.2.20) \quad \text{sopsi2}$$

- *Задача 260. Вывести формулы (9.2.20) из определения (9.2.19). Указание: записать (9.2.19) в виде*

$$\tilde{\sigma}_m = \mathcal{E} \cdot \sigma_m^T \cdot \mathcal{E}^{-1}, \quad (9.2.21) \quad \text{sopsi1}$$

и воспользоваться тем, что  $\mathcal{E} = i\sigma_2$ .

Рассмотрим соответствующую сопряженную матрицу  $\tilde{X}^{\dot{\alpha}\alpha} = \mathcal{E}^{\dot{\alpha}\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta} X_{\beta\dot{\beta}}$ , с помощью которой мы можем устраивать ковариантные произведения

$$X_{\alpha\dot{\alpha}} \tilde{X}^{\dot{\alpha}\alpha} = \tilde{X}^{\dot{\alpha}\alpha} X_{\alpha\dot{\alpha}} = x^m x_m. \quad (9.2.22) \quad \text{XtX}$$

Теперь соотношение  $x^m \leftrightarrow X$  (9.2.5) записывается корректной формулой

$$x^m = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^m \cdot X), \quad (9.2.23) \quad \text{xXX}$$

так как в обеих ее частях стоят объекты с верхними векторными индексами. Пользуясь формулой (9.2.23), преобразование (9.2.6) можно переписать в виде стандартного преобразования Лоренца (9.1.6)

$$\begin{aligned} x'^m &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^m \cdot X') = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^m \cdot A \cdot (x^n \sigma_n) \cdot A^\dagger) = \Lambda^m_n x^n, \\ \Lambda^m_n &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^m \cdot A \cdot \sigma_n \cdot A^\dagger). \end{aligned} \quad (9.2.24) \quad \text{LA}$$

- *Задача 261. Доказать, что матрица  $\Lambda = ||\Lambda^m_n||$ , заданная в (9.2.24), определяет для любого элемента  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  собственное ортохронное преобразование Лоренца (9.1.6), то есть мы имеем*

$$\Lambda^0_0 \geq +1, \quad \det(\Lambda) = +1.$$

Формула (9.2.24) определяет явно гомоморфизм из группы  $SL(2, \mathbb{C})$  в собственную ортохронную группу  $SO^\uparrow(1, 3)$ , причем два разных элемента  $\pm A \in SL(2, \mathbb{C})$  отображаются в один элемент  $\Lambda \in SO^\uparrow(1, 3)$  и следовательно группа  $SL(2, \mathbb{C})$  дважды покрывает  $SO^\uparrow(1, 3)$ .

Симметричные (по векторным индексам) произведения пары матриц  $\sigma_m$  (9.2.4) и  $\tilde{\sigma}_m$  (9.2.19) удовлетворяют соотношениям

$$(\sigma_m \tilde{\sigma}_n + \sigma_n \tilde{\sigma}_m)_\alpha^\beta = 2 g_{nm} \delta_\alpha^\beta, \quad (\tilde{\sigma}_m \sigma_n + \tilde{\sigma}_n \sigma_m)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = 2 g_{nm} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}, \quad (9.2.25) \quad \text{ssg}$$

и мы имеем

$$\text{Tr}(\sigma_n \tilde{\sigma}_m) = 2 g_{nm}, \quad \text{Tr}(\tilde{\sigma}_m \sigma_n \tilde{\sigma}_k \sigma_l) = 2(g_{nm} g_{kl} - g_{nl} g_{km} + g_{nk} g_{lm}), \quad (9.2.26) \quad \text{mnk1}$$

и так далее, где первое тождество очевидно следует из определений (9.2.4) и (9.2.19), а второе доказывается стандартно

$$\text{Tr}(\tilde{\sigma}_m \sigma_n \tilde{\sigma}_k \sigma_l) = \text{Tr}(\sigma_n \tilde{\sigma}_k \sigma_l \tilde{\sigma}_m) = \text{Tr}(\sigma_n \tilde{\sigma}_k (2g_{lm} - \sigma_m \tilde{\sigma}_l)) = \quad (9.2.27) \quad \text{proof}$$

$$= 4g_{nk}g_{lm} - \text{Tr}(\sigma_n(2g_{km} - \tilde{\sigma}_m\sigma_k)\tilde{\sigma}_l) = 4g_{nk}g_{lm} - 4g_{nl}g_{km} + 4g_{nm}g_{kl} - \text{Tr}(\sigma_m\tilde{\sigma}_n\sigma_k\tilde{\sigma}_l) ,$$

где необходимо воспользоваться равенством  $\text{Tr}(\sigma_m\tilde{\sigma}_n\sigma_k\tilde{\sigma}_l) = \text{Tr}(\tilde{\sigma}_m\sigma_n\tilde{\sigma}_k\sigma_l)$ , которое доказывается с помощью (9.2.21).

Определим новые матрицы  $\sigma_{nm}$  и  $\tilde{\sigma}_{nm}$  антисимметричные по векторным индексам  $n, m$ :

$$(\sigma_{nm})_\alpha^\beta = -\frac{1}{4}(\sigma_n\tilde{\sigma}_m - \sigma_m\tilde{\sigma}_n)_\alpha^\beta , \quad (\tilde{\sigma}_{nm})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_n\sigma_m - \tilde{\sigma}_m\sigma_n)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} . \quad (9.2.28) \quad \text{snm2}$$

Эти матрицы обладают свойствами симметрии

$$(\sigma_{nm})_\alpha^\beta \mathcal{E}_{\beta\gamma} = (\sigma_{nm})_\gamma^\beta \mathcal{E}_{\beta\alpha} , \quad \mathcal{E}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\tilde{\sigma}_{nm})^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}} = \mathcal{E}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}(\tilde{\sigma}_{nm})^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}} , \quad (9.2.29) \quad \text{snm3}$$

и кроме того тензор  $\sigma_{nm}$  – самодуален, а тензор  $\tilde{\sigma}_{nm}$  – антисамодуален (смотри определения в (3.2.198) и (3.2.195)). Заметим, что  $(i, j, k = 1, 2, 3)$

$$\sigma_{0i} = \frac{1}{2}\sigma_i = -\tilde{\sigma}_{0i} , \quad \sigma_{ij} = \frac{i}{2}\mathcal{E}_{ijk}\sigma_k = \tilde{\sigma}_{ij} , \quad (9.2.30) \quad \text{snm5a}$$

где  $\mathcal{E}_{ijk}$  – антисимметричный тензор 3-его ранга. Пусть параметры  $\omega^{nm} = -\omega^{mn} \in \mathbb{R}$  образуют антисимметричную  $4 \times 4$  матрицу, тогда

$$(\omega^{nm}\sigma_{nm})_\alpha^\beta = (\omega^{0i}\sigma_i + \frac{i}{2}\mathcal{E}_{ijk}\omega^{jk}\sigma_i)_\alpha^\beta = (z^i\sigma_i)_\alpha^\beta ,$$

где мы определили 3 комплексных числа

$$z^i = \omega^{0i} + \frac{i}{2}\mathcal{E}_{ijk}\omega^{jk} . \quad (9.2.31) \quad \text{zo-a}$$

по 6-и вещественным параметрам  $\omega^{nm} = -\omega^{mn}$ . Т.к. матрицы  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) образуют базис в алгебре Ли для группы  $SL(2, \mathbb{C})$  (напомним, что алгебру Ли группы  $SL(2, \mathbb{C})$  образуют все двумерные комплексные матрицы  $a$  такие, что  $\text{Tr}(a) = 0$ ), то мы можем записать инфинитезимальное преобразования  $A, A^\dagger \in SL(2, \mathbb{C})$  в виде

$$A_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \frac{1}{2}(\omega^{nm}\sigma_{nm})_\alpha^\beta + \dots , \quad (A^\dagger)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} + \frac{1}{2}(\omega^{nm}\tilde{\sigma}_{nm})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} + \dots . \quad (9.2.32) \quad \text{SLor1}$$

Подставляя это представление в (9.2.24), мы получаем

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})_n^m &= \frac{1}{2}\text{Tr}(A\sigma_n A^\dagger \tilde{\sigma}^m) = \delta_n^m - \frac{1}{4}[\text{Tr}(\sigma_{kl}\sigma_n \tilde{\sigma}^m) - \text{Tr}(\sigma_n \tilde{\sigma}_{kl} \tilde{\sigma}^m)] \omega^{kl} + \dots = \\ &= \delta_n^m + \frac{1}{8}[\text{Tr}(\sigma_k \tilde{\sigma}_l \sigma_n \tilde{\sigma}^m) - \text{Tr}(\sigma_n \tilde{\sigma}_k \sigma_l \tilde{\sigma}^m)] \omega^{kl} + \dots = \delta_n^m - g_{nk}\omega^{km} + \dots , \end{aligned}$$

где мы использовали тождества (9.2.26). Сравнивая это соотношение с инфинитезимальным преобразованием Лоренца (9.1.16), мы устанавливаем точное соответствие элементов группы  $SL(2, \mathbb{C})$  и элементов собственной ортохронной группы Лоренца:

$$\pm (1 + \frac{1}{2}\omega^{nm}\sigma_{nm} + \dots)_\alpha^\beta = \pm A_\alpha^\beta \longrightarrow \Lambda_n^m = (\delta_n^m + \omega_n^m + \dots) , \quad (9.2.33) \quad \text{SLor}$$

где  $\omega_n^m = g_{nk}\omega^{km}$ .

**Замечание.** Почти все элементы  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  представимы в экспоненциальной форме

$$A = \exp(z^i \sigma_i) \quad (z^1, z^2, z^3 \in \mathbb{C}), \quad (9.2.34) \quad \text{exp5}$$

где  $\sigma_i$  – матрицы Паули. Экспоненциальная форма (9.2.34) покрывает  $SL(2, \mathbb{C})$  почти полностью за исключением комплексной двумерной поверхности в  $SL(2, \mathbb{C})$ , состоящей из элементов [25]

$$\begin{pmatrix} -1 & -b^2 ab \\ -b^2 & -1 + ab \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1}, \quad B \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (9.2.35) \quad \text{exp6}$$

Это следует из того факта, что матрица (9.2.35) недиагонализуема и имеет два совпадающих собственных значения, равных  $-1$ , а матрица  $z^i \sigma_i$  либо диагонализуема, либо, т.к.  $\text{Tr}(z^i \sigma_i) = 0$ , приводится к виду

$$z^i \sigma_i \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \exp(z^i \sigma_i) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & e^u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ , то либо  $A$  либо  $-A$  имеют экспоненциальную форму (9.2.34).

### 9.2.3 Матрицы Дирака. Дираковские биспиноры. Майорановские и вейлевские спиноры.

Составим из двух спиноров  $\xi_\alpha$  и  $\eta^{\dot{\alpha}} (= \eta^{\alpha*})$  ( $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ ) четырехкомпонентный спинор

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (9.2.36) \quad \text{dirspin}$$

Такой би-спинор называется дираковским спинором. На него (согласно расстановке спинорных индексов) естественным образом действуют  $4 \times 4$  матрицы  $\gamma_m$ , имеющие блочную структуру

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_m \\ \tilde{\sigma}_m & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2.37) \quad \text{dirg}$$

Эти матрицы называются дираковскими гамма-матрицами и удовлетворяют определяющему соотношению алгебры Клиффорда:

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2 g_{mn} I_4, \quad I_4 = \begin{pmatrix} \delta^{\beta}_{\alpha} & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (9.2.38) \quad \text{clcl1}$$

Согласно (9.2.32), (9.2.33) преобразования Лоренца действуют на дираковский спинор следующим образом

$$\Psi \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^\dagger \end{pmatrix} \Psi \equiv U \Psi \Rightarrow \delta \Psi = \frac{1}{2} \omega^{nm} \begin{pmatrix} \sigma_{nm} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{nm} \end{pmatrix} \Psi = \frac{1}{2} \omega^{nm} \Sigma_{nm} \Psi, \quad (9.2.39) \quad \text{SLor2}$$

где

$$\Sigma_{nm} = -\frac{1}{4} (\gamma_n \gamma_m - \gamma_m \gamma_n) = \begin{pmatrix} \sigma_{nm} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{nm} \end{pmatrix}. \quad (9.2.40) \quad \text{SLor23}$$

Контрвариантный к (9.2.36) дираковский спинор имеет вид

$$\bar{\Psi} = (\eta^\alpha, \xi_{\dot{\alpha}}) \quad (9.2.41) \quad \text{dirspin1}$$

и, как следствие (9.2.36), (9.2.37), мы имеем  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$ , где  $\Psi^\dagger = (\xi_{\dot{\alpha}}, \eta^\alpha)^{37}$ . Т.о., контрвариантный дираковский спинор  $\bar{\Psi}$  (9.2.41) оказывается обычным дираковски сопряженным спинором к спинору  $\Psi$ . Инвариантная, относительно преобразований (9.2.39), форма имеет вид

$$(\bar{\Psi} \Psi) = \eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_{\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\alpha}} = \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi. \quad (9.2.42) \quad \text{info}$$

Т.е. преобразование (9.2.39) оказывается инфинитезимальной формой некоторого унитарного преобразования  $\Psi \rightarrow U\Psi$ , сохраняющего метрику, реализованную матрицей  $\gamma_0$ ,

$$U^\dagger \gamma_0 U = \gamma_0 \Rightarrow U \in \text{Spin}(1, 3),$$

и матрицы  $\Sigma_{nm}$  – образуют базис в алгебре Ли группы  $\text{Spin}(1, 3)$ , о которой мы будем говорить в следующей Лекции. Т.к.  $\gamma_0^2 = I_4$ , то у матрицы  $\gamma_0$  имеются собственные значения  $\pm 1$  и, с помощью преобразования эквивалентности, ее можно привести к виду  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ , где  $I$  обозначает  $(2 \times 2)$  единичную матрицу. Отсюда следует, что  $\text{Spin}(1, 3) \subset SU(2, 2)$ .

Введем в рассмотрение еще одну гамма-матрицу

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{C}} & 0 \\ 0 & -I_{\mathbb{C}} \end{pmatrix}, \quad \gamma_5^2 = I_4, \quad \gamma_5\gamma_m + \gamma_m\gamma_5 = 0. \quad (9.2.43) \quad \text{dirg5}$$

Используя матрицу  $\gamma_5$  мы можем определить 2 проектора

$$P_L = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_5). \quad (9.2.44) \quad \text{prLR}$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R$$

Действие проекторов  $P_R, P_L$  на дираковский спинор расщепляет его на два би-спинора

$$\Psi_L = P_L \Psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = P_R \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (9.2.45) \quad \text{weil}$$

которые преобразуются при преобразованиях Лоренца как обычные дираковские спиноры (9.2.39), что следует из соотношений  $[\Sigma_{mn}, \gamma_5] = 0$ ,  $[\Sigma_{mn}, P_{R,L}] = 0$ . Спиноры (9.2.45) являются дираковской формой двухкомпонентных вейлевских спиноров  $\xi_\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$  и иногда именно эти спиноры  $\Psi_{L,R}$  называют вейлевскими.

<sup>37</sup> Следует отметить, что в определении  $\bar{\Psi}$  матрица  $\gamma_0$  (которая играет роль метрики) только формально совпадает с матрицей Дирака (9.2.37), но имеет другую расстановку точечных и бесточечных индексов.

На основе дираковского сопряжения спинора  $\bar{\Psi}$  (9.2.41) можно определить еще одно преобразование над  $\Psi$ , которое снова приводит к определению ковариантного спинора, преобразующегося согласно (9.2.39)

$$\Psi_C = C \gamma_0 \Psi^* = C \bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \xi^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (9.2.46) \quad \text{charge}$$

Этот спинор называется зарядово сопряженным к спинору  $\Psi$ .

Рассмотрим дираковский спинор (9.2.36) в частном случае, когда  $\xi_\alpha = \eta_\alpha$ . Очевидно, что такой 4-х компонентный спинор

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (9.2.47) \quad \text{major1}$$

определяется только двумя комплексными числами  $\eta_\alpha$  и преобразуется как дираковский спинор (9.2.39). Спинор  $\Psi_M$  называется майорановским. Замечательным свойством майорановского спинора (9.2.47) является то, что он удовлетворяет тождеству

$$\Psi_M = C \gamma_0 \Psi_M^* = (\Psi_M)_C,$$

т.е. майорановский спинор  $\Psi_M$  равен своему зарядово сопряженному спинору.

Заметим, что вейлевские спиноры (9.2.45) могут совпадать с майорановскими (9.2.47) только если они нулевые. Этот факт будет отмечен ниже в лекции о многомерных спинорах, где будет показано, что ненулевые майорано-вейлевские спиноры могут быть определены только в пространствах с размерностью  $D = 2 \bmod(8)$ .

#### 9.2.4 Твисторы.

Рассмотрим комплексный спинор  $Z_a$  и его комплексносопряженный спинор  $Z_a^*$  ( $a = 1, 2, 3, 4$ )

$$Z_a = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \mu^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad Z_a^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \\ \bar{\mu}^\alpha \end{pmatrix}, \quad (9.2.48) \quad \text{twistor}$$

которые образуют определяющее<sup>38</sup> и сопряженное к нему представления группы  $SU(2, 2)$ :

$$Z_a \rightarrow Z'_a = A_a^b Z_b, \quad Z_a^* \rightarrow Z'^*_a = \bar{A}_a^{\dot{b}} Z_{\dot{b}}^* \quad (A \in SU(2, 2), \quad \bar{A} = A^*).$$

Контрвариантный спинор  $\bar{Z}^a$  преобразуется по правилу

$$\bar{Z}^a \rightarrow (\bar{Z}')^a = \bar{Z}^b (A^{-1})_b^a.$$

<sup>38</sup> Следует различать определяющее (стандартное) и фундаментальное представления. Представление группы (или алгебры) Ли называется фундаментальным, если оно неприводимо и его старший вес является фундаментальным весом. Фундаментальные веса  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , это веса которые определяют базис  $\Lambda^*$  дуальный к набору простых корней  $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_n}$ . Например, фундаментальными представлениями специальной линейной группы  $SL(N)$  являются внешние степени стандартного представления.



Этот спинор имеет вид

$$\bar{Z}^a = (\bar{\mu}^\alpha, -\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}), \quad \bar{Z}^a = Z_a^* g^{\dot{a}a}.$$

и строится из  $Z_a^*$  (9.2.48) с помощью инвариантной, относительно преобразований  $SU(2, 2)$ , метрики  $g^{\dot{a}a}$

$$g^{\dot{a}a} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \\ \delta_{\beta}^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{\dot{a}}^b g^{\dot{a}a} A_a^b = g^{bb}.$$

Т.о. инвариантная форма (ср. с (9.2.42)) для спиноров  $\bar{Z}^a$ ,  $Z_a$  равна

$$(\bar{Z}^a Z_a) = \bar{\mu}^\alpha \lambda_\alpha - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \mu^{\dot{\alpha}}. \quad (9.2.49) \quad \text{spns}$$

Пусть спиноры  $Z_a$  и  $\bar{Z}^a$  удовлетворяют каноническим  $SU(2, 2)$ -инвариантным коммутационным соотношениям

$$[\bar{Z}^a, Z_b] = i \delta_b^a \Rightarrow [\bar{\mu}^\alpha, \lambda_\beta] = i \delta_\beta^\alpha, \quad [\mu^{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}] = i \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}. \quad (9.2.50) \quad \text{comzz}$$

Тогда генераторы алгебры Ли группы  $SU(2, 2) \sim SO(2, 4)$  можно реализовать, как квадратичные комбинации осцилляторов (9.2.50), следующим образом (ср. с (??))

$$\mathcal{P}_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad K^{\dot{\alpha}\alpha} = \mu^{\dot{\alpha}} \bar{\mu}^\alpha, \quad M_{\alpha\beta} = \lambda_{(\alpha} \bar{\mu}_{\beta)}, \quad \bar{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \mu_{(\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\beta})}, \quad D = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha \bar{\mu}^\alpha + \mu^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}). \quad (9.2.51) \quad \text{gsu22}$$

Отсюда в частности следует равенство  $K^m K_m = 0$ .

Рассмотрим релятивистскую безмассовую частицу, состояние которой описывается точкой в фазовом пространстве с координатами  $\{x^m, p^m\}$  (двигающуюся в пространстве  $\mathcal{M}$  с 4-мя координатами  $x_m$  и 4-импульсом  $p^m$ ,  $p^m p_m = 0$ ).

**Определение 9.2.2** *Фундаментальное представление  $Z_a$  (9.2.48) группы  $SU(2, 2)$  называется твистором, если имеется следующая связь между спинорами (9.2.48) и координатами  $\{x^m, p^m\}$*

$$P_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad \mu^{\dot{\alpha}} = X^{\dot{\alpha}\beta} \lambda_\beta, \quad \bar{\mu}^\alpha = \bar{\lambda}_{\dot{\beta}} X^{\dot{\beta}\alpha}, \quad (9.2.52) \quad \text{twtr}$$

где мы определили

$$P_{\alpha\dot{\alpha}} = p_m \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m, \quad X^{\dot{\alpha}\alpha} = x^m \tilde{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\alpha}. \quad (9.2.53) \quad \text{mXP}$$

Связь (9.2.52) называется твисторным преобразованием.

Учитывая уравнения (9.2.52) и (9.2.53), мы можем переписать образующие (9.2.51) в терминах координат  $\{x_m, p^m\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= P = p_m \sigma^m, \quad D = \frac{1}{2}(p_m x^k + x^k p_m) \text{Tr}(\sigma^m \tilde{\sigma}_k) = (p x) + (x p), \\ K + 4i\hbar X &= x^m p_n x^k \tilde{\sigma}_m \sigma^n \tilde{\sigma}_k + 4i\hbar X = x^m (x^k p_n - i\hbar \delta_n^k) \tilde{\sigma}_m \sigma^n \tilde{\sigma}_k + 4i\hbar X = \\ &= \frac{1}{2} x^m x^k p^n (\tilde{\sigma}_m \sigma_n \tilde{\sigma}_k + \tilde{\sigma}_k \sigma_n \tilde{\sigma}_m) = \frac{1}{2} x^m x^k p^n ((2g_{mn} - \tilde{\sigma}_n \sigma_m) \tilde{\sigma}_k + (2g_{kn} - \tilde{\sigma}_n \sigma_k) \tilde{\sigma}_m) = \\ &= \frac{1}{2} x^m x^k p^n (2g_{mn} \tilde{\sigma}_k + 2g_{kn} \tilde{\sigma}_m - 2g_{mk} \tilde{\sigma}_n) = (2 x^n (x p) - (x^2) p^n) \tilde{\sigma}_n, \\ M_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\dot{\beta}} X^{\dot{\beta}\gamma} \mathcal{E}_{\gamma\beta} + P_{\beta\dot{\beta}} X^{\dot{\beta}\gamma} \mathcal{E}_{\gamma\alpha} = p^m x^k [(\sigma_m \tilde{\sigma}_k \mathcal{E})_{\alpha\beta} + (\sigma_m \tilde{\sigma}_k \mathcal{E})_{\beta\alpha}] = \\ &= -2p^m x^k [(\sigma_{mk} \mathcal{E})_{\alpha\beta} + (\sigma_{mk} \mathcal{E})_{\beta\alpha}] = 2(p^k x^m - p^m x^k) (\sigma_{mk})_\alpha^\gamma \mathcal{E}_{\gamma\beta}, \\ \bar{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \mathcal{E}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} X^{\dot{\gamma}\beta} P_{\beta\dot{\beta}} + \mathcal{E}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} X^{\dot{\gamma}\beta} P_{\beta\dot{\alpha}} = 2(x^k p^m - x^m p^k) \mathcal{E}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} (\tilde{\sigma}_{mk})_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались соотношениями (9.2.25), (9.2.28), (9.2.29),  $[x_m, p^n] = i\hbar\delta_m^n$ . Т.о., действительно алгебра (9.2.51) связана с конформной алгеброй  $so(2, 4)$  (см. (9.1.17), (??)).

В заключении отметим, что инвариант  $(\bar{Z}^a Z_a)$  (9.2.49) связан со спиральностью безмассовой частицы, т.к.

$$W_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}(\bar{Z}^a Z_a) P_{\alpha\dot{\alpha}} , \quad (9.2.54) \quad \text{plubi}$$

где матрица  $W_{\alpha\dot{\alpha}} = W^m (\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}$  и  $W_m$  – координаты вектора Паули-Любанского

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{mnkr} \hat{M}^{nk} \hat{P}^r . \quad (9.2.55) \quad \text{plub}$$

### Упражнения.

1. Доказать, что операторы  $\sigma_{nm}$  образуют алгебру Ли

$$[\sigma_{nm}, \sigma_{kl}] = -g_{nl}\sigma_{mk} + g_{nk}\sigma_{ml} - g_{mk}\sigma_{nl} + g_{ml}\sigma_{nk} ,$$

которая совпадает с алгеброй Ли группы Лоренца (9.1.19).

2. Доказать, что для четырехмерных матриц  $\gamma_m$  (9.2.37), образующих алгебру Клиффорда (9.2.38), выполняются тождества (указание, см. (9.2.27))

$$\text{Tr}(\gamma_m \gamma_n) = 4g_{mn} , \quad \text{Tr}(\gamma_m \gamma_n \gamma_k) = 0 , \quad \text{Tr}(\gamma_m \gamma_n \gamma_k \gamma_l) = 4(g_{mn}g_{kl} - g_{mk}g_{nl} + g_{ml}g_{nk}) .$$

3. Доказать, что если матрица  $X = x^m \sigma_m$  (9.2.3) представима в виде

$$X_{\alpha\dot{\alpha}} = \xi_\alpha \xi_{\dot{\alpha}} , \quad X^\dagger = X , \quad (9.2.56) \quad \text{twist}$$

то соответствующий 4-вектор с координатами  $\{x^m\}$  лежит на световом конусе  $x^m x_m = 0$ . Доказать формулу  $x^m = \xi_{\dot{\alpha}} (\tilde{\sigma}^m)^{\dot{\alpha}\alpha} \xi_\alpha$  и расписать ее явно для всех компонент  $x^m$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ ) через компоненты спиноров  $\xi_\alpha, \xi_{\dot{\alpha}}$ .

## 9.3 $D$ - мерная алгебра Клиффорда $\mathcal{Cl}_D$ и ее представления. Группы $Spin(D)$ . Алгебра Клиффорда $\mathcal{Cl}_{(D-1,1)}$ и ее представления. Группы $Spin(D-1, 1)$ .

**Алгебра Клиффорда  $\mathcal{Cl}_D$  и ее представления. Группы  $Spin(D)$ .**

Рассмотрим алгебру Клиффорда  $\mathcal{Cl}_D$  для  $D$ -мерного евклидова пространства:

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\delta_{mn} \quad (9.3.1) \quad \text{cl1}$$

где  $m, n = 1, 2, \dots, D$ . Эта алгебра является конечномерной. Пусть пространство является четномерным  $D = 2\nu$  (как мы увидим ниже случай нечетномерной алгебры  $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$  получается из  $\mathcal{Cl}_{2\nu}$  добавлением одного генератора  $\Gamma_{D+1}$ , который является аналогом матрицы  $\gamma_5$  для 4-х мерного случая, см. ниже). Построим для алгебры (9.3.1) базис, который очевидно должен состоять из единичного элемента 1, самих  $D$  образующих  $\Gamma_m$  и всех возможных антисимметричных комбинаций образующих  $\Gamma_m$

$$\Gamma_A = \{1, \Gamma_m, \Gamma_{mn}, \Gamma_{mnk}, \Gamma_{m_1 m_2 m_3 m_4}, \dots, \Gamma_{m_1 \dots m_{D-1}} \sim \Gamma_m \Gamma_{D+1}, \Gamma_{D+1}\} , \quad (9.3.2) \quad \text{clbas}$$

где  $\Gamma_{m_1 \dots m_k}$  – антисимметричная (для дальнейшего удобства нормированная некоторым образом) комбинация произведения  $k$  образующих  $\Gamma_m$ , например

$$\Gamma_{mn} = \frac{1}{4}(\Gamma_m \Gamma_n - \Gamma_n \Gamma_m), \quad \Gamma_{D+1} = (-i)^\nu \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_D.$$

Используя определяющие соотношения (9.3.1), набор образующих (9.3.2), после соответствующей перенормировки, можно представить в виде

$$\Gamma_A = \{I, \Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2}, \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2} \Gamma_{m_3}, \Gamma_{m_1} \Gamma_{m_2} \Gamma_{m_3} \Gamma_{m_4}, \dots, \Gamma_1 \Gamma_2 \cdots \Gamma_D\} \quad (9.3.3) \quad \text{clbas2}$$

где в каждом мономе индексы упорядочены согласно правилу:  $0 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq D-1$  (т.е. мономы упорядочены лексикографически). Теперь вычислим размерность алгебры (9.3.1). Число элементов типа  $\Gamma_{m_1 \dots m_k}$  равно числу сочетаний  $k$  элементов из  $D$ , т.е. мы получаем<sup>39</sup>

$$\dim\{\Gamma_{m_1 \dots m_k}\} = C_D^k = \frac{D!}{k!(D-k)!}.$$

Т.о. полная размерность  $D$ -мерной алгебры Клиффорда  $\Gamma_D$  равна

$$\dim(\mathcal{Cl}_D) = \sum_{k=0}^D \frac{D!}{k!(D-k)!} = 2^D.$$

Это значит, что если бы мы строили матричное представление для  $\mathcal{Cl}_D$ , в котором все базисные элементы (9.3.2) были бы независимы, то такое минимальное матричное представление реализовывалось бы  $2^{D/2}$ -мерными матрицами  $2^{D/2} \times 2^{D/2} = 2^\nu \times 2^\nu$ . Раз представление такой размерности минимально, то оно автоматически будет неприводимым.

Построим явно это  $2^{D/2}$ -мерное неприводимое представление алгебры (9.3.1). Для этого разобьем все множество образующих  $\{\Gamma_m\}$  на 2 группы, скажем на группы с четными и нечетными индексами, и рассмотрим следующий набор операторов  $\{z_\alpha, \bar{z}_\alpha\}$  ( $\alpha = 1, \dots, D/2 = \nu$ )

$$z_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_{2\alpha-1} + i\Gamma_{2\alpha}), \quad \bar{z}_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma_{2\alpha-1} - i\Gamma_{2\alpha}). \quad (9.3.4) \quad \text{closc}$$

Эти операторы, в силу соотношений (9.3.1), образуют  $D/2$ -мерную алгебру фермионных осцилляторов

$$[z_\alpha, z_\beta]_+ = 0, \quad [\bar{z}_\alpha, \bar{z}_\beta]_+ = 0 \quad (\forall \alpha, \beta), \quad [z_\alpha, \bar{z}_\beta]_+ = \delta_{\alpha\beta}. \quad (9.3.5) \quad \text{cl3}$$

<sup>39</sup> Действительно, в качестве первого индекса  $m_1$  можно взять любой индекс из  $D$  индексов  $1, \dots, D$ , в качестве второго  $m_2$  – любой из оставшихся  $D-1$  индексов, и так далее. На последнее место –  $m_k$  остается  $D-k+1$  возможных индексов. Т.о. мы имеем  $D(D-1)\cdots(D-k+1)$  возможностей расставить  $D$  индексов на  $k$  местах. Учитывая лексикографическое упорядочение  $k$  индексов, мы должны поделить число  $\frac{D!}{(D-k)!}$  на число всех их перестановок  $k!$ .

Займемся построением представления  $\rho$  для алгебры (9.3.5). Наиболее естественный способ – это построение пространства Фока для алгебры (9.3.5), когда операторы  $z_\alpha$  мы рассматриваем как операторы уничтожения, а  $\bar{z}_\alpha$  – как операторы рождения. Пусть  $|0\rangle$  – вакуумный вектор, т.е.

$$z_\alpha |0\rangle = 0 \quad (\forall \alpha = 1, \dots, \nu),$$

тогда все пространство представления Фока для алгебры (9.3.5) порождается векторами ( $k = 0, 1, \dots, \nu$ ):

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_k\rangle = \bar{z}_{\alpha_1} \cdots \bar{z}_{\alpha_k} |0\rangle \quad (1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq \nu) \quad (9.3.6) \quad \text{fock}$$

Число таких независимых векторов вычисляется также как и размерность алгебры Клиффорда и в результате это число равно  $2^\nu = 2^{D/2}$ , что совпадает с размерностью, указанной выше, для минимального точного матричного представления алгебры Клиффорда  $\mathcal{Cl}_{2\nu}$ .

**Определение 9.3.1** Вектора в пространстве Фока (9.3.6) называются  $D = 2\nu$ -мерными спинорами.

В случае  $\nu = 1$  представление для (9.3.5) двумерно, т.к. в качестве базисных элементов мы имеем  $v_1 = |0\rangle$ ,  $v_2 = z|0\rangle$ . Далее

$$zv_1 = 0, \quad zv_2 = v_1, \quad \bar{z}v_1 = v_2, \quad \bar{z}v_2 = 0,$$

т.е. в базисе  $v_1, v_2$  мы имеем матричное представление:

$$zv_i = v_k \rho_{ki}(z), \quad \bar{z}v_i = v_k \rho_{ki}(\bar{z}) \Rightarrow \rho(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(в дальнейшем для простоты мы не будем писать знак гомоморфизма  $\rho$ ). Соответствующие двумерные гамма-матрицы имеют вид

$$\Gamma_1 = \sigma_1, \quad \Gamma_2 = \sigma_2, \quad \Gamma_3 = (-i)\Gamma_1\Gamma_2 = \sigma_3, \quad (9.3.7) \quad \text{c1d2}$$

где  $\Gamma_3 = \sigma_3$  является двумерным аналогом  $\gamma_5$ -матрицы, а 3 матрицы Паули ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) являются 3-х мерными гамма-матрицами.

Для произвольного числа  $\nu$  это представление обобщается следующим образом

$$z_\alpha = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{1 \cdots \otimes 1}_{\nu-\alpha}, \quad (9.3.8) \quad 4$$

$$\bar{z}_\alpha = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{1 \cdots \otimes 1}_{\nu-\alpha}, \quad (9.3.9) \quad 5$$

где  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Данное представление, как и ожидалось, является  $2^{D/2}$ -мерным. Пользуясь условием (9.3.4), гамма-матрицы могут быть выражены через матрицы  $z_\alpha$ ,  $\bar{z}_\alpha$  и соответственно записываются в виде

$$\Gamma_{2\alpha-1} = z_\alpha + \bar{z}_\alpha = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{1 \cdots \otimes 1}_{\nu-\alpha}, \quad (9.3.10) \quad \text{c17}$$

$$\Gamma_{2\alpha} = i(\bar{z}_\alpha - z_\alpha) = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{\alpha-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{1 \cdots \otimes 1}_{\nu-\alpha}. \quad (9.3.11) \quad \text{c18}$$

Это  $2^\nu$ -мерное представление неприводимо; все другие  $2^\nu$ -мерные представления получаются из него преобразованиями эквивалентности (включая всевозможные перестановки  $\Gamma$ -матриц?). Заметим, что в этом представлении  $\Gamma$ -матрицы унитарны  $\Gamma_n^\dagger \Gamma_n = 1$ , т.к.  $\Gamma_n^\dagger = \Gamma_n$ . Кроме того мы имеем  $\Gamma_{2\alpha-1}^* = \Gamma_{2\alpha-1}^T = \Gamma_{2\alpha-1}$ ,  $\Gamma_{2\alpha}^* = \Gamma_{2\alpha}^T = -\Gamma_{2\alpha}$ , что можно записать единым образом

$$\Gamma_m^* = \Gamma_m^T = (-)^{m+1} \Gamma_m.$$

Аналог 4-х мерной матрицы  $\Gamma_5$  (9.2.43) имеет вид ( $\nu = D/2$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_{D+1} &= (-i)^\nu \Gamma_1 \cdots \Gamma_D = (-i)^\nu (\Gamma_1 \Gamma_2)(\Gamma_3 \Gamma_4) \cdots (\Gamma_{D-1} \Gamma_D) = \prod_{\alpha=1}^\nu ((-i) \Gamma_{2\alpha-1} \Gamma_{2\alpha}) = \\ &= (\sigma_3 \otimes 1 \otimes \cdots) (1 \otimes \sigma_3 \otimes 1 \cdots) \cdots (1 \otimes \cdots \otimes \sigma_3) = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_\nu, \end{aligned} \quad (9.3.12) \quad \text{g5}$$

$$\Gamma_{D+1}^2 = 1, \quad [\Gamma_{D+1}, \Gamma_m]_+ = 0 \quad (\forall m = 1, \dots, D).$$

Рассмотрим теперь алгебру Клиффорда (9.3.1) в нечетномерном случае  $D = 2\nu + 1$ . В этом случае мы можем предъявить нетривиальный центральный элемент  $\tilde{\Gamma}$  в  $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$ :

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu} \Gamma_{2\nu+1}, \quad \tilde{\Gamma}^2 = (-1)^\nu = e^{i\pi\nu}.$$

Т.о., неприводимые представления  $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$  характеризуются двумя возможными собственными значениями оператора  $\tilde{\Gamma}$ :  $\pm e^{i\pi\nu/2}$ . Причем, т.к.  $\Gamma_{2\nu+1}^2 = 1$ , мы имеем в соответствующем представлении

$$\Gamma_{2\nu+1}^\pm = \mp \exp\left(\frac{i\pi\nu}{2}\right) \Gamma_1 \cdots \Gamma_{2\nu}, \quad (9.3.13) \quad \text{g5d}$$

т.е. последний генератор  $\Gamma_{2\nu+1}^\pm$  строится как произведение предыдущих  $\Gamma_m$  ( $m = 1, \dots, 2\nu$ ). Следовательно, неприводимые представления для нечетномерной алгебры  $\mathcal{Cl}_{2\nu+1}$  получается из неприводимого представления для  $\mathcal{Cl}_{2\nu}$  добавлением еще одной образующей (9.3.12), (9.3.13), а размерности этих представлений совпадают для  $D = 2\nu$  и  $D = 2\nu + 1$  и равны  $2^{[D/2]}$ , где  $[D/2]$  – целая часть числа  $D/2$ . Т.к. для нечетномерного случая  $D = 2\nu + 1$  мы имеем равенство  $2^D = (2^\nu)^2 + (2^\nu)^2$ , то, согласно формуле (4.6.27), мы имеем в этом случае 2 неэквивалентных представления алгебры  $\mathcal{Cl}_D$  одинаковой размерности  $2^\nu$ , которые отличаются знаком у последней образующей  $\Gamma_{2\nu+1}$  (9.3.13).

Напомним, что в четном числе измерений  $D = 2\nu$  все  $2^\nu$ - мерные представления алгебры Клиффорда эквивалентны, т.к. аналог формулы (4.6.27) имеет вид  $2^D = (2^\nu)^2$  и, следовательно, имеется всего лишь одно неприводимое неэквивалентное представление размерности  $2^\nu$ . В частности эквивалентность представлений  $\rho(\Gamma_m)$  и  $\pm \rho(\Gamma_m)^*$  обслуживается специальными  $(2^\nu \times 2^\nu)$ - матрицами  $C, C'$ :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots, \quad C^2 = 1, \quad (9.3.14) \quad \text{c19}$$

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdots = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots, \quad (C')^2 = 1, \quad (9.3.15) \quad \text{cl10}$$

которые, как легко проверить, удовлетворяют соотношениям

$$C' C = (-1)^\nu C C' = (-1)^k (i)^\nu \Gamma_{D+1} \quad (\nu = 2k, 2k+1).$$

Матрицы  $C, C'$  связаны с гамма-матрицами (9.3.10), (9.3.11) следующим образом

$$\begin{aligned} \Gamma_2 \Gamma_4 \cdots \Gamma_{2\nu} &= \begin{cases} (i)^k \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_2 = (i)^k C', & \nu = 2k; \\ (i)^k \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_2 = (i)^k C, & \nu = 2k+1; \end{cases} \\ \Gamma_1 \Gamma_3 \cdots \Gamma_{2\nu-1} &= \begin{cases} (-i)^k \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_1 = (-i)^k C, & \nu = 2k; \\ (-i)^k \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_1 = (-i)^k C', & \nu = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

**Утверждение 9.3.1** Для представления (9.3.10), (9.3.11), (9.3.14) алгебры  $Cl_{2\nu}$  мы имеем следующие соотношения

$$-C \Gamma_m C = C' \Gamma_m C' = (-1)^{m+1} \Gamma_m = \Gamma_m^* = \Gamma_m^T, \quad (9.3.16) \quad \text{cl11}$$

$$C \Gamma_{D+1} C = C' \Gamma_{D+1} C' = (-1)^\nu \Gamma_{D+1}. \quad (9.3.17) \quad \text{cl12}$$

**Доказательство.** Действительно, рассмотрим равенства (9.3.16) для случая матрицы  $C$  (для случая матрицы  $C'$  рассуждения аналогичны). При коммутировании матрицы  $\Gamma_{2\alpha-1}$  с  $C$  мы имеем два возможных случая. Когда фактор  $\sigma_1$  из  $\Gamma_{2\alpha-1}$  попадает 1.) на фактор  $\sigma_1$  из  $C$  (в этом случае  $\sigma_1$  из  $\Gamma_{2\alpha-1}$  при проносе через  $C$  знак не меняет) и 2.) на фактор  $\sigma_2$  из  $C$  (в этом случае  $\sigma_1$  из  $\Gamma_{2\alpha-1}$  при проносе через  $C$  знак меняет). В первом случае число  $\sigma_3$  в  $\Gamma_{2\alpha-1}$  нечетно, а во втором случае четно. Т.о., в обоих случаях мы имеем  $\Gamma_{2\alpha-1} C = -C \Gamma_{2\alpha-1}$ . Аналогично рассуждая, мы получаем  $\Gamma_{2\alpha} C = C \Gamma_{2\alpha}$ , что и доказывает (9.3.16) в случае матрицы  $C$ . Соотношения (9.3.17) очевидны. ■

Отметим, что если  $\rho'(\Gamma_m)$  – любое  $2^\nu$ -мерное матричное представление алгебры  $Cl_D$ , то и  $\rho'(\Gamma_m)^*$ ,  $\rho'(\Gamma_m)^T$ ,  $\rho'(\Gamma_m)^\dagger$  (включая все перестановки матриц  $\rho'(\Gamma_1), \dots, \rho'(\Gamma_{D+1})$ ) также определяют матричные представления  $Cl_D$ , причем все эти представления эквивалентны. В частности для представления (9.3.10), (9.3.11) это следует из (9.3.16).

Определим элементы  $\Gamma_{mn} = \frac{1}{4}(\Gamma_m \Gamma_n - \Gamma_n \Gamma_m)$ . Элементы  $\Gamma_{mn}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям для алгебры Ли группы  $SO(D)$  (в соотношениях (9.1.19) необходимо заменить  $g_{mn} \rightarrow \delta_{mn}$ )

$$[\Gamma_{nm}, \Gamma_{kl}] = \delta_{mk} \Gamma_{nl} - \delta_{ln} \Gamma_{km} - \delta_{nk} \Gamma_{ml} + \delta_{lm} \Gamma_{kn}. \quad (9.3.18) \quad \text{li1o6}$$

Действительно, это соотношение следует из тождеств

$$[\Gamma_{nm}, \Gamma_k] = \delta_{mk} \Gamma_n - \delta_{nk} \Gamma_m, \quad \Gamma_n \Gamma_l = 2 \Gamma_{nl} + \delta_{nl}, \quad (9.3.19) \quad \text{cl33}$$

которые легко проверяются с помощью (9.3.1).

Пусть  $X = x^m \Gamma_m = X^\dagger$ , тогда  $X^2 = x^2 I$ . Рассмотрим преобразования с помощью унитарных матриц  $A$ :

$$X \rightarrow X' = A X A^{-1} = A X A^\dagger \quad X' = X'^\dagger \quad (9.3.20) \quad \text{prspin}$$

такие, что если  $X = x^m \Gamma_m$ , то  $X'$  снова представима в виде  $X' = x'^m \Gamma_m$ . В этом случае мы имеем  $x^2 = x'^2$ . Такие преобразования образуют группу, которая называется  $Spin(D)$  и очевидно дважды накрывает  $SO(D)$  ( $\pm A$  обслуживают одно и тоже линейное преобразование координат  $x^m$ , определяющих матрицу  $X$ ).

Рассмотрим совокупность матриц вида

$$A = \exp(\omega^{mn} \Gamma_{mn}) , \quad (9.3.21) \quad \text{prspin1}$$

где  $\omega^{mn} = -\omega^{nm}$  – вещественные параметры. В силу эрмитовости  $\Gamma$ -матриц мы имеем  $\Gamma_{mn}^\dagger = -\Gamma_{mn}$  и следовательно  $A^\dagger = A^{-1}$ , т.е.  $A$  – унитарные матрицы. С другой стороны соотношения (9.3.19) гарантируют, что в результате преобразований (9.3.20) с матрицами (9.3.21) будет выполняться свойство  $X' = x'^m \Gamma_m$ . Следовательно матрицы (9.3.21) принадлежат группе  $Spin(D)$ . Т.к. алгебра (9.3.18) совпадает с алгеброй (9.1.19) (для  $g_{mn} = \delta_{mn}$ ), то группа  $Spin(D)$  локально изоморфна группе  $SO(D)$ .

**Замечание.** Имеется другой индуктивный способ построения представлений алгебры Клиффорда (9.3.1), который приводит к представлениям, отличающимся от (9.3.10), (9.3.11). Этот способ заключается в том, что если задано  $2^\nu$ -мерное представление алгебры  $\mathcal{Cl}_{2\nu}$  с образующими  $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2\nu}\}$ , то образующие  $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_{2\nu+2}\}$  алгебры  $\mathcal{Cl}_{2\nu+2}$  могут быть реализованы в виде  $2^{\nu+1}$ -мерных матриц следующим образом

$$\Gamma'_m = \tau_2 \otimes \Gamma_m \quad (m = 1, \dots, 2\nu) , \quad \Gamma'_{2\nu+1} = \tau_2 \otimes \Gamma_{D+1} , \quad \Gamma'_{2\nu+2} = \tau_1 \otimes I_{2\nu} , \quad (9.3.22) \quad \text{cldn}$$

где  $I_{2\nu}$  –  $2^\nu$ -мерная единичная матрица, а операторы  $\tau_i$  образуют 2-мерную алгебру Клиффорда

$$\tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i = 2\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2) ,$$

(например,  $\tau_1 = \sigma_1, \tau_2 = \sigma_2$ , где  $\sigma_{1,2}$  – матрицы Паули). Если в качестве представления исходной алгебры Клиффорда для  $\nu = 1$  мы выберем эрмитово представление (9.3.7), то в результате для всех  $\nu$  мы получаем по индукции эрмитово представление (9.3.22)  $(\Gamma'_m)^\dagger = \Gamma'_m$ . С точностью до перестановки образующих и умножения некоторых из них на  $i$  (псевдо-евклидов случай) это представление (для  $\nu = 1$ ) эквивалентно представлению 4-х мерной алгебры Клиффорда, приведенному в (9.2.37).

**Алгебра Клиффорда  $\mathcal{Cl}_{(D-1,1)}$ . Спинорная группа  $Spin(D-1, 1)$ .**

Перейдем к рассмотрению псевдоевклидовой метрики  $g_{mn} = \text{diag}(+, -, \dots, -)$ . Для этого введем матрицы

$$\gamma_0 = \Gamma_1 , \quad \gamma_k = i\Gamma_{k+1} \quad (k = 1, \dots, D-1) , \quad (9.3.23) \quad \text{Gaga}$$

для которых имеем

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2g_{mn} \quad (m, n = 0, \dots, D-1) , \quad (9.3.24) \quad \text{clg}$$

$$\gamma_m^* = (-)^m g_{mm} \gamma_m = (-)^m \gamma_0 \gamma_m \gamma_0 , \quad \gamma_m^T = (-)^m \gamma_m , \quad (9.3.25) \quad 12$$

$$\gamma_m^\dagger = g_{mm} \gamma_m = \gamma_0 \gamma_m \gamma_0 , \quad -C \gamma_m C = C' \gamma_m C' = (-)^m \gamma_m , \quad (m = 0, 1, \dots, D-1) . \quad (9.3.26) \quad 13$$

Т.о. из соотношений (9.3.25), (9.3.26) мы имеем равенства

$$\gamma_m^T = -C \gamma_m C = C' \gamma_m C' , \quad (9.3.27) \quad 13a$$

$$\gamma_m^* = -B \gamma_m B^{-1} , \quad B = C \gamma_0 . \quad (9.3.28) \quad 14$$

Из соотношения (9.3.28) и его комплексно сопряженного аналога легко вывести равенство  $\gamma_m = B^* B \gamma_m (B^* B)^{-1}$  откуда следует, что

$$B^* B = B B^* = \epsilon 1 , \quad (9.3.29) \quad mc1$$

(т.к. представление  $\gamma_m$  неприводимо). Константа  $\epsilon$  является вещественной и масштабным преобразованием матрицы  $B$  может быть приведена к  $\epsilon = \pm 1$ . Отметим, что в представлении (9.3.10), (9.3.11), (9.3.14) мы имеем

$$B = C \Gamma_1 = (-i) \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \dots , \quad B B^* = (-1)^{k+1} 1 \Rightarrow \epsilon = (-1)^{k+1} , \quad (9.3.30) \quad mc$$

где  $k$  определяется из соотношений  $\nu = 2k - 1, 2k$ .

Группа  $Spin(D - 1, 1)$  определяется также как и группа  $Spin(D)$  (см. (9.3.21)) а именно как множество матриц вида

$$A = \exp\left(\frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn}\right) , \quad (9.3.31) \quad prspin10$$

где  $\omega^{mn} = -\omega^{mn}$  – вещественные параметры, совпадающие с параметрами группы Лоренца, а образующие  $\Gamma_{mn}$  алгебры Ли группы  $Spin(D - 1, 1)$  имеют вид

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{4} (\gamma_m \gamma_n - \gamma_n \gamma_m) , \quad (9.3.32) \quad prspin11$$

и удовлетворяют соотношениям

$$[\gamma_{nm}, \gamma_{kl}] = g_{mk} \gamma_{nl} - g_{ln} \gamma_{km} - g_{nk} \gamma_{ml} + g_{lm} \gamma_{kn} , \quad (9.3.33) \quad ggmn$$

которые следуют из тождеств

$$[\gamma_{nm}, \gamma_k] = g_{mk} \gamma_n - g_{nk} \gamma_m , \quad \gamma_n \gamma_l = 2 \gamma_{nl} + g_{nl} . \quad (9.3.34) \quad cl331$$

В силу свойств (9.3.26) эрмитова сопряжения  $\gamma$ -матриц мы имеем  $\gamma_{mn}^\dagger = -\gamma_0 \Gamma_{mn} \gamma_0$  и следовательно условие унитарности для матриц  $A$  (9.3.31) переписывается в виде

$$A^\dagger \gamma_0 A = A \gamma_0 A^\dagger = \gamma_0 \Rightarrow A^{-1} = \gamma_0 A^\dagger \gamma_0 . \quad (9.3.35) \quad unit31$$

Т.е.,  $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ - мерные матрицы  $A$  принадлежат некомпактной унитарной группе  $SU(2^{D/2-1}, 2^{D/2-1})$ . Доказать! С другой стороны соотношения (9.3.34) гарантируют, что в результате преобразований

$$X' \rightarrow A X A^{-1} , \quad (9.3.36) \quad dmersp$$

с матрицами (9.3.31), где  $X = x^m \gamma_m$ , будет выполняться свойство  $X' = x'^m \gamma_m$ , где автоматически мы получим инвариантность  $x'^m g_{mn} x'^n = x^m g_{mn} x^n$ . Следовательно



матрицы (9.3.31) принадлежат группе, которая обозначается  $Spin(D-1, 1)$  и которая (в силу преобразования (9.3.36)) дважды накрывает группу  $SO(D-1, 1)$ . Т.к. алгебры Ли (9.1.19) и (9.3.33) совпадают, то группы  $SO(D-1, 1)$  и  $Spin(D-1, 1)$  локально изоморфны.

Пользуясь соотношением (9.3.35) мы определим дираковское сопряжение  $\bar{\psi}$  для многомерных спиноров. Инфинитезимальные преобразования спиноров  $\psi$  при лоренцевских вращениях, определяемых матрицами (9.3.31), ( $\omega_{mn} = -\omega_{nm} \in \mathbb{R}$ ) имеют вид

$$\delta\psi = \frac{1}{2}\omega^{mn}\gamma_{mn}\psi, \quad \gamma_{mn} = (\gamma_m\gamma_n - \gamma_n\gamma_m)/4, \quad (9.3.37) \quad 20$$

$$\gamma_{mn}^\dagger = -\gamma_0\gamma_{mn}\gamma_0, \quad (9.3.38) \quad 20a$$

что соответствует преобразованиям  $\gamma$ -матриц

$$\delta\gamma_k = -[\omega^{mn}\gamma_{mn}, \gamma_k] = \omega_k{}^m\gamma_m. \quad (9.3.39) \quad 20b$$

Ком. соотношения для генераторов  $\gamma_{mn}$  (9.3.37) были вычислены в (9.3.33) (ср. с формулой (9.3.18)). Из (9.3.37) следует, что сопряженный по Дираку спинор  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$  преобразуется в виде

$$\delta\bar{\psi} = \bar{\psi}(-\omega^{mn}L_{mn}) \quad (9.3.40) \quad 21$$

и соответственно величины типа  $\bar{\psi}(\gamma_m \dots)\psi$  преобразуются как тензоры, а преобразования  $\psi \rightarrow \exp(\omega^{mn}L_{mn})\psi$  являются унитарным по отношению к скалярному произведению  $\bar{\psi}_1\psi_2 = \psi_1^\dagger\gamma_0\psi_2$ , что следует из (9.3.35) и (9.3.38).

## 9.4 Уравнение Дирака и многомерные спиноры. Зарядово-сопряженные, вейлевские и майорановские спиноры в многомерии. Ковариантность уравнения Дирака.

Если спинорное поле  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению Дирака ( $M$  –масса частицы)

$$((i\partial_m - eA_m)\gamma^m - M)\psi = 0, \quad (9.4.1) \quad 15$$

(согласованному с выбором метрики  $g_{mn} = (+, -, \dots, -)$ ) то спинорное поле

$$\psi_C = B^{-1}\psi^* \quad (9.4.2) \quad \text{positr}$$

(эта формула, как нетрудно увидеть, эквивалентна (9.2.46) с точностью до замены  $B \rightarrow -B$ ; полная эквивалентность достигается при замене спиноров  $\psi \rightarrow i\psi$ ) соответствует античастице и подчиняется уравнению Дирака (9.4.1), в котором  $e$  заменено на  $-e$ . Действительно, после комплексного сопряжения уравнения (9.4.1) и умножения его слева на  $B^{-1}$ , с учетом (9.3.28), мы получаем

$$B^{-1}((-i\partial_m - eA_m)\gamma^{*m} - M)\psi^* = ((i\partial_m + eA_m)\gamma^m - M)B^{-1}\psi^* = 0. \quad (9.4.3) \quad 15c$$

Спинор  $\psi_C$  называется зарядово-сопряженным спинором, а матрица  $C$ - матрицей зарядового сопряжения (т.к. с ее помощью определяется зарядово-сопряженный спинор  $\psi_C = -C\bar{\psi}^T$ , ср. с (9.4.2)). Уравнение (9.4.1), описывающее частицу со спином,

было открыто П. Дираком. Он же заметил, что если у нас есть решение (9.4.1), описывающий частицу с зарядом  $e$ , то с помощью преобразования (9.4.2) доказывается существование нетривиального решения уравнения (9.4.3), описывающего античастицу с зарядом  $-e$ . На основании этого наблюдения Дирак предположил, что у каждой спиновой частицы должен быть партнер, соответствующий античастице с противоположным зарядом. Например для электрона должна обязательно существовать античастица – позитрон. Вскоре эта, предсказанная им теоретически, частица была найдена экспериментально.

По определению майорановский спинор (мы ввели эти спиноры при  $D = 4$  выше в (9.2.47)) описывает частицы совпадающие со своими античастицами  $\psi = \psi_C$ , т.е.

$$\psi = B^{-1}\psi^*, \quad (9.4.4) \quad \text{major}$$

(при этом из (9.4.1) и (9.4.3) следует  $e = 0$ ). Из уравнения (9.4.4) и его комплексно сопряженного аналога легко выводится соотношение  $\psi = BB^*\psi = \epsilon\psi$ , которое означает, что для существования майорановских спиноров необходимо иметь  $BB^* = +1$ , или  $\epsilon = +1$ . Вычислим  $\epsilon$  для матрицы  $B$  (9.3.28). Имеем

$$\gamma_0^* = \gamma_0 = \gamma_0^T, \quad C\gamma_0 = -\gamma_0 C, \quad C^* = (-)^k C = C^T \quad (\nu = 2k - 1, 2k), \quad (9.4.5) \quad 16$$

откуда сразу следует, что  $BB^* = (-)^k C\gamma_0 C\gamma_0 = (-)^{k+1} = \epsilon$  (сравните с (9.3.30)). Т.о.  $\epsilon = +1$  если  $k$  нечетно  $k = 2l + 1$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) и соответственно  $D = 2\nu = 2 + 8l, 4 + 8l$ . Во всех остальных четномерных случаях ( $D = 0, 6 \pmod{8}$ ) имеем  $\epsilon = -1$ .

Заметим, что параметр  $\epsilon$  можно записать в виде

$$\epsilon = -\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(D + 1)\right).$$

**Замечание 1.** Имеют место равенства

$$B^T = \epsilon B, \quad BB^\dagger = 1. \quad (9.4.6) \quad \text{BV}$$

Действительно, пользуясь (9.3.25), (9.3.26), (9.3.27), (9.3.30) и (9.4.5), мы получаем

$$\begin{aligned} (C\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_p})^T &= \gamma_{m_p}^T \cdots \gamma_{m_1}^T C^T = (-)^{k+p} C\gamma_{m_p} \cdots \gamma_{m_1} = \\ &= \epsilon (-)^{p-1} (-)^{\frac{(p-1)p}{2}} C\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_p} = \epsilon (-)^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} C\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_p}, \end{aligned} \quad (9.4.7) \quad \text{CG}$$

где  $m_1 < m_2 < \dots < m_p$ . В частности мы имеем  $(C\gamma_m)^T = \epsilon C\gamma_m$ , откуда с учетом определения матрицы  $B$  (9.3.28) мы получаем первое равенство из (9.4.6)

$$B^T = (C\gamma_0)^T = \epsilon C\gamma_0 = \epsilon B.$$

Пользуясь этим равенством и (9.3.29) мы легко выводим второе равенство из (9.4.6).

**Замечание 2.** При преобразовании подобия для образующих алгебры Клиффорда  $\gamma'_m = U\gamma_m U^{-1}$  матрица  $B$ , согласно (9.3.28), преобразуется по правилу  $B' = U^* B U^{-1}$ . Условие приведения матрицы  $B$  к единице  $U^* B = U$  (чисто мнимое представление для  $\gamma_m$  и вещественность майорановских спиноров  $\psi^* = B\psi = \psi$ , см. (9.4.4)) самосогласовано лишь в случае, когда  $\epsilon = +1$ . Очевидно, что матрица  $U$

определена с точностью до домножения слева на произвольную невырожденную вещественную матрицу  $R$ :  $U \rightarrow RU$ . Разлагая матрицу  $B$  на мнимую и действительную части  $B = B_1 + iB_2$ , где  $B_{1,2}$  вещественны и симметричны ( $\epsilon = +1$ ), из условия унитарности (9.4.6) получаем  $[B_1, B_2] = 0$ . Т.о.  $B_{1,2}$  могут быть одновременно диагонализированы ортогональным преобразованием  $O$  и соответственно получить  $B = \text{diag}(e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}, \dots)$ . Выбирая затем  $U' = \text{diag}(e^{i\beta_1/2}, e^{i\beta_2/2}, \dots)$  мы приводим  $B$  к единичному виду с помощью матрицы  $U = U' O$ .

Найдем явный вид преобразования  $U$ . Для этого заметим, что матрица  $B$  в размерностях  $d = 2, 4 \bmod(8)$  имеет явный вид

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes B' \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes B' \otimes \dots, \quad (9.4.8) \quad 17$$

где блоки  $B'$  равны

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B'(B')^* = 1. \quad (9.4.9) \quad 18$$

Для матриц  $B_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  и  $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  существуют соответствующие матрицы  $U_{1,2}$ , которые приводят их к единичному виду:

$$U_1 = R \cdot \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} a & a^* \\ d^* & d \end{pmatrix}, \quad a, d \in \mathbb{C}.$$

Т.о. для приведения к единичному виду матрицы  $B'$  необходимо найти матрицу  $U_3$ , соответствующую матрице

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет блочный вид

$$U_3 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad B = A^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = C^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Интересно получить, используя явный вид для матрицы  $U$ , явные чисто мнимые представления для матриц  $\gamma_m$  (в силу уравнения (9.3.28) для  $B = 1$ ).

Теперь мы более подробно обсудим свойства **спиноров в четномерных пространствах**.

Определим майорановское сопряжение  $\psi^{(M)} \equiv \psi^T C$ . Легко проверить, что при лоренцевых поворотах спинор  $\psi^{(M)}$  преобразуется также как и  $\bar{\psi}$  (9.3.40). Если спинор  $\psi$  удовлетворяет условию майорановости (9.4.4), то дираковское сопряжение переходит в майорановское сопряжение:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 = \psi^T B^T \gamma_0 = -\psi^T \gamma_0 C \gamma_0 = \psi^T C \quad (9.4.10) \quad \text{mct}$$

Другими словами условие майорановости можно представить в виде  $\bar{\psi} = \psi^{(M)}$ .

Аналогично (9.3.12) определим

$$\gamma_{D+1} = (i)^{\nu+1} \gamma_0 \cdots \gamma_{D-1} = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3, \quad (9.4.11) \quad \text{G5}$$

$$\gamma_{D+1}^2 = 1, \quad \gamma_{D+1}^* = (-)^{\nu+1} B \gamma_{D+1} B^{-1}, \quad \gamma_{D+1} \gamma_m + \gamma_m \gamma_{D+1} = 0.$$

С помощью матрицы  $\gamma_{D+1}$  определяются вейлевские спиноры

$$(\gamma_{D+1} + 1)\psi = 0 \quad (\gamma_{D+1} - 1)\psi = 0. \quad (9.4.12) \quad \text{weyl}$$

Для майорановских спиноров (9.4.4) из этих условий следует

$$0 = (\gamma_{D+1}^* \pm 1)\psi^* = ((-)^{\nu+1} B \gamma_{D+1} B^{-1} \pm 1)\psi^* = B((-)^{\nu+1} \gamma_{D+1} \pm 1)\psi$$

Т.о., при  $\psi \neq 0$ , условия (9.4.12) совместны с условием майорановости (9.4.4) только для случая нечетных  $\nu$  или ( $D = 2 \bmod(4)$ ). Так как майорановские спиноры существуют только при ( $D = 2, 4 \bmod(8)$ ), мы заключаем, что ненулевые майорано-вейлевские спиноры могут быть определены только для  $D = 2, 10, 18, 26, \dots = 2 \bmod(8)$ .

#### Добавление 1. Ковариантность уравнения Дирака.

**А.** Прежде всего уравнение Дирака (9.4.1) должно быть ковариантно по отношению к преобразованиям группы Лоренца (Пуанкаре). Пусть координаты пространства Минковского преобразуются по правилам (9.1.16)  $x^n \rightarrow \tilde{x}^n = x^m (\Lambda^{-1})_m^n$ . Тогда преобразованное уравнение Дирака, в силу его ковариантности, должно иметь вид

$$(\gamma^m (i\tilde{\partial}_m - e\tilde{A}_m(\tilde{x})) - M) \tilde{\psi}(\tilde{x}) = 0, \quad (9.4.13) \quad 15L$$

( $\gamma$ -матрицы не преобразуются). Преобразования полей должны быть такими, чтобы это уравнение было эквивалентно (9.4.1). Форма коммутационных соотношений  $[\tilde{\partial}_m, \tilde{x}^n] = \delta_m^n$  диктует преобразование  $\tilde{\partial}_m = \Lambda_m^n \partial_n$ . Т.к. производная  $\nabla_m = (i\tilde{\partial}_m - e\tilde{A}_m(\tilde{x}))$  должна трансформироваться ковариантно, то мы имеем

$$(i\tilde{\partial}_m - e\tilde{A}_m(\tilde{x})) = \Lambda_m^n (i\partial_n - eA_n(x)) \quad (9.4.14) \quad \text{dop3a}$$

и соответствующее преобразование калибровочного поля  $A_m$  имеет вид

$$\tilde{A}_m(\tilde{x}) = \Lambda_m^n A_n(x). \quad (9.4.15) \quad \text{dop3}$$

Подставим (9.4.14) в (9.4.13)

$$(\gamma^m \Lambda_m^n (i\partial_n - eA_n(x)) - M) \tilde{\psi}(\tilde{x}) = 0, \quad (9.4.16) \quad 15Lb$$

и пусть существует оператор  $S$  такой, что

$$S \gamma^n S^{-1} = \gamma^m \Lambda_m^n, \quad (9.4.17) \quad \text{dop4s}$$

т.е. (9.4.16) переписывается в виде

$$S (\gamma^n (i\partial_n - eA_n(x)) - M) S^{-1} \tilde{\psi}(\tilde{x}) = 0. \quad (9.4.18) \quad 15La$$

Инфинитезимальная форма соотношения (9.4.17) для  $S = 1 + T + \dots$  эквивалентна условию

$$[T, \gamma^n] = \gamma^m \omega_m^n = \gamma_m \omega^{mn} = -\omega^{nm} \gamma_m$$

Произвол в определении  $T$  фиксируется равенством  $[\gamma^n, T - T'] = 0$  и, т.к. представление  $\gamma^n$  неприводимо, то  $T - T' = \text{const} \cdot I$ , т.е.  $T$  определяется с точностью до прибавления матрицы, которая пропорциональна единичной матрице. Фиксируем этот произвол требованием  $\text{Tr}(T) = 0$  ( $\det(S) = 1$ ). Тогда из (9.3.39), т.к.  $\text{Tr}(\gamma_{mn}) = 0$ , следует, что  $T = \frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn}$  и  $S = \exp(\frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn}) \in \text{Spin}(D-1, 1)$  (см. (9.3.31)), а соотношение (9.4.17) переписывается в виде

$$\gamma^m \Lambda_m^n = \exp(\frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn}) \gamma^n \exp(-\frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn}). \quad (9.4.19) \quad \text{dor4}$$

Теперь, учитывая (9.4.19), для ковариантности уравнения (9.4.13) мы должны потребовать следующее правило преобразования спинорных полей

$$\exp(-\frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn}) \tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(x). \quad (9.4.20) \quad \text{dor5}$$

Формулу (9.4.20) можно переписать в виде (см. (9.1.16), (9.2.39))

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &= \exp(\frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn}) \psi(x^m \Lambda_m^n) = (1 + \frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn} + \dots) \psi(x^n + x^m \omega_m^n + \dots) = \\ &= (1 + \frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn} + x^m \omega_m^n \partial_n + \dots) \psi(x) = (1 + \frac{1}{2} \omega^{mn} \gamma_{mn} + \frac{1}{2} \omega^{mn} M_{mn} + \dots) \psi(x). \end{aligned} \quad (9.4.21) \quad \text{dor6}$$

Т.о., полными генераторами преобразования Лоренца на спинорных полях являются операторы

$$M_{mn}^{(tot)} = M_{mn} + \gamma_{mn} = (x_m \partial_n - x_n \partial_m) + \frac{1}{4} (\gamma_m \gamma_n - \gamma_n \gamma_m) \quad (9.4.22) \quad \text{Mtot}$$

Вспоминая определяющие соотношения для  $M_{mn}$  (9.1.19) и  $\gamma_{mn}$  (9.3.33) и очевидные условия  $[M_{mn}, \gamma_{kl}] = 0$ , мы получаем, что полный угловой момент  $M_{mn}^{(tot)}$  удовлетворяет тем же коммутационным правилам (9.1.19).

Резюмируя все вышесказанное, можно утверждать, что уравнение Дирака (9.4.1) ковариантно относительно преобразований (9.1.16), (9.4.15) и (9.4.20) при условии выполнения тождеств (9.4.17).

**В.** Уравнение Дирака (9.4.1) обладает еще одной, чрезвычайно важной, симметрией. А именно, оно ковариантно относительно преобразований полей (координаты точки  $x$  пространства Минковского не преобразуются)

$$\psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x) = \exp(i e \alpha(x)) \psi(x), \quad A_m(x) \rightarrow \tilde{A}_m = A_m(x) - \partial_m \alpha(x), \quad (9.4.23) \quad \text{gauge1}$$

где  $\alpha(x)$  – скалярные вещественные функции на пространстве Минковского. Эти преобразования симметрии уравнения Дирака называется *калибровочными преобразованиями*, а функции  $\alpha(x)$  – параметрами калибровочного преобразования. Заметим, что преобразования (9.4.23), в каждой точке  $x_m$ , образуют абелеву группу  $U(1)$ . Поэтому векторные поля  $A_m$  еще называются *абелевыми калибровочными полями*, а

сами преобразования – абелевыми калибровочными преобразованиями. Калибровочные преобразования – локальны, т.к. параметры преобразований  $\alpha(x)$  зависят от точки пространства-времени. Отметим, что преобразование вектора электро-магнитного поля  $A_m$  (9.4.23) (абелева калибровочного поля) можно записать в виде преобразования ковариантной производной  $\nabla_m = i\partial_m - e A_m(x)$ :

$$\nabla_m \rightarrow (i\partial_m - e \tilde{A}_m(x)) = e^{ie\alpha(x)}(i\partial_m - e A_m(x))e^{-ie\alpha(x)}, \quad (9.4.24) \quad \text{gauge2}$$

после чего калибровочная инвариантность тензора напряженности электро-магнитного поля  $F_{mn} = [\nabla_m, \nabla_n]$  становится очевидной. Запись калибровочного преобразования в виде преобразования ковариантной производной (9.4.24) удобна тем, что позволяет сформулировать неабелево обобщение калибровочных преобразований

$$\nabla_m \rightarrow \tilde{\nabla}_m = U(x) \nabla_m U^{-1}(x), \quad (9.4.25) \quad \text{gauge3}$$

где  $\nabla_m = (i\partial_m - e A_m^a(x)T_a)$ ,  $T_a$  – образующие неабелевой группы Ли  $G$ , а  $U(x) \in G$ .

### Добавление 2. Тождества Фирца.

Вычислим след  $\text{Tr}$  от произвольного произведения  $\gamma$ -матриц, удовлетворяющих алгебре  $\mathcal{Cl}_{(p,q)}$  с произвольной метрикой  $g_{mn}$  (9.3.24). Прежде всего след от произведения нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю. Действительно, пусть  $m_i \neq D+1$  ( $\forall i$ ):

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) &= \text{Tr}(\gamma_{D+1} \gamma_{D+1} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) = \text{Tr}(\gamma_{D+1} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}} \gamma_{D+1}) = \\ &= -\text{Tr}(\gamma_{D+1} \gamma_{D+1} \gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) = -\text{Tr}(\gamma_{m_1} \cdots \gamma_{m_{2k+1}}) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались циклическим свойством следа, а затем последней формулой в (9.4.11). Кроме того мы имеем  $\text{Tr}(\gamma_{D+1}) = 0$ , т.к. для четного  $D = 2\nu$  справедливо

$$\text{Tr}(\gamma_{D+1}) = \text{Tr}(\gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{D-1}) = \text{Tr}(\gamma_1 \cdots \gamma_{D-1} \gamma_0) = -\text{Tr}(\gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{D-1}) = 0.$$

Если мы определим  $\gamma_{D+1}$  так, что  $g_{D+1,D+1} = 1$ , то соотношения (9.3.24) применимы для всех матриц  $\gamma_0, \dots, \gamma_{D-1}, \gamma_{D+1}$  и этот набор матриц очевидно определяет представление алгебры Клиффорда в  $D+1 = 2\nu+1$  измерениях. Теперь легко (см. (9.2.27)) вычислить следы от любого произведения четного числа гамма-матриц  $\gamma_m$  ( $m = 0, 1, \dots, D-1, D+1$ )

$$\text{Tr}(\gamma_m \gamma_n) = 2^\nu g_{mn}, \quad \text{Tr}(\gamma_m \gamma_n \gamma_k \gamma_l) = 2^\nu (g_{mn} g_{kl} - g_{mk} g_{nl} + g_{ml} g_{nk}),$$

или

$$\text{Tr}(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6) = 2^\nu [(g_{12} g_{34} - g_{13} g_{24} + g_{14} g_{23}) g_{56} - \dots]$$

где индексы  $1, 2, 3, \dots$  обозначают  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , т.е.  $\gamma_3 := \gamma_{m_3}$ ,  $g_{34} := g_{m_3 m_4}$  и т.д.

Рассмотрим набор из  $2^D$  матриц (9.3.3) с учетом замены матриц по правилу (9.3.23). Этот набор образует полную систему матриц в линейном пространстве  $(2^\nu \times 2^\nu)$  матриц. Введем набор матриц  $\Gamma^{\bar{A}}$  с верхним индексом

$$\Gamma^{\bar{A}} = \{I, \gamma^{m_1}, \gamma^{m_2} \gamma^{m_1}, \gamma^{m_3} \gamma^{m_2} \gamma^{m_1}, \gamma^{m_4} \gamma^{m_3} \gamma^{m_2} \gamma^{m_1}, \dots\}$$

( $0 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq D-1$ ) нормированный таким образом, что

$$\frac{1}{2^\nu} \text{Tr}(\Gamma^{\bar{B}} \Gamma_A) = \delta_A^B ,$$

где  $\delta_{A_k}^{B_k} = \delta_{m_1}^{n_1} \delta_{m_2}^{n_2} \dots \delta_{m_k}^{n_k}$  для мономов одинаковой степени  $k$ :

$$\Gamma^{\bar{B}_k} = (\gamma^{n_k} \gamma^{n_{k-1}} \dots \gamma^{n_1}) , \quad \Gamma_{A_k} = (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \quad (9.4.26) \quad \text{ggA}$$

и  $\delta_{A_l}^{B_k} = 0$  в случае мономов разной степени  $k \neq l$ . Теперь для любой  $(2^\nu \times 2^\nu)$  матрицы  $\Gamma$  мы имеем

$$\Gamma = \sum_A C^A \Gamma_A , \quad C^A = \frac{1}{2^\nu} \text{Tr}(\Gamma^{\bar{A}} \Gamma) \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2^\nu} \sum_A \text{Tr}(\Gamma^{\bar{A}} \Gamma) \Gamma_A ,$$

и т.к. матрица  $\Gamma$  произвольна, то мы получаем условие полноты

$$\delta_{kj} \delta_{il} = \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_{kl} (\Gamma_A)_{ij} \Rightarrow P_{12} = \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_1 (\Gamma_A)_2 , \quad (9.4.27) \quad \text{ident10}$$

где  $P_{12}$  – матрица перестановки  $(P_{12})_{kl,ij} = \delta_{kj} \delta_{il}$ , а индексы 1, 2 – номера векторных пространств, в которых действуют соответствующие матрицы. Из условия (9.4.27) следуют тождества

$$\begin{aligned} (\gamma^m)_{kj} (\gamma_m)_{il} &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\gamma^m \Gamma^{\bar{A}})_{kl} (\gamma_m \Gamma_A)_{ij} = \\ &= \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\Gamma^{\bar{A}})_{kl} (\gamma_m \Gamma_A \gamma^m)_{ij} = \frac{1}{2^\nu} \sum_A (\gamma^m \Gamma^{\bar{A}} \gamma_m)_{kl} (\Gamma_A)_{ij} , \end{aligned} \quad (9.4.28) \quad \text{ident12}$$

представляющие собой перезапись, с учетом (9.4.27), очевидных равенств

$$(\gamma^m)_1 (\gamma_m)_2 P_{12} = (\gamma_m)_2 P_{12} (\gamma^m)_2 = (\gamma^m)_1 P_{12} (\gamma_m)_1 . \quad (9.4.29) \quad \text{ident11}$$

Сворачивая тождества (9.4.27), (9.4.28) со спинорами, мы получаем  $D$ -мерные тождества Фирца

$$(\bar{\Psi}_1 \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \Psi_4) = \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{\bar{A}} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_A \Psi_2) , \quad (9.4.30) \quad \text{fi1}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Psi_2) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Psi_4) &= \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Gamma^{\bar{A}} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Gamma_A \Psi_2) = \\ &= \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \Gamma^{\bar{A}} \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \gamma_m \Gamma_A \gamma^m \Psi_2) = \frac{(-1)^g}{2^\nu} \sum_A (\bar{\Psi}_1 \gamma^m \Gamma^{\bar{A}} \gamma_m \Psi_4) (\bar{\Psi}_3 \Gamma_A \Psi_2) , \end{aligned} \quad (9.4.31) \quad \text{fi2}$$

где  $g = 0$  для коммутирующих и  $g = 1$  для антикоммутирующих спиноров.

**Предложение 9.4.1** *Имеет место тождество*

$$\sum_{m=0}^{D-1} \gamma_m \Gamma_{A_k} \gamma^m = (-1)^k (D - 2k) \Gamma_{A_k} , \quad (9.4.32) \quad \text{pred??}$$

где выражения  $\Gamma_{A_k}$  определены в (9.4.26).

**Доказательство.** Действительно мы имеем  $(0 \leq m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq D - 1)$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{D-1} \gamma_m \Gamma_{A_k} \gamma^m &= \sum_{m \neq m_1, \dots, m_k} \gamma_m (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^m + \sum_{m=m_1, \dots, m_k} \gamma_m (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^m = \\ &= (-1)^k (D - k) \Gamma_{A_k} + \gamma_{m_1} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^{m_1} + \dots + \gamma_{m_k} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_k}) \gamma^{m_k} = \\ &\text{(во всех слагаемых пронесем } \gamma^{m_n} \text{ справа на лево до } \gamma_{m_n} \text{ и затем воспользуемся тождеством } \gamma_{m_n} \gamma^{m_n} = 1) \\ &= (-1)^k (D - k) \Gamma_{A_k} + (-1)^{k-1} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_k} + (-1)^{k-2} \gamma_{m_2} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_3} \dots \gamma_{m_k}) + \dots + \\ &\quad + (-1) \gamma_{m_{k-1}} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_{k-2}} \gamma_{m_k}) + \gamma_{m_k} (\gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_{k-1}}) = \\ &= (-1)^k (D - k) \Gamma_{A_k} + k (-1)^{k-1} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_k} . \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

Используя соотношение (9.4.32), мы можем переписать (9.4.28) в виде

$$(\gamma^m)_{kj} (\gamma_m)_{il} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^D (-1)^k (D - 2k) \sum_{A_k} (\Gamma^{\bar{A}_k})_{kl} (\Gamma_{A_k})_{ij} , \quad (9.4.33) \quad \text{ident14}$$

и таким образом упростить тождества Фирца (9.4.31). Дальнейшее упрощение этих тождеств достигается при рассмотрении различных случаев конкретных типов спиноров.

**1. Случай вейлевских спиноров.** Пусть спиноры  $\Psi_K$  в (9.4.30), (9.4.31) ( $K = 1, \dots, 4$ ) являются вейлевскими, т.е. удовлетворяют одному из соотношений (9.4.12). В этом случае  $\bar{\Psi}_K (1 \pm \gamma_{D+1}) = 0$ , если  $(1 \mp \gamma_{D+1}) \Psi_K = 0$  ( $\forall K$ ), и, следовательно, для всех четных  $p$  мы имеем

$$\bar{\Psi}_K \gamma_{m_1} \gamma_{m_2} \dots \gamma_{m_p} \Psi_{K'} = 0 \quad (\forall p = 2n) ,$$

где  $m_i = 0, \dots, D - 1$ .

**2. Случай майорановских спиноров.** В этом случае  $\epsilon = +1$ , и пользуясь соотношениями (9.4.7), (9.4.10), мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_K \gamma_{(m_1, \dots, m_p)} \Psi_{K'} &= \Psi_K^T C \gamma_{(m_1, \dots, m_p)} \Psi_{K'} = \\ &= (-1)^g \Psi_{K'}^T (C \gamma_{(m_1, \dots, m_p)})^T \Psi_K = (-1)^{g + \frac{(p-1)(p-2)}{2}} \bar{\Psi}_{K'} \gamma_{(m_1, \dots, m_p)} \Psi_K \end{aligned} \quad (9.4.34) \quad \text{slmajo}$$

где  $m_1 < m_2 < \dots < m_p$  и  $g = 0$  или  $g = 1$  в зависимости от того являются ли спиноры коммутирующими или антикоммутирующими. Соотношение (9.4.34) удобно переписать в виде двух тождеств

$$\bar{\Psi}_K \gamma_{(m_1, \dots, m_p)} \Psi_{K'} = (-1)^g \bar{\Psi}_{K'} \gamma_{(m_1, \dots, m_p)} \Psi_K \quad (p = 4k + 1, 4k + 2) ,$$

$$\bar{\Psi}_K \gamma_{(m_1, \dots, m_p)} \Psi_{K'} = (-1)^{g+1} \bar{\Psi}_{K'} \gamma_{(m_1, \dots, m_p)} \Psi_K \quad (p = 4k, 4k + 3) .$$



### 9.5 Вектор Паули-Любанского и операторы Казимира группы Пуанкаре. Представления группы Пуанкаре. Малая группа Вигнера. Индуцированные представления. Массивные и безмассовые представления группы Пуанкаре.

**Вектор Паули-Любанского и операторы Казимира группы Пуанкаре.**

В этой лекции мы следуем изложению, представленному в книгах [25], [24], [26]. Напомним, что алгебра Пуанкаре  $\mathcal{P}$  задается генераторами  $P^m, M^{mn}$ , ( $m, n = 0, \dots, 3$ ), с определяющими соотношениями (9.1.19), (9.1.18). Определим генераторы  $\hat{P}^m, \hat{M}^{mn}$ :

$$\hat{P}_m = -iP_m, \quad \hat{M}_{mn} = -iM_{mn},$$

так, чтобы они были эрмитовыми операторами  $\hat{P}_m = \hat{P}_m^\dagger, \hat{M}_{mn} = \hat{M}_{mn}^\dagger$ . При этом определяющие соотношения (9.1.19), (9.1.18) перепишутся в виде

$$[\hat{P}_n, \hat{P}_m] = 0, \quad [\hat{P}_n, \hat{M}_{km}] = i(g_{mn}\hat{P}_k - g_{kn}\hat{P}_m), \quad (9.5.1) \quad \text{genP2}$$

$$[\hat{M}_{nm}, \hat{M}_{kl}] = i(g^{nk}\hat{M}^{ml} - g^{mk}\hat{M}^{nl} + g^{ml}\hat{M}^{nk} - g^{nl}\hat{M}^{mk}), \quad (9.5.2) \quad \text{genP3}$$

Эта алгебра имеет два оператора Казимира  $P^2, W^2$ , которые коммутируют со всеми образующими  $\hat{P}^m, \hat{M}^{mn}$  и, т.о., определяют центр в обертывающей алгебре  $\mathcal{P}$ :

$$P^2 = \hat{P}_m \hat{P}^m, \quad W^2 = W_m W^m = \frac{1}{2}(\hat{M}^{nk}\hat{M}_{nk})(P^2) - (\hat{M}^{nk}\hat{P}_k)(\hat{M}_{nr}\hat{P}^r), \quad (9.5.3) \quad \text{centP}$$

где  $W_m$  – компоненты вектора Паули-Любанского (9.2.55)

$$W_m = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{mnkr}\hat{M}^{nk}\hat{P}^r. \quad (9.5.4) \quad \text{genPPL}$$

Используя (9.5.1), (9.5.2) и (9.5.4), можно вывести соотношения

$$W_m \hat{P}^m = 0, \quad [W_m, \hat{P}_n] = 0, \quad (9.5.5) \quad \text{genP4}$$

$$[\hat{M}_{mn}, W_k] = i(g_{mk}W_n - g_{nk}W_m), \quad (9.5.6) \quad \text{genP5}$$

$$[W_m, W_n] = i\mathcal{E}_{mnkr}W^k\hat{P}^r, \quad (9.5.7) \quad \text{genP6}$$

с помощью которых легко доказывается центральность оператора  $W^2$  (центральность  $\hat{P}^2$  очевидна). Соотношения (9.5.5) очевидны. Соотношение (9.5.6) по форме совпадает с соотношением для  $[\hat{M}_{mn}, \hat{P}_k]$  (9.5.1), что естественно, т.к. и  $\hat{P}_k$  и  $W_k$  – векторы и действие на них образующих  $\hat{M}_{mn}$  группы Лоренца должно совпадать

$$\delta_\omega \hat{P}_k = \frac{1}{2}[\omega^{mn}\hat{M}_{mn}, \hat{P}_k] = i\omega_k{}^n\hat{P}_n \Leftrightarrow \delta_\omega W_k = \frac{1}{2}[\omega^{mn}\hat{M}_{mn}, W_k] = i\omega_k{}^nW_n. \quad (9.5.8) \quad \text{genP7}$$

Прямое доказательство (9.5.6) требует некоторых усилий:

$$[\hat{M}^{mn}, \frac{1}{2}\mathcal{E}_{khp}r\hat{M}^{hp}\hat{P}^r] = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{khp}r \left( [\hat{M}^{mn}, \hat{M}^{hp}]\hat{P}^r + \hat{M}^{hp}[\hat{M}^{mn}, \hat{P}^r] \right) =$$

$$= \frac{i}{2} \mathcal{E}_{khp r} \left( (g^{mh} \hat{M}^{np} - g^{nh} \hat{M}^{mp} + g^{np} \hat{M}^{mh} - g^{mp} \hat{M}^{nh}) \hat{P}^r + \hat{M}^{hp} (g^{mr} \hat{P}^n - g^{nr} \hat{P}^m) \right),$$

т.е. мы имеем

$$[\hat{M}_{mn}, W_k] = \frac{i}{2} \left( (2\mathcal{E}_{kmpr} \hat{M}_n^p + 2\mathcal{E}_{kpnr} \hat{M}_m^p) \hat{P}^r + \hat{M}^{hp} (\mathcal{E}_{khp m} \hat{P}_n - \mathcal{E}_{khp n} \hat{P}_m) \right). \quad (9.5.9) \quad \text{ME}$$

Теперь свернем равенство (9.5.9) с произвольными параметрами  $\omega^{mn} = -\omega^{nm}$ :

$$\omega^{mn} [\hat{M}_{mn}, W_k] = \frac{i}{2} \left( 2(\omega_n^m \mathcal{E}_{kmpr} + \omega_p^m \mathcal{E}_{knmr}) \hat{M}^{np} \hat{P}^r + 2\omega_n^m \hat{M}^{rp} \mathcal{E}_{krpm} \hat{P}^n \right) =$$

и учтем в правой части свойство инвариантности тензора  $\mathcal{E}_{knpr}$  относительно преобразований Лоренца:  $\delta(\mathcal{E}_{knpr}) = \omega_n^m \mathcal{E}_{kmpr} + \omega_p^m \mathcal{E}_{knmr} + \omega_r^m \mathcal{E}_{knpm} + \omega_k^m \mathcal{E}_{mnp r} = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \left( -2(\omega_r^m \mathcal{E}_{knpm} + \omega_k^m \mathcal{E}_{mnp r}) \hat{M}^{np} \hat{P}^r + 2\omega_n^m \hat{M}^{rp} \mathcal{E}_{krpm} \hat{P}^n \right) = -i\omega_k^m \mathcal{E}_{mnp r} \hat{M}^{np} \hat{P}^r = \\ &= -i\omega^{mn} g_{nk} \mathcal{E}_{mqpr} \hat{M}^{qp} \hat{P}^r = i\omega^{mn} (g_{mk} W_n - g_{nk} W_m), \end{aligned}$$

что и доказывает (9.5.6). Соотношение (9.5.7) и центральность  $W^2$  теперь легко доказывается с помощью второго соотношения (9.5.5) и (9.5.6).

### Представления группы Пуанкаре. Малая группа Вигнера. Индуцированные представления.

В квантовой теории поля образующие  $\hat{P}_k$  идентифицируются с операторами энергии-импульса, а образующие  $\hat{M}_{nm}$  – с операторами полного углового момента. Т.о. оператор Казимира  $\hat{P}^2$  (9.5.3) совпадает с оператором квадрата массы. Мы будем характеризовать неприводимые представления алгебры Ли группы Пуанкаре так, что все состояния (вектора) в этом представлении будут являться собственными векторами оператора  $\hat{P}^2$  с некоторым фиксированным собств. значением  $m^2 \geq 0$ . Вектора (поля)  $|\Psi\rangle$  с разными значениями  $m^2$  будут принадлежать разным неприводимым представлениям (ядро оператора  $(\hat{P}^2 - m^2 I)$  – очевидно неприводимо). С физической точки зрения естественно ограничиться рассмотрением только представлений с положительной энергией  $\langle \Psi | \hat{P}_0 | \Psi \rangle > 0$  для любого ненулевого состояния  $|\Psi\rangle$ .

Второй оператор Казимира  $W^2$  описывает спин состояний, соответствующих векторам неприводимого представления алгебры Ли группы Пуанкаре. Для того, чтобы прояснить это утверждение мы рассмотрим важное понятие подгруппы стабильности группы Пуанкаре (или малой группы Вигнера).

Действие элемента  $g \equiv g(a^k, \omega^{mn})$  из собственной группы Пуанкаре на вектор  $|\Psi\rangle$  можно определить с помощью экспоненциального отображения

$$U(g) |\Psi\rangle = \exp \left( -i(a^k \hat{P}_k + \frac{1}{2} \omega^{mn} \hat{M}_{mn}) \right) |\Psi\rangle, \quad (9.5.10) \quad \text{unop}$$

где параметры  $a^k$  определяют сдвиг координат  $x^k \rightarrow x^k + a^k$ , а параметры  $\omega^{mn}$  – лоренцевские вращения координат  $x_k \rightarrow \Lambda_k^n x_n = (\exp \omega)_k^n x_n$  и соответственно операторов импульса (см. (9.5.8))

$$\hat{P}_k \rightarrow U(g) \hat{P}_k U(g)^{-1} = \hat{P}_n (\Lambda^{-1})_k^n = \hat{P}_n (\exp(-\omega))_k^n. \quad (9.5.11) \quad \text{LaOm}$$

В пространстве неприводимого представления группы Пуанкаре с заданной массой  $m$  и фиксированным собственным значением  $W^2$  рассмотрим подпространство состояний  $|q\rangle \in \mathcal{V}_q$  с определенным 4-х импульсом  $q_k$

$$\hat{P}_k |q\rangle = q_k |q\rangle, \quad (9.5.12) \quad \text{genP8}$$

таким, что

$$q_k q^k = m^2 \quad q_0 > 0. \quad (9.5.13) \quad \text{genP8a}$$

Определим подгруппу  $H_q$  в группе Пуанкаре  $\mathcal{P}$  как набор элементов  $g \in \mathcal{P}$  таких, что действие  $g$  на 4-вектор с координатами  $q_k$  оставляет этот вектор неизменным (стабильным). Другими словами подгруппа  $H_q$  это набор таких преобразований  $g \in \mathcal{P}$ , что соответствующие операторы  $U(g)$  оставляют подпространство  $\mathcal{V}_q$  инвариантным. Подгруппу  $H_q$  мы будем называть подгруппой стабильности для  $\mathcal{V}_q$ .

Рассмотрим условие стабильности более детально. В соответствии с (9.5.11) и (9.5.12) мы получаем, что

$$\hat{P}_n (\Lambda^{-1})^n_k U(g) |q\rangle = U(g) \hat{P}_k U(g)^{-1} U(g) |q\rangle = q_k U(g) |q\rangle,$$

т.е.  $|q'\rangle = U(g) |q\rangle$ , где

$$q'_k = q_n \Lambda^n_k = q_n (\exp(\omega))^n_k. \quad (9.5.14) \quad \text{genP9a}$$

Требование стабильности  $q'_k = q_k$  приводит к условию  $q_n \omega^n_k = 0$ , общее решение которого может быть записано в виде

$$\omega_{mn} = \mathcal{E}_{mnkr} q^k n^r$$

где  $n^r$  – координаты произвольного вектора. Т.о. элементы подгруппы стабильности  $H_q$  могут быть записаны в виде

$$U(g_q) = \exp \left( -i(a^k \hat{P}_k + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{mnkr} q^k n^r \hat{M}^{mn}) \right) \quad (\forall g_q \in H_q). \quad (9.5.15) \quad \text{genP9}$$

Т.к. операторы  $\hat{P}_k$  и  $W_r$  коммутируют друг с другом, то действие элементов  $U(g_q)$  на вектора  $|q\rangle$  пространства  $\mathcal{V}_q$  эквивалентны действию

$$\exp \left( -i(a^k \hat{P}_k + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{mnkr} q^k n^r \hat{M}^{mn}) \right) |q\rangle = \exp(-i\alpha) \exp(-in^r W_r) |q\rangle, \quad (9.5.16) \quad \text{genP99}$$

где  $\alpha = a_k q^k$  и мы воспользовались равенствами

$$\begin{aligned} X^s |q\rangle &= X^{s-1} (\alpha + n^r W_r) |q\rangle = X^{s-2} (a_k + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{mnkr} n^r \hat{M}^{mn}) (\alpha + n^r W_r) \hat{P}^k |q\rangle = \\ &= X^{s-2} (\alpha + n^r W_r)^2 |q\rangle = \dots = (\alpha + n^r W_r)^s |q\rangle, \\ X &\equiv (a^k \hat{P}_k + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{mnkr} q^k n^r \hat{M}^{mn}). \end{aligned}$$

Т.е. операторы (9.5.15), при ограничении их действия на  $\mathcal{V}_q$ , выражаются через вектора Паули-Любанского

$$\exp(-i\alpha) \exp(-in^r W_r). \quad (9.5.17) \quad \text{genP10}$$

Вспоминая коммутационные соотношения (9.5.7), мы заключаем, что координаты вектора Паули-Любанского образуют алгебру Ли при ограничении на пространство  $\mathcal{V}_q$ , причем эта алгебра Ли (и соответствующая группа Ли  $G_m$ ) зависит от того рассматриваем мы массивный случай  $q_k q^k = m^2 > 0$  или безмассовый случай  $q_k q^k = m^2 = 0$  (ниже мы рассматриваем эти случаи более детально). Фазовый множитель  $\exp(-i\alpha)$  соответствует группе  $U(1)$ , т.е.  $H_q = G_m \otimes U(1)$ .

Все вектора из  $\mathcal{V}_q$  описывают состояния частиц с одним и тем же 4-импульсом  $q$  и одинаковым полным спином (собственным значением  $W^2$ ). Следовательно, с физической точки зрения, два любых линейно независимых состояния  $|1\rangle, |2\rangle \in \mathcal{V}_q$  должны соответствовать различной поляризации спина (различной проекции спина) и должны переводиться друг в друга с помощью преобразований из  $H_q$  (представление  $H_q$  на  $\mathcal{V}_q$  неприводимо). Более того для конечного квантового спина, спектр его поляризаций (проекций) конечен. Т.о., для физически мотивированных неприводимых представлений группы Пуанкаре действие подгруппы  $H_q$  на  $\mathcal{V}_q$  неприводимо, а все подпространства  $\mathcal{V}_q$  – конечномерны.

Все множество элементов группы Пуанкаре  $\mathcal{P}$  (многообразие группы  $\mathcal{P}$ ) расслаивается на множество правых (левых) смежных классов по отношению к подгруппе  $H_q$ . Пространство всех таких смежных классов называется однородным пространством и обозначается  $\mathcal{P}/H_q$ . Ясно, что точки  $\mathcal{P}/H_q$  могут быть запаараметризованы преобразованиями Лоренца  $\Lambda[p]$ , переводящими 4-импульс  $q$  в 4-импульс  $p$ , лежащий на той же массовой поверхности (9.5.12). Согласно (9.5.14) мы имеем

$$p_k = q_n (\Lambda[p])^n_k .$$

Соответствующий унитарный оператор  $U(\Lambda[p], 0)$  (9.5.10) (здесь 0 соответствует тривиальному сдвигу) переводит пространство  $\mathcal{V}_q$  в пространство  $\mathcal{V}_p$ . В массивном случае выберем тестовый импульс  $q$  в виде  $q^n = (m, 0, 0, 0)$ , тогда удобный кандидат на роль  $\Lambda[p]$  имеет вид

$$\Lambda[p] = \left( \begin{array}{c|c} p^0/m & p^j/m \\ \hline p^i/m & \delta^{ij} + \frac{p^i p^j}{m(m+p^0)} \end{array} \right) ,$$

$$(p^0, p^1, p^2, p^3) = (m, 0, 0, 0) \Lambda[p]^T , \quad \Lambda[p]^T g \Lambda[p] = g ,$$

где  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $p = (p^0, \vec{p})$ ,  $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ . В безмассовом случае мы выберем тестовый импульс в виде  $q^n = (E, 0, 0, E)$  и соответствующее семейство преобразований Лоренца  $\Lambda[p]$  может быть выбрано в виде

$$\Lambda'[p] = \left( \begin{array}{c|ccc} \frac{p^0}{2E}(1+\alpha) & 0 & 0 & \frac{p^0}{2E}(1-\alpha) \\ \hline \frac{p^i}{2E}(1-\alpha) & n^i(p) & m^i(p) & \frac{p^i}{2E}(1+\alpha) \end{array} \right) ,$$

$$(p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, 0, 0, E) \Lambda'[p]^T , \quad (\Lambda'[p])^T g \Lambda'[p] = g ,$$

где  $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2}$ ,  $\alpha = E^2/\vec{p}^2$  и 3-вектора  $n^i$ ,  $m^i$  – такие, что набор  $\{\vec{n}, \vec{m}, \vec{p}/p^0\}$  образует ортонормальный базис в 3-х мерном пространстве.

Теперь мы кратко изложим схему построения унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре.

1) Зафиксируем тестовый импульс  $q^m$ , лежащий на массовой поверхности (9.5.13). При этом мы имеем все конечномерные унитарные представления  $T_q$  подгруппы  $H_q \subset \mathcal{P}$ , которая действует на пространство  $\mathcal{V}_q$  и состоит из элементов вида (9.5.15), (9.5.17). Рассмотрим вектора  $|q, \sigma, m^2\rangle$  такие, что

$$\begin{aligned}\hat{P}^n |q, \sigma, m^2\rangle &= q^n |q, \sigma, m^2\rangle, \quad P^2 |q, \sigma, m^2\rangle = m^2 |q, \sigma, m^2\rangle, \\ W^2 |q, \sigma, m^2\rangle &= s(s+1) |q, \sigma, m^2\rangle,\end{aligned}$$

где собственное значение оператора  $W^2$  обозначено  $s(s+1)$ , а  $\sigma$  пробегает конечное число значений спиновых проекций; например, собственных значений одной из компонент вектора  $W^k$ . Эти вектора образуют базис в пространстве  $\mathcal{V}_q$ . Т.о.,  $\forall \Lambda \in H_q$  мы имеем

$$|q, \sigma, m^2\rangle \rightarrow T_\sigma^\sigma(\Lambda) |q, \sigma', m^2\rangle \quad (9.5.18) \quad \text{genP13}$$

2.) С каждой точкой  $p \neq q$ , лежащей на той же массовой поверхности, мы можем связать свое конечномерное пространство  $\mathcal{V}_p$  со своим базисом  $|p, \sigma, m^2\rangle$ . Определим гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  как формальную сумму  $\mathcal{H} = \oplus_p \mathcal{V}_p$ , где базисные вектора  $|p, \sigma, m^2\rangle$  нормируются по правилу

$$\langle p, \sigma, m^2 | p', \sigma', m^2 \rangle = p^0 \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (9.5.19) \quad \text{genP11}$$

Такая нормировка эквивалентна скалярному произведению:

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \Phi \rangle &= \sum_\sigma \int \frac{d^3 \vec{p}}{p^0} \langle \Psi | p, \sigma, m^2 \rangle \langle p, \sigma, m^2 | \Phi \rangle \sim \sum_\sigma \int \frac{d^3 \vec{p}}{p^0} \Psi_\sigma^*(\vec{p}) \Phi_\sigma(\vec{p}) \sim \\ &\sim \sum_\sigma \int d^3 \vec{x} \Phi_\sigma^*(x) \partial^0 \Phi_\sigma(x) - \partial^0 \Phi_\sigma^*(x) \Phi_\sigma(x) \sim \int d^3 \vec{x} \rho^0(x),\end{aligned} \quad (9.5.20) \quad \text{genP12}$$

релятивистских полей  $\Phi_\sigma(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{p^0} \langle p, \sigma, m^2 | \Phi \rangle e^{ipx} \sim \int \frac{d^3 \vec{p}}{p^0} \Phi_\sigma(\vec{p}) e^{ipx}$ , лежащих на массовой поверхности  $(\partial^2 + m^2)\Phi_\sigma(x) = 0$ ;  $\rho^0(x)$  – плотность электрического заряда. Появление  $\delta$ - функции и  $\delta$ - символов в (9.5.19) оправдано стандартным рассуждением об ортогональности собственных векторов  $\Psi_\sigma$ ,  $\Psi_{\sigma'}$  эрмитова оператора  $A = A^\dagger$  с различными собственными значениями  $\sigma \neq \sigma'$ , т.е.

$$\sigma' (\bar{\Psi}_\sigma, \Psi_{\sigma'}) = (\bar{\Psi}_\sigma, A \Psi_{\sigma'}) = (\bar{\Psi}_\sigma A^\dagger, \Psi_{\sigma'}) = (\overline{A \Psi_\sigma}, \Psi_{\sigma'}) = \sigma (\bar{\Psi}_\sigma, \Psi_{\sigma'}) \Rightarrow$$

$(\sigma' - \sigma)(\bar{\Psi}_\sigma, \Psi_{\sigma'}) = 0$ , и если  $\sigma \neq \sigma'$ , то  $(\bar{\Psi}_\sigma, \Psi_{\sigma'}) = 0$ . Множитель  $p^0$  необходим для Лоренц-ковариантности скалярного произведения, которое связано с интегралом по плотности  $\rho^0(x)$  заряда комплексного поля  $\Phi$  (9.5.20).

3.) Для заданного семейства преобразований Лоренца  $\Lambda[p]$ , которые параметризуют однородное пространство  $\mathcal{P}/H_q$ , мы имеем унитарные преобразования  $U(\Lambda[p], 0)$  (здесь 0 – соответствует тривиальным сдвигам), которые связывают базисы пространств  $\mathcal{V}_q$  и  $\mathcal{V}_p$ :

$$|p, \sigma, m^2\rangle = U(\Lambda[p], 0) |q, \sigma, m^2\rangle.$$

4.) Для каждого преобразования Лоренца  $(\Lambda, 0)$  мы имеем<sup>40</sup>

$$\begin{aligned} U(\Lambda, 0) |p, \sigma, m^2\rangle &= U(\Lambda, 0) U(\Lambda[p], 0) |q, \sigma, m^2\rangle = \\ &= U(\Lambda \cdot \Lambda[p], 0) |q, \sigma, m^2\rangle = U(\Lambda[p'], 0) U(\Lambda[p']^{-1} \Lambda \Lambda[p], 0) |q, \sigma, m^2\rangle, \end{aligned} \quad (9.5.21) \quad \text{genP14}$$

где  $(p')^n = (\Lambda p)^n = p^k \Lambda_k^n$ . Заметим, что  $\Lambda[p']^{-1} \Lambda \Lambda[p] \in H_q$ , поэтому действие оператора  $U(\Lambda[p']^{-1} \Lambda \Lambda[p], 0)$  на подпространство  $\mathcal{V}_q$  дается требованием 1) и формулой (9.5.18). Прямая проверка показывает, что (9.5.21) определяет унитарное представление группы Пуанкаре.

Описанный выше метод это метод индуцированных представлений Вигнера (см. ниже Дополнение к этой Лекции), примененный к группе Пуанкаре.

Теперь мы отдельно рассмотрим два случая: массивный и безмассовый.

### Массивные неприводимые представления группы Пуанкаре

Согласно представленной выше схеме нам необходимо описать все унитарные неприводимые конечномерные представления  $T_q$  малой подгруппы  $H_q$  в случае, когда тестовый импульс  $q$  можно выбрать в виде  $q^k = (m, 0, 0, 0)$  ( $m > 0$ ). Т.к.  $q^k \sigma_k = m \sigma_0$ , то преобразования  $A$  (9.2.6) этой подгруппы должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} A^\dagger$$

откуда следует, что все элементы  $H_q$  реализуются унитарными 2-мерными матрицами  $A$ :  $AA^\dagger = I$  и, т.о., группа  $H_q$  совпадает с  $SU(2)$ .

При ограничении действия операторов  $W_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{mnkr} \hat{M}^{nk} \hat{P}^r$  (9.5.4) на подпространство  $\mathcal{V}_q$  ( $q^k = (m, 0, 0, 0)$ ) мы получаем следующие значения компонент

$$W_0 = 0, \quad W_j = m S_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (9.5.22) \quad \text{genP15}$$

где мы определили операторы

$$S_i = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ijk} \hat{M}_{jk}^{spin} \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

( $\hat{M}_{jk}^{spin}$  – спиновая часть образующих  $\hat{M}_{jk}$ ; орбитальная часть  $(x_j \hat{P}_k - x_k \hat{P}_j)$  оператора  $\hat{M}_{jk}$  не дает вклада в вектор Паули-Любанского) которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[S_i, S_j] = i \mathcal{E}_{ijk} S_k. \quad (9.5.23) \quad \text{genP16}$$

Алгебра Ли (9.5.23) совпадает с алгеброй Ли (7.5.16) для группы  $SU(2)$  (и как алгебра Ли над полем комплексных чисел совпадает с алгеброй  $sl(2)$  (7.1.2)). Все конечномерные неприводимые представления этой алгебры были построены и изучены в Лекции 11. Напомним, что эти представления характеризуются условием

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = s(s+1) I \quad (9.5.24) \quad \text{genP17}$$

<sup>40</sup>В (9.5.21) нетрудно распознать формулу левого действия группы  $G$  на однородное пространство  $G/H$  левых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $H$ . Действительно, для произвольной точки  $g' \in G/H$  и  $\forall g \in G$  мы имеем преобразование  $g' \rightarrow g'' \in G/H$  согласно правилу  $g \cdot g' = g'' \cdot h$ , где  $h \in H$ .

где возможные значения  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  определяют размерность представления  $2s + 1$ . Используя (9.5.22), (9.5.24), мы получаем соотношение

$$W^k W_k = -m^2 s(s+1)I ,$$

которое определяет спектр спинового оператора в унитарном представлении группы Пуанкаре. Число  $s$  называется спином. Т.е. в массивном случае неприводимые представления группы Пуанкаре классифицируются массой  $m$  и спином  $s$  (значениями двух операторов Казимира  $\hat{P}^2$  и  $W^2$ ).

### Безмассовые неприводимые представления группы Пуанкаре

В этом случае для векторов представления  $|q^k\rangle$ , которые диагонализуют операторы  $\hat{P}^k$ , мы имеем

$$\hat{P}^k \hat{P}_k |q^k\rangle = q^k q_k |q^k\rangle = 0 .$$

Для верхней половины светового конуса  $q^k q_k = 0$ ,  $q^0 > 0$  мы выберем тестовый импульс в виде

$$q^k = (E, 0, 0, E) \quad E > 0 . \quad (9.5.25) \quad \text{genP18}$$

Проанализируем соответствующую подгруппу  $H_q$ , преобразования из которой оставляют вектор (9.5.25) инвариантным. Т.к.  $q^k \sigma_k = E\sigma_0 + E\sigma_3$ , то преобразования  $A$  (9.2.6) этой подгруппы должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^\dagger$$

откуда следует, что элементы  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  образующие группу  $H_q$  (где  $q$  заданы в (9.5.25)) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & w \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (w = w_0 + iw_1 \in \mathbb{C}, \quad w_0, w_1 \in \mathbb{R}) , \quad (9.5.26) \quad \text{genP19}$$

и могут быть переписаны в инфинитезимальной форме

$$A = 1 + i2\phi M^{12} + w_0 R^1 + w_1 R^2 ,$$

где матрицы

$$M^{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.5.27) \quad \text{genP19b}$$

образуют алгебру Ли движения плоскости

$$[R^1, R^2] = 0 , \quad [M^{12}, R^1] = -iR^2 , \quad [M^{12}, R^2] = iR^1 . \quad (9.5.28) \quad \text{genP19a}$$

Чтобы прояснить глобальную структуру этой группы положим  $w = ze^{-i\phi}$ , тогда

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & z_1 e^{-i\phi_1} \\ 0 & e^{-i\phi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_2} & z_2 e^{-i\phi_2} \\ 0 & e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_1+\phi_2)} & e^{-i(\phi_1+\phi_2)}(e^{2i\phi_1} z_2 + z_1) \\ 0 & e^{-i(\phi_1+\phi_2)} \end{pmatrix} ,$$

т.е. группа  $H_q$ , в безмассовом случае, совпадает с двулистным  $(\pm A)$  накрытием группы движений плоскости. Группа  $H_q$  содержит две подгруппы, состоящие из матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (9.5.29) \quad \text{genP20}$$

и любой элемент  $A$  (9.5.26) есть произведение  $A = A_1 A_2$ , т.е. элемент (9.5.26) соответствует двумерным вращениям на угол  $\phi$  и двумерным сдвигам на комплексное число  $z$ . Подгруппа, порождаемая сдвигами  $A_1$  (9.5.29) некомпактна и все ее нетривиальные унитарные представления бесконечномерны. Действительно, оператор Казимира  $(R^1)^2 + (R^2)^2$  для алгебры (9.5.28) в любом унитарном неприводимом представлении этой подгруппы (т.е. когда  $R^\alpha = (R^\alpha)^\dagger$ ) имеет вид  $(R^1)^2 + (R^2)^2 = \mu^2 I$  ( $\mu^2 \geq 0$ ). Для  $\mu^2 > 0$  базис  $|r\rangle$  в пространстве представления может быть выбран в виде  $R^\alpha |r\rangle = r^\alpha |r\rangle$ , где точки  $\vec{r}$  лежат на окружности радиуса  $\mu$  и, следовательно, спектр операторов  $R^\alpha$  непрерывен, а представление бесконечномерно. Т.к. мы требуем, исходя из физических соображений (см. выше), чтобы представления подгруппы стабильности были конечномерными, то мы выберем для этой подгруппы тривиальное одномерное представление  $A_1 = 1$  ( $\mu = 0$ ). Подгруппа  $SO(2)$ , порождаемая элементами  $A_2$ , компактна и абелева. Поэтому все ее неприводимые унитарные представления  $\rho_n$  одномерны и имеют вид (см. Лекции 7,8)

$$\rho_n : \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} = e^{(2i\phi M^{12})} \rightarrow e^{in\phi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9.5.30) \quad \text{genP21}$$

Здесь числа  $n$  должны быть целыми т.к., в следствии однозначности представлений (9.5.30), при сдвиге  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$  в левой части (9.5.30) мы должны получать в правой части (9.5.30) сдвиги фаз на целые кратные  $2\pi$ . Из (9.5.30), вспоминая определение генератора  $M^{12}$  (9.5.27), следует, что спектр  $M^{12}$  равен  $(0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots)$ .

Займемся теперь изучением подгруппы  $H_q$  в безмассовом случае с несколько иной точки зрения. Как мы показали ранее подгруппа  $H_q$ , при ее действии на подпространство  $\mathcal{V}_q$ , представляется элементами вида (9.5.16), которые в свою очередь генерируются компонентами  $W_k$  вектора Паули-Любанского. При действии на  $\mathcal{V}_q$  компоненты  $W_m$  принимают вид  $W_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{mnkr} \hat{M}^{nk} q^r$

$$W_k = E \{ \hat{M}^{12}, \hat{M}^{32} + \hat{M}^{20}, \hat{M}^{13} + \hat{M}^{01}, -\hat{M}^{12} \} = E \{ \hat{M}^{12}, \hat{R}^1, \hat{R}^2, -\hat{M}^{12} \}. \quad (9.5.31) \quad \text{genP22}$$

Из соотношений (9.5.7) следует, что операторы

$$\hat{M}^{12}, \quad \hat{R}^1 = \hat{M}^{32} + \hat{M}^{20}, \quad \hat{R}^2 = \hat{M}^{13} + \hat{M}^{01},$$

образуют алгебру Ли группы движений плоскости (9.5.28)

$$[\hat{R}^1, \hat{R}^2] = 0, \quad [\hat{M}^{12}, \hat{R}^1] = -i \hat{R}^2, \quad [\hat{M}^{12}, \hat{R}^2] = i \hat{R}^1. \quad (9.5.32) \quad \text{genP23}$$

Из (9.5.31) следует, что

$$W^2 = -(\hat{R}^1)^2 - (\hat{R}^2)^2 \Rightarrow \text{Spec}(W^2) = -\mu^2 \quad (\mu \in \mathbb{R}). \quad (9.5.33) \quad \text{genP31}$$



Т.е. собственное значение оператора Казимира  $W^2$ , взятое со знаком минус, равно квадрату длины 2-мерного вектора трансляции, т.е. равно  $-\mu^2 \leq 0$ , где  $\mu$  – любое неотрицательное вещественное число (см. обсуждение этого случая чуть выше).

Вспоминая аргументы о необходимости выбора тривиального представления для подгруппы трансляций в  $H_q$ , мы требуем, чтобы

$$\hat{R}^\alpha |q\rangle = 0 \quad (\forall |q\rangle \in \mathcal{V}_q, \quad \alpha = 1, 2) \Rightarrow W_1 = W_2 = 0, \quad (9.5.34) \quad \text{genP24}$$

и, исходя из (9.5.33), мы имеем

$$W^2 = 0. \quad (9.5.35) \quad \text{genP30}$$

Теперь из уравнения (9.5.16) мы видим, что  $H_q$  действует на  $\mathcal{V}_q$  как произведение  $U(1)$  фактора и элемента абелевой группы, которая генерируется оператором  $\hat{M}^{12}$ . Т.к. неприводимые представления абелевой группы одномерны, то соответствующее пространство представления включает только одно нетривиальное состояние  $|q, \lambda\rangle \in \mathcal{V}_q$ , для которого мы имеем

$$\hat{M}^{12} |q, \lambda\rangle = \lambda |q, \lambda\rangle, \quad (9.5.36) \quad \text{genP34}$$

где  $\lambda = n/2 = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$  (см. (9.5.30)). Квантовое число  $\lambda$  называется спиральностью.

Из соотношений (9.5.31), (9.5.34), (9.5.36) следует, что в системе, когда тестовый импульс  $q$  выбран в виде (9.5.25), выполняется равенство

$$W_k |q, \lambda\rangle = \lambda P_k |q, \lambda\rangle. \quad (9.5.37) \quad \text{Wlam}$$

Т.к. это соотношение записано в ковариантном виде, то оно справедливо и для любого другого выбора тестового импульса  $q$  и следовательно мы имеем точное операторное равенство

$$W_k = \lambda \hat{P}_k, \quad (9.5.38) \quad \text{genP33}$$

а спиральность  $\lambda$  является Пуанкаре-инвариантной характеристикой безмассовых частиц. Заметим, что равенство (9.5.38) следует из (9.5.35) и очевидного тождества  $W_n \hat{P}^n = 0$ , а в твисторном описании безмассовых частиц это равенство получается автоматически (см. (9.2.54)).

Т.о., все безмассовые неприводимые представления группы Пуанкаре (в случае выполнения условий (9.5.34), (9.5.35)) характеризуются значениями спиральности  $\lambda$ . Из определения (9.5.4) вектора  $W_n$  и формулы (9.5.38), для временной компоненты  $k = 0$ , следует, что  $\lambda$  – собственное значение оператора спиральности

$$\hat{\lambda} = \frac{\vec{S} \vec{P}}{\hat{P}^0}, \quad (9.5.39) \quad \text{genP35}$$

где  $S_a = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{abc} \hat{M}_{bc}^{spin}$  ( $a, b, c = 1, 2, 3$ ) и  $\hat{M}_{bc}^{spin}$  – спиновая часть образующих  $\hat{M}_{bc}$  (орбитальная часть  $(x_b P_c - x_c P_b)$  оператора  $\hat{M}_{bc}$  не дает вклада в вектор Паули-Любанского). Т.к. здесь  $\hat{M}_{bc}^{spin}$  – образующие компактной подгруппы  $SO(3)$  в группе Лоренца, то мы, согласно изложенной выше процедуре, можем использовать для  $\hat{M}_{bc}^{spin}$  (соответственно для  $S_a$ ) конечномерные эрмитовы представления (для остальных образующих группы Лоренца  $\hat{M}_{b0}^{spin} = -\hat{M}_{0b}^{spin}$  этого сделать нельзя).

**Пример 1. Безмассовые спинорные поля.** Спиральность безмассовых спинорных полей можно получить рассматривая безмассовое свободное уравнение Дирака  $i\partial_m \gamma^m \psi(x) = 0$ . Из этого уравнения, в представлении (9.2.37), (9.2.43) для  $\gamma$ -матриц Дирака, следуют соотношения

$$\frac{\vec{\sigma} \vec{P}}{P^0} \psi_{\pm} = \mp \psi_{\pm} \Rightarrow \frac{\vec{S} \vec{P}}{P^0} \psi_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \psi_{\pm} \quad \left( P^0 = \sqrt{\vec{P}^2} \right), \quad (9.5.40) \quad \text{opspir}$$

где спин  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ ,  $\psi_{\pm}$  – 2-х компонентные вейлевские спиноры

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi,$$

а оператор  $\frac{\vec{S} \vec{P}}{P^0}$  есть оператор спиральности (см. [27] и формулу (9.5.39)).

Для того чтобы связать определение спиральности  $\lambda$  (9.5.37) – (9.5.39) с формулами (9.5.40), мы вычислим временную компоненту вектора Паули-Любанского (9.5.4) для случая спинорных генераторов  $\hat{M}_{mn} = -iM_{mn}^{tot}$ , где  $M_{mn}^{tot}$  определены в (9.4.22), а спинная часть определяется в (9.2.40), (9.2.30). В этом случае, получаем

$$W_0 = \frac{1}{2} \hat{P}_k \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \quad (9.5.41) \quad \text{Wn}$$

Тогда уравнение (9.5.37) с учетом (9.5.40) записывается в виде

$$W_0 \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = P_0 \begin{pmatrix} \frac{\vec{S} \vec{P}}{P^0} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{S} \vec{P}}{P^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = P_0 \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & +1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}.$$

Итак, в случае спинорного поля, мы имеем две возможности для значений спиральности  $\pm \frac{1}{2}$  (каждое из которых соответствует разным неприводимым представлениям группы Пуанкаре).

**Пример 2. Безмассовые векторные поля.** Рассмотрим уравнения для безмассовых векторных полей (уравнения Максвелла в пустоте)

$$\partial^m (\partial_m A_n(x) - \partial_n A_m(x)) = 0. \quad (9.5.42) \quad \text{maxw}$$

Эти уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований (9.4.23)  $A_n(x) \rightarrow A_n(x) + \partial_n c(x)$ , где функция  $c(x)$  – параметр преобразования. Общее решение (9.5.42) удобно искать в импульсном представлении, что также естественно и с точки зрения изучения неприводимых представлений группы Пуанкаре, для которых диагонализуются операторы импульса  $\hat{P}_m$ . В результате (9.5.42) и соответствующее калибровочное преобразование переписываются в виде

$$k^m k_m A_n(k) - k^m k_n A_m(k) = 0 \Rightarrow k^2 A_n - k_n (k, A) = 0, \quad (9.5.43) \quad \text{maxw1}$$

$$A_m(k) \rightarrow A_m(k) + k_m c(k), \quad (9.5.44) \quad \text{maxw2}$$

где  $k^2 = k^m k_m$  и  $(k, A) = k^m A_m(k)$ . Для случая  $k^2 \neq 0$  мы получаем решение (9.5.43) в виде  $A_m(k) = k_m c(k)$  ( $c(k)$  – произвольная функция), что соответствует

чистому калибровочному преобразованию. Т.о., для случая  $k^2 \neq 0$ , уравнения (9.5.43) не имеют нетривиальных решений.

Пусть теперь  $k^2 = 0$ , тогда уравнение (9.5.43) дает условие четырех-мерной поперечности  $(k^m A_m) = 0$ . Это условие оставляет 3 компоненты у вектора  $A_m$  независимыми, другими словами имеется 3 линейно независимых вектора, ортогональных (в 4-х мерном смысле) к  $k^m$ . Один из них сам  $k_m$ , два других –  $e_m^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) – можно выбрать чисто пространственными и ортогональными (в 3-х мерном смысле) 3-вектору  $\vec{k}$  и друг другу

$$e_0^\alpha = 0, \quad e_a^\alpha k_a = 0, \quad e_a^\alpha e_a^\beta = \delta^{\alpha\beta} \quad (a = 1, 2, 3). \quad (9.5.45) \quad \text{maxw3}$$

Итак, при  $k^2 = 0$  общее решение (9.5.43) имеет вид

$$A_m(k) = k_m c(k) + e_m^\alpha b_\alpha(k), \quad (9.5.46) \quad \text{maxw4}$$

где  $c(k)$  и  $b_\alpha(k)$  – произвольные функции от  $\vec{k}$  поскольку  $k_0^2 = \vec{k}^2$ , причем продольная компонента  $k_m c(k)$  соответствует калибровочному преобразованию (9.5.44). Два вектора  $e_m^\alpha$  обычно выбирают в соответствии с возможными спиральностями  $\lambda$  безмассового векторного поля.

Чтобы разобраться с возможными спиральностями  $\lambda$  векторного поля, рассмотрим временную компоненту вектора Паули-Любанского (9.5.4), соответствующую векторному (определяющему) представлению (9.1.20) образующих  $\hat{M}_{mn}^{spin}$ ,

$$(W_0)^r_j = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{0snm} \hat{P}^s (\hat{M}^{nm})^r_j = \frac{i}{2} \mathcal{E}_{0snm} \hat{P}^s (g^{mr} \delta_j^n - g^{nr} \delta_j^m) = i \mathcal{E}_{0snm} \hat{P}^s g^{mr} \delta_j^n.$$

Тогда нулевая компонента равенства (9.5.37), для случая векторного поля  $A_m(k)$ , записывается следующим образом

$$(W_0)^r_j A^j(k) = \lambda \hat{P}_0 A^r(k) \Rightarrow \frac{i}{k_0} \mathcal{E}_{0snm} k^s A^n(k) = \lambda A_m(k). \quad (9.5.47) \quad \text{maxw8}$$

Это равенство можно рассматривать как линейное уравнение на вектор-потенциал  $A_m(k)$ , у которого имеется две нулевые моды ( $\lambda = 0$ ) – временной фотон  $A_m^0(k) = (a(k), 0, 0, 0)$  и продольный фотон  $A_m^\parallel(k) = k_m c(k)$ , где  $a(k), c(k)$  – произвольные функции. Сворачивая (9.5.47) с  $k^m$ , или полагая в (9.5.47)  $m = 0$ , мы получаем 2 соотношения:  $0 = \lambda(k, A)$ ,  $0 = \lambda A_0$ , которые при  $\lambda \neq 0$  приводят к ограничениям на компоненты  $A_m$  – к условию поперечности  $(k, A) = 0$  и условию  $A_0 = 0$ . Т.о., для выделения мод векторного поля (9.5.46), которые соответствуют ненулевым спиральностям  $\lambda$ , достаточно рассмотреть пространственную проекцию уравнений (9.5.47)

$$i \mathcal{E}_{acb} k^a A^c(k) = \lambda k_0 A_b(k) \Rightarrow \hat{\lambda}_{bc} A_c(k) = \lambda A_b(k), \quad \hat{\lambda}_{bc} = \frac{i}{k_0} \mathcal{E}_{bac} k_a. \quad (9.5.48) \quad \text{maxw5}$$

Т.е. задача о нахождении спиральности  $\lambda$  для безмассового векторного поля свелась к задаче о спектре  $3 \times 3$  матрицы  $\hat{\lambda}_{bc}$  (9.5.48). Т.к.

$$(\hat{\lambda}^2)_{bd} = \frac{1}{k_0^2} \left( \vec{k}^2 \delta_{bd} - k_b k_d \right), \quad (9.5.49) \quad \text{maxw7}$$

то, как легко проверить, при условии  $k_0^2 = \vec{k}^2$  матрица  $\hat{\lambda}$  удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\hat{\lambda}^3 - \hat{\lambda} = 0, \quad (9.5.50) \quad \text{maxw6}$$

и, следовательно, у матрицы  $\hat{\lambda}$  имеется 3 собственных значения:  $\lambda = 0, \pm 1$ . Очевидно, что спиральность  $\lambda = 0$  соответствует собственному вектору  $A_a \sim k_a$ , т.е. продольному фотону, отвечающему нефизической калибровочной степени свободы (см. (9.5.46)). Согласно тождеству (9.5.50) компоненты  $A_m$ , соответствующие спиральностям  $\lambda = \pm 1$ , выделяются с помощью проекторов

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2} \hat{\lambda} (\hat{\lambda} \mp 1), \quad \hat{\lambda} \Pi_{\pm} = \pm \Pi_{\pm}, \quad \Pi_{\pm}^2 = \Pi_{\pm},$$

которые с учетом (9.5.49) можно представить в явном виде

$$(\Pi_{\pm})_{bd} = \frac{1}{2k_0^2} \left( \vec{k}^2 \delta_{bd} - k_b k_d \mp i k_0 \mathcal{E}_{bad} k_a \right).$$

Спиральности  $\lambda = \pm 1$  соответствуют компонентам

$$A_a^{\pm}(k) = (\Pi_{\pm})_{ab} A_b(k) = e_a^{\pm} b_{\mp}(k).$$

Выберем систему координат, в которой  $k_m = (E, 0, 0, -E)$  (9.5.25). Тогда для компонент  $A_a^{\pm}(k)$ ,  $b_{\pm}(k)$  и векторов  $e_m^{\pm}$  получаем выражения

$$A_a^+(k) = \frac{1}{2} ((A_1 - iA_2), i(A_1 - iA_2), 0), \quad A_a^-(k) = \frac{1}{2} ((A_1 + iA_2), -i(A_1 + iA_2), 0).$$

$$b_{\pm}(k) = \frac{1}{2} (A_1 \pm iA_2), \quad e_m^{\pm} = (0, 1, \pm i, 0).$$

Итак, унитарные представления группы Пуанкаре распадаются на 3 класса:

**1. Массивные представления.** Собственное значение оператора  $\hat{P}^2 = m^2$  есть действительное положительное число. При этом собственное значение оператора  $W^2 = -m^2 s(s+1)$ , где  $s$  – спин, принимающий целые и полуцелые значения  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ . Т.о., данные представления характеризуются массой  $m > 0$  и спином  $s$ . Состояния внутри представления различаются собственными значениями одной из компонент вектора  $\frac{1}{m} W_k$  (9.5.22), например, 3-ей компоненты спина  $S_3 = (-s, -s+1, \dots, s-1, s)$ , а также непрерывными собственными значениями операторов  $\hat{P}_m$ . Эти состояния соответствуют частицам с массой  $m > 0$ , спином  $s$ , трехмерным импульсом  $\vec{p}$  и проекцией спина  $S_3$  ( $2s+1$  состояний).

**2. Безмассовые представления с дискретным спином.** Собственное значение оператора  $\hat{P}^2$  равно нулю, что соответствует частице с нулевой массой  $m$ . При этом собственное значение  $W^2$  также равно нулю, т.к. операторы  $W_n$  и  $\hat{P}_n$  пропорциональны друг другу  $W_n = \lambda \hat{P}_n$ . Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  называется спиральностью и равен  $\pm s$ , где  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  – спин представления. Т.о., данные представления характеризуются массой  $m = 0$  и спином  $s$ . Состояния внутри представления различаются значением спиральности  $\lambda = \pm s$  и непрерывным импульсом

$\vec{p}$ . Примерами частиц из данной категории служат: безмассовые нейтрино со спиральностью  $\pm 1/2$ , фотон со спином 1 и 2-мя состояниями со спиральностью  $\pm 1$  и гравитон с двумя состояниями поляризации  $\pm 2$ .

**3. Безмассовые представления с непрерывным спином.** Собственное значение оператора  $\hat{P}^2$  равно нулю, но при этом собственное значение оператора  $W^2 = -\mu^2 < 0$  непрерывно, см. (9.5.33). Этот тип представления описывает частицу с нулевой массой покоя и с бесконечным числом состояний поляризации, характеризуемой непрерывной переменной  $\mu$ . Такие частицы, по-видимому, в природе не реализуются.

Существуют также тахионные представления с  $\hat{P}^2 < 0$ , но мы такие представления не рассматривали.

## 10 Приложение 1. Решения некоторых задач.

### 10.1 Задача 7. Разложение в произведение циклов любой перестановки из $S_n$ .

Для начала разложим в произведение циклов перестановку (2.1.14). Для этого возьмем элемент 1 из верхней строки (2.1.14). Этот элемент переходит в элемент 3, элемент 3 переходит в 4, а 4 переходит в 1. То есть в перестановке (2.1.14) содержится цикл (1, 3, 4). Далее, берем из верхней строки любой элемент, не совпадающий с 1, 3 и 4, например элемент 2, который переходит в 6. Прodelывая ту же процедуру, что и выше, мы получаем, что в перестановке (2.1.14) содержится еще и цикл (2, 6, 8, 5). Далее берем элемент 7, который не возникал в предыдущих циклах, и находим соответствующий ему цикл (7, 10). Окончательно, мы получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 10 & 5 & 9 & 7 \end{pmatrix} = (1, 3, 4) \cdot (2, 6, 8, 5) \cdot (7, 10) \cdot (9) .$$

Очевидно, что подобную процедуру можно применить и к произвольной перестановке из  $S_n$ , что в результате и будет демонстрировать, что любую перестановку из  $S_n$  можно разложить в произведение циклов, состоящих из различных символов.

### 10.2 Задача 43. Изоморфизм $Sp'(p, q) = Sp(p, q)$ .

Введем  $2r \times 2r$  матрицу  $S$ , которую представим в блочном виде

$$S = \begin{pmatrix} P^+ & P^- \\ P^- & P^+ \end{pmatrix} , \quad (10.2.1) \quad \text{sss}$$

где  $r \times r$  блоки  $P^\pm$  определяются следующим образом

$$P^+ = \frac{I_r + I_{p,q}}{2} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad P^- = \frac{I_r - I_{p,q}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} , \quad (10.2.2) \quad \text{pppm}$$

а матрица  $I_{p,q}$  задана в (2.2.54). Блоки  $P^\pm$  обладают свойствами проекторов

$$P^+ P^+ = P^+ , \quad P^- P^- = P^- , \quad P^+ P^- = P^- P^+ = 0 , \quad P^+ + P^- = I_r .$$

Матрица  $S$  осуществляет перестановку  $2q$  компонент у  $2r$ -мерного вектора, что легко проверить, воспользовавшись явным видом матрицы  $S$  (10.2.1) и проекторов (10.2.2). Учитывая (10.2.2), получаем  $S^2 = I_{2r}$ , а также имеем

$$S \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}, \quad S \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, изоморфизм  $Sp'(p, q) = Sp(p, q)$  устанавливается с помощью взаимнооднозначного соответствия  $T' \leftrightarrow S T S$  для элементов этих групп  $T' \in Sp'(p, q)$  и  $T \in Sp(p, q)$ .

### 10.3 Задача 56. Многообразие группы $O(p, q)$ .

Рассмотрим уравнения (3.1.31), которые эквивалентны условию псевдоортогональности (2.2.64) Матрицы  $Z^T \cdot Z$  и  $Y^T \cdot Y$  – положительно определены, то есть все их собственные значения  $\lambda_a(Z)$  и  $\lambda_\alpha(Y)$  вещественны и положительны. Последнее следует из тривиального равенства

$$\vec{v}^T (Z^T \cdot Z) \vec{v} = (Z \vec{v})^T \cdot Z \vec{v} \geq 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^p,$$

и аналогичного равенства для матрицы  $(Y^T \cdot Y)$ . Тогда из первого и второго соотношения в (3.1.31) мы получаем, что

$$\begin{aligned} (\det(X))^2 &= \det(X^T \cdot X) = \prod (1 + \lambda_a(Z)) \geq 1, \\ (\det(W))^2 &= \det(W^T \cdot W) = \prod_{\alpha} (1 + \lambda_{\alpha}(Y)) \geq 1, \end{aligned} \tag{10.3.3} \quad \text{so-pq3}$$

и матрицы  $X$  и  $W$  обратимы. Кроме того из (10.3.3) следует, что многообразие группы  $O(p, q)$ , где  $p \geq 1$  и  $q \geq 1$ , имеет по крайней мере 4 несвязанные компоненты, которые определяются неравенствами (сравните с (3.1.28))

$$\begin{aligned} 1. \quad & \det(X) \geq 1, \quad \det(W) \geq 1; \quad 2. \quad \det(X) \leq -1, \quad \det(W) \leq -1; \\ 3. \quad & \det(X) \geq 1, \quad \det(W) \leq -1; \quad 4. \quad \det(X) \leq -1, \quad \det(W) \geq 1. \end{aligned} \tag{10.3.4} \quad \text{so-pq5}$$

Покажем, что число несвязанных компонент группы  $O(p, q)$ , где  $p \geq 1$  и  $q \geq 1$ , не может быть более четырех. Любой элемент  $O$  (3.1.30) группы  $O(p, q)$  можно непрерывными деформациями привести к виду

$$O' = \begin{pmatrix} X' & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & W' \end{pmatrix}, \tag{10.3.5} \quad \text{so-pq4}$$

где  $0_{p \times q}$  и  $0_{q \times p}$  – нулевые матрицы. Для этого достаточно в (3.1.30) сделать замену  $Z \rightarrow t Z$ , где  $t \in [0, 1]$ , и найти согласно (3.1.31) соответствующие матрицы  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и  $W(t)$ . В частности из третьего уравнения в (3.1.31), которое переписывается в виде

$$Y(t) = t [X(t)^T]^{-1} \cdot Z^T \cdot W(t),$$

видно, что всегда можно найти такое решение, что  $Y(t)|_{t=0} = 0$ . Тогда  $X' = X(0)$  и  $W' = W(0)$ . Так как

$$(X')^T \cdot X' = I_p, \quad (W')^T \cdot W' = I_q,$$

то есть  $X', W'$  – ортогональные матрицы, то многообразие матриц (10.3.5), которое является подмногообразием в  $O(p, q)$ , состоит из 4-х компонент

1.  $\det(X') = 1, \det(W') = 1$ ; 2.  $\det(X') = -1, \det(W') = -1$ ;
3.  $\det(X') = 1, \det(W') = -1$ ; 4.  $\det(X') = -1, \det(W') = 1$ ,

которые не связаны друг с другом. Таким образом, число несвязанных друг с другом компонент в  $O(p, q)$  не превышает 4-х, и следовательно число таких компонент в  $O(p, q)$ , где  $p \geq 1$  и  $q \geq 1$ , равно четырем. В частности мы получаем, что число несвязанных друг с другом компонент в собственной псевдо-ортогональной группе  $SO(p, q)$ , где  $p \geq 1$  и  $q \geq 1$ , всегда равно двум: компонента **1.**) (подгруппа  $SO^\uparrow(p, q)$ ) и компонента **2.**), перечисленные в (10.3.4). Многообразие всей группы  $O(p, q)$  очевидно будет представляться как объединение четырех смежных классов (сравните с (3.1.29))

$$O(p, q) = (SO^\uparrow(p, q) \cdot I_{p+q}) \cup (SO^\uparrow(p, q) \cdot P) \cup (SO^\uparrow(p, q) \cdot T) \cup (SO^\uparrow(p, q) \cdot PT),$$

где

$$P = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Доказательство последнего факта мы оставляем читателю.

#### 10.4 Задача 65. Тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа.

Прежде всего докажем равенство

$$(\delta e^F) = \int_0^1 dt e^{(1-t)F} (\delta F) e^{tF}, \quad (10.4.6) \quad \text{CaH5}$$

где  $\delta F$  обозначает вариацию оператора  $F$ . Воспользуемся тождеством

$$\frac{d}{dt} (e^{-tF} \delta e^{tF}) = e^{-tF} [\delta, F] e^{tF}, \quad (10.4.7) \quad \text{CaH7}$$

и тем, что линейный оператор вариации  $\delta$  действует как дифференцирование

$$\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B) \Rightarrow \delta(A)B = \delta(AB) - A\delta(B),$$

то есть  $(\delta A) = [\delta, A]$ . Проинтегрируем обе части (10.4.7) по  $t$  от нуля до единицы. В результате получаем

$$e^{-F} \delta e^F - \delta = \int_0^1 dt e^{-tF} [\delta, F] e^{tF}. \quad (10.4.8) \quad \text{CaH8}$$

Умножая обе части (10.4.8) слева на  $e^F$  мы выводим тождество

$$[\delta, e^F] = \int_0^1 dt e^{(1-t)F} [\delta, F] e^{tF}, \quad (10.4.9) \quad \text{CaH9}$$

которое эквивалентно (10.4.6).

С другой стороны, воспользовавшись соотношением (3.2.12), формулу (10.4.8) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} e^{-F} [\delta, e^F] &= \int_0^1 dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [\dots [\delta, \underbrace{F, \dots, F}_{k+1}], \dots, F] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} [\dots [\delta, \underbrace{F, \dots, F}_{k+1}], \dots, F] = \frac{1 - e^{-\text{ad}(F)}}{\text{ad}(F)} [\delta, F], \end{aligned} \quad (10.4.10) \quad \text{CaH10}$$

где мы определили операторы  $\text{ad}(F)$ :

$$\text{ad}(F) \cdot A = [F, A], \quad (\text{ad}(F))^k \cdot A = \underbrace{[F, [F, \dots, [F, A]]}_k,$$

и экспонента  $e^{-\text{ad}(F)}$  понимается как разложение в ряд. Тождество

$$e^{-F} (\delta e^F) = \frac{1 - e^{-\text{ad}(F)}}{\text{ad}(F)} \delta F, \quad (10.4.11) \quad \text{CaH6a}$$

которое вытекает из (10.4.10), называется тождеством Кэмпбелла–Пуанкаре. Эквивалентная форма тождества Кэмпбелла–Пуанкаре (она получается из (10.4.11) умножением слева на  $e^F$ , а справа на  $e^{-F}$ ) имеет вид

$$(\delta e^F) e^{-F} = \frac{e^{\text{ad}(F)} - 1}{\text{ad}(F)} \delta F. \quad (10.4.12) \quad \text{CaH6}$$

Тождества (10.4.11), (10.4.12) можно также записать в виде

$$\delta F = \frac{\text{ad}(F)}{1 - e^{-\text{ad}(F)}} e^{-F} (\delta e^F), \quad \delta F = \frac{\text{ad}(F)}{e^{\text{ad}(F)} - 1} (\delta e^F) e^{-F}. \quad (10.4.13) \quad \text{CaH6b}$$

Для возникших в правых частях (10.4.13) операторов  $\frac{\text{ad}(F)}{1 - e^{-\text{ad}(F)}}$  и  $\frac{\text{ad}(F)}{e^{\text{ad}(F)} - 1}$  удобно использовать следующие разложения

$$\frac{\text{ad}(F)}{e^{\text{ad}(F)} - 1} = \frac{\log(e^{\text{ad}(F)})}{e^{\text{ad}(F)} - 1} = \frac{-1}{e^{\text{ad}(F)} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{\text{ad}(F)})^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{\text{ad}(F)})^{k-1}}{k}, \quad (10.4.14) \quad \text{CaH6c}$$

$$\frac{\text{ad}(F)}{1 - e^{-\text{ad}(F)}} = e^{\text{ad}(F)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{\text{ad}(F)})^{k-1}}{k}. \quad (10.4.15) \quad \text{CaH6d}$$

Возьмем в качестве  $F$  оператор  $F(t)$ , заданный соотношением

$$e^{F(t)} = e^{tA_1} \cdot e^{tA_2}, \quad (10.4.16) \quad \text{CaH11}$$



где  $A_1$  и  $A_2$  – некоммутирующие элементы. Подействуем на обе части (10.4.16) производной  $\delta \equiv \partial_t$ , умножим справа на  $e^{-F(t)}$  и воспользуемся (10.4.12). В результате получаем

$$\frac{e^{\text{ad}(F(t))} - 1}{\text{ad}(F(t))} \cdot \partial_t F(t) = (A_1 + e^{t \text{ad}(A_1)} \cdot A_2). \quad (10.4.17) \quad \text{CaH12}$$

Если воспользоваться соотношением (10.4.14), то (10.4.17) переписывается в виде

$$\partial_t F = \frac{\text{ad}(F)}{e^{\text{ad}(F)} - 1} (A_1 + e^{t \text{ad}(A_1)} \cdot A_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{\text{ad}(F)})^n}{n+1} (A_1 + e^{t \text{ad}(A_1)} \cdot A_2). \quad (10.4.18) \quad \text{CaH13}$$

Из (10.4.16) следует, что  $F(0) = 0$  и  $e^{\text{ad}(F(t))} = e^{t \text{ad}(A_1)} \cdot e^{t \text{ad}(A_2)}$ . Тогда, интегрируя обе части соотношения (10.4.18) по  $t$  от нуля до единицы, мы получаем тождество Кэмпбелла–Хаусдорфа в форме (3.2.10).

Отметим, что факторы  $(1 - e^{t \text{ad}(A_1)} \cdot e^{t \text{ad}(A_2)})^n$ , возникающие в сумме в правой части (10.4.18) (или (3.2.10)), пропорциональны как минимум  $t^n$ , так как

$$\begin{aligned} (1 - e^{t \text{ad}(A_1)} \cdot e^{t \text{ad}(A_2)}) &= - \sum_{m=1}^{\infty} t^m \sum_{k=0}^m C_m^k (\text{ad}(A_1))^{m-k} \cdot (\text{ad}(A_2))^k = \\ &= -t(\text{ad}(A_1) + \text{ad}(A_2)) - \frac{t^2}{2}((\text{ad}(A_1))^2 + 2\text{ad}(A_1) \cdot \text{ad}(A_2) + (\text{ad}(A_2))^2) - \\ &\quad - \frac{t^3}{3!}((\text{ad}(A_1))^3 + 3(\text{ad}(A_1))^2 \text{ad}(A_2) + 3\text{ad}(A_1) (\text{ad}(A_2))^2 + (\text{ad}(A_2))^3) + O(t^3), \end{aligned} \quad (10.4.19) \quad \text{CaH14}$$

а степень  $k$  параметра  $t$  в разложении по  $t$  в правой части (10.4.18) соответствует степени  $k+1$  данного слагаемого по переменным  $A_1$  и  $A_2$ . Поэтому, если мы хотим вычислить  $F$  с точностью до слагаемых, имеющих степень  $k$  по переменным  $A_1$  и  $A_2$ , мы должны знать  $F(t)$  с точностью до  $O(t^k)$ . Пользуясь (10.4.18) и (10.4.19) вычисляем

$$\partial_t F(0) = (A_1 + A_2), \quad \partial_t^2 F(0) = [A_1, A_2], \quad \partial_t^3 F(0) = \frac{1}{2}[A_1 - A_2, [A_1, A_2]],$$

откуда следует разложение (3.2.13).

**10.5** *Задача 105. Изоморфизмы 1.)  $so(1, 3) = sl(2, \mathbb{C})$ , 2.)  $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$  и 3.)  $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$ .*

**1.)** Рассмотрим четыре матрицы следующего вида

$$\gamma_0 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad \gamma_1 = i \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = i \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \gamma_3 = i \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad (10.5.20) \quad \text{Gam01}$$

где  $I_2$  – единичная  $2 \times 2$  матрица,  $\sigma_i$  – матрицы Паули (3.1.18), а  $\otimes$  – прямое произведение матриц, которое определено в (4.3.8), (4.3.9). Пользуясь (4.3.9) матрицы (10.5.20) можно представить в стандартном виде  $4 \times 4$  матриц, записанных в блочном виде,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.5.21) \quad \text{Gam01-13}$$

где  $0$  – нулевые  $2 \times 2$  блоки. Матрицы (10.5.20), (10.5.21) называются матрицами Дирака. Они удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} I_4, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (10.5.22) \quad \text{Gam03}$$

где  $||g_{\mu\nu}|| = I_{1,3}$  – метрика пространства Минковского. Построим из  $\gamma_\mu$  (10.5.21) операторы

$$\tilde{L}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (10.5.23) \quad \text{Gam04}$$

где  $\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$ ,  $\tilde{\sigma}_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu}^\dagger$  и мы имеем (смотри (9.2.30))

$$\sigma_{0i} = -\tilde{\sigma}_{0i} = -\frac{1}{2} \sigma_i, \quad \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} = -\frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (10.5.24) \quad \text{snm5}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  (см. (3.2.119)). В силу равенств (10.5.22) матрицы  $\tilde{L}_{\mu\nu}$  (10.5.23) размера  $(4 \times 4)$ , и соответственно  $(2 \times 2)$  матрицы  $\sigma_{\mu\nu}$  и  $\tilde{\sigma}_{\mu\nu}$  (10.5.24), образуют алгебры Ли с одинаковыми определяющими соотношениями

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\kappa\rho}] = g_{\nu\kappa} \sigma_{\mu\rho} + g_{\nu\rho} \sigma_{\kappa\mu} + g_{\mu\kappa} \sigma_{\rho\nu} + g_{\mu\rho} \sigma_{\nu\kappa}, \quad (10.5.25) \quad \text{Gam04b}$$

которые совпадают с определяющими соотношениями алгебры Ли  $so(1, 3)$ . Таким образом, мы имеем гомоморфизм (представление) из  $so(1, 3)$  с образующими  $L_{\mu\nu}$  (смотри (3.2.148)) в алгебру Ли с образующими  $\tilde{L}_{\mu\nu}$  (10.5.23), причем представление (10.5.23) распадается в прямую сумму двух представлений алгебры  $so(1, 3)$  с образующими  $\sigma_{\mu\nu}$  и  $\tilde{\sigma}_{\mu\nu}$  (10.5.24). Любой элемент алгебры Ли  $so(1, 3)$  в базисе  $\tilde{L}_{\mu\nu}$  (10.5.23) можно представить в виде

$$\omega^{\nu\mu} \tilde{L}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^\dagger \end{pmatrix}, \quad (10.5.26) \quad \text{zoo1}$$

где

$$A = \omega^{\nu\mu} \sigma_{\nu\mu} = -(\omega^{0i} \sigma_i + \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \omega^{jk} \sigma_i) = z^i \sigma_i, \quad (10.5.27) \quad \text{zoo}$$

$\omega^{\mu\nu}$  – координаты в алгебре  $so(1, 3)$  такие, что  $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \in \mathbb{R}$ , и мы определили три произвольных комплексных числа (смотри (9.2.31))

$$z^i = -(\omega^{0i} + \frac{i}{2} \varepsilon_{ijk} \omega^{jk}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.5.28) \quad \text{zo}$$

по шести вещественным параметрам  $\omega^{\mu\nu}$ . Так как матрицы  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) образуют базис в комплексной алгебре Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ , то матрицы (10.5.27) определяют произвольный элемент алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ , а соотношения (10.5.26), (10.5.27) и (10.5.28) задают отображение  $so(1, 3) \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$ , которое является изоморфизмом. Действительно, используя (10.5.27) и (10.5.28) (смотри также (10.5.24)), полученное соответствие алгебр Ли  $so(1, 3)$  и  $sl(2, \mathbb{C})$  (как вещественной шестимерной алгебры) можно записать явно в терминах образующих  $\{L_{\mu\nu}\} \in so(1, 3)$  и  $\{\sigma_j, i\sigma_k\} \in sl(2, \mathbb{C})$ :

$$L_{0j} \rightarrow -\frac{1}{2} \sigma_j, \quad L_{jk} \rightarrow -\frac{1}{2} \varepsilon_{jkm} (i \sigma_m).$$

Это отображение является взаимно однозначным, так как его можно обратить

$$\sigma_j \rightarrow -2 L_{0j}, \quad (i \sigma_m) \rightarrow -\varepsilon_{mjk} L_{jk}. \quad (10.5.29) \quad \text{zo1}$$

**2.)** Для доказательства изоморфизма  $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$  можно воспользоваться методом, который изложен в предыдущем случае. Вместо матриц (10.5.20) необходимо рассмотреть вещественные матрицы

$$\gamma'_0 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad \gamma'_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \gamma'_2 = i \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma'_3 = i \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad (10.5.30) \quad \text{Gam01-22}$$

или

$$\gamma'_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma'_i \\ -\sigma'_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.5.31) \quad \text{Gam01-23}$$

где  $\sigma'_1 = -i\sigma_2$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_1$ ,  $\sigma'_3 = \sigma_3$  – три вещественные образующие алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$ , удовлетворяющие структурным соотношениям

$$[\sigma'_i, \sigma'_j] = 2\varepsilon_{ijm} \eta^{mk} \sigma'_k, \quad \|\eta^{mk}\| = \text{diag}(1, -1, -1). \quad (10.5.32) \quad \text{Gam03-21}$$

Матрицы (10.5.30) удовлетворяют соотношениям (10.5.22) с метрикой  $g_{\mu\nu} = I_{2,2}$ . Соответственно аналоги операторов (10.5.23) дают точное представление образующих алгебры  $so(2, 2)$ :

$$\tilde{L}'_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma'_\mu \gamma'_\nu - \gamma'_\nu \gamma'_\mu) = \begin{pmatrix} \sigma'_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}'_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (10.5.33) \quad \text{Gam04-22}$$

где

$$\sigma'_{0i} = -\tilde{\sigma}'_{0i} = -\frac{1}{2} \sigma'_i, \quad \sigma'_{ij} = \tilde{\sigma}'_{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijm} \eta^{mk} \sigma'_k, \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3). \quad (10.5.34) \quad \text{snm5-22}$$

Любой элемент алгебры  $so(2, 2)$  в базисе (10.5.33) записывается в виде

$$\omega^{\mu\nu} \tilde{L}'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (10.5.35) \quad \text{Gam04-23}$$

где  $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$  – вещественные координаты в алгебре  $so(2, 2)$ , а  $A$  и  $B$  два произвольных независимых элемента алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} A &= \omega^{\mu\nu} \sigma'_{\mu\nu} = -(\omega^{0i} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jkm} \eta^{mi} \omega^{jk}) \sigma'_i = x^i \sigma'_i, \\ B &= \omega^{\mu\nu} \tilde{\sigma}'_{\mu\nu} = (\omega^{0i} - \frac{1}{2} \varepsilon_{jkm} \eta^{mi} \omega^{jk}) \sigma'_i = \tilde{x}^i \sigma'_i. \end{aligned} \quad (10.5.36) \quad \text{Gam04-24}$$

Вместо шести параметров  $\omega^{\mu\nu} \in \mathbb{R}$  мы определили шесть независимых вещественных параметров  $x^k$  и  $\tilde{x}^k$ . Таким образом, правая часть (10.5.35) представляет собой произвольный элемент прямой суммы двух алгебр  $sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$  (смотри Пример 6 из раздела 3.2.6). С учетом того, что левая часть (10.5.35) – это произвольный элемент  $so(2, 2)$ , то соотношение (10.5.35) устанавливает изоморфизм  $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$ .

**3.)** Изоморфизм  $so(4, \mathbb{C}) = sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$  получается из изоморфизма 2.)  $so(2, 2) = sl(2, \mathbb{R}) + sl(2, \mathbb{R})$  с помощью комплексификации участвующих в нем вещественных алгебр Ли. Изоморфизмы 1.) и 2.), рассмотренные в этой задаче и изоморфизм, сформулированный в Утверждении 3.2.9, являются изоморфизмами между различными вещественными формами алгебр Ли  $so(4, \mathbb{C})$  и  $sl(2, \mathbb{C}) + sl(2, \mathbb{C})$

**10.6** Задача 106. Изоморфизм  $so(5) = usp(4)$ .

Рассмотрим пять матриц  $4 \times 4$  следующего вида

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \sigma_1 \otimes \sigma_2, \quad \Gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_3 \otimes \sigma_2, \quad \Gamma_4 = I_2 \otimes \sigma_1, \\ \Gamma_5 &= \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 = I_2 \otimes \sigma_3, \end{aligned} \quad (10.6.37) \quad \text{Gam1}$$

где  $\sigma_i$  – матрицы Паули (3.1.18), а  $\otimes$  – прямое произведение матриц, которое определено в (4.3.8), (4.3.9). Поскольку матрицы Паули эрмитовы,  $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), то все  $\Gamma_k$  также эрмитовы:

$$\Gamma_k^\dagger = \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (10.6.38) \quad \text{Gam2}$$

а из тождеств (3.2.119) следует, что матрицы  $\{\Gamma_i\}$  образуют пятимерную алгебру Клиффорда

$$\Gamma_k \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_k = 2 \delta_{kj} I_4. \quad (10.6.39) \quad \text{Gam3}$$

Построим из матриц (10.6.37) операторы

$$\widetilde{M}_{kj} = \frac{1}{4} (\Gamma_k \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_k) \quad (j, k = 1, \dots, 5). \quad (10.6.40) \quad \text{Gam4}$$

Эти операторы, в силу равенств (10.6.39), удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\widetilde{M}_{ij}, \widetilde{M}_{kl}] = \delta_{jk} \widetilde{M}_{il} + \delta_{jl} \widetilde{M}_{ki} + \delta_{ik} \widetilde{M}_{lj} + \delta_{il} \widetilde{M}_{jk}. \quad (10.6.41) \quad \text{Gam4a}$$

которые совпадают с коммутационными соотношениями (3.2.141) для образующих алгебры Ли  $so(5)$ . Заметим, что для  $\widetilde{M}_{jk}$ , согласно (10.6.38), мы имеем условия антиэрмитовости

$$\widetilde{M}_{kj}^\dagger = -\widetilde{M}_{kj}, \quad j, k = 1, \dots, 5. \quad (10.6.42) \quad \text{Gam5}$$

С другой стороны, пользуясь явным видом матриц Паули (3.1.18) и определениями (10.6.37) можно получить соотношения

$$\Gamma_1^T = -\Gamma_1, \quad \Gamma_2^T = \Gamma_2, \quad \Gamma_3^T = -\Gamma_3, \quad \Gamma_4^T = \Gamma_4, \quad \Gamma_5^T = \Gamma_5, \quad (10.6.43) \quad \text{Gam6}$$

которые переписываются в виде

$$\Gamma_k^T C = C \Gamma_k, \quad (10.6.44) \quad \text{Gam7}$$

где

$$C = \Gamma_3 \Gamma_1 = i \sigma_2 \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.6.45) \quad \text{Gam11}$$

– вещественная кососимметричная матрица, входящая в условие симплектичности (3.2.26) с  $r = 2$ . Учитывая (10.6.44), мы получаем для операторов (10.6.40), в дополнение к условию антиэрмитовости (10.6.42), еще и условие симплектичности (3.2.26):

$$\widetilde{M}_{kj}^T C = -C \widetilde{M}_{kj}. \quad (10.6.46) \quad \text{Gam8}$$

В силу известных свойств алгебры Клиффорда (10.6.39) (смотри Главу ”Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления”) любую комплексную  $4 \times 4$  матрицу  $A$  можно представить в виде

$$A = z I_4 + z_i \Gamma_i + z_{kj} \widetilde{M}_{kj}, \quad (10.6.47) \quad \text{Gam9}$$

где  $z, z_k, z_{kj} = -z_{jk}$  ( $k, j = 1, \dots, 5$ ) составляют набор из 16 независимых комплексных параметров. Матрицы  $A \in usp(4)$  удовлетворяет условиям антиэрмитовости и симплектичности

$$A^\dagger = -A, \quad A^T C = -C A. \quad (10.6.48) \quad \text{Gam10}$$

Из (10.6.38), (10.6.42), (10.6.44) и (10.6.46) следует в этом случае, что  $z = 0$ ,  $z_k = 0$  и  $z_{kj} = z_{kj}^*$ , то есть  $z_{kj} \in \mathbb{R}$ . Таким образом, любая матрица  $A \in usp(4)$  представима в виде

$$A = \omega_{kj} \widetilde{M}_{kj} \quad (\omega_{kj} = -\omega_{jk}, \quad \omega_{jk} \in \mathbb{R}),$$

и следовательно матрицы  $\widetilde{M}_{kj}$  образуют базис в алгебре Ли  $usp(4)$ . Наконец, определяя взаимно-однозначное соответствие  $\widetilde{M}_{kj} \leftrightarrow M_{kj}$  между базисными элементами  $\widetilde{M}_{kj} \in usp(4)$  (10.6.40) и  $M_{kj} \in so(5)$  (3.2.140), которые удовлетворяют одним и тем же определяющим соотношениям (10.6.41) и (3.2.141), мы устанавливаем изоморфизм  $usp(4) = so(5)$ .

**Замечание 1.** Отметим, что данное доказательство изоморфизма  $usp(4) = so(5)$  работает и для любого другого 4-х мерного представления (отличного от (10.6.37)<sup>41</sup>) пятимерной алгебры Клиффорда (10.6.39), в котором все  $\Gamma_i$  эрмитовы (10.6.38). В любом таком представлении связь между  $\Gamma_i^T$  и  $\Gamma_i$  будет записываться в виде (10.6.44). При этом, однако, матрица  $C$ , входящая в (10.6.44) и в условие симплектичности, может принимать нестандартный вид, не совпадающий с (10.6.45).

**Замечание 2.** Алгебру Ли  $usp(4)$  в физической литературе иногда обозначают как  $spin(5)$ , а соответствующую группу Ли  $USp(4)$  обозначают как  $Spin(5)$ . Группа  $USp(4) = Spin(5)$  дважды накрывает группу  $SO(5)$  (смотри определение групп  $Spin(n)$  в Главе "Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления").

## 10.7 Задача 107. Изоморфизмы $so(4, 1) = sp(1, 1)$ и $so(3, 2) = sp(4, \mathbb{R})$ .

Рассмотрим пять матриц  $4 \times 4$  следующего вида

$$\gamma_1 = i\Gamma_1, \quad \gamma_2 = i\Gamma_2, \quad \gamma_3 = i\Gamma_3, \quad \gamma_4 = i\Gamma_4, \quad \gamma_5 = \Gamma_5, \quad (10.7.49) \quad \text{Gam1a}$$

где матрицы  $\Gamma_i$  определены в (10.6.37). Пользуясь (10.6.38), (10.6.39) и (10.6.44), получаем

$$\gamma_j^\dagger \Gamma_5 = \Gamma_5 \gamma_j, \quad \gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j = 2g_{kj}, \quad \gamma_j^T C = C \gamma_j, \quad (10.7.50) \quad \text{Gam1d}$$

где матрица  $C$  задана в (10.6.45) и

$$||g_{ij}|| = \text{diag}(-1, -1, -1, -1, 1) = -I_{4,1},$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1,1} & 0 \\ 0 & I_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (10.7.51) \quad \text{Gam1dd}$$

<sup>41</sup>Здесь имеются ввиду как представления отличающиеся от (10.6.37) преобразованиями эквивалентности, так и не эквивалентные ему. Отметим, что имеется только два неэквивалентных 4-х мерных представления пятимерной алгебры Клиффорда (10.6.39), которые отличаются знаком матрицы  $\Gamma_5$ .

а матрицы  $I_{p,q}$  определяются в (2.2.54). Введем операторы

$$\tilde{L}_{kj} = \frac{1}{4} (\gamma_k \gamma_j - \gamma_j \gamma_k) \quad (j, k = 1, \dots, 5), \quad (10.7.52) \quad \text{Gam4c}$$

для которых, исходя из (10.7.50), получаем аналоги соотношений (10.6.41), (10.6.42) и (10.6.46)

$$[\tilde{L}_{ij}, \tilde{L}_{kl}] = g_{jk} \tilde{L}_{il} + g_{jl} \tilde{L}_{ki} + g_{ik} \tilde{L}_{lj} + g_{il} \tilde{L}_{jk}, \quad (10.7.53) \quad \text{Gam4b}$$

$$\tilde{L}_{kj}^\dagger \Gamma_5 = -\Gamma_5 \tilde{L}_{kj}, \quad \tilde{L}_{kj}^T C = -C \tilde{L}_{kj}. \quad (10.7.54) \quad \text{Gam8a}$$

Соотношения (10.7.53) совпадают с определяющими соотношениями (3.2.150) для образующих  $L_{jk}$  (3.2.148) алгебры  $so(4, 1)$ .

Любую комплексную  $4 \times 4$  матрицу  $A$  можно представить в виде

$$A = z I_4 + z_i \gamma_i + z_{kj} \tilde{L}_{kj}, \quad (10.7.55) \quad \text{Gam9a}$$

где  $z, z_k$  и  $z_{kj} = -z_{jk}$  – набор из 16 независимых комплексных параметров. Тогда, пользуясь (10.7.54), легко проверить, что условия (3.2.32) для  $A \in sp(1, 1)$  выполняются, только если в (10.7.55) положить  $z = z_j = 0$  и  $z_{kj} \in \mathbb{R}$ . Таким образом, любой элемент  $A \in sp(1, 1)$  представим в виде  $A = z_{kj} \tilde{L}_{kj}$  и следовательно  $\tilde{L}_{kj}$  – базисные элементы в алгебре Ли  $sp(1, 1)$ . Теперь изоморфизм  $so(4, 1) = sp(1, 1)$  устанавливается с помощью взаимнооднозначного соответствия  $\tilde{L}_{kj} \leftrightarrow L_{kj}$ , где  $L_{kj}$  – базисные элементы в алгебре Ли  $so(4, 1)$  и  $\tilde{L}_{kj}$  – базисные элементы в  $sp(1, 1)$ .

Изоморфизм  $so(3, 2) = sp(4, \mathbb{R})$  устанавливается аналогично. Рассмотрим пять матриц  $4 \times 4$  следующего вида (сравните с (10.7.49))

$$\gamma_1 = i \Gamma_1, \quad \gamma_2 = \Gamma_2, \quad \gamma_3 = i \Gamma_3, \quad \gamma_4 = \Gamma_4, \quad \gamma_5 = \Gamma_5. \quad (10.7.56) \quad \text{Gam1c}$$

Теперь все матрицы  $\gamma_j$  вещественны  $\gamma_j^* = \gamma_j$  (смотри определения (10.6.37) матриц  $\Gamma_j$ ) и мы снова имеем

$$\gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j = 2 g_{ij}, \quad \gamma_j^T C = C \gamma_j, \quad (10.7.57) \quad \text{Gam1b}$$

где  $\|g_{ij}\| = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, 1)$  в соответствии с выбором (10.7.56). Снова вводя операторы  $\tilde{L}_{kj}$  (10.7.52), но только с  $\gamma$ -матрицами (10.7.56), легко показать, что их коммутационные соотношения (10.7.53) совпадают со структурными соотношениями (3.2.150) для образующих  $L_{jk}$  (3.2.148) алгебры  $so(2, 3)$ , а любая вещественная матрица  $A \in sp(4, \mathbb{R})$ , удовлетворяющая условию симплектичности  $A^T C = -C A$ , представима в виде  $A = \omega_{kj} \tilde{L}_{kj}$  ( $\omega_{kj} \in \mathbb{R}$ ). Таким образом, вещественные матрицы  $\tilde{L}_{kj}$  (10.7.52), построенные из  $\gamma$ -матриц (10.7.56), образуют базис в  $sp(4, \mathbb{R})$ , и изоморфизм устанавливается взаимно-однозначным соответствием  $\tilde{L}_{kj} \leftrightarrow L_{kj}$  для базисных элементов алгебр Ли  $sp(4, \mathbb{R})$  и  $so(3, 2)$ .

**10.8** Задача 108. Изоморфизмы 1.)  $so(6, \mathbb{C}) = sl(4, \mathbb{C})$ , 2.)  $so(6) = su(4)$ , 3.)  $so(3, 3) = sl(4, \mathbb{R})$ , 4.)  $so(4, 2) = su(2, 2)$  и 5.)  $so(1, 5) = sl(2, \mathbb{H})$ .

1. Рассмотрим шесть матриц  $8 \times 8$  вида

$$\tilde{\Gamma}_k = \sigma_2 \otimes \gamma_k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5), \quad \tilde{\Gamma}_6 = \varepsilon_6^{1/2} \sigma_1 \otimes I_4, \quad (10.8.58) \quad \text{so6a}$$

где  $4 \times 4$  матрицы  $\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma_k \gamma_j + \gamma_j \gamma_k &= 2 g_{kj} I_4, \\ \|g_{kj}\| &= \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5), \quad \varepsilon_k^2 = 1, \end{aligned} \quad (10.8.59) \quad \text{so6-1}$$

параметр  $\varepsilon_6$  такой, что  $\varepsilon_6^2 = 1$ , а  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – стандартные  $2 \times 2$  матрицы Паули. Отметим, что операторы  $\gamma_k$ , удовлетворяющие (10.8.59), являются бесследовыми  $\text{Tr}(\gamma_k) = 0$ , так как при  $k \neq j$  мы имеем  $\gamma_k = -\gamma_j \gamma_k \gamma_j^{-1}$  и следовательно  $\text{Tr}(\gamma_k) = -\text{Tr}(\gamma_k)$ . Матрицы  $\tilde{\Gamma}_A$  ( $A = 1, \dots, 6$ ) согласно (10.8.59) и в силу свойств матриц Паули удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_A \tilde{\Gamma}_B + \tilde{\Gamma}_B \tilde{\Gamma}_A &= 2 g_{AB} I_8, \\ \|g_{AB}\| &= \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5, \varepsilon_6), \quad \varepsilon_A^2 = 1, \end{aligned} \quad (10.8.60) \quad \text{so6c}$$

Построим с помощью матриц (10.8.58) операторы

$$M_{AB} = \frac{1}{4} (\tilde{\Gamma}_A \tilde{\Gamma}_B - \tilde{\Gamma}_B \tilde{\Gamma}_A) \quad (A, B = 1, \dots, 6), \quad (10.8.61) \quad \text{so6d}$$

которые согласно (10.8.60) удовлетворяют соотношениям

$$[M_{AB}, M_{CD}] = g_{BC} M_{AD} + g_{BD} M_{CA} + g_{AC} M_{DB} + g_{AD} M_{BC}, \quad (10.8.62) \quad \text{so6g}$$

Эти соотношения совпадают с коммутационными соотношениями (3.2.141) для образующих алгебры Ли  $so(p, q)$ , где  $p + q = 6$ ;  $p$  и  $q$  – число параметров  $\varepsilon_A$ , равных  $+1$  и  $-1$ , соответственно. Вспоминая явный вид матриц Паули  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , операторы  $M_{AB}$  (10.8.61) можно представить в блочно диагональной форме

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} M_{AB}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{AB}^- \end{pmatrix}, \quad (10.8.63) \quad \text{so6f}$$

где  $4 \times 4$  блоки  $M_{AB}^\pm$  имеют вид ( $k, m = 1, \dots, 5$ )

$$M_{km}^\pm = \frac{1}{4} [\gamma_k, \gamma_m], \quad M_{k6}^\pm = \mp \varepsilon_6^{1/2} \frac{i}{2} \gamma_k, \quad (10.8.64) \quad \text{so6h}$$

Очевидно, что набор матриц  $M_{AB}^+$  (как и матриц  $M_{AB}^-$ ) удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям (10.8.62) и следовательно также реализует базис в алгебре  $so(p, q)$ . Выберем один из этих наборов, скажем  $\{M_{AB}^+\}$ , второй набор  $\{M_{AB}^-\}$  связан с первым автоморфизмом в алгебре  $so(p, q)$ :  $M_{km}^+ \rightarrow M_{km}^-$ ,  $M_{k6}^+ \rightarrow -M_{k6}^-$ .

В силу известных свойств алгебры Клиффорда (10.8.59) (смотри Главу "Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления") пятнадцать  $4 \times 4$  матриц  $M_{AB}^+$  (10.8.64) образуют базис в пространстве всех бесследовых матриц  $4 \times 4$ . Поэтому множество матриц  $A$  вида

$$A = \omega^{AB} M_{AB}^+, \quad (\omega^{AB} = -\omega^{BA}, \quad \omega^{AB} \in \mathbb{R}), \quad (10.8.65) \quad \text{so6k}$$

с одной стороны по построению реализует алгебру Ли  $so(p, q)$ , а с другой стороны образует вещественную алгебру Ли, являющуюся вещественной формой в алгебре

Ли  $sl(4, \mathbb{C})$ . Этот факт можно использовать для того, чтобы установить изоморфизмы между алгебрами  $so(p, q)$  и соответствующими вещественными формами алгебры  $sl(4, \mathbb{C})$ . Комплексификация этих изоморфизмов (то есть выбор в (10.8.65) комплексных параметров  $\omega^{AB}$ ) дает изоморфизм комплексных алгебр  $so(6, \mathbb{C}) = sl(4, \mathbb{C})$ . Остается разобраться, какая из вещественных форм алгебры  $sl(4, \mathbb{C})$  соответствует алгебре  $so(p, q)$  при конкретном выборе  $p = 0, 1, 2, 3$  и  $q = 6 - p$ .

**2.** Выберем в качестве пяти  $\gamma$ -матриц (10.8.59) эрмитовы матрицы (10.6.37)

$$\gamma_1 = \Gamma_1, \quad \gamma_2 = \Gamma_2, \quad \gamma_3 = \Gamma_3, \quad \gamma_4 = \Gamma_4, \quad \gamma_5 = \Gamma_5, \quad (10.8.66) \quad \text{so6r}$$

и положим в (10.8.58)  $\varepsilon_6 = 1$ . Тогда все матрицы  $\tilde{\Gamma}_j$  в (10.8.58) также эрмитовы  $\tilde{\Gamma}_j^\dagger = \tilde{\Gamma}_j$ , а матрицы  $M_{AB}$  и  $M_{km}^+$  антиэрмитовы:

$$M_{AB}^\dagger = -M_{AB} \Rightarrow (M_{km}^+)^\dagger = -M_{km}^+. \quad (10.8.67) \quad \text{so6s}$$

Метрика  $g_{AB}$  в (10.8.60) и (10.8.62), согласно выбору (10.8.66), имеет вид

$$g_{AB} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Таким образом, пространство матриц (10.8.65) одновременно образует и алгебру Ли  $su(4)$  и алгебру Ли  $so(6)$  и следовательно  $su(4) = so(6)$ .

**3.** Выберем в качестве пяти  $\gamma$ -матриц (10.8.59) чисто мнимые матрицы (ср. с (10.7.56))

$$\gamma_1 = \Gamma_1, \quad \gamma_2 = i\Gamma_2, \quad \gamma_3 = \Gamma_3, \quad \gamma_4 = i\Gamma_4, \quad \gamma_5 = i\Gamma_5, \quad (10.8.68) \quad \text{so6j}$$

где матрицы  $\Gamma_j$  определены в (10.6.37) и положим в (10.8.58)  $\varepsilon_6 = 1$ . Тогда все матрицы  $\tilde{\Gamma}_j$  (10.8.58) вещественны  $\tilde{\Gamma}_j^* = \tilde{\Gamma}_j$  и соответственно вещественны матрицы  $M_{km}^+$ , а метрика  $g_{AB}$ , фигурирующая в (10.8.60), (10.8.62) имеет вид  $g_{AB} = \text{diag}(1, -1, 1, -1, -1, 1)$ . Таким образом, пространство матриц (10.8.65) одновременно образует алгебру Ли  $sl(4, \mathbb{R})$  и алгебру  $so(3, 3)$ , что и демонстрирует их изоморфизм.

**4.** Выберем в качестве пяти  $\gamma$ -матриц (10.8.59) матрицы

$$\gamma_1 = \Gamma_1, \quad \gamma_2 = \Gamma_2, \quad \gamma_3 = \Gamma_3, \quad \gamma_4 = \Gamma_4, \quad \gamma_5 = i\Gamma_5, \quad (10.8.69) \quad \text{so6r}$$

( $4 \times 4$  матрицы  $\Gamma_j$  определены в (10.6.37)) и положим в (10.8.58)  $(\varepsilon_6)^{1/2} = i$ . Тогда все матрицы  $\tilde{\Gamma}_A$  (10.8.58) удовлетворяют равенствам (10.8.60) с метрикой

$$g_{AB} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1), \quad (10.8.70) \quad \text{so6u}$$

а также соотношениям  $\tilde{\Gamma}_A^\dagger = \tilde{\Gamma}_A$  ( $A = 1, \dots, 4$ ),  $\tilde{\Gamma}_5^\dagger = -\tilde{\Gamma}_5$ ,  $\tilde{\Gamma}_6^\dagger = -\tilde{\Gamma}_6$ , которые можно записать в виде

$$\tilde{\Gamma}_A^\dagger = C \cdot \tilde{\Gamma}_A \cdot C^{-1}, \quad C = i\tilde{\Gamma}_6\tilde{\Gamma}_5 = \sigma_3 \otimes \Gamma_5 = \begin{pmatrix} \Gamma_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Gamma_5 \end{pmatrix}. \quad (10.8.71) \quad \text{so6t}$$

Соответственно мы имеем

$$M_{AB}^\dagger = -C \cdot M_{AB} \cdot C^{-1} \Rightarrow (M_{km}^+)^\dagger \cdot \Gamma_5 + \Gamma_5 \cdot M_{km}^+ = 0. \quad (10.8.72) \quad \text{so6w}$$



В этом случае матрицы (10.8.65) одновременно представляют алгебру  $so(4, 2)$  (так как метрика  $g_{AB}$  имеет вид (10.8.70)) и алгебру Ли  $su(2, 2)$  (метрика  $\Gamma_5$  в (10.8.72) представима в виде (10.7.51), что соответствует определению псевдоунитарной алгебры Ли  $su(2, 2)$ ). Таким образом, мы установили изоморфизм  $su(2, 2) = so(4, 2)$ . Отметим, что так как  $so(4, 2)$  — конформная алгебра пространства Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ , то  $su(2, 2) = \text{conf}(\mathbb{R}^{1,3})$ .

5. Выберем в качестве пяти  $\gamma$ -матриц, удовлетворяющих (10.8.59), матрицы, которые наиболее часто встречаются в физической литературе (сравните с (10.6.37))

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad \gamma_4 = \sigma_1 \otimes I_2, \\ \gamma_5 &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_2, \end{aligned} \quad (10.8.73) \quad \text{so6x}$$

и выберем в (10.8.58)  $(\varepsilon_6)^{1/2} = i$ . Тогда все шесть матриц  $\tilde{\Gamma}_A$  (10.8.58) будут удовлетворять равенствам (10.8.60) с метрикой

$$g_{AB} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, -1), \quad (10.8.74) \quad \text{so6z}$$

и следовательно матрицы  $M_{AB}$  (10.8.61), также как и  $M_{AB}^+$  (10.8.64), образуют алгебру Ли  $so(5, 1)$ . Выпишем явно в  $2 \times 2$  блочном виде все  $4 \times 4$  матрицы  $M_{AB}^+$  (10.8.64)

$$\begin{aligned} M_{\mu 6}^+ &= \frac{1}{2} \gamma_\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{s}_\mu \\ \bar{\mathbf{s}}_\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad M_{56}^+ = \frac{1}{2} \gamma_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{pmatrix}, \\ M_{\mu\nu}^+ &= \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\mu\nu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{s}}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad M_{\mu 5}^+ = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_5] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{s}_\mu \\ \bar{\mathbf{s}}_\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.8.75) \quad \text{so6y}$$

где  $\mu, \nu = 1, \dots, 4$  и мы использовали обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_\mu &= (-i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3, I_2), \quad \bar{\mathbf{s}}_\mu = (i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3, I_2) \\ \mathbf{s}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\mathbf{s}_\mu \bar{\mathbf{s}}_\nu - \mathbf{s}_\nu \bar{\mathbf{s}}_\mu) = \frac{i}{2} \eta_{\mu\nu}^j \sigma_j, \quad \bar{\mathbf{s}}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{s}}_\mu \mathbf{s}_\nu - \bar{\mathbf{s}}_\nu \mathbf{s}_\mu) = \frac{i}{2} \bar{\eta}_{\mu\nu}^j \sigma_j, \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Символы т'Хоофта  $\eta_{\mu\nu}^i$  и  $\bar{\eta}_{\mu\nu}^i$  определены в (3.2.203). Пользуясь представлением (10.8.75), произвольную матрицу  $A$  (10.8.65) можно представить в виде

$$A = \omega^{AB} M_{AB}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\mu \bar{\mathbf{s}}_\mu & b_\mu \bar{\mathbf{s}}_\mu \\ c_\mu \bar{\mathbf{s}}_\mu & d_\mu \bar{\mathbf{s}}_\mu \end{pmatrix}, \quad (10.8.76) \quad \text{so6zz}$$

где  $d_4 = -a_4$  и пятнадцать вещественных параметров  $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) выражаются через пятнадцать параметров  $\omega^{AB} \in \mathbb{R}$ . Матрицы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  называют кватернионами. Поле кватернионов  $\mathbb{H}$  обобщает поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ ; кватернионы могут рассматриваться как пары комплексных чисел, или как четверки вещественных чисел. Легко проверить, что пространство  $2 \times 2$  матриц, составленных из кватернионов, образует алгебру Ли, которая естественно обозначается как  $gl(2, \mathbb{H})$ . Пространство специальных кватернионных матриц  $A$  (10.8.76), с дополнительным условием на диагональные кватернионы  $d_4 = -a_4$ , также образуют алгебру Ли, которую обозначают  $sl(2, \mathbb{H})$ . Таким образом, соотношение (10.8.76), связывающее элементы алгебр  $so(5, 1)$  и  $sl(2, \mathbb{H})$  устанавливает изоморфизм между этими алгебрами  $so(5, 1) = sl(2, \mathbb{H})$ .

Проверку изоморфизма  $sl(2, \mathbb{H}) = su^*(4)$  мы оставляем читателю.

### 10.9 Задача 145. Оператор Казимира $C_2$ для присоединенного представления $su(N)$ .

Для вычисления значения оператора Казимира  $C_2$  алгебры  $su(N)$  в случае присоединенного представления воспользуемся результатом (4.4.21) о том, что тензорное произведение определяющего (фундаментального)  $[N]$  и антифундаментального  $[\bar{N}]$  представлений раскладывается в прямую сумму (комплексифицированного) присоединенного  $[N^2 - 1]$  и синглетного  $[1]$  представлений. Кроме этого, необходимо использовать тот факт, что для представления  $T^{(p)} = T^{(1)} \otimes T^{(2)}$  (см. (4.3.13)) справедливо тождество:

$$T_a^{(p)} \cdot T_b^{(p)} = T_a^{(1)} T_b^{(1)} \otimes I_{(2)} + T_a^{(1)} \otimes T_b^{(2)} + T_b^{(1)} \otimes T_a^{(2)} + I_{(1)} \otimes T_a^{(2)} T_b^{(2)}. \quad (10.9.77) \quad \text{kaz-09a}$$

Пусть  $T^{(1)} = [N]$  и  $T^{(2)} = [\bar{N}]$ , тогда из определения алгебры  $su(N)$  следует, что  $\text{Tr}_{(1)}(T_a^{(1)}) = 0$ ,  $\text{Tr}_{(2)}(T_a^{(2)}) = 0$ , где  $\text{Tr}_{(1)}$  и  $\text{Tr}_{(2)}$  — следы в соответствующих пространствах представлений. Применяя след  $\text{Tr}_{1 \otimes 2} = \text{Tr}_{(1)} \text{Tr}_{(2)}$  к тождеству (10.9.77) получаем:

$$\text{Tr}_{1 \otimes 2} \left( T_a^{(p)} \cdot T_b^{(p)} \right) = \text{Tr}_{(1)}(T_a^{(1)} T_b^{(1)}) \text{Tr}_{(2)} I_{(2)} + \text{Tr}_{(1)} I_{(1)} \text{Tr}_{(2)}(T_a^{(2)} T_b^{(2)}) = N \delta_{ab}, \quad (10.9.78) \quad \text{kaz-09}$$

где мы учли равенства  $\text{Tr}_{(2)} I_{(2)} = \text{Tr}_{(1)} I_{(1)} = N$  и нормировку

$$\text{Tr}_{(1)}(T_a^{(1)} T_b^{(1)}) = \text{Tr}_{(2)}(T_a^{(2)} T_b^{(2)}) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (10.9.79) \quad \text{kaz-19}$$

Так как представление  $T^{(p)} = [N] \otimes [\bar{N}]$  равно (см. (4.4.21)) прямой сумме представлений  $T^{ad} = [N^2 - 1]$  и  $T^{[1]} = [1]$ , а операторы  $T_a^{[1]}$  равны нулю (тривиальное представление), то в формуле (10.9.78) левую часть можно считать равной  $\text{Tr}_{1 \otimes 2}(T_a^{ad} \cdot T_b^{ad})$ . Далее, полагая  $b = a$  и суммируя по  $a$  в (10.9.78), получаем  $\text{Tr}_{1 \otimes 2}(T_a^{ad} T_a^{ad}) = N(N^2 - 1)$ . С другой стороны возьмем след от равенства (4.7.34), записанного в присоединенном представлении, и учтем, что  $\text{Tr} I_{(ad)} = (N^2 - 1)$ . Сравнивая полученный результат с предыдущим, для присоединенного представления  $su(N)$  выводим

$$C_2^{ad} = 1. \quad (10.9.80) \quad \text{kaz-12a}$$

### 10.10 Задача 153. Найти матрицу $\mathbf{r} = \mathbf{g}^{ab} T_a \otimes T_b$ для алгебры Ли $sl(n, \mathbb{C})$ .

Выберем базис в алгебре Ли  $gl(n, \mathbb{C})$  так, чтобы он состоял из единичной матрицы  $T_0 = I_n$  и набора  $T_a$  ( $a = 1, \dots, n^2 - 1$ ) бесследовых образующих алгебры  $sl(n, \mathbb{C})$ , удовлетворяющих (4.7.39). Любая  $(n \times n)$  матрица  $A$  может быть разложена по базису алгебры  $gl(n, \mathbb{C})$

$$A = \sum_{\alpha=0}^{n^2-1} A^\alpha T_\alpha. \quad (10.10.81) \quad \text{kaz-g3}$$

Метрику на пространстве  $g\ell(n, \mathbb{C})$  в соответствии с (4.7.39) определим следующим образом

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \frac{1}{c_2} \text{Tr}(T_\alpha T_\beta) = \begin{pmatrix} n/c_2 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \|\mathbf{g}_{ab}\| \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n^2-1$ , а  $\vec{0}$  и  $\vec{0}^T$  обозначают, соответственно, нулевой вектор-столбец и нулевую вектор-строку. На основании (10.10.81) мы имеем

$$A^\alpha = \frac{\mathbf{g}^{\alpha\beta}}{c_2} \text{Tr}(A \cdot T_\beta), \quad \|\mathbf{g}^{\alpha\beta}\| := \begin{pmatrix} c_2/n & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \|\mathbf{g}^{ab}\| \end{pmatrix}. \quad (10.10.82) \quad \text{kaz-g4}$$

Тогда

$$A = \frac{\mathbf{g}^{\alpha\beta}}{c_2} \text{Tr}(A \cdot T_\alpha) T_\beta, \quad (10.10.83) \quad \text{kaz-g1}$$

и так как матрица  $A$  — произвольна, то из (10.10.83) следует, что

$$\frac{1}{c_2} \mathbf{g}^{\alpha\beta} (T_\alpha)_{j_1}^{i_1} (T_\beta)_{j_2}^{i_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} = (P)_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}, \quad (10.10.84) \quad \text{kaz-g2a}$$

где  $P$  — оператор перестановки (4.4.14). Подставляя в (10.10.84) явное выражение (10.10.82) для обратной метрики  $\|\mathbf{g}^{\alpha\beta}\|$  мы окончательно получаем

$$\mathbf{r} = \mathbf{g}^{ab} T_a \otimes T_b = c_2 \left( P - \frac{1}{n} I_n \otimes I_n \right). \quad (10.10.85) \quad \text{kaz-g2}$$

Формула (10.10.85) справедлива для любого выбора базиса в  $sl(n, \mathbb{C})$ , так как матрица  $\mathbf{r}$  по построению не зависит от этого выбора. Поэтому формула (10.10.85) выполняется также для всех вещественных форм  $sl(n, \mathbb{C})$ . Например, эта формула справедлива для алгебры  $su(n)$ , так как базис алгебры  $su(n)$  одновременно является и базисом в  $sl(n, \mathbb{C})$ .

### 10.11 Задачи 165, 167. $SO(3)/SO(2) = S^2$ .

Вектор  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  лежит на единичной сфере  $S^2$ , если  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Ортогональные  $3 \times 3$  матрицы  $O = \|O_{ij}\| \in SO(3)$  переводят единичный вектор  $\vec{x}$  в единичный вектор  $\vec{x}'$  с координатами  $x'_i = O_{ij} x_j$ , который также лежит на  $S^2$ . Поэтому группа  $SO(3)$  действует на единичной сфере  $S^2$ . Заметим, что условие ортогональности  $O^T O = I_3$  для матрицы  $O \in SO(3)$  эквивалентно тому, что строки  $(\vec{e}_i)_j = O_{ij}$  и столбцы  $(\vec{e}'_j)_i = O_{ij}$  образуют две ортонормированные системы векторов в  $\mathbb{R}^3$ . Обозначим  $O_{i3} = x_i$ , тогда  $x_i^2 = 1$  и таким образом имеется взаимно однозначное соответствие между некоторой точкой на  $S^2$  и классом ортогональных матриц  $O$ , имеющих в качестве третьего столбца один и тот же вектор  $(x_1, x_2, x_3)$ . Покажем, что этот класс совпадает с левым смежным классом  $SO(3)$  по подгруппе  $SO(2)$  (6.1.1). Подействуем на матрицу  $O \in SO(3)$  справа произвольной матрицей (6.1.1) из  $SO(2)$

$$O' = O \cdot O_g = \left( \begin{array}{c|c} O_{\alpha\beta} & \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \\ \hline O_{3\beta} & x_3 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} g_{\beta\gamma} & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} (O \cdot g)_{\alpha\gamma} & \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \\ \hline (O \cdot g)_{3\gamma} & x_3 \end{array} \right) \in SO(3),$$

где  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ . Матрицу  $g \in SO(2)$  можно выбрать так, чтобы привести двумерный вектор  $(O \cdot g)_{3\gamma}$  в третьей строке  $O'$  к виду  $(-b, 0)$ , где  $b \geq 0$  (или  $b \leq 0$ ). В этом случае, пользуясь тем, что строки и столбцы матрицы  $O'$  также образуют две ортонормированные системы векторов в  $\mathbb{R}^3$ , мы получаем  $b = \sqrt{1 - x_3^2}$  и можем выразить оставшиеся элементы  $O'$  через элементы  $(x_1, x_2, x_3)$  третьего столбца матрицы  $O'$ . При этом надо рассмотреть два случая  $b = 0$  и  $b \neq 0$ . В случае  $b = 0$ , то есть  $x_3 = 1$ , мы получаем, что  $O'$  имеет вид (6.1.1) и следовательно  $O' \in SO(2)$ . Для  $b = \sqrt{1 - x_3^2} \neq 0$  мы имеем

$$O \cdot O_g = O(x_i) = \left( \begin{array}{cc|c} \frac{x_1 x_3}{b} & -x_2 a & x_1 \\ \frac{x_2 x_3}{b} & x_1 a & x_2 \\ -b & 0 & x_3 \end{array} \right), \quad a^2 = \frac{1}{b^2}, \quad x_i^2 = 1, \quad (10.11.86) \quad \text{so3aa}$$

и так как  $\det O(x_i) = a b = 1$  для  $O(x_i) \in SO(3)$ , то  $a = 1/b$ . Таким образом матрица  $O(x_i)$  однозначно определяется точкой  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  на единичной сфере  $S^2$ . Любая матрица  $O \in SO(3)$ , имеющая в качестве третьего столбца вектор  $\vec{x}$  с  $x_3 \neq 1$ , может быть получена из (10.11.86) действием справа некоторой матрицей  $O_g \in SO(2)$ . Другими словами, элементы (10.11.86) находятся во взаимно однозначном соответствии с точками сферы  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  ( $x_3 \neq 0$ ) и нумеруют смежные классы в  $SO(3)/SO(2)$  за исключением класса  $I_3 \cdot SO(2)$ , который соответствует точке  $\vec{x} = (0, 0, 1)$ . Тем самым, устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми точками  $S^2$  и всеми элементами  $SO(3)/SO(2)$ , то есть  $SO(3)/SO(2) = S^2$ .

Отметим, что любая матрица  $O \in SO(3)$ , у которой третий столбец дается вектором  $(x_1, x_2, x_3)$  (например, матрица  $O(x_i)$  (10.11.86)), переводит точку  $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S^2$  в произвольную другую точку  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in S^2$ . Поэтому действие группы  $SO(3)$  на  $S^2$  транзитивно. Очевидно, что точка  $\vec{e}_3$  стационарна по отношению к действию всех элементов (6.1.1), которые образуют подгруппу  $SO(2) \subset SO(3)$ , поэтому  $SO(2)$  – стационарная подгруппа точки  $\vec{e}_3 \in S^2$ . Наконец, так как точка  $\vec{e}_3 \in S^2$  может быть получена из любой точки  $\vec{x} \in S^2$  с помощью действия элемента  $O(x_i)^{-1}$ , то элементы  $O_g'$  стационарной подгруппы  $H_{\vec{x}}$  точки  $\vec{x} \in S^2$  получаются из элементов (6.1.1) стационарной подгруппы  $H_{\vec{e}_3} = SO(2)$  с помощью автоморфизма  $O_g' = O(x_i) \cdot O_g \cdot O(x_i)^{-1}$  и следовательно  $H_{\vec{x}} = SO(2)$  для всех  $\vec{x} \in S^2$ .

## 10.12 Задача 181. Получить метрику Фубини-Штуди для $\mathbb{CP}^n$ .

aΛ1

В качестве представителя  $k(\vec{a})$  (6.4.53) для однородного пространства

$$\mathbb{CP}^n = U(n+1)/(U(n) \times U(1))$$

выберем матрицу:

$$k = \exp(A) \in U(n+1), \quad A = \left( \begin{array}{c|c} O_n & \begin{smallmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{smallmatrix} \\ \hline -a_1^* & \dots & -a_n^* \\ \hline & & 0 \end{array} \right) \in u(n+1), \quad (10.12.87) \quad \text{FuSh01}$$

где  $O_n$  — нулевая  $n \times n$  матрица и  $a_k \in \mathbb{C}$ . Введем обозначение  $|a|^2 = a_k^* a_k$ . Для матрицы  $A$  выполняются следующие соотношения

$$A^3 = -|a|^2 A, \quad A^2 = \left( \begin{array}{c|c} -|a_i a_k^*| & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ \hline & & -|a|^2 \end{array} \right), \quad i, k = 1, \dots, n,$$

пользуясь которыми, получаем

$$\begin{aligned} k = \exp(A) &= I_{n+1} + A^2 \frac{(1 - \cos |a|)}{|a|^2} + A \frac{\sin |a|}{|a|} = \\ &= I_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \left( \frac{Z^2}{1 + \sqrt{1 + |z|^2}} + Z \right), \end{aligned} \quad (10.12.88) \quad \text{FuSh02}$$

где мы ввели в рассмотрение новую матрицу  $Z$ :

$$Z = A \frac{\tan(|a|)}{|a|} = \left( \begin{array}{c|c} O_n & \begin{smallmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{smallmatrix} \\ \hline -z_1^* & \dots & -z_n^* \\ \hline & & 0 \end{array} \right), \quad Z^3 = -Z \tan^2(|a|) = -Z |z|^2,$$

$$z_i = a_i \frac{\tan |a|}{|a|}.$$

Матрица  $k^{-1}$  получается из матрицы  $k$  (10.12.88) с помощью замены  $a_i \rightarrow -a_i$  (или  $z_i \rightarrow -z_i$ ):

$$k^{-1} = \exp(-A) = I_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} \left( \frac{Z^2}{1 + \sqrt{1 + |z|^2}} - Z \right), \quad (10.12.89) \quad \text{FuSh03}$$

поэтому форма (6.4.58) записывается следующим образом

$$\begin{aligned} &k^{-1} \cdot dk = \epsilon + \omega = \\ &= \left( I_{n+1} + \frac{Z^2}{\sqrt{1 + |z|^2}(1 + \sqrt{1 + |z|^2})} - \frac{Z}{\sqrt{1 + |z|^2}} \right) \left( d \frac{Z^2}{\sqrt{1 + |z|^2}(1 + \sqrt{1 + |z|^2})} + d \frac{Z}{\sqrt{1 + |z|^2}} \right). \end{aligned} \quad (10.12.90) \quad \text{FuSh06}$$

Здесь, согласно (6.4.58), форма репера  $\epsilon$  дается слагаемыми, содержащими нечетную степень матрицы  $Z$ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \left( I_{n+1} + \frac{Z^2}{\sqrt{1+|z|^2}(1+\sqrt{1+|z|^2})} \right) d \frac{Z}{\sqrt{1+|z|^2}} - \frac{Z}{\sqrt{1+|z|^2}} d \frac{Z^2}{(1+\sqrt{1+|z|^2})\sqrt{1+|z|^2}} = \\ &= d \frac{Z}{\sqrt{1+|z|^2}} - \frac{Z}{\sqrt{1+|z|^2}} \left( d \frac{Z}{(1+\sqrt{1+|z|^2})} \right) \frac{Z}{\sqrt{1+|z|^2}} = \\ &= \frac{dZ}{\sqrt{1+|z|^2}} - \frac{Z(dZ)Z+Z(d|z|^2)}{(1+|z|^2)(1+\sqrt{1+|z|^2})} = \left( \begin{array}{c|c} O_n & \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\ \hline -v_1^* & \dots & -v_n^* \\ & & 0 \end{array} \right), \end{aligned} \quad (10.12.91) \quad \text{FuSh04}$$

$$v_k = \frac{dz_k}{\sqrt{1+|z|^2}} - \frac{z_k(dz_i z_i^*)}{(1+|z|^2)(1+\sqrt{1+|z|^2})}, \quad (10.12.92) \quad \text{FuSh07}$$

Соответственно форма  $(U(n) \times U(1))$ -связности  $\omega$  на  $\mathbb{CP}^n$  дается в (10.12.90) слагаемыми, содержащими четные степени  $Z$ , и равна

$$\begin{aligned} \omega &= \left( I_{n+1} + \frac{Z^2}{\sqrt{1+|z|^2}(1+\sqrt{1+|z|^2})} \right) d \frac{Z^2}{\sqrt{1+|z|^2}(1+\sqrt{1+|z|^2})} - \frac{Z}{\sqrt{1+|z|^2}} d \frac{Z}{\sqrt{1+|z|^2}} = \\ &= \frac{(dZ)Z-Z(dZ)}{\sqrt{1+|z|^2}(1+\sqrt{1+|z|^2})} + \frac{2Z^2(dZ)Z+Z^2(d|z|^2)}{2(1+|z|^2)(1+\sqrt{1+|z|^2})^2} = \left( \begin{array}{c|c} ||\omega_{ik}|| & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 \\ & & \omega_0 \end{array} \right), \end{aligned} \quad (10.12.93) \quad \text{FuSh05}$$

где  $U(n)$ -связность равна

$$\omega_{ik} = \frac{z_i dz_k^* - dz_i z_k^*}{\sqrt{1+|z|^2}(1+\sqrt{1+|z|^2})} - \frac{z_i z_k^* ((z, dz^*) - (dz, z^*))}{2(1+|z|^2)(1+\sqrt{1+|z|^2})^2},$$

а для  $U(1)$ -связности получаем

$$\omega_0 = \frac{(dz, z^*) - (z, dz^*)}{2(1+|z|^2)} = -\text{Tr}(|\omega_{ik}|).$$

Для вычисления метрики на  $\mathbb{CP}^n$  необходимо подставить выражения (10.12.91), (10.12.92) в (6.4.62). В результате мы получаем метрику Фубини-Штуди

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}(\epsilon \cdot \epsilon) = (v_k^* v_k) = \frac{1}{(1+|z|^2)} \left( (dz_k dz_k^*) - \frac{(dz_k^* z_k)(dz_i z_i^*)}{(1+|z|^2)} \right).$$

### 10.13 Задача 216. Доказать формулу (7.4.34) для элементов $\mathcal{D}_{mm'}^{(j)}$ .

Заметим, что элементы  $\mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta)$ , заданные в (7.4.32), можно представить в виде **aЛ3**

$$\mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m')!}} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{j+m'} T_m^j(s', t') \Big|_{s=0, t=1}, \quad (10.13.94) \quad \text{WigF02}$$

где  $s'$  и  $t'$  определены в (7.4.31). Введем однородную переменную  $z = s/t$ , тогда формула (10.13.94) переписывается в виде

$$\mathcal{D}_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{(j-m')!}}{\sqrt{(j+m')!(j+m)!(j-m)!}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^{j+m'} (\alpha z - \beta^*)^{j+m} (\beta z + \alpha^*)^{j-m} \Big|_{z=0}. \quad (10.13.95) \quad \text{WigF03}$$

Сделаем замену переменных  $z \rightarrow y$ :

$$y + 1 = 2\alpha(\beta z + \alpha^*) \Rightarrow y - 1 = 2\beta(\alpha z - \beta^*), \quad (10.13.96) \quad \text{WigF04}$$

где вторая формула получается из первой с учетом  $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ . Подстановка (10.13.96) в (10.13.95) дает (7.4.34).

**10.14**      *Задача 219. Найти функции  $\phi', \theta', \psi'$  в уравнении (7.4.55).*

**aΛ1**

Дифференцируя обе части (7.4.55) по  $t^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и затем полагая  $t^k = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_k \cdot U(\phi, \theta, \psi) &= \partial_k \phi' \sigma_3 \cdot U(\phi, \theta, \psi) + \\ &+ \partial_k \theta' U_{\vec{e}_3}(\phi) \sigma_2 U_{\vec{e}_2}(\theta) U_{\vec{e}_3}(\psi) + \partial_k \psi' U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta) \sigma_3 U_{\vec{e}_3}(\psi), \end{aligned} \quad (10.14.97) \quad \text{hS01}$$

где  $U(\phi, \theta, \psi) = U_{\vec{e}_3}(\phi) U_{\vec{e}_2}(\theta) U_{\vec{e}_3}(\psi)$  и мы использовали обозначения

$$\partial_k \phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial t^k} \Big|_{t^k=0}, \quad \partial_k \theta' = \frac{\partial \theta'}{\partial t^k} \Big|_{t^k=0}, \quad \partial_k \psi' = \frac{\partial \psi'}{\partial t^k} \Big|_{t^k=0}.$$

С помощью формул (7.4.13) легко вывести тождества

$$\begin{aligned} U_{\vec{e}_3}(\phi) \sigma_2 U_{\vec{e}_3}(-\phi) &= \cos \phi \sigma_2 + \sin \phi \sigma_1, \\ U_{\vec{e}_2}(\theta) \sigma_3 U_{\vec{e}_2}(-\theta) &= \cos \theta \sigma_3 - \sin \theta \sigma_1, \\ U_{\vec{e}_3}(\phi) \sigma_1 U_{\vec{e}_3}(-\phi) &= \cos \phi \sigma_1 - \sin \phi \sigma_2, \end{aligned} \quad (10.14.98) \quad \text{hS02}$$

с учетом которых уравнения (10.14.97) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_k \cdot U(\phi, \theta, \psi) &= (\partial_k \phi' \sigma_3 + \partial_k \theta' (\cos \phi \sigma_2 + \sin \phi \sigma_1) + \\ &+ \partial_k \psi' (\cos \theta \sigma_3 - \sin \theta \cos \phi \sigma_1 + \sin \theta \sin \phi \sigma_2)) \cdot U(\phi, \theta, \psi). \end{aligned} \quad (10.14.99) \quad \text{hS03}$$

Таким образом, полагая  $k = 1, 2, 3$ , мы получаем систему уравнений, которую можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \phi' & \partial_2 \phi' & \partial_3 \phi' \\ \partial_1 \theta' & \partial_2 \theta' & \partial_3 \theta' \\ \partial_1 \psi' & \partial_2 \psi' & \partial_3 \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.14.100) \quad \text{hS04}$$

Решение (10.14.100) представляется следующим образом

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \phi' & \partial_2 \phi' & \partial_3 \phi' \\ \partial_1 \theta' & \partial_2 \theta' & \partial_3 \theta' \\ \partial_1 \psi' & \partial_2 \psi' & \partial_3 \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \operatorname{ctg} \theta & \sin \phi \operatorname{ctg} \theta & 1 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi / \sin \theta & \sin \phi / \sin \theta & 0 \end{pmatrix},$$

откуда вытекают формулы (7.4.59).

## Список литературы

- [1] Г. Вейль, *Симметрия*, Наука, Москва (1968); Едиториал УРСС, 2003
- [2] Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, Наука, Москва (1989).
- [3] М. Гарднер, *От мозаик Пенроуза к надежным шифрам*, Мир, Москва (1993).
- [4] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташик, *Конкретная математика (основание информатики)*, Мир, Москва (1998).
- [5] В.Д. Ляховский, А.А. Болохов, *Группы симметрии и элементарные частицы*, Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. - 337 с.; Едиториал УРСС, 2002 г.
- [6] П.И.Голод, А.У.Климык, *Математические основы теории симметрии*, Издательство - Регулярная и хаотическая динамика, (2001).
- [7] И. Гроссман, В. Магнус, *Группы и их графы*, Издательство: Мир, (1971).
- [8] М.Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Издательство: Едиториал УРСС, 2002.
- [9] Ж.П. Серр, *Линейные представления конечных групп*, Мир, Москва, 1970.
- [10] Н.Н. Боголюбов, *Теория симметрии элементарных частиц*, в книге "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", Издательство: Наукова думка, Киев (1967).
- [11] М.А.Наймарк, *Унитарные представления некомпактных групп*, в книге "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", Издательство: Наукова думка, Киев (1967).
- [12] И.Р. Шафаревич, *Основные понятия алгебры*, "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск (1999).
- [13] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко . *Современная геометрия*, Наука, Москва (1979).
- [14] С.П. Новиков, И.Т. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, Издательство МЦНМО, Москва (2005).
- [15] F. Gürsey, Introduction to Theory of Groups, in "Relativity, Groups and Topology", eds. C. De Witt, B. De Witt, New York - London, 1964; (имеется русский перевод, Ф. Гюрши, *Введение в теорию групп*, в сборнике статей "Теория групп и элементарные частицы", под. ред. Д.Иваненко, Мир, Москва (1967)).
- [16] А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, Москва (1988).



- [17] R.Brauer and H.Weil, *Amer.Journ.Math.*, **57** (1935) 425; (имеется русский перевод в книге П.Дирак *Спиноры в гильбертовом пространстве*, Мир, Москва (1978)).
- [18] Л. Биденхарн, Дж. Лаук, *Угловой момент в квантовой физике*, т. 1,2, Москва, Мир (1984).
- [19] Б.Л. Ван дер Варден, *Метод теории групп в квантовой механике*, Библиотека "Физика. Математические методы", Том V, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский Университет" (1999).
- [20] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "Квантовая механика (нерелятивистская теория)", Теоретическая физика, т. III, Наука, Москва (1989).
- [21] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "Теоретическая физика, т. II". Теория поля, Наука, Москва (1989).
- [22] Дж.Эллиот, П.Добер. Симметрия в физике. Т.1,Т.2 Москва, Мир (1983).
- [23] Л.Б. Окунь, *Физика элементарных частиц*, Наука, Москва (1988).
- [24] Ю.Б.Румер, А.И.Фет, *Теория групп и квантованные поля*, Наука, Москва (1977).
- [25] I.L. Buchbinder and S.M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity, Or a walk Through Superspace*, IOP, Bristol and Philadelphia, (1995) pp. 656.
- [26] Ю.В. Новожилов, *Введение в теорию элементарных частиц*, Наука, Москва (1972).
- [27] С. Швебер, *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля*, Изд. иностранной лит., Москва (1963).
- [28] P.-O. Löwdin, *Rev. Mod. Phys.* **36** (1964) 966;  
J. Shapiro, *Matrix Representation of the Angular Momentum Projection Operator*, *Journal of Math. Phys.*, v.6, No.11 (1965) 1680 - 1691.
- [29] V.N. Tolstoy, Fortieth Anniversary of Extremal Projector Method for Lie Symmetries, *Contemporary Mathematics* (Proc. of Conference on "Non-commutative Geometry in Mathematical Physics Karshtad, July 2004), math-ph/0412087.
- [30] Ю.Ф. Смирнов, В.Н. Толстой и Ю.И. Харитонов, Метод проекционных операторов и  $q$ -аналог квантовой теории углового момента. Коэффициенты Клебша-Гордана и неприводимые тензорные операторы, *Ядерная физика*, т.53, вып.4 (1991) 959.
- [31] Д.Т. Свиридов, Ю.Ф. Смирнов, *Теория оптических спектров ионов переходных металлов*. Москва, Наука, 1977.
- [32] А.П. Юцис, И.Б.Левинсон, В.В. Ванагас, *Математический аппарат теории момента количества движения*. Академия наук Литовской ССР, Институт физики и математики, Публикация No.3, Вильнюс (1960).

- [33] V. Bargman, E.P. Wigner, Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), vol. 34, No.5 (1948) 211.
- [34] Н.Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса; группы, порожденные отражениями; системы корней*. Главы IV, V, VI. Москва, Мир (1972).
- [35] J.E.Hamphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Graduate Texts in Mathematics **9**. Springer-Verlag (1994) (Дж.Хамфрис, Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, 2003).
- [36] К. Шевалле, *Теория групп Ли, т.3. Общая теория алгебр Ли*, Москва, ИЛ (1958).
- [37] Л.С.Понтрягин, *Непрерывные группы*. Москва, Наука (1973).
- [38] М.А.Наймарк, *Теория представлений групп*. Москва, Наука (1973).
- [39] G.Racah, *Group Theory and Spectroscopy*. Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, Princeton, 1951. Preprint CERN 61-8 (1961).
- [40] Е.Б.Дынкин, *Классификация простых групп Ли*. Математический сборник, **т.18(60)**, No.3 (1946) 45.
- [41] Г.Вейль, *Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований*. В книге "Избранные труды. Математика, теоретическая физика стр.100. Москва, Наука (1984).
- [42] Е. Вигнер, *Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров*, Издательство - ИО НФМИ (2000) (Серия - Шедевры мировой физико - математической литературы).
- [43] П.А.М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Москва, Издательство Наука, 1979.
- [44] Д.П.Желобенко, *Лекции по теории группы Ли*, Дубна, Издательский отд. ОИ-ЯИ (1965).
- [45] Д.П.Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Москва, МЦН-МО (2007).
- [46] М.М.Постников, *Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии, семестр V.*, Москва, Наука (1982).
- [47] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Москва, Мир (1987) 352 с.
- [48] J.Schwinger, *On Angular Momentum*, U.S. Atomic Energy Commission, NYO-3071 (1952); перепечатано в книге "Quantum Theory of Angular Momentum", ed. L.C.Biedenharn and H.Van Dam (Academic Press, 1969).

- [49] V.Bargmann, *On the Representations of the Rotation Group*, Rev. Mod. Phys., vol. 34, No. 4 (1962) 829 – 845.
- [50] Я.А. Смородинский, Л.А.Шелепин, *Коэффициенты Клебша-Гордана с разных сторон*, Успехи физических наук, том 106, вып. 1 (1972) 3 – 45.
- [51] W.Fulton , J.Harris, *Representation theory. A first course*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1991).
- [52] B.E.Sagan, *The Symmetric Group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. Wadsworth & Brooks/Cole math. series, (1991).
- [53] J.S. Frame, G. de B. Robinson and R.M.Thrall, *The hook graphs of the symmetric group*, Canad. J. Math. 6 (1954) 316-325.
- [54] O.V.Ogievetsky and P.N.Pyatov, Lecture on Hecke algebras, в трудах Международной школы "Симметрии и интегрируемые системы", Дубна (8-11 июня, 1999), ОИЯИ, Д2, 5-2000-218; preprint MPIM (Bonn), MPI 2001-40, (<http://www.mpim-bonn.mpg.de/>).
- [55] A. Okounkov and A. Vershik, A new approach to representation theory of symmetric groups, Selecta Mathematica, New Ser. Vol. 2, No. 4 (1996) 581-605.