О возможной связи между соотношениями в группах и алгебрах, связанных с флаговыми полиэдральными произведениями

Федор Вылегжанин

0.1 Группы, связанные с полиэдральными произведениями

Определение 0.1. Пусть $G_1, \dots, G_m$ – группы, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. *Граф-произведением групп* называется группа

$$(\underline{G})^{\mathcal{K}} := \mathop{\ast}_{i=1}^{m} G_i / \left(g_i g_j = g_j g_i,\ g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \right).$$

Ясно, что граф-произведение зависит только от 1-остова $\mathcal{K}$.

Определение 0.2. Взяв в предыдущем определении $G_i = \mathbb{Z}_2$, получим *прямоугольную группу Кокстера*

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} := \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = \mathrm{id},\ i = 1 \dots m;\ g_i g_j = g_j g_i,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \rangle.$$

Предложение 0.3 ([?, ?]). *Пусть $G_1, \dots, G_m$ – топологические группы, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Тогда есть каноническое гомотопическое расслоение*

$$(E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}} \to (B\underline{G})^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} BG_i.$$

□

Следствие 0.4 ([?], теорема 3.2). *Пусть $G_1, \dots, G_m$ – дискретные группы. Тогда*

1. $\pi_1((B\underline{G})^{\mathcal{K}}) \simeq (\underline{G})^{\mathcal{K}}$;
2. $\pi_k((B\underline{G})^{\mathcal{K}}) \simeq \pi_k((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}),\ k \geq 2$;
3. $(E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}$ *и* $(B\underline{G})^{\mathcal{K}}$ *асферичны тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ флаговый;*
4. *Имеем точную последовательность фундаментальных групп*

$$1 \to \pi_1((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}) \to (\underline{G})^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\pi} \prod_{i=1}^{m} G_i \to 0.$$

□

Если все G_i абелевы, то в последней точной последовательности π – это абелианизация. Поэтому в этих случаях

$$\pi_1((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}) \simeq ((\underline{G})^{\mathcal{K}})'.$$

Тем самым с помощью полиэдральных произведений можно изучать коммутанты граф-произведений абелевых групп, или, в общем случае, *декартовы подгруппы* $\mathrm{Ker}((\underline{G})^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} G_i)$.

Рассмотрение частного случая $G_i = \mathbb{Z}_2$ даёт

Следствие 0.5. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда*

1. $\pi_1((\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}) \simeq \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$;
2. $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ *и* $(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}$ *асферичны;*
3. $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \simeq \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, а пара (D^1, S^0) гомотопически эквивалентна паре $(S^\infty, S^0) = (E\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$. □

0.2 Алгебры, связанные с полиэдральными произведениями

Определение 0.6. Градуированной *алгеброй* Ли будем называть обычную алгебру Ли, обладающую градуировкой (выполняется обычное тождество Якоби и обычная антикоммутативность $[y,x]=-[x,y]$).

Градуированной *суперaлгеброй* Ли назовём градуированную абелеву группу с градуированно-антикоммутативной скобкой и градуированным тождеством Якоби:

$$[y,x]=-(-1)^{|x||y|}[x,y];\quad (-1)^{|x||z|}[x,[y,z]]+(-1)^{|x||y|}[y,[z,x]]+(-1)^{|y||z|}[z,[x,y]]=0.$$

Например, если X – топологическое пространство, то $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ – градуированная суперaлгебра Ли (вместе с произведением Самельсона, т.е. со смещённым произведением Уайтхеда).

Свободная алгебра Ли обозначается как $FL(u_1,\dots,u_m)$; свободная суперaлгебра Ли – как $FSL(u_1,\dots,u_m)$; свободная ассоциативная алгебра (т.е. тензорная алгебра) – как $T(u_1,\dots,u_m)$.

Определение 0.7. Над любым кольцом с единицей можно определить граф-произведение алгебр и суперaлгебр Ли:

$$L_{\mathcal{K}}:=FL(u_1,\dots,u_m)/\left([u_i,u_i]=0,\ i=1\dots m;\ [u_i,u_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right);$$
$$SL_{\mathcal{K}}:=FSL(u_1,\dots,u_m)/\left([u_i,u_i]=0,\ i=1\dots m;\ [u_i,u_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right);$$

Предложение 0.8 ([?], Предложение 8.4.1). *Имеем точную последовательность градуированных суперaлгебр Ли*

$$0\to\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})\otimes\mathbb{Q}\to\pi_*((\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}})\otimes\mathbb{Q}\to CL(u_1,\dots,u_m)\to 0$$

и алгебр Понтрягина

$$0\to H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};k)\to H_*((\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};k)\to\Lambda_k[u_1,\dots,u_m]\to 0;$$

k – произвольное коммутативное кольцо с единицей. □

Предложение 0.9 ([?]). *Если $\mathcal{K}$ флаговый, то $\pi_*((\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}})\otimes\mathbb{Q}\simeq SL_{\mathcal{K}}$.* □

За счёт теоремы Милнора-Мура из этого предложения вытекает

Следствие 0.10. *Если $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле характеристики ноль, то*

$$H_*((\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbb{F})\simeq T(u_1,\dots,u_m)/\left(u_i^2=0,\ i=1\dots m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right).$$

□

0.3 Образующие и соотношения (флаговый случай)

Предложение 0.11 ([?], теорема 5.2). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}})=\mathrm{Ker}((\underline{G})^{\mathcal{K}}\to\prod_{i=1}^m G_i)$ имеет минимальный набор образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*

$$(g_{k_1},(g_{k_2},\dots,(g_{k_{l-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$

где $g_k\in G_k\setminus\{\mathrm{id}\}$, $k_1<\dots<k_{l-2}<j>i$, $k_s\neq i$, $\forall s$; i – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей j. □

Частный случай:

Предложение 0.12 ([?], теорема 4.5). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})=\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ имеет минимальный набор образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*

$$(g_{k_1},(g_{k_2},\dots,(g_{k_{l-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$

где g_k – k-ая образующая $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$, $k_1<\dots<k_{l-2}<j>i$, $k_s\neq i$, $\forall s$; i – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей j. □

Предложение 0.13 ([?], теорема 4.3). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}})=\mathrm{Ker}((\underline{G})^{\mathcal{K}}\to\prod_{i=1}^m G_i)$ свободна тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ – хордовый граф.* □

Предложение 0.14 ([?], теорема 4.3). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле. Тогда $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{F})$ имеет минимальный набор мультипликативных образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*

$$[u_{k_1},[u_{k_2},\dots,[u_{k_{l-2}},[u_j,u_i]]\dots]],$$

где $k_1<\dots<k_{l-2}<j>i$, $k_s\neq i$, $\forall s$; i – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей j. □

Предложение 0.15 ([?]). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле. $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{F})$ свободна тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ – хордовый граф.* □

0.4 Мультиградуировка; ряды Пуанкаре

Определение 0.16. Пусть X – топологическое пространство. Его числа Бетти и эйлерова характеристика определяются как

$$b_i(X) := \dim H_i(X),\ \ \chi(X) := \sum_i (-1)^i b_i(X).$$

Определим также *приведённые* числа Бетти и эйлерову характеристику:

$$\widetilde{b}_i(X) := \dim \widetilde{H}_i(X),\ \ \widetilde{\chi}(X) := \sum_i (-1)^i \widetilde{b}_i(X).$$

Очевидно, $\widetilde{b}_i(X) = b_i(X)$ при $i \neq \{0,-1\}$; если $X \neq \varnothing$, то

$$\widetilde{b}_0(X) = b_0(X) - 1, \quad \widetilde{b}_{-1}(X) = b_{-1}(X) = 0.$$

Отдельно рассматривается случай $X = \varnothing$: имеем

$$\widetilde{b}_0(\varnothing) = b_0(\varnothing) = 0, \quad \widetilde{b}_{-1}(\varnothing) = 0,\ b_{-1}(\varnothing) = 1.$$

В любом случае $\widetilde{\chi}(X) = \chi(X) - 1$.

Под мультиградуировкой всегда будем понимать градуировку ассоциативной алгебры элементами полугруппы $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$. Базисные векторы обозначим как $e_1, \ldots, e_m$; степень однородного элемента a – как $|a|$. Если $J \subset [m]$, вместо степени $\sum_{j \in J} e_j \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}$ будем писать просто "степень J". Часто, хотя и не всегда, алгебра будет порождена m образующими, и i-ая образующая имеет степень e_i.

Определение 0.17. Пусть V – мультиградуированное векторное пространство. Его *рядом Пуанкаре* будем называть формальный степенной ряд от m переменных $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

$$F(V;\lambda) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}} \dim(V_\alpha) \cdot \lambda^\alpha, \quad \lambda^\alpha := \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\alpha_i e_i}.$$

Аналогично соглашению выше, если $J \subset [m]$, вместо $\lambda^{\sum_{j \in J} e_j} = \prod_{j \in J} \lambda_j$ будем писать просто λ^J. Следующее почти очевидное предложение несколько раз используется в разделе 6.3.

Предложение 0.18. *Ряд Пуанкаре обладает следующими свойствами:*

1. $F(V_1 \oplus V_2; \lambda) = F(V_1;\lambda) + F(V_2;\lambda)$;
2. $F(V_1 \otimes V_2; \lambda) = F(V_1;\lambda) \cdot F(V_2;\lambda)$;
3. *Если* $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ *– точная последовательность алгебр Хопфа, то*

$$F(A_2;\lambda) = F(A_1;\lambda) \cdot F(A_3;\lambda).$$

Доказательство. Очевидно, если $\{v_i\}_{i \in I}$ – базис векторного пространства V, то $F(V;\lambda) = \sum_{i \in I} \lambda^{|v_i|}$.

1. Базис прямой суммы – это объединение базисов.
2. Базис тензорного произведения – это попарные тензорные произведения базисных векторов.
3. Как векторное пространство, расширение одной алгебры Хопфа с помощью другой – это тензорное произведение.

$\square$

Напомним, что имеют место следующие точные последовательности (групп и алгебр Ли):

$$1 \to \pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) \hookrightarrow (\mathbb{Z}_2)^\mathcal{K} \xrightarrow{\mathrm{ab}} (\mathbb{Z}_2)^m \to 0,$$

$$0 \to \pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes \mathbb{F} \hookrightarrow SL^\mathcal{K} \xrightarrow{\mathrm{ab}} CL(u_1, \ldots, u_m) \to 0,$$

где

$$(\mathbb{Z}_2)^\mathcal{K} = F(g_1, \ldots, g_m) / \left(g_i^2 = \mathrm{id},\ i = 1 \ldots m;\ (g_i, g_j) = \mathrm{id},\ \{i,j\} \in \mathcal{K}\right),$$

$$SL^\mathcal{K} = FSL(u_1, \ldots, u_m) / \left([u_i, u_i] = 0,\ i = 1 \ldots m;\ [u_i, u_j] = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}\right).$$

0.5 Отображение Магнуса и нижний центральный ряд

Пусть G – произвольная группа. Обозначим $(g,h) := g^{-1}h^{-1}gh$ для $g,h \in G$ и $(A,B) := \{(a,b):\ a \in A,\ b \in B\}$ для $A, B \subset G$.

Определение 0.19. *Нижний центральный ряд* группы определяется индуктивно:

$$\gamma_1(G) := G;\ \gamma_{n+1}(G) := (G, \gamma_n(G)).$$

Предложение 0.20 ([?]). *Градуированная группа*

$$L(G) := \bigoplus_{k=1}^{\infty} \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$$

обладает естественной структурой алгебры Ли относительно группового коммутатора. Её называют присоединённой алгеброй Ли *группы G.*

Определим теперь вложение Магнуса. Пусть X – фиксированное множество, $F(X)$ – свободная группа с базисом X. Рассмотрим кольцо $A = \mathbb{Z}\langle\langle X\rangle\rangle$ некоммутативных ассоциативных формальных степенных рядов от переменных α_x, $\forall x \in X$ со стандартной $\mathbb{N}_{\geq 0}$-градуировкой. Это свободная ассоциативная алгебра с базисом X; в частности, это универсальная обёртывающая свободной алгебры Ли $FL(X)$. Элементы $FL(X)$ в A называются *лиевыми элементами.*

Группу обратимых элементов A будем обозначать как $A^\times$.

Определение 0.21. *Вложение Магнуса* – это гомоморфизм $\mu : F(X) \to A^\times$, заданный на образующих как $x \mapsto 1 + \alpha_x$.

Каждому степенному ряду $\sigma \in A^\times \setminus \{1\}$ сопоставим его *девиацию* – первое нетривиальное однородное слагаемое, отличное от 1. Запишем формулой:

$$\delta(\sigma) := \sigma_i, \text{ где } i = \min\{j \in \mathbb{N}:\ \sigma_j \neq 0\}.$$

По определению также положим $\delta(1) := 0$.

Предложение 0.22 ([?]). *1. μ инъективно;*

2. Если $w \in F(X),\ w \neq \mathrm{id}$, то $\delta(\mu(w))$ – лиев элемент;

3. Сопоставление $w \mapsto \delta(\mu(w))$ индуцирует изоморфизм алгебр Ли $L(F(X)) \to FL(X)$.

Вложение Магнуса можно использовать на практике для поиска соотношений в присоединённых алгебрах Ли. А именно: пусть $G = \langle x_1, \ldots, x_N \mid r_1, \ldots, r_M\rangle$ – любое копредставление. Ясно, что сюръекция $\pi : F(X) \to G$ индукцирует $L(\pi) : FL(X) \to L(G)$, то есть некоторое копредставление алгебры Ли $L(G)$.

Каждому соотношению $r_i \in F(X)$ соответствует однородный элемент в $[r_i] \in FL(X)$ (более точно: если $r_i \in \gamma_k(F(X)) \setminus \gamma_{k+1}(F(X))$, то $[r_i] \in FL_k(X)$). Этот элемент лежит в ядре $L(\pi)$, то есть является соотношением в $L(G)$; его можно вычислить с помощью вложения Магнуса. В общем случае могут быть и другие соотношения.

0.6 Взвешенное отображение Магнуса

Рассмотрим обобщение классической конструкции, описанной выше. Пусть $G = \langle x_1, \ldots, x_N \mid r_1, \ldots, r_M\rangle$ – фиксированное копредставление, и выбраны элементы $d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}$ – “степени образующих”.

Градуируем алгебру $A = \mathbb{Z}\langle\langle a_1, \ldots, a_N\rangle\rangle$ как $|a_i| := d_i$ и рассмотрим вложение Магнуса $F(X) \xrightarrow{\mu} A^\times$. Для слова $w \in F(X)$ формальный степенной ряд $\mu(w) \in A^\times$ теперь может иметь сильно больше однородных компонент, являющихся лиевыми элементами; возможно, есть способ формализовать это в форме некого гомоморфизма алгебр Ли, но пока это неясно.

0.7 Формулировка гипотезы

Вспомним, что образующие $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ имеют вид

$$\Gamma_{i\in J} = (g_{k_1}, (g_{k_2}, \ldots, (g_{k_{s-2}}, (g_j, g_i)) \ldots))$$

для некоторых наборов $J = \{g_{k_1}, \ldots, g_{k_{s-2}}, g_j, g_i\} \subset [m]$. Припишем образующей $\Gamma_{i\in J}$ степень $d_{i\in J} := \sum_{j\in J} e_j \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}$. Это даст $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$-градуировку на $\mathbb{Z}\langle\langle a_1, \ldots, a_N\rangle\rangle$.

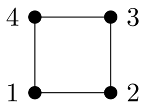
Также мы можем рассмотреть коммутаторную подалгебру $[L^{\mathcal{K}}, L^{\mathcal{K}}]$ в граф-алгебре Ли $L_{\mathcal{K}}$; "с точностью до знаков", она аналогична коммутаторной подалгебре Ли $[SL^{\mathcal{K}}, SL^{\mathcal{K}}] = \pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{F}$. Поэтому $[L^{\mathcal{K}}, L^{\mathcal{K}}]$ имеет базис такого же вида, что и $[SL^{\mathcal{K}}, SL^{\mathcal{K}}]$: доказательство проходит по той же схеме. Этот базис имеет ту же мощность, что и набор образующих $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$; градуируем его тем же образом. Свободная ассоциативная алгебра $A = \mathbb{Z}\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ – это универсальная обёртывающая свободной алгебры Ли $FL(a_1, \ldots, a_N)$, которую можно отобразить в $L^{\mathcal{K}}$, задав тем самым $L^{\mathcal{K}}$ образующими и соотношениями. Это значит, что у лиевых элементов алгебры A корректно определены образы в $L^{\mathcal{K}}$.

Из доказательства теоремы 3.6 ясно, что можно выбрать соотношения между образующими $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ так, что каждое соотношение "относится" к какому-то из полных подкомплексов $\mathcal{K}_J,\ J \subset [m]$.

Гипотеза 0.23. *Пусть соотношение $R \in F(X)$ в группе $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ относится к полному подкомплексу $\mathcal{K}_J$. Тогда градуированная компонента степенного ряда $\mu(R) \in A^\times$, имеющая степень $\sum_{j\in J} e_j$, – лиев элемент, который является соотношением в $L^{\mathcal{K}}$.*

0.8 Примеры

0.8.1 Граница квадрата



У коммутанта группы

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_i^2 = \mathrm{id};\ (g_1, g_2) = (g_2, g_3) = (g_3, g_4) = (g_4, g_1) = \mathrm{id}\rangle$$

две образующие

$$x_1 = (g_3, g_1),\ x_2 = (g_4, g_2)$$

и единственное соотношение

$$R_{1234} = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 \in F(x_1, x_2).$$

Имеем

$$\deg x_1 = e_3 + e_1 = (1, 0, 1, 0),\ \deg x_2 = e_4 + e_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Слову R_{1234} соответствует формальный степенной ряд

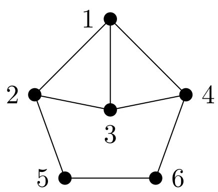
$$r_{1234} = (1+a_1)^{-1}(1+a_2)^{-1}(1+a_1)(1+a_2) = 1+\underbrace{(a_1a_2 - a_2a_1)}_{\deg=(1,1,1,1)}+\underbrace{(a_1a_2a_1 - a_1a_1a_2)}_{\deg=(2,1,2,1)}+\underbrace{(a_2a_2a_1 - a_2a_1a_2)}_{\deg=(1,2,1,2)}+\cdots \in A^\times.$$

Взяв градуированную компоненту степени $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, получаем соотношение $a_1a_2 - a_2a_1$, то есть $[a_1, a_2] = 0$. Это действительно соотношение между $a_1 = [u_3, u_1]$ и $a_2 = [u_4, u_2]$ – образующими коммутаторной подалгебры в алгебре Ли

$$L^{\mathcal{K}} = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \mid [u_i, u_i] = \mathrm{id};\ [u_1, u_2] = [u_2, u_3] = [u_3, u_4] = [u_4, u_1] = 0\rangle.$$

То же соотношение верно в $SL^{\mathcal{K}}$.

0.8.2 Комплекс $\mathcal{K}_3$



Это третий из десяти минимальных симплициальных комплексов, таких что в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ есть нетривиальные произведения Масси.

Образующие в $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ (для наглядности вместо некоторых x_i пишем y_i и z_i):

$x_1 = (g_5, g_1),\ \deg x_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$; $\quad y_1 = (g_2, (g_6, g_1)),\ \deg y_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 1)$;

$x_2 = (g_6, g_1),\ \deg x_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$; $\quad y_2 = (g_3, (g_5, g_1)),\ \deg y_2 = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$;

$x_3 = (g_4, g_2),\ \deg x_3 = (0, 1, 0, 1, 0, 0)$; $\quad y_3 = (g_3, (g_6, g_1)),\ \deg y_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$;

$$
\begin{array}{ll}
x_4=(g_6,g_2),\ \deg x_4=(0,1,0,0,0,1); & y_4=(g_4,(g_5,g_1)),\ \deg y_4=(1,0,0,1,1,0);\\
x_5=(g_5,g_3),\ \deg x_5=(0,0,1,0,1,0); & y_5=(g_5,(g_6,g_1)),\ \deg y_5=(1,0,0,0,1,1);\\
x_6=(g_6,g_3),\ \deg x_6=(0,0,1,0,0,1); & y_6=(g_3,(g_6,g_2)),\ \deg y_6=(0,1,1,0,0,1);\\
x_7=(g_5,g_4),\ \deg x_7=(0,0,0,1,1,0); & y_7=(g_2,(g_5,g_4)),\ \deg y_7=(0,1,0,1,1,0);\\
z_1=(g_2,(g_3,(g_6,g_1))),\ \deg z_1=(1,1,1,0,0,1); & y_8=(g_4,(g_6,g_2)),\ \deg y_8=(0,1,0,1,0,1);\\
z_2=(g_3,(g_4,(g_5,g_1))),\ \deg z_2=(1,0,1,1,1,0); & y_9=(g_4,(g_5,g_3)),\ \deg y_9=(0,0,1,1,1,0);\\
z_3=(g_3,(g_5,(g_6,g_1))),\ \deg z_3=(1,0,1,0,1,1); & y_{10}=(g_5,(g_6,g_3)),\ \deg y_{10}=(0,0,1,0,1,1).
\end{array}
$$

Им соответствуют образующие в $L^{\mathcal{K}}:\ a_1,\dots,c_3$, которые получаются заменой g_i на u_i, круглых скобок на квадратные.

Соотношения в фундаментальной группе (подкомплексов с нетривиальными Π_1 три: две границы пятиугольника и весь комплекс целиком):

$$R_{12456}=x_4x_2y_1^{-1}x_1^{-1}x_7y_7^{-1}x_3^{-1}x_1y_4^{-1}x_3y_1x_2^{-1}x_3^{-1}y_8x_4^{-1}x_2y_4x_1^{-1}x_7^{-1}y_5x_2^{-1}x_7x_4y_8^{-1}x_3y_7x_7^{-1}x_4x_2y_5^{-1}x_1x_2^{-1},$$

$$R_{23456}=x_4y_6^{-1}x_5^{-1}x_7y_7^{-1}x_3x_5^{-1}y_9^{-1}x_3y_6x_4^{-1}x_6^{-1}x_4x_3^{-1}y_8x_4^{-1}x_6y_9x_5^{-1}x_7^{-1}y_{10}x_6^{-1}x_7x_4y_8^{-1}x_3y_7x_7^{-1}x_4^{-1}x_6y_{10}^{-1}x_5,$$

$$R_{123456}=x_4y_6^{-1}x_2y_1^{-1}z_1y_3^{-1}y_2x_1^{-1}x_5{-}1x_7y_7^{-1}x_3^{-1}x_5y_9^{-1}x_1y_2^{-1}z_2y_4^{-1}x_3y_3z_1^{-1}y_1\cdot$$
$$\cdot x_2^{-1}y_6x_4^{-1}x_6^{-1}x_4x_3^{-1}y_8x_4^{-1}x_6x_2y_3^{-1}y_4z_2^{-1}y_2x_1^{-1}y_9x_5^{-1}x_7^{-1}x_5y_5z_3^{-1}y_3x_2^{-1}x_5^{-1}\cdot$$
$$\cdot y_{10}x_6^{-1}x_7x_4y_8^{-1}x_3y_7x_7^{-1}x_4^{-1}x_6y_{10}^{-1}x_5x_2y_3^{-1}z_3y_5^{-1}x_1y_2^{-1}y_3x_2^{-1}.$$

Надо вычислить градуированные компоненты соответствующих степенных рядов:

$$r_{12456}=1+\underbrace{([a_1,b_8]-[a_2,b_7]-[a_3,b_5]-[a_4,b_4]+[a_7,b_1])}_{\deg=(1,1,0,1,1,1)}+\dots,$$

$$r_{23456}=1+\underbrace{([a_3,b_{10}]+[a_4,b_9]-[a_5,b_8]+[a_6,b_7]-[a_7,b_6])}_{\deg=(0,1,1,1,1,1)}+\dots,$$

$$r_{123456}=1+\dots+\underbrace{(-[a_1,[a_3,a_6]]-[a_2,[a_3,a_5]]+[a_3,c_3]+[a_4,c_2]-[a_7,c_1]-[b_2,b_8]+[b_3,b_7]+[b_1,b_9]-[b_4,b_6])}_{\deg=(1,1,1,1,1,1)}+\dots$$

Вычисления (с помощью пакета SuperLie для Wolfram Mathematica) показывают, что выражения в скобках действительно являются соотношениями в $L^{\mathcal{K}}$.

В $SL^{\mathcal{K}}$ верны похожие тождества, где у некоторых слагаемых другие знаки:

$$[a_1,b_8]+[a_2,b_7]+[a_3,b_5]+[a_4,b_4]-[a_7,b_1]=0,$$

$$[a_3,b_{10}]+[a_4,b_9]-[a_5,b_8]+[a_6,b_7]+[a_7,b_6]=0,$$

$$-[a_1,[a_3,a_6]]+[a_2,[a_3,a_5]]+[a_3,c_3]+[a_4,c_2]+[a_7,c_1]-[b_2,b_8]+[b_3,b_7]+[b_1,b_9]+[b_4,b_6]=0.$$