Resolució de sistemes d'equacions lineals pel mètode ***iteratiu*** de Gauß–Seidel

El sistema d'equacions:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{cases}$$

Resolució de sistemes d'equacions lineals pel mètode ***iteratiu*** de Gauss–Seidel

El sistema d'equacions:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{cases}$$

Resolució de sistemes d'equacions lineals pel mètode ***iteratiu*** de Gauss–Seidel

En la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & & \dots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Separem la matriu **A** en dues matrius triangulars **S** + **Y**:

- **S** és triangular ***superior***
- **Y** és triangular ***inferior***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} \qquad + \qquad \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{S} + \mathbf{Y})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Sx} = \mathbf{b} - \mathbf{Yx} = \mathbf{b}'$$

Utilitzant l'última equació, construïm un procés iteratiu:

- Fem una aproximació inicial $\mathbf{x_0}$ (pot ser vector zero)
- Calculem el vector $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{Y}\mathbf{x_0}$:

$$b_i' = b_i - \left(\mathbf{Yx}^{[0]}\right)_i = b_i - \sum_{j=1}^{N} Y_{ij} x_j^{[0]}$$

$$= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{[0]}$$

Resoldrem $\mathbf{Sx} = \mathbf{b}'$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_N \end{pmatrix}$$

Per substitució cap endarrere:

$$x_N^{[1]} = b'_N / a_{NN} = \frac{1}{a_{NN}} \left(b_N - \sum_{j=1}^{N-1} a_{Nj} x_j^{[0]} \right)$$

$$x_i^{[1]} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{[1]} \right) = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{[0]} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{[1]} \right)$$

L'algorisme general per usar a l'ordinador:

- Assignem $\vec{x}^{\,\mathrm{vell}} = 0$ o qualsevol altre vector
- Calculem $\vec{x}^{\,\mathrm{nou}}$ a partir de $\vec{x}^{\,\mathrm{vell}}$ segons les fórmules:

$$x_i^{\mathrm{nou}} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{\mathrm{vell}} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{\mathrm{nou}} \right) \qquad \text{do i = N, 1, -1}$$

- Fem iteracions fins que $\left\| \vec{x}^{\,\mathrm{vell}} - \vec{x}^{\,\mathrm{nou}} \right\| \leq \varepsilon$,

  reassignant $\vec{x}^{\,\mathrm{nou}} = \vec{x}^{\,\mathrm{vell}}$