Resolució de sistemes d’equacions lineals pel mètode ***iteratiu*** de Jacobi

El sistema d’equacions:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{cases}$$

Resolució de sistemes d’equacions lineals pel mètode ***iteratiu*** de Jacobi

En la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ & & \dots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Ax = b}$$

Separem la matriu **A** en dues matrius **A′** + **D**:

- **D** és ***diagonal***

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A'}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{NN})$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A}' + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{x}\right)$$

Com que **D** és diagonal, la mutiplicació per $\mathbf{D}^{-1}$ és equivalent a la divisió de l'element corresponent (*i*-èssim) per D_{ii}

La fórmula ***iterativa***:

$$\mathbf{x}^{\text{nou}} = \mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{x}^{\text{vell}}\right)$$

$$x_i^{\text{nou}} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{N} a'_{ij} x_j^{\text{vell}}\right) = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} a_{ij} x_j^{\text{vell}}\right)$$

$$x_i^{\text{nou}} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{\text{vell}} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{\text{vell}}\right)$$

L’algorisme general per usar a l’ordinador:

- Assignem $\vec{x}^{\,\text{vell}} = 0$ o qualsevol altre vector
- Calculem $\vec{x}^{\,\text{nou}}$ a partir de $\vec{x}^{\,\text{vell}}$ segons les fórmules:

$$x_i^{\text{nou}} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{\text{vell}} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{\text{vell}}\right) \qquad \text{do i = 1, N}$$

- Fem iteracions fins que $\left\| \vec{x}^{\,\text{vell}} - \vec{x}^{\,\text{nou}} \right\| \le \varepsilon,$

reassignant $\vec{x}^{\,\text{nou}} = \vec{x}^{\,\text{vell}}$