Инертные множества в градуированных алгебрах Ли ("Анатомия убийства II")*

С. Гальперин, Ж. М. Лемэр†

Введение

Отправная точка для этой работы – следующий вопрос, поставленный одним из нас в [15]. Пусть дано односвязное пространство X и элемент $\phi \in \pi_{n+1}(X)$; при каких условиях на ϕ вложение

$$X \to X \cup_\phi e^{n+2}$$

сюръективно на уровне гомотопических групп?

Мы исследуем этот вопрос только на уровне рациональных гомотопических групп. Напомним (см. [16]), что композиция петель превращает коалгебру $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ в алгебру Хопфа, а скобка $[\alpha,\beta] = \alpha\beta - (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\alpha$ задаёт на множестве её примитивных элементов структуру градуированной алгебры Ли, чьей универсальной обёртывающей является $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$. Кроме того, гомоморфизм Гуревича $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q} \to H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ – изоморфизм на эту алгебру Ли, которую, следуя Квиллену [18], мы будем обозначать $\pi(X)$.

Так как все эти конструкции функториальны, сюръективность гомоморфизма

$$\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} \to \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2})\otimes\mathbb{Q}$$

равносильна сюръективности гомоморфизма алгебр

$$H_*(\Omega X;\mathbb{Q}) \to H_*(\Omega(X \cup_\phi e^{n+2});\mathbb{Q}). \tag{1}$$

Пусть $\langle\overline{\phi}\rangle \subset H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ – двусторонний идеал, порождённый образом ϕ под действием отображения $\pi_{n+1}(X) = \pi_n(\Omega X) \to H_n(\Omega X;\mathbb{Q})$. В [15] показано, что для сюръективности (1) достаточно того, чтобы проекция $H_*(\Omega X;\mathbb{Q}) \to H_*(\Omega X;\mathbb{Q})/\langle\overline{\phi}\rangle$ индуцировала изоморфизм в $\mathrm{Tor}_i(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ при $i \geq 3$ и вложение в $\mathrm{Tor}_2(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$. Заметим, что задействована только структура ассоциативной алгебры на $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$.

Мы покажем ниже (теорема 1.1), что это условие также является необходимым, отвечая на вопрос из [15]. Тем самым топологический вопрос сводится к чисто алгебраическому: для каких элементов $a \in A$ градуированной ассоциативной алгебры A над полем $\mathbf{k}$ проекция $A \to A/\langle a\rangle$ индуцирует изоморфизмы в $\mathrm{Tor}_i(\mathbf{k},\mathbf{k})$ при $i \geq 3$ и вложение в $\mathrm{Tor}_2(\mathbf{k},\mathbf{k})$?

Этот вопрос детально изучен Аником [2], и некоторые его результаты мы приводим в параграфе 2. По сути, Аник сформулировал другое условие на элементы ассоциативных алгебр, аналогичное условию регулярности в коммутативных алгебрах, и доказал равносильность этих условий. Он называет такие элементы *сильно свободными*.

Для простоты и благозвучности мы предлагаем называть эти элементы *инертными*; название мотивировано тем, что $a \in A$ инертен тогда и только тогда, когда переход $A \to A/\langle a\rangle$ меняет $\mathrm{Tor}_*(\mathbf{k},\mathbf{k})$ наименьшим возможным образом.

Итак, параграф 1 сводит вопрос о сюръективности

$$\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} \to \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2})\otimes\mathbb{Q}$$

к вопросу, инертен ли элемент $\overline{\phi} \in H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$. Но $\overline{\phi}$ – не произвольный элемент: он принадлежит градуированной алгебре Ли $\pi(X)$, чьей универсальной обёртывающей является $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$. Естественно дать следующее определение: элемент $x \in L$ градуированной алгебры Ли над полем характеристики ноль *инертен*, если он инертен в её универсальной обёртывающей UL.

Основные результаты параграфов 3 и 4, посвящённых изучению инертности в градуированных алгебрах Ли, не переносятся на произвольные ассоциативные алгебры. Тем самым они дополняют результаты Аника. Среди этих особых свойств алгебр Ли имеем следующий критерий инертности (теорема 3.3): $x \in L$ инертен тогда и только тогда, когда

*Suites inertes dans les Algèbres de Lie Graduées ("Autopsie d'un meurtre II")

†S. Halperin et J. M. Lemaire

(i) Идеал $I \subset L$, порождённый x, является свободной алгеброй Ли;

(ii) $U(L/I)$-модуль $I/[I,I]$, заданный присоединённым действием L на I, свободен.

Из него мы выводим топологический критерий (предложение 3.4): $\overline{\phi} \in \pi(X)$ инертен тогда и только тогда, когда либо гомотопический слой вложения $i : X \to X \cup_\phi e^{n+2}$ – букет не менее чем двух рациональных сфер, либо $\phi : S^{n+1} \to X$ – рациональная гомотопическая эквивалентность.

В параграфе 4 мы ограничиваемся алгебрами Ли, сосредоточенными в чётных размерностях, и показываем (теорема **??**), что любой элемент идеала, порождённого инертным элементов $x \in L$, также инертен. Как приложение этого результата (пример **??**), получаем, что связная сумма $X = (S^3 \times S^3)^{\#2}$ обладает следующим свойством: рациональная категория Люстерника-Шнирельмана пространства $X \cup_\phi e^{n+2}$ всегда равна двум, каким бы ни был $\phi \in \pi_*(X)$.

Среди результатов этой работы отметим следующие замечательные примеры инертных элементов. Пусть V – односвязное замкнутое n-мерное многообразие, и $v \in V$ – его точка. Если рациональные когомологии V не порождаются одним элементом, мы показываем (теорема [**?**]), что гомотопический класс маленькой $(n-1)$-мерной сферы, окружающей v, инертен в $\pi(V \setminus v)$. В случае, когда V формально, этот результат принадлежит Л.Аврамову [3].

Теорема [**?**] позволяет дать явное описание алгебр Ли связных сумм $\pi(\Omega(M\#N))$ (теорема [**?**]).

Эта работа – результат сотрудничества, которое началось во время пребывания первого автора в Ницце в качестве ассоциированного профессора; теорема [**?**] была получена в Торонто благодаря поддержке второго автора французским CNRS и канадским CNRSG. Наконец, доказательство [**?**] было получено во время коллоквиума в честь Джона Мура в Принстоне; авторы рады посвятить ему эту работу, и засвидетельствовать нашу благодарность ему за работы и идеи, послужившие вдохновением для развития существенной части алгебраической топологии последних тридцати лет... и для диссертации второго автора!

В данной работе символ $\mathbf{k}$ всегда будет обозначать поле, и среди векторных пространств над $\mathbf{k}$ рассматриваются только градуированные $V = \bigoplus_{i\geq 0} V_i$, где каждое V_i конечномерно. *Ряд Гильберта* для V – это формальный степенной ряд

$$V(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \dim(V_p) z^p,$$

и мы пишем $V(z) \geq W(z)$, когда $\dim V_p \geq \dim W_p$ для всех p. Если S – клеточный комплекс конечного типа, его рядом Пуанкаре и рядом Гильберта называют ряд Гильберта его рациональных (ко)гомологий.

Все рассматриваемые алгебры градуированны и связны, аугментация и единица задаются вложениями $\mathbf{k}$ как компоненты степени 0. В параграфах 3 и 4 мы рассматриваем связные алгебры Ли ($L_i = 0$ при $i \leq 0$), дополнительно предполагая, что $\operatorname{char} \mathbf{k} = 0$. В параграфе 5 мы ограничиваемся случаем $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$.

Содержание

1 “Вскрытие” инертных циклов

Напомним, что для односвязных X и $\phi \in \pi_{n+1}(X)$ сюръективность

$$\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{i} \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2}) \otimes \mathbb{Q}$$

равносильна сюръективности $H_*(\Omega X; \mathbb{Q}) \to H_*(\Omega(X \cup_\phi e^{n+2}; \mathbb{Q})$. Последнее условие можно изучать с помощью моделей Адамса-Хилтона [1].

Действительно, если $\mathscr{A}$ – цепная алгебра (алгебра, снабжённая дифференциалом степени -1) над произвольным полем, и $z \in \mathscr{A}_n$ – цикл, мы можем рассмотреть морфизм цепных алгебр

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B} = \mathscr{A} * T(x),\ dx = z,$$

где $T(x)$ – тензорная алгебра с образующей x степени $n+1$, а $*$ – свободное произведение (копроизведение) ассоциативных алгебр. Если $\mathscr{A}$ – модель Адамса-Хилтона для ΩX (в частности, $H\mathscr{A} = H_*(\Omega X;\mathbf{k})$), а $\overline{z} \in H\mathscr{A}$ соответствует классу $\overline{\phi} \in H_*(\Omega X;\mathbf{k})$, то морфизм

$$H_*(\Omega X;\mathbf{k}) \to H_*(\Omega(X \cup_\phi e^{n+2});\mathbf{k})$$

отождествляется с морфизмом $H\mathscr{A} \xrightarrow{\alpha} H\mathscr{B}$, индуцированным вложением $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

Мы собираемся показать, что α сюръективно тогда и только тогда, когда проекция $\pi : H\mathscr{A} \to H\mathscr{A}/\langle\overline{z}\rangle$ индуцирует изоморфизм в $\mathrm{Tor}_i(\mathbf{k},\mathbf{k}),\ i \geq 3$, и вложение в $\mathrm{Tor}_2(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Это будет доказано для произвольного цикла $z \in \mathscr{A}$ в произвольной цепной алгебре $\mathscr{A}$.

Морфизм α раскладывается в композицию

$$\pi : H\mathscr{A} \to H\mathscr{A}/\langle\overline{z}\rangle \quad \text{и} \quad \gamma : H\mathscr{A}/\langle\overline{z}\rangle \to H\mathscr{B}.$$

С другой стороны, определим цепную алгебру $(\overline{\mathscr{B}}, \overline{d})$ как $\overline{\mathscr{B}} = H\mathscr{A} * T(x),\ \overline{d}|_{H\mathscr{A}} = 0,\ \overline{d}x = \overline{z}$. Вложение $H\mathscr{A} \to \overline{\mathscr{B}}$ индуцирует гомомофизм

$$\overline{\alpha} : H\mathscr{A} \to H\overline{\mathscr{B}},$$

и мы можем сформулировать обещанный результат следующим образом:

Теорема 1.1. *В обозначениях выше, следующие условия равносильны:*

(i) $\alpha : H\mathscr{A} \to H\mathscr{B}$ *сюрьективно;*

(ii) $\overline{\alpha} : H\mathscr{A} \to H\overline{\mathscr{B}}$ *сюрьективно;*

(iii) $\gamma : H\mathscr{A}/\langle\overline{z}\rangle \to H\mathscr{B}$ *– изоморфизм;*

(iv) $\pi : H\mathscr{A} \to H\mathscr{A}/\langle\overline{z}\rangle$ *индуцирует изоморфизм в* $\mathrm{Tor}_3(\mathbf{k},\mathbf{k})$ *и вложение в* $\mathrm{Tor}_2(\mathbf{k},\mathbf{k})$;

(v) π *индуцирует изоморфизм в* $\mathrm{Tor}_p(\mathbf{k},\mathbf{k}),\ \forall p \geq 3$, *и вложение в* $\mathrm{Tor}_2(\mathbf{k},\mathbf{k})$.

Замечание 1.2. Условия (ii), (iv) и (v) относятся только к элементу $\overline{z}$ и структуре алгебры на $H\mathscr{A}$.

Доказательство теоремы 1.1 опирается на следующую конструкцию. Напомним, что n-кратная *надстройка* s^nV над градуированным векторным пространством V определяется как $(s^nV)_q = V_{q-n}$. Если A – алгебра, и $r \in A_n,\ n > 0$, мы определяем новую алгебру $(A\{r\}, \circ)$ следующим образом: как векторное пространство,

$$A\{r\} = \mathbf{k} \cdot 1 \oplus s^nA,$$

где 1 имеет степень 0; умножение $\circ$ определяется как

$$s^na \circ s^nb := s^n(arb);$$

1 – единица относительно этого умножения. Ясно, что пространство $A\{r\}_+/(A\{r\}_+ \circ A\{r\}_+)$ неразложимых элементов в $A\{r\}$ отождествляется с $s^n(A/\langle r\rangle)$, где $\langle r\rangle$ – двусторонний идеал, порождённый r. Если $\mathscr{A}$ – цепная алгебра, и $z \in \mathscr{A}_n$ – цикл, можно ввести на $\mathscr{A}\{z\}$ структуру цепной алгебры, положив $ds^na = (-1)^ns^n(da)$; тогда

$$H(\mathscr{A}\{z\}) = H\mathscr{A}\{\overline{z}\},$$

где $\overline{z} \in H(\mathscr{A})$ – класс гомологий, представленный циклом $z \in \mathscr{A}$.

Ключом к доказательству теоремы 1.1 является формулировка шестого условия, равносильного (i)-(v):

Теорема 1.3. *Каждое из пяти условий теоремы 1.1 равносильно*

(vi) Алгебра $H\mathscr{A}\{\overline{z}\}$ *свободна (т.е. изоморфна тензорной алгебре).*

Перед началом доказательства сделаем несколько элементарных наблюдений.

Напомним из [15], что $\mathscr{B} = \mathscr{A} * T(x)$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathscr{B} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathscr{A} \otimes (\mathbf{k} \cdot x \otimes \mathscr{A})^{\otimes p}, \tag{2}$$

где полагаем $(\bullet)^{\otimes 0} = \mathbf{k}$.

Напомним также, что *приведённая бар-конструкция* $\mathbf{B}$, определённая в [17], – функтор из категории связных цепных алгебр в категорию градуированных векторных пространств (мы игнорируем структуру коалгебры). Из (2) мы получаем

Лемма 1.4. *Определён изоморфизм цепных комплексов*

$$\psi : \mathbf{k} \otimes s^{n+1}\left(\mathscr{A} * T(x)\right) \to \mathbf{B}(\mathscr{A}\{z\}),$$

$$s^{n+1}(a_0 \otimes x \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes x \otimes a_p) \mapsto s^n a_0 \mid s^n a_1 \mid \cdots \mid s^n a_p.$$

□

Пусть теперь E^r – спектральная последовательность, ассоциированная с фильтрацией алгебры $\mathscr{B}$ степенями элемента x (ср. с [15, §1]). Эта фильтрация отождествляется со стандартной фильтрацией на бар-конструкции, откуда следует

Лемма 1.5. *ψ индуцирует изоморфизмы*

(a) $E^1_{p,q} \simeq \mathbf{B}_{p+1,q+n} H\mathscr{A}\{\overline{z}\}$,

(b) $E^2_{p,q} \simeq \mathrm{Tor}^{H\mathscr{A}\{\overline{z}\}}_{p+1,q+n}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$. □

Немедленное следствие:

Лемма 1.6. (vi) $\Leftrightarrow E^2_{p,*} = 0,\ p \geq 1$. □

Доказательство теорем 1.1 и 1.3. Будем доказывать следующие импликации:

$$\begin{tikzcd}
\text{(ii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(i)} \arrow[d, Rightarrow] & \text{(iii)} \arrow[l, Rightarrow] & \\
 & \text{(vi)} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iv)} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(v)}
\end{tikzcd}$$

Все, кроме (i) $\Rightarrow$ (vi), немедленно следуют из рассуждений из [15, §2] и леммы 1.6, если заметить, что $\mathrm{Im}\,\overline{\alpha} = E^2_{0,*}$ и $\mathrm{Im}\,\alpha = E^\infty_{0,*}$.

Чтобы установить (i) $\Rightarrow$ (vi), выберем градуированное подпространство $U \subset \mathscr{A},\ d|_U = 0$, так, чтобы композиция $U \to H\mathscr{A} \xrightarrow{\alpha} H\mathscr{B}$ была изоморфизмом, и рассмотрим гомоморфизм цепных алгебр

$$\chi : (T(s^n U), \circ) \to \mathscr{A}\{z\},$$

построенный по вложению $s^n U \to s^n \mathscr{A}$. Достаточно показать, что χ индуцирует изоморфизм в гомологиях. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}T(s^n U) \arrow[r, "\mathbf{B}\chi"] & \mathbf{B}\mathscr{A}\{z\} \\
 & \mathbf{k} \oplus s^{n+1}\mathscr{B} \arrow[u, "\psi"', "\simeq"] \\
\mathbf{k} \oplus s^{n+1} U \arrow[uu, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"] \arrow[r] & \mathbf{k} \oplus s^{n+1}\mathscr{A}. \arrow[u, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизм слева индуцирует изоморфизм в гомологиях, т.к. $T(s^n U)$ свободная; диагональный гомоморфизм – по построению U. Получаем, что $\mathbf{B}\chi$ индуцирует изоморфизм в гомологиях, поэтому то же верно для χ по *теореме Мура о сравнении* [17]. □

2 Инертные элементы и инертные множества в алгебрах

Пусть A – алгебра. Напомним, что каждому элементу $r \in A_n,\ n > 0$, сопоставляется двусторонний идеал $\langle r \rangle \subset A$ и проекция $\pi : A \to A/\langle r \rangle$.

Определение 2.1. Элемент $r \in A$ *инертен*, если выполнено одно из двух условий, эквивалентных за счёт теоремы 1.3:

(a) Алгебра $A\{r\}$ свободна;

(b) Морфизм $\mathrm{Tor}^\pi_p(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ инъективен при $p = 2$ и биективен при $p = 3$.

Замечание 2.2. Из (a) немедленно следует, что централизатор инертного элемента – это подалгебра, порождённая им.

Рассмотрим теперь конечный или счётный набор элементов $(r_i),\ r_i \in A_{n_i},\ n_i > 0$, и обозначим как $\langle r_1, \dots, r_s\rangle \subset A$ двусторонний идеал, порождённый $r_1, \dots, r_s$.

Определение 2.3. Набор $(r_i) \subset A$ *инертен*, если $r_1 \in A$ инертен, и для всех i образ элемента r_{i+1} инертен в $A/\langle r_1, \dots, r_i\rangle$.

Пусть $I \subset A$ – двусторонний идеал, порождённый конечным или счётным набором $(r_i),\ r_i \in A_{n_i},\ n_i > 0$. Обозначив $I^0 = A,\ I^{k+1} = I^k \cdot I$, получаем *$I$-адическую* убывающую фильтрацию на A. Обозначим как $\mathrm{Gr}\, A$ биградуированную алгебру, ассоциированную с этой фильтрацией:

$$\mathrm{Gr}_{p,q} A = (I^p/I^{p+1})_{p+q}.$$

В частности, $\mathrm{Gr}_{0,*} A = A/I,\ \mathrm{Gr}_{1,*} A = I/I^2$. Пусть $\overline{Q}I = I/(A_+ \cdot I + I \cdot A_+)$ – пространство неразложимых элементов идеала I. Любой базис "дополнения" $A_+ \cdot I + I \cdot A_+$ до I является минимальной системой образующих идеала I, и наоборот. Сечение $\lambda : \overline{Q}I \to I/I^2$ индуцирует гомоморфизм биградуированных алгебр:

$$\chi : A/I * T(\overline{Q}I) \to \mathrm{Gr}\, A;$$

его ограничение на A/I – тождественное отображение.

Классическое рассуждение (см., например, [2, (2.2)]) показывает, что χ сюръективен для любого идеала I. Инъективность же, как заметил Аник, равносильна инертности минимальной системы образующих для I. Для удобства читателя приведём основные результаты [2, §2]. Пусть X – градуированное векторное пространство с базисом $(x_i),\ |x_i| = n_i + 1$, A – алгебра, и $A * T(X)$ снабжена дифференциалом d, для которого $d|_A = 0,\ dx_i = r_i$. Разные описания инертных множеств, данные Аником, можно объединить в следующую теорему:

Теорема 2.4. *Следующие условия равносильны:*

(i) *Набор (r_i) инертен в A;*

(ii) *(r_i) – базис в $\overline{Q}I$, и χ – изоморфизм;*

(iii) *(r_i) – базис в $\overline{Q}I$, и ряды Гильберта для $A, A/I, \overline{Q}I$ связаны как $\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{A/I(z)} - \overline{Q}I(z)$;*

(iv) *(r_i) – базис в $\overline{Q}I$, и проекция $\pi : A \to A/I$ индуцирует изоморфизм в $\mathrm{Tor}_3(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ и вложение в $\mathrm{Tor}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k})$;*

(v) *Гомоморфизм алгебр $\alpha : A \to H(A * T(X))$ сюръективен;*

(vi) *α индуцирует изоморфизм $A/I \xrightarrow{\simeq} H(A * T(X))$.*

□

Как немедленное следствие теорем 1.1 и 2.4 получаем

Следствие 2.5. *Если $S = T \oplus U$ – подпространство в A_+, то объединение базисов T и U инертно в A тогда и только тогда, когда базис T инертен в A, а образ базиса U инертен в A/I_T (здесь I_T – двусторонний идеал, порождённый T).* □

Условие инертности относится не сколько к самому набору, сколько к порождённому им идеалу, при условии, что оно порождает этот идеал минимальным образом. В частности, любая перестановка инертного множества инертна. Мы приходим к следующему определению:

Определение 2.6. Двусторонний идеал $I \subset A$ *инертен*, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

(i) I порождён инертным множеством;

(ii) Проекция $\pi : A \to A/I$ индуцирует вложение в $\mathrm{Tor}_2(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ и биекцию в $\mathrm{Tor}_3(\mathbf{k}, \mathbf{k})$.

Пусть теперь $(F_pA)_{p\in\mathbb{Z}}$ – произвольная фильтрация на алгебре A, конечной в каждой размерности, и $E^0_{*,*}A = \mathrm{Gr}\, A$ – ассоциированная с ней биградуированная алгебра. Следующее предложение доказывается тем же образом, что и [2, теорема 3.2]:

Предложение 2.7. *Если $(\overline{r}_i) \in E^0_{*,*}A$ – инертный набор биоднородных элементов, и (r_i) – прообразы $(\overline{r}_i)$, то набор (r_i) инертен.*

3 Инертные элементы и инертные множества в алгебрах Ли

С этого момента мы предполагаем, что $\operatorname{char}\mathbf{k} = 0$.

Напомним, что свободная алгебра Ли $\mathbf{L}(X)$ над градуированным векторным пространством X – это подалгебра Ли в $T(X)$, порождённая X; её универсальная обёртывающая $U\mathbf{L}(X)$ отождествляется с $T(X)$. Функтор универсальной обёртывающей коммутирует с копроизведениями, откуда $UL{*}T(X) = U(L{*}\mathbf{L}(X))$ для любой алгебры Ли L.

Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта, верная и в градуированном случае (см. [16], [18, аппендикс B]), отождествляет L с множеством примитивных элементов алгебры Хопфа UL. Та же теорема позволяет показать, что если $J \subset UL$ – двусторонний идеал, порождённый идеалом Ли $I \subset L$, то

$$I = L \cap J, \quad [L, I] = L \cap (J \cdot UL_+ + UL_+ \cdot J), \quad U(L/I) = UL/J.$$

Пространство неразложимых элементов идеала Ли I, которое мы обозначим $\overline{Q}I = L/[L, I]$, отождествляется с $\overline{Q}J = J/(J \cdot UL_+ + UL_+ \cdot J)$, поэтому обозначение $\overline{Q}$ не приводит к путанице. Более общо, если $I^{(0)} = L,\ I^{(k)} = [I^{(k-1)}, I]$ обозначает убывающую центральную фильтрацию идеала I, то

$$I^{(k)} = L \cap J^k,$$

и получаем естественный изоморфизм биградуированных алгебр

$$U(\operatorname{Gr} L) = \operatorname{Gr} UL,$$

где $\operatorname{Gr} UL$ ассоциирована с J-адической фильтрацией на UL.

Выбор сечения $\overline{Q}I = I/[L, I] \to I/[I, I]$ позволяет определить гомоморфизм

$$\chi_L : (L/I) * \mathbf{L}(\overline{Q}I) \to \operatorname{Gr} L,$$

причём

$$U\chi_L : (UL/J) * T(\overline{Q}J) \to \operatorname{Gr} UL$$

совпадает с гомоморфизмом χ, определённым в параграфе 2.

Эти замечания позволяют перенести на алгебры Ли результаты из параграфа 2, дав следующее естественное определение:

Определение 3.1. Элемент (набор) *инертен* в алгебре Ли L, если он инертен в алгебре UL; идеал Ли $I \subset L$ инертен, если $J \subset UL$ инертен.

Заметим, что минимальная система образующих идеала Ли I инертна тогда и только тогда, когда I инертен.

За счёт сделанных замечаний теорема 2.4 переносится на случай алгебр Ли очевидным образом:

Предложение 3.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) Набор (r_i) инертен в L;

(ii) (r_i) – базис в $\overline{Q}I$, и χ_L – изоморфизм;

(iii) (r_i) – базис в $\overline{Q}I$, и факторизация $L \to L/I$ индуцирует изоморфизм в $\operatorname{Tor}_3^{U\bullet}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ и вложение в $\operatorname{Tor}_2^{U\bullet}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$;

(iv) Отображение $L \to H(L * \mathbf{L}(Y), d)$, где Y – векторное пространство с базисом (y_i), $|y_i| = |r_i| + 1,\ d|_L = 0,\ dy_i = r_i$, сюръективно.

□

Для идеалов в алгебрах Ли можно дать полезный критерий инертности, не имеющий аналогов в случае произвольных ассоциативных алгебр.

Пусть $I \subset L$ – идеал. Действие L на I индуцирует действие L/I на $QI = I/[I, I]$; оно наделяет QI естественной структурой $U(L/I)$-модуля, для которого

$$\overline{Q}I = I/[L, I] = QI/((U(L/I)_+ \cdot QI) = \mathbf{k} \otimes_{U(L/I)} QI$$

является пространством неразложимых элементов.

Теорема 3.3. *Идеал $I \subset L$ инертен тогда и только тогда, когда выполнены оба условия:*

(i) I – свободная алгебра Ли: $I \simeq \mathbf{L}(QI)$;

(ii) QI – свободный $U(L/I)$-модуль.

Эта теорема имеет следующее топологическое приложение Пусть X – односвязное клеточное пространство конечного типа, и $\phi : S^{n+1} \to X$ – непрерывное отображение. Обозначим $F = \mathrm{hofib}(X \xrightarrow{i} X \cup_\phi e^{n+2})$.

Предложение 3.4. *За исключением тривиального случая, когда ϕ – рациональная гомотопическая эквивалентность, следующие условия эквивалентны:*

(i) $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{i_\#} \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2}) \otimes \mathbb{Q}$ сюрьективно;

(ii) элемент $\overline{\phi} \in \pi(X)$ инертен;

(iii) F имеет рациональный гомотопический тип букета ≥ 2 сфер.

Доказательство. Эквивалентность (i) и (ii) показана в теореме 1.1. Если (i) верно, то ядро $i_\#$ совпадает с $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$; следовательно, $\pi(F)$ – ядро сюръекции $\pi(X) \to \pi(X \cup_\phi e^{n+2})$. Условие (i) из 3.3 показывает, что F – рациональный букет сфер. Так как $X \cup_\phi e^{n+2}$ не рационально стягиваемо, из условия (ii) теоремы 3.3 вытекает $\dim \widetilde{H}_*(F; \mathbb{Q}) \geq 2$.

Наоборот: если F – букет не менее чем двух сфер, то $\pi(F)$ – свободная алгебра Ли от ≥ 2 образующих. Значит, её центр тривиален и тем самым совпадает с образом связывающего гомоморфизма $\pi_*(X \cup_\phi e^{n+2}) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_{*-1}(F) \otimes \mathbb{Q}$, откуда $i_\#$ сюръективно. □

Замечание 3.5. В [9] Феликс и Томас показали, что $\widetilde{H}_*(F; \mathbb{Q})$ – свободный $U\pi(X \cup_\phi e^{n+2})$-модуль, даже если ϕ не инертен.

Доказательство теоремы 3.3. Точной последовательности алгебр Ли $I \to L \to L/I$ соответствует спектральная последовательность

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{U(L/I)}(\mathrm{Tor}_q^{UL}(U(L/I), \mathbf{k}), \mathbf{k}) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^{UL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}).$$

Изоморфизм замены колец

$$\mathrm{Tor}_q^{UL}(U(L/I), \mathbf{k}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Tor}_q^{UI}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

снабжает $\mathrm{Tor}_q^{UI}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ структурой $U(L/I)$-модуля. При $q = 1$ верно $\mathrm{Tor}_1^{UI}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = QI$, и эта структура совпадает с определением выше (см. [7, 3.12]).

Пусть I инертен. Гомоморфизм

$$\mathrm{Tor}^{UL}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \to \mathrm{Tor}^{U(L/I)}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

отождествляется с граничным гомоморфизмом $E^\infty_{*,*} \to E^2_{*,0}$, который тем самым инъективен при $p+q = 2$ и биективен при $p + q \geq 3$. Получаем $E^2_{1,1} = E^\infty_{1,1} = 0$, то есть

$$\mathrm{Tor}_1^{U(L/I)}(\mathrm{Tor}_1^{UI}(\mathbf{k}, \mathbf{k}), \mathbf{k}) = 0.$$

тут я не то чтобы проследил

Значит, множество $QI = \mathrm{Tor}_1^{UI}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ – свободный $U(L/I)$-модуль, и $\mathrm{Tor}_p^{U(L/I)}(QI, \mathbf{k}) = E^2_{p,1} = 0$ при $p \geq 1$. Значит, второй лист спектральной последовательности сосредоточен в строке $E^2_{*,0}$ и, возможно, в элементе $E^2_{0,1}$: действительно, из углового гомоморфизма

$$E^2_{0,2} = \mathrm{Tor}_0^{U(L/I)}(\mathrm{Tor}_2^{UI}(\mathbf{k}, \mathbf{k}), \mathbf{k}) = 0$$

и, тем самым, $\mathrm{Tor}_2^{UI}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 0$ по "лемме Накаямы", т.к. $U(L/I)$ связная. Это означает, что UI (следовательно, и I) свободна. Доказательство в обратную сторону проделывается по той же схеме. □

Пример 3.6. Элемент $b \in \mathbf{L}(a, b)$ инертен, т.к. идеал (b) – свободная алгебра Ли с образующими $(b_n)_{n=0}^\infty$, $b_0 = b,\ b_{n+1} = [a, b_n]$.

Пример 3.7. Пусть $L = \mathbf{L}(a, x)/([x, x])$, где $|x|$ нечётна. Ясно, что $L = \mathbf{L}(a) * \mathbf{k} \cdot x$, где $\mathbf{k} \cdot x$ – одномерная коммутативная алгебра Ли. По второму пункту 3.2, $a \in L$ инертен. Хотя $L/(a) = \mathbf{k} \cdot x$, и $U(L/(a)) = \Lambda[x]$, подалгебра Ли $(a) \subset L$ свободно порождена элементами a и $[x, a]$: имеем расширение

$$0 \to \mathbf{L}(a, [x, a]) \to L \to \mathbf{k} \cdot x \to 0,$$

откуда ясно, что L содержит свободную подалгебру Ли коразмерности 1.

Инертный элемент ассоциативной алгебры может не быть инертным в её подалгебрах: например, ab инертен в $T(a,b)$, но соотношение $ab{\cdot}a^2b = aba{\cdot}ab$ показывает, что ab не инертен в подалгебре, порождённой ab, a^2b и aba. В алгебрах Ли такого не может произойти:

Теорема 3.8. *Пусть $E \subset L$ – подалгебра Ли, и $(r_i) \subset E$. Если (r_i) инертен в L, то (r_i) инертен в E.*

Лемма 3.9. *Пусть $E \subset L$ – подалгебра Ли, $I \subset L$ – инертный идеал, и $I \subset E$. Тогда $I \subset E$ инертен, и любой набор элементов, минимально порождающих I как идеал в L, является инертным множеством в E.*

Доказательство. По теореме 3.3, I – свободная алгебра, а QI – свободный $U(L/I)$-модуль. Так как $U(L/I)$ – свободный $U(E/I)$-модуль (по теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта), QI – свободный $U(E/I)$-модуль. Значит, I инертен в E по теореме 3.3.

лажа?

Минимальный набор образующих I как идеала в L можно дополнить до минимального набор образующих I как идеала в E. Подмножество инертного множества инертно. □

Доказательство теоремы 3.8. Пусть набор элементов $(r_i) \subset E$ инертен в L. Рассмотрим убывающую последовательность алгебр Ли $E^{(k)}$:

$$E^{(0)} = L, \quad E^{(k+1)} = E + I^{(k)},$$

где $I^{(k)}$ – идеал в $E^{(k)}$, порождённый множеством (r_i). По лемме 3.9, множество (r_i) инертно в каждой из $E^{(k)}$. Пусть I – идеал, порождённый (r_i) в E. Вложения

$$E \hookrightarrow E^{(k)}, \quad I \to I^{(k)}$$

– изоморфизмы в степенях $\le k$. Значит, то же верно для гомоморфизмов алгебр

$$U(E/I) \to U(E^{(k)}/I^{(k)}).$$

Из инертности $I^{(k)} \subset E^{(k)}$ получаем, что при $p + q < k$ верно: гомоморфизм

$$\mathrm{Tor}^{UE}_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \to \mathrm{Tor}^{U(E/I)}_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

инъективен при $p = 2$ и биективен при $p = 3$. Так как k произвольно, I – инертный идеал. Так как (r_i) – минимальный набор порождающих своего идеала в L, то же верно и для идеала в E. □

не дописал

4 Инертность элементов инертных идеалов

не дописал

5 Гомотопические группы "проколотых" многообразий

Мы завершаем эту работу результатом, показывающим замечательные примеры инертных гомотопических классов. Назовём *моногенной* ассоциативную градуированную алгебру, порождённую одним элементом. Если V – многообразие и $v \in V$, будем обозначать "проколотое" многообразие $V \setminus v$ как V°.

Теорема 5.1. *Пусть V – многообразие (или, более общо, $\mathbb{Q}$-комплекс Пуанкаре [6]), компактное, без границы, односвязное, n-мерное, и пусть $v \in V$. Тогда: если $H^*(V;\mathbb{Q})$ не моногенна, то вложение $V^\circ \hookrightarrow V$ индуцирует сюръекцию*

$$\pi(V^\circ) \to \pi(V).$$

Другими словами, класс вложения маленькой $(n-1)$-сферы, окружающей v, инертен в $\pi(V^\circ)$; или "приклеивание n-мерной клетки в минимальном клеточном разбиении V инертно".

В частном случае, когда V – формальное пространство, эта теорема принадлежит Л.Аврамову [3, теорема 7.5]: интересно заметить, что Аврамов вывел этот результат из свойств горенштейновых локальных колец с помощью "топологически – локально-алгебраического словаря", обнаруженного Дж.-Е. Роосом и дополнявшегося в течение трёх лет Аврамовым и Феликсом, среди прочих (см. [3], [4]). Теорема 5.1 также уточняет результат Сташеффа [19], по которому рациональный гомотопический тип V однозначно восстанавливается по рациональному типу V° и алгебре $H^*(V;\mathbb{Q})$. Наша теорема явно выражает алгебру $\pi(V)$ через $\pi(V^\circ)$, если $H^*(V;\mathbb{Q})$ не моногенна.

Если $H^*(V;\mathbb{Q})$ моногенна и имеет вид $P(x)/x^{m+1}$, клеточное рассуждение показывает, что $H^*(V^\circ;\mathbb{Q})$ тоже имеет вид $P(x)/x^m$. Пространства V, V° тем самым формальны и их алгебры Ли имеют вид

$$\pi(V) = \mathbb{Q}\cdot\alpha \oplus \mathbb{Q}\cdot\beta; \quad \pi(V^\circ) = \mathbb{Q}\cdot\alpha \oplus \mathbb{Q}\cdot\gamma,$$

где $|\alpha| = |x| - 1$, $|\beta| = (m+1)|x| - 2$, $|\gamma| = m|x| - 2$. Морфизм $\pi(V^\circ) \to \pi(V)$ отображает $\alpha \mapsto \alpha$, $\gamma \to 0$.

Наконец, если V – рациональная сфера, то V° рационально стягиваемо.

не дописал

Список литературы

[1] J. F. Adams and P. Hilton. *On the chain algebra of a loop space*, Comment. Math. Helv, 30 (1958), 305-330.

[2] D. Anick. *Non commutative algebras and their Hilbert series*, J. Algebra 78 (1982), 120-140.

[3] L. Avramov. *Local algebra and rational homotopy*, in *Homotopie Algébrique et Algèbre Locale*, Astérisque 113/114 (1984), 15-43.

[4] L. Avramov and S. Halperin. *Through the looking glass: a dictionary between local algebra and rational homotopy*, in *Algebra, Algebraic Topology and their Interaction*, Proc., Stockholm, 1983, ed. J.-E. Roos (Lecture Notes in Math. 1183), pp. 1-27, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1986.

[5] J. Backelin. *La serie de Poincaré-Betti d'un algèbre graduée de type fini à une relation est rationnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 287 (1978), 843-846.

[6] J. Barge. *Structures différentiables sur les types d'homotopie rationnelle simplement connexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1976), 469-501.

[7] F. Cohen, J. Moore and J. Neisendorfer. *Torsion in homotopy groups I*, Ann. of Math. 109 (1979), 121-168.

[8] Y. Félix and S. Halperin. *Rational L. S.-category and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 1-38.

[9] Y. Félix and J. C. Thomas. *Sur l'iopèration d'holonomie rationnelle*, in *Algebra, Algebraic Topology and their Interaction*, Proc., Stockholm, 1983, ed. J.-E. Roos (Lecture Notes in Math. 1183), pp. 136-169, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1986.

[10] D. Gottlieb. *Evaluation subgroups of homotopy groups*, Amer. J. Math. 91 (1969), 729-256.

[11] В. Е. Говоров. *О градуированных алгебрах*, Матем. заметки, 12:2 (1972), 197-204.

[12] S. Halperin. *Lectures on Minimal Models*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) 9/10 (1984), 1-261.

[13] J. Labute. *Algèbres de Lie et pro-p-groupes définis par une seule relation*, Invent. Math. 4 (1967), 142-158.

[14] J.-M. Lemaire. *Algèbres Connexes et Homologie des Espaces de Lacets* (Lecture Notes in Math. 422), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1974.

[15] J.-M. Lemaire. *"Autopsie d'un meurtre" dans une algèbre de chaînes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 (1978), 93-100.

[16] J. Milnor and J. C. Moore. *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. 81 (1965), 211-264.

[17] J. C. Moore. *Differential homological algebra*, in *Actes du Congrès Inernational des Mathématiciens* (Nice, 1970), Tome 1, pp. 335-339. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[18] D. Quillen. *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. 90 (1969), 205-295.

[19] J. Stasheff. *Rational Poincaré duality spaces*, Illinois J. Math. 27 (1983), 104-109.

[20] G. Viénnot, *Algèbres de Lie Libres et Monoides Libres* (Lecture Notes in Math. 691), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1978.