# О возможной связи между соотношениями в группах и алгебрах, связанных с флаговыми полиэдральными произведениями

Федор Вылегжанин

## 1 Предварительные сведения

### 1.1 Группы, связанные с полиэдральными произведениями

**Определение 1.1.** Пусть $G_1, \ldots, G_m$ – группы, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \ldots, m\}$. *Граф-произведением* набора $\underline{G}$, соответствующим $\mathcal{K}$, называется факторгруппа их свободного произведения по "соотношениям частичной коммутативности":

$$(\underline{G})^{\mathcal{K}} := \mathop{\ast}_{i=1}^{m} G_i / \left( g_i g_j = g_j g_i,\ g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \right).$$

**Пример 1.2.** Взяв в предыдущем определении $G_i = \mathbb{Z}$, получим *прямоугольную группу Артина*

$$\mathrm{RA}_{\mathcal{K}} := \langle g_1, \ldots, g_m \mid g_i g_j = g_j g_i,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \rangle;$$

взяв $G_i = \mathbb{Z}_2$, получим *прямоугольную группу Кокстера*

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} := \langle g_1, \ldots, g_m \mid g_i^2 = \mathrm{id},\ i = 1 \ldots m;\ g_i g_j = g_j g_i,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \rangle.$$

**Замечание 1.3.** Ясно, что граф-произведение зависит только от 1-остова $\mathcal{K}$, то есть от графа без кратных рёбер и петель; но с точки зрения торической топологии удобнее "не забывать" про грани старших размерностей.

### 1.2 Алгебры, связанные с полиэдральными произведениями

**Определение 1.4.** Градуированной *алгеброй* Ли будем называть обычную алгебру Ли, обладающую градуировкой (выполняется обычное тождество Якоби и обычная антикоммутативность $[y,x] = -[x,y]$).

Градуированной *суперагеброй* Ли назовём градуированную абелеву группу, снабжённую градуированно-антикоммутативной билинейной скобкой, удовлетворяющей градуированному тождеству Якоби:

$$[y,x] = -(-1)^{|x||y|}[x,y]; \quad [x,y+z] = [x,y]+[x,z]; \quad (-1)^{|x||z|}[x,[y,z]]+(-1)^{|x||y|}[y,[z,x]]+(-1)^{|y||z|}[z,[x,y]] = 0.$$

Например, если $X$ – топологическое пространство, то $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ – градуированная суперагебра Ли (вместе с произведением Самельсона, т.е. со смещённым произведением Уайтхеда).

Свободная алгебра Ли обозначается как $FL(u_1, \ldots, u_m)$; свободная суперагебра Ли – как $FSL(u_1, \ldots, u_m)$; свободная ассоциативная алгебра (т.е. тензорная алгебра) – как $T(u_1, \ldots, u_m)$. Их "суперкоммутативные версии" (в случае, когда $|u_i| = 1$) – внешняя ассоциативная алгебра $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$, которая является универсальной обёртывающей коммутативной алгебры Ли $CL(u_1, \ldots, u_m)$.

**Определение 1.5.** Над любым кольцом с единицей можно определить граф-произведение алгебр и суперагебр Ли:

$$L_{\mathcal{K}} := FL(u_1, \ldots, u_m) / \left( [u_i, u_i] = 0,\ i = 1 \ldots m;\ [u_i, u_j] = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \right);$$

$$SL_{\mathcal{K}} := FSL(u_1, \ldots, u_m) / \left( [u_i, u_i] = 0,\ i = 1 \ldots m;\ [u_i, u_j] = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \right);$$

**Предложение 1.6** ([?], Предложение 8.4.1)**.** *Имеем точную последовательность градуированных суперагебр Ли*

$$0 \to \pi_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(\Omega (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} \to CL(u_1, \ldots, u_m) \to 0$$

*и алгебр Понтрягина*

$$0 \to H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; k) \to H_*(\Omega (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; k) \to \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \to 0;$$

*$k$ – произвольное коммутативное кольцо с единицей.* $\square$

**Предложение 1.7** ([?]). *Если $\mathcal{K}$ флаговый, то $\pi_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}\simeq SL_\mathcal{K}$.* □

За счёт теоремы Милнора-Мура из этого предложения вытекает

**Следствие 1.8.** *Если $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле характеристики ноль, то*

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbb{F})\simeq U(SL_\mathcal{K})=T(u_1,\dots,u_m)/\left(u_i^2=0,\ i=1\dots m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right).$$

□

## 1.3 Образующие и соотношения (флаговый случай)

**Предложение 1.9** ([?], теорема 5.2). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда $\mathrm{Ker}((\underline{G})^\mathcal{K}\to\prod_{i=1}^m G_i)$ имеет минимальный набор образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*

$$(g_{k_1},(g_{k_2},\dots,(g_{k_{l-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$

*где $g_k\in G_k\setminus\{\mathrm{id}\}$, $k_1<\dots<k_{l-2}<j>i$, $k_s\neq i$, $\forall s$; $i$ – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей $j$.* □

Частный случай:

**Предложение 1.10** ([?], теорема 4.5). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда $\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$ имеет минимальный набор образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*

$$(g_{k_1},(g_{k_2},\dots,(g_{k_{l-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$

*где $g_k$ – $k$-ая образующая $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$, $k_1<\dots<k_{l-2}<j>i$, $k_s\neq i$, $\forall s$; $i$ – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей $j$.* □

**Предложение 1.11** ([?], теорема 4.3). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. $\mathrm{Ker}((\underline{G})^\mathcal{K}\to\prod_{i=1}^m G_i)$ свободна тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ – хордовый граф.* □

**Предложение 1.12** ([?], теорема 4.3). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле. Тогда $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ имеет минимальный набор мультипликативных образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*

$$[u_{k_1},[u_{k_2},\dots,[u_{k_{l-2}},[u_j,u_i]]\dots]],$$

*где $k_1<\dots<k_{l-2}<j>i$, $k_s\neq i$, $\forall s$; $i$ – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей $j$.* □

**Предложение 1.13** ([?]). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле. $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ свободна тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ – хордовый граф.* □

## 1.4 Мультиградуировка; ряды Пуанкаре

Под мультиградуировкой всегда будем понимать градуировку ассоциативной алгебры элементами полугруппы $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$. Базисные векторы обозначим как $e_1,\dots,e_m$; степень однородного элемента $a$ – как $|a|$. Если $J\subset[m]$, вместо степени $\sum_{j\in J}e_j\in\mathbb{N}^m_{\geq 0}$ будем писать просто "степень $J$". Часто, хотя и не всегда, алгебра будет порождена $m$ образующими, и $i$-ая образующая имеет степень $e_i$.

**Определение 1.14.** Пусть $V$ – мультиградуированное векторное пространство. Его *рядом Пуанкаре* будем называть формальный степенной ряд от $m$ переменных $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$

$$F(V;\lambda):=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m_{\geq 0}}\dim(V_\alpha)\cdot\lambda^\alpha,\quad \lambda^\alpha:=\prod_{i=1}^m\lambda_i^{\alpha_i e_i}.$$

Аналогично соглашению выше, если $J\subset[m]$, вместо $\lambda^{\sum_{j\in J}e_j}=\prod_{j\in J}\lambda_j$ будем писать просто $\lambda^J$.

Следующее почти очевидное предложение несколько раз используется в разделе 6.3.

**Предложение 1.15.** *Ряд Пуанкаре обладает следующими свойствами:*

1. $F(V_1\oplus V_2;\lambda)=F(V_1;\lambda)+F(V_2;\lambda)$;
2. $F(V_1\otimes V_2;\lambda)=F(V_1;\lambda)\cdot F(V_2;\lambda)$;

3. *Если* $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ *– точная последовательность алгебр Хопфа, то*

$$F(A_2;\lambda) = F(A_1;\lambda)\cdot F(A_3;\lambda).$$

*Доказательство.* Очевидно, если $\{v_i\}_{i\in I}$ – базис векторного пространства $V$, то $F(V;\lambda) = \sum_{i\in I}\lambda^{|v_i|}$.

1. Базис прямой суммы – это объединение базисов.
2. Базис тензорного произведения – это попарные тензорные произведения базисных векторов.
3. Как векторное пространство, расширение одной алгебры Хопфа с помощью другой – это тензорное произведение.

□

# 2 Обобщённое вложение Магнуса

Напомним, что имеют место следующие точные последовательности (групп и алгебр Ли):

$$1 \to \pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) \hookrightarrow (\mathbb{Z}_2)^\mathcal{K} \xrightarrow{\text{ab}} (\mathbb{Z}_2)^m \to 0,$$

$$0 \to \pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{F} \hookrightarrow SL^\mathcal{K} \xrightarrow{\text{ab}} CL(u_1,\dots,u_m) \to 0,$$

где

$$(\mathbb{Z}_2)^\mathcal{K} = F(g_1,\dots,g_m)/\left(g_i^2 = \text{id},\ i=1\dots m;\ (g_i,g_j)=\text{id},\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right),$$

$$SL^\mathcal{K} = FSL(u_1,\dots,u_m)/\left([u_i,u_i]=0,\ i=1\dots m;\ [u_i,u_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right).$$

## 2.1 Отображение Магнуса и нижний центральный ряд

Пусть $G$ – произвольная группа. Обозначим $(g,h) := g^{-1}h^{-1}gh$ для $g,h\in G$ и $(A,B) := \{(a,b):\ a\in A,\ b\in B\}$ для $A,B\subset G$.

**Определение 2.1.** *Нижний центральный ряд* группы определяется индуктивно:

$$\gamma_1(G) := G;\ \gamma_{n+1}(G) := (G,\gamma_n(G)).$$

**Предложение 2.2** ([?]). *Градуированная группа*

$$L(G) := \bigoplus_{k=1}^{\infty}\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$$

*абелева и обладает естественной структурой алгебры Ли: для элементов* $\alpha\in\gamma_k(G),\ \beta\in\gamma_l(G)$ *и их образов*

$$\alpha+\gamma_{k+1}(G)\in L_k(G),\ \beta+\gamma_{l+1}(G)\in L_l(G)$$

*определяем*

$$[\alpha+\gamma_{k+1}(G),\beta+\gamma_{l+1}(G)] := (\alpha,\beta)+\gamma_{k+l+1}(G)\in L_{k+l}(G).$$

*Её называют* присоединённой алгеброй Ли *группы* $G$.

Определим теперь вложение Магнуса. Пусть $X$ – фиксированное множество, $F(X)$ – свободная группа с базисом $X$. Рассмотрим кольцо $A = \mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ некоммутативных ассоциативных формальных степенных рядов от переменных $\alpha_x,\ \forall x\in X$ с градуировкой $\boxed{|\alpha_x| = 1,\ \forall x.}$ Это *пополнение* свободной ассоциативной алгебры $T(X)$ с базисом $X$, которая является универсальной обёртывающей свободной алгебры Ли $FL(X)$ : элементы $T(X)$ имеют тот же вид, что и элементы $A$, но там разрешены только конечные суммы. Элементы $FL(X)$ в $T(X)$ называются *лиевыми элементами.*

Группу обратимых элементов $A$ будем обозначать как $A^\times$; легко понять, что это в точности элементы со свободным членом $\pm1$.

**Определение 2.3.** *Вложение Магнуса* – это гомоморфизм $\mu : F(X)\to A^\times$, заданный на образующих как $x\mapsto 1+\alpha_x$.

То есть $\mu(x^{-1}) = 1 - \alpha_x + \alpha_x^2 - \dots$.

Каждому степенному ряду $\sigma \in A^\times \setminus \{1\}$, $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i$, $\sigma_i \in A_i$, сопоставим его *девиацию* – первое нетривиальное однородное слагаемое, отличное от 1. Запишем формулой:

$$\delta(\sigma) := \sigma_i, \text{ где } i = \min\{j \in \mathbb{N} : \ \sigma_j \neq 0\}.$$

По определению также положим $\delta(1) := 0$. Взятие девиации чем-то похоже на переход от фильтрованной алгебры к ассоциированной градуированной, где-то это даже формализовано (не помню, где).

Основной результат Магнуса следующий:

**Предложение 2.4** ([?]). *1. $\mu$ инъективно;*

*2. $\delta(\mu(w))$ – лиев элемент для любого $w \in F(X)$;*

*3. Сопоставление $w \mapsto \delta(\mu(w))$ индуцирует изоморфизм алгебр Ли $L(F(X)) \to FL(X)$.*

**Пример 2.5.** Рассмотрим элемент $w = z^{-1}xy^{-1}x^{-1}zyz^{-1}xyx^{-1}zy^{-1} \in F(x,y,z)$. Ясно, что он лежит в $\gamma_2(F(x,y,z))$; но лежит ли он в $\gamma_3$? в $\gamma_4$? Ответим на этот вопрос с помощью вложения Магнуса:

$$\mu(w) = (1+c)^{-1}(1+a)(1+b)^{-1}(1+a)^{-1}(1+c)(1+b)(1+c)^{-1}(1+a)(1+b)(1+a)^{-1}(1+c)(1+b)^{-1} = \dots$$

$$\dots = 1 - ab^2 + 2bab - b^2a + b^2c - 2bcb + cb^2 + [\text{мономы степеней } \geq 4].$$

Имеем

$$\delta(\mu(w)) = -ab^2 + 2bab - b^2a + b^2c - 2bcb + cb^2 = [b,[a,b]] + [b,[b,c]] \in FL_3(a,b,c) \setminus \{0\},$$

поэтому $w + \gamma_4(F(x,y,z)) \in L_3(F(x,y,z)) \setminus \{0\}$, то есть $w \in \gamma_3(F) \setminus \gamma_4(F)$.

С помощью вложения Магнуса можно указать некоторые соотношения в $L(G)$. А именно: пусть $G = \langle x_1,\dots,x_N \mid r_1,\dots,r_M\rangle$ – копредставление, $X := \{x_1,\dots,x_N\}$. Ясно, что сюръекция $\pi : F(X) \twoheadrightarrow G$ индукцирует $L(\pi) : FL(X) \twoheadrightarrow L(G)$, то есть некоторое копредставление алгебры Ли $L(G)$.

Каждому соотношению $r_i \in F(X)$ соответствует однородный элемент в $[r_i] \in FL(X)$ (более точно: если $r_i \in \gamma_k(F(X)) \setminus \gamma_{k+1}(F(X))$, то $[r_i] \in FL_k(X)$). Этот элемент лежит в ядре $L(\pi)$, то есть является соотношением в $L(G)$; его можно вычислить с помощью вложения Магнуса. В общем случае могут быть и другие соотношения.

## 2.2 Взвешенное отображение Магнуса

Рассмотрим обобщение классической конструкции, описанной выше. Пусть $G = \langle x_1,\dots,x_N \mid r_1,\dots,r_M\rangle$ – фиксированное копредставление, и выбраны элементы $d_1,\dots,d_N \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}$ – "степени образующих".

Градуируем алгебру $A = \mathbb{Z}\langle\langle a_1,\dots,a_N\rangle\rangle$ как $|a_i| := d_i$ и рассмотрим вложение Магнуса $F(X) \xrightarrow{\mu} A^\times$. Для слова $w \in F(X)$ формальный степенной ряд $\mu(w) \in A^\times$ теперь может иметь сильно больше однородных компонент, являющихся лиевыми элементами; возможно, есть способ формализовать это в форме некого гомоморфизма алгебр Ли, но пока это неясно.

## 2.3 Формулировка гипотезы

Вспомним, что образующие $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ имеют вид

$$\Gamma_{i\in J} = (g_{k_1}, (g_{k_2}, \dots, (g_{k_{s-2}}, (g_j, g_i))\dots))$$

для некоторых наборов $J = \{g_{k_1},\dots,g_{k_{s-2}}, g_j, g_i\} \subset [m]$ и вершин $i \in J$. Припишем образующей $\Gamma_{i\in J}$ степень $d_{i\in J} := \sum_{j\in J} e_j \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}$. Это даст $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$-градуировку на $\mathbb{Z}\langle\langle a_1,\dots,a_N\rangle\rangle$.

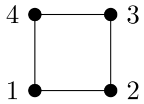
Также мы можем рассмотреть коммутаторную подалгебру $[L^{\mathcal{K}}, L^{\mathcal{K}}]$ в граф-алгебре Ли $L_{\mathcal{K}}$; "с точностью до знаков", она аналогична коммутаторной подалгебре Ли $[SL^{\mathcal{K}}, SL^{\mathcal{K}}] = \pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{F}$. Поэтому $[L^{\mathcal{K}}, L^{\mathcal{K}}]$ имеет базис такого же вида, что и $[SL^{\mathcal{K}}, SL^{\mathcal{K}}]$ : доказательство проходит по той же схеме. Этот базис имеет ту же мощность, что и набор образующих $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$; градуируем его тем же образом. Свободная ассоциативная алгебра $A = \mathbb{Z}\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$ – это универсальная обёртывающая свободной алгебры Ли $FL(a_1,\dots,a_N)$, которую можно отобразить в $L_{\mathcal{K}}$, задав тем самым $L_{\mathcal{K}}$ образующими и соотношениями. Это значит, что у лиевых элементов алгебры $A$ корректно определены образы в $L_{\mathcal{K}}$.

Из доказательства теоремы 3.6 ясно, что можно выбрать соотношения между образующими $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ так, что каждое соотношение "относится" к какому-то из полных подкомплексов $\mathcal{K}_J$, $J \subset [m]$.

**Гипотеза 2.6.** *Пусть соотношение $R \in F(X)$ в группе $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ относится к полному подкомплексу $\mathcal{K}_J$. Тогда градуированная компонента степенного ряда $\mu(R) \in A^\times$, имеющая степень $\sum_{j\in J} e_j$, – лиев элемент, который является соотношением в $L_{\mathcal{K}}$.*

## 2.4 Примеры

### 2.4.1 Граница квадрата




У коммутанта группы

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_i^2 = \mathrm{id};\ (g_1, g_2) = (g_2, g_3) = (g_3, g_4) = (g_4, g_1) = \mathrm{id} \rangle$$

две образующие

$$x_1 = (g_3, g_1),\ x_2 = (g_4, g_2)$$

и единственное соотношение

$$R_{1234} = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 \in F(x_1, x_2).$$

Имеем

$$\deg x_1 = e_3 + e_1 = (1,0,1,0),\ \deg x_2 = e_4 + e_2 = (0,1,0,1).$$

Слову $R_{1234}$ соответствует формальный степенной ряд

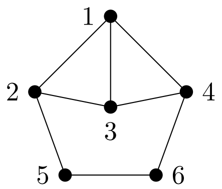
$$r_{1234} = (1+a_1)^{-1}(1+a_2)^{-1}(1+a_1)(1+a_2) = 1 + \underbrace{(a_1a_2 - a_2a_1)}_{\deg=(1,1,1,1)} + \underbrace{(a_1a_2a_1 - a_1a_1a_2)}_{\deg=(2,1,2,1)} + \underbrace{(a_2a_2a_1 - a_2a_1a_2)}_{\deg=(1,2,1,2)} + \cdots \in A^{\times}.$$

Взяв градуированную компоненту степени $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, получаем соотношение $a_1a_2 - a_2a_1$, то есть $[a_1, a_2] = 0$. Это действительно соотношение между $a_1 = [u_3, u_1]$ и $a_2 = [u_4, u_2]$ – образующими коммутаторной подалгебры в алгебре Ли

$$L_{\mathcal{K}} = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \mid [u_i, u_i] = \mathrm{id};\ [u_1, u_2] = [u_2, u_3] = [u_3, u_4] = [u_4, u_1] = 0 \rangle.$$

То же соотношение верно в $SL_{\mathcal{K}}$.

### 2.4.2 Комплекс $\mathcal{K}_3$




Это третий из десяти минимальных симплициальных комплексов, таких что в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ есть нетривиальные произведения Масси.

Образующие в $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ (для наглядности вместо некоторых $x_i$ пишем $y_i$ и $z_i$):

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = (g_5, g_1),\ \deg x_1 = (1,0,0,0,1,0); & y_1 = (g_2, (g_6, g_1)),\ \deg y_1 = (1,1,0,0,0,1); \\
x_2 = (g_6, g_1),\ \deg x_2 = (1,0,0,0,0,1); & y_2 = (g_3, (g_5, g_1)),\ \deg y_2 = (1,0,1,0,1,0); \\
x_3 = (g_4, g_2),\ \deg x_3 = (0,1,0,1,0,0); & y_3 = (g_3, (g_6, g_1)),\ \deg y_3 = (1,0,1,0,0,1); \\
x_4 = (g_6, g_2),\ \deg x_4 = (0,1,0,0,0,1); & y_4 = (g_4, (g_5, g_1)),\ \deg y_4 = (1,0,0,1,1,0); \\
x_5 = (g_5, g_3),\ \deg x_5 = (0,0,1,0,1,0); & y_5 = (g_5, (g_6, g_1)),\ \deg y_5 = (1,0,0,0,1,1); \\
x_6 = (g_6, g_3),\ \deg x_6 = (0,0,1,0,0,1); & y_6 = (g_3, (g_6, g_2)),\ \deg y_6 = (0,1,1,0,0,1); \\
x_7 = (g_5, g_4),\ \deg x_7 = (0,0,0,1,1,0); & y_7 = (g_2, (g_5, g_4)),\ \deg y_7 = (0,1,0,1,1,0); \\
z_1 = (g_2, (g_3, (g_6, g_1))),\ \deg z_1 = (1,1,1,0,0,1); & y_8 = (g_4, (g_6, g_2)),\ \deg y_8 = (0,1,0,1,0,1); \\
z_2 = (g_3, (g_4, (g_5, g_1))),\ \deg z_2 = (1,0,1,1,1,0); & y_9 = (g_4, (g_5, g_3)),\ \deg y_9 = (0,0,1,1,1,0); \\
z_3 = (g_3, (g_5, (g_6, g_1))),\ \deg z_3 = (1,0,1,0,1,1); & y_{10} = (g_5, (g_6, g_3)),\ \deg y_{10} = (0,0,1,0,1,1).
\end{array}
$$

Им соответствуют образующие в $L_{\mathcal{K}}:\ a_1, \dots, c_3$, которые получаются заменой $g_i$ на $u_i$, круглых скобок на квадратные.

Соотношения в фундаментальной группе (подкомплексов с нетривиальными $\Pi_1$ три: две границы пятиугольника и весь комплекс целиком):

$$R_{12456} = x_4 x_2 y_1^{-1} x_1^{-1} x_7 y_7^{-1} x_3^{-1} x_1 y_4^{-1} x_3 y_1 x_2^{-1} x_3^{-1} y_8 x_4^{-1} x_2 y_4 x_1^{-1} x_7^{-1} y_5 x_2^{-1} x_7 x_4 y_8^{-1} x_3 y_7 x_7^{-1} x_4 x_2 y_5^{-1} x_1 x_2^{-1},$$

$$R_{23456} = x_4 y_6^{-1} x_5^{-1} x_7 y_7^{-1} x_3 x_5^{-1} y_9^{-1} x_3 y_6 x_4^{-1} x_6^{-1} x_4 x_3^{-1} y_8 x_4^{-1} x_6 y_9 x_5^{-1} x_7^{-1} y_{10} x_6^{-1} x_7 x_4 y_8^{-1} x_3 y_7 x_7^{-1} x_4^{-1} x_6 y_{10}^{-1} x_5,$$

$$\begin{gathered} R_{123456} = x_4 y_6^{-1} x_2 y_1^{-1} z_1 y_3^{-1} y_2 x_1^{-1} x_5 - 1 x_7 y_7^{-1} x_3^{-1} x_5 y_9^{-1} x_1 y_2^{-1} z_2 y_4^{-1} x_3 y_3 z_1^{-1} y_1 \cdot \\ \cdot x_2^{-1} y_6 x_4^{-1} x_6^{-1} x_4 x_3^{-1} y_8 x_4^{-1} x_6 x_2 y_3^{-1} y_4 z_2^{-1} y_2 x_1^{-1} y_9 x_5^{-1} x_7^{-1} x_5 y_5 z_3^{-1} y_3 x_2^{-1} x_5^{-1} \cdot \\ \cdot y_{10} x_6^{-1} x_7 x_4 y_8^{-1} x_3 y_7 x_7^{-1} x_4^{-1} x_6 y_{10}^{-1} x_5 x_2 y_3^{-1} z_3 y_5^{-1} x_1 y_2^{-1} y_3 x_2^{-1}. \end{gathered}$$

Надо вычислить градуированные компоненты соответствующих степенных рядов:

$$r_{12456} = 1 + \underbrace{([a_1, b_8] - [a_2, b_7] - [a_3, b_5] - [a_4, b_4] + [a_7, b_1])}_{\mathrm{deg}=(1,1,0,1,1,1)} + \ldots,$$

$$r_{23456} = 1 + \underbrace{([a_3, b_{10}] + [a_4, b_9] - [a_5, b_8] + [a_6, b_7] - [a_7, b_6])}_{\mathrm{deg}=(0,1,1,1,1,1)} + \ldots,$$

$$r_{123456} = 1 + \cdots + \underbrace{(-[a_1, [a_3, a_6]] - [a_2, [a_3, a_5]] + [a_3, c_3] + [a_4, c_2] - [a_7, c_1] - [b_2, b_8] + [b_3, b_7] + [b_1, b_9] - [b_4, b_6])}_{\mathrm{deg}=(1,1,1,1,1,1)} + \ldots$$

Вычисления (с помощью пакета SuperLie для Wolfram Mathematica) показывают, что выражения в скобках действительно являются соотношениями в $L_{\mathcal{K}}$.

В $SL_{\mathcal{K}}$ верны похожие тождества, где у некоторых слагаемых другие знаки:

$$[a_1, b_8] + [a_2, b_7] + [a_3, b_5] + [a_4, b_4] - [a_7, b_1] = 0,$$

$$[a_3, b_{10}] + [a_4, b_9] - [a_5, b_8] + [a_6, b_7] + [a_7, b_6] = 0,$$

$$-[a_1, [a_3, a_6]] + [a_2, [a_3, a_5]] + [a_3, c_3] + [a_4, c_2] + [a_7, c_1] - [b_2, b_8] + [b_3, b_7] + [b_1, b_9] + [b_4, b_6] = 0.$$